

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

**KARA DELİKLERDE
ENERJİ AKTARIM SÜREÇLERİ**

İsmail ÖZBAKIR

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Kadri YAKUT

Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 402.01.01

Sunuş Tarihi: 15.08.2014

Bornova-İZMİR

2014

İsmail Özbakır tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan “Kara Deliklerde Enerji Aktarım Süreçleri” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 15 Ağustos 2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

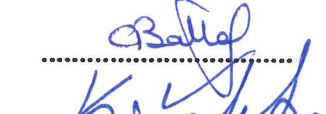
Jüri Üyeleri:

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Doğan Demichen

Raportör Üye: Prof. Dr. Can Battal Kılıç

Üye : Prof. Dr. Kadri Yakut

İmza


EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kara Deliklerde Enerji Aktarım Süreçleri” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

15 / 08 / 2014

İmzası

Adı-Soyadı : İsmail Özbakır

ÖZET**KARA DELİKLERDE ENERJİ AKTARIM SÜREÇLERİ**

ÖZBAKIR, İsmail

Yüksek Lisans Tezi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Kadri YAKUT

Ağustos 2014, 93 sayfa

Kara delikler bugün varlıkları geniş bilimsel çevrelerce kabul gören ve bazı yüksek enerjili süreçlerde önemli rol oynayan astrofiziksel yapılardır. Aktif gökada merkezlerinde ve X-ışın çiftlerinin farklı dalga boylarındaki gözlemleri dönen kara deliklerin varlığını güçlü olarak desteklemektedir. Dönen kara deliklerin parçacıklarla etkileşimini anlamak amacıyla bu cisimler etrafındaki parçacık hareket denklemlerine bakılması gereklidir. Dönen kara deliklerin geometrik yapıları, çevrelerindeki parçacık hareket denklemleri ve enerji aktarım süreçleri bu tezin araştırma alanlarını oluşturur. Tez kapsamında dönen kara deliklerle karşılaştırma olması amacıyla dönmeyen kara delik çözümleri de verilmiştir. Ayrıca dönen kara deliklerin geometrik yapısını betimleyen Kerr metriği kullanılarak parçacık yörünge hareketleri incelenmiştir. Daha sonra enerji aktarım süreçlerinden biri olan “Penrose süreci” ayrıntılı olarak irdelenmiştir.

Anahtar sözcükler: astrofizik, dönen kara delikler, Kerr metriği, hareket denklemleri, enerji aktarım süreçleri, Penrose süreci, Schwarzschild metriği.

ABSTRACT**ENERGY EXTRACTION PROCESSES in BLACK HOLES**

ÖZBAKIR, İsmail

MSc in Astronomy and Space Sciences

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Kadri YAKUT

August 2014, 93 pages

Black holes, whose existence are widely accepted by scientific committees, are astrophysical objects that are important in many high-energy processes. Observation active galactic nuclei and X-ray binaries in different wavelengths of electromagnetic spectrum support their existence. To understand the interaction between rotating black holes and particles it is important to study the equation of motion of particles orbiting a black hole. In this thesis, the geometrical structure of rotating black holes, equation of motion of particles that orbiting a black hole and energy transfer processes are handled. Non-rotating black holes are also studied to compare the differences between the rotating ones. Using Kerr metrics, that defines the geometrical structure of rotating black holes, a particle's trajectory motion has been studied, as well. Finally, Penrose process, that is one of the energy extracting processes, has been studied in details.

Keywords: astrophysics, rotating black holes, Kerr metric, equations of motion, energy extracting processes, Penrose process, Schwarzschild metric.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında başta kıymetli görüş ve tecrübelerinden yararlandığım ayrıca çalışmalarım boyunca beni hep destekleyen değerli danışmanım Prof. Dr. Kadri Yakut'a, maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım. Bu çalışma TÜBİTAK 111T270 ve 113F097 nolu projeler kapsamında desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvi
1. GİRİŞ	1
2. DÖNMEYEN KARA DELİKLER	3
2.1 Eddington-Finkelstein Koordinat Sistemi	4
2.2 Zaman Genişlemesi.....	5
2.3 Schwarzschild Metriğinde Statik Gözlemciler	6
2.4 Reissner-Nördström Kara Delikleri	7
3. DÖNEN KARA DELİKLER	8
3.1 Kerr Metriği.....	9
3.2 Dönen Kara Deliklerin Geometrik Özellikleri	11
3.3 Kerr Metriğinde Killing Vektörleri ve Geodezik Denklemleri	15
3.4 Kerr Metriğinde Temel (Principal) Null Geodezikler	22
3.5 Kerr-Schild Koordinat Sistemi	24
3.6 Ergosfer	28
3.7 Olay Ufku	34

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
4. KARA DELİKLERDE DÖNME ENERJİSİ ve ENERJİ AKTARIM SÜREÇLERİ	38
4.1 Radyal Hareket.....	39
4.2 Etkin Potansiyel	39
4.3 Çerçeve Sürüklenmesi (<i>Frame Dragging</i>)	40
4.4 Sıfır Açıl Momentum Gözlemcileri (<i>ZAMOs</i>).....	45
4.5 Negatif Enerjili Yörüngeler	47
4.6 Penrose Enerji Aktarım Süreci.....	49
4.7 Blandford – Znajek Süreci.....	56
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	59
EK AÇIKLAMALAR –A	
Δ Fonksiyonunun r_- ve r_+ ile İlişkilendirilmesi.....	61
EK AÇIKLAMALAR –B	
B1.) Lagrangian Fonksiyonu	62
B2.) Christoffel Sembolleri	64
B3.) Geodezik Hareket Denklemi.....	65
EK AÇIKLAMALAR –C	
Hamilton Fonksiyonu.....	66

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

EK AÇIKLAMALAR –D

Rölativistik Enerji..... 71

EK AÇIKLAMALAR –E

Genelleştirilmiş Momentum..... 73

EK AÇIKLAMALAR –F

(3.26) Eşitliğinin Türetilmesi 76

EK AÇIKLAMALAR –G

Geodezik Teğet Vektör Bileşenleri 77

EK AÇIKLAMALAR –H

Baz Vektörlerinin Birbirleri Arasında Dual İlişkisi 78

EK AÇIKLAMALAR –I

$r_- < r < r_+$ Aralığında r Koordinatının Değişimi..... 83

EK AÇIKLAMALAR –J

Killing Vektörleri 85

KAYNAKLAR DİZİNİ 86

ÖZGEÇMİŞ 92

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 Kartezyen koordinatlarda Kerr metriğinden elde edilen geometrik biçimini gösteren grafik	12
3.2 Dönme parametresi $a = 0$ olan bir kara deliğin grafiği	13
3.3 Farklı “ a ” ve değerlerine göre ergosfer, iç ve dış olay-ufku yüzeylerinin grafikleri.....	14
3.4 Ekvatorial düzlemde ($\theta=\pi/2$), $a = m = 1$ dönme parametrelili bir kara deliğin, dış olay-ufku ile ergosfer yüzeyi arasında g^{tt} bileşeninin değişimi	32
3.5 Ekvatorial düzlemde ($\theta=\pi/2$), $a = m = 1$ dönme parametrelili bir kara deliğin, dış olay-ufku ile ergosfer yüzeyi arasında (3.63) ifadesinin değişimi.....	33
3.6 Küresel koordinatlarda 2-boyutlu küresel yüzey grafiği.....	35
4.1 Ekvatorial düzlemde ($\theta=\pi/2$), $a = m = 1$ dönme parametrelili bir kara deliğin, dış olay-ufku ile ergosfer yüzeyi arasında (4.28a) ifadesinin değişimi	50
H.1 İki boyutlu uzayda Kartezyen (x, y) koordinatlardan kutupsal (r, θ) koordinatlara dönüşüm grafiği	78
H.2 Bir M manifoldundaki p ve q noktalarına teğet vektörlerinin grafiği	80

1.GİRİŞ

Newton çekim kuramı, gök cisimlerinin kütleleri ve boyutları ile ilişkili olarak belirli kaçma hızlarına sahip olduklarını öngörüyordu. Buna göre; gerekli kaçma hızına sahip ya da daha hızlı olan bir cisim, kendisini çeken gök cisiminden kurtulabilirdi. Bu kuramdan yola çıkarak 1795 yılında Pierre Laplace, yeterince kütleli ve yoğun bir cisimden kurtulma hızının ışık hızını geçebileceğini düşündü. Böylelikle ışığın bile kaçamadığı “kara” cisimler kavramını, ilk defa ortaya atmıştır.

Albert Einstein 1916 yılında genel rölativite kuramını yayınladı. Bu yeni kuram; bu tür kara cisimlerin, sonsuz yoğunlukta ve sonsuz eğrilmiş tekil (*singularity*) uzay – zaman bölgeleri şeklinde oluşabileceğini öngörüyordu. Karl Schwarzschild 1916 yılında Einstein alan denklemlerinin ilk çözümünü elde etti (Schwarzschild, 1916). Bu çözüm ile kütleli statik bir cismin çevresindeki uzay – zaman bölgesi tanımlanmış oldu. Böyle bir uzay – zaman bölgesinde tanımlı kara deliğe *Schwarzschild Kara Deliği* denildi. Schwarzschild metriği, dönmeyen ve yüksüz kara delikleri tanımlıyordu.

Aynı yıllarda H. Reissner ve G. Nordström, dönmeyen fakat yüklü kara deliklerin metriğini oluşturdular (Nordström, 1918; Reissner, 1916). Bu metrik ile tanımlanan kara deliklere de *Reissner – Nordström Kara Deliği* denildi.

Gözlenen bir çok gök cismi dönme hareketi yaptığından kara deliklerin de bir açısal momentuma sahip olmaları gerektiği varsayıldı. Doğal olarak böyle kara delikleri tanımlamakta Schwarzschild metriği yetersiz kaldı. Dönen kütleli bir cismin çevresindeki uzay – zaman metriğini tanımlayan tam bir çözüm, uzun yıllar boyunca bulunamadı. Roy P. Kerr, yaptığı çalışmayla Einstein alan denklemlerinin dönen kütleli cisimler için tam bir çözümünü elde etti (Kerr, 1963). Bunu takip eden yıllarda dönen ve yüklü cisimlerin metriğini tanımlayan Kerr – Newman metriği elde edildi (Newman and Janis, 1965).

20. yüzyılın ilk yarısında kara delikler sadece teorik olarak çalışılan bir alandı. Sonraki yarısında gelişen gözlem teknikleriyle bazı ilginç enerjik süreçlerin olduğu astrofiziksel yapılar keşfedilmeye başlandı. Uzayda görece küçük bazı bölgelerden çok büyük enerjili parçacıkların (jet süreçleri)

püskürtüldükleri gözlemlendi. Özellikle aktif gökada çekirdekleri (AGN) olarak bilinen astrofiziksel yapıların merkezlerinde, bu enerjik süreçleri besleyen süper kütleli kara deliklerin olduğu önerildi. Buna göre kara deliğin dönme enerjisi, birtakım süreçlerle çevresindeki plazmaya aktarılarak parçacıkları rölativistik hızlara erişirmesi düşünülmüştür.

Kara deliklerin dönme enerjileriyle ilgili ilk çalışmalar *R. Penrose*' un önerdiği mekanizma ile başladı (Penrose, 1969). Bu süreçte temel olarak; ergosfere giren parçacığın bölünerek parçalardan birinin negatif enerji yörüngelerine oturmasıyla, kara deliğin enerjisinin bir kısmının (bölünen parçalardan birine) aktarılması öngörülmüştür. Bu süreç her ne kadar matematiksel bir alt yapıya dayansa da gözlemlerle uyumlu sonuçlar veremiyordu. Özellikle yüksek enerjili jet süreçlerini açıklamakta çok yetersiz kalıyordu. Daha sonraki yıllarda yapılan çalışmalar, kara deliğin elektromanyetik alanlarla etkileşerek enerjilerini aktarması fikri üzerinde yoğunlaşmıştır.

Bu tez çalışmasında dönen kara deliklerin geometrisi ve onlarla ilişkili olan enerji aktarım süreçlerine geçmeden önce dönmeyen kara delikler konusu, giriş şeklinde verildi. Ayrıca bu tür kara deliklerin parçacık hızlandırıcı süreçlerle ilişkili olabileceğini öngören bazı çalışmalara değinildi. Bölüm 4'te kara deliklerde indirgenemez kütlenin azalmayacağı ayrıntılı olarak gösterildi ve Penrose süreci detaylı olarak irdelendi. Ayrıca ikinci derece denklem çözümlerinde ve grafik çizimlerinde “*Wolfram Mathematica*” programından yararlanılmıştır.

2. DÖNMEYEN KARA DELİKLER

Kara delikler genel olarak üç parametre ile ifade edilirler. Bunlar kütle, açısal momentum ve elektriksel yüküdür. Bir uzay – zaman geometrisini tanımlayan metriğin katsayıları (metrik tensör bileşenleri) zamandan bağımsız ise “stasyoner – metrik” olarak tanımlanır. Buna ek olarak metrik tensörün matrisi köşegenel (*diagonal*) ise (yani $g_{t\varphi}dtd\varphi$ gibi çapraz terimler yoksa) bu metriğe “statik – metrik” denir.

Schwarzschild metriği, kütleli statik cisimlerin çevresindeki uzay – zaman eğriliğini tanımlar. Bu tür bir cisme örnek olarak dönmeyen bir yıldız veya dönmeyen bir kara delik verilebilir. *Schwarzschild Kara Deliği* olarak bilinen böyle bir kara deliğin elektrik yükü ve açısal momentumu sıfıra eşittir.

Schwarzschild metriği g_{ik} metrik tensör olmak üzere ($i, k = 0, 1, 2, 3$), küresel koordinat sisteminde $\{t, r, \theta, \phi\}$,

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (2.1)$$

olarak verilir¹. Burada $m \equiv MG/c^2$ ve $r_s := 2GM/c^2$; M, kütle; G, genel çekim sabiti; r_s , Schwarzschild yarıçapı; c, ışık hızı² ve $d\tau$ öz – zaman aralığını belirtir³. Böylelikle kütle ve uzunluk birimi birbiri cinsinden yazılabilir. Bu geometrinin, küresel simetrik statik – metrik olmasıyla birlikte sadece radyal bileşene bağlı olduğu görülmektedir. Buradan kütleli cisimden $r \rightarrow \infty$ uzaklaştıkça metriğin, Minkowski uzay – zaman geometrisine (düz uzay – zaman) dönüştüğü görülür.

¹ Burada verilen ve sonraki bölümlerde de kullanılan diğer metrik bileşenlerinde, $(- + + +)$ notasyonu kullanılmıştır.

² Sonraki bölümlerde $G=c=1$ şeklinde geometrikleştirilmiş birim kullanılacaktır.

³ Öz – zaman bir sistemdeki parçacıkların her biri için parçacığa ait bir zaman olarak tanımlanır. Bu olgu, parçacıklarla beraber hareket eden bir saatin ölçtüğü zaman gibi düşünülebilir.

Schwarzschild metriğinde $r \rightarrow r_s$ durumunda, $g_{11} \rightarrow \infty$ olur. Bu bize kara deliğin olay – ufku yarıçapını, $r = r_s = 2m$ olarak verir⁴.

Tanımlanan uzay – zaman geometrisinde oluşan tekillik (*singularity*), (bu bölgede eğrilik sonsuz olduğu için) kullanılan metriği tanımsız yapan bölge anlamına gelir. Ancak metrik üzerinde tanımsız yapan bölge gerçek bir tekillik olmayabilir. Eğer tekillik uygun koordinat dönüşümleri ile kaldırılabilirse, bu tekillik bölgesine “koordinat – tekilliği” denilir. Hiçbir koordinat dönüşümü ile tekillik kaldırılamıyorsa bu bölge, gerçek tekillik bölgesi olup *eğrilik – tekilliği* (*curvature – singularity*) olarak isimlendirilir.

2.1 Eddington – Finkelstein Koordinat Sistemi

Schwarzschild metriği, $r = 2m$ bölgesinde koordinat – tekilliğine sahiptir. Bu metrik, Eddington – Finkelstein koordinat sistemine dönüştürülerek koordinat tekilliği kaldırılabilir (Eddington, 1924; Finkelstein, 1958).

Eddington – Finkelstein koordinatları, içeriye yönlü ($r < 2m = r_s$) ve dışarıya ($r > 2m = r_s$) yönlü *null*⁵ geodeziklere⁶ bağlı iki parçalı bir koordinat sistemi oluşturur. İçeriye yönlü null geodezik durumu için koordinat dönüşümü, (2.2) ifadesiyle yapılarak diferansiyeli alınırsa (2.3) eşitliği elde edilir.

$$v(t, r) \equiv ct + r + 2m \ln |r/2m - 1| \quad (2.2)$$

$$dv = cdt + dr - dr(1 - r/2m)^{-1}$$

$$dv = cdt + dr(1 - 2m/r)^{-1} \quad (2.3)$$

Bu eşitlik, (2.1) denkleminde dt^2 'nin yerine yazılıp birkaç cebirsel işlemin ardından,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (2.4)$$

⁴ Dönen kara delikler konusunda Kerr metriğinden olay – ufku yarıçapı hesaplarken yine $g_{11} \rightarrow \infty$ koşulu dikkate alınacaktır.

⁵ *Null geodezik*, ışık gibi kütleli parçacıkların uzay – zamanda iki nokta arasında aldığı en kısa yola denir.

⁶ Bir uzay – zaman geometrisinde tanımlı herhangi iki nokta arasındaki en kısa yola “geodezik” denir (bazı Türkçe kaynaklarda jeodezik olarak da isimlendirilmektedir.). Parçacığa sadece gravitasyonel kuvvetin etki ettiği durumda, parçacık serbest düşüş hareketi yapar (*free falling*).

ifadesi olarak Eddington – Finkelstein koordinatlarına dönüştürülür⁷. Dolayısıyla Schwarzschild kara deliğinin $r = 2m$ koordinat bölgesindeki tekillik kaldırılmış olur.

Eşitlik (2.1) ve (2.4)'te $r = 0$ sıfır için başka bir tekillik daha vardır. Koordinat dönüşümleri ile kaldırılamayan bu tekillik, dönmeyen kara deliklerin gerçek tekillik bölgesidir ve geometrik olarak noktasaldır.

2.2 Zaman Genişlemesi

Kara delikten uzaktaki statik bir gözlemcinin ölçtüğü zaman dt ile deliğe yaklaşan gözlemcinin zamanı $d\tau$ arasında rölativistik bir fark oluşur. Zaman genişlemesi olarak bilinen bu etkiye göre; Schwarzschild kara deliğine yaklaşan gözlemci için zaman, kara delikten daha uzaktaki gözlemciye göre daha yavaş akar. Statik bir gözlemcinin ölçtüğü öz – zaman $d\tau$ olmak üzere zaman genişlemesi, (2.5) denklemi ile ifade edilir.

$$dt = (1 - 2m/r)^{-1/2} d\tau \quad (2.5)$$

Zaman genişlemesi, gravitasyonel kırmızıya kayma etkisi ile ilişkilidir. Bu durum genellikle şöyle bir düşünce deneyi yapılarak ifade edilebilir. Bir Schwarzschild kara deliğinden farklı radyal uzaklıklarda bir verici ve bir alıcı statik olarak bulunsun. Bu verici ve alıcının bulundukları radyal koordinata göre ölçtükleri öz – zamanlar sırasıyla $d\tau_V$ ve $d\tau_A$ olsun. Vericiden eşit $d\tau_V$ zaman aralıklarıyla sinyal gönderilsin. Alıcı, gelen sinyalleri $d\tau_A$ zaman aralıklarıyla alır. $\Delta\tau_V$ zaman aralığında gönderilen sinyal sayısı n olmak üzere, vericinin ölçtüğü sinyallerin frekansı $\nu_V \equiv n/\Delta\tau_V$ olur. Alıcının ölçtüğü frekans sayısı da “ n ” olur. Ancak farklı zaman aralıklarında ölçtüğü için sinyallerin frekansı $\nu_A \equiv n/\Delta\tau_A$ ile verilir. Buradan sinyalin gravitasyonel kırmızıya kayması, (2.6) ifadesi ile hesaplanabilir.

$$\frac{\nu_A}{\nu_V} = \left(\frac{1 - 2m/r_V}{1 - 2m/r_A} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

Bu sonuca göre verici kara deliğe yaklaştıkça alıcının ölçtüğü sinyal daha çok kırmızıya kayacaktır. Eğer $r_V = 2m$ olursa, ölçülen kırmızıya kayma sonsuz (*infinite red – shift*) olacaktır.

⁷ Eddington – Finkelstein koordinat dönüşümlerinin detaylı anlatımı için bkz. (Carroll, 2003; Grøn and Sigbjørn Hervik, 2007)

Schwarzschild metriğinin g_{rr} bileşenini sonsuza götüren $r = 2m$ değeri, aynı metriğin g_{tt} bileşenini sıfır yapar. Bu nedenle statik gözlemciye göre kara deliğin olay ufkuyla ulaşan cisimden gelen sinyallerin; (2.5) ve (2.6) eşitlikleri yardımıyla sonsuz – kırmızıya kaydığı görülmektedir. Schwarzschild metriği, $g_{rr} \rightarrow \infty$ bölgesinde iki önemli özelliğe sahip olan bir uzay zaman bölgesine dönüşür. Bunlardan ilki, bu yüzeyin sonsuz kırmızıya kayma bölgesi olmasıdır. Diğeri ise aynı yüzey bölgesinin *tek – yön geçirgen zar*⁸ (*one – way membrane*) gibi davranmasıdır. Bu nedenle dönmeyen kara delik olan Schwarzschild kara deliğinde olay – ufku ile sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi aynı radyal uzaklıkta yer alır.

Bu iki özelliğin keyfi bir metrikte; aynı bölgede bulunup bulunmadığının incelenebilmesi için, Killing – vektörlerinin statik ya da stasyoner metrik durumlarıyla olan ilişkilerine bakılmalıdır (Vishveshwara, 1968).

2.3 Schwarzschild Metriğinde Statik Gözlemciler

Statik bir gözlemci sadece zaman koordinatında hareket eder. Bu gözlemcinin uzaysal koordinatları, eylemsiz bir referans sistemine göre sabit olur⁹. Bu koşul altında zamansal¹⁰ (*timelike*) gözlemciler için (2.1) ifadesi,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 < 0 \Rightarrow g_{00} < 0 \quad (2.7)$$

eşitsizliğini sağlar. Ancak $r = 2m$ bölgesinde $g_{00} = 0$ olduğundan gözlemci burada statik olamaz. Çünkü aynı noktada $dr, d\theta$ veya $d\phi$ sıfır olamayacağı için uzaysal koordinatlarda hareket etmek zorunda kalır.

Olay – ufkunun içerisinde, metrik tensörün zaman bileşeni $g_{00} > 0$ olur. Bu durumda olay – ufkundan giren bir parçacık, içeride uzaysal (*spacelike*) olarak, $r = 0$ gerçek tekillik bölgesine ulaşmaya kadar hareket eder. Gözlemcinin statik

⁸ Tek yön geçirgen zar tanımıyla, kara deliğin olay ufkunun sadece içeriye doğru geçişi izin verdiği, dolayısıyla null yüzey olduğu kastedilir (çünkü olay – ufkunda kaçma hızı, ışık hızına eşittir). Bkz. (Finkelstein, 1958).

⁹ Metrik bileşenlerinin, $dt \neq 0$ ve $dr = d\theta = d\phi = 0$ durumuna karşılık gelir.

¹⁰ Tanımlanan bir uzay – zaman bölgesinde hareket eden serbest parçacıklar (kütleli veya kütsüz) *timelike*, *spacelike* veya *null* yolları takip eder. Bkz. (Carroll, 2003) ve (Dermer and Menon, 2009).

ya da stasyoner olarak bulunamadığı $r = 2m$ bölgesine, stasyoner limit yüzeyi denilir¹¹.

Schwarzschild metriği her ne kadar dönmeyen kara deliklerin geometrisini tanımlasa da, yavaş dönen kara deliklerin uzay – zaman geometrisi için de belirli bir yaklaşım yapılarak uygulanabilir¹².

2.4 Reissner – Nördström Kara Delikleri

Dönmeyen ve yüklü statik kara – delikler Reissner – Nördström metriği ile tanımlanır (Nordström, 1918; Reissner, 1916). Bu metrik Einstein alan denklemlerinin tam bir çözümü olup,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.8)$$

ile tanımlanır. Burada $f(r) = 1 - 2m/r + Q^2/r^2$, $m = MG/c^2$ ve Q , yüküdür. Bu metrik, m kütlesi ve Q yüküne bağlı iki parametrelili bir çözümdür. Reissner – Nördström kara deliğinde olay ufku yerini belirlemek amacıyla (2.8) bağıntısı $f(r) = 0$ için çözüldüğünde,

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2} \quad (2.9)$$

eşitliği elde edilir. Eğer $m^2 > Q^2$ ise, iç ve dış olarak iki reel çözüme ulaşılır. Dış çözümden elde edilen uzay – zaman bölgesi küresel – simetrik, yüklü ve statik bir kara deliğin dış olay – ufku yüzeyini tanımlar. İç çözümden elde edilen uzay – zaman bölgesine ise “Cauchy olay – ufku” (*Cauchy – horizon*) denilir. Eğer $m^2 < Q^2$ ise (2.9) ifadesinden reel bir kök elde edilemez. Dolayısıyla olay – ufku bölgeleri ortadan kalkar. Bu durumda $r = 0$ noktasındaki tekilliğe doğru olan geodezik eğrileri zamansal (*timelike*) hale gelir. Dolayısıyla $r > r_+$ bölgesinde olan bir gözlemci için tekillik bölgesi açığa çıkar. Böyle bir tekil bölgeye çıplak – tekillik (*naked – singularity*) denir.

¹¹ Dönen kara deliklerde stasyoner limit yüzeyi, iç ve dış olarak ikiye ayrılır. Ayrıca bu yüzeyler kara deliğin olay – ufku bölgesinden de ayrı olarak bulunurlar. Bkz. (Misner, Thorne, and Wheeler, 1973).

¹² Dönen kara deliklerin tam bir çözümü 1963 de elde edildi. Daha önceleri, Schwarzschild metriği yardımıyla yavaş dönen bir kara delik için belirli yaklaşımlar kullanılarak geometri betimlenmeye çalışılıyordu. Bkz. (Visser, 2007; Witten, 1962)

3. DÖNEN KARA DELİKLER

Başta yıldızımız Güneş olmak üzere evrendeki gök cisimlerinin belirli bir açısal momentuma sahip olduğu bilinmektedir. Yeterince büyük kütleli bir yıldızın evrimi incelendiğinde; yıldızın evriminin son basamağında kalan kütlelin çökerek bir kara delik oluşturması, bilimsel olarak yaygın çevrelerce kabul edilen bir modeldir.

Yıldızların sahip olduğu açısal momentumun (dolayısıyla dönme enerjilerinin) bir kısmının evrimlerinin son basamağında da (çeşitli mekanizmalarla bir kısmını kaybetmeler de...) varlığını sürdürebileceği öngörülmektedir. Dolayısıyla açısal momentuma sahip olan kara deliklerin geometrisi, dönmeyen statik – kara deliklerden ayrılır. Çünkü dönmenin etkisiyle kara deliğin geometrisi eksenel – simetrik bir geometriye dönüşür.

Uzun yıllar boyunca Einstein alan denklemlerinin, böyle bir geometri için tam çözümleri bulunamamıştı. Rölativistik çekim etkilerinin ihmal edilebileceği Güneş (ve Güneş Sistemi) gibi gök cisimleri için Schwarzschild metriği, belirli bir yaklaşım yapılarak tanımlanabiliyordu (Visser, 2007). Ancak rölativistik etkilerin önemli olduğu gök cisimlerinde (kara delik, nötron yıldızı ve beyaz cüceler) bu yaklaşım, hata payı ihmal edilemeyecek kadar büyük oluyordu. Bu yüzden Einstein alan denklemlerinin dönen kütleli cisimler için tam bir çözümünün bulunması gerekiyordu.

Dönen bir kara delik, stasyoner eksenel – simetrik uzay – zaman metriğine sahip olması gerekir (Hawking, 1972). Bulunması gereken çözüm, kütlelin yanında açısal momentum parametresine de bağlı olmalıydı. Ayrıca açısal momentumun sıfıra eşitlenmesi ile Schwarzschild metriği elde edilebilmeliydi. Schwarzschild metriğinde bir olay ufku tanımlı olduğundan, aranan metriğin de olay ufkuna sahip olması bekleniyordu. Einstein alan denklemlerinin yayınlanmasından yaklaşık yarım yüzyıl sonra böyle bir çözümü Roy P. Kerr elde etti¹ (Kerr, 1963).

¹ Aslında bütün bu özellikleri karşılayan stasyoner tek çözüm Kerr çözümüdür (Carter, 1971). Daha sonraları elde edilen diğer stasyoner metriklerde olay ufku tanımlı değildir (Griffiths and Podolský, 2009).

3.1 Kerr Metriği

Kerr metriği; eksenel – simetrik, dönen ve kütleli bir cismin zamandan bağımsız gravitasyonel alanını tanımlar. Bu çözüm Einstein alan denklemlerinin, (3.1) eşitliğini sağlayan vakum (kara deliğin çevresi boş uzay – zaman) çözümüdür².

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.1)$$

Burada $R_{\mu\nu}$, Ricci tensörüdür³.

Kerr metriği, “Boyer – Lindquist” koordinatlarında $\{t, r, \theta, \phi\}$, (3.2a) ifadesiyle gösterilir (Boyer and Lindquist, 1967).

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{c^2\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4GMr a}{c^2\rho^2} \sin^2\theta d\phi dt + \left(\frac{\rho^2}{\Delta}\right)dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2 \sin^2\theta}{\rho^2} d\phi^2 \quad (3.2a)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta \quad (3.2b)$$

$$\Delta = r^2 - \frac{2GM}{c^2}r + a^2 \equiv (r - r_+)(r - r_-) \quad (3.2c)^4$$

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta \quad (3.2d)$$

Burada M , kara deliğin kütlesi; $a \equiv J/Mc$, kara deliğin toplam açısal momentumunun toplam kütesine oranıyla ilgili dönme parametresidir. Ayrıca r_+ ve r_- ifadeleri, daha sonra detaylı olarak irdelenen dış ve iç olay – ufku yarıçaplarıdır. Yukarıdaki (3.2a) ifadesinde $g_{\phi\phi}$ metrik bileşeni bazı kaynaklarda,

² (3.1) ifadesinin sıfıra eşit olduğunun gösterimi için, *Hoyng*, (2006) sf.53 bakılabilir.

³ Genel görelilik kuramı ve tensör analiziyle ilgili detaylı bilgi için *Landau and Lifshitz*, (1980) önerilebilir.

⁴ Denklik ifadesinin elde edilişi için bkz. Ek.A

$$\begin{aligned}
g_{\phi\phi} &= \frac{[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] \sin^2 \theta}{\rho^2} \\
&= \frac{\left[a^4 + 2a^2 r^2 + r^4 - a^4 \sin^2 \theta + \frac{2GMra^2 \sin^2 \theta}{c^2} - a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta}{\rho^2} \\
&= \frac{\left[a^4 + 2a^2 r^2 + r^4 - a^4 + a^4 \cos^2 \theta + \frac{2GMra^2 \sin^2 \theta}{c^2} - a^2 r^2 + a^2 r^2 \cos^2 \theta \right] \sin^2 \theta}{\rho^2} \\
&= \frac{\left[r^2(r^2 + a^2) + a^2 \cos^2 \theta (r^2 + a^2) + \frac{2GMra^2 \sin^2 \theta}{c^2} \right] \sin^2 \theta}{\rho^2} \\
&= \left[r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 c^2} \right] \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

olarak gösterilmektedir. Ayrıca farklı kaynaklarda g_{tt} metrik bileşeni de $g_{tt} = -\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2}$ olarak verilebilmektedir.

Açısal momentum J , kgm^2s^{-1} (SI birim sisteminde) biriminde yazılırsa; dönme parametresinin birimi $a = \frac{J}{Mc} = \frac{kgm^2s^{-1}}{kgms^{-1}} = metre$, uzunluk olur. Kerr metriğinde çalışılırken G genel – çekim sabiti ve c ışık hızı normalize edilerek, kullanılan bağıntılar daha sade biçimde yazılabilir. Işık hızını normalize edebilmek için zaman boyutunun uzunluk boyutunda yazılması gerekir. O halde ışık hızı $c = m \cdot s^{-1} = 1 \Rightarrow s = metre$ olur. Genel çekim sabiti için, $G = N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m^2}{kg^2} = \frac{m^3}{kg \cdot s^2} = \frac{m^3}{kg \cdot m^2} = \frac{metre}{kg} \Rightarrow kg = metre$ olmak üzere kütle, uzunluk biriminde yazılabilir. Böylelikle $G = c = 1$ olarak normalize edilmiş olur.

Buna göre (3.2a) metriği tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4mra}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi dt + \left(\frac{\rho^2}{\Delta}\right) dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\
&\quad + \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2
\end{aligned}$$

formu elde edilir. Bu form, yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 \\
&\quad + \rho^2 d\theta^2
\end{aligned}$$

Kerr uzay – zaman bölgesinde eksenel – simetrik stasyoner durum söz konusu olduğundan metrik bileşenleri, $\{t, \phi\}$ koordinatlarından bağımsızdır.

Kerr metriğinin g^{ik} kontrovaryant bileşenleri ile ilişkili olan dörtlü – gradyent (*four – gradient*) operatörü (3.3) eşitliğiyle verilir⁵.

$$g = -\frac{\Sigma^2}{\rho^2 \Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \frac{4amr}{\rho^2 \Delta} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \quad (3.3)$$

Burada g , skaler bir niceliktir ve genelleştirilmiş biçimde (3.4) ifadesiyle gösterilir ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$).

$$g \equiv g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (3.4)$$

3.2 Dönen Kara Deliklerin Geometrik Özellikleri

Kara deliğin olay ufku (3.2a) ifadesinde, g_{11} bileşenini tanımsız yapan $\Delta = 0$ bölgesindedir. Δ , ikinci dereceden r 'ye bağlı bir fonksiyon olduğu için iki köke sahiptir. Dönme parametresinin kütleyle ilişkisi $a < m$ olarak verilirse denklemin iki reel köke sahip olduğu görülür. Buradan, $\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0$ denklemini çözülerek,

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2} \quad r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2} \quad (3.5)$$

r_+ ve r_- olmak üzere, sırasıyla dış olay – ufku ve iç olay – ufku bölgeleri bulunur.

(2.1) Schwarzschild metriğinde, $g_{11} \rightarrow \infty$ durumunda $g_{00} \rightarrow 0$ oluyordu⁶. Kerr metriğinde ise $g_{11} \rightarrow \infty$ durumunda, g_{00} bileşeni sıfıra gitmez. Buradan sonsuz kırmızı kayma yüzeyi ile *null* yüzeyinin (olay ufku) aynı bölgede bulunmadığı anlaşılır. (3.2a) metriğinde; $g_{00} = 0$ için ($a < m$ koşulu varsayılmıştır),

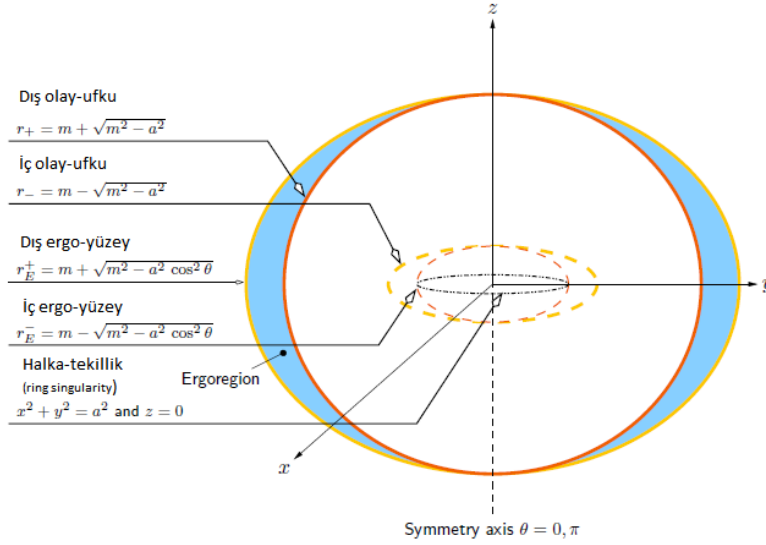
$$r_E^+ = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad r_E^- = m - \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.6)$$

“ θ ” koordinatına bağlı değişen sınır yüzeyleri tanımlanır. Burada “ r_E^+ ” ve “ r_E^- ”; sırasıyla dış ve iç sonsuz kırmızıya – kayma yüzeyleridir. Bu yüzeylere ergo –

⁵ Kovaryant metrik bileşenlerinden kontrovaryant bileşenlere dönüşüm ile ilgili bkz. (Raine and Thomas, 2009)

⁶ Bununla birlikte metrik tensörün g_{tt} bileşenini sıfır yapan $r = 2m$ yüzeyinin; (2.6) ve (2.7) den anlaşıldığı üzere, sonsuz kırmızıya – kayma yüzeyi olduğu belirtilmişti.

yüzeyler de (*ergo – surfaces*) denir. Ergo – yüzeyler ile olay – ufku yüzeyleri (yani iç ve dış *null* yüzeyler) birbirinden ayrılırlar. Bu yüzeylerin ($a < m$ durumunda) en dıştan içe doğru sıralanışı, $r_E^+ > r_+ > r_- > r_E^-$ biçimindedir. Kutup bölgelerinde ($\theta = 0, \pi$) (3.6) bölgeleri, (3.5) olay – ufku bölgelerine dönüşür⁷. Kerr kara deliğinin (r_E^+, r_+) yüzeyleri arasında kalan bölgeye “ergosfer”⁸ denir. Bu yüzeyler, Şekil (3.1) de, dönme ekseninin z – eksen olduğu durum için gösterilmiştir.



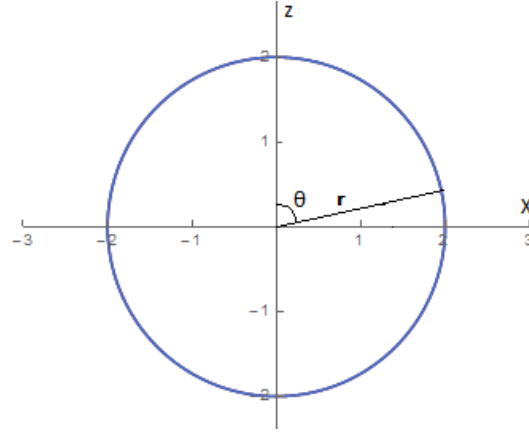
Şekil 3.1: Kartezyen koordinatlarda Kerr metriğinden elde edilen geometrik biçimi göstermektedir (Visser, 2007).

Eğer $a = 0$ (yani açısal momentum sıfır olduğu durumda) olduğu bir durum düşünülürse (3.2a) ifadesinin, (2.1) Schwarzschild metriğine (yani dönmeyen kara delik durumu) dönüştüğü görülür. Şekil (3.2), böyle bir kara deliğin olay – ufku sınırlarını göstermektedir⁹.

⁷ Buradan, kutup noktalarında sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi ile olay – ufkunun kesiştiği anlaşılmaktadır.

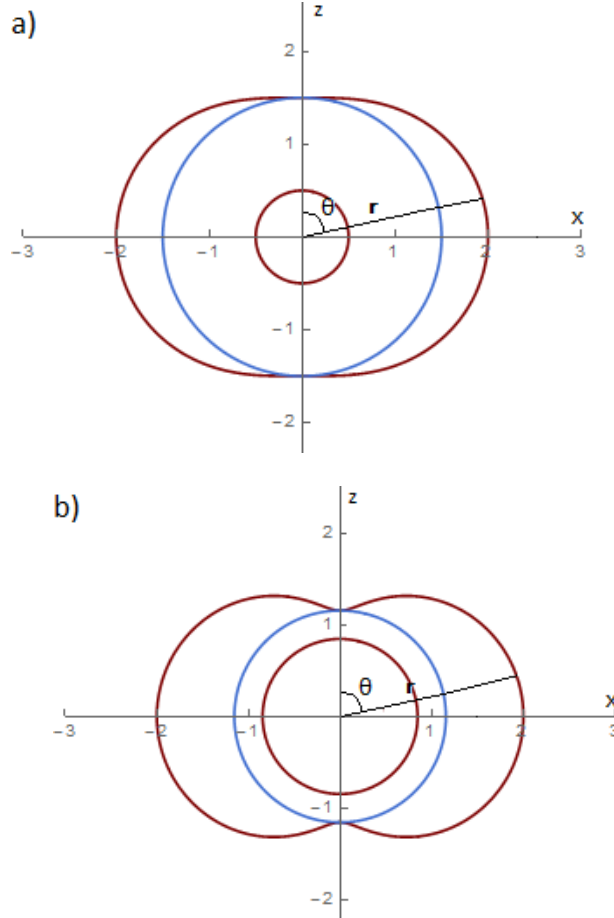
⁸ Bazı kaynaklarda isimlendirme olarak *ergo – sphere* ya da *ergo – region* biçimleri de kullanılmaktadır.

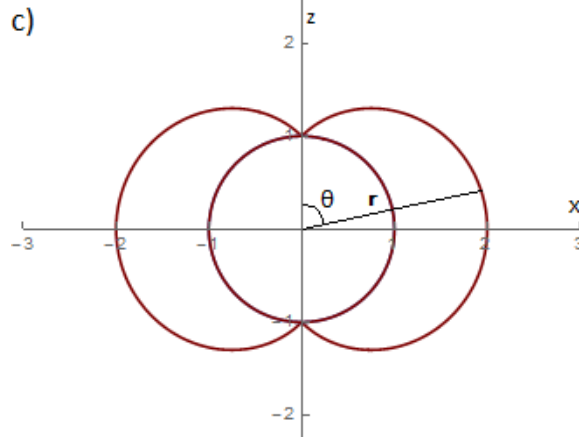
⁹ Schwarzschild kara deliklerinde ergosfer bölgesi oluşmaz.



Şekil 3.2: Dönme parametresi $a = 0$ olan bir kara delik için dış olay – ufku $r_+ = 2m$ olarak gösterilmektedir ($m = 1$ alınmıştır).

Sıfırdan farklı dönme parametrelili kara deliklerin çeşitli a değerlerinde; ergosfer, dış olay – ufku ve iç olay – ufku bölgelerinin θ açısına göre sınırları şekil (3.3) grafiklerinde gösterilmiştir (Dönme parametresine bağlı olmaksızın, $\theta = \pi/2$ için $r_{erg} = 2m$ değerini alır.).





Şekil 3.3: Farklı a ve θ değerlerine göre ergosfer, iç ve dış olay – ufku yüzeylerinin şekilleri verilmiştir. En dıştaki ergosfer yüzeyi $\theta = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ aralığında değişimi gösterilmektedir.

a) $a = 0.866$ olan bir kara delik için $r_- = 0.5m$ ve $r_+ = 1.5m$ değerlerini alır. **b)** $a = 0.988$ olan bir kara delik için $r_- = 0.84m$ ve $r_+ = 1.15m$ değerlerini alır. **c)** $a = 1$ olan (maksimum dönme) bir kara delik için $r_- = r_+ = m$ olur.

Birkaç cebirsel işlemle doğrulanmaları mümkün olan, bazı özdeşlikler (3.7a – h) ile verilmiştir.

$$a \sin^2 \theta g_{tt} + g_{t\phi} = -a \sin^2 \theta \quad (3.7a)$$

$$(r^2 + a^2)g_{t\phi} + ag_{\phi\phi} = a\Delta \sin^2 \theta \quad (3.7b)$$

$$(r^2 + a^2)g_{tt} + ag_{t\phi} = -\Delta \quad (3.7c)$$

$$a \sin^2 \theta g_{t\phi} + g_{\phi\phi} = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \quad (3.7d)$$

$$(g^{t\phi})^2 - g^{tt}g^{\phi\phi} = \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \quad (3.7e)$$

$$ag^{tt} - (r^2 + a^2)g^{t\phi} = -a \quad (3.7f)$$

$$(r^2 + a^2)g^{\phi\phi} - ag^{t\phi} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (3.7g)$$

$$\frac{g^{t\phi}}{g^{\phi\phi}} = -\frac{g_{\phi t}}{g_{tt}} \quad (3.7h)$$

Kerr metriği, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ 'da bir tekiliğe sahiptir. Bu bölge, koordinat dönüşümleriyle kaldırılamayan gerçek bir tekilik bölgesidir. Boyer – Lindquist koordinatlarında $\rho^2 = 0$ denklemi; $r = 0$ ve $\theta = \pi/2$ değerleri için

sağlanır. Boyer – Lindquist koordinatları Kartezyen koordinatlara dönüştürülürse $\rho^2 = 0$ için $x^2 + y^2 = a^2$ olan bir çember denklemi elde edilir. Buradan teklik bölgesinin, ekvator düzleminde ($\theta = \pi/2$) ve halka biçimli bir yapı olduğu anlaşılır¹⁰. Bu tekliğe halka – teklik (*ring singularity*) denir¹¹.

3.3 Kerr Metriğinde Killing Vektörleri ve Geodezik Denklemleri

Dönen kara deliklerin çevrelerindeki geodezik hareketi belirleyebilmek için hareket sabitlerine ihtiyaç duyulur.

Bunlardan ilki parçacığın durgun kütesidir. Sonraki iki sabit, metriğin zamandan bağımsız ve eksenel – simetrik özellikleriyle ilişkili olarak sırasıyla E , parçacığın enerjisi ve L_z , açısal momentumudur¹². Bu üç hareket sabiti yardımıyla parçacığın ekvatorial düzlemdeki hareketi belirlenebilir. Ancak parçacığın olası bütün yörüngelerini tanımlayabilmek için dördüncü bir sabit gereklidir.

Brandon Carter 1968 de yayınladığı bir çalışmada kendi adıyla anılan Carter sabitini türetti (Carter, 1968). Böylelikle Kerr uzay – zaman metriğinde geodezik hareket tam olarak tanımlanabildi.

Geodezik hızıyla ilişkili olan geodeziğe teğet u^μ vektörünün kovaryantıyla çarpımı, geodeziğin ışık konisine (*light cone*) göre üç farklı durumunu belirler¹³. Aşağıda (3.8) ifadesiyle verilen u vektörü genellikle “ τ ” öz – zaman parametresine bağlı olarak tanımlanır¹⁴.

$$u(\tau) = \dot{t}\partial_t + \dot{r}\partial_r + \dot{\theta}\partial_\theta + \dot{\phi}\partial_\phi \quad (3.8)$$

Burada nokta, öz – zamana göre türevi gösterir. Kerr geometrisinin simetri özellikleri, metrik üzerinde tanımlanan *Killing* vektörleriyle doğrudan ilişkilidir¹⁵.

¹⁰ Kerr – Schild koordinat dönüşümlerinin detaylı anlatımı bölüm 3.5 de verilmiştir.

¹¹ Halka – teklik ile ilgili detaylı bilgi için, bkz. (Chandrasekhar, 1998)

¹² Burada L_z , dönme eksenine doğrultusundaki açısal momentumdur.

¹³ $u^\mu u_\mu = q^2$ olarak tanımlandığında; zamansal (timelike) geodezik için $q^2 = -1$, *null* geodezik için $q^2 = 0$ ve uzaysal (spacelike) geodezik için $q^2 = 1$ olarak belirlenir (metriğin notasyonu $(- + + +)$ olarak alınırsa, q^2 değerlerinin işareti değişir).

¹⁴ (3.8) ifadesi bazı kaynaklarda, $u(\tau) = u^t\partial_t + u^r\partial_r + u^\theta\partial_\theta + u^\phi\partial_\phi$ olarak gösterilmektedir.

¹⁵ Killing vektörleri ile ilgili detaylar Ek.J’de verilmiştir.

ξ_μ ile gösterilen Killing vektörleri (3.9) Killing denklemini sağlar.

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (3.9)$$

Herhangi bir geodezik eğrisi boyunca, $g(\xi, u) = \xi_\mu u^\mu = \text{sabit}$ olduğu¹⁶ şu şekilde gösterilebilir.

$$\frac{d}{d\lambda}(\xi_\mu u^\mu) = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{d}{dx^\nu}(\xi_\mu u^\mu) = u^\nu \nabla_\nu (\xi_\mu u^\mu) = \xi_\mu u^\nu \nabla_\nu u^\mu + u^\mu u^\nu \nabla_\nu \xi_\mu = 0$$

Yukarıdaki denklemde $u^\mu u^\nu$ ifadesi simetrik bir tensördür. Öte yandan $\nabla_\nu \xi_\mu$ ifadesi anti – simetrik bir tensördür¹⁷. Dolayısıyla simetrik ve anti – simetrik tensörlerin çarpımı sıfır olduğundan, $u^\nu u^\mu \nabla_\mu \xi_\nu = 0$ olur. Yukarıdaki denklemde u^ν ; geodeziğe teğet vektör olduğundan geodezik denklemini sağlar (buradan da $u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$ olduğu anlaşılır).

Kerr geometrisinde metriğin katsayıları; “ t ” zaman parametresinden bağımsız olduğundan $\tilde{t} \equiv \partial/\partial t$ zamansal vektör alanının¹⁸, bir Killing vektör alanı olduğu (3.9) Killing denklemi ile gösterilebilir.

$$\nabla_\mu \tilde{t}_\nu + \nabla_\nu \tilde{t}_\mu = g_{\nu\gamma} \nabla_\mu \tilde{t}^\gamma + g_{\mu\gamma} \nabla_\nu \tilde{t}^\gamma = 0 \quad (3.10)$$

(3.10) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terimi¹⁹,

$$\begin{aligned} g_{\nu\gamma} \nabla_\mu \tilde{t}^\gamma &= g_{\nu\gamma} (\partial \tilde{t}^\gamma / \partial x^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \tilde{t}^\nu) = g_{\nu\gamma} \Gamma_{\mu t}^\gamma \tilde{t}^t = g_{\nu\gamma} \Gamma_{\mu t}^\gamma \\ &= \frac{1}{2} g_{\nu\gamma} g^{\gamma\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha t} + \partial_t g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu t}) \\ &= \frac{1}{2} \delta_\nu^\alpha (\partial_\mu g_{\alpha t} + \partial_t g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu t}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu t} - \partial_\nu g_{\mu t}) \end{aligned}$$

olur. Burada Γ_{bc}^a Christoffel sembolüdür²⁰. Benzer işlemler ikinci terim için yapıp (3.10) ifadesinde yerine koyulursa,

¹⁶ Burada teğet vektörü ile Killing vektörünün çarpımı $g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu \equiv u_\mu \xi^\mu \equiv g(\xi, u)$ olarak birbirine denktir. Ayrıca $u = d/d\lambda$, geodeziğe teğet vektör alanı ve “ λ ” eğrilik parametresidir.

¹⁷ (3.9) Killing denkleminde $\nabla_\nu \xi_\mu$ tensörünün anti – simetrik olduğu anlaşılır.

¹⁸ $\tilde{t}^\mu \equiv \partial x^\mu / \partial t \equiv (1, 0, 0, 0)$ zamansal Killing vektörü olduğundan $\tilde{t}^t = 1$ olur.

¹⁹ $\nabla_\mu \tilde{t}^\nu$ ifadesi, $\tilde{t}^\mu$ vektörünün kovaryant türevidir ve $\nabla_\mu \tilde{t}^\nu = \partial \tilde{t}^\nu / \partial x^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \tilde{t}^\nu$ denklemiyle verilir. Kerr metriği stasyoner olduğu için $\partial_t g_{\nu\mu} = 0$ olur. Kovaryant türev ve ilişkili denklemlerin ayrıntılı açıklaması için *Landau and Lifshitz*, (1980) bakılabilir.

$$\nabla_\mu \tilde{t}_\nu + \nabla_\nu \tilde{t}_\mu = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu t} - \partial_\nu g_{\mu t} + \partial_\nu g_{\mu t} - \partial_\mu g_{\nu t}) = 0$$

Killing denklemini sağladığı görülür. Buradan $\tilde{t} \equiv \partial/\partial t$, bir Killing vektör alanı olduğu anlaşılır. Kerr metriğinin ekstenel – simetrik özelliği kullanılarak, $m \equiv \partial_\phi = \partial/\partial \phi$ vektör alanının da bir Killing vektör alanı olduğu gösterilebilir²¹.

Killing vektörlerinden sabit nicelikler elde edildiğinden hareket sabitleri, $\tilde{t}$ ve m vektör alanları yardımıyla belirlenebilir. Geodezik üzerinde (uzaktaki statik bir gözlemcinin ölçtüğü) birim kütleli parçacık başına düşen enerji²²; u^μ dördü – hız vektörü olmak üzere (3.8) ifadesinden,

$$E = -g(\tilde{t}, u) = -g_{\mu\nu} \tilde{t}^\mu u^\nu = -(g_{tt} \dot{t} + g_{t\phi} \dot{\phi}) \quad (3.11)$$

ile ifade edilir. Benzer şekilde geodeziğin açısal momentumu,

$$L_z = g(m, u) = g_{\mu\nu} m^\mu u^\nu = g_{\phi t} \dot{t} + g_{\phi\phi} \dot{\phi} \quad (3.12)$$

olarak verilir (z alt indisi dönme eksenini doğrultusundaki açısal momentumu göstermektedir). Buradan E ve L_z niceliklerinin sabit oldukları anlaşılır.

Geodeziğin t ve ϕ koordinatlarının öz – zamana göre değişimi, (3.11) ve (3.12) sabitlerinden elde edilebilir. Metrik tensörünün bileşenlerini (3.2a)’ya göre yazıp birkaç cebirsel işlem yapılırsa, $\{t, \phi\}$ koordinatlarının değişimi (3.13) ve (3.14) bağıntılarıyla verilebilir.

$$\dot{t} = \frac{\Sigma^2 E - 2amrL_z}{\rho^2 \Delta} \quad (3.13)$$

$$\dot{\phi} = \frac{2amrE \sin^2 \theta + (\rho^2 - 2mr)L_z}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \quad (3.14a)$$

ya da,

$$\rho^2 \dot{\phi} = \frac{L_z}{\sin^2 \theta} - aE + \frac{a}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - L_z a] \quad (3.14b)$$

Ayrıca (3.11) ve (3.12) denklemlerinden geodeziğin enerjisi ve açısal momentumu, sırasıyla (3.15) ve (3.16) bağıntıları olarak verilebilir.

²⁰ Christoffel sembollerinin elde edilişi için bkz. Ek.B2.

²¹ Simetrik olan “ ϕ ” koordinatıyla ilişkili Killing vektör, $m^\mu \equiv \partial x^\mu / \partial \phi \equiv (0,0,0,1)$ olarak verilir.

²² Bazı kaynaklarda “ E ” ve “ L_z ”, sırasıyla geodeziğin enerjisi ve açısal momentumu olarak tanımlanır.

$$E = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) \dot{t} + \frac{2amr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{\phi} \quad (3.15)$$

$$L_z = -\frac{2amr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} + \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{\phi} \quad (3.16)$$

Kerr geodezikleri boyunca korunan dördüncü nicelik olan Carter sabiti, *Hamilton – Jacobi formalizmi* ile bulunabilir.

Sistemin dinamik niceliklerini tanımlayan *Lagrangian*²³ fonksiyonu,

$$\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu, \tau) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (3.17)$$

bağıntısı ile verilir. Burada x^μ bileşenleri, $\{t, r, \theta, \phi\}$ koordinatlarıdır²⁴.

Yukarıdaki (3.17) ifadesi kullanılarak (3.18) “ P_μ ” genelleştirilmiş momentumu bulunur²⁵.

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \delta_\mu^\nu) = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (3.18)$$

Buradan Hamiltonyen fonksiyonu $H \equiv H(x^\mu, P_\mu, \tau)$ olmak üzere²⁶,

$$H = P_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = P_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = P_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} P_\mu \dot{x}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\nu\mu} P_\mu \dot{x}^\mu$$

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} P_\nu P_\mu \quad (3.19)$$

ifadesiyle gösterilir²⁷. (3.19) Hamiltonyen ifadesi, “ τ ” parametresine açık bir şekilde bağlı olmadığından (τ parametresinin açık bir fonksiyonu değildir.)

²³ (3.17) ifadesinin elde edilişi için, bkz. Ek.B1. Daha detaylı bilgi için, bkz. (Dermer and Menon, 2009; Landau and Lifshitz, 1980)

²⁴ Rölativite teorisinde öz – zaman “ τ ” genel olarak, kullanılan “ t ” zamanı ile aynı rolü üstlenir.

²⁵ Benzer şekilde Newton mekaniğinde Lagrangian, $\frac{1}{2}mv^2$ kinetik enerjisi ile ilişkili bir fonksiyondur. Açıkça görüldüğü gibi Lagrangian ifadesinin “ v ” hızına bağlı değişimi, mv momentum formunu verir.

²⁶ Keyfi bir sistemin Hamiltonyen fonksiyonu ve konuyla ilgili detaylı bilgi için, bkz. (EK.C)

²⁷ (3.19) eşitliği, EK.C kısmında (C.12) denklemi olarak elde edilmiştir.

korunan bir niceliktir. Ayrıca birkaç cebirsel işlem yaparak $H = q^2/2$ olduğu görülebilir²⁸.

Hamilton – Jacobi metodundan yararlanabilmek için bir $S(\tau, t, r, \theta, \phi, q^2, E, L_z, K)$ etki fonksiyonu tanımlanır (K , Carter sabitidir). Buna ek olarak “ S ” fonksiyonunun $\{t, r, \theta, \phi\}$ koordinatlarına göre değişimi, kanonik momentum bileşenlerini verir. Bunlar,

$$\partial_t S = P_t = -E/c, \quad \partial_r S = P_r, \quad \partial_\theta S = P_\theta, \quad \partial_\phi S = P_\phi \quad (3.20)$$

olarak tanımlanır²⁹.

Hamiltonyen fonksiyonunun (3.19) ifadesi,

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S \quad (3.21)$$

olarak S fonksiyonunun diferansiyelleri formunda yazılabilir³⁰. Hamilton – Jacobi denkleminin birinci mertebe kısmi diferansiyel formu³¹ $\partial_\tau S + H = 0$ olur. Yukarıdaki (3.21) ifadesi bu denklemde yerine yazılırsa,

$$\partial_\tau S + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S = 0 \quad (3.22)$$

elde edilir.

Dörtlü – gradyent operatörünün g skaleri ile ilişkisi, (3.4) ifadesiyle daha önce tanımlanmıştı. Bu skalerin, Kerr metriğinin kontrovaryant bileşenleri ile olan ilişkisi (3.3) eşitliğiyle verildi. O halde (3.22) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak,

²⁸ Burada q niceliği ile olan ilişki, $H = \frac{1}{2} P^\mu P_\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \dot{x}_\nu g_{\mu\rho} \dot{x}^\rho = \frac{1}{2} \delta^\nu_\rho \dot{x}^\rho \dot{x}_\nu = \frac{1}{2} \dot{x}^\rho \dot{x}_\rho = \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} q^2$ olarak bölüm 3’ün başında tanımlanmıştı.

²⁹ Etki fonksiyonu $S(x^1, \dots, x^N, t)$, Hamilton’un temel fonksiyonu olarak da isimlendirilir (x^N uzaysal koordinatlar ve t zaman koordinatıdır). Bu fonksiyonunun $\{t, r, \theta, \phi\}$ koordinatlarına göre değişimi momentumu verir. Ayrıntılı bilgi için EK.E bölümüne bakılabilir. Ayrıca $\frac{\partial S}{\partial x^\mu} := \partial_\mu S$ tanımlaması yapılmıştır.

³⁰ (3.21) denklemi ekler bölümünde (E.5) ifadesi yardımıyla bulunabilir.

³¹ bkz. (E.12)

$$\begin{aligned}
2\partial_\tau S &= -g^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S \\
&= \frac{\Sigma^2}{\rho^2\Delta}(\partial_t S)^2 + \frac{4amr}{\rho^2\Delta}\partial_t S\partial_\phi S - \frac{\Delta}{\rho^2}(\partial_r S)^2 - \frac{1}{\rho^2}(\partial_\theta S)^2 \\
&\quad - \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2\Delta \sin^2 \theta}(\partial_\phi S)^2
\end{aligned} \tag{3.23}$$

denkleminde ulaşılır.

Daha sonra “ S ” fonksiyonu değişkenlerine ayrılabilirliği varsayılarak (3.24) formunda yazılır³².

$$\begin{aligned}
S &= S_\tau(\tau) + S_t(t) + S_\phi(\phi) + S_r(r) + S_\theta(\theta) \\
&= -\frac{1}{2}q^2\tau - Et + L_z\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Burada $S_r(r)$ ve $S_\theta(\theta)$; yalnızca r ve θ ya bağlı fonksiyonlardır³³. Yukarıdaki (3.24) denkleminin τ 'ya bağlı kısmi türevi alınır; (3.21), (3.22) ve (3.23) yardımıyla,

$$\partial_\tau S = -\frac{1}{2}q^2 = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}P_\nu P_\mu = -H \tag{3.25}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra (3.23) ve (3.24) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
&\left\{ \Delta \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} [aL_z - (r^2 + a^2)E]^2 - q^2 r^2 \right\} \\
&+ \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + (L_z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta - q^2 a^2 \cos^2 \theta + (L_z - aE)^2 \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

bulunur³⁴. Yukarıdaki (3.26) denkleminde ilk parantez içindeki terimler sadece r ve ikinci parantez içindekiler de sadece θ 'nın bir fonksiyonudur. Ayrıca bu iki ifade sabit olmak zorundadır. İlk parantez $-K$ ve ikinci parantez K şeklinde tanımlanarak³⁵ (işaretleri ters olarak tanımlamak elde edilen sonucu değiştirmez),

³² (3.22), (3.21), (3.19) ve (3.18) ifadelerinden $\partial_\tau S = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}P_\nu P_\mu = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\gamma\nu}\dot{x}^\gamma g_{\mu\rho}\dot{x}^\rho = -\frac{1}{2}q^2$ eşitliği bulunur. Daha önce de tanımlandığı gibi $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = u^2 \equiv q^2$ olur. Ayrıca (3.24)'ün ikinci terimi Ek (E.7) ile karşılaştırılırsa $\partial_t S = P_t = -E/c$ ilişkisi daha iyi anlaşılabilir.

³³ O halde $\frac{\partial S}{\partial r} \equiv \frac{dS_r}{dr}$ ve $\frac{\partial S}{\partial \theta} \equiv \frac{dS_\theta}{d\theta}$ denklilikleri sağlanmış olur.

³⁴ (3.26) Eşitliğinin elde edilişi, bkz. Ek.F

³⁵ E ve L sabitlerinden farklı olarak; K Carter sabiti, uzay – zaman geometrisinin izometrisine bağlı değildir.

$$\Delta \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} [aL_z - (r^2 + a^2)E]^2 - q^2 r^2 \equiv -K \quad (3.27a)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \cos^2 \theta [(q^2 + E^2)a^2 - L_z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta] + (L_z - aE)^2 \equiv K \quad (3.27b)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki ifade, bir $Q \equiv K - (L_z - aE)^2$ ayrıklık sabiti tanımlanarak daha kullanışlı bir forma dönüştürülebilir.

Yukarıdaki (3.27a,b) eşitlikleri yardımıyla $R(r)$ ve $\Theta(\theta)$ olarak iki fonksiyon tanımlanır.

$$\begin{aligned} R(r) &\equiv [aL_z - (r^2 + a^2)E]^2 - \Delta[Q + (L_z - aE)^2 - q^2 r^2] \\ &= r^4 E^2 + (a^2 E^2 - L_z^2 - Q)r^2 + 2mr[Q + (L_z - aE)^2] - a^2 Q + \Delta r^2 q^2 \end{aligned} \quad (3.28a)$$

$$\Theta(\theta) \equiv Q + \cos^2 \theta [(q^2 + E^2)a^2 - L_z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta] \quad (3.28b)$$

Buradan (3.28a,b) bağıntıları kullanılarak, (3.24) fonksiyonu,

$$S = -\frac{1}{2} q^2 \tau - Et + L_z \phi + \int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr + \int \sqrt{\Theta} d\theta \quad (3.29)$$

halini alır³⁶. Böylelikle (q^2, E, L, K) sabitlerine bağlı Hamilton – Jacobi denkleminde, geodezik hareket denklemleri elde edilebilir. S fonksiyonunun K ve q^2 ye göre değişimi sıfır olduğundan,

$$\frac{\partial S}{\partial(q^2)} = 0 = -\frac{1}{2} \tau + \int \frac{1}{2\Delta\sqrt{R}} \frac{\partial R}{\partial(q^2)} dr + \int \frac{1}{2\sqrt{\Theta}} \frac{\partial \Theta}{\partial(q^2)} d\theta \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial S}{\partial K} = 0 = \int \frac{1}{2\Delta\sqrt{R}} \frac{\partial R}{\partial K} dr + \int \frac{1}{2\sqrt{\Theta}} \frac{\partial \Theta}{\partial K} d\theta \quad (3.31)$$

ihtiyaç duyulan koşulu sağlar.

Yukarıdaki (3.30) denkleminde, kısmi diferansiyeller (3.27) denklemleri yardımıyla alınıp benzer işlemler (3.31) denkleminde de uygulanırsa,

$$d\tau = \frac{\Delta r^2}{\Delta\sqrt{R}} dr + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta, \quad \frac{dr}{\sqrt{R}} = \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} \quad (3.32)$$

elde edilir. Buradan da,

³⁶ (3.28a ve b) ifadeleri $\Delta^2 \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 \equiv R(r) \Rightarrow S_r = \int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr$ ve $\left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 \equiv \Theta(\theta) \Rightarrow S_\theta = \int \sqrt{\Theta} d\theta$ olur.

$$1 = \frac{r^2}{\sqrt{R}} \dot{r} + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} \dot{\theta} \quad , \quad \frac{\dot{r}}{\sqrt{R}} = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\Theta}} \quad (3.33)$$

eşitlikleri bulunur. Dolayısıyla (3.33) eşitliklerinden, Kerr geometrisi için r ve θ 'ya bağlı geodezik denklemleri,

$$\rho^4 \dot{r}^2 = R(r) \quad (3.34a)$$

$$\rho^4 \dot{\theta}^2 = \Theta(\theta) \quad (3.34b)$$

olur. Ayrıca bu iki denklem (3.20) momentum ilişkisi kullanılarak,

$$\rho^4 \dot{r}^2 = R(r) = \Delta^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 = \Delta^2 P_r^2 \quad (3.34a')$$

$$\rho^4 \dot{\theta}^2 = \Theta(\theta) = \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 = P_\theta^2 \quad (3.34b')$$

formunda da yazılabilir.

Yukarıdaki (3.28b) ifadesi (3.34b) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\rho^2 \dot{\theta} = \pm \{Q + \cos^2 \theta [(q^2 + E^2)a^2 - L_z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta]\}^{1/2} \quad (3.34c)$$

denklemini elde edilir. (3.34c) eşitliği incelendiğinde ekvator düzleminde dolanan bir parçacığın ($\theta = \pi/2$), $Q = 0$ için yörüngesinin değişmeden kalacağı anlaşılır.

3.4 Kerr Metriğinde Temel (*Principal*) Null Geodezikler

Kerr geometrisinde *null* geodezikler incelenirken denklemlerdeki parametre sayısını azaltmak için,

$$\zeta \equiv L_z/E \quad , \quad \eta \equiv Q/E^2 \quad (3.35a)$$

şeklinde uygun tanımlamalar yapılabilir³⁷. Bunun için (3.28a,b) ifadeleri E^2 'ye bölünerek,

$$R/E^2 = r^4 + (a^2 - \zeta^2 - \eta)r^2 + 2mr[\eta + (\zeta - a)^2] - a^2\eta \quad (3.35b)$$

$$\Theta/E^2 = \eta + a^2 \cos^2 \theta - \zeta^2 \cot^2 \theta \quad (3.35c)$$

formları elde edilir.

³⁷ Ayrıca bazı kaynaklarda, *null* geodezikler için kullanılan notasyonda R/E^2 , Θ/E^2 terimleri; R ve Θ olarak gösterilebilmektedir (Örneğin *Chandrasekhar*, (1998) s.347). Aynı konu için *Dermer and Menon*, (2009) s.391'de kullanılan notasyona bakılırsa $E = 1$ alındığı görülür. Hatırlatma olarak, *null* geodezikler için $q^2 = 0$ olur.

θ – koordinatındaki hareket incelediğinde, (3.34b) eşitliğinden $\Theta \geq 0$ olması gerektiği anlaşılır. O halde (3.35c) ifadesinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned}\Theta/E^2 &= \eta + a^2 - a^2 \sin^2 \theta - \frac{\zeta^2}{\sin^2 \theta} + \zeta^2 + 2a\zeta - 2a\zeta \\ &= \eta + (a - \zeta)^2 - (a \sin \theta - \zeta \operatorname{cosec} \theta)^2\end{aligned}\quad (3.35d)$$

(3.35d) denklemi elde edilir. Buradan da,

$$\eta + (a - \zeta)^2 \geq 0 \quad (3.35e)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.35d) ifadesini daha uygun bir forma dönüştürmek için $\mu \equiv \cos \theta \rightarrow d\theta = -d\mu / \sin \theta$ tanımlanır. Buradan (3.35c) formu kullanılarak,

$$\begin{aligned}\int \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} &= - \int \frac{d\mu}{\sin \theta \sqrt{\Theta}} = - \int \frac{d\mu}{\sqrt{\eta \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \zeta^2 \cos^2 \theta}} \\ &= - \int \frac{d\mu}{\sqrt{\eta - \eta \cos^2 \theta - a^2 \cos^4 \theta + a^2 \cos^2 \theta - \zeta^2 \cos^2 \theta}} \\ &= - \int \frac{d\mu}{\sqrt{\eta - (\eta + \zeta^2 - a^2) \cos^2 \theta - a^2 \cos^4 \theta}} \\ I_\mu &= \int \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Θ_μ ,

$$\Theta_\mu = \eta - (\eta + \zeta^2 - a^2)\mu^2 - a^2\mu^4 \quad (3.35f)$$

eşitliğiyle verilir. $\eta + (a - \zeta)^2 = 0$ durumu için (3.35d) ifadesine bakıldığında $\Theta_\mu \geq 0$ koşulunun sadece,

$$\theta = \theta_0 = \text{sabit} \quad , \quad \zeta = a \sin^2 \theta_0 \quad (3.35g)$$

değerleri ile sağlandığı görülür³⁸. (3.35g) değerleri (3.35f) de yerine yazıldığında denklemin sıfıra eşit olması için,

$$\eta = -a^2 \cos^4 \theta_0 \quad (3.35h)$$

olması gerektiği anlaşılır.

Bulunan ζ ve η değerleri (3.35b)'de yerine yazılırsa,

³⁸ Bu durumda $\Theta_\mu = 0$ olur. Ayrıca θ_0 , sonsuzdaki gözlemcinin açısal koordinatıdır.

$$\begin{aligned}
R/E^2 &= r^4 + (a^2 - a^2 \sin^4 \theta_0 + a^2 \cos^4 \theta_0)r^2 \\
&\quad + 2mr[-a^2 \cos^4 \theta_0 + (a \sin^2 \theta_0 - a)^2] + a^4 \cos^4 \theta_0 \\
&= r^4 + 2r^2 a^2 \cos^2 \theta + a^4 \cos^4 \theta_0 \\
R &= (r^2 + a^2 \cos^2 \theta_0)^2 E^2 \tag{3.35i}
\end{aligned}$$

(3.35i) ifadesi ile (3.34b) eşitliği ilişkilendirilebilir. Buradan $\rho^4 \dot{r}^2 = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta_0)^2 E^2 \Rightarrow \dot{r} = \pm E$ ifadesi elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki eşitliklerden geodezik teğet vektörlerinin bileşenleri, (3.36a)'da olduğu gibi gösterilebilir³⁹.

$$\dot{t} = \frac{(r^2 + a^2)E}{\Delta}, \quad \dot{r} = \pm E, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{aE}{\Delta} \tag{3.36a}$$

Burada *null* geodezikler üzerindeki hareket göz önüne alındığından, denklemleri daha sade yazabilmek için $E = 1$ alınabilir⁴⁰.

Sonuç olarak yukarıdaki eşitliklerden iki tane *null* geodezik teğet vektörü belirlenebilir. Bunlar (3.8) denklemi yardımıyla,

$$l_+ = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)\partial_t + \Delta\partial_r + a\partial_\phi] \tag{3.36b}$$

$$l_- = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)\partial_t - \Delta\partial_r + a\partial_\phi] \tag{3.36c}$$

olarak verilir. Burada l_+ ve l_- ; sırasıyla dışarıya yönlü ($\dot{r} > 0$) ve içeriye yönlü $\dot{r} < 0$ *null* geodezik vektörleridir. Boyer – Lindquist koordinatlarında $r = r_+$ bölgesinde bir tekillik olduğu görülmektedir. Sonraki bölüm bu problemin çözümüyle ilişkilidir.

3.5 Kerr – Schild Koordinat Sistemi

Daha önce de belirtildiği gibi Boyer – Lindquist koordinatlarında $r = r_+$ bölgesinde koordinat tekiliği oluşur. Ayrıca (3.36b,c) denklemlerinde de; bu bölge için, $\Delta = 0$ olduğundan *null* geodezik teğet vektörü tanımlanamaz. Kerr metriğinde oluşan bu koordinat tekiliği, Kerr – Schild koordinat sistemi kullanılarak kaldırılabilir.

³⁹ (3.36a) *null* geodezik vektörünün diğer bileşenlerinin elde edilişi için bkz. EK.G

⁴⁰ bkz. (Dermer and Menon, 2009) s.391

Kerr – Schild koordinatları $\{\bar{t}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}\}$ olarak tanımlandığında bu koordinatların, $\{t, r, \theta, \phi\}$ koordinatlarıyla olan ilişkisi,

$$d\bar{t} = dt + \frac{2mr}{\Delta} dr, \quad d\bar{r} = dr, \quad d\bar{\theta} = d\theta, \quad d\bar{\phi} = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr \quad (3.37)$$

ile verilir. Bu dönüşüm, matris biçiminde (3.38) ifadesi olarak gösterilir.

$$\begin{bmatrix} d\bar{t} \\ d\bar{r} \\ d\bar{\theta} \\ d\bar{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^0 & A_1^0 & A_2^0 & A_3^0 \\ A_0^1 & A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_0^2 & A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_0^3 & A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dt \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & F & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & Z & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dt \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Burada $F \equiv 2mr/\Delta$ ve $Z \equiv a/\Delta$ ile tanımlanır.

Yukarıdaki matris dönüşümü tensörel formda,

$$d\bar{x}^\mu = A_\nu^\mu dx^\nu \quad (3.39)$$

olarak yazılabilir.

Bir $\bar{X}_\mu$ tek – formu (*one – form*),

$$\bar{X}_\mu d\bar{x}^\mu = A_\nu^\mu \bar{X}_\mu dx^\nu \equiv X_\nu dx^\nu$$

$$X_\nu = A_\nu^\mu \bar{X}_\mu \quad (3.40)$$

(3.40) dönüşümü ile verilerek A_ν^μ matrisinin tersi,

$$\bar{X}_\mu = (A^{-1})_\mu^\nu X_\nu \quad (3.41)$$

ile bulunur. Açık olarak görüldüğü gibi $(A^{-1})_\mu^\nu$ matrisi,

$$(A^{-1})_\mu^\nu = \begin{bmatrix} 1 & -F & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Z & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

olur⁴¹.

Diferansiyel geometri hesaplamalarında kullanılan $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ baz vektörleri ve bu vektörlere *dual* olan dx^μ koordinat diferansiyel vektörleri (*coordinate one – forms*) arasında,

$$d\bar{x}^\mu \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} \right) = \delta_\nu^\mu \quad (3.43)$$

⁴¹ (3.40) ve (3.41) eşitliklerinden $X_\nu = A_\nu^\mu \bar{X}_\mu = A_\nu^\mu (A^{-1})_\mu^\nu X_\nu$ elde edilir. Buradan $A_\nu^\mu (A^{-1})_\mu^\nu$ ifadesi birim matris olduğu anlaşılır.

(3.43) ilişkisi vardır⁴². Burada δ_v^μ Kronecker deltadır. $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ vektörünün koordinat dönüşümü,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} \equiv B_\nu^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (3.44)$$

olarak verilir. Buradan (3.39) ve (3.44) ifadeleri kullanılarak, $A_\alpha^\mu dx^\alpha \left(B_\nu^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \delta_\nu^\mu$ eşitliği elde edilir. O halde,

$$A_\alpha^\mu B_\nu^\alpha = \delta_\nu^\mu \quad (3.45)$$

$$B_\nu^\alpha = (A^{-1})_\nu^\alpha \quad (3.46)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan, (3.41) denklemini $\bar{g}^{\mu\alpha}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{X}^\alpha &= \bar{g}^{\mu\alpha} (A^{-1})_\mu^\nu X_\nu \Rightarrow (B)_\alpha^\gamma \bar{X}^\alpha = \bar{g}^{\mu\alpha} (B)_\mu^\nu (B)_\alpha^\gamma X_\nu = g^{\nu\gamma} X_\nu \Rightarrow (B)_\alpha^\gamma \bar{X}^\alpha = X^\gamma \\ \bar{X}^\alpha &= A_\gamma^\alpha X^\gamma \end{aligned} \quad (3.47)$$

dönüşümleri elde edilir. Bu dönüşümler kullanılarak, Kerr – Schild koordinat sisteminde metrik tensörün dönüşümleri yapılabilir.

Yukarıdaki (3.41) dönüşümüne benzer şekilde metrik tensörün $\bar{g}_{\bar{r}\bar{r}}$ bileşeni, $\bar{g}_{\bar{r}\bar{r}} = B_1^\mu B_1^\nu g_{\mu\nu}$ olarak yazılabilir. Bu eşitlik Einstein toplama kuralına göre açılarak, sıfır olan terimler ayıklanır (açık renkli olan terimler, doğrudan (3.2a) Kerr metriğine bakılarak sıfırlanan bileşenleri göstermektedir.).

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\bar{r}\bar{r}} &= B_1^\mu B_1^\nu g_{\mu\nu} = B_1^0 B_1^0 g_{00} + B_1^0 B_1^1 g_{01} + B_1^0 B_1^2 g_{02} + B_1^0 B_1^3 g_{03} \\ &\quad + B_1^1 B_1^0 g_{10} + B_1^1 B_1^1 g_{11} + B_1^1 B_1^2 g_{12} + B_1^1 B_1^3 g_{13} \\ &\quad + B_1^2 B_1^0 g_{20} + B_1^2 B_1^1 g_{21} + B_1^2 B_1^2 g_{22} + B_1^2 B_1^3 g_{23} \\ &\quad + B_1^3 B_1^0 g_{30} + B_1^3 B_1^1 g_{31} + B_1^3 B_1^2 g_{32} + B_1^3 B_1^3 g_{33} \\ \bar{g}_{\bar{r}\bar{r}} &= B_1^0 B_1^0 g_{00} + B_1^0 B_1^3 g_{03} + B_1^1 B_1^1 g_{11} + B_1^2 B_1^2 g_{22} + B_1^3 B_1^0 g_{30} + B_1^3 B_1^3 g_{33} \\ \bar{g}_{\bar{r}\bar{r}} &= B_1^0 B_1^0 g_{00} + B_1^0 B_1^3 g_{03} + B_1^1 B_1^1 g_{11} + B_1^3 B_1^0 g_{30} + B_1^3 B_1^3 g_{33} \end{aligned} \quad (3.48a)$$

(3.48a) denkleminde, (3.42) bileşenleri yerine yazılırsa,

$$\bar{g}_{\bar{r}\bar{r}} = F^2 g_{tt} + (-F)(-Z) g_{t\phi} + g_{rr} + (-Z)(-F) g_{\phi t} + Z^2 g_{\phi\phi}$$

⁴² Bkz. (H.17)

$$\bar{g}_{\bar{r}\bar{r}} = (F^2 g_{tt} + ZF g_{t\phi}) + (FZ g_{\phi t} + Z^2 g_{\phi\phi}) + g_{rr} \quad (3.48b)$$

formuna dönüşür. Bu denklemde ilk parantezin değerleri yerine yazılıp (3.7c) özdeşliğinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} F^2 g_{tt} + ZF g_{t\phi} &= F(F g_{tt} + Z g_{t\phi}) = \frac{F}{\Delta} (2mr g_{tt} + a g_{t\phi}) \\ &= \frac{F}{\Delta} [(r^2 + a^2) g_{tt} + a g_{t\phi} - \Delta g_{tt}] \\ F^2 g_{tt} + ZF g_{t\phi} &= -F(1 + g_{tt}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.48b) denklemindeki ikinci parantezin de değerleri yerine yazılıp (3.7b) özdeşliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} FZ g_{\phi t} + Z^2 g_{\phi\phi} &= Z(F g_{\phi t} + Z g_{\phi\phi}) = \frac{Z}{\Delta} (2mr g_{\phi t} + a g_{\phi\phi}) \\ &= \frac{Z}{\Delta} [(r^2 + a^2) g_{\phi t} + a g_{\phi\phi} - \Delta g_{\phi t}] = \frac{Z}{\Delta} [a\Delta \sin^2 \theta - \Delta g_{\phi t}] \\ FZ g_{\phi t} + Z^2 g_{\phi\phi} &= Z(a \sin^2 \theta - g_{t\phi}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.49) ve (3.50) eşitlikleri (3.48b) de yerine yazılarak,

$$\bar{g}_{\bar{r}\bar{r}} = -F(1 + g_{tt}) + Z(a \sin^2 \theta - g_{t\phi}) + g_{rr} \quad (3.51)$$

denklemi elde edilir. (3.51) Eşitliğini daha sade biçimde yazabilmek için, (3.2a) yardımıyla cebirsel işlemler yapılır ve (3.52) bağıntısına ulaşılır.

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\bar{r}\bar{r}} &= -\frac{2mr}{\Delta} \left(1 - 1 + \frac{2mr}{\rho^2}\right) + \frac{a}{\Delta} \left(a \sin^2 \theta + \frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) + \frac{\rho^2}{\Delta} \\ &= -\frac{4m^2 r^2}{\Delta \rho^2} + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2} + \frac{\rho^2}{\Delta} \\ &= \frac{2mra^2 \sin^2 \theta - 4m^2 r^2}{\Delta \rho^2} + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + a^2 - a^2 \cos^2 \theta}{\Delta} \\ &= \frac{2mra^2 - 2mra^2 \cos^2 \theta - 4m^2 r^2 + (r^2 + a^2) \rho^2}{\Delta \rho^2} \\ &= \frac{2mra^2 - 2mra^2 \cos^2 \theta - 4m^2 r^2 + r^4 + a^2 r^2 \cos^2 \theta + a^2 r^2 + a^4 \cos^2 \theta}{\Delta \rho^2} \\ &= \frac{r^4 + a^2 r^2 + a^2 r^2 \cos^2 \theta + a^4 \cos^2 \theta - 2mra^2 \cos^2 \theta - 2mr^3 + 2mr^3 + 2mra^2 - 4m^2 r^2}{\Delta \rho^2} \\ &= \frac{\Delta \rho^2 + 2mr^3 + 2mra^2 - 4m^2 r^2}{\Delta \rho^2} = 1 + \frac{2mr(r^2 + a^2 - 2mr)}{\Delta \rho^2} \end{aligned}$$

$$\bar{g}_{\bar{r}\bar{r}} = 1 + \frac{2mr}{\rho^2} \quad (3.52)$$

Benzer şekilde bir yol izleyerek $\bar{g}_{\bar{t}\bar{t}}$, $\bar{g}_{\bar{t}\bar{\phi}}$, $\bar{g}_{\bar{\theta}\bar{\theta}}$ ve $\bar{g}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ bileşenleri de elde edilebilir. Metrik tensörü, Kerr – Schild koordinatlarında matris formunda,

$$\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2mr}{\rho^2} & \frac{2mr}{\rho^2} & 0 & -\frac{2mr}{\rho^2} a \sin^2 \theta \\ \frac{2mr}{\rho^2} & 1 + \frac{2mr}{\rho^2} & 0 & -a \sin^2 \theta \left(1 + \frac{2mr}{\rho^2} \right) \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{2mr}{\rho^2} a \sin^2 \theta & -a \sin^2 \theta \left(1 + \frac{2mr}{\rho^2} \right) & 0 & \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \end{bmatrix} \quad (3.53a)$$

olarak verilir. Ayrıca metriğin kontrovaryant formu (3.53b) formunda verilir.

$$\bar{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \begin{bmatrix} -1 - \frac{2mr}{\rho^2} & \frac{2mr}{\rho^2} & 0 & 0 \\ \frac{2mr}{\rho^2} & \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (3.53b)$$

Sonuç olarak Kerr – Schild koordinat sistemine geçilmesiyle, Boyer – Lindquist sisteminde oluşan $\Delta = 0$ koordinat tekiliği kaldırılmış olur. (3.53a) metrik bileşenlerinde bu koşul için bir tekiliğin oluşmadığı açıkça görülmektedir.

3.6 Ergosfer

Kerr metriğinde t koordinat fonksiyonunun nedensellik karakteri olay ufkunun dışında da değişir. Bunu açık bir şekilde görebilmek için, $g_{tt} = 0$ çözümlerine bakılması gerekir.

$$r_E^{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.54)$$

(3.54) çözümlerinden biri, iç – olay ufkunun içerisinde kalan yüzeyi verir. Bu yüzeye *iç sonsuz kırmızıya – kayma yüzeyi* (*inner infinite red – shift surface*) denir. Dış olay – ufkunun çevresinde bulunan diğer çözüm,

$$r_{erg}(\theta) = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.55)$$

(3.55) eşitliği ile verilir.

Dönen kara deliklerde oluşan ergosfer bölgesi,

$$r_+ < r < r_{erg}(\theta) \quad (3.56)$$

aralığındadır. (3.56) aralığı ile sınırlandırılmış bölgenin içerisinde $g(\tilde{t}, \tilde{t}) = g_{\mu\nu}\tilde{t}^\mu\tilde{t}^\nu = g_{tt} > 0$ olur. Dolayısıyla $\tilde{t} \equiv \partial_t$ vektör alanı bu bölge içerisinde uzaysal (*spacelike*) olur. Buna bağlı olarak ergosfer içerisinde, gelecek yönlü konilerin durumu belirsizleşir.

(3.36c) ifadesiyle verilen l_- null geodezik vektörü, Kerr – Schild koordinatlarında yazılarak bu belirsizlik giderilebilir. Tanımlanan yeni geodezik vektörü $\bar{l}$ olarak gösterilip (3.38) eşitliğindeki matris dönüşümleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \partial_t &= A_t^\mu \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = A_t^t \frac{\partial}{\partial \bar{x}^t} + A_t^r \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r} + A_t^\theta \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\theta} + A_t^\phi \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\phi} \\ &= 1 \cdot \partial_{\bar{t}} + 0 \cdot \partial_{\bar{r}} + 0 \cdot \partial_{\bar{\theta}} + 0 \cdot \partial_{\bar{\phi}} \end{aligned} \quad (3.57a)$$

$$\begin{aligned} \partial_r &= A_r^\mu \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = A_r^t \frac{\partial}{\partial \bar{x}^t} + A_r^r \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r} + A_r^\theta \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\theta} + A_r^\phi \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\phi} \\ &= \frac{2mr}{\Delta} \partial_{\bar{t}} + 1 \cdot \partial_{\bar{r}} + 0 \cdot \partial_{\bar{\theta}} + \frac{a}{\Delta} \partial_{\bar{\phi}} \end{aligned} \quad (3.57b)$$

$$\begin{aligned} \partial_\phi &= A_\phi^\mu \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = A_\phi^t \frac{\partial}{\partial \bar{x}^t} + A_\phi^r \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r} + A_\phi^\theta \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\theta} + A_\phi^\phi \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\phi} \\ &= 0 \cdot \partial_{\bar{t}} + 0 \cdot \partial_{\bar{r}} + 0 \cdot \partial_{\bar{\theta}} + 1 \cdot \partial_{\bar{\phi}} \end{aligned} \quad (3.57c)$$

ilişkileri elde edilir. Bu dönüşümler⁴³ (3.36c)'de yerine yazılarak,

⁴³ Bu dönüşümlere ek olarak $\partial_\theta = A_\theta^\mu \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = A_\theta^t \frac{\partial}{\partial \bar{x}^t} + A_\theta^r \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r} + A_\theta^\theta \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\theta} + A_\theta^\phi \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\phi} = A_\theta^\theta \partial_{\bar{\theta}} = \partial_{\bar{\theta}}$ ilişkisi de vardır.

$$\begin{aligned}
\bar{l}_- &= \frac{1}{\Delta} \left[(r^2 + a^2) \partial_{\bar{t}} - \Delta \left(\frac{2mr}{\Delta} \partial_{\bar{t}} + \partial_{\bar{r}} + \frac{a}{\Delta} \partial_{\bar{\phi}} \right) + a \partial_{\bar{\phi}} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta} [\partial_{\bar{t}}(r^2 + a^2 - 2mr) - \Delta \partial_{\bar{r}}] \Rightarrow \\
\bar{l}_- &= \partial_{\bar{t}} - \partial_{\bar{r}}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

null geodezik vektörü, Kerr – Schild sistemine dönüştürülmüş olur.

Burada ∂_t vektörünün ergosferin dışında zamansal bir vektör olduğu $g_{\mu\nu}\tilde{t}^\mu\tilde{t}^\nu = g_{\mu\nu}(\partial_t)^\mu(\partial_t)^\nu = g_{tt} < 0$ işleminden anlaşılır⁴⁴. ∂_t niceliği gelecek yönlü seçilebilir⁴⁵ (*time – orientation*). Daha sonra $l_- = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)\partial_t - \Delta\partial_r + a\partial_\phi]$ *null* geodezik vektörüne bakıldığında ergosfer bölgesinin dışında, ∂_t ile aynı zaman konisinde olduğu anlaşılır (Çünkü l_- vektörünün zaman bileşeni bu bölgede $\frac{(r^2+a^2)}{\Delta}\partial_t > 0$ olur). Dolayısıyla bu bölgede l_- , gelecek – yönlü olur.

Ergosfer bölgesinde ise ∂_t zamansal bir vektör olmadığından, l_- vektörü Kerr – Schild koordinat sistemine dönüştürülerek ergosfer içerisinde uyumlu olan bir (gelecek yönlü) $\bar{l}_-$ vektörü (3.58)’de tanımlanmıştır. $\bar{l}_-$ vektörünün ergosfer içerisinde gelecek yönlü olduğunu gösterebilmek için $g(\bar{l}_-, \tilde{t}) < 0$ koşuluna bakılır. Yukarıdaki (3.53a) ve (3.58) ilişkilerinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
g(\bar{l}_-, \tilde{t}) &= g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\bar{l}_-)^{\bar{\mu}}(\partial_t)^{\bar{\nu}} = g_{\bar{\mu}\bar{t}}(\bar{l}_-)^{\bar{\mu}}(\partial_t)^{\bar{t}} = g_{\bar{t}\bar{t}}(\bar{l}_-)^{\bar{t}}(\partial_t)^{\bar{t}} + g_{\bar{r}\bar{t}}(\bar{l}_-)^{\bar{r}}(\partial_t)^{\bar{t}} \\
&= g_{\bar{t}\bar{t}}(\bar{l}_-)^{\bar{t}}(\partial_{\bar{t}})^{\bar{t}} + g_{\bar{r}\bar{t}}(\bar{l}_-)^{\bar{r}}(\partial_{\bar{t}})^{\bar{t}} = g_{\bar{t}\bar{t}}(\bar{l}_-)^{\bar{t}} + g_{\bar{r}\bar{t}}(\bar{l}_-)^{\bar{r}} \\
&= g_{\bar{t}\bar{t}} - g_{\bar{r}\bar{t}} = -1 + \frac{2mr}{\rho^2} - \left(\frac{2mr}{\rho^2} \right) = -1 \Rightarrow \\
g(\bar{l}_-, \tilde{t}) &< 0
\end{aligned} \tag{3.59a}$$

bulunur.

(3.59a) eşitsizliğine, Boyer – Linquist koordinatları kullanılarak da erişilebilir. Bunun için aşağıdaki gibi bir yol izlenebilir.

⁴⁴ Burada ve sonraki bölümlerde, $\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} := (\partial_\mu)^\nu$ notasyonu kullanılmıştır.

⁴⁵ Yani ∂_t vektörünün zaman bileşeni pozitif seçilmiştir.

$$\begin{aligned}
g(\bar{l}_-, \tilde{t}) &= g_{\mu\nu}(\bar{l}_-)^{\mu}(\partial_t)^{\nu} = g_{\mu 0}(\bar{l}_-)^{\mu}(\partial_t)^0 = g_{\mu 0}(\bar{l}_-)^{\mu} \\
&= g_{tt}(\bar{l}_-)^t + g_{rt}(\bar{l}_-)^r + g_{\theta t}(\bar{l}_-)^{\theta} + g_{\phi t}(\bar{l}_-)^{\phi}
\end{aligned} \tag{3.59b}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{l}_-)^t &= (\partial_{\bar{t}})^t - (\partial_{\bar{r}})^t = (\partial_t)^t - \left(\partial_r - \frac{2mr}{\Delta} \partial_{\bar{t}} - \frac{a}{\Delta} \partial_{\bar{\phi}} \right)^t \\
&= 1 - \left((\partial_r)^t - \frac{2mr}{\Delta} (\partial_t)^t - \frac{a}{\Delta} (\partial_{\phi})^t \right) = 1 - \left(-\frac{2mr}{\Delta} \right) \Rightarrow \\
(\bar{l}_-)^t &= \frac{r^2 + a^2}{\Delta}
\end{aligned} \tag{3.59c}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{l}_-)^r &= (\partial_{\bar{t}})^r - (\partial_{\bar{r}})^r = (\partial_t)^r - \left(\partial_r - \frac{2mr}{\Delta} \partial_{\bar{t}} - \frac{a}{\Delta} \partial_{\bar{\phi}} \right)^r \\
&= - \left((\partial_r)^r - \frac{2mr}{\Delta} (\partial_t)^r - \frac{a}{\Delta} (\partial_{\phi})^r \right) \Rightarrow \\
(\bar{l}_-)^r &= -1
\end{aligned} \tag{3.59d}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{l}_-)^{\theta} &= (\partial_{\bar{t}})^{\theta} - (\partial_{\bar{r}})^{\theta} = (\partial_t)^{\theta} - \left(\partial_r - \frac{2mr}{\Delta} \partial_{\bar{t}} - \frac{a}{\Delta} \partial_{\bar{\phi}} \right)^{\theta} \\
&= (\partial_t)^{\theta} - \left((\partial_r)^{\theta} - \frac{2mr}{\Delta} (\partial_t)^{\theta} - \frac{a}{\Delta} (\partial_{\phi})^{\theta} \right) \Rightarrow \\
(\bar{l}_-)^{\theta} &= 0
\end{aligned} \tag{3.59e}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{l}_-)^{\phi} &= (\partial_{\bar{t}})^{\phi} - (\partial_{\bar{r}})^{\phi} = (\partial_t)^{\phi} - \left(\partial_r - \frac{2mr}{\Delta} \partial_{\bar{t}} - \frac{a}{\Delta} \partial_{\bar{\phi}} \right)^{\phi} \\
&= (\partial_t)^{\phi} - \left((\partial_r)^{\phi} - \frac{2mr}{\Delta} (\partial_t)^{\phi} - \frac{a}{\Delta} (\partial_{\phi})^{\phi} \right) \Rightarrow \\
(\bar{l}_-)^{\phi} &= \frac{a}{\Delta}
\end{aligned} \tag{3.59f}$$

Buradan (3.59b) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
g(\bar{l}_-, \tilde{t}) &= - \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right) \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right) + g_{rt}(-1) + g_{\theta t}(\bar{l}_-)^{\theta} - \frac{2mra}{\rho^2} \left(\frac{a}{\Delta} \right) \\
g(\bar{l}_-, \tilde{t}) &= -1
\end{aligned} \tag{3.59g}$$

bulunur.

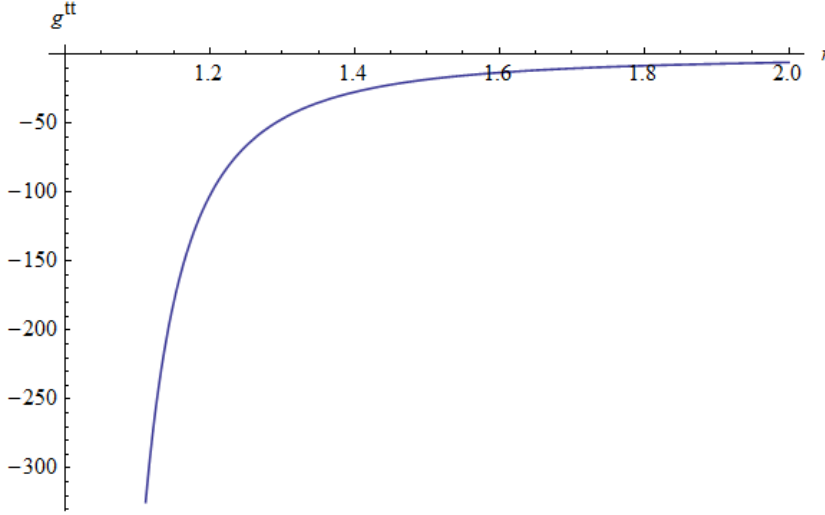
Daha sonra (3.3) ve (3.4) dörtlü – gradyent operatörü kullanılarak ergosferde,

$$g = g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Rightarrow$$

$$g_{\mu\nu} \nabla^\mu t \nabla^\nu t = g^{\mu\nu} \nabla_\mu t \nabla_\nu t = g^{tt} = -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta} \Rightarrow$$

$$g^{tt} < 0 \quad (3.60)$$

eşitsizliği elde edilir.



Şekil 3.4: Ekvatorial düzlemde ($\theta=\pi/2$), $a = m = 1$ dönme parametreli bir kara deliğin, dış olay – ufku $r = m$ ile ergosfer yüzeyi ($r = 2m$) arasında g^{tt} bileşeninin değişimi gösterilmektedir.

Buradan $\nabla^\mu t$ vektörünün ergosferde zamansal olduğu anlaşılır. Yukarıdaki (3.57a) ve (3.58) ifadeleri yardımıyla,

$$g_{\mu\nu} \bar{l}^\mu \nabla^\nu t = \bar{l}^\mu \nabla_\mu t = \bar{l}^t = \partial_{\bar{t}} t - \partial_{\bar{r}} t = \partial_t t - \partial_{\bar{r}} t = 1 - \partial_{\bar{r}} t \quad (3.61)$$

eşitliği elde edilir. (3.61) Eşitliğinin son terimi, (3.42) dönüşüm matrisi yardımıyla,

$$\partial_{\bar{r}} = B_t^\mu \partial_\mu = B_t^t \partial_t + B_t^r \partial_r + B_t^\theta \partial_\theta + B_t^\phi \partial_\phi = -\frac{2mr}{\Delta} \partial_t + \partial_r - \frac{a}{\Delta} \partial_\phi \Rightarrow$$

$$\partial_{\bar{r}} t = -\frac{2mr}{\Delta} \quad (3.62)$$

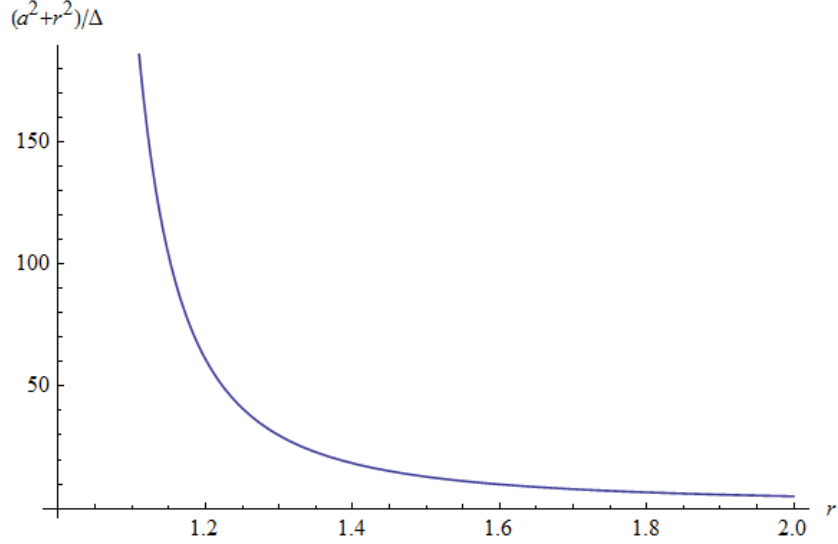
olarak bulunur. (3.62) ifadesi (3.61)'de yerine yazılırsa⁴⁶,

⁴⁶ (3.36a,b) null geodezik ifadelerine bakıldığında $\bar{l}^t = l^t$ olduğu görülmektedir. Null geodezik vektörü gelecek yönlü ise $\bar{l}^t > 0$ olur.

$$g_{\mu\nu}\bar{l}^\mu\nabla^\nu t = \bar{l}^\mu\nabla_\mu t = \bar{l}^t = \partial_{\bar{t}}t - \partial_{\bar{r}}t = \partial_t t - \partial_{\bar{r}}t = 1 + \frac{2mr}{\Delta}$$

$$g_{\mu\nu}\bar{l}^\mu\nabla^\nu t = \bar{l}^\mu\nabla_\mu t = \bar{l}^t = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} > 0 \quad (3.63)$$

bulunur.



Şekil 3.5: Ekvatorial düzlemde ($\theta=\pi/2$), $a = m = 1$ dönme parametrelili bir kara deliğin dış olay – ufku $r = m$ ile ergosfer yüzeyi ($r = 2m$) arasında (3.63) ifadesinin değişimi gösterilmektedir.

Dolayısıyla $\bar{l}_-$ gelecek yönlü olduğundan⁴⁷, $\nabla^\nu t$ ‘nin ergosferde geçmiş yönlü zamansal (*past – directed timelike*) bir vektör olduğu anlaşılır⁴⁸. Sonuç olarak ergosferde $\tilde{t}$, zamansal vektör alanı olmadığı halde; gelecek yönlü $u(\tau) = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ dördü – hızı sahip bir gözlemci için (3.8) yardımıyla,

$$0 < g_{\mu\nu}u^\mu\nabla^\nu t = u^\mu\nabla_\mu t = u^t = \dot{t} \quad (3.64)$$

t koordinat fonksiyonunun arttığı görülür.

Statik bir gözlemci için r , θ ve ϕ koordinatları sabittir. Ergosferde $\tilde{t}$ vektörü, uzaysal vektör alanı olduğundan ergosferdeki gözlemci sabit kalmaz (Yani r, θ, ϕ koordinatlarından en az biri yönünde hareket etmek zorunda kalır).

⁴⁷ Bkz. (3.63)

⁴⁸ Çünkü herhangi bir A vektörünün *kontrovaryant* ve *kovaryant* bileşenleri arasında $A^0 = -A_0$, $A^1 = A_1$, $A^2 = A_2$, $A^3 = A_3$ ilişkisi vardır. Bu nedenle $\nabla^t t = -\nabla_t t$ olduğundan $\nabla^t t$ geçmiş yönde zamansal vektör olur.

Dolayısıyla kara deliğin dönme yönünde sürüklenmeye uğrayan gözlemcinin ϕ koordinatı (uzaktaki gözlemciye göre) sabit kalamaz.

3.7 Olay Ufku

Daha önce (3.5) denklemleri ile verilen iç ve dış olay – ufku arasında kalan bölgede $r_- < r < r_+$, $\Delta = r^2 + a^2 - 2mr < 0$ olur. Buna bağlı olarak $-\partial_r$ vektör alanı zamansal olup⁴⁹, l_- ile aynı zaman konisinde bulunur. Bu durum,

$$g(-\partial_r, l_-) < 0 \quad (3.65)$$

ifadesiyle gösterilebilir. (3.65) ifadesi daha açık bir şekilde Δ ile ilişkilendirilerek, (3.57b) dönüşümünden,

$$-\partial_r = -\frac{2mr}{\Delta} \partial_{\bar{t}} - \partial_{\bar{r}} - \frac{a}{\Delta} \partial_{\bar{\phi}} \quad (3.66)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra $g(-\partial_r, l_-) = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(-\partial_r)^{\bar{\mu}} l_-^{\bar{\nu}}$ ifadesi⁵⁰ ;

$$\begin{aligned} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(-\partial_r)^{\bar{\mu}} l_-^{\bar{\nu}} &= g_{\bar{t}\bar{t}}(-\partial_r)^{\bar{t}} l_-^{\bar{t}} + g_{\bar{r}\bar{r}}(-\partial_r)^{\bar{r}} l_-^{\bar{r}} + g_{\bar{\theta}\bar{\theta}}(-\partial_r)^{\bar{\theta}} l_-^{\bar{\theta}} + g_{\bar{\phi}\bar{\phi}}(-\partial_r)^{\bar{\phi}} l_-^{\bar{\phi}} \\ &+ g_{\bar{t}\bar{r}}(-\partial_r)^{\bar{t}} l_-^{\bar{r}} + g_{\bar{r}\bar{t}}(-\partial_r)^{\bar{r}} l_-^{\bar{t}} + g_{\bar{r}\bar{\phi}}(-\partial_r)^{\bar{r}} l_-^{\bar{\phi}} + g_{\bar{\phi}\bar{r}}(-\partial_r)^{\bar{\phi}} l_-^{\bar{r}} \\ &+ g_{\bar{t}\bar{\phi}}(-\partial_r)^{\bar{t}} l_-^{\bar{\phi}} + g_{\bar{\phi}\bar{t}}(-\partial_r)^{\bar{\phi}} l_-^{\bar{t}} \\ g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(-\partial_r)^{\bar{\mu}} l_-^{\bar{\nu}} &= g_{\bar{t}\bar{t}}(-\partial_r)^{\bar{t}} l_-^{\bar{t}} + g_{\bar{r}\bar{r}}(-\partial_r)^{\bar{r}} l_-^{\bar{r}} + g_{\bar{t}\bar{r}}(-\partial_r)^{\bar{t}} l_-^{\bar{r}} \\ &+ g_{\bar{r}\bar{t}}(-\partial_r)^{\bar{r}} l_-^{\bar{t}} + g_{\bar{\phi}\bar{r}}(-\partial_r)^{\bar{\phi}} l_-^{\bar{r}} + g_{\bar{r}\bar{\phi}}(-\partial_r)^{\bar{r}} l_-^{\bar{\phi}} \end{aligned} \quad (3.67)$$

formuna getirilir. Buradan (3.53a), (3.58) ve (3.66) eşitlikleri kullanılarak değerleri (3.67) de yerine yazıldığında,

$$g(-\partial_r, l_-) = \frac{\rho^2}{\Delta} \quad (3.68)$$

ilişkinine ulaşılır. Sonuç olarak $r_- < r < r_+$ bölgesinde $\Delta < 0$ olduğu için, (3.65) ifadesi $g(-\partial_r, l_-) < 0$ olur. Buna bağlı olarak $-\partial_r$ ifadesinin olay – ufku

⁴⁹ Belirtilen aralıkta $(-\partial_r)(-\partial_r) = (\partial_r)^2 = g_{rr} < 0$ olur.

⁵⁰ $g(-\partial_r, l_-) = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(-\partial_r)^{\bar{\mu}} l_-^{\bar{\nu}} = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(-\partial_r)^{\bar{\mu}} \bar{l}_-^{\bar{\nu}}$ olarak yazılabilir. Ayrıca $l_- = \frac{1}{\Delta}[(r^2 + a^2)\partial_{\bar{t}} - \Delta\partial_{\bar{r}} + a\partial_{\bar{\phi}}] = \frac{1}{\Delta}[(r^2 + a^2)\partial_{\bar{t}} - \Delta(\frac{2mr}{\Delta}\partial_{\bar{t}} + \partial_{\bar{r}} + \frac{a}{\Delta}\partial_{\bar{\phi}}) + a\partial_{\bar{\phi}}] = \partial_{\bar{t}} - \partial_{\bar{r}} = \bar{l}_-$ olur. Ayrıca, $l_-^{\bar{\theta}} = \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}\partial_{\bar{t}} - \partial_{\bar{r}} + \frac{a}{\Delta}\partial_{\bar{\phi}}\right)^{\bar{\theta}} = \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}\partial_{\bar{t}} - \frac{2mr}{\Delta}\partial_{\bar{t}} - \partial_{\bar{r}} - \frac{a}{\Delta}\partial_{\bar{\phi}} + \frac{a}{\Delta}\partial_{\bar{\phi}}\right)^{\bar{\theta}} = (\partial_{\bar{t}})^{\bar{\theta}} - (\partial_{\bar{r}})^{\bar{\theta}} = 0$ ve $l_-^{\bar{\phi}} = \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}\partial_{\bar{t}} - \partial_{\bar{r}} + \frac{a}{\Delta}\partial_{\bar{\phi}}\right)^{\bar{\phi}} = \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}\partial_{\bar{t}} - \frac{2mr}{\Delta}\partial_{\bar{t}} - \partial_{\bar{r}} - \frac{a}{\Delta}\partial_{\bar{\phi}} + \frac{a}{\Delta}\partial_{\bar{\phi}}\right)^{\bar{\phi}} = (\partial_{\bar{t}})^{\bar{\phi}} - (\partial_{\bar{r}})^{\bar{\phi}} = 0$ olur

içerisinde, gelecek – yönlü bir vektör alanı olduğu anlaşılır. Benzer şekilde gelecek yönlü u dörtlü – hıza sahip bir parçacık $r_- < r < r_+$ bölgesinde,

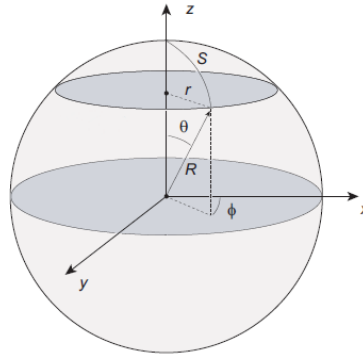
$$g(u, -\partial_r) < 0 \rightarrow \dot{r} < 0 \quad (3.69)$$

olduğu anlaşılır⁵¹. O halde olay ufku giren bütün parçacıklar (kütleli yada kütsüz), $r < r_-$ bölgesine gelinceye kadar “ r ” koordinatının azalan yönünde ilerlemek zorunda kalır. Buradan çıkarılan bir başka sonuç ise $r = r_+$ bölgesinin tek – yön geçirgen zar (*one – way membrane*) gibi davranmasıdır.

Şekil (3.6) ile gösterilen 2 – boyutlu küresel bir yüzey için tanımlanan dl^2 uzaklık elemanı,

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.70)$$

eşitliğiyle verilir.



Şekil 3.6: Küresel koordinatlarda 2 – boyutlu küresel yüzey gösterilmektedir.

Bir Kerr kara deliğinin olay – ufkunun yarıçapı $r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$ eşitliği ile verildiğinden o kara delik için r_+ sabit olur. Metrik stasyoner olduğundan olay ufku, t koordinatının sabit olduğu yüzeye karşılık gelir. Dolayısıyla koordinat diferansiyelleri $dt = dr = 0$ olur. (3.2a) Kerr metriğinde yerine yazıldığında iki boyutlu Kerr olay – ufku aralığı,

$$ds^2 = \rho_+^2 d\theta^2 + \frac{[(r_+^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]}{\rho_+^2} \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$ds^2 = \rho_+^2 d\theta^2 + \left(\frac{2mr_+}{\rho_+^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.71)$$

⁵¹ (3.69) ifadesinin elde edilişi için bkz. EK.I

olarak bulunur⁵².

Sonuç olarak (3.71) yüzey aralığının, (3.70) den farklı olduğu görülmektedir. Buradan Kerr olay ufkunun yüzeyinin, 2 – boyutlu küresel bir yüzeyden farklı olduğu anlaşılır. Bu farklılık, olay ufkunun çevre uzunluğunu hesaplarken daha açık görülür.

Kerr kara deliğinin ekvator düzleminde ($\theta = \pi/2$) sabit r koordinatı için çevre,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta]^{1/2}}{r} d\phi \quad (3.72)$$

denklemlerle bulunur. Olay ufkunda $r = r_+$ olduğundan (3.72) eşitliği,

$$\int_0^{2\pi} \frac{[(r_+^2 + a^2)^2 - a^2\Delta]^{1/2}}{r_+} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(2mr_+)^2}}{r_+} d\phi = 4\pi m \quad (3.73)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki (3.73) çevre uzunluğu, a dönme parametresine bağlı değildir. Schwarzschild kara deliğinde ($\theta = \pi/2$) düzleminde olay ufkunun çevresi hesaplanırsa (2.1) metriği yardımıyla,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 \theta} d\phi = \int_0^{2\pi} r_s d\phi = 2\pi r_s = 4\pi m$$

bulunur. O halde Kerr olay ufkunun ekvator bölgesindeki çevresi, Schwarzschild olay ufku çevresine (kütleler aynı olması şartıyla) eşit olur.

Kerr olay ufkunda kutuplardan geçen ($\theta = 0, \pi$) eğrinin çevresi ise,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\theta\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \rho_+ d\theta \quad (3.74)$$

eşitliğiyle bulunur. Bu çevre uzunluğunun, ekvator düzleminde ölçülen (3.73) çevre uzunluğundan farklı olduğu anlaşılır. Bu sonuç Kerr olay ufkunun küresel simetrik olmadığını gösterir.

Kerr olay ufkunun alan hesaplamalarında (3.2d) ifadesi kullanılır. Bu ifade olay – ufku için,

⁵² Burada $\rho_+^2 = r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ifadesine eşittir. Olay – ufkunda $\Delta = 0$ olur.

$$\Sigma^2 = (r_+^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta = (2mr_+)^2 = 4m^2 \left[m + \sqrt{m^2 - a^2} \right]^2 \quad (3.75)$$

şeklinde yazılabilir. Olay ufğunun alanı A_H , (3.2a) metrik bileşenleri kullanılarak,

$$A_H = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} d\theta d\phi = \Sigma \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi$$

$$A_H = 8\pi m \left[m + \sqrt{m^2 - a^2} \right] \quad (3.76)$$

denklemleriyle hesaplanır. Ayrıca (3.76) ifadesi r_+ cinsinden $A_H = 4\pi 2mr_+$ olarak yazılabildiğinden olay – ufku alanı,

$$A_H = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (3.77)$$

şeklinde elde edilir.

4. KARA DELİKLERDE DÖNME ENERJİSİ ve ENERJİ AKTARIM SÜREÇLERİ

Kerr metriği büyük r değerlerinde Minkowski uzay – zaman metriğine dönüştüğünden¹ metriğin açısal koordinatlarıyla ilişkili olan u_2 ve u_3 nicelikleri, büyük r uzaklıklarında (yani $g_{30} = 0$ alınabilen uzaklıklarda...)

$$u_2 = g_{2\mu}u^\mu = g_{20}u^0 + g_{21}u^1 + g_{22}u^2 + g_{23}u^3 = g_{22}u^2 = L_\theta = r^2 \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$u_3 = g_{3\mu}u^\mu = g_{30}u^0 + g_{31}u^1 + g_{32}u^2 + g_{33}u^3 = g_{33}u^3 = L_\phi = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}$$

$$L^2 = r^4 \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^4 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

olarak ifade edilir ((4.1)'de vektörel toplama yapılmıştır). Burada L , birim kütle başına toplam açısal momentumu gösterir. Yukarıdaki (4.1) eşitliğinde, (3.34c) ve (3.14b) ifadeleri yerine yazılırsa büyük r değerleri için²,

$$L^2 = \frac{r^4}{\rho^4} \left\{ Q + \cos^2 \theta \left[(q^2 + E^2)a^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] + \sin^4 \theta \left(\frac{L_z}{\sin^2 \theta} - aE + \frac{a}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - L_z a] \right)^2 \right\}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho^2 \dot{\phi} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{L_z}{\sin^2 \theta} - aE + \frac{aE(r^2 + a^2)}{r^2 + a^2 - 2mr} - \frac{L_z a^2}{r^2 + a^2 - 2mr} \right) = \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \Rightarrow$$

$$\rho^2 \dot{\phi} \approx r^2 \dot{\phi} = \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \quad (4.2a)$$

olur. (4.2a) ifadesi (4.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$L^2 = Q + a^2 \cos^2 \theta (q^2 + E^2) + (1 - \cot^2 \theta) L_z^2 \quad (4.2b)$$

bulunur. Burada (4.2b) eşitliği, bir parçacığın toplam açısal momentumunun θ koordinatına bağlı olarak değiştiğini gösterir. Buna karşın kara deliğin toplam açısal momentumuyla, parçacığın açısal momentumu toplamı korunur. Sonuç

¹ Minkowski metriği $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = -d\tau^2$ olarak verilebilir.

² Büyük r değerleri için, $\rho^2 \approx r^2$ alınabilir. Dolayısıyla $\rho^2 \dot{\phi} \approx r^2 \dot{\phi}$ olur.

olarak parçacık ile kara delik arasında açısal momentum alışverişi olduğu söylenilebilir.

4.1 Radyal Hareket

Radyal hareket denklemi (3.28a) ve (3.34a) eşitlikleri kullanılarak,

$$\rho^4 \dot{r}^2 = [aL_z - (r^2 + a^2)E]^2 - \Delta[Q + (L_z - aE)^2 - q^2 r^2] \quad (4.3)$$

denklemleri belirlenebilir. Burada (4.3) denklemi, E 'nin ikinci dereceden formu biçiminde (4.4) olarak da gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \rho^4 \dot{r}^2 = r^2 \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2}{r} \right) E^2 - 4mraL_z E - r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) L_z^2 \\ - \Delta(Q - r^2 q^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2 Etkin Potansiyel

Schwarzschild metriğinde etkin potansiyel enerji (*effective potential energy*) incelendiğinde $V_{eff}^2 = E^2$ için, $\dot{r} = 0$ durumuna karşılık geldiği görülür³. Benzer yoldan, Kerr metriği için de etkin potansiyel belirlenebilir. Bunun için (4.4) eşitliğini sıfır yapan E değerlerine bakılarak denklem çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta] E^2 - 4mraL_z E - r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) L_z^2 - \Delta(Q - r^2 q^2) = 0 \\ V_{eff} = \frac{2amrL_z \pm \sqrt{\Delta[a^2(2mr + r^2)(Q - q^2 r^2) + r^4(Q + L_z^2 - q^2 r^2)]}}{r^4 + a^2(2mr + r^2)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

olarak bulunur⁴. Denklemi sağlayan etkin potansiyel değerleri V_+ ve V_- olmak üzere (4.3) eşitliği,

$$\rho^4 \dot{r}^2 = [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta](E - V_+)(E - V_-) \quad (4.6)$$

formunda yazılabilir⁵. Hareketin fiziksel olabilmesi için $\dot{r}$ reel olmalıdır. Buradan $E \geq V_+$ veya $E \leq V_-$ olması gerektiği anlaşılır.

³ bkz. (Raine and Thomas, 2009) s. 24

⁴ (4.4) eşitliğinde $r^2 \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2}{r} \right) = [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta]$ özdeşliğinden yararlanılmıştır.

⁵ (4.6) ifadesinde kullanılan ilişki için Ek.A kısmına bakılabilir.

Schwarzschild metriğinde olay ufkunun dışında kalan bütün bölgelerde etkin potansiyel pozitiftir (yani parçacıklar pozitif enerjilidir.). Bu durumun aksine (4.6) denkleminde de görülebildiği gibi, Kerr kara deliğinde olay ufkunun dış tarafında da negatif enerjili parçacıklar bulunabilir.

Etkin potansiyelin limit durumuna bakılırsa $r \rightarrow \infty$ için $V_+ \rightarrow \sqrt{-q^2}$ olur. Zamansal yörüngelerdeki parçacıklar için $q^2 = -1$ olduğundan $V_+ \rightarrow 1$ olur. Dolayısıyla açık (bağlı olmayan) yörüngeler için ($E \geq V_+$ olduğundan...) $E \geq 1$ olur⁶. Bunun tersi olarak $E < 1$ durumundaki parçacıklar kapalı (bağlı) yörüngelerde bulunurlar (yani parçacıklar sonsuza kaçamazlar).

4.3 Çerçeve Sürüklenmesi (*Frame Dragging*)

Açısal momentumu sıfır olan ($L_z = 0$) sonsuzdaki bir parçacığın, Kerr kara deliğine serbest düştüğü durum göz önüne alındığında (3.13) denklemi,

$$\rho^2 \dot{t} = \frac{\Sigma^2 E}{\Delta} = \frac{[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta]}{\Delta} E \quad (4.7)$$

formuna dönüşür. Açısal momentum ile ilişkili (3.14a) denklemi ise,

$$\rho^2 \dot{\phi} = \frac{2amr}{\Delta} E \quad (4.8)$$

formuna dönüşür. Açıkça görüldüğü gibi parçacık için başlangıçta $L_z = 0$ olmasına rağmen kara deliğe düşerken açısal bir harekete zorlanır. Uzaktaki bir gözlemciye göre düşen parçacığın açısal hızı $\omega(r, \theta)$,

$$\omega(r, \theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{2amr}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} \quad (4.9a)$$

olarak hesaplanır. Yukarıdaki (4.9a) denkleminin (4.8) ve (3.13) yardımıyla,

$$\omega = \frac{2amr}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} = \frac{g^{30}}{g^{00}} \quad (4.9b)$$

ifadesine eşit olduğu görülür. Ayrıca (4.9b) denkleminin (3.3)'teki kontrovaryant metrik bileşenleriyle ilişkili olduğu da birkaç cebirsel işlem ile anlaşılabilir.

⁶ Bu durumda parçacığın hareket enerjisinin durgun kütle enerjisinden fazla olduğu da anlaşılır. Çünkü önceki bölümlerde parçacığın durgun kütlesi $m' := 1$ olarak alınmıştı. Bu kütle dörtlü hız vektörüyle ilişkili olarak zamansal yörüngelerde $u^\mu u_\mu = (m')^2 q^2 = -(m')^2$ olur. Bkz. (O'Neill, 1992) s.178

Pozitif olan a terimi, pozitif ω anlamına geldiğinden parçacık kara deliğin dönme yönünde açısal hız kazanmış olur.

Burada dikkat edilmesi gereken en önemli husus, açısal momentumun korunduğunun bilinmesidir. Dolayısıyla kara deliğe doğru ilerleyen parçacığın açısal momentumu sıfır olmalıdır. Buna karşın parçacık belirli bir açısal hız kazanır. Çünkü açısal momentumun açılımında $L_z = u_3 = g_{3\mu}u^\mu = g_{30}u^0 + g_{33}u^3$, çapraz metrik terimi bulunduğundan açısal momentum sıfırken açısal hız sıfırdan farklı bir değere sahip olur.

Bu fenomenin fiziksel anlamı; lokal eylemsiz referans sistemlerinin, kara deliğin dönme yönünde sürüklenmeye uğraması olarak düşünülebilir. Bir başka ifadeyle, deliğin yakınında gerçekleşen bütün fiziksel olaylar (kütleli ya da kütesiz parçacıklar) ve oluşan alanlar (manyetik ve elektrik alan çizgileri) uzaktaki gözlemciye göre sürüklenmek zorundadır.

Sürüklenme ekvatora yakın enlemlerde güçlü, kutuplarda ise ($\theta = 0, \pi$) daha zayıf olur. Olay ufku üzerinde ($\Delta = 0$ ve $r = r_+$) açısal hızı hesaplamak için (4.9a) eşitliğinden,

$$\omega_+ = \frac{2amr_+}{(r_+^2 + a^2)^2} = \frac{2amr_+}{(2mr_+)^2}$$

$$\omega_+ = \omega_H = \frac{a}{2mr_+} \quad (4.10)$$

denklemini kullanılır⁷. Burada ω_H , kara deliğin açısal hızı olarak tanımlanır. Dikkat edilmesi gereken nokta, sürüklenme hızının olay ufku üzerinde enlemden bağımsız olduğudur. Bu bağımsızlık, katı cisim dönmesine benzetilebilir. Bununla birlikte kara deliğin olay ufku katı bir yüzey olarak tanımlanamaz (nötron yıldızlarının katı bir yüzeyi olduğundan toplanma diskinden yüzeye çarpan parçacık X – ışını yayar⁸).

Açısal momentumu sıfırdan farklı olan bir parçacığın sonsuzdaki bir gözlemciye göre açısal hızı Ω olsun.

⁷ (4.10) eşitliği, Kerr – Newmann kara deliği (Q elektrik yüklü, dönen kara delik) için de aynıdır. Ancak (4.9) açısal hız eşitliği yerine, $\omega(r, \theta, Q) = \frac{(2mr-Q^2)a}{\rho^2(r^2+a^2)+(2mr-Q^2)a^2 \sin^2 \theta}$ kullanılır.

⁸ Bkz. (Horák, 2005)(Horák, 2005)

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^3}{u^0} = \frac{g^{33}u_3 + g^{30}u_0}{g^{00}u_0 + g^{03}u_3} \quad (4.11a)$$

Bu denkleme (4.9b) ifadesi eklenip çıkartılırsa ($g^{30} = g^{03}$),

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega - \frac{g^{30}}{g^{00}} + \frac{g^{33}u_3 + g^{30}u_0}{g^{00}u_0 + g^{03}u_3} = \omega - \frac{u_3[(g^{30})^2 - g^{00}g^{33}]}{(g^{00})^2u_0 + g^{00}g^{03}u_3} \\ \Omega &= \omega - \frac{[(g^{30})^2 - g^{00}g^{33}]}{(g^{00})^2} \frac{u_3}{[u_0 + \omega u_3]} \end{aligned} \quad (4.11b)$$

elde edilir. Yukarıda (4.11b) eşitliğinde (3.7e) özdeşliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega - \left[\frac{1}{\left(-\frac{\Sigma^2}{\rho^2\Delta}\right)^2 \Delta \sin^2 \theta} \right] \frac{u_3}{[u_0 + \omega u_3]} \\ \Omega &= \omega - \frac{\rho^4 \Delta}{\Sigma^4 \sin^2 \theta} \frac{u_3}{[u_0 + \omega u_3]} \end{aligned} \quad (4.12)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem bütün parçacıklara (kütleli ya da kütsüz) uygulanabilir. Parçacığın sahip olduğu açısal momentum kara delik ile aynı yönde ise $u_3 < 0$, zıt yönde ise $u_3 > 0$ olur. Parçacıkların açısal momentumları hangi değeri alırsa alsın olay – ufkunda aynı açısal hızla sürüklenmeye uğrayacakları, (4.12) eşitliğinden açıkça görülmektedir.

Kerr metriğinde ekvator düzlemi ($\theta = \pi/2$) için geodezik hareket incelendiğinde; ekvatorial geodeziklerin, (B.7) Euler – Lagrange denkleminin çözümleri olduğu görülür. Koordinat bileşenlerinden θ 'nın durumu göz önüne alındığında; (B.9) Lagrange fonksiyonu kullanılarak Euler – Lagrange denklemi⁹ (λ , geodeziğin afin parametresidir.),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) &= \frac{d}{d\lambda} (g_{2\mu} \dot{x}^\mu) = \frac{d}{d\lambda} (g_{22} \dot{x}^2) = \frac{d}{d\lambda} (\rho^2 \dot{\theta}) = \rho^2 \ddot{\theta} + \dot{\theta} \frac{d\rho^2}{d\lambda} \\ \frac{d}{d\lambda} (\rho^2 \dot{\theta}) &= \rho^2 \ddot{\theta} + \dot{\theta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\rho^2}{dx^\mu} = \rho^2 \ddot{\theta} + \rho^2_{,\mu} \dot{x}^\mu \dot{\theta} \end{aligned} \quad (4.13)$$

olarak bulunur. Ayrıca $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}$ ifadesi için¹⁰,

⁹ $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{d}{d\lambda} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu)$

¹⁰ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\theta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (4.14)$$

bulunur. Yukarıdaki (4.13) ve (4.14) ifadeleri (B.7) denkleminde yerine yazılarak,

$$\rho^2 \ddot{\theta} + \rho^2_{,\mu} \dot{x}^\mu \dot{\theta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\theta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (4.15)$$

eşitliği elde edilir.

Kerr metrik bileşenleri (3.2a) yardımıyla tekrar yazılarak şu işlemler yapılır:

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right), \quad g_{t\phi} = g_{\phi t} - \frac{2mra}{\rho^2} \sin^2 \theta, \quad g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = \rho^2,$$

$$g_{\phi\phi} = \left[r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] \sin^2 \theta$$

Yukarıdaki (4.15) denkleminin sağ tarafını $\frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\theta} u^\alpha u^\beta = \frac{1}{2} g_{tt,\theta} \dot{t}^2 + g_{\phi t,\theta} \dot{\phi} \dot{t} + \frac{1}{2} g_{rr,\theta} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} g_{\theta\theta,\theta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} g_{\phi\phi,\theta} \dot{\phi}^2$ şeklinde açıp bileşenler yerine yazılarak türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\theta} u^\alpha u^\beta = & -\frac{mr(\rho^2_{,\theta})}{\rho^4} \dot{t}^2 + \left[\frac{mra \sin^2 \theta}{\rho^4} \rho^2_{,\theta} - \frac{2mra \sin \theta \cos \theta}{\rho^2} \right] \dot{t} \dot{\phi} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\rho^2_{,\theta}}{\Delta} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \rho^2_{,\theta} \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (4.16a)$$

$$+ \left[(r^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta + \frac{4mra^2 \sin^3 \theta \cos \theta}{\rho^2} - \frac{mra^2 \sin^4 \theta}{\rho^4} \rho^2_{,\theta} \right] \dot{\phi}^2$$

denklemini elde edilir. Yukarıdaki eşitlik alternatif bir formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\theta} u^\alpha u^\beta = & \frac{1}{2} \left[\rho^2_{,\theta} \left(\frac{\dot{r}^2}{\Delta} + \dot{\theta}^2 \right) + 2(r^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right. \\ & - \frac{2mr}{\rho^4} \rho^2_{,\theta} (a \sin^2 \theta \dot{\phi} - \dot{t})^2 \\ & \left. + \frac{8mra}{\rho^2} (a \sin^2 \theta \dot{\phi} - \dot{t}) \sin \theta \cos \theta \dot{\phi} \right] \end{aligned} \quad (4.16b)$$

Euler – Lagrange denkleminin sol tarafını veren (4.13) eşitliğiyle, sağ tarafı olan (4.16b) eşitlikleri birleştirilerek,

$$\begin{aligned}
\rho^2 \ddot{\theta} + \rho^2_{,\mu} \dot{x}^\mu \dot{\theta} &= \rho^2 \ddot{\theta} + \rho^2_{,r} \dot{r} \dot{\theta} + \rho^2_{,\theta} \dot{\theta}^2 \\
&= \frac{1}{2} \left[\rho^2_{,\theta} \left(\frac{\dot{r}^2}{\Delta} + \dot{\theta}^2 \right) + 2(r^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2mr}{\rho^4} \rho^2_{,\theta} (a \sin^2 \theta \dot{\phi} - \dot{t})^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{8mra}{\rho^2} (a \sin^2 \theta \dot{\phi} - \dot{t}) \sin \theta \cos \theta \dot{\phi} \right]
\end{aligned} \tag{4.16c}$$

denklemini elde edilir. Burada $\rho^2_{,r} = 2r$ ve $\rho^2_{,\theta} = -2a^2 \sin \theta \cos \theta$ olmak üzere yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\rho^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - 2a^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \\
&= \frac{1}{2} \left[-2a^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\dot{r}^2}{\Delta} + \dot{\theta}^2 \right) + 2(r^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4mr}{\rho^4} a^2 \sin \theta \cos \theta (a \sin^2 \theta \dot{\phi} - \dot{t})^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{8mra}{\rho^2} (a \sin^2 \theta \dot{\phi} - \dot{t}) \sin \theta \cos \theta \dot{\phi} \right]
\end{aligned} \tag{4.16d}$$

eşitliği elde edilir. Son bulunan (4.16d) denklemini $\theta = \pi/2$ için hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\rho^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \Rightarrow r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \\
\ddot{\theta} &= -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

ifadesi bulunur. Sonuç olarak başlangıçta ekvator düzleminde dolanan parçacık için θ koordinatı sabitse ($\dot{\theta} = 0$), aynı düzlemde dolanmaya devam edecektir.

Ekvatorial düzlemde $u_\mu = (u_0, 0, 0, u_3)$ dörtlü – hıza sahip bir parçacığın hareketi özel bir duruma karşılık gelir. Dörtlü – hızın $g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1$ skalar çarpımı açılarak,

$$g^{00}(u_0)^2 + 2g^{03}u_0u_3 + g^{33}(u_3)^2 + 1 = 0 \tag{4.18}$$

denklemini elde edilir. Bu ikinci derece denklem u_0 bileşenine göre çözüldüğünde,

$$u_0 = -\frac{g^{03}}{g^{00}} u_3 \mp \frac{\sqrt{((g^{03})^2 - g^{00}g^{33})(u_3)^2 - g^{00}}}{g^{00}} \tag{4.19a}$$

çözümlerine ulaşılır. Daha önce verilen özdeşliklerden (3.7e) kullanılarak (4.19a) çözümleri,

$$\begin{aligned}
u_0 &= -\omega u_3 \pm \frac{r^2 \Delta}{\Sigma^2} \sqrt{\frac{(u_3)^2}{\Delta} - \frac{\Sigma^2}{r^2 \Delta}} \\
&= -\omega u_3 \pm \frac{|u_3| r^2 \sqrt{\Delta}}{\Sigma^2} \sqrt{\left(1 - \frac{\Sigma^2}{r^2 (u_3)^2}\right)}
\end{aligned} \tag{4.19b}$$

formuna getirilir. Buradan (4.19b) eşitliği kullanılarak,

$$\frac{|u_3|}{u_0 + \omega u_3} = \pm \frac{\Sigma^2}{r^2 \sqrt{\Delta} \sqrt{\left(1 - \frac{\Sigma^2}{r^2 (L_z)^2}\right)}} \tag{4.19c}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak (4.19c) ifadesi (4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\Omega = \omega \pm \frac{r^2 \sqrt{\Delta}}{\Sigma^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\Sigma^2}{r^2 (L_z)^2}\right)}} \tag{4.20}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan ekvatorial düzlemdeki bir (birim kütle başına düşen L_z momentumlu) parçacığın veya bu düzleme iz düşümü olarak parçacığın azimutal yönde anlık açısal hızı hesaplanabilir.

4.4 Sıfır Açısal Momentum Gözlemcileri (ZAMOs – *Zero angular momentum observers*)

Schwarzschild metriğinde, herhangi bir koordinat noktasında sabit olarak bulunan bir gözlemcinin dördü – hızı $u^\mu = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, 0, 0, 0\right)$ olarak verilir¹¹. Bu gözlemcilerin evren çizgileri (*worldlines*)¹² sabit "t" koordinatına ortogonal olursa, $dx^\mu = (0, dr, d\theta, d\phi)$ koordinat diferansiyelleri olmak üzere $u_\mu dx^\mu = 0$ olur.

Kerr metriğinde ise çapraz terimler olduğundan,

$$\begin{aligned}
u_\mu dx^\mu &= g_{\mu\nu} u^\mu dx^\nu = g_{0\nu} u^0 dx^\nu + g_{1\nu} u^1 dx^\nu + g_{2\nu} u^2 dx^\nu + g_{3\nu} u^3 dx^\nu \\
&= g_{00} u^0 dt + g_{03} u^0 d\phi + g_{11} u^1 dr + g_{22} u^2 d\theta + g_{30} u^3 dt \\
&\quad + g_{33} u^3 d\phi
\end{aligned}$$

¹¹ $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d\tau^2 \Rightarrow u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$ olur.

¹² Parçacığın tanımlandığı uzay zaman geometrisinde takip ettiği yola evren çizgisi denir.

$$u_\mu dx^\mu = g_{03} u^0 d\phi = g_{03} (g_{00})^{-1/2} d\phi \neq 0$$

ortogonal değildir. Sonuç olarak aynı "t" koordinatındaki gözlemciler için eş zamanlılığı sağlayabilmek amacıyla sıfır açısal momentum gözlemcileri (ZAMOs) tanımlanır. Bu gözlemciler sabit r ve θ koordinatlarını koruyarak dönme yönünde ω açısal hız kazanırlar. Dolayısıyla bu gözlemciler, Schwarzschild metriğindeki sabit yörüngelerde dolanan gözlemcilere benzerler.

Dairesel yörüngede $u_3 = L_z = 0$ olan bir parçacık göz önüne alındığında¹³,

$$0 = u_3 = g_{33} u^3 + g_{03} u^0 \rightarrow$$

$$u^3 = -\frac{g_{30}}{g_{33}} u^0 \quad (4.21a)$$

olur. Yukarıdaki (4.21a) eşitliği ile (3.7h) ve (4.9b) ifadeleri birleştirilerek ZAMO durumu için,

$$u^3 = \omega u^0 \quad (4.21b)$$

eşitliği elde edilir.

Dörtlü – hızın $u^\mu u_\mu = u^0 u_0 + u^1 u_1 + u^2 u_2 + u^3 u_3 = u^0 u_0 = -1$ denklemi yardımıyla¹⁴,

$$\begin{aligned} u_0 &= g_{00} u^0 + g_{03} u^3 = \left(g_{00} + g_{03} \frac{u^3}{u^0} \right) u^0 = \left(g_{00} - g_{03} \frac{g_{30}}{g_{33}} \right) u^0 \\ &= \left(\frac{g_{00} g_{33} - (g_{03})^2}{g_{33}} \right) u^0 \\ u_0 &= \left(\frac{g_{00} g_{33} - (g_{03})^2}{g_{33}} \right) u^0 \end{aligned} \quad (4.21c)$$

bulunur. Yukarıdaki (4.21c) denklemi $u^0 u_0 = -1$ eşitliğinde yerine yazılarak u^0 terimi için,

$$u^0 = \sqrt{\frac{-g_{33}}{g_{00} g_{33} - (g_{03})^2}} = \sqrt{\frac{g_{33}}{\Delta \sin^2 \theta}} \quad (4.21d)$$

¹³ Kerr metriği $r \rightarrow \infty$ 'da düz uzay – zaman metriğine dönüşürken açısal momentumun kontrovaryant bileşeni $u^3 = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt} = 0$ olarak tanımlanabildiğinden bu gözlemcilere ZAMO denilir.

¹⁴ dörtlü hızın bileşenlerinden $u^1 = u^2 = 0$ ve $u_3 = 0$ olarak tanımlanmıştı.

ilişkisi elde edilir. Daha sonra (4.21b,d) denklemlerinden bu gözlemciler için dörtlü – hız,

$$(u^\mu)_{ZAMO} = \sqrt{\frac{g_{33}}{\Delta \sin^2 \theta}} + \omega \sqrt{\frac{g_{33}}{\Delta \sin^2 \theta}} = \left(\frac{g_{33}}{\Delta \sin^2 \theta} \right)^{1/2} (1,0,0,\omega) \quad (4.22)$$

olarak hesaplanabilir. Son olarak $dx_\mu(u^\mu)_{ZAMO}$ skalar ifadesine bakıldığında (4.23) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} dx_\mu(u^\mu)_{ZAMO} &= g_{\mu\nu} dx^\nu u^\mu = g_{0\nu} dx^\nu u^0 + g_{1\nu} dx^\nu u^1 + g_{2\nu} dx^\nu u^2 + g_{3\nu} dx^\nu u^3 \\ &= g_{00} dt u^0 + g_{03} d\phi u^0 + g_{30} dt u^3 + g_{33} d\phi u^3 \\ &= (g_{03} u^0 + g_{33} u^3) d\phi \\ dx_\mu(u^\mu)_{ZAMO} &= (g_{03} u^0 + g_{33} u^3) d\phi \end{aligned} \quad (4.23)$$

Bulunan (4.23) eşitliğinde parantez içindeki terim u_3 bileşenine eşittir¹⁵. Bu da $L_z = 0$ açısal momentumunu verir¹⁶. Buradan,

$$dx_\mu(u^\mu)_{ZAMO} = 0 \quad (4.24)$$

ifadesinin ortogonalite koşulunu sağladığı görülmektedir. Sonuç olarak başlangıçta açısal momentumu sıfır olan parçacığın uzaktaki gözlemcilere göre belirli bir açısal hız kazandığı anlaşılmaktadır.

4.5 Negatif Enerjili Yörüngeler

Hızı $u_{göz}^\mu$ olan yerel bir gözlemcinin belirli bir u^μ dörtlü – hızında ölçtüğü parçacığın enerjisi, $u_\mu u_{göz}^\mu$ ifadesiyle ilişkilidir. Bu enerji, konunun bir fonksiyonu olmakla birlikte daima pozitif değerler alır. Boyer – Lindquist koordinatlarında, sonsuzdaki bir gözlemciye göre parçacığın enerjisi $E = u_\mu \tilde{t}^\mu$ olur¹⁷. Bu enerji, parçacık serbest hareket ettiği sürece sabit bir nicelik olarak kalır. Ancak pozitif olması şart değildir. Bir parçacığın enerjisinin negatif olması $E < 0$; o parçacığın yörüngesinden sonsuza kaçabilmesi için, durgun kütle enerjisinden daha fazla bir enerjiye ihtiyaç olduğu anlamına gelir. Bir başka

¹⁵ bkz. (4.21a)

¹⁶ Açısal momentum konunun başında $L_z = 0$ olarak tanımlanmıştı.

¹⁷ bkz. (3.11) eşitliği.

deyişle parçacığın gravitasyonel bağlanma enerjisinin durgun kütle enerjisinden daha büyük olduğu duruma karşılık gelir.

Bölüm 4.1’de (4.4) radyal denklemi ekvatorial düzlemde¹⁸ $\dot{r} \neq 0$ durumu için tekrar çözülerek,

$$E = \frac{2amrL_z \pm \sqrt{4a^2m^2L_z^2r^2 - [r^4 + a^2(r^2 + 2mr)][L_z^2a^2 - (r^2 + L_z^2)\Delta - \dot{r}^2r^4]}}{r^4 + a^2(2mr + r^2)} \quad (4.25a)$$

ifadesi elde edilir. (3.13) denkleminde $dt/d\tau > 0$ sağlanabilmesi için (dolayısıyla dörtlü – hız vektörü gelecek yönlü olur.) gerekli koşulun,

$$\frac{\Sigma^2 E - 2amrL_z}{\rho^2 \Delta} > 0 \Rightarrow E > \frac{2amrL_z}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta} = \frac{2amrL_z}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2}$$

$$E > \frac{2amrL_z}{r^4 + a^2(2mr + r^2)} \quad (4.25b)$$

olması gerektiği anlaşılır. Dolayısıyla (4.25a)’nın pozitif kökü dikkate alınır. Köklü ifadenin içindeki terimler,

$$4a^2m^2L_z^2r^2 - [r^4 + a^2(r^2 + 2mr)][L_z^2a^2 - (r^2 + L_z^2)\Delta - \dot{r}^2r^4]$$

$$= r^4\Delta L_z^2 + [r^4 + a^2(r^2 + 2mr)](r^2\Delta + \dot{r}^2r^4)$$

olarak yeniden düzenlenir. Açısal momentumun $r^2 \ll L_z^2$ ve radyal hareketin kısıtlı olduğu durum düşünülürse, (4.25a)’da köklü ifadenin içindeki L_z^2 içermeyen terimler ihmal edilebilir. Ekvatorial düzlemde ergosfer yüzeyinde (*static limit surface*), $r = r_{st} = 2m$ ve $\Delta = a^2$ değerleri yerine yazılırsa $r^4\Delta L_z^2 = (2m)^2r^2a^2L_z^2$ elde edilir. Bulunan bu değer (4.25a) eşitliğinde yerine yazılarak,

$$E = \frac{2amrL_z + \sqrt{(2m)^2r^2a^2L_z^2}}{r^4 + a^2(2mr + r^2)} = \frac{2amrL_z + 2amr|L_z|}{r^4 + a^2(2mr + r^2)} \quad (4.25c)$$

ilişkisi bulunur. Dolayısıyla ergosferin içindeki yörüngelerin enerjileri,

$$E < \frac{2amrL_z + 2amr|L_z|}{r^4 + a^2(2mr + r^2)} \quad (4.25d)$$

eşitsizliği ile verilir. Açısal momentum $L_z < 0$ için (4.25d) denkleminde¹⁹, negatif enerjili yörüngelerin ergosferin içinde oluşabileceği anlaşılır.

¹⁸ (3.34c) denkleminde $\theta = \pi/2$ ve $Q = 0$ için ekvator düzleminde dolanan bir parçacığın yörüngesinin değişmeden kaldığını biliyoruz. Ekvatorial düzlem göz önüne alındığı için $Q = 0$ olur.

4.6 Penrose Enerji Aktarım Süreci

Kerr metriğiyle yapılan çalışmalarda, dönen kara deliklerin ergosfer olarak isimlendirilen bir bölgeye sahip oldukları bilinmekteydi. Roger Penrose 1969 yılında kendi ismiyle anılan bir süreç önererek (Penrose, 1969), kara deliğin dönme enerjisinin çevresindeki parçacıklara aktarılabilceğini teorik olarak gösterdi.

Ergosferin dışında kalan bölgede, bir geodezik boyunca hareket eden parçacık (kütlesine bakılmaksızın),

$$g(u, \tilde{t}) < 0 \quad (4.26)$$

koşulunu sağlar. Çünkü ergosferin dışında kalan bölgede $\tilde{t}$ vektör alanı gelecek yönlü (*future pointing*) ve zamansaldır (*timelike*)²⁰. Böyle bir geodezikteki parçacığın enerjisinin ise (3.11) yardımıyla pozitif olduğu görülür. Ergosferin içinde $\tilde{t}$ vektör alanı uzaysal (*spacelike*) olduğundan negatif enerjilerden söz edilebilir. Gelecek yönlü u dörtlü – hıza sahip gözlemci için ergosferin içinde $\dot{t} > 0$ ve $\dot{\phi} > 0$ olmalıdır²¹. Dolayısıyla geride geçen (3.13) ve (3.14a) eşitliklerinden,

$$\Sigma^2 E > 2amrL_z \quad (4.27a)$$

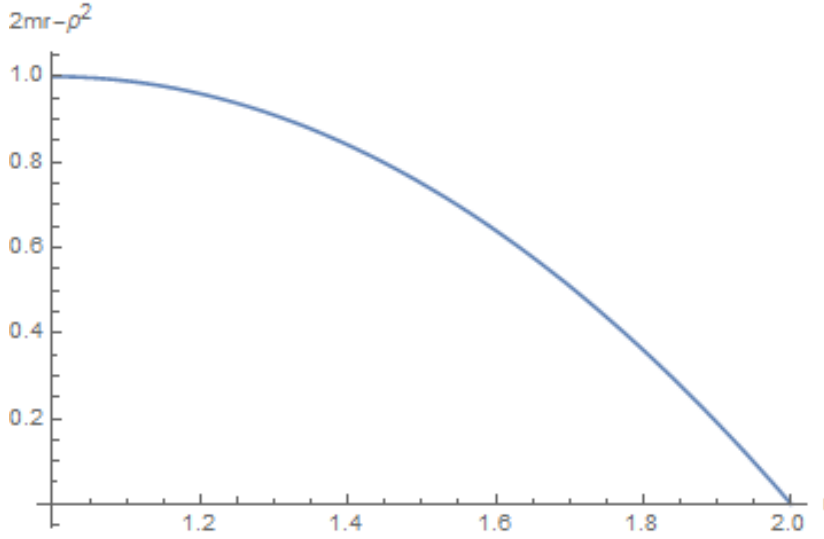
$$2amrE \sin^2 \theta > (2mr - \rho^2)L_z \quad (4.27b)$$

ilişkileri elde edilir. Burada $(2mr - \rho^2)$ ifadesi $r_+ < r < r_{erg}$ aralığında $(2mr - \rho^2) > 0$ olur.

¹⁹ Açısal momentumun ergosferin içerisinde negatif olması, parçacıkların kara deliğin dönme yönüne zıt olarak hareket etmesi anlamına gelmez. Açısal momentum negatif olsa da parçacığın açısal hızı dönme yönünde olur. Bkz. (Grib and Pavlov, 2013).

²⁰ Örneğin ekvator düzleminde ergosferin dışı $r > 2m$ olur. $\tilde{t}$ Vektör alanı için, $\tilde{t}^\mu \tilde{t}_\mu = g_{tt} = -1 + \frac{2mr}{\rho^2} < 0$ olur. Buradan $\tilde{t}$, zamansal bir vektör alanı olduğu anlaşılır.

²¹ bkz. (3.64) eşitliği.



Şekil 4.1: Ekvatorial düzlemde ($\theta=\pi/2$), $a = m = 1$ dönme parametrelili bir kara deliğin dış olay – ufku $r = m$ ile ergosfer yüzeyi ($r = 2m$) arasında, (4.28a) ifadesinin değişimi gösterilmektedir..

Dolayısıyla $E < 0$ yörüngelerinin oluşabilmesi için $L < 0$ olması gerektiği anlaşılır.

Penrose sürecinde ergosfere giren bir parçacık bölünerek; parçacıklardan biri negatif, diğeri pozitif enerjili yörüngelere oturur. Pozitif enerjili parçacık sonsuza gider ve enerjinin korunumu gereğince kaçan parçacık, başlangıçtakinden daha büyük bir enerjiye sahip olur. Böylelikle kara deliğin enerjisinden bir miktar aktarılmış olur. Penrose’un önerdiği süreç bu mekanizma ile çalışır.

Penrose sürecinin daha iyi anlaşılabilmesi için $P^{(0)} = (t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$, $P^{(1)} = (t_1, r_1, \theta_1, \phi_1)$ ve $P^{(2)} = (t_2, r_2, \theta_2, \phi_2)$ dördü – momentuma sahip parçacıklar düşünülür. $P^{(0)}$ başlangıçtaki parçacık, $P^{(1)}$ negatif enerjili parçacık ve $P^{(2)}$ pozitif enerjili kaçan parçacık olarak verilir. Parçacığın bölündüğü r_b noktası, $r_+ < r_b < r_{erg}$ aralığında tanımlanır. Dolayısıyla bu noktada $\dot{r} = 0$ olur. Buradan (3.28a) ifadesi,

$$[r(r^2 + a^2) + 2ma^2]E^2 - 4amL_zE - L_z^2(r - 2m) - \left(\frac{Q}{r} - q^2r\right)\Delta = 0 \quad (4.28)$$

olarak yazılır. Göz önüne alınan parçacıkların geodezik eğrileri (3.28a,b) geodezik denklemlerine uyar. Başlangıçtaki parçacık birim kütleli olarak tanımlandığında, (parçacık sonsuzdan geldiği için) (3.11) yardımıyla,

$$E^{(0)} = -g(\tilde{t}_0, u_0) = -(g_{tt}\dot{t}_0 + g_{t\phi}\dot{\phi}_0) = -\left[-\left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \frac{4ma}{r}\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E^{(0)} = 1 \quad (4.29)$$

bulunur. Enerji ve açısal momentum korunum eşitlikleri,

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)} = 1 \quad \text{ve} \quad L_z^{(0)} = L_z^{(1)} + L_z^{(2)} \quad (4.30)$$

olarak yazılır. Buradan,

$$(\dot{t}_0, 0, 0, \dot{\phi}_0) = (\dot{t}_1, 0, 0, \dot{\phi}_1) + (\dot{t}_2, 0, 0, \dot{\phi}_2) \quad (4.31)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $\dot{t}$ ve $\dot{\phi}$; sırasıyla (3.13) ve (3.14) ifadeleridir. İşlem kolaylığı açısından bütün sürecin $\pi/2$ ekvator düzleminde olduğu düşünülebilir. Dolayısıyla $Q = 0$ olur²². Parçacık zamansal geodezik üzerinde sonsuzdan geldiği için $q^2 = -1$ olur. Bu koşullar altında (4.28) denklemi açısal momentuma göre çözülürse başlangıçtaki parçacık için pozitif kök dikkate alınarak,

$$L_z^{(0)} = \frac{-2am + \sqrt{2mr_b\Delta}}{r_b - 2m} \quad (4.32)$$

elde edilir. Başlangıçtaki parçacığın ergosfer içerisinde iki fotona dönüştüğü düşünülebilir. Oluşan fotonlar için $Q = q^2 = 0$ alınarak (4.28) eşitliğinden,

$$L_z^{(1)} = \frac{(-2am - r_b\sqrt{\Delta})}{r_b - 2m} E^{(1)} \quad (4.33a)$$

$$L_z^{(2)} = \frac{(-2am + r_b\sqrt{\Delta})}{r_b - 2m} E^{(2)} \quad (4.33b)$$

çözümlerine ulaşılır. Yukarıdaki (4.33a) ve (4.33b) ifadeleri sırasıyla; negatif enerjili ve pozitif enerjili yörüngelerdeki fotonların açısal momentumlarıdır. Daha sonra (4.30) korunum eşitlikleri kullanılarak,

$$L_z^{(1)} + L_z^{(2)} = \frac{(-2am - r_b\sqrt{\Delta})}{r_b - 2m} E^{(1)} + \frac{(-2am + r_b\sqrt{\Delta})}{r_b - 2m} E^{(2)} = \frac{-2am + \sqrt{2mr_b\Delta}}{r_b - 2m}$$

$$E^{(1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2m}{r_b}} \right) \quad (4.34a)$$

²² bkz. (3.34c)

$$E^{(2)} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{2m}{r_b}} \right) \quad (4.34b)$$

nicelikleri bulunur. Penrose süreci sonunda kazanılan (aktarılan) enerji,

$$\begin{aligned} \delta E = E^{(2)} - E^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2m}{r_b}} + 1 \right) - 1 = -\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2m}{r_b}} \right) \\ \delta E &= -\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2m}{r_b}} \right) = -E^{(1)} > 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

olur.

Yukarıdaki (4.35) ifadesinden, kazanılan maksimum enerji miktarının $r \approx r_+$ bölgesinde gerçekleşebileceği anlaşılır. Maksimum dönme parametrelili bir kara delik için ($a^2 = m^2$) $r_+ = m$ olur. Buradan değerler (4.35) de yerine yazılırsa,

$$\delta E \leq -\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2m}{r_+}} \right) = 0.207 \quad (4.36)$$

bulunur. Sonuç olarak maksimum dönme parametrelili bir kara delikten kaçan parçacığın enerjisi, kara deliğe giren parçacığın enerjisinden %21 daha fazla olur.

Penrose sürecinin sonunda kara delik dönme enerjisinden bir miktar kaybetmiş olacaktır. Dolayısıyla ergosfer bölgesi küçülür. Dönme enerjisi sıfıra yaklaştığında ergosfer de ortadan kalkacağından negatif enerjili parçacıklardan söz edilemez. Sonuç olarak Penrose süreci sonlanır.

Önceki bölümlerde, ergosfer içindeki geodeziklerdeki parçacıklar için $\dot{t} \geq 0$ ve $\dot{\phi} \geq 0$ olduğu belirtildi²³. Parçacık, olay – ufkundan kara deliğe girerken (4.27a,b) ifadeleri yarımıyla,

$$\Sigma^2 E > 2amrL_z \quad \text{ve} \quad 2amrE \sin^2 \theta > (2mr - \rho^2)L_z \Rightarrow$$

$$\Sigma^2 E^2 \sin^2 \theta > (2mr - \rho^2)L_z^2$$

$$[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] E^2 \sin^2 \theta > (2mr - r^2 - a^2 + a^2 \sin^2 \theta) L_z^2 \Rightarrow$$

²³ bkz. (3.64)

$$[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] E^2 \sin^2 \theta > (-\Delta + a^2 \sin^2 \theta) L_z^2 \quad (4.37)$$

eşitsizliği elde edilir. Olay ufkunda $\Delta = 0$ olduğundan,

$$E \geq \frac{a}{(r_+^2 + a^2)} L_z \quad (4.38)$$

ilişkisi elde edilir. Yukarıdaki (4.38) ifadesi boyut analizi yapılarak incelendiğinde; eşitsizliğin sağ tarafı mv^2 ve sol tarafı mvr olarak düşünülürse (burada v hız boyutudur.) $\frac{a}{(r_+^2 + a^2)}$ niceliğinin, $\frac{v}{r}$ boyutunda olduğu görülür. Bu da Ω açısal hızına karşılık gelir. Sonuç olarak olay ufkunun açısal hızı Ω_H olmak üzere (4.38) yardımıyla,

$$E \geq \Omega_H L_z \quad (4.39)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca,

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{2mr_+} \quad (4.40)$$

ilişkisi de bulunur.

Negatif enerjili parçacık kara deliğe düştüğünde, deliğin dönme enerjisi ve açısal momentumu bir miktar azalacaktır. Bu değişim (4.39) ifadesi yardımıyla,

$$\delta m \geq \Omega_H \delta j \quad (4.41)$$

olarak gösterilebilir²⁴.

Enerji aktarım süreçleriyle dönme enerjisini tamamen aktaran bir kara deliğin geriye kalan kütlesi, indirgenemez kütle (*irreducible mass*) olarak tanımlanır. Önceki bölümde bir Kerr kara deliğinin olay – ufkü yüzey alanı (3.76) denklemi olarak bulunmuştu. Buradan hareketle $a = 0$ için $A_H = 16\pi m_{irr}^2$ değerini alır (burada m_{irr} indirgenemez kütleyle gösterilmektedir.). Böyle bir kara delik için (3.76) yardımıyla,

$$16\pi m_{irr}^2 = 8\pi m \left[m + \sqrt{m^2 - a^2} \right] \Rightarrow$$

$$m_{irr} = \frac{1}{2} \sqrt{2mr_+} = \frac{1}{2} \sqrt{r_+^2 + a^2} \quad (4.42a)$$

²⁴ Kara deliğe düşen E enerjili ve L açısal momentumlu parçacık; kara deliğin enerjisini ve momentumunu, $\delta m \equiv E$ ve $\delta j \equiv L$ kadar değiştirmiş olur. Burada $j = ma$ ilişkisi vardır.

$$m_{irr}^2 = \frac{1}{2} m \left[m + \sqrt{m^2 - a^2} \right] \quad (4.42b)$$

$$m_{irr}^2 = \frac{1}{2} \left[m^2 + \sqrt{m^4 - j^2} \right] \quad (4.42c)$$

indirgenemez kütle hesaplanabilir²⁵.

Bir kara deliğin indirgenemez kütlesiyle ilgili olarak (4.42c) eşitliğine varyasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} 2m_{irr}\delta m_{irr} &= \frac{1}{2} \left[2m\delta m + \frac{4m^3\delta m - 2j\delta j}{2\sqrt{m^4 - j^2}} \right] = m\delta m + \frac{2m^3\delta m - j\delta j}{2\sqrt{m^4 - j^2}} \\ &= m\delta m + \frac{2m^2\delta m - a\delta j}{2\sqrt{m^2 - a^2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\delta m_{irr} = \frac{m}{2m_{irr}} \delta m + \frac{2m^2\delta m - a\delta j}{4m_{irr}\sqrt{m^2 - a^2}} \quad (4.43a)$$

$$\delta m_{irr} = \frac{a}{4m_{irr}\sqrt{m^2 - a^2}} \left[\frac{2m\sqrt{m^2 - a^2}}{a} \delta m + \frac{2m^2}{a} \delta m - \delta j \right] \quad (4.43b)$$

eşitliğine ulaşılır. Bulunan (4.43b) ifadesi düzenlenirse (4.40) yardımıyla,

$$\begin{aligned} \delta m_{irr} &= \frac{a}{4m_{irr}\sqrt{m^2 - a^2}} \left[\frac{2m(m + \sqrt{m^2 - a^2})}{a} \delta m - \delta j \right] \\ &= \frac{a}{4m_{irr}\sqrt{m^2 - a^2}} \left[\frac{2mr_+}{a} \delta m - \delta j \right] \\ \delta m_{irr} &= \frac{a}{4m_{irr}\sqrt{m^2 - a^2}} \left[\frac{1}{\Omega_H} \delta m - \delta j \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

eşitliği elde edilir. (4.44) Denkleminde parantez içindeki ifade (4.41) eşitsizliği ile karşılaştırdığında indirgenemez kütlenin değişimi,

$$\begin{aligned} \delta m_{irr} &= \frac{a}{4m_{irr}\sqrt{m^2 - a^2}} \left[\frac{\delta m - \Omega_H \delta j}{\Omega_H} \right] \Rightarrow \\ \delta m_{irr} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

²⁵ Bazı kaynaklarda indirgenemez kütle, $m_{irr} = \sqrt{A_H c^4 / 16\pi G^2}$ olarak verilmektedir. Bu ifadenin, işlem yapıldığında yukarıdaki (4.42a) ifadesine eşit olduğu görülür.

olarak bulunur. Sonuç olarak kara delik (enerji aktarım süreçleriyle) açısal momentum ve enerji kaybederken, m_{irr} kütlelerinin azalmadığı anlaşılır.

Yukarıdaki (4.42b) eşitliğinden m toplam kütle ifadesi,

$$\begin{aligned} 2m_{irr}^2 - m^2 &= \sqrt{m^4 - j^2} \Rightarrow (2m_{irr}^2 - m^2)^2 + j^2 = m^4 \Rightarrow 4m_{irr}^4 + j^2 \\ &= 4m_{irr}^2 m^2 \\ m^2 &= m_{irr}^2 + \frac{j^2}{4m_{irr}^2} \end{aligned} \quad (4.46)$$

olur.

Başlangıç kütle ve açısal momentumu; m ve j olan bir kara delik için ideal bir durum olarak $\delta m_{irr}^2 = 0$ alınır. Enerji aktarım süreci sonlandığında $m = m_{irr}$ olur. (4.46) eşitliğinde, $j = 0$ olması halinde bu denklem sağlanır. Dolayısıyla $j^2/4m_{irr}^2$ teriminin, kara deliğin dönme enerjisine eşit olduğu anlaşılır.

Yukarıdaki (4.42a) eşitliği,

$$\begin{aligned} m_{irr} &= \frac{1}{2}\sqrt{2mr_+} \Rightarrow 2m_{irr}^2 = mr_+ \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{2m}{r_+}} &= \frac{m}{m_{irr}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

formuna getirilip (4.36)'da yerine yazılırsa alternatif olarak,

$$\delta E \leq \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m_{irr}} - 1 \right) \quad (4.48)$$

bulunur.

Son olarak (4.47) eşitliği kullanılarak maksimum dönen bir kara delik için ($a = m = r_+ = 1$) işlem yapıldığında dönme enerjisi m_{rot} olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{m_{irr}}{m} &= \sqrt{\frac{r_+}{2m}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ \frac{m - m_{irr}}{m} &= \frac{m_{rot}}{m} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.293 \end{aligned} \quad (4.49)$$

bulunur.

Sonuç olarak dönen bir kara delikten aktarılabilecek maksimum dönme enerjisi, deliğın başlangıçtaki kütlesinin $\sim\%30$ 'u kadar olabileceğı sonucuna varılır.

Penrose süreciyle ilgili daha sonra yapılan çalışmalarda, böyle parçacık etkileşimlerinin astrofiziksel koşullar altında etkin olamayacağı hesaplandı (Bardeen, Press and Teukolsky, 1972). Dolayısıyla Penrose mekanizmasının, özellikle jet süreçlerini açıklamakta yetersiz kaldığı anlaşıldı. Ayrıca S. Chandrasekhar, bu mekanizmanın etkinliğinin, parçacıkları gözlenen rölativistik hızlara çıkartmakta yetersiz kaldığınđ göstermiştir (Chandrasekhar, 1998).

4.7 Blandford – Znajek Süreci

Dönen kara deliklerin, çevresindeki elektromanyetik alanlarla etkileşerek enerji aktarabileceğı ile ilgili ngrler, Goldreich ve Julian'ın çalışmaları ile başladı (Goldreich and Julian, 1969). Onlar, dönme eksenini ile çift kutuplu manyetik eksenini hizalanmış olan nötron yıldızlarının “vakum” elektrodinamik çözümlerini analiz ettiler. Buldukları sonuca göre dönmeyle indüklenmiş elektrik alan, yıldızın yüzeyindeki yüklü parçacıkları sökmeye yetecek kadar güçlü oluyordu. Böylelikle yıldızın çevresi plazma ile doluyordu.

R.M. Wald, 1974'de Kerr metriğđ üzerinde vakum Maxwell denklemlerinin parçalı çözümlerini bularak konuya yeni bir bakış açısı getirdi (Wald, 1974). Bu zm, kara delikten çok uzakta dönme eksenine paralel tek düze bir manyetik alan tanımlıyordu. Bununla birlikte deliğın yakınında güçlü bir elektrik alan da tanımlamaktaydı. Gravitasyonel olarak indüklenen bu elektrik alanın önemli bir bileşeni manyetik alan boyunca oluşuyordu. Bu türden daha güçlü manyetik alanların, kara deliklerin toplanma disklerinde retilbilecekleri, Bisnovatyi, Kogan ve Ruzmaikin tarafından önerildi (Bisnovatyi, Kogan and Ruzmaikin, 1976).

Aktif gökada merkezi gözlemlerinde jet benzeri yapılar keşfedilmesinin ardından, kara deliklerin dönme enerjisinin bir takım manyetik süreçler sonucunda jetlere aktarıldığđ düşüncesine ağırlık verilmiştir. Bu süreçlerin en önemlilerinden birisi de Blandford – Znajek (BZ) sürecidir.

Roger Blandford ve Roman Znajek, dönen kara deliklerin çevrelerindeki uzayın elektromanyetik alanlar ile yönlendirilen plazma akıntıları ile dolu

olduğunu varsayarak çalışmalarına başladılar. Dönen nötron yıldızları için var olan vakum elektrodinamik çözümlerini, Kerr kara delikleri için yapılan vakum çözümler ile karşılaştırarak, manyetik alan kökenli yeni bir enerji aktarım süreci önerdiler (Blandford and Znajek, 1977). Dahası tipik astrofiziksel koşullar altında vakum çözümlerinden, bol miktarda yüklü parçacığın çift oluşum süreciyle üretilebileceğini öngördüler. Üretilen bu yüklü parçacık çiftlerinin; başlangıç koşulu olarak, var olan manyetik alanla etkileşimini ihmal ederek bir yaklaşımda bulundular. Bu yaklaşıma *force – free* yaklaşımı denildi.

İndirgenemez kütlenin (4.42b) tanımını yardımıyla,

$$m_{irr}^2 = \frac{1}{2} m^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} \right) \Rightarrow m_{irr}^2 = \frac{1}{2} m^2 \left(1 + \sqrt{1 - \tilde{a}^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{m_{irr}}{m} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \tilde{a}^2} \right)}$$

$$f(\tilde{a}) := \frac{m_{rot}}{m} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \tilde{a}^2} \right)} \quad (4.50a)$$

fonksiyonu ve olay – ufku açışal hızı Ω_H ile manyetik alan açışal hızı Ω_F arasında,

$$\varepsilon_\Omega := \Omega_F / \Omega_H \quad (4.50b)$$

oranı tanımlanarak BZ süreciyle çıkarılabilecek maksimum enerji,

$$E_{BZ} = 1.8 \times 10^{54} \varepsilon_\Omega f(\tilde{a}) \left(\frac{M}{M_\odot} \right) erg \quad (4.51)$$

olarak verilebilir (Lee, Wijers, and Brown, 2000).

Kütlesi $4.5 \times 10^6 M_\odot$ ve $\tilde{a} = 1$ olan bir süper kütleli kara deliğin²⁶ (4.51) ifadesinden BZ süreciyle aktarılacak maksimum enerji hesaplanabilir. Optimum değer olarak $\varepsilon_\Omega = 0.5$ alınır²⁷,

$$E_{BZ} = 1.8 \times 10^{54} \times 0.5 \times 0.29 \times 4.5 \times 10^6 erg$$

$$E_{BZ} = 1.17 \times 10^{60} erg \quad (4.52)$$

olarak bulunur. Aynı kara delik için (4.49) ifadesi yardımıyla hesaplanırsa²⁸,

²⁶ Günümüzde, Samanyolu gökada merkezinde kütlesi $\sim 4.5 \times 10^6 M_\odot$ olan süper kütleli bir kara deliğin varlığına ilişkin güçlü kanıtlar elde edilmiştir. Bkz. (Ghez et al., 2008)

²⁷ bkz. (Thorne et al., 1986)

$$E_{rot} = m_{rot}c^2 = 0.29mc^2 = 0.29 \times 4.5 \times 10^6 \times (2 \times 10^{33}) \times (3 \times 10^{10})^2$$

$$E_{rot} = 2.35 \times 10^{60} \text{erg} \quad (4.53)$$

bulunur.

²⁸ Enerji *erg* biriminde, Güneş'in kütlesi $2 \times 10^{33} g$ ve $c = 3 \times 10^{10} cm/s$ olarak alınmıştır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kara delikler yıldız evrimi çalışmalarında, yıldız kümelerinde ve gökada merkezlerinde olmak üzere çok farklı kütlelerde karşımıza çıkmaktadır. Günümüzde birçok astrofizik alanında, farklı dalga boylarında çok sayıda yer ve uzay konuşlu aletler ile gözlemler yapılmaktadır. Bu noktada diğer gök cisimlerinden farklı olarak kara delikler, kendilerine ilişkin doğrudan bilgi elde edilebilmesi günümüzde teknik olarak mümkün olmayan gök cisimleridir. Bu durum onların fiziğinin incelenmesinde de karşımıza çıkmaktadır. Kara deliklerin fiziği klasik Newton mekaniğiyle açıklanamadığı için *Einstein*'ın *Genel Rölativite* kuramı devreye girmektedir. Dolayısıyla eğri uzay – zamanda çalışıldığından geometriyi ve hareketi betimleyen denklemler, görece daha karmaşık bir hale bürünmektedir.

Evrende birçok cisimden yayımlandığı düşünülen gravitasyonel dalgaların doğrudan gözlemlerini yapabilmek amacıyla, dalgaların girişim desenlerini hassas olarak ölçebilecek uzay konuşlu lazer algılayıcılar tasarlanmaktadır (bkz. LISA projesi).

Sıkışık gök cisimleri ile ilgili teorik ve gözlemsel çalışmalar astrofizikte önemli bir yere sahiptir. Bunlar arasında nötron yıldızları ve kara delikler maddenin ve uzay – zamanın yapısının anlaşılmasında anahtar rol üstlenmektedirler. Bununla birlikte manyetohidrodinamik (MHD) süreçlerinin bu gök cisimleriyle beraber incelenmeleri, oluşan jet benzeri yüksek enerjili yapıların ve toplanma disklerinin anlaşılması bakımından oldukça önemlidir. Özellikle aktif gökada çekirdekleri (AGN) olarak bilinen astrofiziksel yapıların merkezlerinde, bu enerjik süreçleri besleyen süper kütleli dönen kara deliklerin olduğu düşünülmektedir.

Dönen kara deliklerin dönme enerjilerinin bir takım süreçlerle bu yapılarla aktarılabilmesi ile teorik çalışmalar, Einstein alan denklemlerinin dönen kara delikler için olan tam çözümlerine dayanır. Çünkü kara delik çevresindeki parçacıkların ve elektromanyetik alanların davranışının anlaşılabilmesi buradaki metriğe bağlıdır. Dönen kara deliklerin metriği ilk olarak 1963 yılında R. Kerr tarafından elde edilmiştir.

Buna göre dönen kara delikler ve çevrelerindeki uzay – zaman geometrisi iki temel parametreye bağlı olarak değişir. Bunlar kara deliğin dönme parametresi a ve kütlesi m olarak verilir. Dönme parametresinin $a > 1$ olması durumunda, (3.5) r_+ ve r_- yüzeyleri reel değerler almazlar. Bu bölgede matematiksel olarak zamansal geodezik eğriler tanımlanabildiğinden çıplak tekillik (*naked singularity*) bölgeleri oluşur.

Her ne kadar matematiksel olarak çıplak tekillik bölgelerinin varlığından söz edilebilse de aslında bilim dünyasında çok tartışmalı bir konudur. Özellikle R. Penrose, öne sürdüğü bir hipotezle (*cosmic – censors hiphypothesis*) çıplak – tekillik bölgelerinin oluşamayacağını öngörmüştür (Penrose, 2002). Gerekçesi ise fizikteki nedensellik ilkesinin ihlal edileceği görüşüydü. Ancak “sicim” (*string*) ve “kuantum – çekim” (*quantum – gravity*) teorilerinde yapılan yeni çalışmalar, evrende çıplak – tekil bölgelerin oluşabileceğini öngörmektedir (Bojowald, 2008; Boyda, et al., 2003; Gimon and Horava, 2004; Goswami, et al., 2006; Goswami and Joshi, 2007; Horowitz and Sen, 1996).

Elektromanyetik ve gravitasyonel dalgaların dönen kara deliklerle (özellikle ergosfer bölgesiyle) etkileşimlerinin incelenmesi, üzerinde durulan diğer enerji aktarım süreçleri arasında yer almaktadır²⁹. Yakın zamanda gravitasyonel dalgaları doğrudan gözlemleyebilecek uzay detektörlerinin (örneğin LISA) yapılması planlandığından bu alandaki teorik çalışmalar daha da önem kazanacaktır.

Bu tez kapsamında temel olarak Kerr metriğinde parçacıkların hareket denklemleri irdelendi. Dönen kara delikler ve onlarla ilişkili olduğu düşünülen bazı yüksek enerjili süreçler ele alınmıştır. Ergosfer bölgesinde oluşan negatif enerji yörüngeleri ve buna bağlı olarak parçacık hareketleriyle doğrudan ilişkili olan Penrose enerji aktarım süreci ayrıntılı biçimde anlatılmıştır. Son olarak manyetik kökenli enerji aktarım süreçlerinden biri olan Blandford – Znajek süreci ve önemine değinilmiştir. Bununla birlikte son yıllarda yapılan bazı teorik çalışmalarda, Reissner – Nördström kara deliklerinin de enerjik süreçlerde rol alabilecekleri öngörülmektedir (Bozza, et al., 2012; Zaslavskii, 2011).

²⁹ Bkz. (Futtermann, Handler, and Matzner, 1988) p. 40, (Kobayashi and Tomimatsu, 2010), (Mackay, Lakhtakia, and Setiawan, 2005), (East, Ramazanoğlu, and Pretorius, 2014), (Teukolsky and Press, 1974).

EK AÇIKLAMALAR – A

Δ FONKSİYONUNUN r_+ ve r_- ile İLİŞKİLENDİRİLMESİ

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ olarak ikinci dereceden bir fonksiyon tanımlandığında bu denklemin reel kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ yazılabilir.

Şu şekilde de gösterilebilir:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Benzer şekilde Kerr metriğinde $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ ifadesi sıfıra eşitlenirse, r_+ ve r_- denklemin iki kökü olmak üzere (bunlar sırasıyla dış ve iç olay – ufku yarıçaplarıdır),

$$\boxed{\Delta = r^2 - 2mr - a^2 \equiv (r - r_+)(r - r_-)}$$

denkliği elde edilir.

EK AÇIKLAMALAR – B

B1.) Lagrangian Fonksiyonu

Serbest bir parçacığın (yani gravitasyonel etkinin olmadığı durumda) uzayda hareketi boyunca izlediği yolun geodezik olması, genel rölativite kuramının temel bir varsayımıdır.

Uzay – zamanda herhangi $x^\mu(\tau)$ noktaları, “ τ ” eğrilik parametrelili bir eğri üzerinde tanımlanarak,

$$x^\mu \equiv x^\mu(\tau) \quad , \quad dx^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau$$

olarak gösterilebilir. Bu eğri üzerinde “A” ve “B” noktaları arası uzaklık; $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 d\tau^2$ olmak üzere etki fonksiyonunun genel biçimi (τ öz – zamanı belirtmektedir.),

$$S_{AB} = -mc^2 \int_A^B d\tau = -mc^2 \int_A^B \frac{\sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}}{c} = -mc \int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

$$S_{AB} = m \int_A^B \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau} \quad (B.1)$$

olarak verilir¹.

Bu uzaklık minimize edilerek, iki nokta arasındaki en kısa yol olan geodezik eğrisi bulunur. Yukarıdaki (B.1) ifadesini minimize etmek için varyasyonel hesap yöntemi kullanılabilir. “ G ” bir fonksiyonel olmak üzere,

$$G \equiv \int_A^B \mathcal{L} \left(x, \frac{dx}{d\lambda}, \lambda \right) d\lambda \quad (B.2)$$

minimize eden eğri $x = X(\lambda)$ olarak tanımlanabilir. Bu eğrinin hemen yakınında; A, B noktalarından geçen bir başka eğri $x = X(\lambda) + \varepsilon \eta(\lambda)$ olur. Doğal olarak $\eta(A) = \eta(B) = 0$ olur (Çünkü başlangıç ve bitiş olarak tanımlanan bu noktalarda varyasyonel sıfırdır.). Buradan,

$$\left. \frac{dG}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_A^B \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right) d\lambda = \int_A^B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \eta d\lambda + \int_A^B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} d\lambda = 0 \quad (B.3)$$

¹ $cd\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} > 0$ olduğundan, $-mc \int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = -m \int_A^B \frac{|-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|}{d\tau} = m \int_A^B \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau}$ eşitliği elde edilir.

bulunur. Yukarıdaki (B.3) denkleminin son kısmındaki ikinci terime kısmı integrasyon yöntemi uygulanır².

$$\left. \frac{dG}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_A^B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \eta \, d\lambda + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \eta \right|_A^B - \int_A^B \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \eta \, d\lambda = 0 \quad (\text{B.4})$$

Buradan (B.4) ifadesinin ikinci teriminde, $\eta(A) = \eta(B) = 0$ olduğundan denklem,

$$\left. \frac{dG}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_A^B \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \right] \eta \, d\lambda = 0 \quad (\text{B.5})$$

biçimindeki forma dönüşür. (B.5) denkleminde $\eta(\lambda)$, keyfi bir fonksiyon olduğundan parantezin içi sıfır olmalıdır. Buradan,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.6})$$

(B.6) Euler – Lagrange denklemi elde edilmiş olur ve tensörel formda (B.7) ifadesiyle gösterilir.

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0} \quad (\text{B.7})$$

Burada “ $\mathcal{L}$ ”, sistemin dinamik niceliklerini tanımlayan “*Lagrangian*” fonksiyonudur ve (B.1) yardımıyla tensörel formda,

$$\mathcal{L} \left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \lambda \right) = -mc \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (\text{B.8})$$

olarak yazılabilir. Ancak hesap kolaylığı açısından Lagrangian fonksiyonu³,

$$\boxed{\mathcal{L}(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \lambda) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (\text{B.9})$$

formunda verilebilir⁴. Euler – Lagrange denkleminde (B.8) ve (B.9) ifadelerinden herhangi biri kullanılabilir. Hareket denkleminde bir değişim olmayacaktır.

² $\int_A^B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \, d\lambda = \int_A^B \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \eta \right) d\lambda - \int_A^B \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \eta \, d\lambda$ Ayrıca $\dot{x} = dx/d\lambda$ ve $\dot{\eta} = d\eta/d\lambda$ olarak tanımlanır.

³ Bir sistemin Lagrangian fonksiyonu en genel olarak $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^\mu g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu - U(x, y, z)$ biçiminde yazılır. Burada m ; kütle ve U ; potansiyel enerjidir. Potansiyelin sıfır olması, genel rölativitede parçacığın harekete başladığı nokta ve buna bağlı geodezik form durumuna karşılık gelir.

B2.) Christoffel Sembolleri

(B.9) ifadesi (B.7) Euler – Lagrange denkleminde kullanırsa⁵,

$$\frac{d}{d\lambda}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu = 0 \quad (B.10)$$

$$= g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\dot{x}^\nu - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu$$

$$= g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + g_{\mu\nu,\rho}\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu - \frac{1}{2}g_{\nu\rho,\mu}\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu$$

$$= g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \left(g_{\mu\nu,\rho} - \frac{1}{2}g_{\nu\rho,\mu}\right)\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu = 0 \quad (B.11)$$

denklemini elde edilir. Yukarıdaki (B.11) denklemini, metrik tensörün simetrik özelliğinden yararlanılarak $g^{\mu\sigma}$ kontrovaryant metrik tensörü ile çarpılır⁶.

$$g^{\mu\sigma}g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\mu,\rho} - g_{\nu\rho,\mu})\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu = 0$$

$$\ddot{x}^\sigma + \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\mu,\rho} - g_{\nu\rho,\mu})\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu = 0 \quad (B.12a)$$

Yukarıdaki (B.12a) denkleminde parantez içindeki ifade (B.12b) forumunda da yazılabilir⁷.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\mu\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\mu})\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu + \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}g_{\nu\mu,\rho}\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\mu\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\mu})\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu + \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}g_{\rho\mu,\nu}\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\nu\rho,\mu})\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu \quad (B.12b)$$

Burada (B.12b) ifadesi $\Gamma_{\rho\nu}^\sigma$ simgesiyle sembolize edilir. Bu semboller “*Christoffel sembolleri*” olarak bilinir. Christoffel sembollerinin metrik tensörün türevleri olarak gösterimi,

⁴ (B.9) ifadesindeki “1/2” çarpanı yerine herhangi pozitif bir katsayı verilmesi, Euler – Lagrange denkleminin (B.7) formunu etkilemez.

⁵ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu + g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\delta_\mu^\nu) = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$ denkleminde yararlanıldı.

⁶ $g^{\mu\sigma}g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\sigma$ “Kronecker delta”ya eşit olur.

⁷ $g_{\nu\mu,\rho}\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu = g_{\rho\mu,\nu}\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu$ kör (*dummy*) indislerin değişiminden yararlanıldı.

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\nu\rho,\mu}) \quad (\text{B.13})$$

denklemleriyle verilir⁸.

B3.) Geodezik Hareket Denklemi

Son olarak (B.13) ifadesi (B.12a)'da yerine yazılırsa, (B.14) eşitliği elde edilir.

$$\ddot{x}^{\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} \dot{x}^{\rho} \dot{x}^{\nu} = 0 \quad (\text{B.14})$$

Bu eşitliğe geodezik hareket denklemi denir. Böylelikle iki nokta arasındaki en kısa yol (B.14) hareket denkleminde elde edilebilir.

Minkowski uzay – zaman geometrisinde Christoffel sembolleri sıfır olur. Bu ise $\dot{x}^{\mu}$ 4'lü hızının sabit olduğu duruma karşılık gelir.

Lagrangian fonksiyonunun en genel $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^{\mu} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} - U(x, y, z)$ ifadesi kullanılıp aynı işlemler yapılsaydı (B.14) denklemi yerine,

$$m(g_{\mu\nu} \ddot{x}^{\nu} + \Gamma_{\mu\nu\gamma} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\gamma}) = - \frac{\partial U}{\partial x^{\mu}} \quad (\text{B.15})$$

eşitliği bulunurdu. (B.15) denklemi, geodezik durumunda $U = 0$ olduğundan (B.14) eşitliğine dönüşür.

⁸ Christoffel sembolleri, tanımlandıkları uzay – zaman geometrisinde burulma olmadığı müddetçe simetrik olup $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$ eşitliğini sağlar, bkz. (Grøn and Sigbjørn Hervik, 2007) p. 127 ve (Plebanski and Krasinski, 2006) p. 51.

EK AÇIKLAMALAR –C

Hamiltonyen Fonksiyonu

Bir Lagrangian sisteminin ikinci dereceden diferansiyel denklemleri, “*Legendre dönüşümü*”⁹ yardımıyla Hamilton formalizmine dönüştürülerek, sistemin toplam enerjisiyle ilişki kurulabilir.

Hamiltonyen $H(q, p, t)$ ve Lagrangian $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ fonksiyonları olmak üzere Legendre dönüşümüyle (q, p) , sırasıyla genelleştirilmiş koordinatlar ve genelleştirilmiş momentumdur),

$$H(p_j, q_j, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (C.1)$$

olarak verilir. Hamiltonyen fonksiyonunun (C.1) formu kanonik koordinatlarda (*canonical coordinates*) gösterilmiştir¹⁰. Burada genelleştirilmiş koordinatlar q_i ve genelleştirilmiş momentum $p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$ (bazı kaynaklarda *conjugate momentum* veya *canonical momentum* olarak geçmektedir.) ifadesidir. Nokta türev, “ t ” parametresine göre değişimi gösterir. Euler – Lagrange denklemi olan (B.7) ifadesi “ t ” parametresine göre yazılırsa, $\dot{p}_i = \partial \mathcal{L} / \partial q_i$ eşitliği elde edilir¹¹. Hamiltonyen fonksiyonunun toplam diferansiyeli alınır,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (C.2)$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki (C.1) eşitliğinin sağ tarafının da toplam diferansiyeli alınır¹².

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right)$$

⁹ Bu dönüşüm ile ilgili ayrıntılı bilgi için *Morin*, (2008) ve *Vilasi*, (2001) bakılabilir.

¹⁰ Kanonik koordinatlar ve bu formda yazılan kanonik momentum ile ilgili detaylı bilgi için bkz. (Franklin, 2010) p. 30.

¹¹ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} (p_i) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \dot{p}_i$

¹² Hamiltonyen sisteminde genelleştirilmiş hızın diferansiyeli $d\dot{q} = 0$ olur.

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right) \quad (\text{C.3})$$

(C.3) ve (C.2) eşitliklerini (C.1) yardımıyla,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \dot{q}_i dp_i - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right) \quad (\text{C.4})$$

olarak yazılır. Buradan,

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}} \quad \boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (\text{C.5})$$

(C.5) *Hamilton denklemleri* elde edilir.

Hamilton fonksiyonunun bir sistemin enerjisiyle olan ilişkisini göstermek için Lagrangian fonksiyonunun zamana göre tam türevi alınır.

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (\text{C.6})$$

Eğer Lagrangian fonksiyonu t koordinatına açık olarak bağlıysa, (C.6) eşitliğinin sağ tarafına $\partial \mathcal{L} / \partial t$ terimi eklenmelidir ($i=0,1,2,3$). Ancak burada kullanılan Lagrangian ifadesinin açık hali $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{x}^\mu g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$ olduğundan ($m = 1$ alındı), $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$ olur. Euler – Lagrange denklemi yardımıyla (C.6) denklemi,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (\text{C.7})$$

formunda yazılabilir. (C.7) denkleminde parantez içindeki ifadenin t parametresine göre sabit (kapalı bir sistem için) olduğu anlaşılır. Bu sabit,

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} \quad (\text{C.8})$$

(C.1) formuyla denk olduğundan (C.8) ifadesi sistemin enerjisini verir.

Hamiltonyen fonksiyonunu ifade etmek için kullanılan genelleştirilmiş koordinatların, tensör olması gerekmez (indisler sadece koordinatları gösterir). Enerji skaler bir nicelik olarak tanımlandığında (C.1) ifadesi tensörel formda yazılır. Aynı indisin biri üst diğeri alt olacak şekilde sırasıyla kontrovaryant ve kovaryant tensörler olmak üzere çarpımları (Einstein toplama kuralına göre “*Einstein summation convention*”) skaler bir nicelik tanımlar. Lagrangian fonksiyonu $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{x}^\alpha g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu - U(x, y, z)$ olmak üzere ($m = 1$ olarak alındı), kartezyen koordinatlarda x^α kontrovaryant tensörüyle kanonik momentum,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{1}{2} g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha \delta_\alpha^\nu \Rightarrow \boxed{g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu = p_\alpha} \quad (C.9)$$

olarak gösterilir. Bu durumda (C.9) ifadesi, rankı bir olan kovaryant bir tensör olur. Ayrıca (C.9) ifadesi $g^{\nu\alpha}$ ile ilişkili olarak,

$$g^{\nu\alpha} g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu = g^{\nu\alpha} p_\alpha \Rightarrow \boxed{\dot{x}^\alpha = p^\alpha} \quad (C.10)$$

ifadesini verir. Lagrangian fonksiyonunun (B.8) ifadesinden yararlanılarak $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}^\mu$ genelleştirilmiş momentumu hesaplanırsa¹³,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{(-c) g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{-g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu}} - \frac{1}{2} \frac{(-c) g_{\alpha\nu} \dot{x}^\mu \delta_\mu^\nu}{\sqrt{-g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu}} = \frac{c g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu}{c} = g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu = p_\alpha \quad (C.11)$$

ifadesi elde edilir. Momentumun (C.11) eşitliğinde yapılan işlemlerin, (C.9) ifadesine denk olması; Lagrangian fonksiyonunun verilen değişik formlarının, Euler – Lagrange denklemini sağladığını gösterir.

Legendre dönüşümü (C.12) biçiminde yazılarak (C.10) yardımıyla, Hamiltonyen fonksiyonu skaler forma,

$$\begin{aligned} H &= p_\alpha \dot{x}^\alpha - \mathcal{L} = p_\alpha p^\alpha - \left(\frac{1}{2} \dot{x}^\alpha g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu - U(x, y, z) \right) \\ &= p_\alpha g^{\alpha\beta} p_\beta - \frac{1}{2} p_\alpha g^{\alpha\beta} p_\beta + U(x, y, z) \\ H &= \frac{1}{2} p_\alpha g^{\alpha\beta} p_\beta + U(x, y, z) \end{aligned} \quad (C.12)$$

¹³ $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 d\tau^2 \Rightarrow \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = c$ ilişkisinden yararlanıldı.

olarak dönüşür. (B.1) etki fonksiyonu ifadesi “ t ” parametresine göre (B.8) yardımıyla tekrar yazılır.

$$S = -mc \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} (p_\alpha \dot{x}^\alpha - H) dt \quad (C.13)$$

Yukarıdaki (C.13) etki integralinin birinci mertebeden varyasyonu (*variational principle*),

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{x}^\alpha \delta p_\alpha + p_\alpha \delta \dot{x}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \right) dt = 0 \quad (C.14)$$

formunu alır. Buradan, (C.14) denkleminde integral içindeki ikinci terime kısmi integrasyon uygulanırsa¹⁴,

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\dot{x}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \right) \delta x^\alpha \right] dt = 0 \quad (C.15)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (C.15) denkleminde δx ve δp nicelikleri keyfi olduğundan parantez içindeki ifadeler ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır¹⁵. Buradan kolay bir şekilde, etkinin koordinata ve momentuma göre varyasyonu (C.16) olarak bulunur.

$$\frac{\delta S}{\delta p_\alpha} = \dot{x}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = 0 \quad \frac{\delta S}{\delta x^\alpha} = -\dot{p}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (C.16)$$

Varyasyonel yaklaşım ile hareket denklemleri doğrudan bulunabilir. Dolayısıyla Hamilton denklemleri,

$$\boxed{\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}} \quad \boxed{\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}} \quad (C.17)$$

¹⁴ Kısmi integrasyon $p_\alpha \delta \dot{x}^\alpha = \frac{d}{dt} (\delta x^\alpha p_\alpha) - \dot{p}_\alpha \delta x^\alpha$ ve sağ taraftaki ilk terim skaler olduğu için zamana göre değişimi sıfır olur. Ayrıca sınır koşulları belirlenmiş olduğundan başlangıç ve bitiş koordinat noktalarında $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$ olur (Lagrangian varyasyonel metodunda olduğu gibi). Ancak, sınır noktalarında momentum sıfır olmak zorunda değildir.

¹⁵ Hamiltonyen yaklaşımında p_α ve x^α nicelikleri bağımsız olarak elde edilmek istenir.

(C.17) eşitlikleri olarak tensörel notasyon biçiminde elde edilir. Hamilton fonksiyonunun (C.12) formunu kullanarak hareket denklemleri (C.18 – 19) formunda da yazılabilir¹⁶.

$$\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = g^{\alpha\beta} p_\beta \quad (\text{C.18})$$

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = -\left(\frac{1}{2}p_\mu g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} p_\nu + U_{,\alpha}\right) = \frac{1}{2}p_\mu (g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} g_{\gamma\delta,\alpha}) p_\nu - U_{,\alpha}$$

$$\dot{p}_\alpha = \frac{1}{2}p^\gamma g_{\gamma\delta,\alpha} p^\delta - U_{,\alpha} \quad (\text{C.19})$$

Daha önce de belirtildiği gibi geodezik eğrilerde hareket denklemlerini tanımlarken potansiyeli $U = 0$ olduğundan, (C.12) yerine (3.19) ifadesi kullanılır.

¹⁶ Skaler nicelikler koordinata göre sabit olduğundan, $0 = (g^{\mu\nu} g_{\nu\delta})_{,\alpha} = g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} g_{\nu\delta} + g_{\gamma\delta,\alpha} g^{\mu\gamma} \Rightarrow g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = -g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} g_{\gamma\delta,\alpha}$ ilişkisinden yararlanıldı.

EK AÇIKLAMALAR –D

Rölativistik Enerji

Özel rölativitede ds^2 aralığı $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 = g_{00}(dx'^0)^2$ biçiminde verilir¹⁷.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (D.1)$$

Bu denklemi birkaç cebirsel işlem yardımıyla¹⁸,

$$dt^2 \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right) = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = d\tau^2$$

$$\gamma \equiv \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1}, \quad dt = \gamma d\tau \quad (D.2)$$

olarak bulunur. Buradan 4'lü hız vektörü (E.2) yardımıyla ($\mu = 0,1,2,3$),

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \frac{dx^0}{dt} + \gamma \left(\frac{dx^1}{dt} + \frac{dx^2}{dt} + \frac{dx^3}{dt} \right) \\ &= \gamma \frac{cdt}{dt} + \gamma \left(\frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{d\vec{y}}{dt} + \frac{d\vec{z}}{dt} \right) = \gamma c + \gamma (\vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z) \\ u^\mu &= \gamma(c + \vec{v}) \end{aligned} \quad (D.3)$$

olarak gösterilebilir. Ayrıca kontrovaryant hız vektörü (D.4) formunda yazılabilir.

$$\boxed{u_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (\gamma c, \gamma \vec{v})} \quad (D.4)$$

4'lü hız vektörünün kontrovaryant ve kovaryant çarpımları sabit olup,

$$u_\mu u^\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = \frac{-c^2 d\tau^2}{d\tau^2} = -c^2 \quad (D.5)$$

¹⁷ Burada metrik tensör bileşenleri; $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ ve diğer bileşenler sıfırdır. Ayrıca koordinat diferansiyelleri $\{t, x, y, z\}$ koordinat sisteminde $dx^0 = ct$ ve $dx^1 = x$, $dx^2 = y$, $dx^3 = z$ olarak verilir.

¹⁸ Burada " $\vec{v}$ ", 3 – boyutlu uzayda hız vektörünü temsil eder (yani 4 – boyutlu uzay – zamanda uzaysal bileşenleri gösterir).

değerine eşittir¹⁹. Genellikle $c = 1$ alındığından (D.6) değerini alır.

$$\boxed{u_\mu u^\mu = -1} \quad (D.6)$$

4'lü hız vektörünün kovaryant bileşenini bulmak için (D.6) ve (D.3) denklemlerinden yararlanılır (burada $(\alpha = 1,2,3)$ uzay bileşenleridir).

$$\begin{aligned} u^\mu u_\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \gamma \frac{dx_\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{dx^0}{dt} + \frac{dx^\alpha}{dt} \right) \gamma \left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{dx_\alpha}{dt} \right) \\ u^\mu u_\mu &= \gamma^2 \frac{g_{00} dx^0 dx^0}{dt^2} + \gamma^2 \frac{g_{\alpha\alpha} dx^\alpha dx^\alpha}{dt^2} = \gamma^2 \left(\frac{-c^2 dt^2}{dt^2} + \frac{(dx^\alpha)^2}{dt^2} \right) \\ &= \gamma^2 (-c^2 + v^2) = -c^2 \Rightarrow \\ \gamma(c - \vec{v}) \gamma(c + \vec{v}) &= \gamma(c - \vec{v}) u^\mu = c^2 \end{aligned}$$

Son eşitlik, u_μ kovaryant 4'lü hız vektörü ile çarpılırsa,

$$c^2 u_\mu = \gamma(c - \vec{v}) u^\mu u_\mu \Rightarrow u_\mu = \gamma(-c + \vec{v}) \quad (D.7)$$

bulunur. Buradan kovaryant hız vektörü (D.8) formunda yazılabilir.

$$\boxed{u_\mu = \left(\frac{-c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (-\gamma c, \gamma \vec{v})} \quad (D.8)$$

Rölativite teorisinde; v hızına sahip bir cismin eylemsiz referans sistemine (*inertial reference frame*) göre ölçülen m kütlesi, m_0 durgun kütlesinden daha büyük olur. Bu ilişki $m = \gamma m_0$ olarak verilir. Buna göre cismin rölativistik mekanik enerjisi,

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad (D.9)$$

eşitliği ile verilir. Yukarıdaki (D.9) denklemini v/c 'ye göre seriye açılırsa $(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x$), düşük hızlarda ($v \ll c$), $E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ formuna dönüşür.

¹⁹ Bu çarpım; metriğin $(+---)$ notasyonu için $u_\mu u^\mu = 1$ değerini aldığından işlemlerde dikkat edilmesi gereklidir.

EK AÇIKLAMALAR –E

Genelleştirilmiş Momentum

Daha önce tanımlanan etki fonksiyonunun x^μ koordinatlarına göre türevi kanonik momentumun bileşenlerini verdiğinden, (B.1) etki fonksiyonu tekrar yazılır.

$$S = -mc^2 \int_a^b d\tau = -mc \int_a^b \sqrt{-dx_\mu dx^\mu} \quad (\text{E.1})$$

Yukarıdaki (E.1) eşitliğinin en küçük etki prensibine göre varyasyonunu alındığında,

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc^2 \int_a^b \delta(d\tau) = -mc \int_a^b \delta \left(\sqrt{-dx_\mu dx^\mu} \right) \\ &= -mc \int_a^b \left(\frac{1}{2} \frac{(-dx_\mu) \delta dx^\mu}{\sqrt{-dx_\mu dx^\mu}} + \frac{1}{2} \frac{(-dx^\mu) \delta dx_\mu}{\sqrt{-dx_\mu dx^\mu}} \right) \\ &= -mc \int_a^b \left(\frac{1}{2} \frac{(-dx_\mu) \delta dx^\mu}{\sqrt{-dx_\mu dx^\mu}} + \frac{1}{2} \frac{(-dx_\mu) \delta dx^\mu}{\sqrt{-dx_\mu dx^\mu}} \right) \\ &= mc \int_a^b \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{\sqrt{-dx_\mu dx^\mu}} = mc \int_a^b \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{cd\tau} \\ \delta S &= m \int_a^b \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{d\tau} = m \int_a^b u_\mu \delta dx^\mu \quad (\text{E.2}) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir²⁰. Yukarıdaki (E.2) integralinin kısmi integrasyonu alınır,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d}{d\tau} (u_\mu \delta x^\mu) d\tau &= \int_a^b \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau + \int_a^b u_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} d\tau \\ &= \int_a^b \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau + \int_a^b u_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} d\tau \\ &= \int_a^b \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau + \int_a^b u_\mu d\delta x^\mu \Rightarrow \end{aligned}$$

²⁰ $-dx^\mu \delta dx_\mu = -g_{\mu\nu} dx^\mu \delta dx^\nu = -g_{\mu\nu} dx^\nu \delta dx^\mu = -dx_\mu \delta dx^\mu$ denkleğinden yararlanıldı. Ayrıca $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 d\tau^2 \Rightarrow \sqrt{-dx_\mu dx^\mu} = cd\tau$ eşitliği kullanıldı.

$$\delta S = m \int_a^b \frac{dx_\mu \delta x^\mu}{d\tau} = m \left[\int_a^b \frac{d}{d\tau} (u_\mu \delta x^\mu) d\tau - \int_a^b \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau \right]$$

$$\delta S = mu_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b - m \int_a^b \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau \quad (\text{E.3})$$

elde edilir. Eğer sınır noktalarında $(\delta x^\mu)_a = (\delta x^\mu)_b = 0$ oluyorsa, (E.3) denkleminde $\frac{du^\mu}{d\tau} = 0$ olmalıdır. Bu koşul, serbest (*force – free*) parçacığın hareket denkleminin rölativistik mekaniğe genelleştirilmiş halini verir. Eğer etki (*action function*); koordinatların bir fonksiyonuysa, “a” noktası sabit (yani $(\delta x^\mu)_a = 0$) ve “b” noktası değişken olarak alınır. Buradan yukarıdaki koordinatların hareket denklemini sağlaması gerektiği anlaşılır. Dolayısıyla (E.3) denklemindeki integral ifadesi sıfır olur. Notasyon olarak $(\delta x^\mu)_b = \delta x^\mu$ yazılırsa,

$$\delta S = mu_\mu \delta x^\mu \quad (\text{E.4})$$

ifadesi bulunur. Buradan $\partial S / \partial x^\mu$ ifadesi,

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = mu_\mu = p_\mu} \quad (\text{E.5})$$

genelleştirilmiş momentum formunu verir. Yukarıdaki (E.5) genelleştirilmiş momentum ifadesi, zamansal ve uzaysal bileşenler olarak yazılabilir. Bunun için (D.8) kovaryant 4’lü hız vektöründen yararlanılır.

$$p_\mu = mu_\mu = (-\gamma mc, \gamma m \vec{v}) \quad (\text{E.6})$$

Rölativistik mekanik enerjinin (D.9) ifadesi yardımıyla (E.6) denklemi,

$$\boxed{p_\mu = mu_\mu = (-E/c, \vec{p})} \quad (\text{E.7})$$

biçiminde gösterilebilir. Burada $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, (E.7) genelleştirilmiş momentum ifadesinin uzay bileşeni olup Newton mekaniğinde $\vec{p} = m \vec{v}$ doğrusal momentumuna karşılık gelir. Genelleştirilmiş momentumun kontrovaryant bileşenini bulmak için (E.7) ifadesi $g^{\mu\nu}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}p_\mu &= mg^{\mu\nu}u_\mu = mg^{00}u_0 + mg^{\alpha\alpha}u_\alpha \\
&= -mu_0 + m(g^{11}u_1 + g^{22}u_2 + g^{33}u_{33}) \\
&= -m(-\gamma c) + \gamma m(\vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z) = E/c + \gamma m\vec{v}
\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\boxed{p^\mu = mu^\mu = (E/c, \vec{p})} \quad (\text{E.8})$$

kontrovaryant genelleştirilmiş momentum vektörü (E.8) olarak elde edilir.

Son olarak (E.7) ve (E.8) ifadelerinin çarpımına bakıldığında (D.5) eşitliği yardımıyla,

$$p_\mu p^\mu = mu_\mu mu^\mu = -m^2 c^2 \quad (\text{E.9})$$

denklemini bulunur. Genelleştirilmiş momentumun etki fonksiyonuyla ilişkili olduğu (E.5) ifadesi, (E.9) denkleminde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
p_\mu p^\mu &= p_\mu g^{\mu\nu} p_\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \\
&= -m^2 c^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = -m^2 c^2} \quad (\text{E.10})$$

eşitliği bulunur. Bu denklem rölativistik Hamilton – Jacobi denklemini olarak bilinir.

Etki fonksiyonunun $S(x^\mu, \tau)$, tam türevi alınarak, (C.13) ve (E.5) yardımıyla,

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu + \frac{\partial S}{\partial \tau} = \mathcal{L} \Rightarrow p_\mu \dot{x}^\mu + \frac{\partial S}{\partial \tau} - \mathcal{L} = 0 \quad (\text{E.11})$$

eşitliği bulunur. Burada (E.11)'in son eşitliği (C.12) yardımıyla,

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + H = 0 \quad (\text{E.12})$$

formuna dönüşür. Yukarıdaki (E.12) denklemini, Hamilton – Jacobi denkleminin birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel formu olarak bilinir.

EK AÇIKLAMALAR –F

(3.26) Eşitliğinin Türetilmesi

Bölüm 3'teki (3.23) denklemini tekrar yazılarak,

$$2\rho^2\partial_r S = \frac{\Sigma^2}{\Delta}(\partial_t S)^2 + \frac{4amr}{\Delta}\partial_t S\partial_\phi S - \Delta(\partial_r S)^2 - (\partial_\theta S)^2 - \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\Delta \sin^2 \theta}(\partial_\phi S)^2$$

uygun bir biçimde düzenlenirse,

$$2\rho^2\partial_r S = \frac{1}{\Delta}[(r^2 + a^2)\partial_t S + a\partial_\phi S]^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta}[(a \sin^2 \theta)\partial_t S + \partial_\phi S]^2 - \Delta(\partial_r S)^2 - (\partial_\theta S)^2$$

elde edilir.

Daha sonra (3.24) ifadesi son denklemde kullanılarak,

$$-q^2\rho^2 = \frac{1}{\Delta}[aL - (r^2 + a^2)E]^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta}(L - aE \sin^2 \theta)^2 - \Delta(\partial_r S)^2 - (\partial_\theta S)^2 \quad (F.1)$$

eşitliğine dönüşür. Yukarıdaki (F.1) eşitliği,

$$(L - aE \sin^2 \theta)^2 \operatorname{cosec}^2 \theta = (L^2 \operatorname{cosec}^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + (L - aE)^2$$

özdeşliğinden yararlanılarak tekrar yazılabilir.

$$\begin{aligned} -q^2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) - \frac{1}{\Delta}[aL - (r^2 + a^2)E]^2 + (L^2 \operatorname{cosec}^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta \\ + (L - aE)^2 + \Delta(\partial_r S)^2 + (\partial_\theta S)^2 = 0 \end{aligned}$$

Sonuç olarak bu denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \left\{ \Delta \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} [aL - (r^2 + a^2)E]^2 - q^2 r^2 \right\} \\ & + \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + (L^2 \operatorname{cosec}^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta - q^2 a^2 \cos^2 \theta + (L - aE)^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (F.2)$$

(3.26) eşitliği elde edilir.

EK AÇIKLAMALAR –G

Geodezik Teğet Vektör Bileşenleri

(3.8) Geodezik teğet vektörünün bileşenleri için (3.13) denklemi tekrar yazılır.

$$\rho^2 \dot{t} = \frac{\Sigma^2 E - 2amrL}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 E - a^2 E \Delta \sin^2 \theta - 2amrL_z]$$

Daha sonra (3.35a) parametre dönüşümleri uygulanıp (3.35g) eşitliği (null geodezik durumu göz önüne alınmıştır.) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2 \dot{t}}{E} &= \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta_0 - 2amr\zeta] \\ &= \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta_0 (\Delta + 2mr)] = \frac{(r^2 + a^2)\rho^2}{\Delta} \\ \boxed{\dot{t} = \frac{(r^2 + a^2)E}{\Delta}} \end{aligned} \quad (G.1)$$

$\dot{t}$ bileşeni elde edilir.

Buradan (3.34b), (3.28b) ve (3.35a) eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\rho^4 \dot{\theta}^2}{E^2} &= \eta + (a^2 - \zeta^2 \operatorname{cosec}^2 \theta_0) \cos^2 \theta_0 \\ &= -a^2 \cos^4 \theta_0 + (a^2 - a^2 \sin^4 \theta_0 \operatorname{cosec}^2 \theta_0) \cos^2 \theta_0 = 0 \\ \boxed{\dot{\theta} = 0} \end{aligned} \quad (G.2)$$

bileşeni elde edilir. Son olarak (3.14) eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2 \dot{\phi}}{E} &= \frac{2amr \sin^2 \theta + (\rho^2 - 2mr)\zeta}{\Delta \sin^2 \theta} = \frac{2amr + (\rho^2 - 2mr)a}{\Delta} \\ &= \frac{a(2mr + \rho^2 - 2mr)}{\Delta} = \frac{a\rho^2}{\Delta} \\ \boxed{\dot{\phi} = \frac{aE}{\Delta}} \end{aligned} \quad (G.3)$$

olarak geodezik teğet vektörünün bileşenleri bulunmuş olur.

EK AÇIKLAMALAR –H

Baz Vektörlerinin Birbirleri Arasında Dual İlişkisi

Teğet vektörlerin genel bir tanımının verilmesi amacıyla basit bir örnek olarak, $\mathbb{R}^2$ kartezyen uzayında (x, y) koordinatları göz önüne alınır. Herhangi $p \in \mathbb{R}^2$ noktasındaki bir vektör, $\{e_x, e_y\}$ birim vektörleri (baz vektörler) ile gerilir (*span*). Bu birim vektörlerden e_x , $y = \text{sabit}$ olan doğrultuda ve yönü x 'in artan yönünde olur. Diğer e_y birim vektörü ise, $x = \text{sabit}$ olan doğrultuda ve yönü y 'in artan yönündedir. Keyfi bir χ vektörü $p(x, y)$ noktasında tanımlanırsa,

$$\chi = \chi^x e_x + \chi^y e_y \quad (\text{H.1})$$

olarak yazılabilir. Burada χ^x ve χ^y , sadece katsayılarıdır. Öte yandan bir $A(x, y)$ vektör alanı ise (H.2) formunda yazılabilir.

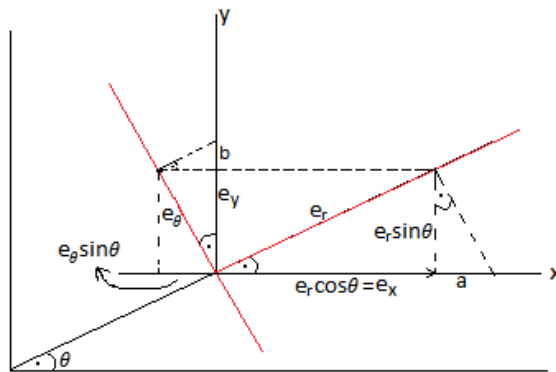
$$A(x, y) = A^x(x, y)e_x + A^y(x, y)e_y \quad (\text{H.2})$$

Bu vektör alanı A^x ve A^y fonksiyonlarının tanımlı olduğu yerde bulunur. Bu fonksiyonlar, x ve y 'nin sürekli fonksiyonları (*smooth function*) ise A vektör alanının sürekli olduğu söylenebilir. Bir teğet vektör alanı A 'nın, tanım kümesindeki herhangi $p = (x_0, y_0)$ noktası için,

$$A(x_0, y_0) = A^x(x_0, y_0)e_x + A^y(x_0, y_0)e_y \quad (\text{H.3})$$

ifadesi bir teğet vektör olur.

Bir vektör dönüşüm özelliği ile de karakterize edilir.



Şekil H.1: İki boyutlu uzayda kartezyen (x, y) koordinatlardan kutupsal (r, θ) koordinatlara dönüşümü göstermektedir.

Yukarıdaki şekilden $x = r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta$ dönüşümleri elde edilir. İki koordinat sistemi arasındaki dönüşüm,

$$e_r = (e_r \cos \theta + a) \cos \theta, \quad e_\theta = (e_\theta \cos \theta + b) \cos \theta \quad (\text{H.4})$$

denklemleriyle bulunur. Burada a ve b terimlerinin belirlenmesi amacıyla, geometrik ilişkilerden yararlanılırsa,

$$ae_r \cos \theta = (e_r \sin \theta)^2 \Rightarrow a = \frac{e_r \sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad (\text{H.5a})$$

$$be_\theta \cos \theta = (e_\theta \sin \theta)^2 \Rightarrow b = \frac{e_\theta \sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad (\text{H.5b})$$

değerleri bulunur. Bu değerler (H.4) eşitliklerinde yerine yazılarak,

$$e_r = (e_r \cos \theta) \cos \theta + (e_r \sin \theta) \sin \theta \quad (\text{H.6a})$$

$$e_\theta = (e_\theta \cos \theta) \cos \theta + (e_\theta \sin \theta) \sin \theta \quad (\text{H.6b})$$

dönüşümü elde edilir. Şekil (H.1)'e bakıldığında; $e_r \cos \theta = e_x$, $e_r \sin \theta = e_\theta \cos \theta = e_y$ ve $e_\theta \sin \theta = -e_x$ olduğu görülür. O halde dönüşüm eşitlikleri,

$$e_x \cos \theta + e_y \sin \theta = e_r \quad (\text{H.7a})$$

$$-e_x \sin \theta + e_y \cos \theta = e_\theta \quad (\text{H.7b})$$

olarak bulunur. Yukarıdaki (H.7a,b) dönüşümleri Şekil (H.1) yardımıyla,

$$e_r = \frac{\partial x}{\partial r} e_x + \frac{\partial y}{\partial r} e_y, \quad e_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} e_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} e_y \right) \quad (\text{H.8})$$

formunda yazılabilir²¹. Ayrıca zincir kuralından kısmi türevler,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{H.9})$$

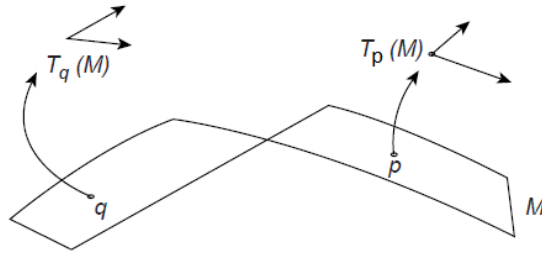
olur. Daha sonra (H.8) eşitlikleri, (H.9) ile karşılaştırıldığında baz vektörlerin parçalı türevler gibi dönüştükleri görülür. Yukarıdaki (H.8) eşitliklerinde $1/r$ katsayısı, birim vektörlerin dönüşümü incelendiğinden normalizasyon faktörü olarak görev yapar. Bu sonuç, ortonormal olmayan baz vektörleri için de genelleştirilebilir.

²¹ $\frac{x}{r} = \cos \theta \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\sin \theta$ ve $\frac{y}{r} = \sin \theta \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \cos \theta$ eşitliğinden yararlanıldı.

Sonuç olarak n – boyutlu sürekli bir uzayda, n tane koordinat fonksiyonu $\{x^i|_{i=1}^n\}$ belirlenebilir. Diferansiyel geometride uzayın kendisi bir manifold olduğundan keyfi bir M manifoldu, koordinatları $\{x^i|_{i=1}^n\}$ ile tanımlanabilir. Bu manifold için vektör alanları, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ile gerilir ($i=1,\dots,n$). A teğet vektörünün bir $p \in M$ noktasındaki en genel ifadesi,

$$A(p) = A^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{H.10})$$

ile verilir. Burada (H.10) ifadesi Einstein toplama kuralına uyar.



Şekil H.2: Bir M manifoldundaki p ve q noktalarına teğet vektörleri göstermektedir (Dermer and Menon, 2009).

Şekil (H.2) de $p \in M$ noktasındaki bütün teğet vektörler, $T_p(M)$ teğet vektör uzayında yer alır. Burada A^i , A vektör alanının bileşenleridir. $A^i \partial_i$ vektörü (ya da vektör alanı) sıklıkla A^i olarak gösterilir. Bir teğet vektör alanı, manifold üzerinde bir p noktası için o noktaya teğet olan vektörü verir. Teğet vektörlerinin dönüşüm özellikleri, zincir kuralıyla ilişkilidir.

Keyfi bir $\{x^i\}$ koordinat sisteminin başka bir $\{\bar{x}^i\}$ koordinat sistemine dönüşümü dikkate alınarak,

$$A(x) = A^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} = A^i(x) \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \equiv \bar{A}^j(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \quad (\text{H.11})$$

olarak yazılır. Bileşenler formunda teğet vektörlerin dönüşümü ise,

$$\bar{A}^j(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} A^i(x) \quad \text{veya} \quad A^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}^j(\bar{x}) \quad (\text{H.12})$$

şeklinde ifade edilir.

Bir manifold üzerindeki herhangi p noktasına teğet vektörler, p noktasındaki sürekli fonksiyonlar ile ilişkilidir. Herhangi bir sürekli fonksiyon f olmak üzere,

$$A(f)|_p = A^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p \quad (\text{H.13})$$

ifadesiyle verilir. (H.13) eşitliği, (H.14)'te verilen lineer dönüşümü sağladığı müddetçe lineer bir dönüşüm olur.

$$A(af + bg) = aA(f) + bA(g) \quad (\text{H.14})$$

Burada f ve g sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca a ve b bir sayı değeridir.

Bir manifold için $p \in M$ noktasındaki bir dual vektör, bu noktadaki teğet vektörlerin lineer bir fonksiyoneldir. Başka bir ifadeyle aynı noktadaki bir dual vektörle bir teğet vektör, birbirine lineer olarak dönüşür. Manifold üzerindeki sürekli bir f fonksiyonunun diferansiyeli df , teğet vektörler üzerinde lineer bir fonksiyonel olarak (H.15)'de tanımlanmıştır.

$$df(A) = A(f) = A^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (\text{H.15})$$

Bir teğet vektör alanı üzerinde bir fonksiyonun diferansiyelinin davranışı (H.16)'da olduğu gibi lineerdir.

$$df(gA + hB) = gdf(A) + hdf(B) \quad (\text{H.16})$$

Burada A ve B vektörlerinin; g ve h sürekli fonksiyonlarıyla olan ilişkisi gösterilmektedir.

Eğrisel bir koordinat sisteminde baz vektörleri (*base vectors*) genel olarak iki gruba ayrılır. Bu gruptan ilki, üzerinde bulunduğu eğriye teğet olan vektörlerdir. Diğer gruptakiler ise koordinat yüzeyine dik olan baz vektörlerdir. Teğet vektörlerin genel ifadesi olan (H.10)'dan anlaşılacağı üzere, $\partial/\partial x^\mu$ niceliği bir baz vektördür²². Diğer gruptaki baz vektörler²³ ise dx^μ koordinat diferansiyelleri olarak gösterilir. Bir manifold üzerindeki aynı noktada bu iki baz

²² (H.8) ve (H.9) dan kovaryant baz vektörlerinin gradyent operatörleriyle olan ilişkisi verilmiştir.

²³ Bazı kaynaklarda *one – forms* olarak da geçmektedir. Konuyla ilgili detaylı bilgi için *Flanders*, (1989).

vektörü birbirinin duali olurlar. Dolayısıyla $\partial/\partial x^\mu$ ve dx^μ baz vektörlerinin ortogonalite (orthogonality) özelliğinden,

$$\boxed{dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu} \quad (\text{H.17})$$

eşitliği elde edilir.

EK AÇIKLAMALAR –I

$r_- < r < r_+$ Aralığında r Koordinatının Değişimi

Bölüm 3'teki (3.57a,b ve c) dönüşümleri yardımıyla (3.8) 4'lü hız ifadesi,
 $u = \dot{t}\partial_{\bar{t}} + \dot{r}\left(\frac{2mr}{\Delta}\partial_{\bar{t}} + \partial_{\bar{r}} + \frac{a}{\Delta}\partial_{\bar{\phi}}\right) + \dot{\theta}\partial_{\bar{\theta}} + \dot{\phi}\partial_{\bar{\phi}}$

$$u = \left(\dot{t} + \frac{2mr}{\Delta}\dot{r}\right)\partial_{\bar{t}} + \dot{r}\partial_{\bar{r}} + \dot{\theta}\partial_{\bar{\theta}} + \left(\frac{a}{\Delta}\dot{r} + \dot{\phi}\right)\partial_{\bar{\phi}} \quad (\text{I.1})$$

olarak bulunur. Yukarıdaki (I.1) ve (3.66) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki işlemler yapılır.

$$\begin{aligned} g(u, -\partial_r) &= g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(-\partial_r)\bar{\mu}u^{\bar{\nu}} \\ &= g_{\bar{t}\bar{t}}(-\partial_r)\bar{t}u^{\bar{t}} + g_{\bar{r}\bar{r}}(-\partial_r)\bar{r}u^{\bar{r}} + g_{\bar{\theta}\bar{\theta}}(-\partial_r)\bar{\theta}u^{\bar{\theta}} + g_{\bar{\phi}\bar{\phi}}(-\partial_r)\bar{\phi}u^{\bar{\phi}} \\ &\quad + g_{\bar{t}\bar{r}}(-\partial_r)\bar{t}u^{\bar{r}} + g_{\bar{r}\bar{t}}(-\partial_r)\bar{r}u^{\bar{t}} + g_{\bar{r}\bar{\phi}}(-\partial_r)\bar{r}u^{\bar{\phi}} + g_{\bar{\phi}\bar{r}}(-\partial_r)\bar{\phi}u^{\bar{r}} \\ &\quad + g_{\bar{t}\bar{\phi}}(-\partial_r)\bar{t}u^{\bar{\phi}} + g_{\bar{\phi}\bar{t}}(-\partial_r)\bar{\phi}u^{\bar{t}} \\ &= g_{\bar{t}\bar{t}}(-F)\left(\dot{t} + \frac{2mr}{\Delta}\dot{r}\right) + g_{\bar{r}\bar{r}}(-1)\dot{r} + 0 + g_{\bar{\phi}\bar{\phi}}(-Z)\left(\frac{a}{\Delta}\dot{r} + \dot{\phi}\right) + g_{\bar{t}\bar{r}}(-F)\dot{r} \\ &\quad + g_{\bar{r}\bar{t}}(-1)\left(\dot{t} + \frac{2mr}{\Delta}\dot{r}\right) + g_{\bar{r}\bar{\phi}}(-1)\left(\frac{a}{r}\dot{r} + \dot{\phi}\right) + g_{\bar{\phi}\bar{r}}(-Z)\dot{r} \\ &\quad + g_{\bar{t}\bar{\phi}}(-F)\left(\frac{a}{r}\dot{r} + \dot{\phi}\right) + g_{\bar{\phi}\bar{t}}(-Z)\left(\dot{t} + \frac{2mr}{\Delta}\dot{r}\right) \\ g(u, -\partial_r) &= -F\left[g_{\bar{t}\bar{t}}\left(\dot{t} + \frac{2mr}{\Delta}\dot{r}\right) + g_{\bar{t}\bar{r}}\dot{r} + g_{\bar{t}\bar{\phi}}\left(\frac{a}{r}\dot{r} + \dot{\phi}\right)\right] \\ &\quad - Z\left[g_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\left(\frac{a}{\Delta}\dot{r} + \dot{\phi}\right) + g_{\bar{\phi}\bar{r}}\dot{r} + g_{\bar{\phi}\bar{t}}\left(\dot{t} + \frac{2mr}{\Delta}\dot{r}\right)\right] - g_{\bar{r}\bar{r}}\dot{r} \\ &\quad - g_{\bar{r}\bar{t}}\left(\dot{t} + \frac{2mr}{\Delta}\dot{r}\right) - g_{\bar{r}\bar{\phi}}\left(\frac{a}{r}\dot{r} + \dot{\phi}\right) \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

(I.2) denkleminde (3.53) metrik tensör bileşenleri yerine yazılıp düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} g(u, -\partial_r) &= -\frac{\dot{r}(a^2 + 2r^2 + a^2(2\cos^2\theta - 1))}{2\Delta} = -\frac{\dot{r}2\rho^2}{2\Delta} \\ g(u, -\partial_r) &= -\frac{\dot{r}\rho^2}{\Delta} < 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

bulunur. 4'lü hız u ve $-\partial_r$ vektör alanı gelecek yönlü olduğundan (I.3) ifadesi negatif olur. Göz önüne alınan $r_- < r < r_+$ bölgesinde $\Delta < 0$ olduğundan,

$$\boxed{\dot{r} < 0} \tag{I.4}$$

bulunur.

EK AÇIKLAMALAR –J

Killing Vektörleri

Bir Killing vektör alanı, Riemanian manifold üzerinde metriğin korunduğu bir vektör alanı olarak tanımlanır. Bu manifold üzerinde herhangi bir noktalar setinin, izometrik biçimde $X^i dx_i$ kadar yerini değiştiren vektör alanına Killing vektörü denir.

Metrik tensörün koordinat dönüşümü,

$$g_{ab} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} g_{cd}(x') \quad (J.1)$$

olarak verilir. Aşağıdaki gibi bir dönüşüm tanımlandığında,

$$\begin{aligned} x'^a &= x^a + \epsilon X^a \\ \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} &= \delta_b^a + \epsilon \frac{\partial X^a}{\partial x^b} \\ g_{ab}(x) &= (\delta_a^c + \epsilon \partial_a X^c) (\delta_b^d + \epsilon \partial_b X^d) g_{cd}(x^e + \epsilon X^e) \\ &= (\delta_a^c + \epsilon \partial_a X^c) (\delta_b^d + \epsilon \partial_b X^d) [g_{cd}(x) + \epsilon X^e \partial_e g_{cd}(x) + \dots] \\ &= g_{ab}(x) + \epsilon [g_{ad} \partial_b X^d + g_{bd} \partial_a X^d + X^e \partial_e g_{ab}] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= g_{ab}(x) + \mathcal{L}_X g_{ab} = g'_{ab} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mathcal{L}_X g_{ab}$ ifadesine, metrik tensörünün X^i vektör alanına göre *Lie türevi* denir. Eğer X^i bir Killing vektör ise $\delta g^{ik} = 0$ ve $\mathcal{L}_X g_{ab} = 0$ olur²⁴. Ayrıca bir u^i geodezik teğet vektörü ile bir ξ_i Killing vektörü olmak üzere $u^i \xi_i$ korunan bir niceliği tanımlar.

$$\frac{d(u^a \xi_a)}{d\lambda} = u^b \nabla_b (u^a \xi_a) = \xi_a u^b \nabla_b u^a + u^a u^b \nabla_b \xi_a = 0 \quad (J.2)$$

Sonuç olarak (J.2) denkleminde ilk terim geodezik boyunca $u^b \nabla_b u^a = 0$ olur. İkinci terim ise $\nabla_b \xi_a$ ifadesi anti – simetrik tensör olduğu için²⁵ simetrik tensörle çarpımı sıfır olur.

²⁴ Konu hakkında detaylı bilgi için bkz (Padmanabhan, 2010). p.173.

²⁵ bkz. (3.9) Killing denklemi.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Bardeen, J. M., Press, W. H., and Teukolsky, S. A.**, 1972, "Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation", *The Astrophysical Journal*, 178, 347. p. doi:10.1086/151796
- Bisnovatyi-Kogan, G. S., and Ruzmaikin, A. A.**, 1976, "The accretion of matter by a collapsing star in the presence of a magnetic field. II. Selfconsistent stationary picture", *Astrophysics and Space Science*, 42(2), 401–424. pp. doi:10.1007/BF01225967
- Blandford, R. D., and Znajek, R. L.**, 1977, "Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 179, 433–456. pp.
- Bojowald, M.**, 2008, "Loop quantum cosmology", *Living Reviews in Relativity*, 11, 131. p. 131. doi:10.12942/lrr-2008-4
- Boyda, E., Ganguli, S., Hořava, P., and Varadarajan, U.**, 2003, "Holographic protection of chronology in universes of the Gödel type", *Physical Review D*, 67(10), 106003. p. doi:10.1103/PhysRevD.67.106003
- Boyer, R. H., and Lindquist, R. W.**, 1967, "Maximal analytic extension of the Kerr metric", *Journal of Mathematical Physics*, 8(2), 265. p. doi:10.1063/1.1705193
- Bozza, V., Feoli, A., Papini, G., and Scarpetta, G.**, 2000, "Maximal acceleration effects in Reissner–Nordström space", *Physics Letters A*, 271(1-2), 35–43. pp. doi:10.1016/S0375-9601(00)00351-0
- Carroll, S.**, 2003, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, p. 513.
- Carter, B.**, 1968, "Global structure of the Kerr family of gravitational fields", *Physical Review*, 174(5), 1559–1571. pp. doi:10.1103/PhysRev.174.1559
- Carter, B.**, 1971, "Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom", *Physical Review Letters*, 26(6), 331–333. pp. doi:10.1103/PhysRevLett.26.331

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Chandrasekhar, S.**, 1998, *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, USA: New York, p. 672.
- Dermer, C. D., and Menon, G.**, 2009, *High Energy Radiation from Black Holes: Gamma Rays, Cosmic Rays, and Neutrinos*. Princeton University Press, p. 568.
- East, W. E., Ramazanoğlu, F. M., and Pretorius, F.**, 2014, "Black hole superradiance in dynamical spacetime", *Physical Review D*, 89(6), 061503. p. doi:10.1103/PhysRevD.89.061503
- Eddington, A. S.**, 1924, "A comparison of whitehead's and Einstein's formulae", *Nature*, 113(2832), 192–192. pp. doi:10.1038/113192a0
- Finkelstein, D.**, 1958, "Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle", *Physical Review*, 110(4), 965–967. pp. doi:10.1103/PhysRev.110.965
- Flanders, H.**, 1989, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Dover Publications, p. 205.
- Franklin, J.**, 2010, *Advanced Mechanics and General Relativity*. Cambridge University Press, p. 384.
- Futterman, J. A. H., Handler, F. A., and Matzner, R. A.**, 1988, *Scattering from Black Holes*. Cambridge University Press, p. 208.
- Ghez, A. M., Salim, S., Weinberg, N. N., Lu, J. R., Do, T., Dunn, J. K., ... Naiman, J.**, 2008, "Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits", *The Astrophysical Journal*, 689(2), 1044–1062. pp. doi:10.1086/592738
- Gimon, E. G., and Horava, P.**, 2004, "Over-rotating black holes, godel holography and the hypertube", 34. High Energy Physics - Theory, p. 34.
- Goldreich, P., and Julian, W. H.**, 1969, "Pulsar electrodynamics", *The Astrophysical Journal*, 157, 869. p. doi:10.1086/150119

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Goswami, R., and Joshi, P.,** 2007, "Spherical gravitational collapse in N dimensions", *Physical Review D*, 76(8), 084026. p. doi:10.1103/PhysRevD.76.084026
- Goswami, R., Joshi, P., and Singh, P.,** 2006, "Quantum evaporation of a naked singularity", *Physical Review Letters*, 96(3), 031302. p. doi:10.1103/PhysRevLett.96.031302
- Grib, A. A., and Pavlov, Y. V.,** 2013, "On the energy of particle collisions in the ergosphere of the rotating black holes", *EPL (Europhysics Letters)*, 101(2), 20004. p. 20004. doi:10.1209/0295-5075/101/20004
- Griffiths, J. B., and Podolský, J.,** 2009, "Rotating black holes", In *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)* (1st ed.). Cambridge University Press, p. 548.
- Grøn, Ø., and Sigbjørn Hervik,** 2007, *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology*. Springer Science+Business Media, LLC: New York, p. 560.
- Hawking, S. W.,** 1972, "Black holes in general relativity", *Communications in Mathematical Physics*, 25(2), 152–166. pp. doi:10.1007/BF01877517
- Horák, J.,** 2005, "A possible mechanism for QPOs modulation in neutron star sources", *Astronomische Nachrichten*, 326(9), 845–848. pp. doi:10.1002/asna.200510425
- Horowitz, G., and Sen, A.,** 1996, "Rotating black holes which saturate a Bogomol'nyi bound", *Physical Review D*, 53(2), 808–815. pp. doi:10.1103/PhysRevD.53.808
- Hoyng, P.,** 2006, *Relativistic Astrophysics and Cosmology: A Primer (Astronomy and Astrophysics Library)*. Springer, p. 306.
- Kerr, R.,** 1963, "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics", *Physical Review Letters*, 11(5), 237–238. pp. doi:10.1103/PhysRevLett.11.237

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Kobayashi, T., and Tomimatsu, A.**, 2010, "Superradiant scattering of electromagnetic waves emitted from disk around Kerr black holes", *Physical Review D*, 82(8), 084026. p. doi:10.1103/PhysRevD.82.084026
- Landau, L. D., and Lifshitz, E. M.**, 1980, *The Classical Theory of Fields, Fourth Edition: Volume 2* (4th ed.). Butterworth-Heinemann, p. 402.
- Lee, H. K., Wijers, R. A. M. J., and Brown, G. E.**, 2000, "The Blandford-Znajek process as a central engine for a gamma-ray burst", *Physics Reports*, 325, 83–114. pp.
- Mackay, T. G., Lakhtakia, A., and Setiawan, S.**, 2005, "Mapping of electromagnetic negative-phase-velocity propagation in the ergosphere of a rotating black hole". *Astrophysics*. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0501522>
- Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A.**, 1973, *Gravitation* (1st ed.). W. H. Freeman and Company: New York, p. 1215.
- Morin, D.**, 2008, *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions* (1st ed.). Cambridge University Press, p. 738.
- Newman, E. T., and Janis, A. I.**, 1965, "Note on the Kerr spinning-particle metric", *Journal of Mathematical Physics*, 6(6), 915. p. 915. doi:10.1063/1.1704350
- Nordström, G.**, 1918, "On the energy of the gravitation field in Einstein's theory", *Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings*, 20(2), 1238–1245. pp.
- O'Neill, B.**, 1992, *The Geometry of Kerr Black Holes*. A K Peters/CRC Press, p. 400.
- Padmanabhan, T.**, 2010, *Gravitation Foundations and Frontiers* (1st ed.). Cambridge University Press, p. 728.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Patil, M., Joshi, P. S., Kimura, M., and Nakao, K.**, 2012, "Acceleration of particles and shells by Reissner-Nordström naked singularities", *Physical Review D*, 86(8), 084023. p. doi:10.1103/PhysRevD.86.084023
- Penrose, R.**, 1969, "Gravitational collapse: the role of general relativity", *Rivista del Nuovo Cimento, Numero Speciale, I*, 252. p. 252. doi:10.1038/physci229177
- Penrose, R.**, 2002, "'Golden Oldie': gravitational collapse: the role of general relativity", *General Relativity and Gravitation*, 34(7), 1141–1165. pp. doi:10.1023/A:1016578408204
- Plebanski, J., and Krasinski, A.**, 2006, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press, p. 554.
- Raine, D., and Thomas, E.**, 2009, *Black Holes: An Introduction* (2nd ed.). Imperial College Press, p. 212.
- Reissner, H.**, 1916, "Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie", *Annalen der Physik*, 355(9), 106–120. pp. doi:10.1002/andp.19163550905
- Schwarzschild, K.**, 1916, "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory", *arXiv preprint physics/9905030*, 1–7. pp.
- Shibata, M., and Sekiguchi, Y.**, 2005, "Magnetohydrodynamics in full general relativity: Formulation and tests", *Physical Review D*, 72(4), 044014. p. 044014. doi:10.1103/PhysRevD.72.044014
- Teukolsky, S. A., and Press, W. H.**, 1974, "Perturbations of a rotating black hole. III - Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation", *The Astrophysical Journal*, 193, 443. p. doi:10.1086/153180
- Thorne, K. S., MacDonald, D. A., and Price, R. H.**, 1986, *Black Holes: The Membrane Paradigm*. Yale University Press, p. 416.
- Vilasi, G.**, 2001, *Hamiltonian Dynamics*. World Scientific Pub Co Inc, p. 456.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Vishveshwara, C. V.**, 1968, "Generalization of the “Schwarzschild surface” to arbitrary static and stationary metrics", *Journal of Mathematical Physics*, 9(8), 1319. p. doi:10.1063/1.1664717
- Visser, M.**, 2007, "The Kerr spacetime: A brief introduction", 41. General Relativity and Quantum Cosmology; Astrophysics; High Energy Physics - Theory, p. 41.
- Wald, R.**, 1974, "Black hole in a uniform magnetic field", *Physical Review D*, 10(6), 1680–1685. pp. doi:10.1103/PhysRevD.10.1680
- Witten, L.**, 1962, *Gravitation : An Introduction to Current Research*. John Wiley & Sons, Inc.: New York, p. 481.
- Yang, X., and Wang, J.**, 2013, "YNOGK: A new public code for calculating null geodesics in the Kerr spacetime", 58. High Energy Astrophysical Phenomena; General Relativity and Quantum Cosmology, p. 58.
- Zaslavskii, O. B.**, 2011, *Acceleration of particles by nonrotating charged black holes?*, *JETP Letters* (Vol. 92). pp. doi:10.1134/S0021364010210010

ÖZGEÇMİŞ	
Adı Soyadı:	İsmail ÖZBAKIR
E-posta:	ozbakir.ismail@gmail.com
ÖĞRENİM BİLGİLERİ	
Lisans : Ege Üniversitesi Astronomi ve Uzay Bilimleri	
Mezuniyet Tarihi: 2011	
Yüksek Lisans : Ege Üniversitesi Astronomi ve Uzay Bilimleri	
Katıldığı Bilimsel Etkinlikler, Sunumlar, Projeler ve Sahip Olduğu Sertifikalar:	
• XVIII. Ulusal Astronomi ve Uzay Bilimleri Kongresi Poster Sunumu (2012) yapmıştır. • “Astrofiziksel Laboratuvarlar Olarak Yakın ve Relativistik Çift Yıldızlar” başlıklı TÜBİTAK Araştırma Projesinde bursiyer (Proje no: 111T270, 2012-2013) olarak çalışmıştır. • “Gravitasyonel Dalgalar İle Çift Sistemlerin İncelenmesi” başlıklı TÜBİTAK Araştırma Projesinde bursiyer (Proje no: 113F097, 2013-2014) olarak çalışmıştır. • Yaşar Üniversitesi’nde Kara Delikler çalıştayına 8-9 Mart 2012 tarihlerinde dinleyici olarak katılmıştır.	
Sertifikalar: T.C. MEB. Bilgisayar Operatörlüğü belgesi (2006)	