

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

YARI BASİT HALKALARIN YAPISI

(Yüksek Lisans Tezi)

**Hazırlayan
Elif ÇELİK**

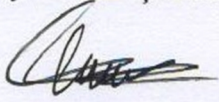
**Danışman
Prof. Dr. Himmet CAN**

**Temmuz 2014
KAYSERİ**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı: Elif ÇELİK

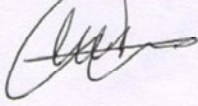
İmza:  .

YÖNERGEYE UYGUNLUK

Yarı Basit Halkaların Yapısı adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

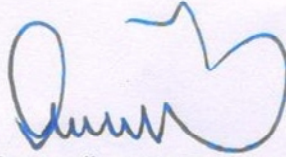
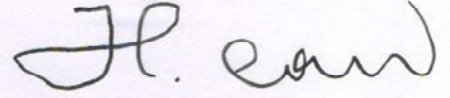
Tezi Hazırlayan

ELİF ÇELİK



Danışman

Prof. Dr. Himmet CAN



Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Prof.Dr. Himmet CAN danışmanlığında **Elif ÇELİK** tarafından hazırlanan “ **Yarı Basit Halkaların Yapısı**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

03.10.2014

JÜRİ:

Danışman : Prof. Dr. Himmet CAN

Üye : Prof. Dr. Mehmet BARAN

Üye : Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitümüz Yönetim Kurulunun 15/07/2014 tarih ve 214/3-11 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

15.07.2014

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Kazım KEŞLIOĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca farklı bakış açıları ve bilimsel katkılarıyla beni aydınlatan, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük katkı sahibi sayın hocam Prof. Dr. Himmet CAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca; çalışmalarım süresince sabır göstererek beni destekleyen aileme şükranlarımı sunarım.

Elif ÇELİK

Kayseri, Temmuz 2014

YARI BASİT HALKALARIN YAPISI

Elif ÇELİK

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2014

Danışman: Prof. Dr. Himmet CAN

ÖZET

Bu tezin temel amacı yarı basit halkaların yapısını incelemektir. Bunun için modüller, tensör çarpımları ve Brauer grubu gibi temel kavramları göz önüne alıyoruz.

Modül ve halkaların birkaç elementer özelliğini hatırlatacağız. Aksi sarıh bir şekilde ifade edilmediği sürece, bir halka komütatif olsun ya da olmasın bir birimli halka demektir. Bütün modüller birimli kabul edileceklerdir. Bir halka homomorfizminin birimli olma şartı şartı istenmeyecektir.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır: Birinci bölümde, halkalar ve modüllere dair bazı temel bilgiler veriyoruz.

İkinci bölümde, Artinian ve Noetherian modüller ve sonlu uzunluktaki modüller incelenecektir.

Üçüncü bölümde, Artinian ve Noetherian halkalar Artinian halkaların Jacobson radikaline ilişkin bazı standart gerçekleri inceliyoruz.

Dördüncü bölümde, bilinen “Yarı basit halkaların Artin-Molien-Wedderburn yapı teoremi” ine yol gösteren “ Yarı basit halkalar ve modüller” i inceleyeceğiz. Ayrıca, “Merkez Basit Cebir” ve “ Brauer Grupları” teorisinin bazı temel kavramlarını vereceğiz. Buna ilave olarak, bölüm halkaları üzerindeki vektör uzaylarının endomorfizma halkaları gibi bilinen halkalar aracılığıyla yarı basit modüllerin endomorfizma halkalarını belirleyeceğiz.

Anahtar kelimeler: Artinian modüller, Noetherian modüller, yarı basit halkalar.

STRUCTURE OF SEMI SIMPLE RINGS

Elif ÇELİK

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, July 2014

Supervisor: Prof. Dr. Himmet CAN

ABSTRACT

The main objective of this thesis is to study the structure of semi-simple rings. For this we consider the basic concepts such as modules, tensor products and Brauer group.

We recall a few elementary properties of rings and modules. Unless otherwise stated explicitly, a ring means a ring with unity, whether or not commutative. All modules are assumed unitary. A homomorphism of rings is not necessarily unitary.

This thesis consists of four chapters: In the first chapter, some basic knowledge of Rings and Modules is given.

In the second chapter, we shall study Artinian and Noetherian modules, and modules of finite length.

In third chapter, we examine Artinian and Noetherian rings, and some standard facts related to the Jacobson radical of an Artinian ring.

In fourth chapter, we shall study “Semi-simple Modules and Rings” leading to celebrated “Artin-Molien-Wedderburn structure theorem of semi-simple rings”. We shall also present some of the basic concepts of the theory of “Central Simple Algebras” and “Brauer Groups”. In addition, we determine the rings of endomorphisms of semi-simple modules in terms of known rings such as the endomorphism rings of vector spaces over division rings.

Keywords: Artinian modules, Noetherian modules, Semi simple rings.

İÇİNDEKİLER

YARI BASİT HALKALARIN YAPISI

	<u>Sayfa</u>
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI.....	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI	iii
KABUL VE ONAY SAYFASI	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
GİRİŞ.....	1

1. BÖLÜM

HALKALAR VE MODÜLLER

1.1 Halkalar ve Modüller.....	2
--------------------------------------	----------

2. BÖLÜM

ARTINIAN VE NOETHERIAN MODÜLLER

2.1 Artinian Modüller.....	11
-----------------------------------	-----------

2.2 Noetherian Modüller.....	13
2.3 Sonlu Uzunluktaki Modüller.....	15

3. BÖLÜM

ARTINIAN VE NOETHERIAN HALKALAR

3.1 Artinian Halkalar.....	19
3.2 Noetherian Halkalar.....	20
3.3 Jacobson Radikali.....	21
3.4 Bir Artinian Halkanın Radikali.....	23
3.5 Cebirler.....	24
3.6 Tensör Çarpımları.....	26

4. BÖLÜM

YARI BASİT HALKALAR VE BRAUER GRUBU

4.1 Yarı Basit Modüller.....	35
4.2 İzotipik Bileşenler.....	40
4.3 Endomorfizma Halkaları.....	42
4.4 Yarı Basit Halkalar.....	45
4.5 Artinian Basit Halkalar.....	51
4.6 Dönüşümlerin Yoğun Halkaları.....	54
4.7 Merkez Basit Cebirler.....	55
4.8 Brauer Grubu.....	61

KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	65

GİRİŞ

Bu çalışmada amacımız yarı basit halkaların yapısını incelemek ve onların nasıl inşa edildiğini örnekler üzerinde araştırmaktır. Bu nedenle, ilk önce halka, modül, Artinian modülleri, Noetherian modülleri, Artinian halkaları, Jacobson radikali, cebirler ve tensör çarpımları gibi temel kavramlar üzerinde durulacaktır. Bu kavramlar tanıtıldıktan sonra yarı basit halkalar ve Brauer grubunun yapıları incelenmeye başlanacaktır.

Yarı basit halkalar kavramında en önemli temel kavramımız “yarı basit halkaların Artin-Molien-Wedderburn yapı teoremi” olacaktır. Bu temel teorem aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir: Bir R halkasının uygun bölüm halkaları üzerinde matris halkalarının sonlu bir direkt çarpımına izomorf olmasıdır.

Bu çalışmanın önemi, yarı basit halkaların yapısını incelemek ve bir halkanın yarı basit olması için gerek ve yeter şartların nasıl inşa edildiğini göstermektir.

Bu çalışmada kullanılan metodlar ve kavramlar sonlu grupların reprezentasyonu için temel bir dayanak noktası ve bir baz niteliğindedir.

Elbette akılda tutulmalıdır ki bu sadece bir inceleme çalışması olup konuya herhangi bir yenilik getirmemektedir.

1.BÖLÜM

HALKALAR VE MODÜLLER

Bir R halkası ile birimli, komutatif ya da komutatif olmayan bir R halkasını kastediyoruz. R nin birim elemanı 1 ile gösterilir. Bir R idealiyle, sağ/sol/2-terafli ideali kastediyoruz. Eğer iki ya da daha fazla idealden aynı anda bahsediliyorsa, bunlar aynı tipte ideallerdir. Bir M R -modülü ile birimli sol (ya da sağ) R -modülünü kastediyoruz. Bu bölümde kullandığımız temel kaynaklar [1,2,13] dür.

1.1 Halkalar ve Modüller

Tanım 1.1.1. R üzerinde eşitlik, toplama ve çarpma işlemleri tanımlı boş olmayan bir küme olsun. Eğer

1. R toplama işlemine göre kapalı,
2. R toplama işlemine göre birleşimli,
3. R toplama işlemine göre birim elemana sahip,
4. Toplama işlemine göre R de her elemanın tersi var,
5. R toplama işlemine göre değişmeli,
6. R çarpma işlemine göre kapalı,
7. R çarpma işlemine göre birleşimli,
8. R de çarpmanın toplama üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği özellikleri sağlanıyorsa $(R, +, \cdot)$ üçlüsüne *halka* adı verilir. Ayrıca, $\forall x \in R$ için,

$$ex = xe = x$$

olacak şekilde bir $e \in R$ varsa bu e elemanına R halkasının birimi ve R ye de bir *birimli halka* denir. Diğer taraftan $\forall x, y \in R$ için,

$$xy = yx$$

oluyorsa R ye bir *değişmeli halka* denir. Değişmeli olmayan birimli bir R halkasının sıfırdan farklı her elemanının tersi varsa bu halkaya *bölümlü halka* denir.

Tanım 1.1.2. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ alt kümesini göz önüne alalım. Eğer S, R nin işlemlerine göre halka aksiyomlarını sağlıyorsa S, R nin bir *alt halkasıdır* denir.

Tanım 1.1.3. Bir $(R, +, \cdot)$ halkası verilsin, R°, R kümesi ile aynı olsun. R° üzerinde, $\forall a, b \in R^\circ$ için, $a * b = b \cdot a$ olacak şekilde yeni bir $(*)$ çarpma işlemi tanımlayalım. Bu durumda, $(R^\circ, +, *)$ bir halka olup, bu halkaya R nin *ters halkası* denir. Ayrıca,

i) $(R^\circ)^\circ = R$ ve

ii) $R = R^\circ \Leftrightarrow R$ komutatifdir,

olduğu açıktır.

Tanım 1.1.4. R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ olsun. $ab = 0$ olması $a = 0$ veya $b = 0$ olmasını gerektiriyorsa, R ye *sıfır bölensiz halka* adı verilir. Ayrıca, $0 \neq a \in R$ için $ab = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ bulunabiliyorsa a ya R halkasının bir *sıfır böleni* adı verilir. R halkasında tersi mevcut elemanlara *birimsel eleman* denir. Halkada birimsel elemanlar bir grup oluştururlar. Bu gruba, *birim grubu* denir.

Tanım 1.1.5. D bir halka olmak üzere, eğer D birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz ise, D ye bir *tamlık bölgesi* adı verilir.

Tanım 1.1.6. R bir halka olsun. Eğer

i) $I \subseteq R$,

ii) $I \neq \emptyset$,

iii) $x, y \in I$ için $x - y \in I$,

iv) $r \in R$ ve $x \in I$ için $rx, xr \in I$ koşulları sağlanıyorsa I ya R nin bir ideali denir. Özel olarak, $r \in R$ ve $x \in I$ için sadece $rx \in I$ oluyorsa I ya bir *sol ideal*, $xr \in I$ oluyorsa I ya bir *sağ ideal* denir. $0 = \{0_R\}$ ve R nin kendisi her zaman bir ideal olduğundan, trivial olmayan her halkanın en az iki ideali vardır. R nin kendisinden farklı ideallerine *has ideal* denir.

Tanım 1.1.7. A , bir R halkasının bir altcümlesi olsun. R nin A yı kapsayan en küçük idealine A nın ürettiği ideal denir ve (A) ile gösterilir. $A = \emptyset$ ise $(A) = 0$ olur. $A = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise $(A) = (a)$ ya a nın ürettiği temel ideal denir. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu bir küme ise, (A) ya sonlu üretilmiş bir ideal denir ve A ya da bir üreteç sistemi denir.

$A \subseteq R$ altcümlesi için;

$$(A) = \left\{ \sum_{i=1}^k r_i a_i : r_i \in R, a_i \in A, i=1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N} \right\}$$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu kümesi için;

$$(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i : r_i \in R \text{ ve } a_i \in A \right\}$$

ve tek elemanlı $A = \{a\}$ kümesi için;

$$(A) = (a) = Ra = \{ra : r \in R\}$$

dir.

Tanım 1.1.8. I , bir R halkasının bir ideali olsun. Her $a, b \in R$ için,

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$$

bağıntısı R üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı sonucunda ortaya çıkan denklik sınıflarının cümlesini $R/I = \{a + I : a \in R\}$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$\oplus : R/I \times R/I \rightarrow R/I$$

$$(a+I, b+I) \rightarrow (a+I) \oplus (b+I) = a+b+I$$

$$\odot : R/I \times R/I \rightarrow R/I$$

$$(a+I, b+I) \rightarrow (a+I) \odot (b+I) = a.b+I$$

şeklinde tanımlanan işlemlerle birlikte $(R/I, \oplus, \odot)$ bir halkadır. Bu halkaya, R nin I ya göre bölüm halkası denir.

Tanım 1.1.9. Bir R halkası verilsin. $\forall a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde en küçük bir n pozitif tamsayısı mevcutsa, bu n sayısına R nin karakteristiği denir ve $Char(R)$ ile gösterilir. Aksi halde $Char(R)=0$ dir.

1. $Char(R)=0 \Leftrightarrow 1$ in toplamsal mertebesi sonsuz ise , yani , $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n1 \neq 0$ dir.
2. $Char(R)=n \neq 0 \Leftrightarrow 1$ in toplamsal mertebesi sonlu ve n e eşitse.
3. $P = \{n1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$, R nin asal althalkası olarak adlandırılan ve 1 tarafından üretilen bir althalkası olsun. Bu taktirde,
 - i) $Char(R)=0 \Leftrightarrow P$ sonsuz ve
 - ii) $Char(R)=n \neq 0 \Leftrightarrow P$ sonlu ve n elemanlı ise.
4. Bir tamlık bölgesinin karakteristiği ya “0” ya da bir asal sayıdır.
5. $M_n(R)$, reel terimli tüm $n \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi olmak üzere, $Char M_n(R) = Char(R)$ dir.
6. $R[X]$ polinomların halkası olmak üzere, $Char(R) = Char R[X]$ dir.
7. $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} / n \mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ olmak üzere, $Char(\mathbb{Z}_n) = n$ dir.

Tanım 1.1.10. M , R halkasının kendisinden farklı (has) bir ideali olsun. R nin, M yi kapsayan M den başka hiçbir has ideali yoksa M ye bir *maksimal ideal* denir. Yani, M ile R arasında başka bir ideal mevcut değil ise, M ye bir *maksimal ideal* denir.

Tanım 1.1.11. R değişmeli bir halka olsun. I , R nin bir ideali ve $I \neq R$ olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in I$ olması $a \in I$ veya $b \in I$ olmasını gerektiriyorsa, I ya R nin bir *asal ideali* denir.

Zorn Lemması 1.1.12. Her zinciri yukarıdan sınırlı (sırasıyla aşağıdan sınırlı) boş olmayan kısmi sıralı bir cümle bir maksimal (sırasıyla minimal) elemana sahiptir.

Bunu kullanarak bir R halkasındaki maksimal ideallerin varlığı ispatlanabilir. Aslında verilen bir $I \neq R$ idealinin, aynı türden (sağ/sol/2- Taraflı) bir $M \supseteq I$ maksimal ideali vardır.

Tanım 1.1.13. Eğer sıfır olmayan bir R halkası, (0) ve R den başka bir 2- Taraflı ideale sahip değilse R ye bir *basit halka* denir.

Tanım 1.1.14. Eğer R deki birimsel olmayan elemanların kümesi bir ideal ise, R ye bir *lokal halka* denir. Aslında, bu ideal R nin tek sağ/sol/2- Taraflı maksimal ideali olarak düşünülebilir ve bölüm halkasının bir bölümlü halka olduğu düşünülebilir.

Uyarı 1.1.15. Bir lokal halkanın karakteristiği ya “0” ya da bir asalın bir kuvvetidir. Ayrıca, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lokaldir ancak ve ancak n bir asalın bir kuvveti ise.

Tanım 1.1.16. Sadece sonlu sayıda maksimal ideali olan halkaya bir *yarı lokal halka* denir.

Tanım 1.1.17. R ve S iki halka ve $f: R \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. $f(1_R) = 1_S$ ve her $a, b \in R$ için,

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

koşullarını sağlıyorsa, f ye bir *halka homomorfizması* denir.

Tanım 1.1.18. Bir homomorfizma bire bir ise *monomorfizma*, örten ise *epimorfizma* ve hem bire bir hem örten ise *izomorfizma* denir. R halkasından R ye bir homomorfizmaya *endomorfizma* ve R halkasından R ye bir izomorfizmaya da *otomorfizma* denir.

Tanım 1.1.19. $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. M deki elemanların, R deki elemanlarla skaler çarpımı olan, $R \times M \rightarrow M$ fonksiyonu aşığıdaki koşulları sağıyorsa, M ye R üzerinde bir modül veya kısaca, R - modül denir.

i) Her $r \in R$, her $m, m' \in M$ için, $r(m + m') = rm + rm'$,

ii) Her $r, r' \in R$, her $m \in M$ için, $(r + r')m = rm + r'm$,

iii) Her $r, r' \in R$, her $m \in M$ için, $(rr')m = r(r'm)$,

iv) Her $m \in M$ için $1_R m = m$.

Tanım 1.1.20. R bir halka, M bir R -modül ve $N \subseteq M$ boş olmayan bir alt küme olsun. N kendi başına bir modül ise N ye, M nin bir alt modülü veya R -alt modülü denir.

Notasyon 1.1.21.

i) R ve S halkaları verilsin, R den S ye tüm halka homomorfizmalarının cümlesi $Hom_{halka}(R, S)$ gösterilir.

ii) M ve N R -modülleri verilsin. M den N ye bütün R -lineer modül homomorfizmalarının cümlesi $Hom_{R-mod}(M, N)$ veya kısaca $Hom_R(M, N)$ ile gösterilir.

iii) Bütün R -lineer endomorfizmlerin $Hom_R(M, M)$ cümlesi aynı zamanda $End_R(M)$ ile gösterilir.

Not 1.1.22.

i) $Hom_R(M, N)$, dönüşümlerin toplamları altında abelyen bir gruptur. Genelde $Hom_R(M, N)$, bir R - modül değildir, ama eğer R komütatifse $Hom_R(M, N)$ bir R - modüldür.

ii) $End_R(M)$, dönüşümlerin kompozisyonları ve toplamları altında bir birimli halkadır.

Bu halka, $End_{\mathbb{Z}}(M)$ nin bir alt halkasıdır.

iii) V , bir D bölümlü halkası üzerinde bir sol vektör uzayı (yani bir sol modül) olsun.

V sonlu boyutlu ise, bu taktirde V nin tüm D -lineer endomorfizmlerinin $End_D(V)$ halkası, $n = boy_D(V)$ olmak üzere, $M_n(D)$ halkasına izomorftir.

Tanım 1.1.23. M , X tarafından tarafından üretilen alt modül olmak üzere, M nin sonlu bir X alt cümlesi varsa, M , R -modülüne R üzerinde sonlu üretilmiştir denir. Yani,

eğer $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ ise, bu taktirde $M = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i x_i \mid a_i \in R \right\}$ dir.

Zorn Lemmasını kullanarak, sonlu üretilen sıfır olmayan bir modülde, maksimal alt modüllerin varlığı ispatlanabilir.

Tanım 1.1.24. Eğer M bir B bazına sahipse, yani, M R üzerinde B tarafından gerilecek şekilde, M nin lineer bağımsız bir B alt cümlesi varsa, M R -modülüne *serbest modül* denir. Bu, sonlu sayıda b lerin dışında $\lambda_b = 0$ ve $\lambda_b \in R$ olmak üzere her

$x \in M$ elemanının $x = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ olarak tek türlü yazılabileceği anlamına gelir. (Yani, x , B

deki elemanların sonlu bir lineer kombinasyonudur ve bu yazılış tek türüdür.)

Tanım 1.1.25 . Eğer

i) $M \neq (0)$ ve

ii) M nin tek alt modülü (0) ve M

ise M modülü *basit modüldür* denir.

Uyarı 1.1.26. Bir M modülü basittir $\Leftrightarrow M$, M nin sıfır olmayan herhangi elemanı tarafından üretilmiştir $\Leftrightarrow R$ nin herhangi bir maksimal sol I ideali için $M \simeq R/I$ dir.

Schur Lemması 1.1.27. N ve M iki basit R -modül olsun. Bu taktirde herhangi bir $f: M \rightarrow N$ R -lineer dönüşümü ya 0 ya da bir izomorfizmadır. Ayrıca, $D = \text{End}_R(M)$ bir bölümlü halkadır.

Tanım 1.1.28. Bir M modülünün P ve Q alt modülleri verilsin. P ve Q yu içeren (ya da P ve Q tarafından üretilen) M nin en küçük alt modülüne, *alt modüllerin toplamı* denir ve kısaca

$$P+Q = \{x+y \mid x \in P, y \in Q\}$$

olarak gösterilir.

Bu kavram, M nin alt modüllerinin herhangi bir $\{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (sonlu veya sonsuz) ailesi için, $\sum_{\alpha \in I} P_\alpha = \left\{ \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \mid x_\alpha \in P_\alpha, x_\alpha = 0 \text{ sonlu } \alpha \text{ lar hariç} \right\}$ olduğu anlamına gelir. Bu, bütün P_α ları kapsayan M nin en küçük alt modülüdür.

Tanım 1.1.29. M ve N modülleri verilsin. $P = M \times N$ kartezyen çarpım modülünü düşünelim ve P alt modüller olarak M ve N nin izomorfik kopyalarını içerir. Yani, $M = \{(x, 0) \in P \mid x \in M\} \subseteq P$ ve $N = \{(0, y) \in P \mid y \in N\} \subseteq P$ dir. M ve N nin P deki alt modüllerinin toplamına *modüllerin dış direkt toplamı* ya da kısaca M ve N *alt modüllerinin direkt toplamı* denir, $M \oplus N$ ile gösterilir.

Bu toplam direktdir, ki her $z = (x, y) \in M \oplus N$ elemanı, $x \in M$ ve $y \in N$ biricik elemanlarının $z = (x, 0) + (0, y) = x + y$ toplamı olarak yazılabilir, yani, $M \cap N = (0)$ olmak üzere $P = M + N$ dir.

Eğer $P = \sum_{\alpha \in I} P_\alpha$ ise ve her $z \in P$ elemanı, $x_\alpha \in P_\alpha$ ve sonlu sayıdaki α lar dışında $x_\alpha = 0$ olmak üzere, tek bir şekilde $z = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ olarak yazılabiliyorsa, bir P modülüne, $\{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ alt modüllerinin bir ailesinin *iç direkt toplamı* veya kısaca *direkt toplamı* denir. $P = \bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha$ olarak yazılır.

$$\bigoplus_{\alpha \in I} P_{\alpha} \subseteq \prod_{\alpha \in I} P_{\alpha} \text{ dır } \Leftrightarrow I \text{ sonlu ise}$$

Tanım 1.1.30. Bir M modülünün bir P alt modülüne, eğer $M = P \oplus Q$ olacak şekilde M nin bir Q alt modülü varsa, bir *direkt bileşen* veya kısaca M nin bir *bileşeni* denir. Böyle bir Q ya P nin *bütünleri* denir.

Bir alt modülün bileşen olmasına gerek yoktur ya da eğer öyleyse bütünlerinin tek olmasına gerek gerek yoktur. Diğer taraftan, bir vektör uzayında her altuzay bir bileşendir. Her alt modülün bir bileşen olması modül sınıfının özel bir durumudur.

2.BÖLÜM

ARTINIAN VE NOETHERIAN MODÜLLER

Bu bölümde Artinian ve Noetherian modüller üzerinde durulacaktır. Bu bölüm için temel referanslar [4,10,12] dir.

2.1 Artinian Modüller

Tanım 2.1.1. S bir küme ve üzerinde bir bağıntı $\leq$ olan, $(S, \leq)$ sistemi;

i) Yansıma; $\forall a \in S$ için, $a \leq a$,

ii) Ters simetri; $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ ve

iii) Geçişme; $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ özelliklerini sağlıyorsa S ye bir *sıralı küme* denir. Eğer $(S, \leq)$ sıralı kümesinde, $\forall a, b \in S$ için, $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise bu sıralı kümeye *tam sıralı* denir.

Tanım 2.1.2. Sıralı bir kümede, kendinden kesin büyük hiçbir eleman yoksa, bu elemana *maksimal eleman* denir.

Tanım 2.1.3. Sıralı bir kümede, kendinden kesin küçük hiçbir eleman yoksa, bu elemana *minimal eleman* denir.

Tanım 2.1.4. Sıralı bir cümlemin tam sıralı bir alt cümlesine bir *zincir* denir.

Tanım 2.1.5. M bir R modül olsun. M nin alt modüllerine, eğer M nin alt modüllerinin bütün zincirleri,

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$$

şeklinde son buluyorsa, yani, $M_j = M_{j+1} = \dots$ olacak şekilde bir j indisi varsa, *azalan zincir durumunu sağlar* denir. Benzer olarak, M nin alt modüllerine, eğer M nin alt modüllerinin bütün zincirleri,

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$$

şeklinde son buluyorsa *artan zincir durumunu sağlar* denir.

Tanım 2.1.6. Bir M modülünün bir has alt modülü N olsun. M nin, N yi kapsayan N den başka hiçbir alt modülü yoksa N ye bir *maksimal alt modül* denir.

Tanım 2.1.7. Bir M modülünün 0 dan farklı bir alt modülü N olsun. M nin, N de kapsanan 0 dan ve N den başka hiçbir alt modülü yoksa, N ye bir *minimal alt modül* denir.

Teorem 2.1.8. Bir M R -modülü için, aşağıdakiler denktir.

1. Azalan zincir şartı M için gerçekleşir, yani, M nin alt modüllerinin herhangi bir zinciri, herhangi bir r için, $M_r = M_{r+1} = \dots$ olduğu durumda

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_n \dots \supseteq \dots$$

sabitlenir. (Bunu $\forall r \gg 0$ için $M_r = M_{r+1}$ olarak yazabiliyoruz.)

2. Minimum şartı M için gerçekleşir, yani, M nin alt modüllerinin boş olmayan herhangi bir ailesi bir minimal elemana sahiptir.

Tanım 2.1.9. Bir M modülüne, eğer M için azalan zincir durumu (ya da minimum durumu) gerçekleşiyorsa, *Artinian* denir.

Uyarı 2.1.10. Minimal alt modüller, sıfır olmayan bir Artinian modülde mevcuttur. Çünkü, minimal bir alt modül, M nin sıfır olmayan bütün alt modüllerinin ailesinde bir minimal elemandır.

Örnekler 2.1.11.

1. Sadece sonlu alt modüllere sahip olan bir modül Artiniandır.

2. Sonlu boyutlu vektör uzayları Artiniandır. Fakat, sonsuz boyutlu olanlar Artinian değildir.

3. Sonsuz devirli gruplar Artinian değildir. Örneğin, $\mathbb{Z}$, alt grupların sabit olmayan azalan bir zincirine sahiptir, yani,

$$\mathbb{Z} = (1) \supset (2) \supset (4) \supset \dots \supset (2^n) \supset \dots \supset \dots$$

dır.

Teorem 2.1.12.

1. Artinian modüllerin alt modülleri ve bölüm modülleri Artiniandır.

2. Eğer bir M modülü, N ve M/N Artinian olacak şekilde bir N alt modülüne sahipse, bu taktirde M Artiniandır.

Sonuç 2.1.13. Bir Artinian modülün sıfır olmayan her alt modülü bir minimal alt modül içerir.

Sonuç 2.1.14. Sonlu Artinian modüllerin toplamaları ve direkt toplamaları Artiniandır.

Uyarı 2.1.15. Sıfır olmayan Artinian modüllerin sonsuz bir ailesinin direkt toplamı Artinian değildir.

2.2 Noetherian Modüller

Teorem 2.2.1. Bir M R -modülü için, aşağıdakiler denktir.

1. Artan zincir durumu her M için sağlanır, yani, M nin alt modüllerinin herhangi bir artan zinciri, diyelim ki

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$$

herhangi bir r için $M_r = M_{r+1} = \dots$ olması durumunda sabitlenir. (Bunu $M_r = M_{r+1}$, $\forall r \gg 0$ olarak yazıyoruz.)

2. Maksimum durumu, M nin alt modüllerinin boş olmayan herhangi bir ailesinin bir maksimal elemana sahip olmasından dolayı M için gerçekleşir.

3. Sonluluk durumu, M nin her alt modülü sonlu üretildiğinden M için gerçekleşir.

Tanım 2.2.2. Bir M modülü, eğer artan zincir durumunu (ya da maksimum durumu veya sonluluk durumunu) sağlıyorsa, M modülüne *Noetherian* denir.

Not 2.2.3.

1. Bir Noetherian modülü sonlu üretilmiş olup, sonlu üretilmiş modülün Noetherian olmasına gerek yoktur.

2. Sonluluk durumu, Artinian durumuyla paralel değildir.

Uyarı 2.2.4. Maksimal alt modüller, sonlu üretilmiş sıfır olmayan herhangi bir modülde mevcuttur çünkü bir maksimal alt modül, M nin M yi içeren bütün alt modül ailesinde bir maksimal elemandır.

Not 2.2.5. Maksimal alt modüller, sonlu üretilmiş sıfır olmayan herhangi bir modülde (Noetherian veya Noetherian olmayan) mevcuttur. (Bu, M dışında M nin bütün alt modüllerinin ailesine uygulanan Zorn Lemmasının bir sonucudur.)

Örnekler 2.2.6.

1. Sadece sonlu altmodüllere sahip olan bir modül Noetheriandır. Ayrıca, sonlu abelyen gruplar $\mathbb{Z}$ üzerindeki modüller olarak Noetheriandır.

2. Sonlu boyutlu vektör uzayları Noetheriandır, ama sonsuz boyutlu olanlar Noetherian değildir.

3. Sonsuz devirli gruplar Noetheriandır, çünkü devirli bir grubun bütün altgrupları yine devirlidir.

Teorem 2.2.7.

1. Noetherian modüllerin altmodülleri ve bölüm modülleri Noetheriandır.

2. Eğer bir M modülü, hem N hem de M/N Noetherian olacak şekilde bir N alt modülüne sahipse, bu taktirde M , Noetheriandır.

Sonuç 2.2.8. Bir Noetherian modülün sıfır olmayan her altmodülü, bir maksimal altmodül tarafından kapsanır.

Sonuç 2.2.9. Sonlu Noetherian modüllerin toplamaları ve direkt toplamaları Noetheriandır.

Uyarı 2.2.10. Sıfır olmayan Noetherian modüllerin sonsuz bir ailesinin direkt toplamı Noetherian değildir.

2.3 Sonlu Uzunluktaki Modüller

Tanım 2.3.1. M sıfır olmayan bir modül olsun. M nin, M ile başlayan ve (0) ile biten alt modüllerinin bir sonlu azalan zinciri

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_m = (0)$$

olsun. Eğer $0 \leq i \leq m-1$ olmak üzere her i için, M_i / M_{i+1} ardışık bölümleri *basit* ise, bu zincire m uzunluğunda bir *kompozisyon serisi* denir. Burada, m sayısına *serinin uzunluğu* denir. (Bu sayı serideki terimlerin sayısından 1 azdır.)

Not 2.3.2. Bir kompozisyon serisine ayrıca *Jordan Hölder Filtrasyonu* veya kısaca *filtrasyon* denir. M_i / M_{i+1} basit bölümlerine de *filtrasyonun kompozisyon faktörleri* denir.

Uyarı 2.3.3. Sıfır olmayan bir M modülü için, kompozisyon serileri mevcut olabilir ya da olmayabilir. Eğer bir tane mevcutsa, M nin bir M_{m-1} basit alt modülüne (yani minimal) ve bir M_0 / M_1 basit bölümüne (yani, bir M_1 maksimal alt modülüne) sahip olacağını söyleyebiliriz.

Örnekler 2.3.4.

1. Sonlu bir $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ bazına sahip olan bir V vektör uzayı m uzunlukta bir kompozisyon serisine sahiptir, yani, $V_m = (0)$ olup, $0 \leq i \leq m$ olacak şekilde her i için, $V_i = Sp\{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_m\}$ olmak üzere,

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_m = (0)$$

dır. Fakat, sonsuz bir baza sahip olan bir vektör uzayının bir kompozisyon serisi yoktur.

2. Sonlu bir abelyen grup bir kompozisyon serisine sahiptir.

3. Sonsuz devirli bir grubun minimal alt modülleri olmadığından, kompozisyon serisi yoktur.

Tanım 2.3.5. Bir modül, eğer sıfır ya da herhangi bir kompozisyon serisine sahipse bu modüle *sonlu uzunluktaki bir modül* denir.

Teorem 2.3.6. Bir modül sonlu uzunluktadır $\Leftrightarrow$ Bu modül hem Artinian hem de Noetheriandır.

Teorem 2.3.7.

1. Sonlu uzunluktaki bir modülün alt modülleri ve bölüm modülleri, sonlu uzunluktaki modüllerdir.

2. Eğer bir M modülü, hem N hem de M/N sonlu uzunlukta olmak üzere bir N alt modülüne sahipse, bu taktirde M sonlu uzunluktadır.

Teorem 2.3.8. (Jordan–Hölder). Sıfır olmayan bir modülün herhangi iki kompozisyon serisi, sıra ve izomorfizmalara göre aynı uzunluğa ve aynı basit bölümlere sahip olduklarından birbirlerine denktirler.

Yani, $M = M_0 \supset \dots \supset M_m = (0)$ ve $M = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_n = (0)$, M nin herhangi iki kompozisyon serisi olsunlar. Bu taktirde,

i) $m = n$

ii) $0 \leq i \leq m-1$ olmak üzere, her i için $M_i / M_{i+1} \simeq N_j / N_{j+1}$ olacak şekilde $\exists j = j(i)$, $0 \leq j \leq n-1$ vardır.

Tanım 2.3.9. Sonlu uzunluktaki bir M modülü için, (kompozisyon serileri bağımsız olmak üzere), tüm kompozisyon serilerinin uzunluklarının en küçüğüne M modülünün

uzunluğu denir ve $\ell_R(M)$ ile gösterilir ya da R baz halkası ile ilgili bir karışıklık olmayacaksa kısaca $\ell(M)$ olarak da gösterilebilir.

Eğer M kompozisyon serisine sahip değilse, böyle bir modül, sonlu uzunluktaki bir modül olmayacağından $\ell_R(M) = \infty$ dur. Ayrıca, $\ell_R(M) = 0 \Leftrightarrow M = (0)$ dir.

Uyarılar 2.3.10.

- i) $\ell(M) \geq 0$ dir.
- ii) $\ell(M) = 1 \Leftrightarrow M$ basittir.

Sonuçlar 2.3.11.

1. N sonlu uzunluktaki bir M modülünün bir alt modülü olsun. Bu taktirde, $\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N)$ ve ayrıca $\ell(M) \geq \ell(N)$ dir.
2. Sonlu uzunluktaki alt modüllerin sonlu toplamı, yine sonlu uzunluktaki bir modüldür ve $\ell\left(\sum_{i=1}^n M_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \ell(M_i)$ dir. Ayrıca,

$$\ell\left(\sum_{i=1}^n M_i\right) = \sum_{i=1}^n \ell(M_i) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n M_i = \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

olduğu açıktır.

3. Eğer bir vektör uzayı sonlu bir baza sahipse, bu taktirde diğer bazları da sonludur ve tüm bazlar, V nin boyu olan $\ell(V)$ sayıda elemana sahiptir.

Sonuç 2.3.12. Bir D bölümlü halkası üzerindeki herhangi bir V vektör uzayı için, R bir halka olmak üzere, $R = \text{End}_D(V)$ sonlu uzunluktaki bir modüldür ancak ve ancak V , D üzerinde sonlu boyutludur.

Not 2.3.13. Eğer $\text{boy}_D(V) = r$ ise, bu taktirde $R = \text{End}_D(V)$, kendi üzerinde sonlu uzunlukta bir modül olmasının yanısıra D üzerindeki bir modül olarak da sonlu uzunluktadır. $\ell_D(R) = r^2$ iken, $\ell_R(R) = r$ dir. Birincisi, $\text{boy}_D(R) = \text{boy}_D(M_r(D)) = r^2$ den elde edilir. İkincisi ise, R nin bir kompozisyon serisine sahip olmasından elde

edilir, yani, $R = R_0 \supset R_1 \supset \dots \supset R_r = (0)$ dır ki, R_i , $0 \leq i \leq r$ olmak üzere, ilk i sütunu sıfır olan bütün matrislerden oluşan sol idealdir.

3. BÖLÜM

ARTINIAN VE NOETHERIAN HALKALAR

Bu bölümde Artinian ve Noetherian halkalar tanıtılacak ve temel özellikleri verilecektir. Burada kullandığımız temel kaynaklar [3,5,7,9] dur.

3.1 Artinian Halkalar

Tanım 3.1.1. Bir R halkası eğer kendi üzerinde bir sol modül olarak Artiniansa veya azalan zincir durumu ya da minimum şartı R nin sol idealleri için gerçekleşiyorsa (*sol*) *Artinian* olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.2. Cisimler, bölümlü halkalar, sonlu halkalar hep Artiniandır. Fakat, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası Artinian değildir.

Örnek 3.1.3. Bir Artinian halkanın bir bölüm halkası Artiniandır. (Fakat, bir alt halkanın Artinian olmasına gerek yoktur.)

Örnek 3.1.4. Bir Artinian halka üzerinde sonlu olarak üretilen bir modül Artiniandır.

Örnek 3.1.5. Artinian halkalar üzerindeki (ayrıca, bölümlü halkalar üzerindeki) matris halkaları Artiniandır.

Örnek 3.1.6. R bir Artinian halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

1. R de sıfır olmayan her bölen bir birimdir. Ayrıca, bir Artinian tamlık bölgesi bir bölümlü halkadır.
2. R komütatifse, her asal ideal maksimaldir.

3.2 Noetherian Halkalar

Tanım 3.2.1. Bir R halkası eğer kendi üzerinde bir sol modül olarak Noetheriansa ya da artan zincir durumunu veya maksimum şartı sol idealler için gerçekleniyorsa veya sol ideal sonlu olarak üretilmişse, *(sol) Noetherian* olarak adlandırılır.

Örnek 3.2.2. Cisimler, bölümlü halkaları, sonlu halkalar asli ideal halkaları vs hep Noetheriandır. Ayrıca, $\mathbb{Z}$ Noetheriandır.

Örnek 3.2.3. Noetherian bir halkanın bir bölüm halkası Noetheriandır. (Ama alt halkasının Noetherian olmasına gerek yoktur.)

Örnek 3.2.4. Noetherian bir halka üzerinde sonlu olarak üretilmiş bir modül Noetheriandır.

Örnek 3.2.5. Noetherian halkaları üzerindeki (ayrıca bölümlü halka üzerindeki) matris halkaları Noetheriandır.

Teorem 3.2.6. (Hilbert Baz Teoremi). Bir R halkası Noetheriandır $\Leftrightarrow R[X]$ Noetherian ise. Sonuç olarak, R Noetheriandır $\Leftrightarrow R[X_1, X_2, \dots, X_n]$, sonlu değişkenler için, Noetheriandır. Ayrıca üreteçlerin bir değişmeli kümesi tarafından üretilen bir Noetherian halka üzerinde sonlu üretilmiş bir halka Noetheriandır.

3.2.7. V , bir D bölüm halkası üzerindeki bir vektör uzayı ve $R = \text{End}_D(V)$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

- i) R , Artiniandır.
- ii) V , D üzerinde sonlu boyutludur ve
- iii) R , Noetheriandır.

3.3 Jacobson Radikali

Önerme 3.3.1. I , R halkasının bir ideali olsun.

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için, } r^n \in I\}$$

kümesi de R halkasının I yı kapsayan bir idealidir. Bu ideale, I idealinin radikalı denir.

Tanım 3.3.2. $I = 0$ ideali için,

$$\sqrt{0} = \{r \in R : \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için, } r^n = 0\}$$

ideali, halkanın tüm nilpotent elemanlarının oluşturduğu kümedir. Bu ideale, *nil radikal* veya *asal radikal* denir ve $N = N(R)$ ile gösterilir.

Önerme 3.3.3. R halkasının bir I ideali için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $I = \sqrt{J}$ olacak şekilde bir $J \in I(R)$ bulunabilir.
2. I , R nin bir takım asal ideallerinin arakesitidir.
3. $I = \sqrt{I}$ dir.

Tanım 3.3.4. Yukarıdaki önermenin denk koşullarından birini sağlayan ideale *radikal ideal* denir.

Tanım 3.3.5. R halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesitine *Jacobson radikalı* denir ve $J(R)$ ile gösterilir. Şu halde ,

$$J(R) = \bigcap_{M, \text{mak.ideal}} M$$

dir. Lokal bir halkanın Jacobson radikalı, tek maksimal idealdir. Bir başka deyişle, $\forall a \in A$ için, $1-a$, R de bir birim ise 2-terafli bir I idealine R halkasının *Jacobson radikalı* denir ve $J(R)$ ile gösterilir. Yani, $J(R)$, $\forall a \in J(R)$ için $1-a$ birim olmak üzere R nin 2-terafli en geniş idealidir.

Örnekler 3.3.6.

1. Herhangi bir cisim için veya bir R bölümlü halkası için, $J(\mathbb{Z}) = (0)$ ve $J(R) = (0)$ dir.
2. $M_r(D)$, (0) ve $M_r(D)$ den başka 2-terafli ideal içermediğinden bir D bölümlü halkası için $J(M_r(D)) = (0)$ dir ve

3. Eğer R , M , R nin yegane maksimal ideali olmak üzere komütatif bir lokal halka ise, bu taktirde $J(R) = M$ olduğu açıktır.

Tanım 3.3.7. Herhangi bir R halkası için, R nin bütün maksimal sol ideallerinin arakesitine, *sol Jacobson radikali* ya da kısaca R nin *sol radikali* denir ve $J_\ell(R)$ ile gösterilir.

Örnekler 3.3.8.

1. Bir bölüm halkasının sol radikali (0) dır.
2. $\mathbb{Z}$ nin radikali (0) dır.
3. Bir lokal halkanın radikali, bu halkanın yegane maksimal idealidir.
4. m , n nin bütün farklı asal bölenlerinin çarpımı olmak üzere, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin radikali $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dir. Örneğin, $J_\ell(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}) = 6\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$, $J_\ell(\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$ ve $J_\ell(\mathbb{Z}/180\mathbb{Z}) = 30\mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$ dir.
5. $M_n(D)$ nin sol radikali, herhangi bir D bölümlü halkası için (0) dır.

Teorem 3.3.9. Herhangi bir R halkası için, bu halkanın $J_\ell(R)$ sol radikali, R üzerindeki tüm basit sol modüllerin sıfırlayanlarının bir arakesitidir. Ayrıca, $J_\ell(R)$, R nin 2- Taraflı bir idealidir.

Sonuç 3.3.10. $J_\ell(R)$ sol radikaliyle bir R halkası verilsin. $R/J_\ell(R)$ bölümünün sol radikali sıfırdır, yani, $J_\ell(R/J_\ell(R)) = (0)$ dır.

Teorem 3.3.11. $J_\ell(R) = \{x \in R \mid 1 - yx, \text{ bir birimdir}, \forall y \in R\}$ dir.

Teorem 3.3.12. $J_\ell(R)$, $1 - a$, her $a \in J_\ell(R)$ için bir birim olmak üzere, R nin en geniş sol idealidir.

Tanım 3.3.13. R nin tüm maksimal sağ ideallerinin kesişimine *sağ Jacobson radikal* veya kısaca R nin *sağ radikali* denir $J_r(R)$ ile gösterilir.

Uyarılar 3.3.14. Yukarıdaki gibi hareket ederek $J_r(R)$ nin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu gösterebiliriz.

1. $J_r(R)$, R nin iki taraflı bir idealidir.
2. $J_r(R) = \{x \in R \mid 1 - xy, \text{ bir birimdir}, \forall y \in R\}$
3. $J_r(R)$, $1 - b$, her $b \in J_r(R)$ için bir birim olmak üzere, R nin en geniş sağ idealidir.

Teorem 3.3.15. Herhangi bir R halkası için sağ ve sol Jacobson radikalleri benzerdir ve 2 taraflı $J(R) = J_l(R) = J_r(R)$ ideali, R nin Jacobson radikalidir. Ayrıca, lokal bir halkanın Jacobson radikali onun (biricik) maksimal idealidir.

3.3.16 Nakayama Lemması. Eğer M , $J(R)M = M$ olacak şekilde bir R halkası üzerinde sonlu üretilmiş bir modülse, bu taktirde $M = (0)$ dır.

3.4 Bir Artinian Halkanın Radikali

Tanım 3.4.1. Artinian bir halkanın Jacobson radikali sonlu sayıda maksimal sol (veya sağ) ideallerin kesişimidir.

Tanım 3.4.2. R bir halka olsun. Eğer $x^m = 0$ olacak şekilde bir pozitif m sayısı varsa, $x \in R$ elemanına *nilpotenttir* denir.

Tanım 3.4.3. R bir halka olsun. R halkasının bir I idealinin her elemanı nilpotent ise bu ideale *nil ideal* denir. Eğer halkanın kendisi, ideal olarak nil ideal ise, halkaya *nil halka* denir. Halkanın kendisi nilpotent ideal ise *nilpotent halka* denir.

Tanım 3.4.4. Eğer $I^m = 0$ olacak şekilde bir pozitif m sayısı varsa, R nin sağ, sol veya 2-taraflı I idealine *nilpotenttir* denir.

3.4.5. Bir R Artinian halkasının Jacobson radikali nilpotenttir. Aslında $J(R)$, R nin en geniş nilpotent (sağ, sol veya iki taraflı) idealidir ve sonuç olarak $N(R) = J(R)$ dir.

3.4.6. Bir Artinian halkada, her nil ideali nilpotenttir. (Çünkü, böyle bir ideal nilpotent olan radikalde kapsanır.)

3.4.7. Komütatif bir Artinian halkada sadece sonlu maksimal idealler vardır, yani, bu halka bir yarı lokal halkadır.

3.4.8. Komütatif bir halka Artiniandır ancak ve ancak bu halka her asal idealin maksimal olduğu bir Noetherian ise.

1. Eğer $1 \leq i \leq r$ olacak şekilde m_i , komütatif yarı lokal bir R halkasının tüm maksimal idealleri ise, bu taktirde $J = J(R) = m_1 \cap \dots \cap m_r = m_1 \dots m_r$ tüm maksimal ideallerin çarpımıdır ve bu nedenle $J^\ell = m_1^\ell \dots m_r^\ell$ dir.
2. Eğer $J^\ell = (0)$ ise, bu taktirde R , maksimal ideallerinin herbiri nilpotent olan $\prod_{i=1}^r R / m_i^\ell$ lokal halkaların çarpımına izomorfiktir.
3. Maksimal ideali nilpotent olan bir komütatif lokal halka Artiniandır ancak ve ancak Noetherian ise.
4. Bir Noetherian R halkasında, her ideal asal ideallerin sonlu bir çarpımını içerir ve bu nedenle $(0) = P_1 \dots P_k$ asal ideallerin bir çarpımıdır. Eğer her asal ideal maksimal ise, bu taktirde R yarı lokaldır (P_i lerin içinde farklı olan maksimal idealleri olmak üzere). Sonuç olarak, $J(R) = N(R)$ nilpotenttir.

3.5 Cebirler

Tanım 3.5.1. Komütatif bir R (1 birim elemanı ile) halkası üzerinde, $\forall a \in R$ ve $x, y \in A$ için $a(xy) = (ax)y = x(ay)$ olacak şekilde birimli bir R -modül olan A halkasına R halkası üzerinde bir A cebiri denir. Altcebirler, aynı zamanda alt modüller olan alt halkalar olarak tanımlanır.

3.5.2. Bir A halkası bir R -cebiridir $\Leftrightarrow \lambda(R) \subseteq \text{Merkez}(A)$ olacak şekilde bir $\lambda : R \rightarrow A$ halka homomorfizmi varsa.

Örnekler 3.5.3.

1. Herhangi bir halka $\mathbb{Z}$ üzerinde bir cebirdir.
2. Bir halka, bu halkanın merkez alt halkalarının herhangi biri üzerinde bir cebirdir.

Tanım 3.5.4. Bir A R -cebirinin iki taraflı bir I ideali verilsin. A/I bölüm halkası bir R cebiridir ve A modülo I nın bölüm cebiri olarak adlandırılır.

Tanım 3.5.5. Bir $\lambda : A \rightarrow B$ R -cebir homomorfizması verilsin. Bir $\lambda : A \rightarrow B$ R -cebir homomorfizması ile R -modül homomorfizması olan halka homomorfizmasını kastediyoruz. A ve B R -cebirlerinin bütün homomorfizmalarının cümlesi $Hom_{R\text{-alg}}(A, B)$ ile gösterilir. Bu nedenle, $Hom_{\mathbb{Z}}(A, B)$ de,

$$Hom_{R\text{-alg}}(A, B) = Hom_{halka}(A, B) \cap Hom_{R\text{-mod}}(A, B)$$

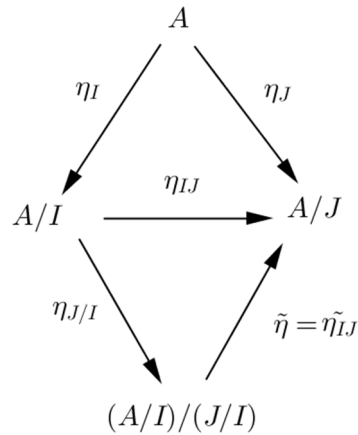
kesişimini elde ediyoruz. Monomorfizma, epimorfizma, izomorfizma, bir izomorfizmanın çekirdeği vs. tamamen halkalar ve modüllerdeki gibidir.

Teorem 3.5.6. (Epimorfizma Teoremi). $f : A \rightarrow B$, $I = \text{Ker} f$ olmak üzere, R -cebirlerinin bir epimorfizması olsun. Bu taktirde η , $\eta : A \rightarrow A/I$, $x \rightarrow x + I$ olarak verilen bir doğal dönüşüm olmak üzere, $f = \tilde{f} \circ \eta$ olacak şekilde bir tek $\tilde{f} : A/I \rightarrow B$ izomorfizması vardır, yani, aşağıdaki diyagram komütatiftir.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \eta & \nearrow \tilde{f} \\ & A/I & \end{array}$$

Teorem 3.5.7 (Bir Bölümün Bölümü).

$I \subseteq J \subseteq A$, bir A R -cebirinin iki taraflı ideali olsunlar. Bu taktirde aşağıdaki diyagramı komütatif yapan bir $\tilde{\eta} : (A/I)/(J/I) \rightarrow A/J$ doğal izomorfizması vardır. $\eta_{IJ} : x + I \rightarrow x + J$, $\forall x \in A$ olmak üzere,



dır.

Modüller için geçerli olan aşağıdaki ifade halka ve cebirlerde geçerli değildir.

Teorem 3.5.8. (Bir Toplamın Modülü). P ve N , bir M R -modülünün alt modülleri olsunlar. Bu taktirde

$$\text{i) } \frac{P+N}{P} \approx \frac{N}{N \cap P}, \quad \text{ii) } \frac{P+N}{N} \approx \frac{P}{P \cap N}$$

doğal izomorfizmaları vardır.

3.6 Tensör Çarpımları

Tanım 3.6.1. Bir sağ M R -modül, bir sol N R -modül ve bir P abelyen grubu verilsin. Bir $f: M \times N \rightarrow P$ *denge dönüşümü* aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur:

1. f iki taraflı toplamdır, yani,
 - a) $f(x+x', y) = f(x, y) + f(x', y), \forall x, x' \in M, y \in N,$
 - b) $f(x, y+y') = f(x, y) + f(x, y'), \forall x \in M, y, y' \in N.$
2. $f(xa, y) = f(x, ay), \forall x \in M, y \in N$ ve $a \in R$

dir. $M \times N$ den P ye bütün denge dönüşümlerinin cümlesi $Bal_R(M, N; P)$ ile gösterilir.

Tanım 3.6.2. Bir sağ M R -modülü ve sol N R -modülü verilsin. M ve N nin R üzerindeki tensör çarpımıyla, T bir abelyen grup ve $\varphi: M \times N \rightarrow T$ aşağıdaki genel özelliği sağlayan bir denge dönüşümü olmak üzere, (T, φ) ikilisini kastediyoruz. Abelyen bir P grubu ve bir $f: M \times N \rightarrow P$ denge dönüşümü verilsin. $f = \tilde{f} \circ \varphi$ olacak şekilde abelyen grupların bir tek $\tilde{f}: T \rightarrow P$ homomorfizması vardır, yani, aşağıdaki diyagram komütatiftir.

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \xrightarrow{f} & P \\
 & \searrow \varphi & \nearrow \tilde{f} \\
 & T &
 \end{array}$$

Tensör çarpımının genel özelliği, $f \rightarrow \tilde{f}$ dönüşümünün, her P abelyen grubu için $Bal_R(M, N, P)$ cümlesinden $Hom_{\mathbb{Z}}(T, P)$ üzerine birebir ve örten olan bir doğal dönüşüm olmasını gerektirir.

Teorem 3.6.3. Modüllerin izomorflarıyla birlikte tensör çarpımı mevcuttur ve tektir.

Teklik, yukarıda bahsedilen genel özelliğin aşikar bir sonucudur. Şimdi tensör çarpımının varlığını göstermek için F , $M \times N$ kümesi bir baz olmak üzere, serbest bir abelyen grup (yani, $\mathbb{Z}$ üzerinde bir serbest modül) ve L , F deki elemanların aşağıdaki üç sınıfı tarafından gerilen F nin bir alt grubu olsun:

- a) $(x + x', y) - (x, y) - (x', y), \quad \forall x, x' \in M, y \in N,$
- b) $(x, y + y') - (x, y) - (x, y'), \quad \forall x \in M, y, y' \in N$ ve
- c) $(xa, y) - (x, ay), \quad \forall x \in M, y \in N$ ve $a \in R.$

Şimdi, $T = F / L$, $\varphi: M \times N \rightarrow T$, $\forall (x, y) \in M \times N$ için $(x, y) \rightarrow (x, y) + L$ şeklinde tanımlanan doğal bir dönüşüm olmak üzere, (T, φ) , M ve N nin bir tensör çarpımıdır. Bu ise, modüllerin tensör çarpımının varlığını ispatlar.

Denge dönüşümü φ , $\otimes_R$ ile (veya basit olarak $\otimes$ ile) gösterilir. $\forall x \in M, y \in N$ için $\varphi(x, y) = x \otimes y$ elemanı bir *ayrıştırılabilir tensör* olarak adlandırılır. Bu durumda, R üzerinde M ve N nin tensör çarpımı $(M \otimes_R N, \otimes_R)$ şeklinde veya basitçe $M \otimes_R N$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 3.6.4.

1. Ayrılabilir tensörlerin cümlesi T yi gerer, yani, her $z \in T$, uygun $x_i \in M$ ve $y_i \in N$

için $z = \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i$ formunda sonlu bir toplam olarak yazılabilir.

2. Ayrılabilir tensörler, aşağıdaki bağıntıları sağlar.

a) $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y, \forall x, x' \in M, y \in N$

b) $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y', \forall x \in M, y, y' \in N$

c) $(xa) \otimes y = x \otimes (ay), \forall x \in M, y \in N$ ve $a \in R$

dır.

3. Sıfır olmayan modüllerin tensör çarpımı sıfır olabilir.

4. Tensör çarpımı sadece abelyen bir gruptur ve genelde bir R -modül değildir.

Fakat, R komütatifse, tensör çarpımı bir R -modüldür.

Teorem 3.6.5. Tensör çarpımı direkt toplamla yer değiştirir, yani,

$$M \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right) \simeq \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_R N_i)$$

dır.

İspat. Teoremin genel ifadesiyle aynı fikre sahip olan $M \otimes_R (P \oplus Q)$ durumunu ispatlamak yeterli olacaktır:

Şimdi, $\lambda : M \times (P \oplus Q) \rightarrow (M \otimes_R P) \oplus (M \otimes_R Q), (x, y + z) \rightarrow x \otimes y + x \otimes z$

olarak tanımlanan λ dönüşümünün bir denge dönüşümü olduğu açıktır ve bu nedenle, bize bir $\tilde{\lambda}: M \otimes_R (P \oplus Q) \rightarrow (M \otimes_R P) \oplus (M \otimes_R Q)$ toplamsal homomorfizmini verir. Diğer bir taraftan,

$$\mu_P: M \times P \rightarrow M \otimes_R (P \oplus Q), (x, y) \rightarrow x \oplus y$$

dönüşümü, $\tilde{\mu}_P: M \otimes_R P \rightarrow M \otimes_R (P \oplus Q)$ toplamsal homomorfizmasını doğuran bir denge dönüşümüdür. Benzer olarak, bir $\tilde{\mu}_Q: M \otimes_R Q \rightarrow M \otimes_R (P \oplus Q)$ toplamsal homomorfizmasını da elde ederiz. Bunları birleştirirsek,

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_P + \tilde{\mu}_Q: (M \otimes_R P) + (M \otimes_R Q) \rightarrow M \otimes_R (P \oplus Q)$$

şeklinde toplamsal bir homomorfizma elde ederiz.

Buradan $\tilde{\lambda}$ ve $\tilde{\mu}$ nin birbirlerinin tersi olduğu açık olarak görülür ki bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 3.6.6. M ve P sağ R -modüller; N ve Q sol R -modüller ve $f \in \text{Hom}_R(M, P)$ ve $g \in \text{Hom}_R(N, Q)$ olsun. Bu taktirde $M \otimes N$ den $P \otimes Q$ ya bir $x \otimes y \rightarrow f(x) \otimes g(y)$ toplamsal homomorfizması vardır. Bu toplamsal homomorfizma *homomorfizmaların tensör çarpımı* olarak adlandırılır ve $f \otimes g$ ile gösterilir.

Uyarı 3.6.7. Homomorfizmaların tensör çarpımı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Kompozisyonlar: $(f \otimes g) \circ (\lambda \otimes \mu) = (f \circ \lambda) \otimes (g \circ \mu)$
2. Epimorfizmalar: Eğer f ve g nin her ikisi de epimorfizma ise, $f \otimes g$ de epimorfizmadır.
3. İzomorfizmalar: Eğer f ve g nin her ikisi de izomorfizma ise, $f \otimes g$ de izomorfizmadır, aslında, $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$ dir.
4. Eğer f ve g nin her ikisi de monomorfizma ise (bunlardan biri izomorfizma olsa bile) $f \otimes g$ nin monomorfizma olması gerekmez.

Tanım 3.6.8. R ve S iki halka olsunlar. M , hem S -modül hem de R -modül olsun. Eğer M üzerindeki skaler çarpımlar değişmeli ise, yani, $\forall a \in R, x \in M$ ve $b \in S$ için $a(bx) = b(ax)$ ise, bu taktirde M ye bir (R, S) -bimodül denir.

Notlar 3.6.9.

1. M hem bir sol R -modül hem de bir sağ S -modül olduğunda, M bir bimodüldür ki bunun anlamı $a(bx) = b(ax)$ dir.
2. Bir (R, R) -bimodül kısaca bir R -bimodül olarak adlandırılır.

Uyarılar 3.6.10.

1. Herhangi bir M R -modülü bir $(\mathbb{Z}, R)$ -bimodüldür.
2. Komütatif bir R halkası üzerindeki bir M modülü, sol modül ile aynı olan bir sağ modül yapısı tanımlanırsa bir R -bimodül olur, yani, $xa = ax, \forall a \in R$ ve $x \in M$ alınmalıdır.
3. Herhangi bir alt halkasının üzerinde bir (sol, sağ) modül olarak düşünülen bir R halkası, (sağ ve sol çarpımlar altında) bir bimodüldür.

Önerme 3.6.11. M bir (sol, sağ) -bimodül ve N, R (üzerinde) bir sol modül olsun. Bu taktirde $M \otimes_R N$ abelyen grubu $a(x \otimes y) = (ax) \otimes y, \forall a \in R, x \in M$ ve $y \in N$ skaler çarpımı altında bir sol R -modülün doğal yapısına sahiptir.

İspat. Bir $a \in R$ sabiti için, $\lambda_a : M \times N \rightarrow M \otimes_R N, (x, y) \rightarrow (ax) \otimes y$ dönüşümü denge dönüşümüdür ve bu nedenle $M \otimes_R N$ nın λ_a toplamsal endomorfizmasını doğurur. Buradan, $\tilde{\lambda} : R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N), a \rightarrow \tilde{\lambda}_a$ dönüşümünün bir halka homomorfizması olduğu görülür.

Sonuçlar 3.6.12.

1. Eğer M bir sağ modül ve N bir (sağ, sol)-bimodül ise, bu taktirde $M \otimes_R N$ bir sağ R -modüldür.
2. M ve N komütatif bir R halkası üzerinde modüller olsunlar. Bu taktirde $M \otimes_R N$, M ya da N aracılığıyla bir R -modüldür ve bu iki modül yapısı örtüşürler. Ayrıca,

$$a(x \otimes y) = (ax) \otimes y = (xa) \otimes y = x \otimes (ay), \quad \forall x \in M, \quad y \in N \text{ ve } a \in R$$

dır.

Önerme 3.6.13. (Tensör Çarpımlarının Birleşimi). R ve S halkalar olsunlar. L bir sağ R -modül, M bir (R, S) -bimodül ve N bir sol S -modül olsun. Bu taktirde $L \otimes_R (M \otimes_S N)$ ve $(L \otimes_R M) \otimes_S N$ tensör çarpımları tanımlıdır ve abelyen grup olarak bunlar birbirine izomorfiktirler.

Tanım 3.6.14. M bir sol R -modül ve S , alt halka olarak R yi içeren bir halka olsun. S , bir (S, R) -bimodül (yani, bir sol S -modül ve bir sağ R -modül) olarak düşünülürse $S \otimes_R M$ tensör çarpımı bir sol S -modül olur. Bu sol S -modüle, *baz değişimi* veya *R den S ye skalarların genişlemesi* denir.

3.6.15. Baz Değişiminin Transitifliği. $R \subseteq S \subseteq T$ bir halka kulesi ve M bir sol R -modül olsun. Bu taktirde doğal T -lineer dönüşümleri ($\forall t \in T, a \in S$ ve $x \in M$ olmak üzere)

$$T \otimes_R M \rightarrow T \otimes_S (S \otimes_R M), \quad t \otimes x \rightarrow t \otimes (1 \otimes x)$$

ve

$$T \otimes_S (S \otimes_R M) \rightarrow T \otimes_R M, \quad t \otimes (a \otimes x) \rightarrow ta \otimes x$$

birbirinin inversidir. Diğer bir deyişle, *baz değişimi transitiftir*.

Önerme 3.6.16.

1. Herhangi bir sol M R -modülü için, $R \otimes_R M \rightarrow M$, $a \otimes x \rightarrow ax$ doğal dönüşümü sol R -modüllerin bir izomorfizmasıdır.
2. Bir serbest modülün baz değişimi serbesttir. Aslında, eğer X , M nin bir R -bazı ise, bu taktirde $\{1 \otimes x \mid x \in X\}$, $S \otimes_R M$ nin bir S bazıdır.

3. Serbest modüllerin tensör çarpımı serbesttir. Aslında, eğer $\{x_i \mid i \in I\}$ ve $\{y_j \mid j \in J\}$ sırasıyla, M ve N için baz ise, bu taktirde $\{x_i \otimes y_j \mid (i, j) \in I \times J\}$, $M \otimes N$ için bir bazdır.
4. Özellikle, bir K cismi üzerindeki bütün V ve W (sonlu boyutlu) vektör uzayları için $\text{boy}_K(V \otimes_K W) = (\text{boy}_K V) \cdot (\text{boy}_K W)$ dır.

3.6.17. Komutatif Halkalar Üzerinde Tensör Çarpımı. L, M ve N , komutatif bir R halkası üzerindeki modüller olsunlar. Bu taktirde aşağıdakileri elde ederiz.

1. Tensör Çarpımının Komutatifliği:

$M \otimes_R N$ ve $N \otimes_R M$ R -modülleri, $x \otimes y \rightarrow y \otimes x$ dönüşümü altında birbirine doğal izomorfiktir.

2. Tensör Çarpımının Asosyatifliği:

$(L \otimes_R M) \otimes_R N$ ve $L \otimes_R (M \otimes_R N)$ R -modülleri $(x \otimes y) \otimes z \rightarrow x \otimes (y \otimes z)$ dönüşümü altında birbirine izomorfiktir.

3.6.18. Cebirlerin Tensör Çarpımı. A ve B , komutatif bir R halkası üzerindeki cebirler olsunlar. Bu taktirde $A \otimes_R B$ R -modülü, $(a \otimes b) \cdot (x \otimes y) = ax \otimes by$, $\forall a, x \in A$ ve $b, y \in B$ olarak tanımlanan çarpım altında bir R -cebirinin doğal yapısına sahiptir.

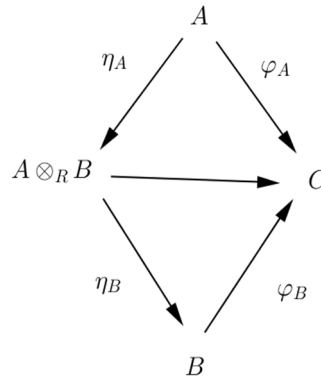
Önerme 3.6.19.

1. $\forall a \in A$ ve $b \in B$ için, $a \otimes 1$ ve $1 \otimes b$ elemanları, $A \otimes_R B$ de birbiriyle yer değiştirirler ve $A \otimes_R B$ halkası böyle elemanlar tarafından üretilir. Ayrıca, A ve B komutatif ise, $A \otimes_R B$ de komutatiftir.
2. Eğer R -cebirler olarak A, X tarafından; B, Y tarafından üretiliyorsa, bu taktirde $A \otimes_R B$, bir R -cebir olarak $\{x \otimes 1 \mid x \in X\} \cup \{1 \otimes y \mid y \in Y\}$ tarafından üretilir. Ayrıca, eğer A ve B, R üzerinde sonlu üretilmiş ise, $A \otimes_R B$ de sonlu üretilmiştir.
3. Polinom cebirlerinin tensör çarpımı bir polinom cebiridir, yani, polinom halkalarının bir,

$$(R[X_i : i \in I]) \otimes_R (R[Y_j : j \in J]) \simeq R[X_i \otimes 1, 1 \otimes Y_j : i \in I, j \in J]$$

R -izomorfizmasına sahibiz.

4. $\eta_A : A \rightarrow A \otimes_R B$ ($a \rightarrow a \otimes 1$) ve $\eta_B : B \rightarrow A \otimes_R B$ ($b \rightarrow 1 \otimes b$) doğal dönüşümleri, görüntüleri birbiriyle yer değiştiren ve $A \otimes_R B$ yi üreten R -cebiri homomorfizmalarıdır.
5. η_A ve η_B dönüşümleri ne birebirdir ne de örtendir.
6. η_A ve η_B dönüşümleri genel özelliği karşılar ki,
 - i) Verilen bir C , R -cebiri ve
 - ii) $\varphi_A : A \rightarrow C$ ve $\varphi_B : B \rightarrow C$ R -cebiri homomorfizmaları için
 - iii) $\varphi_A(a)\varphi_B(b) = \varphi_B(b)\varphi_A(a)$, $\forall a \in A$ ve $b \in B$ ise, bu taktirde
 - iv) $\varphi_A = \varphi \circ \eta_A$ ve $\varphi_B = \varphi \circ \eta_B$ olacak şekilde bir tek $\varphi : A \otimes_R B \rightarrow C$ R -cebiri homomorfizması vardır, yani,



diyagramı komütatifdir. Aslında, $\forall a \in A$ ve $b \in B$ için $\varphi(a \otimes b) = \varphi_A(a)\varphi_B(b)$

dir. Sonuç olarak, her komütatif C R -cebiri için,

$$\text{Hom}_{R\text{-alg}}(A \otimes_R B, C) = \text{Hom}_{R\text{-alg}}(A, C) \times \text{Hom}_{R\text{-alg}}(B, C)$$

dir.

7. Eğer I ve J sırasıyla A ve B deki iki taraflı idealler ise, bu taktirde

$$(A/I) \otimes_R (B/J) \simeq (A \otimes_R B) / (I \otimes B + A \otimes J)$$

R -cebirlerinin doğal bir izomorfizmasıdır.

4.BÖLÜM

YARI BASİT HALKALAR VE BRAUER GRUBU

Bu son bölümde yarı basit halkalar ve Brauer grubu incelenecektir. Bu bölümde kullanılan temel kaynaklar [6,8,9,11] dir.

4.1 Yarı Basit Modüller

Tanım 4.1.1. Bir M modülünün bir P alt modülüne, M nin bir *direkt bileşeni* denir eğer $M = P \oplus Q$ olacak şekilde bir Q alt modülü varsa, yani, $\forall z \in M$ elemanı bir tek $x \in P$ ve $y \in Q$ için $z = x + y$ şeklinde yazılabiliyorsa.

Tanım 4.1.2. Eğer $x^2 = x \neq 0$ ise, bir $x \in R$ ye *idempotent eleman* denir.

Önerme 4.1.3. Bir M modülünün bir P alt modülü, M nin bir direkt bileşenidir ancak ve ancak M nin P üzerine bir pr_p izdüşümü varsa, yani,

1. $pr_p^2 = pr_p$, yani, pr_p bir idempotent ve
2. $pr_p(M) = P$, yani, $Image(pr_p) = P$

olacak şekilde pr_p , M nin bir endomorfizması ise.

İspat. $M = P \oplus Q$ olsun. $\forall x \in M$ için M nin bir $pr_p = \eta_Q : M \rightarrow M / Q = P$, $x \rightarrow x + Q$ endomorfizmasını alalım. $\forall x \in P$ için $pr_p(x) = x$ olduğundan $pr_p^2 = pr_p$ dir.

Tersine, $f^2 = f$ ve $f(M) = P$ olacak şekilde $f \in End_R(M)$ olduğunu kabul edelim. $Q = Ker(f)$ olsun. Bu taktirde $M = P \oplus Q$ dir.

Uyarı 4.1.4. pr_p ve pr_Q sırasıyla P ve Q üzerinde izdüşümler olmak üzere $M = P \oplus Q$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler aşıkardır.

1. pr_P ve pr_Q , $pr_P \circ pr_Q = pr_Q \circ pr_P \equiv 0$ olduğundan, *ortogonaldirler*.
2. pr_P ve pr_Q , 1 in bir parçalanışını verir, yani, $id_M = pr_P + pr_Q$ dir.

Önerme 4.1.5. $\{P_i, i \in I\}$, pr_i izdüşüm olacak şekilde, P_i lerin herbiri M nin bir direkt toplamı olmak üzere, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu taktirde

- i) pr_i ler ikişer ikişer ortogonaldir.
- ii) $\forall x \in M$ için sonlu sayıdakiler hariç $\forall i \in I$ için, $pr_i(x) = 0$ dır ve
- iii) pr_i ler 1 in bir parçalanışını verir.

İspat. (4.1.4) ün doğal bir genelleştirilmesidir.

Notasyon 4.1.6. pr_i ler izdüşümler olmak üzere, $M = \bigoplus_{i \in I} P_i$ olduğu durumda, $id_M = \sum_{i \in I} pr_i$ dir. Eğer I sonsuz ise, sağdaki bu toplam sonsuz olur.

Tanım 4.1.7. Eğer M nin herbir alt modülü bir direkt toplam ise M modülüne bir *yarı-basit modül* denir.

Örnekler 4.1.8.

1. Vektör uzayları (boyutlarına bakılmaksızın) yarı-basittir.
2. Basit modüller yarı basittir.

Önerme 4.1.9.

1. Yarı basit bir M modülünün bir alt modülü de yarı-basittir.
2. Yarı basit bir M modülünün bir bölümü, M nin bir alt modülüne izomorfiktir ve bu nedenle yarı-basittir.

İspat.

(1) N , yarı basit bir M modülünün bir alt modülü olsun. P , N nin bir alt modülü olsun. Bu taktirde M nin $M = P \oplus Q$ olacak şekilde bir Q alt modülü vardır. Bu durumda $N = P \oplus (Q \cap N)$ dir.

(2) N , yarı basit bir M modülünün bir alt modülü olsun. Bu taktirde M nin, $M = N \oplus P$ olacak şekilde bir P alt modülü vardır ve bu nedenle $M / N \approx P$ dir.

Teorem 4.1.10. Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

1. M , yarı-basittir.
2. M , M nin basit alt modüllerinin bir ailesinin bir toplamıdır.
3. M , basit modüllerin bir ailesinin bir direkt toplamıdır.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): M yarı basit olsun. (4.1.9) (1) den, M nin her alt modülü yarı-basittir. İkinci olarak, eğer $M \neq (0)$ ise, M basit alt modüller içerir. (Çünkü, $x \neq 0$ olacak şekilde herhangi bir $x \in M$ alalım ve sonlu üretilmiş sıfır olmayan $N = Rx$ i gözönüne alalım. Böylece, N , maksimal bir alt modüle sahiptir, bu alt modül P olsun. (i), N için gerçekleştiği için $N = P \oplus Q$ olacak şekilde N nin bir Q alt modülü vardır ve bu nedenle, $Q \approx N/P$, N nin bir basit alt modülüdür ve böylece M nin de basit alt modülüdür.)

(2) yi ispatlamak için, $M \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. $\mathcal{M}$, M nin tüm basit alt modüllerinin bir ailesi olsun ve $N = \sum_{S \in \mathcal{M}} S$ olsun. Eğer mümkünse, $N \neq M$ olsun. (1) den M nin bazı P alt modülleri için $M = N \oplus P$ yazabiliriz. $P \neq (0)$ olduğundan tekrar (1) den P basit bir alt modüle sahiptir. Bu alt modüle S_0 diyelim. Şimdi, $S_0 \in \mathcal{M}$ olsun ve $S_0 \subseteq N$ olup $S_0 \subseteq N \cap P = (0)$ dır ki, bu da $S_0 \neq (0)$ kabulü ile çelişir. Bu nedenle, $N = M$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3): S_i basit olmak üzere, $M = \sum_{i \in I} S_i$ olduğunu farzedelim. Eğer $I = \emptyset$ ise, $M = (0)$ olduğundan ispat biter. $\sum_{j \in J} S_j$ toplamı direkt olmak üzere, $\mathcal{I}$, I nin J alt cümlelerinin bir cümlesi olsun, yani, $\sum_{j \in J} S_j = \bigoplus_{j \in J} S_j$ olsun. $\forall i \in I$ için $\{i\} \in \mathcal{I}$ olduğundan, $\mathcal{I} \neq \emptyset$ dır.

İddia 4.1.11. $\mathcal{I}$ maksimal bir elemana sahiptir.

İspat. Zorn Lemmasını $\mathcal{I}$ ya uygulamak için, $\mathcal{T}$, $\mathcal{I}$ da bir zincir olsun. $T_0 = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ olsun ve $\sum_{t \in T_0} S_t$ toplamını gözönüne alalım. Eğer bu toplam direkt değilse, $t_i \in T_0$ vardır ve tüm x_i ler sıfır olmamak kaydıyla $1 \leq i \leq r$ olmak üzere bir $x_i \in S_{t_i}$ vardır

fakat $\sum_{i=1}^r x_i = 0$ dir. $\mathcal{T}$ bir zincir olduğundan, $1 \leq i \leq r$ olacak şekilde her i için $t_i \in T'$ olacak şekilde bir $T' \in \mathcal{T}$ bulabiliriz. Bu taktirde $\sum_{t \in T'} S_t$ de aşıkak olmayan $\sum_{i=1}^r x_i = 0$ bağıntısından dolayı, $\sum_{t \in T'} S_t$ toplamı direkt değildir ki bu bir çelişkidir, bu ise iddiayı ispatlar.

$J \in \mathcal{I}$ bir maksimal eleman olsun. $N = \sum_{j \in J} S_j = \oplus_{j \in J} S_j$ dir ve J , bu özellik için I maksimalinin bir alt cümlesidir. Eğer $N \neq M$ ise, bu taktirde $S_{i_0} \not\subset N$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır yani, $S_{i_0} \cap N \neq S_{i_0}$ ve bu nedenle, S_{i_0} basit olduğu için $S_{i_0} \cap N = (0)$ dir. Böylece $i_0 \notin J$ ve daha geniş olan $J' = J \cup \{i_0\}$ alt cümlesi üzerindeki toplam, yani, $N + S_{i_0} = \left(\sum_{j \in J} S_j \right) + S_{i_0} = \sum_{t \in J'} S_t$, $\mathcal{I}$ da J nin maksimalliği ile çelişen bir direkt toplamdır. Böylece $M = \oplus_{j \in J} S_j$, olup ispat biter.

(3) $\Rightarrow$ (1): S_i basit olmak üzere $M = \oplus_{i \in I} S_i$ olsun. N , M nin herhangi bir alt modülü olsun. Eğer $N = M$ ise ispat biter. O halde $N \neq M$ olsun, yani, bazı $i_0 \in I$ ler için $S_{i_0} \not\subset N$ olsun. Böylece, $S_{i_0} \cap N \neq S_{i_0}$ dir ve bundan dolayı $S_{i_0} \cap N = (0)$, yani, $N + S_{i_0} = N \oplus S_{i_0}$ dir. Şimdi, $N + \left(\sum_{j \in J} S_j \right)$ direkt olmak üzere I nin bütün J alt cümlelerinin $\mathcal{I}$ ailesini gözönüne alalım. $\{i_0\} \in \mathcal{I}$ olduğu için $\mathcal{I} \neq \emptyset$ dir. Ayrıca, $P = \sum_{j \in J} S_j$ olmak üzere $N + P = N \oplus P$ özelliği için J maksimal olmak üzere, I nin bir J alt cümlesi vardır. Eğer $N + P \neq M$ ise, yukarıdaki gibi, $J' = J \cup \{j_0\}$ olup, $P' = \sum_{j \in J'} S_j$ olmak üzere, $N + P' = N \oplus P'$ olacak şekilde bir $j_0 \in I \setminus J$ bulunabilir. Bu ise, I da J nin maksimalliği ile çelişir. Bu nedenle $M = N \oplus P$ olup ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.12. Yarı-basit modüllerin bir ailesinin bir direkt toplamı ya da toplamı yarı-basittir.

Teorem 4.1.13. Yarı-basit bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

1. M , Noetheriandır.

2. M , sonlu üretilmiştir.
3. M , sonlu uzunluktadır.
4. M , Artiniandır.

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (2): Aşıkardır.

(2) $\Rightarrow$ (3): S_i basit olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ olsun. M , $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, sonlu bir $X = \{x_i\}$ alt cümlesi tarafından üretilmiştir. $x_{j(i)} \in S_{j(i)}$ olmak üzere herbir j için $x_j = \sum_{j(i) \in I} x_{j(i)}$ yazılabilir ve sonlu sayıda $x_{j(i)}$ ler dışında tüm $x_{j(i)}$ ler sıfırdır. Eğer $J = \{j(i) \in I \mid x_{j(i)} \neq 0, \forall j, 1 \leq j \leq n\}$ ise, bu taktirde J sonlu, ve M sonlu uzunlukta bir modül olmak üzere $M = \bigoplus_{j \in J} S_j$ olduğu açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4): Aşıkardır.

(4) $\Rightarrow$ (1): Aşıkardır. Çünkü, sıfır olmayan modüllerin sonsuz bir direkt toplamı Artinian olamaz. Bu, basit modüllerin sonlu bir direkt toplamıdır ve aynı zamanda Noetheriandır.

Uyarı 4.1.14. Yarı-basit (hatta basit) modüllerin bir ailesinin direkt çarpımının yarı-basit olmasına gerek yoktur.

Örneğin, bir D bölümlü halkası üzerinde, sonsuz boyutlu bir V vektör uzayı alalım ve $R = \text{End}_D(V)$ olsun. V yi R üzerinde bir sol modül olarak ele alalım. Bu taktirde V nin basit olduğu görülür. Eğer B, V nin bir D -bazı ise, bu taktirde R -modüller olarak $\forall b \in B$ için $V_b = V$ olmak üzere $R \approx \prod_{b \in B} V_b$ dir. (4.1.13) den, bir R -modül olarak R nin yarı-basit olmadığı görülür, çünkü R, R üzerinde sonlu üretilmiştir fakat R ne Artinian ne de Noetheriandır.

Önerme 4.1.15. Eğer bir M modülü, hem N hem de $M \setminus N$ yarı-basit olmak üzere direkt toplam olan bir N alt modülüne sahip ise, bu taktirde M yarı-basittir.

Not 4.1.16. Eğer bir M modülü, hem N hem de $M \setminus N$ yarı-basit olacak şekilde bir direkt toplam olan N alt modülüne sahipse bu taktirde, M nin yarı-basit olmasına gerek yoktur. (Bu şekilde bir N nin, M nin bir direkt toplamı olmasına gerek yoktur.)

Bunu görmek için, p bir asal sayı olmak üzere p^2 mertebeli C_{p^2} sonlu devirli grubunu ele alalım. Eğer a bu grubun bir üreticisi ise, bu taktirde, a^p tarafından üretilen C_p ve C_{p^2}/C_p bölüm grubunun ikisi de p mertebelidir ve bu nedenle yarı-basittir (aslında basittir). Fakat, C_{p^2} yarı-basit değildir çünkü, eğer $C_{p^2} = C_p \oplus C_{p^2}/C_p$ olsaydı, bu C_{p^2} nin her elemanının en çok p mertebeli olduğu anlamına gelirdi ki bu çelişkidir.

4.2 İzotipik Bileşenler

Bir R halkası verilsin. İkişer ikişer birbirine izomorfik olmayan basit sol R -modüllerin tam bir cümlesini, $S = S_R$ ile gösterelim, yani, her basit sol R -modül, S nin sadece bir elemanına izomorfik olsun. (1.1.26) dan S , R/I bölüm modüllerinin ailesinin tüm izomorfizma sınıflarının cümlesidir, çünkü I , R nin tüm maksimal sol ideallerinin cümlesi üzerinde değişir.

Eğer N , bir M R -modülünün basit bir alt modülü ise, bu taktirde bazı $S \in S$ ler için, $N \approx S$ dir. S , M nin bazı basit alt modüllerine izomorfik olmak üzere bütün basit $S \in S_R$ modüllerinin ailesi S_M ile gösterilir.

Tanım 4.2.1. Bir basit S , R -modülü verilsin. Eğer M , herbiri S ye izomorfik olan basit modüllerin bir ailesinin bir toplamı ise, yarı-basit bir M , R -modülüne S tipinin izotipiği denir.

Önerme 4.2.2. Her S_i basit olmak üzere $M = \sum_{i \in I} S_i$ olsun. Eğer N , M nin herhangi bir basit alt modülü ise, bu taktirde bazı $i \in I$ ler için, $N \approx S_i$ dir.

İspat. N , M nin basit bir alt modülü olsun. M yarı-basit olduğu için $M = N \oplus P$ olacak şekilde, M nin bir P alt modülü vardır. $M/P \approx N$ nin basit olduğu açıktır. $\eta_P : M \rightarrow M/P$ doğal homomorfizma olsun.

Bu durumda $N = \eta_p(M) = \eta_p\left(\sum_{i \in I} S_i\right) = \sum_{i \in I} \eta_p(S_i) \neq (0)$ dir, bu nedenle bazı $j \in I$ ler için $\eta_p(S_j) \neq (0)$ dir. Bu, η_p nin S_j ye kısıtlamasının, S_j ve N basit modülleri arasındaki sıfır olmayan bir homomorfizma olduğunu gösterir. Bu nedenle (1.1.27) Schur Lemmasından bu bir izomorfizmadır.

Sonuç 4.2.3. $M, S \in \mathcal{S}_M$ tipinin izotipiği olan yarı-basit bir modül olsun. Bu taktirde M nin her basit alt modülü S ye izomorftir. M yarı basit bir modül olsun. $\forall S \in \mathcal{S}_M$ için, M_S , M nin herbiri S ye izomorfik olan tüm basit alt modüllerinin toplamı olsun. Bu taktirde

1. M_S , S tipinin izotipiği olan M nin en büyük alt modülüdür ve S tipinin izotipik bileşeni olarak adlandırılır.
2. $M = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}_M} M_S$ dir, yani, M ayrık izotipik bileşenlerinin direkt toplamıdır.

İspat. S_i basit olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ olsun. Herbir $S \in \mathcal{S}$ için $I_S = \{i \in I \mid S_i \approx S\}$ olsun. Bu durumda, $M_S = \bigoplus_{i \in I_S} S_i$ dir. Gerçekten, $M_{I_S} = \bigoplus_{i \in I_S} S_i \subseteq M_S$ olduğu açıktır. Şimdi, $N \approx S$ olacak şekilde M nin herhangi bir basit alt modülünü alalım. $\eta_{I_S} : M \rightarrow M / M_{I_S} = \bigoplus_{j \notin I_S} S_j = M'_{I_S}$ doğal homomorfizmasını ele alalım. Eğer $\eta_{I_S}(N) \neq (0)$ ise, bu taktirde $N \approx \eta_{I_S}(N)$ dir ki bu M'_{I_S} nin basit bir altmodülüdür. Bu nedenle, (4.2.2) den bazı $j \notin I_S$ ler için N, S_j ye izomorftir, fakat bu $j \notin I_S$ ve $S \approx N \approx S_j$ olduğundan, I_S cümlesinin tanımıyla çelişir. Bu nedenle, $\eta_{I_S}(N) = (0)$ dir, yani, $N \subseteq M_{I_S}$ ya da $M_S = M_{I_S}$ dir. M_S nin S tipinin maksimal izotipik alt modülü olduğu açıktır. Buradan $M = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}_M} M_{I_S} = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}_M} M_S$ olduğu görülür.

Teorem 4.2.4. M yarı-basit olsun. Bu taktirde M nin her izotipik bileşeni, M nin tüm R -lineer endomorfizmaları altında sabittir. Tersine, tüm izomorfizmalar altında sabit olan M nin herhangi bir alt modülü, M nin uygun izotipik bileşenlerinin bir toplamıdır. (ayrıca, bir izotipik bileşen, tüm endomorfizmalar altında sabit olan sıfırdan farklı en küçük alt modüldür.)

İspat. f , M nin bir endomorfizmi olsun. M_S , $S \in \mathcal{S}_M$ tipinde olan M nin bir izotipik bileşeni olsun. M_S nin herhangi bir basit N alt modülünü alalım. $N \approx S$ olduğunu biliyoruz. Eğer $f(N) \neq (0)$ ise, (1.1.27) Schur Lemmasından $S \approx N \approx f(N)$ basittir ve bu nedenle $f(N) \subseteq M_S$ dir. Böylece $f(M_S) \subseteq M_S$ dir.

P , M nin tüm endomorfizmaları altında sabit olan M nin bir alt modülü olsun. Böylece, eğer P , M nin bir basit N alt modülünü içeriyorsa, bu taktirde P , herbiri N ye izomorfik olan M nin tüm basit modüllerini içerdiğini ispat etmek yeterlidir. Q , $\varphi: N \rightarrow Q$ izomorfizmasıyla M nin N ye izomorfik olan bir alt modülü olsun. M yarı-basit olduğundan, M nin bazı N' alt modülleri için $M = N \oplus N'$ dir. Eğer $pr_N: M \rightarrow M/N' = N$, N üzerine bir izdüşüm ise, bu taktirde $f = \varphi \circ pr_N$, $f(M) = f(N) = \varphi(N) = Q$ olacak şekilde M nin bir endomorfizmasıdır. Bu nedenle, $Q = f(N) \subseteq P$ dir, çünkü $N \subseteq P$ ve P , f altında sabittir.

4.3 Endomorfizma Halkaları

Tanım 4.3.1. $f: R \rightarrow S$ halka homomorfizması altında;

1. $\mathcal{J}$, S nin bir ideali ise, $f^{-1}(\mathcal{J}) \subseteq R$ idealine, $\mathcal{J}$ nin *kısıtlanması* denir ve $\mathcal{J}^c$ ile gösterilir.
2. I , R nin bir ideali ise, $f(I)$ nin S de ürettiği ideale, I nin *genişlemesi* denir ve I^e ile gösterilir.

Önerme 4.3.2. M , $\{M_S, S \in \mathcal{S}_M\}$ izotipik bileşenleri olmak üzere, bir yarı-basit modül olsun. Bu taktirde M nin endomorfizma halkaları, $End_R(M) \approx \prod_{S \in \mathcal{S}_M} End_R(M_S)$ şeklindedir.

İspat. $f \in End_R(M)$ olsun. Her $S \in \mathcal{S}_M$ için, f nin M_S ye kısıtlanması f_S olsun, bu durumda (4.2.4) den f_S , M_S nin bir endomorfizmasıdır. $f \rightarrow (f_S)_{S \in \mathcal{S}_M} \rightarrow \sum_{S \in \mathcal{S}_M} f_S = f$ dönüşümüne bakılırsa, ortadaki terimde f_S , f nin M_S ye kısıtlamasıdır ve son toplamda f_S , $S \neq T \in \mathcal{S}_M$ olmak üzere M_T lerin tümü

üzerinde 0 olup f_S nin M ye genişlemesidir. Mümkün olan sonsuz $\sum_{S \in \mathcal{S}_M} f_S$ toplamı bir dönüşüm olarak düşünülebilir. Bu ise, bir halka izomorfizmasıdır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Şimdi, $\forall i \in I$ için $S \approx S_i$ olmak üzere, $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ olsun. $\forall i \in I$ için $\varphi_i : S \rightarrow S_i$ izomorfizmalarını belirleyelim. Her φ_i , S den M ye R -lineer homomorfizmalar olsun. Yani, $\varphi_i : S \rightarrow S_i \rightarrow M$ olsun. S basit olduğundan, (1.1.27) Schur Lemmasından bir bölümlü halka $D = D_S = \text{End}_R(S)$ olsun. Tüm R -lineer homomorfizmalarının uzayı $V = V_S = \text{Hom}_R(S, M)$ olsun. Bu bir abelyen gruptur, fakat R komütatif olmayabileceğinden bir R -modül olması gerekmez. Fakat, V , $\varphi : S \rightarrow M$ ve $\alpha : S \rightarrow S \Rightarrow \varphi \cdot \alpha = \varphi \circ \alpha \in V$ ile verilen bir skalar çarpımla, D üzerinde bir sağ vektör uzayıdır.

Teorem 4.3.3. $B = \{\varphi_i : i \in I\}$ cümlesi, D üzerindeki bir V (sağ) vektör uzayının bir D -bazıdır.

İspat.

(i) B lineer bağımsızdır.

Bir lineer bağımlılık bağıntısı $f = \sum_{r=1}^n \varphi_{i_r} \alpha_{i_r} \equiv 0$ olsun, yani, $\forall x \in S$ için $f(x) = \sum_{r=1}^n \varphi_{i_r}(\alpha_{i_r}(x)) = 0$ olsun. $\varphi_{i_r}(\alpha_{i_r}(x)) \in S_{i_r}$ olduğundan, $1 \leq r \leq n$ olmak üzere $\forall x \in S$ için $\varphi_{i_r}(\alpha_{i_r}(x)) = 0$ dır. φ_{i_r} , S_{i_r} üzerinde bir izomorfizma olduğu için, $1 \leq r \leq n$ olmak üzere $\forall x \in S$ için $\alpha_{i_r}(x) = 0$ dır, yani, $1 \leq r \leq n$ olmak üzere $\alpha_{i_r} \equiv 0$ dır.

(ii) B , D üzerinde V yi gerer.

$f \in V$ olsun. S basit olduğundan ve f R -lineer olduğundan, f dönüşümü tamamen belirlidir eğer herhangi sıfır olmayan $x \in S$ üzerindeki değeri biliniyor ise. $x \neq 0$ olmak üzere bir $x \in S$ belirleyelim. $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ olduğu için, $x_r \in S_{i_r}$ ve $i_r \in I$, $1 \leq r \leq n$ olmak üzere $f(x) = \sum_{r=1}^n x_r$ dir. Eğer $1 \leq r \leq n$ olmak üzere, $\alpha_r = \varphi_{i_r}^{-1} \circ p_{i_r} \circ f$ ise, bu taktirde $f = \sum_{r=1}^n \varphi_{i_r} \circ \alpha_r$ olur.

Teorem 4.3.4. M, S tipinin bir izotipiği olsun ve V ile D yukarıdaki gibi olsun. Bu taktirde bir halka izomorfizması vardır ki $End_R(M) \approx End_D(V)$ dir.

İspat. $\lambda: End_R(M) \rightarrow End_D(V), F \rightarrow \lambda_F, \lambda_F(f) = F \circ f, \forall f \in V$, dönüşümünü tanımlayalım. λ nın bir halka homomorfizması olduğunu göstermek kolaydır.

1. λ bir monomorfizmadır.

$Ker\lambda = \{F \mid F \circ f = 0, \forall f \in V\} = \{F \mid F \circ \varphi_i = 0, \forall i \in I\}$ dir. $S_i = \varphi_i(S)$ olduğu için $\forall i \in I$ için $F(S_i) = F(\varphi_i(S)) = (F \circ \varphi_i)(S) = 0$ dir, bu nedenle $\forall F \in Ker\lambda$ için $F \equiv 0$ dir.

2. λ bir epimorfizmadır.

Eğer $\phi \in End_D(V)$ ise, bu taktirde $F_i = f_i \circ \varphi_i^{-1}$ ve $f_i = \phi(\varphi_i)$ olup $F = \sum_{i \in I} F_i \in End_R(M)$ olmak üzere $\lambda_F = \phi$ dir.

Sonuç 4.3.5. M, S tipinin bir izotipiği ve n uzunlukta sonlu bir modül olsun. Bu taktirde $End_R(M)$ halkası, $V = Hom_R(S, M)$ ve $D = End_R(S)$ olmak üzere, $M_n(D) = End_D(V)$ matris halkasına izomorftir.

İspat. $f \in End_R(M)$ olsun. $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere $f_{ij} = \varphi_i^{-1} \circ pr_i \circ f \circ \varphi_j$ ile $f_{ij} \in D$ yi tanımlayalım. Böylece $f \rightarrow (f_{ij})$ dönüşümü istenilen izomorfizmadır.

4.4 Yarı-Basit Halkalar

Tanım 4.4.1. R bir halka olsun. Eğer R , kendi üzerinde bir sol modül olarak yarı-basit ise, R halkasına *yarı-basit halka* denir, yani, R nin her sol ideali bir direkt bileşendir.

Önerme 4.4.2. Bir R halkası yarı-basittir $\Leftrightarrow R$, sonlu sayıdaki minimal sol ideallerin bir direkt toplamıdır.

İspat. Eğer R yarı-basitse, R , basit alt modüllerin bir ailesinin bir direkt toplamıdır, yani, minimal sol idealler için $R = \bigoplus_{i \in I} S_i$ dir.

Şimdi, $1 \leq r \leq n$ olacak şekilde uygun $i_r \in I$ için $x_r \in S_{i_r}$ olmak üzere $1 = \sum_{r=1}^n x_r$ yazalım. $\forall x \in R$ için $x = \left(\sum_{r=1}^n x x_r \right) \in \sum_{r=1}^n S_{i_r}$ dir ve böylece $R \subseteq \sum_{r=1}^n S_{i_r} \subseteq R$ dir, yani, $R = \sum_{r=1}^n S_{i_r} = \bigoplus_{r=1}^n S_{i_r}$ dir. İspatın yeter şartı açıktır.

Önerme 4.4.3.

1. Yarı-basit bir halkanın izotipik bileşenleri 2-terafli minimal ideallerdir (ve bu nedenle sayıca sonludur).
2. Her 2-terafli ideal uygun izotipik bileşenlerin bir toplamıdır (ve bu nedenle R üzerinde sadece sonlu 2-terafli idealler vardır).

İspat. (4.2.5) den, R nin bir I ideali 2-terafli $\Leftrightarrow I, R$ nin tüm R -lineer endomorfizmaları altında sabittir olduğunu göstermek yeterdir. Fakat, R nin bir R -lineer endomorfizmasının, R nin bir elemanı ile sağ çarpım olduğunu kolayca gösterebiliriz.

Aslında, eğer $f : R \rightarrow R$ bir R -lineerse $\forall x \in R$ için $f(x) = f(x.1) = x.f(1)$ dir ki bu, f in, $f(1)$ ile sağ çarpım (veya tersi) olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, I nin 2-terafli bir ideal olması ile I nin bir alt modül (yani, sol ideal) olması aynıdır ki R nin elemanlarıyla sağ çarpımı sabittir.

Not 4.4.4. Herhangi bir R halkası için, yarı-basit ya da değil, R nin R -lineer endomorfizmalarının halkası, R halkasına doğal olarak anti-izomorfiktir, yani, R ye ters olan R° halkasına izomorfiktir. Bunu görmek için, $\forall f, g \in \text{End}_R(R)$ olsun. O halde,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(xg(1)) = (xg(1))f(1) = x(g(1)f(1)), \quad \forall x \in R$$

dir ve bu nedenle $f \rightarrow f(1)$ dönüşümü $\text{End}_R(R)$ ve R° halkalarının bir izomorfizmasıdır.

Not 4.4.5. Yarı-basit bir halka sonlu uzunluktadır, yani, hem Artinian hem de Noetheriandır. Ama yine de sonlu uzunluktaki bir halkanın yarı-basit olmasına gerek

yoktur. Örneğin, $\mathbb{Z}/m^n\mathbb{Z}$ halkaları, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için sonlu uzunluktadır, ama, eğer $m, n \geq 2$ ise $\mathbb{Z}/m^n\mathbb{Z}$ halkası yarı-basit değildir. (4.4.12)(2)

Tanım 4.4.6. R bir halka, M bir R -modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt cümle olsun. $(0 : X) = \{r \in R : rX = 0\}$ idealine X in *sıfırlayıcısı* denir ve $Ann(X)$ ile gösterilir.

Tanım 4.4.7. R bir halka, M bir R -modül olsun. $(0 : M) = \{r \in R : rM = 0\}$ idealine M modülünün *sıfırlayıcısı* denir ve $Ann(M)$ ile gösterilir.

Tanım 4.4.8. R halkasının I ve J idealleri için, $I + J = R$ ise I ve J ideallerine *aralarında maksimal idealler* denir.

4.4.9. I ve J aralarında maksimal idealler ise, $I \cap J = IJ$ dir.

Teorem 4.4.10. $n \geq 2$ olmak üzere, $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ ler R halkasının, ikişer ikişer aralarında maksimal idealleri olsunlar.

1. Verilen her $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ için, $a \equiv a_j \pmod{I_j}, 1 \leq j \leq n$ olacak şekilde bir $a \in R$ vardır.
2. $f(a) = (a + I_1, a + I_2, \dots, a + I_n)$ ile tanımlı $f : R \rightarrow R/I_1 \times R/I_2 \times \dots \times R/I_n$ fonksiyonu bir örten homomorfizmadır.
3. $R/I_1 I_2 \dots I_n \cong R/I_1 \times R/I_2 \times \dots \times R/I_n$ dir.

Teorem 4.4.11. Bir R halkası için, aşağıdakiler denktir.

1. R üzerindeki her modül yarı-basittir.
2. R yarı-basittir.
3. R Artiniandır ve radikalsızdır, yani, $J(R) = (0)$ dir.
4. R Artiniandır ve nilpotent sol (sağ /2-terafı) ideali yoktur.
5. R Artiniandır ve nil sol (sağ/2-terafı) idealleri yoktur.

İspat. (1) $\Leftrightarrow$ (2) ve (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (2) olduğunu göstereceğiz.

(1) $\Rightarrow$ (2): Aşıkardır.

(2) $\Rightarrow$ (1): M herhangi bir R -modül olsun. M , serbest bir R -modülünün bir bölümü olsun. X , M nin üreticilerinin bir cümlesi ve $\forall x \in X$ için $Rx = R$ olmak üzere, $F = \bigoplus_{x \in X} Rx$ diyelim. R yarı-basit olduğu için, direkt toplamı olan F de yarı-basittir. Bundan dolayı bölümü olan M de yarı-basittir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $R = \bigoplus_{r=1}^n S_r$, minimal sol S_r ideallerin sonlu bir direkt toplamı olduğundan, R Artiniandır. Şimdi, $J(R) = (0)$ olduğunu gösterelim. Bu da,

$$(0) = \text{Ann}_R(R) = \bigcap_{r=1}^n \text{Ann}_R(S_r) \supseteq J(R)$$

den dolayı aşıkardır.

(3) $\Rightarrow$ (4): $J(R)$, tüm nil ideallerini kapsadığından bu önerme aşıkardır. Artinian bir halkadaki bir nil ideal nilpotent olduğundan (4) $\Rightarrow$ (5) önermesi görülür.

(5) $\Rightarrow$ (2): R Artinian olduğu için, $J(R)$ nilpotenttir ve bu nedenle nildir. Böylece $J(R) = (0)$ dır. Ayrıca, $J(R)$, sonlu maksimal sol ideallerin bir kesişimi olup,

$$(0) = J(R) = \bigcap_{r=1}^n M_r \quad \text{diyelim.} \quad \forall x \in R \quad \text{ için } \quad \varphi: R \rightarrow \bigoplus_{r=1}^n R/M_r, \quad x \rightarrow (x + M_r)_{r=1}^n$$

dönüşümü bir R -lineer monomorfizmadır. Böylece R , basit modüllerin sonlu direkt toplamının, yani, $\bigoplus_{r=1}^n R/M_r$ nin bir alt modülüne izomorfiktir. Bu nedenle yarı-basittir.

Sonuçlar 4.4.12.

1. Eğer R Artinian ise, bu taktirde $R/J(R)$ bölüm halkası (Artinian olan fakat radikali olmayan) yarı-basittir.
2. Sonlu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkası (komütatif Artinian) yarı-basittir. $\Leftrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin nilpotent elemanları yoktur $\Leftrightarrow n$ karesizdir.

Teorem 4.4.13. Artinian bir halka Noetheriandır. (Yani, sonlu uzunluktaki halkalar Artinian halkalardan başka bir şey değildir.)

İspat. R , $J = J(R)$ radikali ile Artiniandır. R/J (Artinian olan ve radikalsız) yarı-basit bir halkadır, sonlu uzunluktadır ve bu nedenle Noetheriandır. Bir R -modül olarak

J nin Noetherian olduğunu gösterirsek sonuca ulaşırız. J nilpotent olduğundan, 2- taraflı ideallerin sonlu bir azalan zinciri vardır (R ile başlayan (0) ile biten), yani, bazı $n \in \mathbb{N}$ ler için,

$$R = J^0 \supseteq J \supseteq J^2 \supseteq \dots \supseteq J^n = (0)$$

dır. İspatı tamamlamak için şimdi aşağıdaki iddiayı veriyoruz.

İddia 4.4.14. $M_r = J^r / J^{r+1}$ bölüm modülleri, $0 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, Noetheriandır.

Bu iddia aşağıdaki basit gerçeklerin bir sonucudur.

a) Her M_r Artiniandır.

b) Her M_r yarı-basittir. Çünkü, M_r (aşıkarak olarak) J tarafından sıfırlanır ve bu nedenle $\forall a \in R$ ve $\forall x \in M_r$ olmak üzere $(a + J)x = ax$ skalar çarpım altında M_r bir R/J -modüldür. Bu çarpım iyi tanımlıdır, çünkü $\forall x \in M_r$ için $Jx = 0$ dır. M_r üzerindeki iki modül yapısı aynıdır, yani, her R -alt modül bir R/J -alt modüldür veya tam tersi. Ama R/J yarı-basit, R/J üzerinde herhangi bir modül yarı-basittir. Ayrıca, M_r bir R -modül olarak yarı-basittir. Bu nedenle M_r Artinian ve yarı-basittir. Bundan dolayı, (4.1.13) den Noetheriandır.

Son olarak, $M_{n-1} = J^{n-1} / J^n = J^{n-1}$ ve $M_{n-2} = J^{n-2} / J^{n-1}$ Noetheriandır. Bu nedenle, J^{n-2} Noetheriandır. Bunu tekrar ederek, n üzerinde azalan bir tümevarımla, hem J^{r+1} hem de $M_r = J^r / J^{r+1}$ Noetherian olduğu için, $0 \leq r \leq n-1$ olacak şekilde her r için J_r Noetheriandır.

Teorem 4.4.15. (Artin–Molien -Wedderburn). Bir R halkası yarı-basittir ancak ve ancak R , uygun bölümlü halkalar üzerindeki matris halkalarının sonlu bir direkt çarpımına homomorfiktir.

İspat. R yarı-basit olsun. $S_R = \{S_i : 1 \leq i \leq n\}$ cümlesinin sonlu olduğunu biliyoruz. S_i tipinin R_i izotipik bileşenlerinin bir direkt toplamı olarak $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ yazabiliriz. (4.3.2)

ve (4.3.5) den $1 \leq i \leq n$ için, $D_i = \text{End}_R(S_i)$, $m_i = \dim_{D_i}(V_i)$ ve $V_i = \text{Hom}_R(S_i, R_i)$ den $R^\circ = \text{End}_R(R) \approx \prod_{i=1}^n \text{End}_R(R_i) = \prod_{i=1}^n M_{m_i}(D_i)$ yi elde ederiz.

Son olarak, $R = R^{\circ\circ} = \prod_{i=1}^n (M_{m_i}(D_i))^\circ = \prod_{i=1}^n M_{m_i}(D_i^\circ)$ dir. Fakat, her bir D_i° aynı zamanda bir bölümlü halkadır. Bu nedenle R bölümlü halkalar üzerindeki matris halkalarının bir çarpımıdır.

Aksine, bölümlü halkalar üzerinde, matris halkalarının sonlu bir çarpımı, her biri yarı-basit olduğu için, yarı-basittir.

Not 4.4.16. Herhangi bir R halkası için A^t , $A \in M_m(R)$ nin transpozu olmak üzere $A \rightarrow A^t$ dönüşümü, ve halkalarının doğal bir izomorfizmasını verir.

Sonuçlar 4.4.17.

1. Bir R halkası sol yarı-basittir $\Leftrightarrow R$ sağ yarı-basittir.
2. Yarı-basit bir halkanın merkezi cisimlerin sonlu bir direkt çarpımıdır ve kendisi yarı-basittir.
3. Komütatif bir halka yarı-basittir $\Leftrightarrow$ Cisimlerin sonlu bir direkt çarpımı ise.

İspat.

(1) Bir bölümlü halka üzerindeki bir matris halkası sol ve sağ Artinian ve radikalsız olduğu için sonuç, (4.4.15) den elde edilir.

(2) Cisimlerin sonlu bir çarpımı olan,

$$\text{Centre}(R) = \text{Centre}\left(\prod_{i=1}^n M_{m_i}(D_i)\right) = \prod_{i=1}^n \text{Centre}(M_{m_i}(D_i)) = \prod_{i=1}^n \text{Centre}(D_i) = \prod_{i=1}^n K_i$$

eşitliği vardır ve aşıkarak yarı-basittir.

(3) , (2) den ispatlanır.

Not 4.4.18. Yarı-basit halkalardaki durumun aksine, sol Artinian (sırasıyla sol Noetherian) halkalarının, sağ Artinian (sırasıyla sağ Noetherian) olmasına gerek yoktur.

Teorem 4.4.19. Sıfır olmayan yarı-basit bir R halkasının R_i izotipik bileşenlerin kendileri, birimin bir parçalanışı olan, e_i ler ikişerli olarak ortogonal merkezli idempotentler olmak üzere, e_i birimli halkalardır ve her bir R_i bir D bölümlü halkası üzerinde bir matris halkasıdır.

İspat. Bu (4.4.15) in yeniden formüle edilişidir. Aslında, eğer $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$, R nin R_i izotipik bileşenlerine parçalanışı ise, bu taktirde $R'_i = \bigoplus_{j \neq i} R_j$ (R nin iki taraflı bir ideali) birimli bir halka olmak üzere $R_i \approx R / R'_i$ dir. $e_i \in R_i$ olmak üzere $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ dir ve $e_i = (1 + R'_i)$, R nin bir birimidir. Ayrıca, $\forall x_i \in R_i$ ve $x_j \in R_j$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) için $x_i x_j = x_j x_i = 0$ dir, çünkü, hem R_i hem de R_j 2-taraflı ideallerdir. Bu nedenle, $\forall i \neq j$ için $x_i x_j \in R_i \cap R_j = (0)$ dir.

Başka bir deyişle, her $1 \leq i \leq n$ için $\text{Ann}_R(R_i) = R'_i = \bigoplus_{j \neq i} R_j$ dir ki bu R_i nin bir R -modül veya R_i -modül olarak aynı modül yapısına sahip olduğu anlamına gelir.

Ayrıca, $\forall i \neq j$ için $e_i e_j = e_j e_i = 0$ dir. Bu durum, $x = \sum_{i=1}^n x e_i = \sum_{i=1}^n e_i x$ olduğu için, e_i lerin merkez olmasından kaynaklanır ve bundan dolayı, $x e_i = x e_i^2 = e_i^2 x = e_i x$, $\forall x \in R$ dir. Sonuç olarak, $R_i \approx \text{End}_{R_i}(R_i) = \text{End}_R(R_i) = M_{m_i}(D_i)$ dir ve bu nedenle, $R_i \approx M_{m_i}(D_i^\circ)$ dir.

4.5 Artinian Basit Halkalar

Sıfır olmayan bir R halkası, eğer R , (0) ve R den başka 2-taraflı ideale sahip değilse, bir basit halka olarak adlandırılır. Basit halkaların bazı örnekleri, bölüm halkaları üzerindeki matris halkalarıdır. Bunlar aynı zamanda Artiniandır. Ama yine de Artinian olmayan basit halkalar da vardır. Örneğin, V , bir D bölüm halkası üzerinde sayılabilir sonsuz boyutlu bir vektör uzayı ve $S = \text{End}_D(V)$ olsun. I , sonlu ranklı V nin tüm endomorfizmalarından oluşan S nin 2-taraflı yegane ideali olsun. Bu taktirde $R = S / I$ bölüm halkası basittir fakat Artinian değildir.

Teorem 3.5.1. R , sıfır olmayan yarı-basit bir halka olsun. Bu taktirde R basittir ancak ve ancak R üzerindeki tüm basit modüller birbirine izomorfiktir, yani, S , R nin bir basit bölümü olmak üzere, $S_R = \{S\}$ dir.

İspat. R yarı-basit olduğundan, $S_i \in S_R = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ tipinin izotipik bileşenlerinin bir direkt toplamı olarak $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ yazılabilir. R basit ve her R_i , R nin 2-terafli bir ideali ise, $R_i = (0)$ veya R dir. Ama $R = (0)$ olmadıkça $R_i \neq (0)$ dir. Bundan dolayı, $n = 1$ dir. Aksine, eğer R üzerindeki tüm basit modüller birbirine izomorfik ise, bu taktirde S , R nin basit bir bölümü olmak üzere $S_R = \{S\}$ dir. Sonuç olarak, R , S tipinin izotipiğidir, yani, R , R nin minimal 2-terafli idealidir ki böylece R basit bir halkadır.

Teorem 4.5.2. (Artin–Molien–Wedderburn). Sıfır olmayan bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- 1) R Artinian ve basittir.
- 2) R yarı-basittir ve 2-terafli öz idealleri yoktur.
- 3) R Artinian ve izotipiktir
- 4) R , bir bölüm halkası üzerinde bir matris halkasıdır.

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (2): R basit olduğundan, 2-terafli idealleri yoktur. Bu nedenle, R nin 2-terafli ideali olan $J(R)$ radikali sıfır olmak zorundadır. Bu taktirde, R Artinian ve radikalsizdir. Böylece (4.4.11) den yarı-basittir.

(2) $\Rightarrow$ (3): R yarı-basit olduğundan, izotipik bileşenlerinin bir direkt toplamıdır. Ama bir izotipik bileşen 2-terafli minimal bir idealdir. Bu nedenle, R bir tek izotipik bileşene sahip olmalıdır, yani, R izotipiktir.

(3) $\Rightarrow$ (4): (4.4.19) den aşıkardır.

(4) $\Rightarrow$ (1): Aşıkardır.

Teorem 4.5.3. (Sertlik). Bir R Artinian basit halkası, biricik bir n pozitif tamsayısı için, bir $M_n(D)$ matris halkasına ve (izomorfizmalar da dahil) bir tane D bölümlü halkasına izomorfiktir.

İspat. Yukarıdaki teoremden , bazı $n \in \mathbb{N}$ ve bir D bölümlü halkası için $R \approx M_n(D)$ dir. $M_n(D) \approx M_{n'}(D')$ ise, bu taktirde $n = n'$ ve $D \approx D'$ olacağını ispatlayacağız. Uzunlukları kıyaslayarak $\ell_R(R) = n = n'$ olduğunu görürüz. Diğer taraftan, eğer S yalnızca bir izomorfizmaya göre, biricik basit bir modülse, bu taktirde $D^\circ \approx \text{End}_R(S)$ olduğunu göstermemiz gerekir ki bu $D^\circ \approx (D')^\circ$ anlamına gelir.

Farzedelim ki (izomorfizmaları ile birlikte), S , ilki dışında tüm sütunları sıfır olan matrislerden oluşan $R = M_n(D)$ nin minimal sol ideali olsun. Her $\lambda \in D$ için, E_{11} , $(1,1)$ konumunda 1, diğer yerlerde 0 olan matris olmak üzere, R nin λE_{11} elemanıyları $r_{\lambda E_{11}}$ sağ çarpımına bakalım. Bu R nin S üzerine bir R -lineer dönüşümüdür ve bu nedenle, S nin bir R -lineer endomorfizmasını oluşturur. Bu nedenle, $\forall \lambda \in D$ için bir $\varphi: D \rightarrow \text{End}_R(S)$, $\lambda \rightarrow r_{\lambda E_{11}} = \varphi(\lambda)$ dönüşümü vardır. Bu da halkaların bir anti-homomorfizmasıdır, yani, toplama işlemini korur fakat çarpmayı tersine çevirir. $\varphi(\lambda)(E_{11}) = E_{11}\lambda E_{11} = \lambda E_{11}^2 = \lambda E_{11}$ olduğundan φ nin bir monomorfizma olduğu açıktır. Son olarak, $f \in \text{End}_R(S)$ olsun. $f(E_{11}) = \sum_{i=1}^n \lambda_{i1} E_{i1}$ dir.

R -lineer olduğundan, $f(E_{11}) = f(E_{11}^2) = E_{11}f(E_{11}) = \lambda_{11} E_{11} = (r_{\lambda_{11} E_{11}})(E_{11})$ dir. Bu, S nin R -lineer endomorfizmasının, yani, $g = f - r_{\lambda_{11} E_{11}}$ nın $g(E_{11}) = 0$ olduğunu gösterir. Bu nedenle, g , S nin bir izomorfizması değildir ama Schur Lemmasından $g \equiv 0$ dir, yani, $f = \varphi(\lambda_{11})$ dir. Bu nedenle, φ halkaların bir anti-homomorfizmasıdır.

Sonuç 4.5.4. D , bir bölümlü halka ve M ile N , D üzerinde vektör uzayları olarak aynı boyutlu ve sonlu olmak üzere iki modül olsunlar. Bu taktirde M ve N , R -modüller olmak üzere homomorfiktirler.

İspat. S , biricik bir basit R -modül olsun. R yarı-basit olduğundan, M ve N , R üzerinde yarı-basittirler. Bu nedenle bazı $r, s \in \mathbb{N}$ ler için $M = \underbrace{S \oplus \dots \oplus S}_{r \text{ defa}}$ ve $N = \underbrace{S \oplus \dots \oplus S}_{s \text{ defa}}$ dır. Şimdi, $\text{boy}_D(M) = r$ $\text{boy}_D(S) = s$ $\text{boy}_D(S) = \text{boy}_D(N)$ dır ki bu $r = s$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle $M \approx N$ dir.

Sonuç 4.5.5. Yarı-basit bir R halkası verilsin. R nin basit faktörleri olarak adlandırılan $M_{m_r}(D_r)$ basit halkalarının bir sonlu direkt çarpımı $R \approx \prod_{r=1}^n M_{m_r}(D_r)$ olmak üzere, biricik pozitif n, m_r tam sayıları ve D_r ($1 \leq r \leq n$) bölümlü halkaları vardır.

Sonuç 4.5.6.

$R = \sum_{r=1}^n M_{m_r}(D_r)$ halkasının uzunluğu, $\ell_R(R) = \sum_{r=1}^n \ell_R(M_{m_r}(D_r)) = \sum_{r=1}^n m_r$ dir.

Sonuç 4.5.7. Yarı-basit bir halka üzerinde sonlu üretilen serbest bir modülün herhangi iki bazı aynı kardinaliteye sahiptir.

İspat. R yarı-basit bir halka olsun ve F , R üzerinde sonlu üretilen serbest bir modül olsun. $1 \leq i \leq q$ olacak şekilde S_i ler basit R -modüller olmak üzere $F = \bigoplus_{i=1}^q S_i$ diyelim. Bu nedenle F , R üzerinde sonlu uzunluktadır ve $\ell_R(F) = q$ dur.

Diğer tarafa, B , r elemanlı F in bir bazı ise, bu taktirde $F = \underbrace{R \oplus \dots \oplus R}_{r \text{ defa}}$ dır ve böylece $q = \ell_R(F) = r \ell_R(R)$ dir. Eğer B' , s elemanlı olan F nin başka bir bazı ise, bu taktirde $r \ell_R(R) = q = s \ell_R(R)$ olup $r = s$ dir.

4.6 Dönüşümlerin Yoğun Halkaları

M , bir modül olsun ve $A = \text{End}_R(M)$, M nin R -lineer endomorfizmalarının bir halkası olsun. M , bir sol A -modül olarak düşünülebilir. $B = \text{End}_A(M)$ olsun. $a \in R$ için, a ile sol homothecy (yani skalar çarpım), yani, $\ell_a : x \rightarrow ax$, $\forall x \in M$, $\text{End}_\mathbb{Z}(M)$ nin bir elemanıdır fakat R komütatif olmadıkça A nın bir elemanı olmasına gerek yoktur. Ama, $\ell_a \in B$ dır. Çünkü, $\forall \varphi \in A$ ve $x \in M$ olduğu için,

$$\ell_a(\varphi(x)) = a\varphi(x) = \varphi(ax) = \varphi(\ell_a(x)) = (\varphi\ell_a)(x)$$

dır. Bu bir halka homomorfizması olan $\ell : R \rightarrow B$, $a \rightarrow \ell_a$ dönüşümünü verir.

Tanım 4.6.1. R bir halka ve $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesi, bir R -modüller ailesi olsun. Her $j \in J$ için

$$p_j : \prod M_i \rightarrow M_j, p_j((m_i)) = m_j$$

ile tanımlı fonksiyona, j .ci izdüşüm ve her $i \neq j$ için, $m_i = 0$ olmak üzere, $i_j(m_j) = m_i$ ile tanımlı,

$$i_j : M_j \rightarrow \prod M_i$$

fonksiyonuna da j .ci içerme fonksiyonu denir. İzdüşümün örten ve içermenin birebir homomorfizmalar olduğu açıktır. Ayrıca, $p_j i_j = 1_{M_j}$ ve her $i \neq j$ için, $p_j i_i = 0$ dır.

4.6.1. Yoğunluk Teoremi (Jacobson)

M yarı-basit bir R -modül olsun. Bu taktirde verilen $f \in B$ ve $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde sonlu bazı $x_i \in M$ elemanları için, $f(x_i) = ax_i$, $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde x_i ve f ye bağlı bir $a \in R$ vardır. Diğer bir deyişle, M nin A -lineer endomorfizmaları, M nin sonlu alt cümleleri üzerinde, R -skalar çarpımlar gibidir.

4.7 Merkez Basit Cebirler

Bu bölümde, K bir cisim ve A , K üzerinde sonlu boyutlu bir cebir olsun. (3.5.2) den K , A nin merkezinin bir althalkasıdır. Ayrıca, A bir Artinian halkadır.

Tanım 4.7.1. Bir A cebiri, eğer A halkası basitse, basittir (1.1.13), (3.5.2) ve (3.5.3) ten, K üzerinde biricik D bölümlü cebiri ve biricik n pozitif tamsayısı için, $A = M_n(D)$ dir. D ye A nin bölümlü halkası denir ve D_A ile gösterilir.

Tanım 4.7.2. G bir grup olsun. G grubunu merkezi, $C(G) = \{x \in G : xa = ax, \forall a \in G\}$ alt grubudur.

M ve N , R -modül olsunlar. $\text{Hom}_R(M, N)$ cümlesi, $\text{Hom}(M, N)$ nin alt grubudur. $\text{Hom}_R(M, M)$ de $\text{Hom}(M, M)$ nin bir alt halkasıdır. $\text{Hom}_R(M, M)$ nin M nin R -endomorfizmalarının bir halkası olduğunu biliyoruz. Fakat bu halkaya M R -modülününün merkezleyeni de denir. Çünkü $\text{Hom}_R(M, M)$ nin elemanları, M nin R nin elemanlarıyla belirlenen tüm

$$r_L : m \rightarrow rm$$

endomorfizmalarıyla değişmeli olan M nin f endomorfizmalarıdır.

Tanım 4.7.3. Eğer A nın merkezi K ise, bir A K -cebiri *merkez* denir.

Tanım 4.7.4. Eğer A hem merkez hem de basit bir cebirse, bu taktirde bir A K -cebiri *merkez basit* denir.

Örnekler 4.7.5.

1. Herhangi bir Artinian basit halka, merkezi üzerinde bir basit cebirdir.
2. Herhangi bir A cebiri, merkezi üzerinde bir merkez cebirdir.
3. Bir D bölümlü halkası üzerinde $M_n(D)$ matris halkası, D nin merkezi üzerinde bir merkez basit cebirdir.
4. Bir A cebiri basittir (merkezdir) ancak ve ancak A^0 ters cebiri basit (merkez) ise.

Teorem 4.7.6. Basit bir merkez cebirin bir basit cebir ile baz değişimi basittir.

İspat. K üzerinde A merkez basit ve B , basit cebir olsunlar. $A \otimes_K B$ nin basit olduğunu göstereceğiz. K üzerindeki D_A biricik merkez bölümlü cebiri için $A = M_n(D_A)$ olsun. $M_n(D_A) \otimes B \approx M_n(D_A \otimes_K B)$ dir (K -cebirler olarak). Fakat, eğer $C = D_A \otimes_K B$ basitse, $M_n(C)$ basittir. Böylece, $A = D_A = D$ nin bir merkez bölümlü K -cebir olduğunu farzedebiliriz.

B için bir $\{b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ K -bazını sabit tutarak alalım. Her $z \in D \otimes_K B$ nin sonlu sayıdaki λ ler dışında tüm λ ler için $d_\lambda = 0$ olmak üzere yegane $d_\lambda \in D$ için

$z = \sum_{\lambda \in \Lambda} d_\lambda \otimes b_\lambda$ olarak yazılabileceğini hatırlayalım. $\Lambda_z = \{\lambda \in \Lambda \mid d_\lambda \neq 0\}$, Λ nın bir sonlu alt cümlesi olsun.

Eğer mümkünse, I , $D \otimes_K B$ nin sıfır olmayan 2-terafı bir ideali olsun. Λ_{z_0} , $\Lambda(I^*) = \{\Lambda_z \mid z \in I \text{ ve } z \neq 0\}$ minimal eleman olacak şekilde, sıfır olmayan bir $z_0 \in I$ elemanı seçelim. $z_0 = \sum_{\lambda \in \Lambda_{z_0}} d_\lambda \otimes b_\lambda$ yazarak, en az bir $\lambda_0 \in \Lambda_{z_0}$ için $d_{\lambda_0} = 1$ olduğunu farzedebiliriz. (Eğer gerekliyse, D nin sıfır olmayan bir elemanı ile z_0 ı çarparak). I , $D \otimes_K B$ nin 2-terafı bir ideali olduğundan, $\forall d \in D$ için $z_1 = (d \otimes 1)z_0 - z_0(d \otimes 1) = \sum (dd_\lambda - d_\lambda d) \otimes b_\lambda \in I$ dir. $d_{\lambda_0} = 1$ olduğu için $\Lambda_{z_1} \subseteq \Lambda_{z_0}$ ve $\lambda_0 \notin \Lambda_{z_1}$ olduğu aşıkardır. Bu, $z_1 = 0$ olmadıkça, $\Lambda(I^*)$ da Λ_{z_0} in minimalliği ile çelişir. Bu taktirde her $\lambda \in \Lambda$ için, $dd_\lambda = d_\lambda d$ dir. Bu $\forall d \in D$ için doğrudur ve bu yüzden $d_\lambda \in K = \text{Centre}(D)$, yani, $z_0 = \sum_{\lambda \in \Lambda_{z_0}} 1 \otimes d_\lambda b_\lambda \in (1 \otimes B)$ dir. Başka bir deyişle, $z_0 \in I \cap (1 \otimes B)$ dir ki $1 \otimes B$ alt cebirinin 2-terafı bir idealidir. Fakat, $1 \otimes B$, B ye izomorfiktir. Bu ise, $z_0 = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise bir çelişkidir.

Tanım 4.7.7.

Bir A halkasının bir X alt cümlesinin *komutantı*, $X' = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in X\}$ alt halkasıdır.

Tanım 4.7.8. Bir A halkasının bir X alt cümlesinin *bikomutantı*, X in komutantının komutantı, yani, $X'' = \{a \in A \mid ax' = x'a, \forall x' \in X'\}$ alt halkasıdır. Örneğin, A nın komutantı, dolayısıyla (0) in bikomutantı, A nın merkezidir.

Teorem 4.7.9. $X \subseteq A$ ve $Y \subseteq B$, A ve B K -cebirlerinin alt cebirleri olsunlar. Bu taktirde $(X \otimes_K Y)' = X' \otimes_K Y'$ dir ki $X \otimes_K Y$ ve $X' \otimes_K Y'$, $A \otimes_K B$ nin alt cebirleri olarak tanımlanırlar.

İspat. $X' \otimes_K Y' \subseteq (X \otimes_K Y)'$ olduğu açıktır. Tersini görmek için, B için bir $\{b_\lambda \in B \mid \lambda \in \Lambda\}$ kümesi K -baz olsun ve herhangi $z \in (X \otimes_K Y)'$ için,

$z = \sum_{\lambda \in \Lambda} z_{\lambda} \otimes b_{\lambda}$ diyelim. Ayrıca, $\forall x \in X$ için, $(x \otimes 1)z = z(x \otimes 1)$ olması $xz_{\lambda} = z_{\lambda}x$ olmasını gerektirir. Benzer şekilde, $z \in A \otimes_K Y'$ dır ve bu nedenle, $z \in (X' \otimes_K B) \cap (A \otimes_K Y') = X' \otimes_K Y'$ dır.

Sonuçlar 4.7.10.

1. Her A ve B K -cebiri için, $Centre(A \otimes_K B) = Centre(A) \otimes_K Centre(B)$ dir.
2. Sonuç olarak, merkez basit cebirlerin tensör çarpımı, merkez basittir.
3. Ayrıca, $A \otimes_K A^0$ merkez basittir, eğer A merkezi basit ise.

Tanım 4.7.11. F ve F^* gibi iki cisim verilsin. Bir i izomorfizmi ile $i(F) \subset F^*$ oluyorsa, yani, F cismi, F^* nin bir alt cismine izomorf ise F^* cismine, F nin bir genişletilmiş denir.

Tanım 4.7.12. $\forall f(x) \in F[x]$ polinomunun F cisminde bir kökü var ise, F cismine *cebirsal kapalıdır* denir. Bu tanıma göre, F cisminin cebirsal kapalı olması için gerek ve yeter şart $F[x]$ deki her bir indirgenemez polinomun derecesinin 1 olmasıdır.

Teorem 4.7.13. Herbir F cisminin cebirsal kapalı bir F^* genişletilmiş vardır. Bu F^* genişletilmiş izomorfizme göre tektir ve F nin *cebirsal kapanışı* olarak adlandırılır.

Önerme 4.7.14. Kendi merkezi üzerindeki merkez basit bir cebirin boyu tam karedir.

İspat. A , yukarıda bahsedildiği gibi merkez basit bir K -cebiri olsun. D_A biricik merkez bölüm cebiri için $A = M_n(D_A)$ dır ve bu nedenle, $boy_K(A) = n^2 boy_K(D_A)$ dır. K cebirsal kapalı ise, bu taktirde sonlu boyutlu K -cebiri bölümü olan D_A için, $D_A = K$ bulunur ki bu teoremi ispatlar. Ama, K cebirsal kapalı değilse, $A \otimes_K \bar{K}$ merkez basit $\bar{K}$ -cebirini elde etmek için, K nin bir $\bar{K}$ cebirsal kapanışına bir A baz değişimi yapılır. Buradan, $boy_K(A) = boy_{\bar{K}}(A \otimes_K \bar{K})$ nin tam kare olduğu görülür.

Teorem 4.7.15. Herhangi bir merkez basit A cebiri için, a ile sol çarpımla verilen A nın K -endomorfizmi ℓ_a ve b ile sağ çarpım r_b olmak üzere, K -cebirlerinin doğal bir

$\varphi: A \otimes_K A^\circ \xrightarrow{\approx} \text{End}_K(A)$, $a \otimes b \rightarrow \ell_a r_b$ izomorfizması vardır. Ayrıca, merkez basit bir cebirin endomorfizma halkası merkez basittir.

İspat.

Bu, $\varphi_A: A \rightarrow \text{End}_K(A)$, $a \rightarrow \ell_a$ ve $\varphi_{A^\circ}: A^\circ \rightarrow \text{End}_K(A)$, $b \rightarrow r_b$ homomorfizmalarına uygulanan (3.6.19)(6) nın bir sonucudur ki burada aşağıdakiler sağlanmaktadır.

- i) $\ell_a \circ r_b = r_b \circ \ell_a$, $\forall a, b \in A$.
- ii) $A \otimes_K A^\circ$ basit olduğu için φ dönüşümü birebirdir.
- iii) $\text{boy}_K(A \otimes_K A^\circ) = \text{boy}_K(\text{End}_K(A)) = (\text{boy}_K(A))^2$ dir.

Sonuç 4.7.16. Eğer A , n boyutlu merkez basit bir cebirse, bu taktirde $A \otimes_K A^\circ$ merkez basittir, çünkü $A \otimes_K A^\circ \approx \text{End}_K(A) \approx M_n(K)$ dir.

Teoremi 4.7.17. (Skolem–Noether). Merkez basit bir K -cebiri A nın her K -otomorfizması bir iç otomorfizmadır.

Daha genel olarak, eğer B basit bir K -cebiri ve $f, g: B \rightarrow A$, K -cebirinin monomorfizmaları ise, bu taktirde $\forall x \in B$ için $g(x) = uf(x)u^{-1}$ olacak şekilde bir $u \in A$ birimi vardır.

İspat. D_A , A nın merkez bölüm cebiri olmak üzere $A = M_n(D_A)$ olsun. İspatı iki adımda yapacağız.

Adım 1. $D_A = K$ olsun. K^n in bir $M_n(K)$ -modül olduğunu biliyoruz. f ve g K -monomorfizmalar olmak üzere K^n üzerinde iki B -modül yapısı mevcuttur, yani, $bv = f(b)v$ ve $bv = g(b)v$ $\forall b \in B$ ve $v \in K^n$ dir. Ama bazı D bölüm K -cebirleri için $B = M_m(D)$ dir ve bu nedenle (4.5.4) ten K^n üzerindeki bu iki B -modül yapısı izomorfiktir, yani, $\forall b \in B$ ve $v \in K^n$ için, $g(b)u(v) = u(f(b)v)$ olacak şekilde bir $u: K^n \rightarrow K^n$ K -otomorfizması vardır, yani, u , $M_n(K)$ da $g = uf u^{-1}$ olacak şekilde bir birimdir.

Adım 2 . A keyfi olsun.

$F = f \otimes 1_{A^0} : B \otimes_K A^0 \rightarrow A \otimes_K A^0$ ve $G = g \otimes 1_{A^0} : B \otimes_K A^0 \rightarrow A \otimes_K A^0$, $n = \text{boy}_K(A)$ olmak üzere $B \otimes_K A^0$ basit cebirinden $A \otimes_K A^0$ merkez basit cebirine K -monomorfizmalar olsunlar. Fakat (Adım 1) den $G = uFu^{-1}$ olacak şekilde bir $u \in A \otimes_K A^0$ birimi vardır. Bu nedenle, $G(b \otimes a) = g(b) \otimes a = u(f(b) \otimes a)^{-1}$, $\forall b \in B$ ve $a \in A^0$ dır. Ayrıca, özel olarak $b=1$ alırsak, $a \in A^0$ için $1 \otimes a = u(1 \otimes a)u^{-1}$ olur, yani, $u \in (1 \otimes A^0)'$ dır.

Diğer taraftan, (4.7.16) dan, $(1 \otimes A^0)' = \{1\}' \otimes (A^0)' = A \otimes K = A \otimes 1 \approx A$ dır. Böylece, $\forall b \in B$ için $g(b) = uf(b)u^{-1}$ özelliği ile u nun A da bir birim olduğu görülür.

Teorem 4.7.18. B , bir merkez basit A cebirinin basit bir alt cebiri olsun. Bu taktirde

1. B nin B' komutantı basittir,
2. $B'' = B$ dır,
3. $\text{boy}_K(A) = \text{boy}_K(B) \cdot \text{boy}_K(B')$ dir.

İspat. $\text{End}_K(B) \approx M_m(K)$ merkez basit olacak şekilde $m = \text{boy}_K(B)$ olsun.

$\eta_A : A \rightarrow A \otimes_K \text{End}_K(B)$, $a \rightarrow a \otimes 1$ doğal monomorfizması, merkez basit $A \otimes_K \text{End}_K(B)$ cebirine B nin bir $\eta_B : \eta_A \setminus B$ monomorfizma kısıtlamasını verir.

Diğer taraftan, B nin elemanlarıyla sol çarpım bir $\ell : B \rightarrow \text{End}_K(B)$, $b \rightarrow \ell_b$ monomorfizmasını verir ki buradan da bir $\ell : B \rightarrow A \otimes_K \text{End}_K(B)$, $b \rightarrow 1 \otimes \ell_b$ monomorfizması elde edilir.

Skolem-Noether' den, $\ell = u\eta_B u^{-1}$ olmak üzere bir $u \in A \otimes_K \text{End}_K(B)$ birimi vardır. Bu nedenle, $f(B) = u(B \otimes 1)u^{-1}$ dir. Sonuç olarak,

$$(\ell(B))' = u(B \otimes 1)'u^{-1} = u(B' \otimes_K \text{End}_K(B))u^{-1}$$

dir. Diğer taraftan,

$(\ell(B))' = (1 \otimes \ell(B))' = \{1\}' \otimes (\ell(B))' = A \otimes_K B^\circ$ dir. Ayrıca, $A \otimes_K B^\circ \approx B' \otimes_K \text{End}_K(B)$ dır ki buradan $B' \otimes_K \text{End}_K(B)$ basit olduğu için B' de basittir. Boyutları eşitleyerek, (3) teki eşitliği elde ederiz. Son olarak, aynı boyut formülünü B yerine B' basit alt cebirine uygularsak, $\text{boy}_K(A) = \text{boy}_K(B') \cdot \text{boy}_K(B'')$ yi elde ederiz ki bu $\text{boy}_K(B) = \text{boy}_K(B'')$ anlamına gelir. Böylece, $B \subseteq B''$ olup eşitlik gerçekleşir.

Sonuç 4.7.19. Eğer B , merkez basit bir A cebirinin merkez basit bir altcebiri ise, bu taktirde B' merkez basit ve $B \otimes_K B' \rightarrow A$, $x \otimes y \rightarrow xy$ doğal dönüşümü bir izomorfizmadır.

4.8 Brauer Grubu

Tanım 4.8.1. İki merkez basit K -cebiri A ve B ye eğer bazı pozitif m ve n tamsayıları için $M_m(A)$ ve $M_n(B)$ matris cebirleri arasında K -cebirinin bir izomorfizması varsa *Brauer denktir* veya kısaca *denktir* denir ve $A \sim B$ ile gösterilir. Sembolik olarak eğer $M_m(A) \approx M_n(B)$ ise, $A \sim B$ yazılır.

Notlar 4.8.2. Aşağıdaki ifadeleri göstermek kolaydır.

- 1) $A \sim B$ dir ancak ve ancak, bazı $m, n \in \mathbb{N}$ için K -cebirler olarak $A \otimes_K M_m(K) \approx B \otimes_K M_n(K)$ ise,
- 2) " $\sim$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve aşıkarak izomorfik cebirler denktirler ama denk cebirlerin izomorfik olmasına gerek yoktur. Örnek olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $K \sim M_n(K)$ dir.
- 3) Her merkez basit A K -cebirleri için,
 - (i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A \sim M_n(A)$ dır.
 - (ii) $A \sim D_A$
 - (iii) $K \sim A \otimes_K A^\circ$
 dır.

- 4) (4.5.3) ile bağlantılı olarak, $A \sim B \Leftrightarrow D_A \sim D_B \Leftrightarrow D_A \approx D_B$ dır. Bu nedenle, herbir denklik sınıfı bir tek (izomorfizmalarla birlikte) merkez basit bölüm cebirine sahiptir.
- 5) Eğer, $i=1,2$ için $A_i \sim B_i$ ise, bu taktirde $A_1 \otimes_K A_2 \sim B_1 \otimes_K B_2$ dir.

Not 4.8.3. " $\sim$ " Brauer denkliği altında merkez basit K -cebirlerinin denklik sınıflarının cümlesi $Br(K)$ ile gösterilir. Merkez basit bir A K -cebirinin denklik sınıfı $[A]$ ile gösterilir.

$Br(K)$ cümlesi, merkez bölüm cebirlerinin tüm izomorfizma sınıflarının cümlesi ile aynıdır.

Tanım 4.8.4. Bir K cismi verilsin. Tüm sonlu boyutlu merkez basit K -cebirlerinin denklik sınıflarının $Br(K)$ cümlesi, (iyi tanımlı) çarpma olarak, tensör çarpımı altında bir abelyen gruptur. Bu gruba K nın Brauer grubu denir.

$Br(K)$ nın birim elemanı $[K]$ dır ve $[A]$ nın tersi $[A^\circ]$ dır. (Çünkü $[A][A^\circ] = [A \otimes_K A^\circ] = [M_n(K)] = [K]$ dır.)

$Br(K)$, K üzerinde merkez bölüm cebirlerinin izomorfizma sınıflarının bir cümlesi olarak basittir. Grup yapısını yukarıdaki gibi tanımlamak imkansızdır çünkü, merkez bölüm cebirlerinin tensör çarpımı, merkez basittir ama nadiren bir bölüm cebiridir.

Örnekler 4.8.5.

1. Eğer K cebirsel kapalı ise, bu taktirde $Br(K) = 1$ dir, çünkü K üzerinde K dan başka sonlu boyutlu bölüm cebiri yoktur. Ayrıca, $Br(\mathbb{C}) = 1$ dir.
2. H reel kuaterniyonların bölüm cebiri olmak üzere, $Br(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}], [H]\} \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dir.
3. F herhangi bir sonlu cisim olmak üzere $Br(F) = 1$ dir.

4.8.6. $\mathbb{Q}$ nun Brauer Grubu . $Br(\mathbb{Q})$ yu aşağıdaki gibi tanımlayacağız.

Bir p asal sayısı için, $\mathbb{Q}_p$, p -sel sayıların bir cismi olsun.

Teorem 4.8.7. Tüm p asalları için $Br(\mathbb{Q}_p) \approx \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dir. $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ olsun ve $1/2$ ile üretilen $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nin alt grubu ile $Br(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ yı tanımlayalım. P, ∞ (sonsuz asal) ile birlikte tüm pozitif asalların bir cümlesini gösterebiliriz. $\bigoplus_{p \in P} Br(\mathbb{Q}_p)$ grubunu gözönüne alalım. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ deki elemanlar olarak koordinatların toplamı ile elde edilen doğal dönüşüm,

$$\phi : \bigoplus_{p \in P} Br(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{\substack{p \in P \\ p \neq \infty}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

dır, öyle ki bu dönüşüm bir örten homomorfizmadır.

Teorem 4.8.8. $Br(\mathbb{Q}) = Ker\phi$ dir, yani, grupların tam bir sırası vardır:

$$0 \longrightarrow Br(\mathbb{Q}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in P} Br(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dır. $L \supseteq K$ bir cisim genişlemesi verilsin. L ye baz değişimi, grupların bir $br_{L/K} : Br(K) \rightarrow Br(L)$, $[A] \rightarrow [L \otimes_K A]$ doğal homomorfizmasını verir.

Tanım 4.8.9. Bir $L \supseteq K$ cisim genişlemesine, eğer merkez basit $L \otimes_K A$ L -cebiri, bazı $n \in \mathbb{N}$ için $M_n(L)$ ye izomorfikse, yani, $L \otimes_K A$, L ye Brauer – denk ya da $[A] \in Ker(br_{L/K})$ ise, merkez basit bir A K -cebiri için *ayırma cismi* denir. Ayrıca L , A yı ayırır veya A , L üstünde ayrıktır da diyebiliriz.

Örneğin, herhangi bir cebirsel kapalı cisim genişlemesi $L \supseteq K$, tüm merkez basit K -cebirleri için bir ayırma cismidir. Daha genel olarak, eğer $Br(L) = 1$ olmak üzere, $L \supseteq K$ ise, bu taktirde L tüm merkez basit K -cebirleri için bir ayırma cismidir.

Teorem 4.8.10. Sonlu boyutlu bir $L \supseteq K$ genişlemesi ve merkez basit bir A K -cebiri verilsin. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

1. L , A cismi için bir ayırma cismidir.
2. $B \sim A$ olacak şekilde merkez bir B K -cebiri vardır ve bir B bir maksimal komütatif althalka olarak L yi kapsar.

Tanım 4.8.11. Bir merkez basit A K -cebiri için bir $L \supseteq K$ ayırma cismine, eğer L bir Galois genişlemesi ise, yani, K nın normal ve ayrılabilir bir genişlemesi ise, A için bir Galois ayırma cismi denir.

Teorem 4.8.12. (Galois Ayırma Cisimlerinin Varlığı).

1. Her komütatif olmayan merkez bölüm D K - cebiri, K üzerinde ayrılabilir olmak üzere bir $L \neq K$ alt cismine kapsar.
2. Her merkez bölüm D K - cebiri, K üzerinde ayrılabilir olmak üzere, bir L maksimal alt cismine, yani, D için ayrılabilir bir ayırma cismine kapsar.
3. $L (\supseteq K)$ ayrılabilir cebirsel kapalı bir cisim olsun, yani, L nin L den başka sonlu boyutlu ayrılabilir genişlemeleri olmasın. Bu taktirde L , tüm merkez basit K -cebirleri için bir ayırma cismidir.
4. Merkez basit bir A K -cebiri, bir L / K Galois ayırma cismine sahiptir.

KAYNAKLAR

1. Beachy, J. A., Blair, W. D., 2006. Abstract Algebra. Waveland Pres, 305pp.
2. Cameron, P. J., 2008. Introduction to Algebra, Second Edition. Oxford University Press, New York, 350 pp.
3. Curtis, C. W., Reiner, I., 1966. Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Wiley- Interscience, New York, 685 pp.
4. Fraleigh, J. B., 2003. A First Course in Abstract Algebra, 7th Edition. Addison Wesley, 590 pp.
5. Gilbert, J., Gilbert, L., 2005. Elements of Modern Algebra, 6th Edition. Thomson Brooks/ Cole, 430 pp.
6. Hungerford, T. W., 1974. Algebra, Graduate Texts in Mathematics. New York, 502 pp.
7. Judson, T. W., 1997. Abstract Algebra Theory and Applications. VCU Mathematics Textbook Series, 357 pp.
8. Jacobson, N., 1974. Basic Algebra I, W. H. Freeman and Company, 472 pp.
9. Katznelson, Y., Katznelson, Y. R., 2008. A (Terse) Introduction to Linear Algebra. AMS, 215 pp.
10. Lang, S., 1984. Algebra, Addison Wesley, London, 228 pp.
11. Musuli, C., 2011. Representations of Finite Groups, Hindustan Book Agency, India, 237 pp.
12. Musuli, C., 1991. Introduction to Rings and Modules, Narosa Publishing House, New Delhi, 230 pp.
13. Çallıalp, F., Tekir, Ü., 2009. Değişmeli Halkalar ve Modüller. Birsen Yayınevi, İstanbul, 278 pp.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Elif ÇELİK

Uyruğu: Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri: 02.03.1987 Konya

Medeni Durumu: Bekar

Tel: +90 542 291 50 55

Email: likable_wizard@hotmail.com

Yazışma Adresi: Hürriyet Mah. Mehmet Akif Ersoy Cad. No:5/2

G.Antep/ İslahiye

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Formasyon Sertifikası	EÜ Eğitim Bilimleri Fakültesi	2014
Lisans	KSÜ Fen-Ed. F. Matematik	2011
Lise	O/PET Anadolu Lisesi, İslahiye	2005

YABANCI DİL

İngilizce