

**T. C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BEZİER EĞRİLERİ VE BEZİER YÜZEYLERİ

AYŞE YILMAZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

2009

**T. C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BEZİER EĞRİLERİ VE BEZİER YÜZEYLERİ

AYŞE YILMAZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından, “ 2228 Son Sınıf Lisans Öğrencileri İçin Yurt İçi Lisansüstü (Yüksek Lisans/ Doktora) Burs” programı ile desteklenmiştir.

2009

T. C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BEZİER EĞRİLERİ VE BEZİER YÜZEYLERİ

AYŞE YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ... / ... / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından ... not takdir edilerek
oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (1. Danışman).....
Prof. Dr. Kadri ARSLAN (2. Danışman).....
Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR.....
Prof. Dr. Veli KURT.....
Yrd. Doç. Dr. Şerafettin YALTKAYA.....

ÖZET

BEZİER EĞRİLERİ VE BEZİER YÜZEYLERİ

AYŞE YILMAZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

1. Danışman: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

2. Danışman Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Aralık 2009, 47 Sayfa

Bu tezin amacı Bezier yüzeylerinin eğriliklerinin ve şekil operatörünün kontrol noktaları cinsinden incelenmesidir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Bezier eğri ve yüzeyleri için temel tanım ve teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

İkinci bölümde, Bezier eğrilerinin tanımı ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Bezier eğrileri için De Casteljau ve bölme algoritmaları ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, Bezier yüzeylerinin tanımı ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, Bezier yüzeyi üzerinde bir noktanın eğriliklerinin ve şekil operatörünün kontrol noktaları cinsinden incelenmesinde önemli olan Bezier yüzeyleri için De Casteljau ve bölme algoritmaları ele alınmıştır.

Son bölümde, Bezier yüzeylerinde esas formlar ve eğrilikleri inceleyen İncesu ve Gürsoy (2004) çalışması temel alınarak Bezier yüzeylerinin eğrilikleri ve şekil operatörü araştırılmıştır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Bezier eğrisi, Bezier yüzeyi, De Casteljau algoritması, bölme algoritması, kontrol noktası

JÜRİ : Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (1. Danışman)

Prof. Dr. Kadri ARSLAN (2. Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Prof. Dr. Veli KURT

Yrd. Doç. Dr. Şerafettin YALTKAYA

ABSTRACT

BEZIER CURVES AND BEZIER SURFACES

AYŞE YILMAZ

M. Sc. Thesis in Mathematics

1. Adviser: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

2. Adviser: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

December 2009, 47 Pages

The aim of this thesis is to examine the curvatures and shape operator of Bezier surfaces.

This thesis consists of four chapter. In the first chapter fundamental definitions and theorems for Bezier curves and surfaces are given without proofs.

In the second chapter definition and some properties of Bezier curves are examined. Moreover De Casteljau and subdivision algorithms for Bezier curves are given.

In the third chapter definition and some properties of Bezier surfaces are examined. Moreover in this chapter, De Casteljau and subdivision algorithms for Bezier surfaces which are important to examine the curvatures and shape operator of Bezier surfaces in terms of control points are given.

In the last chapter, the study “fundamental forms and curvatures on Bezier surfaces” which is studied by İncesu and Gürsoy (2004) is basically used to discuss the curvatures and shape operator of Bezier surfaces in terms of control points.

KEY WORDS: Bezier curve, Bezier surface, De Casteljau algorithm, subdivision algorithm, control point

COMMITTEE: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (1.Adviser)

Prof. Dr. Kadri ARSLAN (2. Adviser)

Asst. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Prof. Dr. Veli KURT

Asst. Prof. Dr. Şerafettin YALTKAYA

ÖNSÖZ

Bezier eğrileri ve yüzeyleri, bilgisayar destekli geometrik tasarım (CAGD) için büyük bir önem taşımaktadır. Bezier eğrileri ve yüzeyleri ilk olarak 1958–1960 yılları arasında Fransız bir mühendis olan Pierre Etienne Bezier (1910, 1999) ve Fransız bir matematikçi olan Paul de Faget de Casteljau (1930) tarafından farklı matematiksel yaklaşımlar ile birbirlerinden bağımsız olarak geliştirilmiştir.

Pierre Etienne Bezier makine ve endüstri mühendisidir. Mezun olduktan sonra 1933 yılında Renault firmasında mekanik yöntem planlama bölümünde çalışmaya başlamıştır. 1960 yılından itibaren de araç gövde yöntem planlama bölümüne geçip, araç gövdelerinin tasarımı üzerinde çalışmıştır. Uzun yıllar bu firmada çalışan Bezier'in ismiyle anılır hale gelen polinom eğri ve yüzeylerinin Bernstein formunda ifadesiyle tamamen gelişen Bezier eğri ve yüzeyleri teorisi bu dönem içerisinde kurulmuştur.

Bu arada, 1958 yılında Citroen firmasına katılan de Casteljau, tamamen farklı bir yaklaşımla aynı kavramı; kendisinden sonra adını alan de Casteljau algoritmasını tanımlamıştır. Bezier eğri ve yüzeyleri kavramının gelişmesinde büyük katkı sağlayan bu algoritma Bernstein polinomlarının kullanımına denktir. De Casteljau'nun çalışmaları çok uzun bir süre Citroen firması tarafından gizli tutulmuştur. Hâlbuki De Casteljau, Bezier'in Bezier eğri ve yüzeylerinin Bernstein polinomları ile ifade edilebileceğini fark etmesinden çok önce De Casteljau algoritmasında bu polinomları kullanmıştır (Farin 2002, Laurent ve Sablonniere 2001, Rabut 2002, Rogers 2002).

Bu konuda çalışmamı öneren, bilgileri ile her zaman yardımcı olan ve yol gösteren değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (A.Ü.F.E.F.) ve Sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a (U.Ü.F.E.F.); manevi destekleriyle her zaman yanımda olan babam Bekir YILMAZ, annem Gülay YILMAZ ve ablam Esra YILMAZ'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. BEZİER EĞRİLERİ	4
2. 1. Bezier Eğri Parçasının Oluşturulması	4
2. 2. Bernstein Polinomlarının Özellikleri.....	11
2. 3. Bezier Eğrisinin Özellikleri.....	13
2. 4. Bernstein Polinomlarının Türevi.....	15
2. 5. Bezier Eğrisinin Parametrik DenklemininTürevi.....	17
2.6. Bezier Eğrisi İçin De Casteljaeu Algoritması.....	18
2.7. Bezier Eğrisi İçin Bölme Algoritması.....	20
3. BEZİER YÜZEYLERİ	22
3. 1. Bezier Yüzeyleri.....	22
3. 2. Bernstein Polinomlarının Özellikleri.....	23
3. 3. Bezier Yüzey Yamasının Türevi.....	24
3. 4. Bezier Yüzeyinin Bazı Özellikleri.....	27
3. 5. Bezier Yüzeyi Üzerindeki Bir Noktanın Hesaplanması.....	29
3. 6. Bezier Yüzeyi İçin Bölme Algoritması.....	32
4. BEZİER YÜZEYLERİNİN EĞRİLİKLERİ VE ŞEKİL OPERATÖRÜ.....	38
5. SONUÇ	46
6. KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

E^n	n boyutlu Öklid uzayı
IR	Reel sayılar
A_1, A_2	Afin uzaylar
V_1, V_2	Vektör uzayları
$\sum$	Toplam
$\in$	Elemanıdır
$\geq$	Büyük eşittir
$\leq$	Küçük eşittir
S	Şekil operatörü
K	Gauss eğriliği
H	Ortalama eğrilik
$\det(S(p))$	$(S(p))$ matrisinin determinanı
$Iz(S(p))$	$(S(p))$ matrisinin izi
E, F, G	Birinci temel formun katsayıları
e, f, g	İkinci temel formun katsayıları
P_i, P_{ij}	Kontrol noktaları
$B_i^n(t)$	Bernstein polinomu
$P(t)$	Bezier eğrisi
$P(u, v)$	Bezier yüzeyi
$P'(t)$	Bezier eğrisinin türevi
$P_u(u, v), P_v(u, v)$	Bezier yüzeyinin kısmi türevleri
$CH\{X\}$	X kümesinin konveks kabuğu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.1. P_0, P_1 kontrol noktalarının oluşturduğu lineer Bezier eğrisi.....	4
Şekil 2.1.2. $P_0(2,2), P_1(1,4)$ kontrol noktalarından geçen Bezier eğrisi.....	5
Şekil 2.1.3. P_0, P_1 ve P_2 kontrol noktalarının oluşturduğu kuadratik Bezier eğrisi.....	6
Şekil 2.1.4. P_0, P_1, P_2 ve P_3 kontrol noktalarının oluşturduğu kübik Bezier eğrisi.....	7
Şekil 2.1.5. 2., 3., 4. ve 5. dereceden Bernstein polinomları.....	8
Şekil 2.1.6. Düzlemsel kuadratik Bezier eğrisi.....	9
Şekil 2.1.7. Düzlemsel kübik Bezier eğrisi.....	10
Şekil 2.1.8. 3-D kübik Bezier eğrisi.....	10
Şekil 2.3.1. Bir kübik Bezier eğrisi konveks kabuk içinde yatar.....	15
Şekil 2.6.1. Bezier eğrisi için De Casteljau algoritması.....	18
Şekil 2.7.1. Bezier eğrisi için bölme algoritması.....	20
Şekil 2.7.2. Bir kübik Bezier eğrisi için sırasıyla $t = 0.4$ ve $t = 0.6$ parametre değerindeki bölme algoritmaları.....	21
Şekil 3.5.1. $Q_0(u_0)$ noktasının hesaplanması.....	29
Şekil 3.5.2. $Q_1(u_0)$ noktasının hesaplanması.....	30
Şekil 3.5.3. $Q_2(u_0)$ noktasının hesaplanması	30
Şekil 3.5.4. $Q_3(u_0)$ noktasının hesaplanması	31
Şekil 3.5.5. $P(u_0, v_0)$ noktasının hesaplanması	31
Şekil 3.6.1. Bezier yüzeyi için bölme algoritması.....	34

1. GİRİŞ

Bu bölümde, Bezier eğri ve yüzeylerinin bazı özelliklerinin ifadelerinde kullanılan tanımlar ile Bezier yüzeyinin şekil operatörü ve eğriliklerinin incelenmesinde kullanılan tanım ve teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Tanım 1.0.1. n -boyutlu Öklid uzayı E^n de bir yama (veya lokal yüzey), $U \subset E^2$ bir açık altkümesi olmak üzere,

$$X : U \subset E^2 \rightarrow E^n$$

biçiminde verilen diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Daha genel olarak , eğer

1. A' yi içeren bir U açık kümesi bulunabilir ve
2. $X|_U : U \rightarrow E^n$ diferensiyellenebilir ise herhangi $A \subset E^2$ için $X : A \rightarrow E^n$ dönüşümü bir yama olarak adlandırılır (Gray 1993).

Tanım 1.0.2. $X : U \subset E^2 \rightarrow E^n$ yamasında her $(u, v) \in U$ için jakobiye matrisinin rankı 2 ise bu yamaya regüler yama denir (Gray 1993).

Teorem 1.0.3. Bir $X : U \subset E^2 \rightarrow E^3$ yaması $(u_0, v_0) \in U$ noktasında regülerdir ancak ve ancak $X_u \times X_v$ vektörü (u_0, v_0) noktasında sıfırdan farklıdır (Gray 1993).

Tanım 1.0.4. $M \subset E^n$ altkümesinin her $p \in M$ için E^n de bir V komşuluğu varsa ve $X : U \rightarrow E^n$ ($V \cap M$ üzerine) dönüşümü,

1. X diferensiyellenebilirdir.
2. $X : U \rightarrow V \cap M$ bir homeomorfizmdir.
3. Herbir $X : U \rightarrow M$ dönüşümü regüler yamadır.

şartlarını sağlıyorsa $M \subset E^n$ ye bir regüler yüzey denir (Gray 1993).

Teorem 1.0.5. $X : U \subset E^2 \rightarrow E^n$ bir regüler yama olsun. Herhangi bir $q \in U$ için q noktasının bir U_q komşuluğu vardır öyle ki $X(U_q)$ bir regüler yüzeydir (Gray 1993).

Tanım 1.0.6. $X : U \subset E^2 \rightarrow E^n$ yaması verilsin.

$$E, F, G : U \rightarrow IR$$

$$E = \|X_u\|^2 = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \|X_v\|^2 = \langle X_v, X_v \rangle \quad (1.0.1)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar X yamasının birinci temel formunun katsayıları olarak adlandırılır (Gray 1993).

Tanım 1.0.7. $X : U \subset E^2 \rightarrow E^n$ regüler yaması verilsin. Bu taktirde;

$$e = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle$$

$$f = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle \quad (1.0.2)$$

$$g = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar X yamasının ikinci temel formunun katsayıları olarak adlandırılır (Gray 1993).

Tanım 1.0.8. $M \subset E^3$ bir regüler yüzey ve $N, p \in M$ noktasının bir komşuluğunda tanımlanan bir yüzey normali olsun. M nin her p noktasına

$$S_p : T_p M \rightarrow T_p M$$

$$v_p \rightarrow S_p(v_p) = -D_{v_p} N \quad (1.0.3)$$

biçiminde S_p dönüşümü karşılık getiren dönüşüme yüzeyin şekil operatörü denir ve S ile gösterilir. Burada

$$D : T_p(M) \times T_p^\perp(M) \rightarrow T_p(M)$$

dönüşümü iyi tanımlı olup $D_{v_p} N \in T_p(M)$ dir (Gray 1993).

Teorem 1.0.9. $X : U \rightarrow E^3$ regüler yaması verilsin. Bu taktirde X yamasının şekil operatörü $S, \{X_u, X_v\}$ bazına göre ifadesi

$$S_p(X_u) = \frac{eG - fF}{EG - F^2} X_u + \frac{fE - eF}{EG - F^2} X_v \quad (1.0.4)$$

$$S_p(X_v) = \frac{fG - gF}{EG - F^2} X_u + \frac{gE - fF}{EG - F^2} X_v$$

şeklindedir (Gray 1993).

(1.0.4) eşitlikleri yardımıyla şekil operatörü matrisi

$$S = \begin{bmatrix} \frac{eG - fF}{EG - F^2} & \frac{fE - eF}{EG - F^2} \\ \frac{fG - gF}{EG - F^2} & \frac{gE - fF}{EG - F^2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.0.10. $M \subset E^3$ bir regüler yüzey olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$K : M \rightarrow IR$$

$$p \rightarrow K(p) = \det(S(p)) \quad (1.0.5)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu, $K(p)$ değerine de M nin p noktasındaki Gauss eğriliği denir (Gray 1993).

Tanım 1.0.11. $M \subset E^3$ bir regüler yüzey olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$H : M \rightarrow IR$$

$$p \rightarrow H(p) = \frac{1}{2} I_z(S(p)) \quad (1.0.6)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(p)$ değerine de M nin p noktasındaki ortalama eğriliği denir (Gray 1993).

Teorem 1.0.12. $X : U \rightarrow E^3$ regüler yaması verilsin. X in Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \text{ ve } H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right) \quad (1.0.7)$$

dir (Gray 1993).

2. BEZİER EĞRİLERİ

Bu bölümde, Bezier eğrileri ile bu eğrileri elde ederken kullanılan Bernstein polinomları tanımlandı ve bazı özellikleri verildi. Ayrıca Bezier eğrileri için De Casteljau ve bölme algoritmaları ele alınmıştır.

2.1. Bezier Eğri Parçasının Oluşturulması

Tanım 2.1.1. E^n ($n = 2,3$) Öklid uzayında P_0, P_1 noktaları verildiğinde $\overline{P_0P_1}$ doğru parçası üzerindeki herhangi bir nokta $P_0^1(t)$ ile gösterilirse;

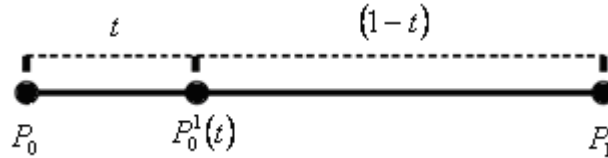
$$P(t) = P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \quad ; t \in [0,1] \quad (2.1.1)$$

denklemini bir lineer eğri parçasının bir parametrizasyonunu oluşturur. Burada;

$$B_0^1(t) = (1-t) \quad (2.1.2)$$

$$B_1^1(t) = t$$

1. dereceden Bernstein polinomları ve P_0, P_1 kontrol noktaları olarak adlandırılır (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005). Bakınız Şekil 2.1.1.

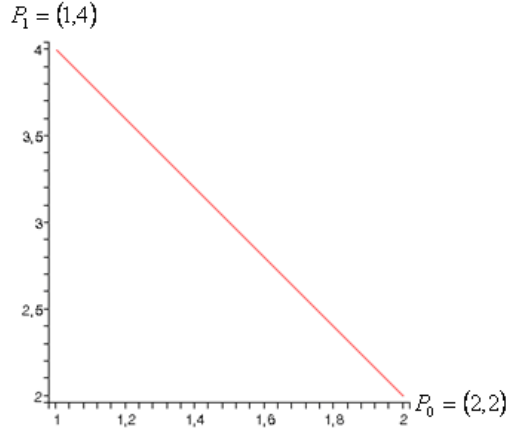


Şekil 2.1.1. P_0, P_1 kontrol noktalarının oluşturduğu lineer Bezier eğrisi

Örnek 2.1.2. E^2 de $P_0 = (2,2), P_1 = (1,4)$ kontrol noktalarından geçen $\overline{P_0P_1}$ doğru parçası;

$$\begin{aligned} P(t) = P_0^1(t) &= (1-t)(2,2) + t(1,4) \quad ; t \in [0,1] \\ &= (2-t, 2+2t) \end{aligned}$$

dir. Bakınız Şekil 2.1.2.



Şekil 2.1.2. $P_0(2,2)$, $P_1(1,4)$ kontrol noktalarından geçen Bezier eğrisi

Tanım 2.1.3. E^n ($n = 2,3$) Öklid uzayında P_0, P_1 ve P_2 noktaları verildiğinde $t \in [0,1]$ için;

$$\begin{aligned} P_0^1(t) &= (1-t)P_0 + tP_1 \\ P_1^1(t) &= (1-t)P_1 + tP_2 \\ P_0^2(t) &= (1-t)P_0^1(t) + tP_1^1(t) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

denklemleri yardımıyla

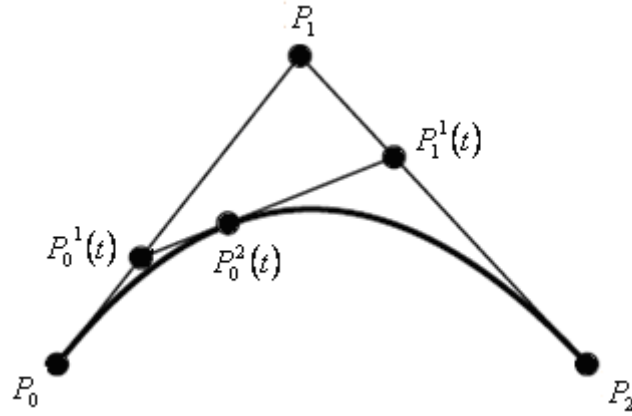
$$\begin{aligned} P(t) &= P_0^2(t) \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2 \\ &= \sum_{i=0}^2 P_i B_i^2(t) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

kuadratik Bezier eğrisi tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1-t)^2 \\ B_1^2(t) &= 2(1-t)t \\ B_2^2(t) &= t^2 \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

2. dereceden Bernstein polinomları ve P_0, P_1 ve P_2 kontrol noktaları olarak adlandırılır.

Bakınız Şekil 2.1.3.



Şekil 2.1.3. P_0 , P_1 ve P_2 kontrol noktalarının oluşturduğu kuadratik Bezier eğrisi

P_0 , P_1 ve P_2 kontrol noktalarının öngörölmüş sırayla doğru parçaları ile birleştirilmesi ile elde edilen üçgene kontrol poligonu denir (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005).

Tanım 2.1.4. E^n ($n = 2,3$) Öklid uzayında P_0, P_1, P_2 ve P_3 noktaları verildiğinde $t \in [0,1]$ için;

$$\begin{aligned}
 P_0^1(t) &= (1-t)P_0 + tP_1 \\
 P_1^1(t) &= (1-t)P_1 + tP_2 \\
 P_2^1(t) &= (1-t)P_2 + tP_3 \\
 P_0^2(t) &= (1-t)P_0^1(t) + tP_1^1(t) \\
 P_1^2(t) &= (1-t)P_1^1(t) + tP_2^1(t) \\
 P_0^3(t) &= (1-t)P_0^2(t) + tP_1^2(t)
 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
 P(t) &= P_0^3(t) \\
 &= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 \\
 &= \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t)
 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

kübik Bezier eğrisi tanımlanır. Burada;

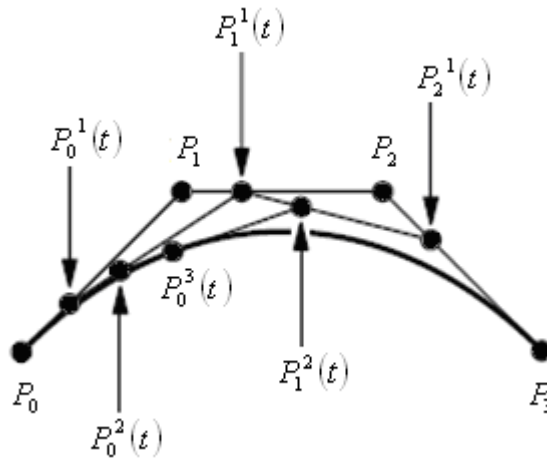
$$B_0^3(t) = (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = 3(1-t)^2 t \quad (2.1.8)$$

$$B_2^3(t) = 3(1-t)t^2$$

$$B_3^3(t) = t^3$$

3. dereceden Bernstein polinomları ve P_0, P_1, P_2 ve P_3 de kontrol noktaları olarak adlandırılır. Bakınız Şekil 2.1.4.



Şekil 2.1.4. P_0, P_1, P_2 ve P_3 kontrol noktalarının oluşturduğu kübik Bezier eğrisi

P_0, P_1, P_2 ve P_3 kontrol noktalarının öngörölmüş sırayla doğru parçaları ile birleştirilmesi ile elde edilen poligona kontrol poligonu denir (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005).

Tanım 2.1.5. E^n ($n = 2, 3$) Öklid uzayında $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ kontrol noktaları verildiğinde her $t \in [0, 1]$ için;

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \quad (2.1.9)$$

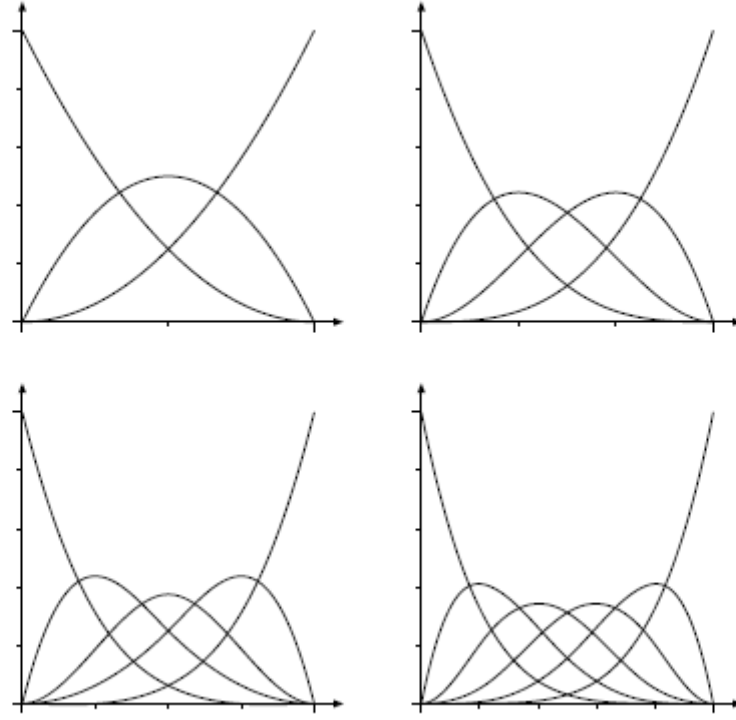
parametrik eşitliği bu kontrol noktalarının oluşturduğu Bezier eğrisi adını alır. Burada;

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad ; \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.1.10)$$

n . dereceden Bernstein polinomları olarak adlandırılır.

$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ kontrol noktalarının öngörölmüş sırayla oluşturulan doğru parçaları yardımıyla elde edilen poligona kontrol poligonu denir (David 2006, Marsh 2005).

Şekil 2.1.5. de sırasıyla 2., 3., 4. ve 5. dereceden Bernstein polinomları verilmiştir.

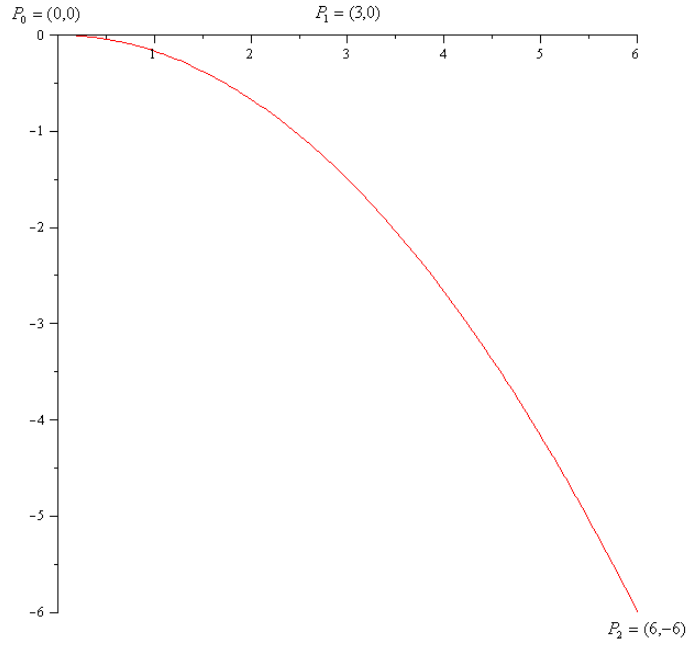


Şekil 2.1.5. 2., 3., 4. ve 5. dereceden Bernstein polinomları

Örnek 2.1.6. $P_0 = (0,0), P_1 = (3,0)$ ve $P_2 = (6,-6)$ kontrol noktalarının oluşturduğu düzlemsel kuadratik Bezier eğrisinin parametrik denklemi (2.1.4) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \sum_{i=0}^2 P_i B_i^2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t P_1 + t^2 P_2 \\
 &= (1-t)^2 (0,0) + 2(1-t)t (3,0) + t^2 (6,-6) \\
 &= (0,0) + (6t(1-t), 0) + (6t^2, -6t^2) \\
 &= (6t, -6t^2) \quad ; \quad t \in [0,1]
 \end{aligned}$$

dir. Bakınız Şekil 2.1.6.

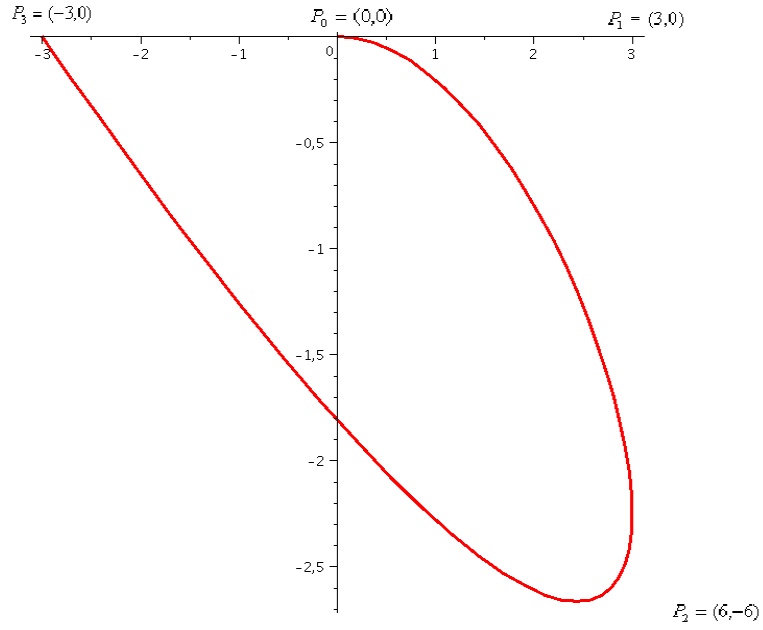


Şekil 2.1.6. Düzlemsel kuadratik Bezier eğrisi

Örnek 2.1.7. $P_0 = (0,0), P_1 = (3,0), P_2 = (6,-6)$ ve $P_3 = (-3,0)$ kontrol noktalarının oluşturduğu düzlemsel kübik Bezier eğrisinin parametrik denklemi (2.1.7) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \sum_{i=0}^3 P_i B_i^n(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 \\
 &= (1-t)^3 (0,0) + 3(1-t)^2 t (3,0) + 3(1-t)t^2 (6,-6) + t^3 (-3,0) \\
 &= (0,0) + (9t(1-t)^2, 0) + (18(1-t)t^2, -18(1-t)t^2) + (-3t^3, 0) \\
 &= (9t(1-t)^2 + 18(1-t)t^2 - 3t^3, -18(1-t)t^2) \\
 &= (9t - 12t^3, 18t^3 - 18t^2) \quad ; \quad t \in [0,1]
 \end{aligned}$$

dir. Bakınız Şekil 2.1.7.

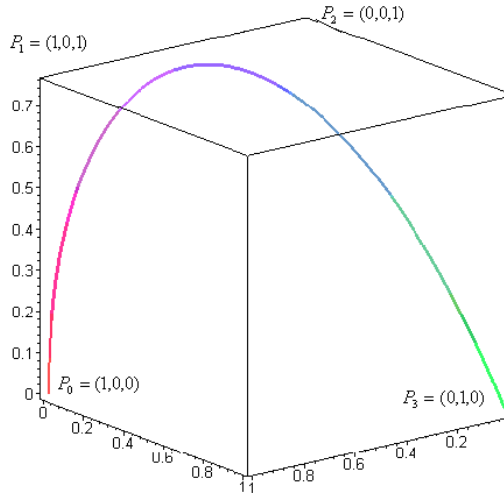


Şekil 2.1.7. Düzlemsel kübik Bezier eğrisi

Örnek 2.1.8. $P_0 = (1,0,0), P_1 = (1,0,1), P_2 = (0,0,1)$ ve $P_3 = (0,1,0)$ kontrol noktalarının oluşturduğu 3D kübik Bezier eğrisinin parametrik denklemi (2.1.7) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
 P(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3 \\
 &= (1-t)^3 (1,0,0) + 3(1-t)^2 t (1,0,1) + 3(1-t) t^2 (0,0,1) + t^3 (0,1,0) \\
 &= ((1-t)^3 + 3(1-t)^2 t, t^3, 3(1-t)^2 t + 3(1-t) t^2) \\
 &= (2t^3 - 3t^2 + 1, t^3, -3t^2 + 3t) \quad ; \quad t \in [0,1]
 \end{aligned}$$

dir. Bakınız Şekil 2.1.8.



Şekil 2.1.8. 3-D kübik Bezier eğrisi

2.2. Bernstein Polinomlarının Özellikleri:

2.2.1. Birimin parçalanması özelliği:

Bernstein polinomları $B_i^n(t)$ için

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

dir (Marsh 2005, Farin 1997).

Kanıt. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$1 = (t + (1-t))^n$$

dir. Ayrıca binom açılımından

$$1 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

dir. Böylece (2.1.10) eşitliği ile verilen Bernstein polinomu tanımından

$$1 = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

elde edilir. ■

2.2.2. Anti-negatiflik özelliği:

$t \in [0,1]$ için $B_i^n(t) \geq 0$ dır (Marsh 2005).

Kanıt. $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} > 0, t \geq 0$ ve $(1-t) \geq 0$ olduğundan $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \geq 0$

dır. ■

2.2.3. Simetri özelliği:

Bernstein polinomları $B_i^n(t)$ için;

$$B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1-t)$$

eşitliği geçerlidir (Marsh 2005).

Kanıt. n . dereceden bir Bernstein polinomu (2.1.10) eşitliği ile verilmişti. Böylece;

$$B_{n-i}^n(t) = \binom{n}{n-i} (1-t)^i t^{n-i} \quad (2.2.1)$$

ve

$$B_i^n(1-t) = \binom{n}{i} t^{n-i} (1-t)^i \quad (2.2.2)$$

dir. Bunula birlikte (2.2.1) ve (2.2.2) eşitliklerinin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir. Bu nedenle

$$B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1-t)$$

dir. ■

2.2.4. Rekürsiyon özelliği:

n . dereceden Bernstein polinomları $B_i^n(t)$ $i = 0, \dots, n$ için $(n-1)$. dereceden polinomlarla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_{i-1}^{n-1}(t) + tB_{i+1}^{n-1}(t) \quad (2.2.3)$$

Burada; $B_{-1}^{n-1}(t) = 0$ ve $B_n^{n-1}(t) = 0$ dır (Marsh 2005, Farin 1997).

Kanıt. n . dereceden bir Bernstein polinomu (2.1.10) eşitliği ile verilmişti. Buradan;

$$B_i^{n-1}(t) = \binom{n-1}{i} (1-t)^{n-1-i} t^i \quad (2.2.4)$$

ve

$$B_{i-1}^{n-1}(t) = \binom{n-1}{i-1} (1-t)^{n-i} t^{i-1} \quad (2.2.5)$$

elde edilir. Böylece $i = 0$ için, $B_{-1}^{n-1}(t)$ yardımıyla

$$B_0^n(t) = (1-t)^n = (1-t)B_0^{n-1}(t) + tB_{-1}^{n-1}(t)$$

bulunur. Benzer şekilde $i = n$ için, $B_n^{n-1}(t) = 0$ yardımıyla

$$B_n^n(t) = t^n = (1-t)B_n^{n-1}(t) + tB_{n-1}^{n-1}(t)$$

dir. Genel halde $1 \leq i \leq n$ için, (2.2.4) ve (2.2.5) eşitliklerini sırası ile $(1-t)$ ve t ile çarpılırsa Bernstein polinomu tanımından

$$\begin{aligned}
(1-t) \cdot B_i^{n-1}(t) + t \cdot B_{i-1}^{n-1}(t) &= (1-t) \cdot \binom{n-1}{i} (1-t)^{n-1-i} t^i + t \cdot \binom{n-1}{i-1} (1-t)^{n-i} t^{i-1} \\
&= \binom{n-1}{i} (1-t)^{n-i} t^i + \binom{n-1}{i-1} (1-t)^{n-i} t^i \\
&= (1-t)^{n-i} t^i \cdot \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] \\
&= (1-t)^{n-i} t^i \cdot \left[\frac{(n-1)!}{(n-1-i)!} + \frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} \right] \\
&= (1-t)^{n-i} t^i \cdot \left[\frac{(n-i)+i}{n} \right] \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \\
&= B_i^n(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

2.3. Bezier Eğrisinin Özellikleri:

2.3.1. Son nokta interpolasyon özelliği:

(2.1.9) eşitliği ile verilen $P(t)$ Bezier eğrisi

$t = 0$ için

$$P(0) = P_0$$

ve $t = 1$ için

$$P(1) = P_n$$

dir (David 2006, Marsh 2005).

2.3.2. Son nokta teğet özelliği:

(2.1.9) eşitliği ile verilen $P(t)$ Bezier eğrisi için

$$P'(0) = n(P_1 - P_0) \text{ ve } P'(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

dir (Marsh 2005).

2.3.3. Konveks kabuk özelliği:

Tanım 2.3.1. n -boyutlu reel Öklid uzayı IR^n de $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ noktalar kümesi verilsin. Bu X kümesinin konveks kabuğu

$$CH\{X\} = \left\{ \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve $CH\{X\}$ ile gösterilir (Marsh 2005).

(2.1.9) parametrik denkleminle verilen bir Bezier eğrisi $P(t)$ olmak üzere her $t \in [0,1]$ için

$$P(t) \in CH\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$$

dir (Marsh 2005).

Kanıt. Tanım 2.3.1. den $W = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ kontrol noktalarının konveks kabuğu her i ve $t \in [0,1]$ için

$$CH(W) = \left\{ \sum_{i=1}^n P_i B_i^n(t) : B_i^n(t) \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^n B_i^n(t) = 1 \right\}$$

şeklindedir. Gerçekten de; Tanım 2.3.1. deki konveks kabuğun tanımından $P(t)$ Bezier eğrisinin bazı pozitif λ_j sabitleri

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j = 1,$$

için $CH(W)$ nun elemanları

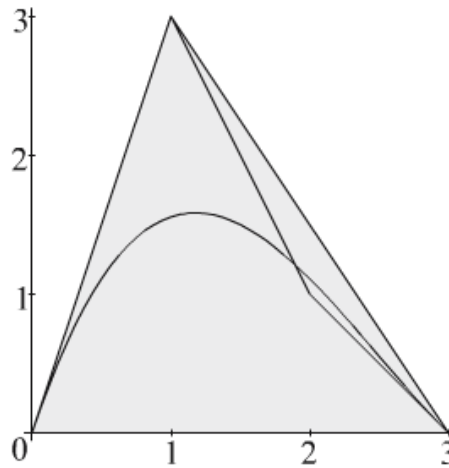
$$\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n$$

şeklinde yazılabildiği Bezier eğrisi tanımından bilinir. Bezier eğrilerinde, $\lambda_i = B_i^n(t)$ lere karşılık gelir. Buradan Bernstein polinomlarının pozitif tanımlılık ve birimin parçalanması özelliklerinden dolayı $t \in [0,1]$ için ;

$$B_i^n(t) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

olduğu bilinir. Böylece (2.1.9) eşitliği ile verilen $P(t)$ Bezier eğrisi konveks kabuk içinde yatar. ■

Şekil 2.3.1. de kübik bir Bezier eğrisinin konveks kabuk içinde yattığı gösterilmiştir.



Şekil 2.3.1. Bir kübik Bezier eğrisi konveks kabuk içinde yatar

2.4. Bernstein Polinomlarının Türevi:

Teorem 2.4.1. n . dereceden Bernstein polinomunun birinci ve ikinci türevi aşağıda verilmiştir:

$$B_i^{n'}(t) = \frac{(i - nt)}{t(1-t)} B_i^n(t) \quad (2.4.1)$$

ve

$$B_i^{n''}(t) = \left(\frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_i^n(t) \quad (2.4.2)$$

ya da

$$B_i^{n'}(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad (2.4.3)$$

şeklindedir (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005).

Kanıt. (2.1.10) eşitliği ile verilen Bernstein polinomuna çarpımın türevi kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned} B_i^{n'}(t) &= -\binom{n}{i}(n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i + \binom{n}{i}i(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= \binom{n}{i}(-(n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i + i(1-t)^{n-i}t^{i-1}) \\ &= \left(\frac{i-nt}{t(1-t)}\right)\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i \end{aligned}$$

elde edilir ki bu (2.4.1) eşitliğini verir. (2.4.2) eşitliği de ilk formülün türevinin alınması ile elde edilir:

$$\begin{aligned} B_i^{n'}(t) &= \left(\frac{i-nt}{t(1-t)}\right)'B_i^n(t) + \left(\frac{i-nt}{t(1-t)}\right)B_i^{n'}(t) \\ &= \left(\frac{2it-nt^2-i}{t^2(1-t)^2}\right)B_i^n(t) + \left(\frac{i-nt}{t(1-t)}\right)^2B_i^{n'}(t) \\ &= \left(\frac{i(i-1)-2i(n-1)t+n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2}\right)B_i^n(t) \end{aligned}$$

(2.4.3) eşitliğinin ispatı

$$\begin{aligned} B_i^{n'}(t) &= -\binom{n}{i}(n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i + \binom{n}{i}i(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= -\frac{n!}{(n-i)!i!}(n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i + \frac{n!}{(n-i)!i!}i(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= -\frac{n(n-1)!}{(n-i-1)!i!}(1-t)^{n-i-1}t^i + \frac{n(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!}(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= n\left(-\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-i-1}t^i + \binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-i}t^{i-1}\right) \\ &= n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. ■

2.5. Bezier Eğrisinin Parametrik Denkleminin Türevi:

Bezier eğrisinin parametrik denkleminin türevi Bernstein polinomlarının türevleri yardımıyla elde edilir.

Teorem 2.5.1. n . dereceden bir Bezier eğrisinin ilk türevi;

$$P'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i^{(1)} B_i^{n-1}(t)$$

dir. Burada;

$$P_i^{(1)} = n(P_{i+1} - P_i)$$

dir (David 2006, Marsh 2005).

Kanıt. Bernstein polinomlarının türevindeki (2.4.3) eşitliğinden ve

$$B_{-1}^{n-1}(t) = B_n^{n-1}(t) = 0$$

özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} P'(t) &= \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot n \cdot (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \\ &= \sum_{i=0}^n n \cdot P_i B_{i-1}^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^n n \cdot P_i B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n n \cdot P_i B_{i-1}^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} n \cdot P_i B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadenin toplamaları yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} P'(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} n P_{i+1} B_i^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} n P_i B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} n (P_{i+1} - P_i) B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

şeklinde istenilen sonuç elde edilir. ■

$P(t)$ Bezier eğrisin ikinci ve daha yüksek mertebeden türevleri ilk türev formülünün tekrarlanan türevlerinin alınmasıyla elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuçlar anlamlıdır.

Sonuç 2.5.2. n . dereceden bir Bezier eğrisinin ikinci türevi;

$$P''(t) = \sum_{i=0}^{n-2} P_i^{(2)} B_i^{n-2}(t)$$

dir. Burada;

$$P_i^{(2)} = n(n-1)(P_{i+1}^{(1)} - P_i^{(1)}) = n(n-1)(P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i)$$

dir (Marsh 2005).

Sonuç 2.5.3. n . dereceden bir Bezier eğrisinin r . türevi;

$$P^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} P_i^{(r)} B_i^{n-r}(t)$$

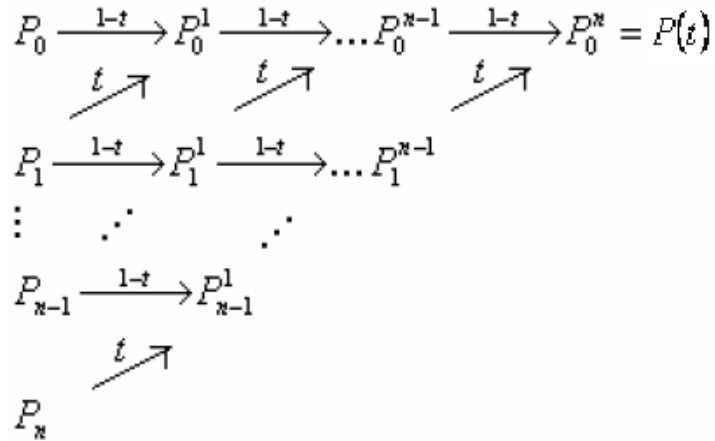
dir. Burada;

$$P_i^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r-1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} P_{i+j}$$

dir (Marsh 2005).

2.6. Bezier Eğrisi için De Casteljau Algoritması:

(2.1.9) eşitliği ile verilen Bezier eğrisi kontrol noktaları yardımıyla aşağıdaki şekilde oluşturulur.



Şekil 2.6.1. Bezier eğrisi için De Casteljau algoritması

Bu ifade Bezier eğrisi için De Casteljau algoritmasını verir. De Casteljau algoritması, bir Bezier eğrisi üzerindeki bir noktanın hesaplanması için bir metod sağlar. Aşağıdaki teorem De Casteljau algoritmasını ifade eder.

Teorem 2.6.1. $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ kontrol noktalarının oluşturduğu bir Bezier eğrisi $P(t)$ olsun. Bu takdirde

$$P_i^j(t) = (1-t)P_i^{j-1}(t) + tP_{i+1}^{j-1}(t) \quad ; \quad i = 0, \dots, n-j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.6.1)$$

ve $P_i^0 = P_i$ olmak üzere $P(t) = P_0^n$ ($0 \leq t \leq 1$) dir (Marsh 2005).

Kanıt. (2.2.3) eşitliği ile verilen Bernstein polinomunun rekürsion özelliğinden De Casteljau algoritması ortaya çıkar. Böylece;

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n P_i ((1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i+1}^{n-1}(t)) \\ &= \sum_{i=0}^n (1-t)P_i B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^n tP_{i+1} B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. $B_n^{n-1}(t) = 0$ ve $B_{-1}^{n-1}(t) = 0$ olduğundan dolayı;

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)P_i B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^n tP_i B_{i-1}^{n-1}(t) \quad (2.6.2)$$

olur. (2.6.2) eşitliğinin ikinci toplamında i yerine $i+1$ yazılarak yeniden düzenlenirse

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)P_i B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} tP_{i+1} B_i^{n-1}(t)$$

elde edilir. $i = 0, \dots, n-1$ için $P_i^1 = (1-t)P_i + tP_{i+1} = (1-t)P_i^0 + tP_{i+1}^0$ alınırsa;

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i^1 B_i^{n-1}(t)$$

olur. Son ifadedeki $P(t)$, $P_0^1, \dots, P_{n-1}^1$ kontrol noktaları ile $(n-1)$. dereceden bir Bezier eğrisini ifade eder. Bu son ifadeye benzer bir tartışma uygulanırsa;

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-2} P_i^2 B_i^{n-2}(t)$$

olur. Burada; $i = 0, \dots, n-2$ için $P_i^2 = (1-t)P_i^1 + tP_{i+1}^1$ dir. Böylece

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-j} P_i^j B_i^{n-j}(t)$$

dir. Burada; $i = 0, \dots, n-j$ için $P_i^j = (1-t)P_i^{j-1} + tP_{i+1}^{j-1}$ dir.

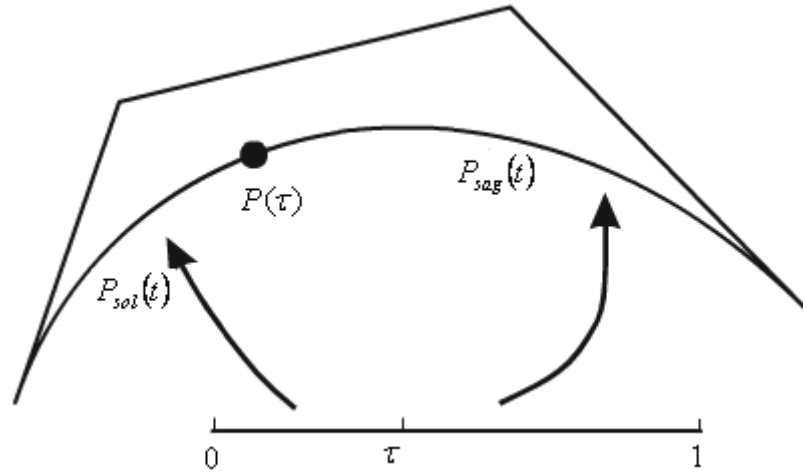
Özel olarak, $j = n$ için son eşitlik;

$$P(t) = \sum_{i=0}^0 P_i^n B_i^0(t) = P_0^n$$

şeklini alır. ■

2.7. Bezier Eğrisi İçin Bölme Algoritması:

$[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı bir Bezier eğrisi iki yeni Bezier eğri parçasına ayrıştırılabilir. Bezier eğrisi $t = \tau$ parametre değerinde iki yeni eğri parçasına ayrılsın. Bu iki yeni Bezier eğrisinden ilkinin tanım aralığı $0 \leq t \leq \tau$ ve ikincisinin tanım aralığı da $\tau \leq t \leq 1$ olup sırasıyla $P_{sol}(t)$ ve $P_{sag}(t)$ ile gösterilsin. $P_{sol}(t)$ ve $P_{sag}(t)$ eğrileri $[0,1]$ kapalı aralığında Bezier formunda yazılabilirler. Bu iki yeni Bezier eğrisi birlikte düşünüldüğünde elde edildikleri orjinal Bezier eğrisini oluşturur (Marsh 2005).

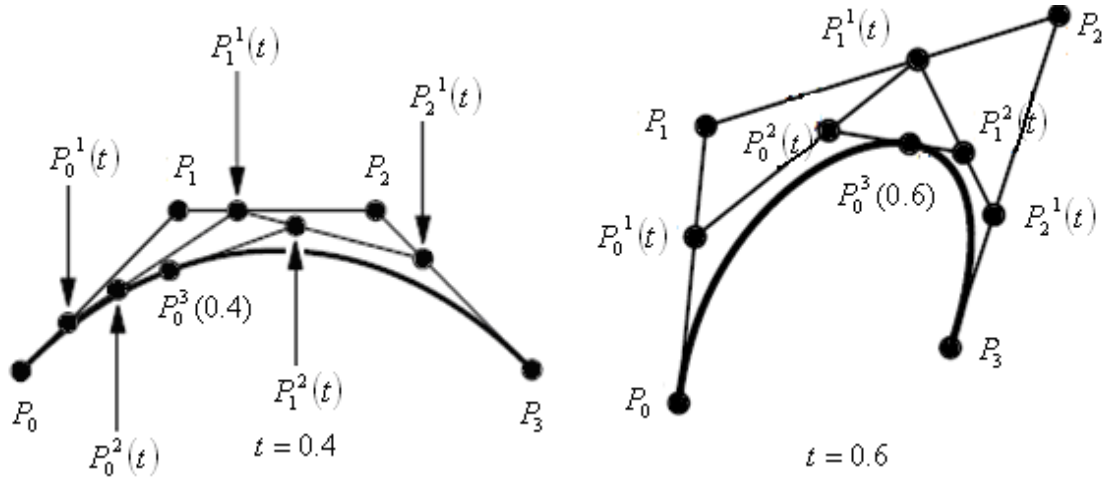


Şekil 2.7.1. Bezier eğrisi için bölme algoritması

Aşağıdaki teoremden bir Bezier eğrisine bölme algoritmasının uygulanışı ele alınmıştır.

Teorem 2.7.1. (2.1.9) eşitliği ile verilen bir $P(t)$ Bezier eğrisi için, $t = \tau$ parametre değerinde bölme algoritması sonucu elde edilen iki eğri parçasının kontrol noktaları ; $P_{sol}(t)$ için $P_0^0, P_0^1, \dots, P_0^n$ ve $P_{sag}(t)$ için $P_n^0, P_{n-1}^1, \dots, P_0^n$ dir. Burada; P_i^j ler $t = \tau$ değerinde (2.6.1) eşitliği ile verilen De Casteljau algoritması ile hesaplanır (Marsh 2005).

Örnek 2.7.2. Kübik bir Bezier eğrisi için $P_{sol}(t)$ in kontrol noktaları $P_0^0, P_0^1, P_0^2, P_0^3$ ve $P_{sag}(t)$ nin kontrol noktaları $P_3^0, P_2^1, P_1^2, P_0^3$ dir. Şekil 2.7.2. de kübik bir Bezier eğrisi için sırasıyla $t = 0.4$ ve $t = 0.6$ parametre değerinde bölme algoritması gösterilmiştir (Marsh 2005).



Şekil 2.7.2. Bir kübik Bezier eğrisi için sırasıyla $t = 0.4$ ve $t = 0.6$ parametre değerindeki bölme algoritmaları

3. BEZİER YÜZEYLERİ

Bu bölümde, Bezier yüzeylerinin bazı temel özellikleri verildi. Ayrıca Bezier yüzeyleri üzerindeki eğrilerin De Casteljau ve bölme algoritmaları ele alındı.

3.1. Bezier Yüzeyleri

Tanım 3.1.1. $B_i^n(u)$ ve $B_j^m(v)$ sırasıyla u ve v parametrelerine bağlı ve dereceleri n ve m olan Bernstein polinomları olsun. Böylece $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ olmak üzere E^3 Öklid uzayında P_{ij} kontrol noktalarının oluşturduğu bir Bezier yüzeyi, $(u, v) \in [0,1] \times [0,1] = U$ için

$$P: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E^3$$
$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \quad (3.1.1)$$

yamasıyla tanımlanır (Marsh 2005).

Tanım 3.1.2. Bir Bezier yüzeyi için n ve m sırasıyla Bernstein polinomlarının dereceleri olsun. Eğer $n = m = 3$ ise yüzey ‘bi-kübik’ ; $n = m = 2$ ise ‘bi-kuadratik’ ve $n = m = 1$ ise ‘bi-lineer’ olarak adlandırılır. Eğer $n \neq m$ ise yüzey için $n \times m$ dereceden bir yüzeydir denir (Sederberg 2007)

Tanım 3.1.3. (3.1.1) parametrelendirmesiyle verilen Bezier yüzeyinin iki parmetresinden birinin sabitlenmesiyle, örneğin $u = u_0$ alınarak;

$$P(u_0, v) = \sum_{j=0}^m \left[\sum_{i=0}^n P_{ij} B_i^n(u_0) \right] B_j^m(v)$$
$$= \sum_{j=0}^m Q_j(u_0) B_j^m(v) \quad (3.1.2)$$

eğri denklemi elde edilir. Burada;

$$Q_j(u_0) = \sum_{i=0}^n P_{ij} B_i^n(u_0)$$

dır. Böylece u parametresinin sabit tutulmasıyla elde edilen yüzey üzerindeki bu eğriye v parametrelili eğri denir. Benzer şekilde $v = v_0$ alınarak;

$$\begin{aligned} P(u, v_0) &= \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(v_0) \right] B_i^n(u) \\ &= \sum_{i=0}^n Q_i(v_0) B_i^n(u) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

bir başka eğri denklemi elde edilir. Burada;

$$Q_i(v_0) = \sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(v_0)$$

dir. Böylece v parametresinin sabit tutulmasıyla elde edilen yüzey üzerindeki eğriye u parametrelili eğri denir. Bu nedenle, bir Bezier yüzeyi u ve v parametrelili eğrilerin ailesi olarak düşünülebilir (Sederberg 2007).

Tanım 3.1.1. den anlaşılacağı üzere $n \times m$. dereceden Bezier yüzeyi üzerinde $(n+1) \times (m+1)$ kontrol noktası vardır. Bu kontrol noktaları $(n+1)$ ‘satırlar’ ve $(m+1)$ ‘sütunlar’ olarak adlandırılır (Sederberg 2007).

3.2. Bernstein Polinomlarının Özellikleri

3.2.1. Birimin parçalanması özelliği:

$B_i^n(u)$ ve $B_j^m(v)$ Bernstein polinomları

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) = 1 \quad (3.2.1)$$

özelliğini sağlar (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005).

Kanıt. $1 \cdot 1 = (u + (1-u))^n (v + (1-v))^m$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-u)^{n-i} u^i \right) \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (1-v)^{m-j} v^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) \end{aligned}$$

dir. ■

3.2.2. Anti negatiflik Özelliği:

$$(u, v) \in [0,1] \times [0,1] \text{ için;} \\ B_i^n(u)B_j^m(v) \geq 0 \quad (3.2.2)$$

dır (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005).

Kanıt. $\binom{n}{i} > 0$, $u \geq 0$ ve $(1-u) \geq 0$ olduğundan $B_i^n(u) = \binom{n}{i}(1-u)^{n-i}u^i \geq 0$ dır. Benzer şekilde; $\binom{m}{j} > 0$, $v \geq 0$ ve $(1-v) \geq 0$ olduğundan $B_j^m(v) = \binom{m}{j}(1-v)^{m-j}v^j \geq 0$ elde edilir. Böylece $B_i^n(u)B_j^m(v) \geq 0$ dır. ■

3.3. Bezier Yüzey Yamasının Türevi:

(3.1.1) yaması

$$P(u, v) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n P_{ij} B_i^n(u) \right) B_j^m(v)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece u parametresine göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} P_u(u, v) &= \sum_{j=0}^m \left(n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{(i+1)j} - P_{ij}) B_i^{n-1}(u) \right) B_j^m(v) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m n (P_{(i+1)j} - P_{ij}) B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \end{aligned}$$

elde edilir. Bezier yamasının $P_u(u, v)$ birinci dereceden u parametresine göre kısmi türevinin alındığını belirtmek için, Bezier eğrisinin parametrik denkleminin türevinde olduğu gibi, $n(P_{(i+1)j} - P_{ij})$ ifadesini $P_{ij}^{(1,0)}$ ile gösterilirse u parametresine göre kısmi türev

$$P_u(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m P_{ij}^{(1,0)} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \quad (3.3.1)$$

biçiminde bir gösterime sahip olur. Benzer şekilde, $P(u, v)$ yamasının v parametresine göre kısmi türevi;

$$P_v(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} P_{ij}^{(0,1)} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \quad (3.3.2)$$

olacaktır. Burada; $P_{ij}^{(0,1)} = m(P_{i(j+1)} - P_{ij})$ dir. Elde edilen kısmi türevlerin tekrar u ve v parametrelerine göre türevlerini almaya devam ederek, yüksek dereceden türevlere ulaşılır. Bu şekilde elde edilen $P_u(u, v)$ ve $P_v(u, v)$ türevlerini sırasıyla $P^{(1,0)}(u, v)$ ve $P^{(0,1)}(u, v)$ ile gösterilsin. Bu gösterime göre $P_{uv}(u, v)$ ikinci dereceden türev ifadesi de $P^{(1,1)}(u, v)$ ile gösterilmiş olacaktır (Gürsoy ve İncesu 2004, Marsh 2005).

Teorem 3.3.1. Bezier yamasının u parametresine göre α . dereceden, v parametresine göre de β . dereceden türevi alınır;

$$P^{(\alpha, \beta)}(u, v) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial u^\alpha \partial v^\beta} P(u, v) = \sum_{i=0}^{n-\alpha} \sum_{j=0}^{m-\beta} P_{ij}^{(\alpha, \beta)} B_i^{n-\alpha}(u) B_j^{m-\beta}(v)$$

elde edilir. Burada;

$$P_{ij}^{(\alpha, \beta)} = \frac{n!}{(n-\alpha)!} \frac{m!}{(m-\beta)!} \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{s=0}^{\beta} (-1)^k (-1)^s \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{s} P_{(i+\alpha-k)(j+\beta-s)}$$

dir (Gürsoy ve İncesu 2004, Marsh 2005).

Teorem 3.3.2. Bezier yamasının $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki ikinci mertebeden türevlerinin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir.

- i) $P_{uu}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = n(n-1)(P_{20} - 2P_{10} + P_{00})$,
- ii) $P_{uv}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = nm(P_{11} - P_{01} - P_{10} + P_{00})$,
- iii) $P_{vv}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = m(m-1)(P_{02} - 2P_{01} + P_{00})$,

dır (Gürsoy ve İncesu 2004).

Kanıt. i) $P_{uu}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^m [n(n-1)(P_{(i+2)j} - 2P_{(i+1)j} + P_{ij})] B_i^{n-2}(u) B_j^m(v)$ dir. Böylece

$(u, v) = (0, 0)$ alınır

$$\begin{aligned}
P_{uu}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} &= \sum_{i=0}^{n-2} \left(\sum_{j=0}^m [n(n-1)(P_{(i+2)j} - 2P_{(i+1)j} + P_{ij})] B_j^m(0) \right) B_i^{n-2}(0) \\
&= n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (P_{(i+2)0} - 2P_{(i+1)0} + P_{i0}) B_i^{n-2}(0) \\
&= n(n-1) \left(\sum_{i=0}^{n-2} P_{(i+2)0} B_i^{n-2}(0) - 2 \sum_{i=0}^{n-2} P_{(i+1)0} B_i^{n-2}(0) + \sum_{i=0}^{n-2} P_{i0} B_i^{n-2}(0) \right) \\
P_{uu}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} &= n(n-1)(P_{20} - 2P_{10} + P_{00})
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $P_{uv}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} [nm(P_{(i+1)(j+1)} - P_{(i+1)j} - P_{i(j+1)} + P_{ij})] B_j^{m-1}(v) \right) B_i^{n-1}(u)$ dir. Böylece

$(u, v) = (0, 0)$ alınır

$$\begin{aligned}
P_{uv}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} [nm(P_{(i+1)(j+1)} - P_{(i+1)j} - P_{i(j+1)} + P_{ij})] B_j^{m-1}(0) \right) B_i^{n-1}(0) \\
&= nm \sum_{i=0}^{n-1} (P_{(i+1)1} - P_{(i+1)0} - P_{i1} + P_{i0}) B_i^{n-1}(0) \\
&= nm \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_{(i+1)1} B_i^{n-1}(0) - \sum_{i=0}^{n-1} P_{(i+1)0} B_i^{n-1}(0) - \sum_{i=0}^{n-1} P_{i1} B_i^{n-1}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} P_{i0} B_i^{n-1}(0) \right) \\
P_{uv}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} &= nm(P_{11} - P_{01} - P_{10} + P_{00})
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $P_{vv}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-2} [m(m-1)(P_{i(j+2)} - 2P_{i(j+1)} + P_{ij})] B_i^n(u) B_j^{m-2}(v)$ dir. Böylece

$(u, v) = (0, 0)$ alınır

$$\begin{aligned}
P_{vv}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{m-2} [m(m-1)(P_{i(j+2)} - 2P_{i(j+1)} + P_{ij})] B_j^{m-2}(0) \right) B_i^n(0) \\
&= m(m-1) \sum_{i=0}^n (P_{i2} - 2P_{i1} + P_{i0}) B_i^n(0) \\
&= m(m-1) \left(\sum_{i=0}^n P_{i2} B_i^n(0) - 2 \sum_{i=0}^n P_{i1} B_i^n(0) + \sum_{i=0}^n P_{i0} B_i^n(0) \right) \\
P_{vv}(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} &= m(m-1)(P_{02} - 2P_{01} + P_{00})
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

3.4. Bezier Yüzeyinin Bazı Özellikleri:

3.4.1. Son nokta interpolasyon özelliği:

$0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ olmak üzere (3.1.1) eşitliği ile verilen Bezier yüzey yaması

$$(u, v) = (0, 0) \text{ da } P(0, 0) = P_{00},$$

$$(u, v) = (1, 0) \text{ da } P(1, 0) = P_{n0},$$

$$(u, v) = (0, 1) \text{ de } P(0, 1) = P_{0m},$$

$$(u, v) = (1, 1) \text{ de } P(1, 1) = P_{nm},$$

dir (Marsh 2005).

3.4.2. Son nokta teğet özelliği:

(3.1.1) yamasıyla verilen Bezier yüzeyi için $(u, v) = (0, 0)$ ve $(u, v) = (1, 1)$ noktalarındaki kısmi türevler aşağıdaki gibidir (İncesu ve Gürsoy 2004):

$$P_u(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = n(P_{10} - P_{00}),$$

$$P_u(u, v) \Big|_{(u,v)=(1,1)} = n(P_{nm} - P_{(n-1)m}),$$

$$P_v(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = m(P_{01} - P_{00}),$$

$$P_v(u, v) \Big|_{(u,v)=(1,1)} = m(P_{nm} - P_{n(m-1)}).$$

Kanıt. (3.1.1) eşitliği ile verilen Bezier yüzey yamasının u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak, bu kısmi türevlerin $(0, 0)$ ve $(1, 1)$ noktalarındaki değerleri bulunur. u parametresine göre kısmi türev alınırsa

$$\begin{aligned} P_u(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m n(P_{(i+1)j} - P_{ij}) B_j^m(0) \right) B_i^{n-1}(0) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m P_{(i+1)j} B_j^m(0) - \sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(0) \right) B_i^{n-1}(0) \end{aligned}$$

$$= n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{(i+1)0} - P_{i0}) B_i^{n-1}(0)$$

$$P_u(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} = n(P_{10} - P_{00})$$

ve

$$\begin{aligned} P_u(u, v) \Big|_{(u,v)=(1,1)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m n(P_{(i+1)j} - P_{ij}) B_j^m(1) \right) B_i^{n-1}(1) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m P_{(i+1)j} B_j^m(1) - \sum_{j=0}^m P_{ij} B_j^m(1) \right) B_i^{n-1}(1) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{(i+1)m} - P_{im}) B_i^{n-1}(1) \end{aligned}$$

$$P_u(u, v) \Big|_{(u,v)=(1,1)} = n(P_{nm} - P_{(n-1)m})$$

elde edilir. Benzer şekilde v parametresine göre kısmi türev alınarak ve bu kısmi türevlerin $(0,0)$ ve $(1,1)$ de aldığı değerler bulunarak son iki eşitlik elde edilir. ■

3.4.3. Konveks kabuk özelliği:

(3.1.1) yamasıyla verilen $P(u, v)$ Bezier yüzeyi bir konveks kabuk içinde yatar (Marsh 2005).

Kanıt. Tanım 3.2.1. yardımıyla P_{ij} ($0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$) kontrol noktalarının konveks kabuğu her i, j için ve $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ için

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) : B_i^n(u) B_j^m(v) \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) = 1 \right\}$$

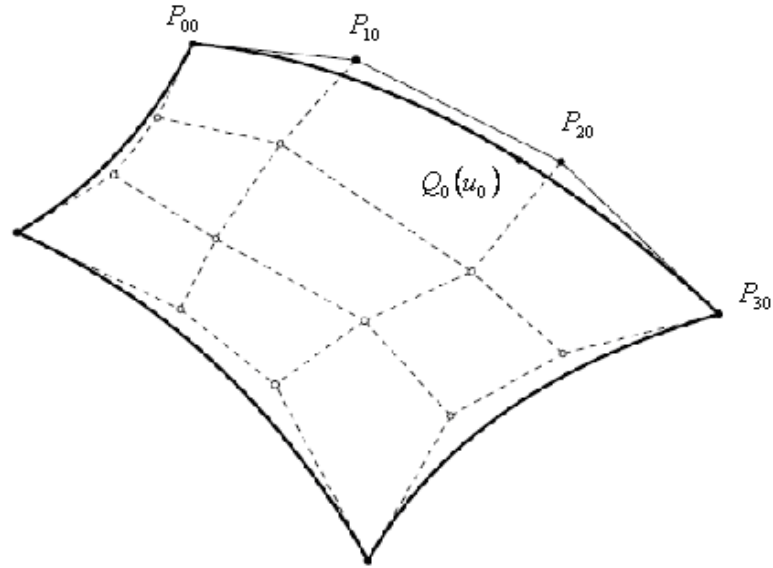
şeklinde tanımlanır. Bezier eğrilerinin konveks kabuk özelliğinden yararlanılarak, benzer şeyler Bezier yüzeyleri için söylenebilir, fakat Bezier yüzeylerinde $\lambda_{ij} = B_i^n(u) B_j^m(v)$ lere karşılık gelir ve Bernstein polinomlarının, $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ için sırasıyla (3.2.2) ve (3.2.1) eşitlikleri ile verilen pozitif tanımlılık ve birimin parçalanması özelliklerini sağladığı Bernstein polinomlarının özelliklerinden anlaşılır.

Bu nedenle Bezier yüzeyinin konveks kabuk içinde yattığı sonucuna ulaşılır. ■

3.5. Bezier Yüzeyi Üzerindeki Bir Noktanın Hesaplanması

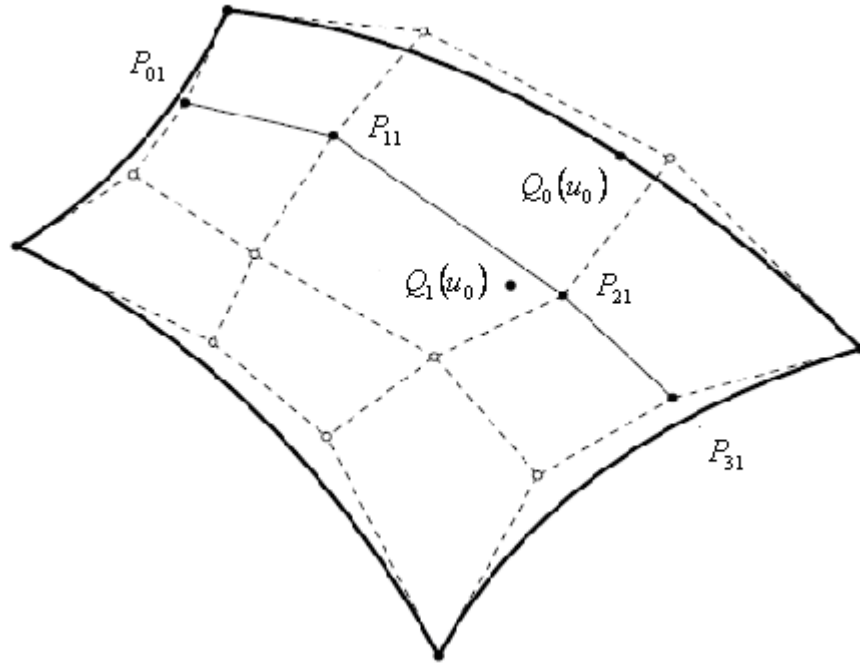
Bir önceki bölümde (3.1.2) denkleminde $u = u_0$ alınmasıyla elde edilen $Q_0(u_0), \dots, Q_m(u_0)$ kontrol noktalarının oluşturduğu Bezier yüzeyinin $P(u_0, v)$ eğrisinin bir Bezier eğrisi olduğu gösterildi. Bu bölümde ise (3.1.2) denklemindeki $Q_j(u_0)$ ın hesaplanması ile Bezier yüzeyi üzerindeki bir (u_0, v_0) noktasının elde edilişi 3×3 tipinde bir Bezier yüzeyi için gösterilecektir.

İlk olarak $Q_0(u_0)$ noktası, $P_{00}, P_{10}, P_{20}, P_{30}$ kontrol noktaları tarafından tanımlanan Bezier eğrisi üzerinde bir nokta olarak hesaplanır.



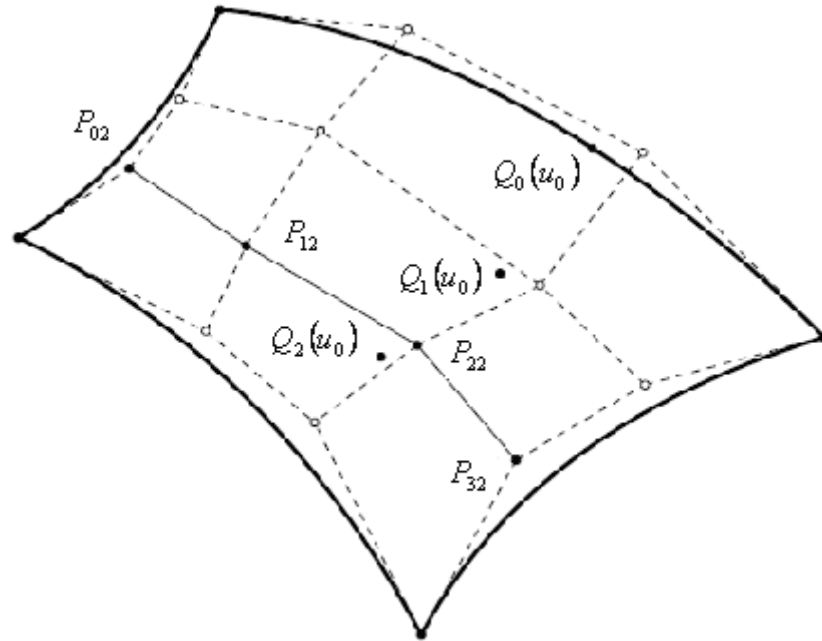
Şekil 3.5.1. $Q_0(u_0)$ noktasının hesaplanması

İkinci olarak, $Q_1(u_0)$ noktası $P_{01}, P_{11}, P_{21}, P_{31}$ kontrol noktaları tarafından tanımlanan Bezier eğrisi üzerinde bir nokta olarak hesaplanır.



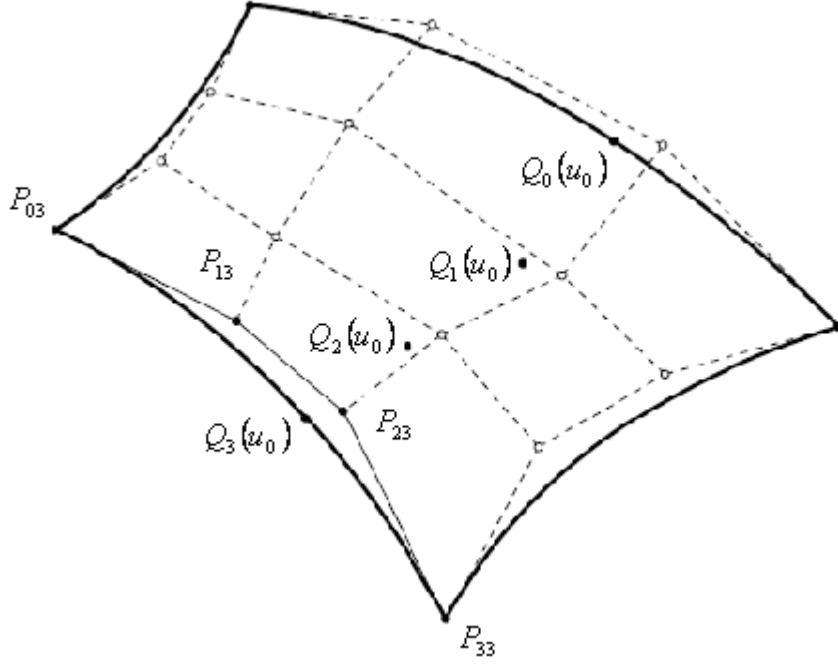
Şekil 3.5.2. $Q_1(u_0)$ noktasının hesaplanması

Üçüncü olarak, $Q_2(u_0)$ noktası $P_{02}, P_{12}, P_{22}, P_{32}$ kontrol noktaları tarafından tanımlanan Bezier eğrisi üzerinde bir nokta olarak hesaplanır.



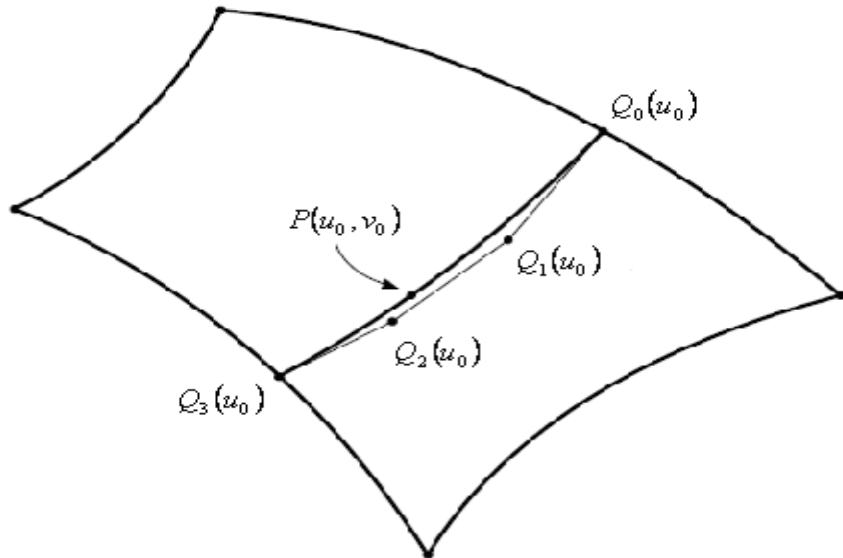
Şekil 3.5.3. $Q_2(u_0)$ noktasının hesaplanması

Son olarak da $Q_3(u_0)$ noktası $P_{03}, P_{13}, P_{23}, P_{33}$ kontrol noktaları tarafından tanımlanan Bezier eğrisi üzerinde bir nokta olarak hesaplanır.



Şekil 3.5.4. $Q_3(u_0)$ noktasının hesaplanması

Tüm bu hesaplamalardan sonra $P(u_0, v_0)$ noktası $Q_0(u_0), Q_1(u_0), Q_2(u_0)$ ve $Q_3(u_0)$ kontrol noktaları ile tanımlanan Bezier eğrisi üzerindeki bir nokta olarak hesaplanır (Joy 1996).



Şekil 3.5.5. $P(u_0, v_0)$ noktasının hesaplanması

Tanım 3.5.1. (3.1.1) yamasıyla verilen bir Bezier yüzeyinin

$$\begin{array}{ccccc} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0m} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n0} & P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nm} \end{array}$$

kontrol noktalarının oluşturduğu sisteme kontrol net denir.

(3.1.1) yamasıyla verilen bir $P(u, v)$ Bezier yüzeyi üzerindeki bir noktanın hesaplanması için De Casteljau algoritması da kullanılabilir. Bunun için ilk olarak P_{ij} kontrol noktalarının oluşturduğu kontrol netin sütunlarında u yönünde De Casteljau algoritmasının n tane adımı gereklidir:

$$P_{ij}^{r,s}(u, v) = (1 - u)P_{ij}^{r-1,s}(u, v) + uP_{(i+1)j}^{r-1,s}(u, v) \quad (3.5.1)$$

İkinci olarak kontrol netin satırlarında v yönünde De Casteljau algoritmasının m tane adımı gereklidir:

$$P_{ij}^{rs}(u, v) = (1 - v)P_{ij}^{r(s-1)}(u, v) + vP_{i(j+1)}^{r(s-1)}(u, v) \quad (3.5.2)$$

Bu $n+m$ adımın sırası önemli değildir. Yani; bir yöndeki de Casteljau algoritması ile diğer yöndeki de Casteljau algoritmasının sırası değiştirilebilir. O halde (3.5.1) ve (3.5.2) ile verilen de Casteljau algoritmaları birleştirilirse

$$P_{ij}^{rs}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ij}^{(r-1)(s-1)}(u, v) & P_{i(j+1)}^{(r-1)(s-1)}(u, v) \\ P_{(i+1)j}^{(r-1)(s-1)}(u, v) & P_{(i+1)(j+1)}^{(r-1)(s-1)}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buna direk De Casteljau algoritması adımı denir (Gravesen 2002).

3.6. Bezier Yüzeyi İçin Bölme Algoritması

Kontrol noktaları

$$\begin{array}{ccccc} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0m} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n0} & P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nm} \end{array}$$

yardımıyla verilen $n \times m$ tipindeki bir Bezier yüzeyine verilen bir $(0,0) \neq (u_0, v_0) \in [0,1] \times [0,1]$ noktasında bölme algoritması uygulandığında

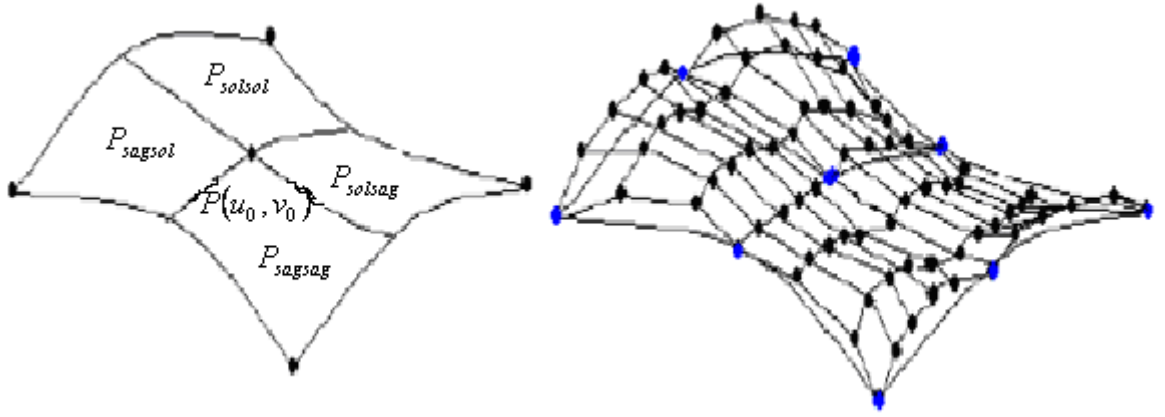
(u_0, v_0) noktasına karşılık gelen $P(u_0, v_0)$ noktasında yüzey; $P_{solsol}, P_{solsag}, P_{sagsol}, P_{sagsag}$ olmak üzere 4 ayrı yüzeye parçalanır. Bu elde edilen $P_{solsol}, P_{solsag}, P_{sagsol}, P_{sagsag}$ yüzey parçaları yine $n \times m$ tipinde birer Bezier yüzeyleridir.

Bir $P(u, v)$ Bezier yüzeyinin, $P(u_0, v_0)$ parametre değerinde bölünmesi, kontrol noktalarına De Casteljau algoritmasının ilk önce v yönünde (satırlar için De Casteljau algoritması) ve daha sonra u yönünde (sütunlar için De Casteljau) veya tam tersi şekilde uygulanması ile bulunur. v yönünde algoritmayı uygulamak, kontrol netin herbir satırına v parametrelili bir Bezier eğrisi olarak davranarak, $v = v_0$ değerinde De Casteljau algoritması uygulamak demektir. Böylece $P(u, v)$ Bezier yüzeyi $P(u, v_0)$ parametre eğrisi boyunca iki Bezier altyüzeyine ($P_{solsol} + P_{sagsol}, P_{solsag} + P_{sagsag}$) bölünür. Benzer şekilde, $u = u_0$ değerinde De Casteljau algoritması kontrol netin sütunlarına uygulanır. Sonuç olarak, yüzeyler parametre eğrisi boyunca bölündü ve verilen orjinal Bezier yüzeyi dört Bezier altyüzeyine bölünmüş ($P_{solsol}, P_{sagsol}, P_{solsag}, P_{sagsag}$) olur. Bu algoritma aynı zamanda Bezier yüzeyi üzerindeki $P(u_0, v_0)$ noktasının hesaplanmasında uygulanabilir.

Yüzeye (u_0, v_0) noktasında De Casteljau algoritması uygulanarak bulunan $P(u_0, v_0)$ noktası elde edilen 4 yüzey parçasının herbirinin de ortak noktasıdır. Bu $P(u_0, v_0)$ noktası; P_{solsol} Bezier yüzeyinin P_{nm} noktası, P_{solsag} Bezier yüzeyinin P_{n0} noktası, P_{sagsol} Bezier yüzeyinin P_{0m} noktası, P_{sagsag} Bezier yüzeyinin P_{00} noktasıdır. Buna göre son nokta interpolasyon özelliğinden;

$$\begin{aligned} P(u_0, v_0) &= P_{solsol}(1,1) = P_{nm} \\ P(u_0, v_0) &= P_{solsag}(1,0) = P_{n0} \\ P(u_0, v_0) &= P_{sagsol}(0,1) = P_{0m} \\ P(u_0, v_0) &= P_{sagsag}(0,0) = P_{00} \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

dır (İncesu ve Gürsoy 2004, Marsh 2005).



Şekil 3.6.1. Bezier yüzeyi için bölme algoritması

Örnek 3.6.1. Bir $P(u, v)$ yamasıyla verilen Bezier yüzeyi;

$$\begin{array}{lll} P_{00}(2,3,0) & P_{01}(2,6,3) & P_{02}(2,10,0) \\ P_{10}(6,2,1) & P_{11}(6,6,4) & P_{12}(6,9,1) \\ P_{20}(10,2,0) & P_{21}(10,6,3) & P_{22}(10,10,0) \end{array}$$

kontrol noktaları ile tanımlansın. Bu yüzeye, $P(0.5, v)$ ve $P(u, 0.25)$ parametre eğrileri boyunca De Casteljau algoritması uygulandı ve $P(0.5, 0.25)$ noktası hesaplandı.

Çözüm. İlk olarak, kontrol noktalarının her bir satırına $v = 0.25$ ile (3.6.2) eşitliği ile verilen satırlar için De Casteljau algoritması uygulanırsa;

Birinci satır:

$$\begin{array}{lll} P_{00}(2,3,0) & P_{01}(2,6,3) & P_{02}(2,10,0) \\ P_{00}^{01}(2.0,3.75,0.75) & P_{01}^{01}(2.0,7.0,2.25) & \\ P_{00}^{02}(2.0,4.5625,1.125) & & \end{array}$$

İkinci satır:

$$\begin{array}{lll} P_{10}(6,2,1) & P_{11}(6,6,4) & P_{12}(6,9,1) \\ P_{10}^{01}(6.0,3.0,1.75) & P_{11}^{01}(6.0,6.75,3.25) & \\ P_{10}^{02}(6.0,3.9375,2.125) & & \end{array}$$

Üçüncü satır:

$$\begin{array}{lll} P_{20}(10,2,0) & P_{21}(10,6,3) & P_{22}(10,10,0) \\ P_{20}^{01}(10.0,3.0,0.75) & P_{21}^{01}(10.0,7.0,3.25) & \\ P_{20}^{02}(10.0,4.0,1.125) & & \end{array}$$

dır.

Sonuç olarak, $P(u,v)$ yamasıyla verilen Bezier yüzeyi $P(u,0.25)$ parameter eğrisi boyunca iki Bezier altyüzeyine ($P_{solsol} + P_{sagsol}, P_{solsag} + P_{sagsag}$) bölünür.

İlkinin ($P_{solsol} + P_{sagsol}$) kontrol noktaları:

$$\begin{array}{lll} P_{00}(2,3,0) & P_{01}(2.0,3.75,0.75) & P_{02}(2.0,4.5625,1.125) \\ P_{10}(6,2,1) & P_{11}(6.0,3.0,1.75) & P_{12}(6.0,3.9375,2.125) \\ P_{20}(10,2,0) & P_{21}(10.0,3.0,0.75) & P_{22}(10.0,4.0,1.125) \end{array}$$

şeklindedir.

İkincisinin ($P_{solsag} + P_{sagsag}$) kontrol noktaları:

$$\begin{array}{lll} P_{00}(2.0,4.5625,1.125) & P_{01}(2.0,7.0,2.25) & P_{02}(2,10,0) \\ P_{10}(6.0,3.9375,2.125) & P_{11}(6.0,6.75,3.25) & P_{12}(6,9,1) \\ P_{20}(10.0,4.0,1.125) & P_{21}(10.0,7.0,2.25) & P_{22}(10,10,0) \end{array}$$

şeklindedir.

İkinci olarak, kontrol noktalarının her bir sütununa $u = 0.5$ ile (3.6.1) eşitliği ile verilen sütunlar için De Casteljau algoritması uygulandı. Önce ilk elde ettiğimiz ($P_{solsol} + P_{sagsol}$) Bezier altyüzeyine uygulanır:

birinci sütun:

$$\begin{array}{lll} (2,3,0) & (6,2,1) & (10,2,0) \\ (4,2.5,0.5) & (8,2,0.5) & \\ (6,2.25,0.5) & & \end{array}$$

ikinci sütun:

$$\begin{array}{lll} (2,3.75,0.75) & (6,3,1.75) & (10,3,0.75) \\ (4,3.375,1.25) & (8,3,1.25) & \\ (6,3.1875,1.25) & & \end{array}$$

üçüncü sütun:

(2.0,4.5625,1.125) (6.0,3.9375,2.125) (10.0,4.0,1.125)
(4.0,4.25,1.625) (8.0,3.96875,1.625)
(6.0,4.109375,1.625)

dır.

Sonuç olarak, ilk elde edilen ($P_{solsol} + P_{sagsol}$) Bezier altyüzeyi $P(0.5,0.25)$ parameter eğrisi boyunca iki Bezier altyüzeyine (P_{solsol} ve P_{sagsol}) bölünür.

İlkinin (P_{solsol}) kontrol noktaları:

(2,3,0) (2.0,3.75,0.75) (2.0,4.5625,1.125)
(4,2.5,0.5) (4,3.375,1.25) (4.0,4.25,1.625)
(6,2.25,0.5) (6,3.1875,1.25) (6.0,4.109375,1.625)

şeklindedir.

İkincisinin (P_{sagsol}) kontrol noktaları:

(6,2.25,0.5) (6,3.1875,1.25) (6.0,4.109375,1.625)
(8,2,0.5) (8,3,1.25) (8.0,3.96875,1.625)
(10,2,0) (10,3,0.75) (10,4,1.125)

şeklindedir

Daha sonra bu algoritma ikinci olarak elde edilen ($P_{solsag} + P_{sagsag}$) Bezier altyüzeyine uygulanır:

.birinci sütun:

(2.0,4.5625,1.125) (6.0,3.9375,2.125) (10.0,4.0,1.125)
(4.0,4.25,1.625) (8.0,3.96875,1.625)
(6.0,4.109375,1.625)

ikinci sütun:

(2,7,2.25) (6.0,6.75,3.25) (10,7,2.25)
(4.0,6.875,2.75) (8.0,6.875,2.75)
(6.0,6.875,2.75)

üçüncü sütun:

$$\begin{array}{ccc} (2,10,0) & (6,9,1) & (10,10,0) \\ (4,0,9.5,0.5) & (8,0,9.5,0.5) & \\ (6,0,9.5,0.5) & & \end{array}$$

dır.

Sonuç olarak, ikinci elde edilen ($P_{solsag} + P_{sagsag}$) Bezier altyüzeyi $P(0.5,0.25)$ parameter eğrisi boyunca iki Bezier altyüzeyine (P_{solsag} ve P_{sagsag}) bölünür.

İlkinin (P_{solsag}) kontrol noktaları:

$$\begin{array}{ccc} (2,4.5625,1.125) & (2,7,2.25) & (2,10,0) \\ (4,4.25,1.625) & (4,4.25,1.625) & (4,6.875,2.75) \\ (6,4.109375,1.625) & (6,6.875,2.75) & (6,9.5,0.5) \end{array}$$

şeklindedir.

İkincisinin (P_{sagsag}) kontrol noktaları:

$$\begin{array}{ccc} (6,4.109375,1.625) & (6,6.875,2.75) & (6,9.5,0.5) \\ (8,3.96875,1.625) & (8,6.875,2.75) & (8,9.5,0.5) \\ (10,4,1.125) & (10,7,2.25) & (10,10,0) \end{array}$$

şeklindedir.

Bu taktirde Beizer yüzeyleri için son nokta interpolasyon özelliğinden

$$P(0.5,0.25) = P_{solsol}(1,1) = (6,4.109375,1.625),$$

$$P(0.5,0.25) = P_{solsag}(1,0) = (6,4.109375,1.625),$$

$$P(0.5,0.25) = P_{sagsol}(0,1) = (6,4.109375,1.625),$$

$$P(0.5,0.25) = P_{sagsag}(0,0) = (6,4.109375,1.625),$$

dir (Marsh 2005).

4. BEZİER YÜZEYLERİNİN EĞRİLİKLERİ VE ŞEKİL OPERATÖRÜ

Bu bölümde regüler Bezier yüzey yamalarının kontrol noktaları cinsinden eğrilikleri ve şekil operatörü ele alınmıştır.

(3.3.1) ve (3.3.2) eşitliklerinin Bezier yüzey yamalarının u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri olduğu bilinir.

$P_{ij} \in E^3$ noktasının koordinatları $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ ile gösterilsin. Bu taktirde $P(u, v)$ yüzey yaması

$$P(u, v) = \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m x_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m y_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m z_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \right)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $P(u, v)$ nin u ve v cinsinden kısmi türevlerinin vektörel çarpımı

$$P_u(u, v) \times P_v(u, v)$$

yüzeyin bir normal vektörü olup

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (x_{(i+1)j} - x_{ij}) B_j^m(u) B_i^{n-1}(v) & n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (y_{(i+1)j} - y_{ij}) B_j^m(v) B_i^{n-1}(u) & n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (z_{(i+1)j} - z_{ij}) B_j^m(v) B_i^{n-1}(u) \\ m \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (x_{i(j+1)} - x_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) & m \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (y_{i(j+1)} - y_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) & m \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (z_{i(j+1)} - z_{ij}) B_i^n(v) B_j^{m-1}(u) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (y_{(i+1)j} - y_{ij}) B_j^m(v) B_i^{n-1}(u) & n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (z_{(i+1)j} - z_{ij}) B_j^m(v) B_i^{n-1}(u) \\ m \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (y_{i(j+1)} - y_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) & m \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (z_{i(j+1)} - z_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \end{vmatrix} \cdot i$$

$$- \begin{vmatrix} n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (x_{(i+1)j} - x_{ij}) B_j^m(v) B_i^{n-1}(u) & n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (z_{(i+1)j} - z_{ij}) B_j^m(v) B_i^{n-1}(u) \\ m \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (x_{i(j+1)} - x_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) & m \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (z_{i(j+1)} - z_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \end{vmatrix} \cdot j$$

$$+ \left| \begin{array}{cc} n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (x_{(i+1)j} - x_{ij}) B_j^m(v) B_i^{n-1}(u) & n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (y_{(i+1)j} - y_{ij}) B_j^m(v) B_i^{n-1}(u) \\ m \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (x_{i(j+1)} - x_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) & m \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (y_{i(j+1)} - y_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \end{array} \right| k$$

şeklinde hesaplanır.

Yukarıdaki eşitlikteki üç determinantın birden sıfır olması durumunda $P_u(u, v) \times P_v(u, v)$ normal vektörü sıfıra eşit olur. Teorem 1.0.3. den

$$P_u(u, v) \times P_v(u, v) \neq 0$$

için $P(u, v)$ yaması regülerdir.

Teorem 4.0.1. Bezier yüzeyinin birinci temel formunun E, F, G katsayılarının $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki değerlerinin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir (Gürsoy ve İncesu 2004):

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad E &= \langle P_u(u, v), P_u(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = n^2 \|P_{10} - P_{00}\|^2, \\ \text{ii)} \quad F &= \langle P_u(u, v), P_v(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = nm \langle P_{10} - P_{00}, P_{01} - P_{00} \rangle, \\ \text{iii)} \quad G &= \langle P_v(u, v), P_v(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = m^2 \|P_{01} - P_{00}\|^2. \end{aligned}$$

Kanıt. Tanım 1.0.6. ve Bezier yüzeyinin son nokta teğet özelliğinden

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad E &= \langle P_u(u, v), P_u(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} \\ &= \langle n(P_{10} - P_{00}), n(P_{10} - P_{00}) \rangle \\ &= n^2 \langle (P_{10} - P_{00}), (P_{10} - P_{00}) \rangle \\ E &= n^2 \|P_{10} - P_{00}\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad F &= \langle P_u(u, v), P_v(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} \\ &= \langle n(P_{10} - P_{00}), m(P_{01} - P_{00}) \rangle \\ F &= nm \langle (P_{10} - P_{00}), (P_{01} - P_{00}) \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii) } G &= \langle P_v(u, v), P_v(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} \\
&= \langle m(P_{01} - P_{00}), m(P_{01} - P_{00}) \rangle \\
G &= m^2 \|P_{01} - P_{00}\|^2
\end{aligned}$$

dir. ■

Teorem 4.0.2. Bezier yüzeyinin normal vektörü ile ikinci temel formunun e, f, g katsayılarının $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki değerlerinin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\text{i) } N(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} &= \frac{((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|}, \\
\text{ii) } e &= \langle P_{uu}(u, v), N(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{n(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle, \\
\text{iii) } f &= \langle P_{uv}(u, v), N(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{nm}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, (c_4 \times c_5) \rangle, \\
\text{iv) } g &= \langle P_{vv}(u, v), N(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} = \frac{m(m-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle.
\end{aligned}$$

Burada $c_1 = P_{20} - P_{10}$, $c_2 = P_{02} - P_{01}$, $c_3 = P_{11} - P_{10}$, $c_4 = P_{10} - P_{00}$, $c_5 = P_{01} - P_{00}$ dir (Gürsoy ve İncesu 2004).

Kanıt. Tanım 1.0.7. ve Teorem 3.3.2. den

$$\begin{aligned}
\text{i) } N(u, v) \Big|_{(u,v)=(0,0)} &= \frac{\langle P_u(u, v), P_v(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)}}{\| \langle P_u(u, v), P_v(u, v) \rangle \| \Big|_{(u,v)=(0,0)}} \\
&= \frac{(n(P_{10} - P_{00}) \times m(P_{01} - P_{00}))}{\| (n(P_{10} - P_{00}) \times m(P_{01} - P_{00})) \|} \\
&= \frac{nm((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\| nm((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})) \|} \\
&= \frac{((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\| ((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})) \|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad e &= \langle P_{uu}(u, v), N(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} \\
&= \langle n(n-1)(P_{20} - 2P_{10} + P_{00}), \frac{((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \rangle \\
&= \frac{n(n-1)}{\|(P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})\|} \langle (P_{20} - P_{10}) - (P_{10} - P_{00}), (P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}) \rangle \\
e &= \frac{n(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, (c_4 \times c_5) \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii)} \quad f &= \langle P_{uv}(u, v), N(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} \\
&= \langle nm(P_{11} - P_{10} - P_{01} + P_{00}), \frac{((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \rangle \\
&= \frac{nm}{\|(P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})\|} \langle (P_{11} - P_{10}) - (P_{01} - P_{00}), (P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}) \rangle \\
&= \frac{nm}{\|(P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})\|} \langle (P_{11} - P_{10}), ((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})) \rangle \\
f &= \frac{nm}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, (c_4 \times c_5) \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iv)} \quad g &= \langle P_{vv}(u, v), N(u, v) \rangle \Big|_{(u,v)=(0,0)} \\
&= \langle m(m-1)(P_{02} - 2P_{01} + P_{00}), \frac{((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))}{\|((P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}))\|} \rangle \\
&= \frac{m(m-1)}{\|(P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})\|} \langle (P_{02} - P_{01}) - (P_{01} - P_{00}), (P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}) \rangle \\
&= \frac{m(m-1)}{\|(P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00})\|} \langle (P_{02} - P_{01}), (P_{10} - P_{00}) \times (P_{01} - P_{00}) \rangle \\
g &= \frac{m(m-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, (c_4 \times c_5) \rangle
\end{aligned}$$

dir. ■

Teorem 4.0.3. Bezier yüzeyinin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki şekil operatörü S , $\{P_u, P_v\}$ bazına göre ifadesi

$$S(P_u) = a_{11}P_u + a_{12}P_v \quad (4.0.1)$$

$$S(P_v) = a_{21}P_u + a_{22}P_v$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{m.(n-1).\langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle . \|c_5\|^2 - nm.\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle . \langle c_4, c_5 \rangle}{nm.\|c_4 \times c_5\| . (\|c_4\|^2 . \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)} \\ a_{12} &= \frac{n^2.\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle . \|c_4\|^2 - n.(n-1).\langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle . \langle c_4, c_5 \rangle}{nm.\|c_4 \times c_5\| . (\|c_4\|^2 . \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)} \\ a_{21} &= \frac{m.\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle . \|c_5\|^2 - m.(m-1).\langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle . \langle c_4, c_5 \rangle}{nm.\|c_4 \times c_5\| . (\|c_4\|^2 . \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)} \\ a_{22} &= \frac{n.(m-1).\langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle . \|c_4\|^2 - nm.\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle . \langle c_4, c_5 \rangle}{nm.\|c_4 \times c_5\| . (\|c_4\|^2 . \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)} \end{aligned} \quad (4.0.2)$$

ve $c_1 = P_{20} - P_{10}$, $c_2 = P_{02} - P_{01}$, $c_3 = P_{11} - P_{10}$, $c_4 = P_{10} - P_{00}$, $c_5 = P_{01} - P_{00}$ dır.

Kanıt. Teorem 1.0.9. dan $P(u, v)$ Bezier yüzeyinin şekil operatörü S nin, $\{P_u, P_v\}$ bazına göre ifadesinin

$$S(P_u) = \frac{eG - fF}{EG - F^2} P_u + \frac{fE - eF}{EG - F^2} P_v \quad (4.0.3)$$

$$S(P_v) = \frac{fG - gF}{EG - F^2} P_u + \frac{gE - fF}{EG - F^2} P_v$$

olduğu bilinir.

$$\text{Böylece } a_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{fE - eF}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eG - fF}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fE - eF}{EG - F^2}$$

alınıp Teorem 4.0.1. ve Teorem 4.0.2. den sırasıyla E, F, G ve e, f, g katsayılarının $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki değerlerinin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= n^2 . \|P_{10} - P_{00}\|^2 m^2 . \|P_{01} - P_{00}\|^2 - n^2 m^2 . \langle P_{10} - P_{00}, P_{01} - P_{00} \rangle^2 \\ &= n^2 . \|c_4\|^2 m^2 . \|c_5\|^2 - n^2 m^2 \langle c_4, c_5 \rangle^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n^2 m^2 (\|c_4\|^2 \cdot \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2) \\
eG &= \frac{n(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle \cdot m^2 \cdot \|c_5\|^2 \\
&= \frac{nm^2(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle \cdot \|c_5\|^2 \\
fF &= \frac{nm}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \cdot nm \cdot \langle c_4, c_5 \rangle \\
&= \frac{n^2 m^2}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \cdot \langle c_4, c_5 \rangle \\
fE &= \frac{nm}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \cdot n^2 \cdot \|c_4\|^2 \\
&= \frac{n^3 m(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \cdot \|c_4\|^2 \\
eF &= \frac{n(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle \cdot nm \cdot \langle c_4, c_5 \rangle \\
&= \frac{n^2 m(n-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle \cdot \langle c_4, c_5 \rangle \\
fG &= \frac{nm}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \cdot m^2 \cdot \|c_5\|^2 \\
&= \frac{nm^3}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \cdot \|c_5\|^2 \\
gF &= \frac{m(m-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle \cdot nm \cdot \langle c_4, c_5 \rangle \\
&= \frac{nm^2(m-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle \cdot \langle c_4, c_5 \rangle \\
gE &= \frac{m(m-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle \cdot n^2 \cdot \|c_4\|^2 \\
&= \frac{n^2 m(m-1)}{\|c_4 \times c_5\|} \langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle \cdot \|c_4\|^2
\end{aligned}$$

$$a_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2} = \frac{m(n-1)\langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle \|c_5\|^2 - nm\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_4, c_5 \rangle}{nm\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

$$a_{12} = \frac{fE - eF}{EG - F^2} = \frac{n^2\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \|c_4\|^2 - n(n-1)\langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_4, c_5 \rangle}{nm\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

$$a_{21} = \frac{fG - gF}{EG - F^2} = \frac{m\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \|c_5\|^2 - m(m-1)\langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_4, c_5 \rangle}{nm\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

$$a_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2} = \frac{n(m-1)\langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle \|c_4\|^2 - nm\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_4, c_5 \rangle}{nm\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen eşitlikler (4.0.3) denklemlerinde yerine yazılırsa (4.0.1) elde edilir. O halde

$$S(P_u) = a_{11}.P_u + a_{12}.P_v$$

$$S(P_v) = a_{21}.P_u + a_{22}.P_v$$

dir. ■

Bezier yüzeyinin $\{P_u, P_v\}$ bazına göre $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki şekil operatörü S ye karşılık gelen matris

$$S \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Buradan Tanım 1.0.10. ve Tanım 1.0.11. den faydalanılarak Bezier yüzeyinin $(u, v) = (0, 0)$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} K &= \det(S) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \left(\frac{m(n-1)\langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle \|c_5\|^2 - nm\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_4, c_5 \rangle}{nm\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)} \times \right. \\ &\quad \left. \frac{n(m-1)\langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle \|c_4\|^2 - nm\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_4, c_5 \rangle}{nm\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)} \right) - \\ &\quad \left(\frac{n^2\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \|c_4\|^2 - n(n-1)\langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_4, c_5 \rangle}{nm\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2 \|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)} \times \right. \end{aligned}$$

$$\frac{m\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \|c_5\|^2 - m(m-1)\langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_4, c_5 \rangle}{nm\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2\|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ,

$$K = \frac{\frac{(m-1)(n-1)}{mn} \langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle - \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle^2}{\|c_4 \times c_5\|^2 (\|c_4\|^2\|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} Iz(S) = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) \\ &= \left(\frac{m(n-1)\langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle \|c_5\|^2 - nm\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_4, c_5 \rangle}{nm\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2\|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{n(m-1)\langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle \|c_4\|^2 - nm\langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle \langle c_4, c_5 \rangle}{nm\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2\|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)} \right) \end{aligned}$$

Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$H = \frac{1}{2} \frac{\frac{\|c_5\|^2(n-1)}{n} \langle c_1, c_4 \times c_5 \rangle - 2\langle c_4, c_5 \rangle \langle c_3, c_4 \times c_5 \rangle + \frac{(m-1)\|c_4\|^2}{m} \langle c_2, c_4 \times c_5 \rangle}{\|c_4 \times c_5\|(\|c_4\|^2\|c_5\|^2 - \langle c_4, c_5 \rangle^2)}$$

elde edilir (Gürsoy ve İncesu 2004).

Bir $P(u, v)$ Bezier yüzeyi üzerindeki, $(u_0, v_0) \neq (0, 0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ olmak üzere bir $P(u_0, v_0)$ noktasının şekil operatörü ve eğrilikleri araştırılırken bu yüzeye $P(u_0, v_0)$ noktasında bölme algoritması uygulanır. Bölme algoritması ile elde edilen dört alt yüzeyden biri olan P_{sagsag} alt yüzeyinin $(0, 0)$ noktasındaki değeri (3.6.1) eşitliğinden dolayı $P(u_0, v_0)$ noktasına eşittir.

Sonuç olarak, $P(u_0, v_0)$ noktasındaki şekil operatörü ve eğrilikleri incelemek için P_{sagsag} yüzeyinin $P_{sagsag}(0, 0)$ noktasındaki şekil operatörü ve eğriliklerini incelemek yeterlidir.

5. SONUÇ

Bezier eğrilerinin, eğrilerin modellenmesinde önemli bir yere sahip olduğu bilinmektedir. $P(t)$ parametrik denklemiyle verilen bir Bezier eğrisinin $(0 \leq t \leq 1)$ Bernstein polinomları cinsinden tanımı ve bazı özel Bezier eğrileri verildi ve bunların özellikleri incelendi.

Bir $P(u, v)$ Bezier yüzey yaması üzerindeki, $(u_0, v_0) \neq (0,0) \in [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere bir $P(u_0, v_0)$ noktasının şekil operatörü ile Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplamak için ilk olarak Bezier yüzeyleri için bölme algoritması incelendi. İkinci olarak Bezier yüzeylerinin $(u, v) = (0,0)$ noktasındaki şekil operatörü ile Gauss ve ortalama eğrilikleri ele alındı.

Böylece bir $P(u, v)$ Bezier yüzey yaması üzerindeki $(u_0, v_0) \neq (0,0) \in [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere bir $P(u_0, v_0)$ noktasının şekil operatörü ile Gauss ve ortalama eğriliklerini incelemek için, $P(u, v)$ Bezier yüzeyine $P(u_0, v_0)$ noktasında bölme algoritması uygulanarak elde edilen dört alt yüzeyden biri olan P_{sagsag} alt yüzeyinin $(0,0)$ noktasındaki şekil operatörü ile Gauss ve ortalama eğriliklerini incelemek yeterlidir sonucuna ulaşıldı.

6. KAYNAKLAR

DAVID, S. 2006. Curves and Surfaces for Computer Graphics. Springer Science+Business Media, Inc., USA, 460 ss.

FARIN, G. 1997. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. Academic Press, USA, 429 ss.

FARIN, G. 2002. A History of Curves and Surfaces in CAGD. Handbook of Computer Aided Design, ISBN: 978-0-444-51104-1, North-Holland, 1-21.

GRAVESEN, J. 2002. Differential Geometry and Design of Shape and Motion. Lecture notes for 01243 of Department of Mathematics, Technical University of Denmark, 146 ss.

GRAY, A. 1993. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. CRC Press, Inc., USA, 664 ss.

HACISALİHOĞLU, H.H. 1998. İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere. Ertem Matbaa, Ankara, 306 ss.

İNCESU, M. ve GÜRSOY, O. 2004. Bezier Eğrilerinde Esas Formlar ve Eğrilikler. *XVII Ulusal Matematik Sempozyumu, Bildiriler, Abant İzzet Baysal Üniversitesi*, 2004:146-157.

JOY, K.I. 1996. Bezier Curves on Bezier Patches. On-line Geometric Modeling Notes of Department of Computer Sciences, University of California, Davis.

KAPLAN, C.S. ve MANN, S. 2006. Introduction to Computer Graphics. Lecture notes CS 488/688 of University of Waterloo, 245 ss.

LAURENT, P.J. ve SABLONNIERE, P. 2001. Pierre Bezier: An engineer and a mathematician. *Computer Aided Geometric Design*, 18: 609-617.

MARSH, D. 2005. Applied Geometry for Computer Graphics and CAD. Springer-Verlag London Berlin Heidelberg, London, 350 ss.

RABUT, C. 2002. On Pierre Bezier's life and motivations. *Computer-Aided Design*, 34: 493-510.

ROGERS, D.F. 2002. Pierre Etienne Bezier (1910-1999), in memoriam. *Computer-Aided Design*, 34: 489-491.

SEDERBERG, T.W. 2007. Tensor-Product Surfaces. Computer Aided Geometric Design Course Notes.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşe Yılmaz, 1985 yılında Hatay’da doğdu. İlk öğrenimini Bursa’da, orta ve lise öğrenimini Antalya’da tamamladı. 2003 yılında girdiği Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2007 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2009 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne yatay geçiş yaptı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında Araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.