

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

**GRAFLARDA UZAKLIK İNDEKSLERİ
ÜZERİNE**

Mehmet Ümit GÜRSOY

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Pınar DÜNDAR

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.06.01

Sunuş Tarihi: 21.02.2014

**Bornova – İZMİR
2014**

Mehmet Ümit GÜRSOY tarafından doktora tezi olarak sunulan “**Graflarda Uzaklık İndeksleri Üzerine**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesinin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 21.02.2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği / oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Pınar DÜNDAR

.....

Raportör Üye: Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT

.....

Üye : Prof. Dr. Mehmet SEZER

.....

Üye : Prof. Dr. Urfat G. NURİYEV

.....

Üye : Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

.....

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “**Graflarda Uzaklık İndeksleri Üzerine**” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

.... / / 20..

İmzası

Mehmet Ümit GÜRSOY

ÖZET

GRAFLARDA UZAKLIK İNDEKSLERİ ÜZERİNE

GÜRSOY, Mehmet Ümit

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Pınar DÜNDAR

Şubat 2014, 78 sayfa

Günümüzün en önemli konularından biri iletişim ağlarının sağlam ve güvenilir olarak tasarlanmasıdır. Tasarımcılar ağlarını tasarlamak için graflardan faydalanırlar. Graf modeli üzerinde ağlarını güvenilir, sağlam ve düşük maliyetle tasarlamak için çalışırlar. Bunun için graf teoride çeşitli ölçümler tanımlanmış ve bu tanımlar farklı alanlarda uygulanmıştır. Ancak bu konuda daha kapsamlı ve güvenilir bilgi sağlayabilecek ölçümlerin önemi her geçen gün biraz daha artmaktadır. Dolayısıyla yeni ölçüm tanımları matematikçiler tarafından verilmektedir. Bu çalışmada, grafin tepe dereceleri ile bu tepelerin bağlantılılığı üzerinden hesaplamada bulunan yeni bir ölçüm tanımı verilmiştir ve detaylarıyla incelenmiştir.

Tezin giriş bölümünde graf teoriden bahsedilmiş, zedelenebilirlik kavramı ve uzaklık indeksleriyle ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümünde temel graf bilgileri ve teoremleri ile uzaklık indekslerinin tanımları yer almaktadır. Üçüncü bölümde yeni bir zedelenebilirlik ölçümü olarak tanımlanan *Derece Bağlantılılık İndeksi* ve bu indeksle ilgili teoremler ile temel graf sınıflarındaki sonuçları verilmiştir. Dördüncü bölümde graf işlemleri altında derece bağlantılılık indeksi incelenmiştir. Tezin beşinci bölümünde ise derece bağlantılılık indeksiyle diğer indeksler arasındaki ilişkiler verilmiştir. Altıncı bölümde derece bağlantılılık indeksini hesaplayan bir algoritma ve bu algoritmanın uygulandığı bir bilgisayar programı verilerek çalışma sonlandırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Zedelenebilirlik, Bağlantılılık, Yerel Bağlantılılık, Derece Bağlantılılık İndeksi, Uzaklık, Uzaklık İndeksleri.

ABSTRACT

DISTANCE INDICES ON GRAPHS

GÜRSOY, Mehmet Ümit

Ph.D in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Pınar DÜNDAR

February 2014, 78 pages

Nowadays, one of the most important issues is strong and secure design of communication networks. Designers while designing their networks make use of from graphs. They work on a graph model to design a reliable, strong and low cost networks. For this, various measurement definitions have been defined at graph theory and these measurements have been applied in different areas. But providing more comprehensive and reliable informations about this matter is still increasing its importance a little more with each passing day. Consequently, new measurement definitions are generated by mathematicians. In this study a new measurement defination is suggested via vertex degree and vertex connectivity of a graph and it is examined all of its details.

The introduction part of this thesis, general informations about graph theory, the concept of vulnerability and distance indices are mentioned. In the second part, basic graph informations and theorems together with distance indices definations are given. In the third part, the new defination *Degree Connection Index* for vulnerability is defined and theorems about this index are given with basic graph classes results for this index. In the fourth part, connection degree index are examined under graph operations. In the fifth part of this thesis, relations between degree connection index and other indices are presented. And the last in the sixth part, an algorithm and a program for calculating degree connection index which is using this algorithm is given and after then the study is finished.

Keywords: Vulnerability, Connectivity, Local Connectivity, Degree Connection Index, Distance, Distance Indices.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübesiyle bana yön veren çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen görüşlerinden faydalandığım sayın hocam Prof. Dr. Pınar DÜNDAR'a, bilgi ve birikimleriyle her türlü desteği sunan tüm hocalarıma, arkadaşlarıma ve tabi ki koşulsuz destek olan annem Ayşe GÜRSOY'a ve babam Kemal GÜRSOY'a her türlü desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xviii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL GRAF BİLGİLERİ ve UZAKLIK İNDEKSLERİ.....	4
2.1 Temel Graf Bilgileri	4
2.2 Uzaklık İndeksleri	15
3. GRAFLARDA DERECE BAĞLANTILILIK İNDEKSİ	17
3.1 Bir Grafın Derece Bağlantılılık İndeksi.....	20
3.2 Temel Graf Sınıflarında Derece Bağlantılılık İndeksi Üzerine Sonuçlar	44
4. GRAF İŞLEMLERİ ALTINDA DERECE BAĞLANTILILIK İNDEKSİ.....	48
5. DERECE BAĞLANTILILIK İNDEKSİYLE DİĞER İNDEKSLER ARASINDAKİ BAĞINTILAR	59
6. DERECE BAĞLANTILILIK İNDEKSİNİ HESAPLAYAN ALGORİTMA VE PROGRAM	69
6.1 Derece Bağlantılılık İndeksini Hesaplayan Algoritma	70
6.2 Matlab Programı Dilinde Kaynak Kodu.....	72
SONUÇ.....	74
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	75
ÖZGEÇMİŞ.....	78

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 Königsberg Köprüleri	1
1.2 Königsberg Köprüleri Şeması	1
1.3 Königsberg Köprüleri Graf Modeli	1
2.1.1 G_n, G_m Graflarının Toplama işlemi: $G_n + G_m$ Grafi	11
2.1.2 G_n, G_m Graflarının Çarpma işlemi: $G_n \times G_m$ Grafi	12
2.1.3 G_n, G_m Graflarının Taçlama işlemi: $G_n \circ G_m$ Grafi	13
2.1.4 G_1, G_2 , ve G_3 Graflarının Sıralı Toplamı: $G_1 + G_2 + G_3$	13
2.1.5 5 Tepeli G Grafi.....	14
2.1.6 5 Tepeli H Grafi.....	14
3.1 G Grafi.....	18
3.2 $G - a$ Grafi.....	18
3.3 $G - b$ Grafi.....	18
3.4 $G - c$ Grafi	18
3.5 $G - d$ Grafi.....	18
3.6 $G - e$ Grafi	18

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.7 $G - f$ Grafi	19
3.8 $G - g$ Grafi	19
3.1.1 $u-v$ tepeleri bitişik olan n tepeli G Grafi	23
3.1.2 $u-v$ tepeleri bitişik olmayan n tepeli G Grafi	23
3.1.3 $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeleri bitişik olan n tepeli G Grafi	24
3.1.4 $u-v$ tepeleri dışında diğer tepeleri bitişik olan n tepeli G Grafi	24
3.1.5 $u-v$ tepeleri dışında diğer tepeleri bitişik olan n tepeli G Grafi	25
3.1.6 $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeleri bitişik olan n tepeli G Grafi	26
3.1.7 $u-v$ tepeleri bitişik olmayan n tepeli G Grafi	26
3.1.8 G Grafi	28
3.1.9 n tepeli G Grafi	30
3.1.10 $P_n + v$ Graf	39
3.1.11 $S_n + v$ Grafi	40
3.1.12 $n+1$ tepeli G Graf	42
4.1 G_n, G_m Graflarının Toplamı işlemi: $G_n + G_m$ Grafi	48

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.2	G_n, G_m Graflarının Çarpımı işlemi: $G_n \times G_m$ Grafi 53
4.3	G_n, G_m Graflarının Taçlama işlemi: $G_n \circ G_m$ Grafi 55
4.4	G_1, G_2 , ve G_3 Graflarının Sıralı Toplamı: $G_1 + G_2 + G_3$57
5.1	7 Tepeli Çevre Grafa Ayrıt (Kiriş) Eklenmesi61
5.2	$L_{n,d}$ Lolipop Grafi62
5.3	$L_{n,d}$ Lolipop Grafi64
5.4	G Grafi67
6.1	Graf Yönlendirme İşlemi69
6.2	9 Tepeli G Grafi71

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
G	Graf
$V(G)$	G Grafının Tepeler Kümesi
$E(G)$	G Grafının Ayrıtlar Kümesi
$N(v)$	v Tepesinin Açık Komşuluğu
$A(G)$	G Grafının Bitişiklik Matrisi
$D(G)$	G Grafının Uzaklık Matrisi
$r(G)$	G Grafının Yarıçapı
$diam(G)$	G Grafının Çapı
$deg(v)$	G Grafının Tepe Derecesi
$\delta(G)$	G Grafının Minimum Tepe Derecesi
$\Delta(G)$	G Grafının Maksimum Tepe Derecesini
$ec(v)$	v Tepesinin Açılım Değeri
$\bar{d}(G)$	G Grafının Tepe Derecelerinin Ortalaması
P_n	Yol Graf
C_n	Çevre Graf
K_n	Tam Graf
$K_{m,n}$	Tam Parçalı Graf

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
T_n	Ağaç Graf
$K_{1,n}, S_{n+1}$	Yıldız Graf
$W_{1,n}$	Tekerlek Graf
$\alpha(G)$	G Grafının Örtü Sayısı
$\beta(G)$	G Grafının Bağımsızlık Sayısı
$\gamma(G)$	G Grafının Baskınlık Sayısı
$\kappa(G)$	G Grafının Tepe Bağlantılılık Değeri
$\kappa(u, v)$	u ve v Tepelerinin Yerel Bağlantılılık Değeri
$d(u, v)$	u ve v Tepeleri Arasındaki Uzaklık Değeri
$K(G)$	G Grafının Toplam Bağlantılılık Değeri
$\overline{\kappa}(G)$	G Grafının Ortalama Bağlantılılığı
$\kappa'(G)$	G Grafının Ayrıt Bağlantılılık Sayısı
$G_n + G_m$	G_n ve G_m Graflarının Toplama İşlemi
$G_n \times G_m$	G_n ve G_m Graflarının Çarpma İşlemi
$G_n \circ G_m$	G_n ve G_m Graflarının Taçlama İşlemi
$G_1 + G_2 + G_3$	$G_1, G_2,$ ve G_3 Graflarının Sıralı Toplamı
$H \subset G$	H Grafi G Grafının Alt Grafi

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

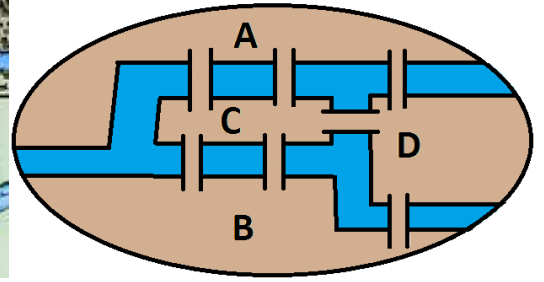
<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$H \subseteq G$	H Grafi G Grafinın Kapsayıcı Alt Grafi
$W(G)$	G Grafinın Wiener İndeksi
$M_1(G)$	G Grafinın Birinci Zagreb İndeksi
$M_2(G)$	G Grafinın İkinci Zagreb İndeksi
$MTI(G)$	G Grafinın Moleküler Topolojik İndeksi
$D'(G)$	G Grafinın Derece Uzaklık Değeri
$\xi^c(G)$	G Grafinın Dışmerkezli Bağlantılılık İndeks
$\kappa_d(G)$	G Grafinın Derece Bağlantılılık İndeksi
$\kappa_d(u, v)$	u ve v Tepelerinin Yerel Derece Bağlantılılık Değeri
$\kappa(u)$	G Grafinın Yerel Toplam Bağlantılılık Değeri
$\kappa_d(u)$	G Grafinın Yerel Derece Bağlantılılık Değeri
$L_{n,d}$	Lolipop Graf
$O(n)$	Büyük O Notasyonu (Karmaşıklık Ölçümü)

1. GİRİŞ

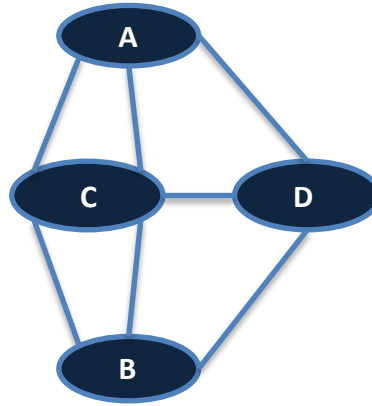
Graf teori ilk temelleri ünlü matematikçi *Leonhard Euler* (1707–1783) tarafından atılmış bir bilim dalıdır. Euler 1736 da “*Königsberg’in yedi köprüsü (Seven Bridges of Königsberg)*” diye bilinen problemi çözdü ve latince olarak “*Solvtio Problematis Ad Geometriam Sitvs Pertinentis Avctore*” adlı makalesinde yayınladı. Yaptığı bu çalışmayla graf teorisinin kurucusu olmuştur. Bu çalışmada Euler, Königsberg şehrini iki adaya ve iki kara parçasına ayıran Pregel nehrinin üzerine kurulan yedi köprünün, herhangi bir köprüden yola çıkarak ve her bir köprüden yalnız bir kez geçerek tüm şehri dolaşabilmenin mümkün olmadığını, grafla Şekil 1.3 teki gibi modelleme yaparak ispatlamıştır.



Şekil 1.1 Königsberg Köprüleri



Şekil 1.2 Königsberg Köprüleri Şeması



Şekil 1.3 Königsberg Köprüleri Graf Modeli

Daha sonraları birçok matematikçinin yaptığı çalışmalarla graf teori günlük hayatta karşılaşılan çeşitli problemlere uygulanmıştır. Özellikle II. Dünya Savaşından sonra teknolojinin hızla gelişmesiyle mühendislikten askeri alana

kadar karşılaşılan birçok problemin modellenmesinde ve çözümünde graf teorii yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır.

İletişim ve dağıtım ağlarında, hiyerarşi ve kontrol problemlerinde, verilen kısıtlar altında problemin matematiksel modelini oluşturmak için graf teoriiyi kullanmak, en uygun çözümü bulmak açısından önemlidir.

Bir iletişim ağının bazı tepe veya tepelerinde oluşabilecek hasarlar bu ağın işlevini tam olarak gerçekleştirmesini engeller. Bu nedenle iletişim ağları tasarlanırken, veri akışının devamlılığını sağlamak için ağın bozulmalara karşı göstereceği direnci önemsemek gerekir. Direnci fazla olan bir model diğerlerine göre daha çok tercih edilir. Dolayısıyla bir sorunla karşılaşılması halinde ağda oluşabilecek hasar baştan en aza indirgenmiş olur. Bunun için ağ tasarlanmadan önce teorik yaklaşımlar yapılabilir. Bu yaklaşımlar *zedelenebilirlik (vulnerability)* adıyla graf teoride önemli bir yer tutmaktadır. 1980'lerden beri graf teorii ile çalışan bilim adamları pek çok ölçüm kullanmışlardır. Tepeler ve ayrıtlar arasındaki iletişim ve erişilebilirlik açısından bir problemin amaç fonksiyonuna uygun olarak; *bağlantılılık (connectivity)*, *ayrıt bağlantılılık (edge-connectivity)*, *bütünlük (integrity)*, *ayrıt bütünlük (edge-integrity)*, *sağlamlık (toughness)*, *kararlılık (tenacity)* ve benzeri yeni kavramlar tanımlanmıştır. Bu ölçümler grafın tüm yapısındaki iletişimi inceler. Bu tanımlar kullanılarak, sistemde direnci düşük olan tepeler ve ayrıtlar ağdan çıkarılarak veya yeni bağlantılar oluşturularak daha sağlam modeller oluşturulmaktadır. Bu ölçümler, genelde grafın tüm tepeler yada ayrıtlar kümesi üzerinde hareket eder. Tepe ve ayrıt bağlantılılık bunlardan en çok kullanılanlardır (Barefoot et al,1987).

Bununla birlikte günlük hayatta ve diğer bilim dallarında karşılaşılan çeşitli problemlerin çözümünde önemli bir yer tutan uzaklık kavramı graf teoride uzun yıllardır çalışılan alanlardan biridir. Uzaklık kavramı üzerine inşa edilen çeşitli indeksler farklı alanlarda uzun zamandır kullanılmış ve bu indekslerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

Tezimize temel teşkil eden indekslerden olan *Wiener indeks* ilk olarak 1940 ların sonlarına doğru H. Wiener (Wiener, 1947) tarafından parafinin kimyasal özelliklerini analiz etmek istemesiyle ortaya konmuştur. Bu indeks uzaklık kavramı üzerine inşa edilmiş olup matematiksel özellikleri ve kimyasal uygulamaları bakımından geniş bir şekilde incelenmiş bir indekstir. 1970 lerde

Ivan Gutman ve Trinajstic *Zagreb indekslerini* tanımlamışlardır (Gutman and Trinajstic, 1972).

Schultz ise 1989 da *Moleküler Topolojik indeks* ismini verdiği indeksini tanımlamıştır (Schultz, 1989). Temelde bu indeks, farmakolojide ilaç dizaynında kimyasallar arasındaki bağları teşhis etme ve bileşenlerin optimizasyonunda hızlı ve etkili bir yol olarak kullanılmıştır (Dankelmann et al).

Moleküler topolojik indeksin tanımlanmasından kısa bir süre sonra 1990 ların ortalarında yine kimya alanındaki uygulamalarda kullanılan *Derece Uzaklık Dobrynin ve Kochetova* ile aynı zamanda Ivan Gutman tarafından tanımlanmıştır (Dobrynin and Kochetova, 1994; Gutman,1994).

Yine benzer şekilde kimyasal yapıları incelemede kullanılan *Dışmerkezli Bağlantılılık indeksi* 1990 ların sonuna doğru tanımlanmış ve kullanılmıştır (Sharma et al, 1997).

Bu tezin ikinci bölümünde diğer bölümlerde kullanılacak temel graf bilgileri ve uzaklık indekslerinin tanımları verilmiştir. Üçüncü bölümde tarafımızdan üretilen grafın derece bağlantılılık indeksinin tanımı verilmiş ve tanımın detaylı bir incelemesi yapılmış. Yine üçüncü bölümde derece bağlantılılık indeksinin graf parametreleriyle aralarındaki ilişkiler incelenmiş ve temel graf sınıflarında derece bağlantılılık indeksinin sonuçları verilmiştir. Dördüncü bölümde, graf işlemleri altında yeni oluşan grafın derece bağlantılılık indeksine ait teoremleri sunulmuştur. Çalışmanın beşinci bölümünde derece bağlantılılık indeksinin diğer indeksler ile arasındaki bağlantılar incelenmiştir. Altıncı bölümde derece bağlantılılık indeksini hesaplayan bir algoritma ve bu algoritmanın uygulandığı derece bağlantılılık indeksini hesaplayan bir bilgisayar programı verilmiştir.

Derece bağlantılılık indeksi ile ilgili bu incelemeler ve tanımlar bağlantılı, basit ve yönlendirilmemiş graflar için verilmiştir.

2. TEMEL GRAF BİLGİLERİ ve UZAKLIK İNDEKSLERİ

2.1 Temel Graf Bilgileri

Çalışmanın bu bölümünde graf teoride kullanılan temel graf tanımları ve grafların genel özellikleri verilmiştir. Çalışmanın diğer bölümlerinde bu tanımlardan ve özelliklerden yararlanılarak yeni tanımlanan ölçüm ile ilgili genel sonuçlar çıkarılmıştır. Bu çalışmada tanımlarda verilen G grafi bağlantılı, basit ve yönlendirilmemiş grafi göstermektedir.

Tanım 2.1.1: Bir G grafi (*graph*), *tepeler* (*vertices*) olarak adlandırılan boş olmayan bir $V(G)$ sonlu nesneler kümesi ile G nin farklı tepe çiftlerinin düzensiz sıralanışı olan bir $E(G)$ (boş olabilir) *ayrıntlar* (*edges*) kümesinden oluşur. $G = (V, E)$ şeklinde gösterilir (Chartrand and Lesniak, 2005).

Tanım 2.1.2: Bir G grafinin tepeler kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nin eleman sayısına G nin *sıralanışı* (*order*) denir ve $|V(G)| = n$ veya $n(G)$ olarak gösterilir. Diğer taraftan ayrıntlar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ nin eleman sayısına *boyut* (*size*) denir ve $|E(G)| = m$ veya $m(G)$ olarak gösterilir (Chartrand and Lesniak, 2005).

Tanım 2.1.3: Bir *yönlendirilmiş D grafi* (*directed graph* or *digraph*) tepeler olarak adlandırılan boş olmayan bir sonlu nesneler kümesi ile birlikte *oklar* (*arcs*) veya *yönlendirilmiş ayrıntlar* (*directed edges*) olarak adlandırılan D nin farklı tepelerin sıralı çiftlerinin kümesidir (boş olabilir). Tepeler kümesi $V(D)$ ile ayrıntlar kümesi de $E(D)$ ile gösterilir (Chartrand and Lesniak, 2005).

Tanım 2.1.4: Bir G grafinin herhangi iki tepesi arasında 1'den fazla ayrıt varsa bu ayrıtlara çok katlı ayrıt, bu tür graflara ise *çok katlı* (*multiple*) graf denir (Hartsfield and Ringel, 1990).

Tanım 2.1.5: Bir grafta başlangıç ve bitiş tepeleri aynı olan ayrıta *bukle* (*loop*) denir (Hartsfield and Ringel, 1990).

Tanım 2.1.6: Çok katlı ayrıt ve bukle içermeyen graflara *basit* (*simple*) graf denir (Hartsfield and Ringel, 1990).

Tanım 2.1.7: Bir G grafinın e ayrıtı u ve v tepelerini birleştiriyorsa $e = \{u, v\}$ veya $e = uv$ olarak gösterilir. u ve v tepelerine *bitişik tepeler* (*adjacent vertices*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.8: G grafinda herhangi bir tepe ile arasında ayrıt bulunmayan tepeye *izole tepe* (*isolated vertex*) denir. Sadece izole tepelerden oluşan grafa *boş* (*null*) graf denir (Grimaldi, 2004).

Tanım 2.1.9: Bir G grafinın v tepeleri için, $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ biçiminde oluşan tepe ve ayrıt dizilişine *yürüyüş* (*walk*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.10: Tüm ayrıtları birbirinden farklı olan bir yürüyüşe *zincir* (*trail*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.11: Tüm tepeleri birbirinden farklı (sonuç olarak ayrıtları da birbirinden farklı) olan bir yürüyüşe *yol* (*path*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.12: Tüm tepeleri içeren yalnız bir yola sahip grafa *yol graf* (*path graph*) denir ve P_n ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.13: Bir G grafinın her tepe çifti arasında en az bir tane yol varsa G grafa *bağlantılı* (*connected*) graf denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.14: Bir G grafinın u ve v tepelerini birleştiren iki yol uç tepeleri dışında ortak bir tepeye sahip değilse bu yollara *içten ayrık yol* (*internally disjoint path*) veya *içten tepe ayrık yol* (*internally vertex disjoint path*) denir (Chartrand and Lesniak, 2005).

Tanım 2.1.15: Bir G grafinın u ve v tepelerini birleştiren iki yol ortak bir ayrıta sahip değilse bu yollara *içten ayrıt ayrık yol* (*internally edge disjoint path*) denir (Chartrand and Lesniak, 2005).

Teorem 2.1.1: n tepeli m ayrıtlı bir G grafinın bağlantılı olabilmesi için $m \geq n - 1$ olmalıdır (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.16: Bir v tepesine bitişik olan tepelerin oluşturduğu küme v tepesinin *açık komşuluğu* (*open neighborhood*) adını alır ve $N(v)$ olarak gösterilir, v

tepesinin kapalı komşuluğu ise $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ şeklinde tanımlanır (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.17: Bir tepeden farklı bir tepeye varışta kullanılan yolun ayrıt sayısına *yolun uzunluğu* (*length of path*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.18: Bir G grafında u ve v gibi iki tepe arasındaki yollardan uzunluğu en küçük olanın uzunluğuna; u nun v ye *uzaklığı* (*distance*) denir ve $d(u,v)$ biçiminde gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.19: n tepeli bir G grafının tepeler kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. G grafının *bitişiklik matrisi* (*adjacency matrix*) $A(G) = [a_{ij}]$ dir.

$$A(G) = \begin{cases} a_{ij} = 1, & v_i \text{ ile } v_j \text{ bitişik ise} \\ a_{ij} = 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$A(G) = [a_{ij}]$ nin satır ve sütunları grafın tepelerine karşılık gelir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.20: n tepeli bir G grafının tepeler kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. G grafının *uzaklık matrisi* (*distance matrix*) $D(G) = [d_{ij}]$ dir. Burada $d_{ij} = d(v_i, v_j)$ dir.

$D(G) = [d_{ij}]$ nin satır ve sütunları grafın tepelerine karşılık gelir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.21: G grafında bir v tepesinin diğer tepelere olan uzaklıklarının en büyüğüne o tepenin *açılımı yada dışmerkezliği* (*eccentricity*) denir ve $ev(v)$ biçiminde gösterilir. Grafın bütün tepelerinin açılımlarının en büyük değerine *çap* (*diameter*) denir, $diam(G)$ biçiminde gösterilir, en küçük değerine *yarıçap* (*radius*) denir ve $r(G)$ biçiminde gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.22: Açılım değeri yarıçapa eşit olan tepe veya tepelere *merkez tepe* (*central vertex*) veya *merkez tepeler* (*central vertices*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.23: Bir G grafinin herhangi bir $v \in V$ tepesinin *derecesi* (*degree*) o tepenin bitişik olduğu ayrıtların sayısıdır ve $\deg(v)$ ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.24: Bir G grafinin tepe derecelerinin en küçüğüne *minimum derece* (*minimum degree*) denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.25: Bir G grafinin tepe derecelerinin en büyüğüne *maksimum derece* (*maksimum degree*) denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.26: $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere bir G grafında $\forall v \in V$ için $\deg(v)=r$ ise G grafına r – *düzenli* (r – *regular*) graf denir. n tepeli bir r – düzenli grafın ayrıt sayısı $\frac{nr}{2}$ dir (Buckley and Harary, 1990).

Teorem 2.1.2: n tepeli m ayrıtlı bağlantılı bir G grafında tepe derecelerinin toplamı ayrıt sayısının iki katıdır (Buckley ve Harary, 1990).

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m$$

Teorem 2.1.3: n tepeli bir G grafi için;

$$\Delta(G) \leq n - \text{diam}(G) + 1 \quad (\text{Buckley and Harary, 1990})$$

Tanım 2.1.27: n tepeli bir G grafında tüm tepe derecelerinin ortalaması $\bar{d}(G)$ ile gösterilir ve (Beineke et al, 2002)

$$\bar{d}(G) = \frac{\sum_{i=1}^n \deg(v_i)}{n}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.28: Tüm tepeleri birbirinden farklı ve tepe sayısı $n \geq 3$ olan kapalı bir yürüyüşe *çevre* (*cycle*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.29: Bir G grafinin tüm tepelerinin derecesi iki ise bu grafa *çevre* (*cycle*) *graf* denir. n tepeli bir çevre grafi C_n ile gösterilir. n tepeli bir çevre grafın ayrıt sayısı n dir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.30: Bir grafın bütün tepelerini içeren çevreye *Hamilton Çevre* (*Hamiltonian (spanning) cycle*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.31: Eğer bir G grafi hiçbir çevreye sahip değilse bu grafa *çevre içermeyen* (*acyclic*) graf denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.32: Birleştirilmiş ve çevre içermeyen (*acyclic*) grafa *ağaç* (*tree*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.33: n tepeli bir G grafının tüm tepeleri birbiri ile bitişik ise bu grafa *tam graf* (*complete graph*) denir ve K_n ile gösterilir. n tepeli bir tam grafın ayrıt sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ dir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.34: G nin her bir ayrıtının bir tepesi V_1 kümesinde diğer tepesi V_2 kümesinde olacak şekilde V tepeler kümesi $V = V_1 \cup V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olacak şekilde V_1 ve V_2 alt kümelerine ayrılabiliyorsa G grafına *iki parçalı graf* (*bipartite graph*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.35: İki parçalı grafta V_1 kümesinin her bir tepesi V_2 kümesinin her bir tepesi ile bitişik ise bu grafa *iki parçalı tam* (*complete bipartite*) graf denir ve $K_{m,n}$ ile gösterilir. $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafının ayrıt sayısı mn dir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.36: $n+1$ tepeli bir G grafında n tane tepe 1 dereceli, bir tane tepe n dereceli ise bu graf *yıldız* (*star*) adını alır ve $K_{1,n}$ veya S_{n+1} ile gösterilir. $n+1$ tepeli bir yıldız grafın ayrıt sayısı n dir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.37: $n+1$ tepeli bir G grafında, bir tepe n dereceli, diğer tüm tepeler 3 dereceli ise bu graf *tekerlek* (*wheel*) adını alır ve $W_{1,n}$ ile gösterilir. $n+1$ tepeli bir tekerlek grafın ayrıt sayısı $2n$ dir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.38: Birleştirilmiş bir G grafında, bitişik olmayan u ve v tepelerini bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına u ve v nin *yerel bağlantılığı* (*local connectivity*) denir $\kappa(u,v)$ ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.39: Bağlantılı bir G grafini bağlantısız yapmak veya tek izole tepe bırakmak için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafin *bağlantılılık* (*connectivity*) veya *tepe bağlantılılık* (*vertex connectivity*) sayısı denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Teorem 2.1.4 (Menger'in Teoremi): Bir G grafinin bitişik olmayan iki tepesi u ve v olsun. Bu u ve v tepelerini bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısı bu tepeler arasındaki en çok içten ayırık yol sayısına eşittir (Chartrand and Lesniak, 2005).

Menger'in teoremi; $u-v$ tepeleri için $\kappa(u, v)$ yerel bağlantılılık değerinin, bu tepeler arasında en büyük içten tepe ayırık yolların sayısına eşit olduğunu gösterir. Teorem 2.1.4 gereği $\kappa(G) = \min \{ \kappa(u, v) : \text{grafin tüm } u-v \text{ tepe ikilileri} \}$ (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.40: Bir G grafında, her $u-v$ tepe çifti arasında en az k tane içten ayırık yol varsa, G grafi k – *bağlantılı* (k – *connected*) denir (Beineke et al, 2002).

Tanım 2.1.41: n tepeli bir G grafında tüm tepe çiftlerinin yerel bağlantılılıklarının toplamı G nin *toplam bağlantılılığı* (*total connectivity*) olarak tanımlanır ve $K(G)$ ile gösterilir (Beineke et al, 2002).

$$K(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \kappa(u, v)$$

Tanım 2.1.42: n tepeli bir G grafında tüm tepe çiftlerinin yerel bağlantılılıklarının ortalaması, G nin *ortalama bağlantılılığı* (*average connectivity*) olarak tanımlanır ve $\bar{\kappa}(G)$ ile gösterilir (Beineke et al, 2002).

$$\bar{\kappa}(G) = \frac{K(G)}{\binom{n}{2}}$$

Teorem 2.1.5: Bağlantılı bir G grafinin herhangi iki u ve v tepesi için, $\kappa(u, v) \leq \min\{\deg(u), \deg(v)\}$ dir (Beineke et al, 2002).

Tanım 2.1.43: Bir G grafini bağlantısız yapmak veya izole tepeler haline getirmek için graftan çıkarılması gereken en az ayırık sayısına *ayırık bağlantılılık*

sayısı (edge connectivity number) denir ve $\kappa'(G)$ ile gösterilir (Beineke et al, 2002).

Teorem 2.1.6: n tepeli herhangi bir G grafi için,

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G) \text{ dır} \quad (\text{Buckley ve Harary, 1990}).$$

Tanım 2.1.44: Bir G grafında bitişik olmayan u ve v tepesini bir ayrıt ile birleştirmeye *ayrıt ekleme (addition of the edge)* denir ve $G+uv$ biçiminde gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.45: Bir G grafında $S \subseteq V(G)$ olmak üzere, grafin her ayrıtının en az bir uç tepesi S kümesinin elemanı ise S kümesine grafin *örtü kümesi (vertex cover set)* denir. En az elemana sahip olan örtü kümesinin eleman sayısına ise G grafinin *örtü sayısı (vertex cover number)* denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.46: Bir G grafında $S \subseteq V(G)$ olmak üzere, S kümesi grafin bitişik olmayan tepelerinden oluşuyorsa, S ye grafin *bağımsız kümesi (independent set)* denir. En fazla elemana sahip olan bağımsız kümenin eleman sayısına ise G grafinin *bağımsızlık sayısı (independence number)* denir ve $\beta(G)$ ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.47: $G=(V,E)$ grafında, $S \subset V(G)$ olmak üzere G grafindaki her bir tepe ya S kümesindeki bir tepeye bitişik ya da S kümesine ait ise, bu S kümesi G grafinin bir tepe baskın kümesidir. Bu baskın kümeler içerisinde minimum sayıda elemana sahip olan kümenin eleman sayısı G grafinin *baskınlık (dominating)* sayısını verir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir (West, 2001).

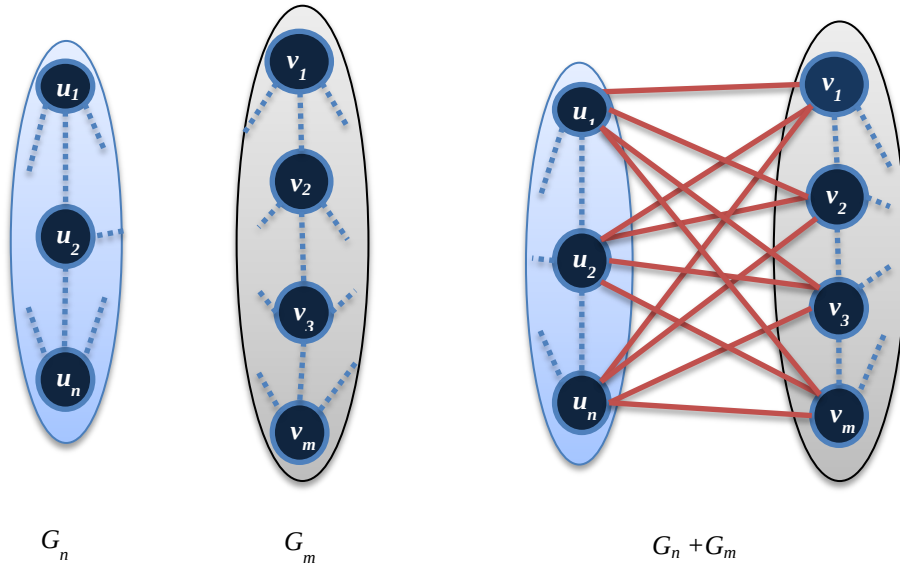
Tanım 2.1.48: Bir G grafinin tüm tepelerinin bir v tepesine bir ayrıtla birleştirilmesi işlemine *tepe ekleme (addition of a vertex)* denir ve $G+v$ biçiminde gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.49: Bir G grafindan bitişik olan u ve v tepelerini birleştiren $e = \{u, v\}$ ayrıtını silmeye *ayrıt çıkarma (removal of an edge)* denir ve $G - e$ biçiminde gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.50: Bir G grafindan bir v tepesi ve v ye bitişik olan tüm ayrıtları silmeye *tepe çıkarma (removal of a vertex)* denir ve $G - v$ biçiminde gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.51: V_1 ve V_2 tepeler kümesi ve E_1 ve E_2 ayrıtlar kümesi olan iki graf G_1 ve G_2 olsun. Bu iki grafın *birleşimi (union)* $G = G_1 \cup G_2$ dir, burada $V = V_1 \cup V_2$ ve $E = E_1 \cup E_2$ dir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.52: G_1 ve G_2 grafların *toplamı (join)* $G_1 + G_2$ ile gösterilir. $G_1 + G_2$ nin tepe kümesi $G_1 \cup G_2$ nin tepe kümesine eşittir. G_1 in her bir tepesinin G_2 nin her bir tepesiyle birleştirilmesiyle elde edilen ayrıtlar $G_1 + G_2$ nin ayrıtlar kümesini oluştururlar (Buckley ve Harary, 1990).

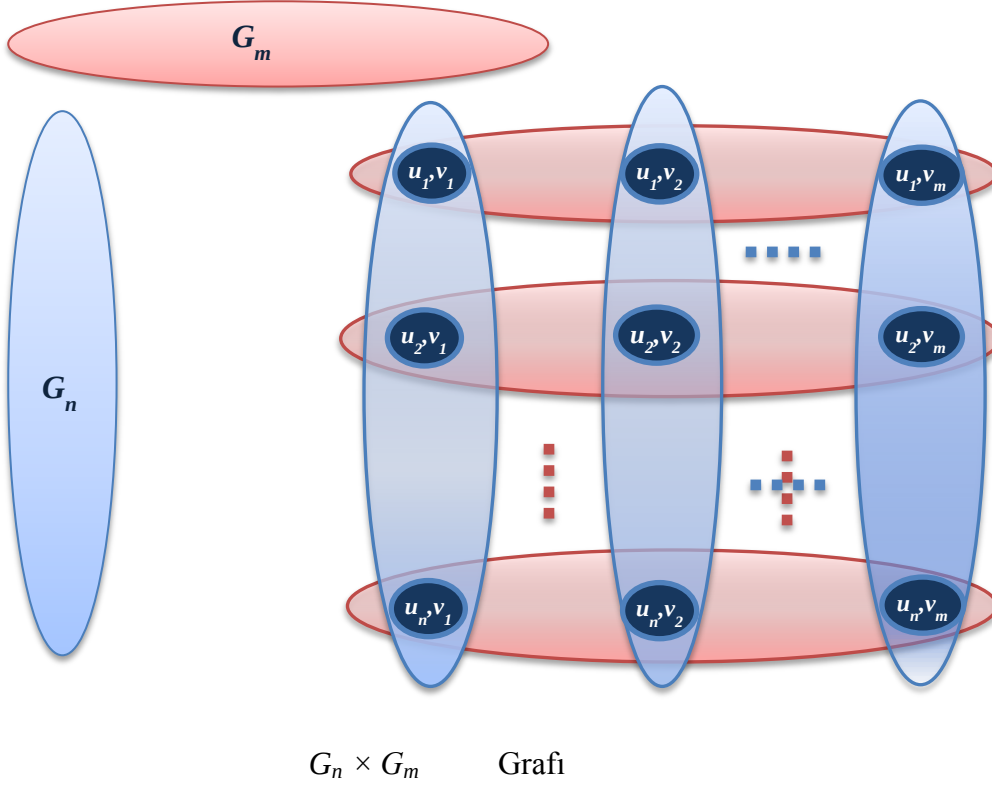


Şekil 2.1.1 G_n ve G_m Graflarının Toplama İşlemi: $G_n + G_m$

Tanım 2.1.53: G_1 ve G_2 gibi iki grafın *çarpımı (product)* $G_1 \times G_2$ ile gösterilir. G_1 in tepeler kümesi V_1 , G_2 nin tepeler kümesi V_2 olsun. $G_1 \times G_2$ grafının tepe kümesi V_1 ve V_2 nin kartezyen çarpımıdır. G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı,

$V_1 \times V_2 = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_m), (u_2, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_2, v_m), \dots, (u_n, v_1), (u_n, v_2), \dots, (u_n, v_m)\}$ dir.

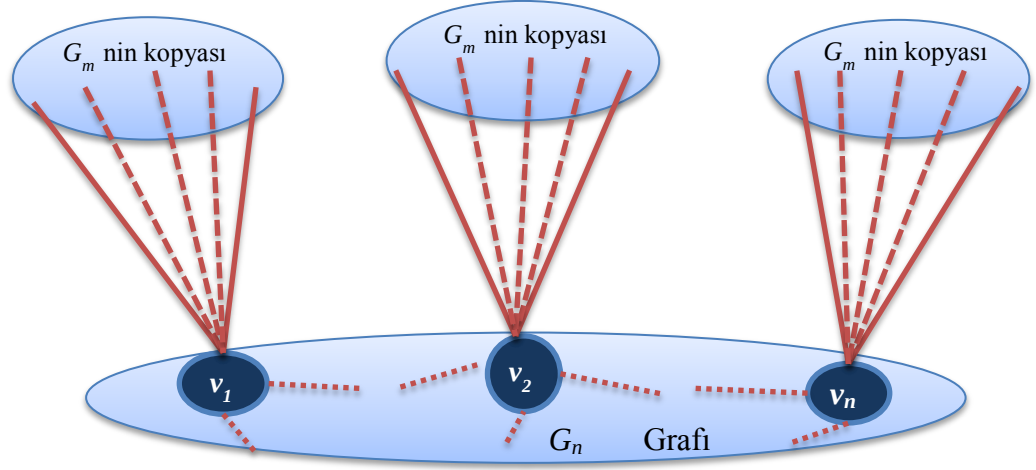
$G_1 \times G_2$ grafinın ayrıtları için $u=(u_1, v_1)$, $v=(u_2, v_2)$ tepelerini ele alalım. Eğer $u_1=u_2$ ve v_1 bitişik v_2 ya da $v_1=v_2$ ve u_1 bitişik u_2 ise, u ve v tepeleri $G_1 \times G_2$ grafinde bitişiktirler (Buckley ve Harary, 1990).



Şekil 2.1.2 G_n ve G_m Graflarının Çarpma İşlemi: $G_n \times G_m$

Tanım 2.1.54: Tepe ve ayrıtları birbirinden farklı G_n ve G_m graflarının *taçlama işlemi* (corona operation), G_n in her bir tepesine karşılık G_m nin bir kopyası alınır ve G_n in bu tepesinin G_m nin kopyasındaki her tepeye bir ayrıtlarla birleştirilmesi olarak tanımlanır. Sonuçta elde edilen graf $G_n \circ G_m$ ile gösterilir.

Taçlama işleminin değişme özelliği yoktur. $G_n \circ G_m \neq G_m \circ G_n$ dir (Buckley and Harary, 1990).

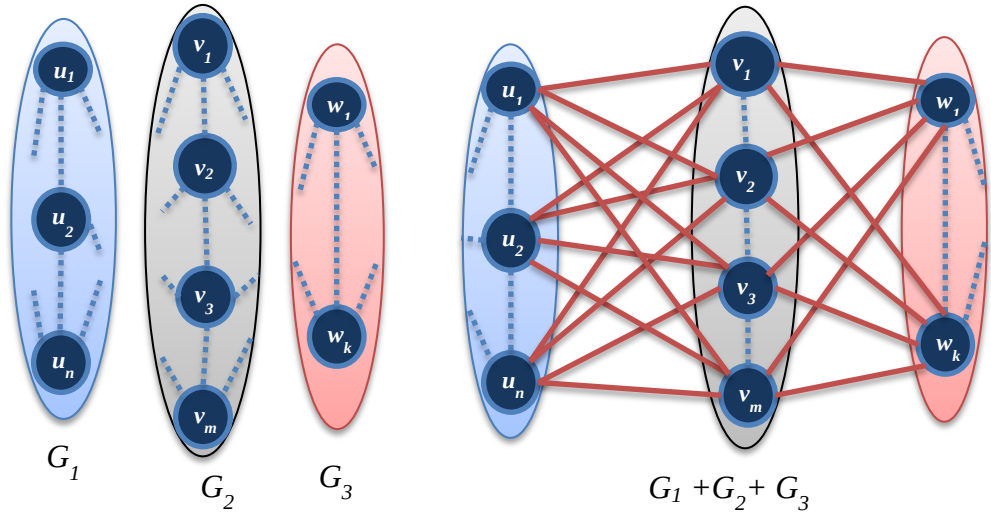


Şekil 2.1.3 G_n ve G_m Graflarının Taçlama İşlemi ($G_n ° G_m$)

Tanım 2.1.55: $G_1, G_2, \dots, G_n$ gibi üç veya daha fazla ayrık graflar için *ardışık (sıralı) toplam (Sequential Join)*

$$G_1 + G_2 + \dots + G_n = (G_1 + G_2) \cup (G_2 + G_3) \cup \dots \cup (G_{n-1} + G_n)$$

olarak tanımlanır (Buckley and Harary, 1990).

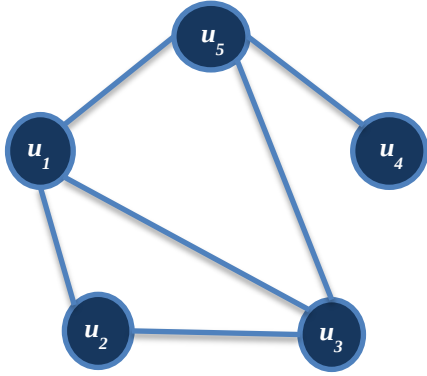


Şekil 2.1.4 G_1, G_2 , ve G_3 Graflarının Sıralı Toplamı: $G_1 + G_2 + G_3$

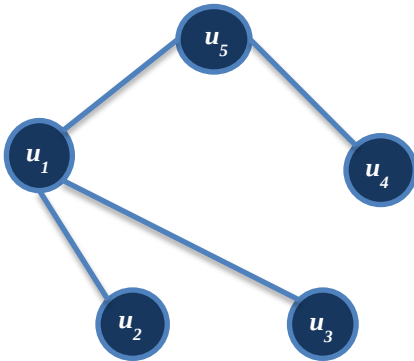
Tanım 2.1.56: G ve H herhangi iki graf olmak üzere; $H(V) \subset G(V)$ ve $H(E) \subset G(E)$ ise H grafına G grafının *alt grafı (subgraf)*, G grafına da H nin *süpergrafı (supergraph)* denir ve $H \subset G$ biçimde gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.1.57: G ve H herhangi iki graf olmak üzere $H(V) = G(V)$ ve $H(E) \subset G(E)$ ise H grafına G grafının *kapsayıcı altgrafı* (*spanning subgraf*) denir ve $H \subseteq G$ biçimde gösterilir. H ağaç graf ise, H grafına G nin *kapsayıcı alt ağacı* (*spanning tree*) denir (Buckley and Harary, 1990).

Şekil 2.1.6 deki H grafı ile Şekil 2.1.5 deki G grafının kapsayıcı alt ağacıdır.



Şekil 2.1.5 Beş tepeli G



Şekil 2.1.6 Beş tepeli H

2.2 Uzaklık İndeksleri

Tanım 2.2.1: n tepeli birleştirilmiş bir $G(V,E)$ grafinin tüm tepe çiftleri arasındaki uzaklıkların toplamına grafin *Wiener indeksi* (*Wiener index*) denir ve $W(G)$ ile gösterilir (Wiener, 1947).

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u,v)$$

olarak tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.2: Bir G grafinin her tepe derecelerinin kareleri toplamına o grafin *Birinci Zagreb indeksi* (*First Zagreb index*) denir ve $M_1(G)$ ile gösterilir (Gutman and Trinajstić, 1972).

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg^2(u)$$

Tanım 2.2.3: Bir G grafinin her ayrımının bitişik olduğu tepelerin derecelerinin çarpımlarının toplamına o grafin *İkinci Zagreb indeksi* (*Second Zagreb index*) denir ve $M_2(G)$ ile gösterilir (Gutman and Trinajstić, 1972).

$$M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} \deg(u) \deg(v)$$

Tanım 2.2.4: n tepeli G grafinde

$V(G)=[\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n)]$: Grafin tepe derecelerinin oluşturduğu matris

$A(G)=[a_{ij}]$: Grafin bitişiklik matrisi

$D(G)=[d_{ij}]$: Grafin uzaklık matrisi

Olmak üzere G grafinin *Moleküler Topolojik indeksi* (*Molecular Topological index*) $MTI(G)$ aşağıdaki gibi tanımlanır (Schultz, 1989).

$$MTI(G) = \sum_{i=1}^n [V(A + D)]_i$$

Burada moleküler topolojik indeks $MTI(G) = M_1(G) + D'(G)$ olarak yazılabilir. $D'(G)$ Tanım 2.2.5 de tanımlanan derece uzaklık indekisidir.

Tanım 2.2.5: Bir $G = (V, E)$ grafinin tüm tepe çiftleri için tepe dereceleri toplamıyla tepeler arasındaki uzaklık değerinin çarpımlarının toplamına grafin *Derece Uzaklığı (Degree Distance)* denir ve $D'(G)$ ile gösterilir (Dobrynin and Kochetova, 1994; Gutman, 1994).

$u, v \in V(G)$ tepeleri için $deg(v)$ ve $deg(u)$ tepe dereceleri, $d(u, v)$ de u ve v tepeleri arasındaki uzaklık olmak üzere;

$$D'(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [deg(u) + deg(v)] d(u, v)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.6: Bir G grafinin her tepesinin açılımı ile derecesinin çarpımlarının toplamına grafin *Dışmerkezli Bağlantılılık indeksi (Eccentric Connectivity index)* denir ve $\xi^c(G)$ ile gösterilir (Sharma et al, 1997).

$$\xi^c(G) = \sum_{v \in V(G)} ec(v) deg(v)$$

3. GRAFLARDA DERECE BAĞLANTILILIK İNDEKSİ

Herhangi bir iletişim ağının graf modelinde tepeler arasındaki iletişimi güçlendirmek, grafın sağlamlığını ölçmek veya artırmak amacıyla çeşitli ölçümlerden yararlanılmaktadır. Bu ölçümler, iletişimin işlevine ve amacına göre farklılıklar taşımaktadır. Önceki bölümde tanımlanan uzaklık indeksleri bu ölçümlerden bazılarıdır. Bu tezde grafın tepeleri arasındaki içten ayırık yolların sayısının tepe dereceleriyle beraber ilişkilendirilmesiyle, grafın güvenilirliğini ve sağlamlığını değerlendirebilecek tarafımızdan tanımlanan *Derece Bağlantılılık İndeksi* çalışılmıştır.

Tanım 3.1: Bir G grafının $u, v \in V(G)$ tepeleri için $\deg(u)$ ve $\deg(v)$ tepe dereceleri, $\kappa(u, v)$ de u ve v tepeleri arasındaki içten ayırık yolların sayısı olmak üzere, grafın *Derece Bağlantılılık İndeksi* (*Degree Connection Index*)

$$\kappa_d(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u, v)$$

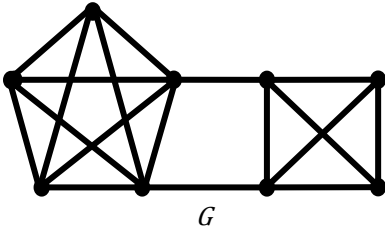
olarak tanımlanır.

Burada u, v tepe çifti için,

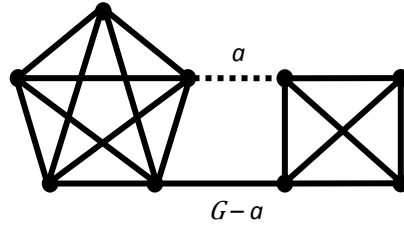
$$\kappa_d(u, v) = [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u, v)$$

ifadesine iki tepenin *yerel derece bağlantılılık değeri* (*local degree connection value*) denir.

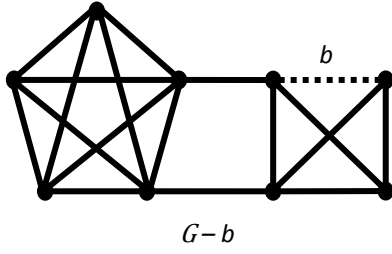
Derece bağlantılılık indeksi hesaplanırken grafın tüm tepe ikilileri için bu tepeler arasındaki içten ayırık yolların sayısının kullanılması ve bu değerin tepe dereceleriyle birlikte hesaba katılarak toplam bir değer elde edilmektedir. Yeni tanımlanmış bu indeks, grafın bozulmalara karşı direnci hakkındaki yorumlamaları daha da güvenilir yapmaktadır. Bu yorumlamayı aşağıdaki örnekte kolayca görebiliriz.



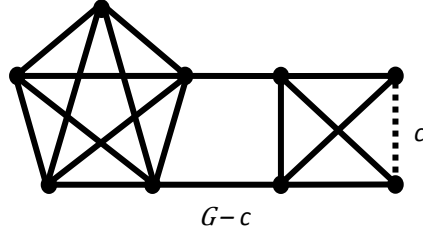
$$\begin{aligned}\kappa_d(G) &= 812 & \kappa(G) &= 2 \\ D'(G) &= 470 & K(G) &= 100\end{aligned}$$

Şekil 3.1 G Grafi

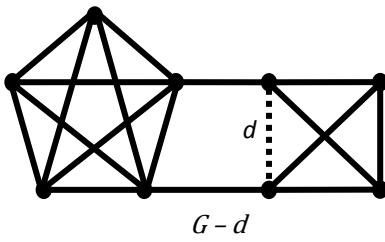
$$\begin{aligned}\kappa_d(G-a) &= 602 & \kappa(G-a) &= 1 \\ D'(G-a) &= 496 & K(G-a) &= 78\end{aligned}$$

Şekil 3.2 $G-a$ Grafi

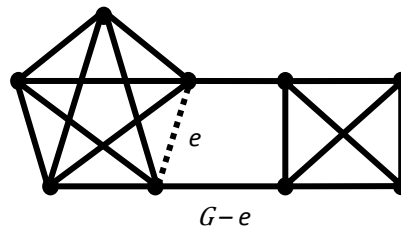
$$\begin{aligned}\kappa_d(G-b) &= 744 & \kappa(G-b) &= 2 \\ D'(G-b) &= 454 & K(G-b) &= 95\end{aligned}$$

Şekil 3.3 $G-b$ Grafi

$$\begin{aligned}\kappa_d(G-c) &= 746 & \kappa(G-c) &= 2 \\ D'(G-c) &= 442 & K(G-c) &= 95\end{aligned}$$

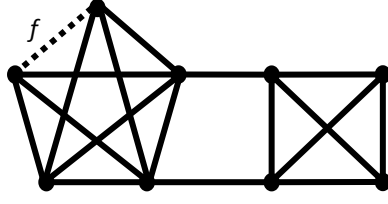
Şekil 3.4 $G-c$ Grafi

$$\begin{aligned}\kappa_d(G-d) &= 766 & \kappa(G-d) &= 2 \\ D'(G-d) &= 452 & K(G-d) &= 99\end{aligned}$$

Şekil 3.5 $G-d$ Grafi

$$\begin{aligned}\kappa_d(G-e) &= 754 & \kappa(G-e) &= 2 \\ D'(G-e) &= 456 & K(G-e) &= 99\end{aligned}$$

Şekil 3.6 $G-e$ Grafi

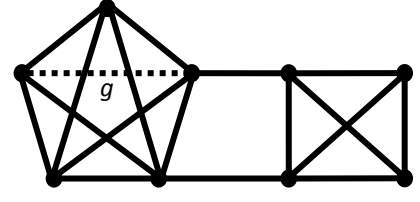
 $G-f$

$$\kappa_d(G-f) = 712$$

$$\kappa(G-f) = 2$$

$$D'(G-f) = 448$$

$$K(G-f) = 93$$

Şekil 3.7 $G-f$ Grafi $G-g$

$$\kappa_d(G-g) = 709$$

$$\kappa(G-g) = 2$$

$$D'(G-g) = 459$$

$$K(G-g) = 93$$

Şekil 3.8 $G-g$ Grafi

Şekil 3.1 deki G grafindan Şekil 3.2 de a ayrıtı Şekil 3.3 de b ayrıtı Şekil 3.4 de c ayrıtı Şekil 3.5 de d ayrıtı Şekil 3.6 de e ayrıtı Şekil 3.7 de f ayrıtı Şekil 3.8 de ise g ayrıtı çıkarılarak farklı graflar oluşturulmuş ve bu graflara ait derece bağlantılılık indeksi, derece uzaklık, bağlantılılık ve toplam bağlantılılık değerleri verilmiştir. Burada G , $G-a$, $G-b$, $G-c$, $G-d$, $G-e$, $G-f$ ve $G-g$ graflarının sağlamlık sıralaması yapılmak istenildiğinde bağlantılılık açısından en zayıf grafin $G-a$ grafi olduğu, diğer grafların ise aynı bağlantılılık verisine sahip olduğu görülür. Karşılaştırma derece uzaklık indeksi açısından incelendiğinde $G-a$ grafi diğer graflardan daha büyük derece uzaklık değerine sahipken $G-b$, $G-c$, $G-d$, $G-e$, $G-f$ ve $G-g$ graflarında G grafindan daha küçük değere sahiptir. Yani derece uzaklık değerinin büyük yada küçük olması zedelenebilirlik ölçütü olamaz dolayısıyla zedelenebilirlik açısından güvenilir bilgi veremez. Toplam bağlantılılık değerleri ile karşılaştırma yapıldığında en sağlam grafin G grafi, en zayıf grafin ise $G-a$ olduğu görülür, yalnız $G-b$ ile $G-c$ nin, $G-d$ ile $G-e$ nin ve $G-f$ ile $G-g$ graflarının toplam bağlantılılık değerleri aynıdır. Dolayısıyla bu graf ikilileri toplam bağlantılılık parametresiyle değerlendirilemez. Bu durumda farklı bir değerlendirme ölçümüne ihtiyaç vardır. Derece bağlantılılık indeksi bu ikili graflar arasında seçim yapılabilmesine olanak sağlar. $G-c$ grafinin $G-b$ grafindan, $G-d$ grafinin $G-e$ grafindan ve $G-f$ grafinin $G-g$ grafindan daha sağlam bir yapıda olduğunu gösterir. Çünkü derece bağlantılılık indeksi büyüdükçe sağlamlık artar buda Teorem 3.1.15 de gösterilmiştir.

Sonuç olarak derece bağlantılılık indeksi aynı tepe sayısına sahip iki grafin sağlamlık değerlendirmesinde zedelenebilirlik ölçümü olarak daha hasas bir değer üretir.

3.1 Bir Grafın Derece Bağlantılılık İndeksi

Bu bölümde öncelikle derece bağlantılılık indeksinin farklı bir yoldan hesaplanmasını sağlayan tanımlar verilmiş daha sonra derece bağlantılılık indeksinin diğer graf parametreleriyle arasındaki ilişkiler incelenmiş ve genel graflardaki teoremleri ve sonuçları verilmiştir.

Tanım 3.1.1: Grafın herhangi bir u tepesinin diğer tüm tepeler ile aralarındaki içten ayırık yolların sayısının toplamına, u tepesinin *yerel toplam bağlantılılığı* (*local total connectivity*) denir.

$$\kappa(u) = \sum_{v \in V} \kappa(u, v)$$

Tanım 3.1.2: Grafın herhangi bir u tepesinin yerel toplam bağlantılılığının u nun tepe derecesiyle çarpımına, u tepesinin *yerel toplam derece bağlantılılık değeri* (*local total degree connection value*) denir.

$$\kappa_d(u) = \deg(u) \kappa(u)$$

Grafın tüm tepeleri için yerel toplam derece bağlantılılıkların toplanmasıyla grafın derece bağlantılılık indeksi bulunur.

$$\kappa_d(G) = \sum_{u \in V} \kappa_d(u)$$

Derece bağlantılılık indeksi bu şekilde farklı bir yoldan hesaplanmış olur.

G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun. G nin toplam bağlantılılık değeri $K(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \kappa(u, v)$ ile tanımlanır.

Teorem 3.1.1: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş bir G grafı için, grafın toplam bağlantılılığı derece bağlantılılık indeksinden küçüktür;

$$K(G) < \kappa_d(G)$$

dir.

İspat: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun.

$$K(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \kappa(u, v)$$

$$k_d(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u, v)$$

ve $\deg(u) > 0$ ve $\deg(v) > 0$ olduğundan $K(G) < \kappa_d(G)$ dir.

Teorem 3.1.2: n tepeli birleştirilmiş herhangi bir G grafi için;

$$\bar{k}(G) < \kappa_d(G)$$

dir.

İspat: Ortalama bağlantılılık tanımı

$$\bar{\kappa}(G) = \frac{K(G)}{\binom{n}{2}}$$

dır. $n \geq 2$ için $\bar{\kappa}(G) < K(G)$ ve Teorem 3.1.1 den $K(G) < \kappa_d(G)$ olduğundan $\bar{\kappa}(G) < \kappa_d(G)$ dir.

Teorem 3.1.3: n tepeli birleştirilmiş bir G grafi için

$$\kappa_d(G) \leq 2(n-1)K(G)$$

dir.

İspat: Grafın herhangi bir tepesinin yerel toplam bağlantılılığı;

$$\kappa(u) = \sum_{v \in V} \kappa(u, v)$$

dır. Toplam bağlantılılık ise

$$K(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \kappa(u, v) = \frac{\sum_{u \in V} \kappa(u)}{2}$$

Çünkü, $\sum_{u \in V} \kappa(u)$ toplamında her tepe çifti arasındaki bağlantılılık iki defa hesaplandığından $K(G) = \frac{\sum_{u \in V} \kappa(u)}{2}$ olarak bulunur.

$$\kappa_d(u) = \deg(u) \kappa(u)$$

Bu durumda eşitliğin her iki tarafı maksimum tepe derecesi olan $n - 1$ ile çarpıldığında sol taraf herhangi bir graf için derece bağlantılılık indeksinin en büyük değerini alır dolayısıyla;

$$(n - 1) \sum_{u \in V} \kappa(u) \leq 2K(G)(n - 1)$$

$$\sum_{u \in V} (n - 1) \kappa(u) = \sum_{u \in V} \kappa_d(u) = (\kappa_d(G))_{max} \leq 2(n - 1)K(G)$$

Elde edilir ve ispat tamamlanır.

Aşağıda, derece bağlantılılık indeksi tanımının içerdiği iki tepe arasındaki içten ayrık yolların sayısının, yine bu tepeler arasındaki uzaklıklarla ilişkisi incelenmiştir:

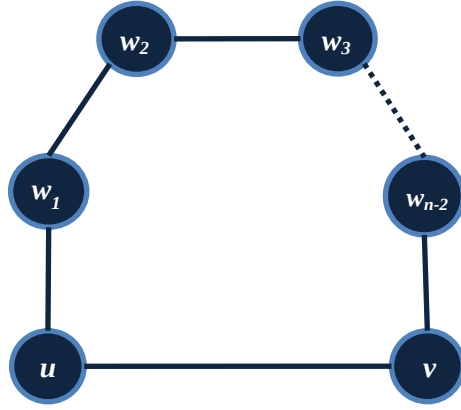
Theorem 3.1.4: n tepeli birleştirilmiş bir G grafının her $u - v$ tepe çifti için $\kappa(u,v)$ arttıkça $d(u,v)$ artmaz.

İspat: Teoremin ispatı 4 farklı durumda vardır. G grafının tepeleri Şekil 3.1.1 deki gibi adlandırılınsın.

1. Durum: n tepeli G grafının u ve v tepeleri bir ayrıtla bitişik olsun.

Bu durumda $d(u,v)=1$ ve $\kappa(u,v)=1$ dir. Eğer $u - v$ tepeleri dışındaki $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeler arasında bağlantı var ve $u - v$ arasında bu tepeler üzerinden içten ayrık yollar varsa $\kappa(u,v) \geq 1$ dir.

Bu durumda $\kappa(u,v)$ yi artırmak için $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeleriyle $u - v$ tepeleri arasındaki bağlantıları artırırsak da $u - v$ arasında bağlantı olduğundan $d(u,v)=1$ olarak kalır.

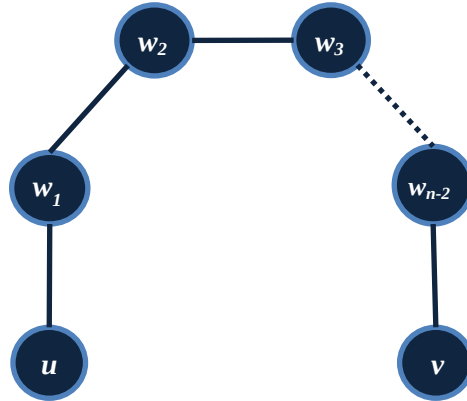


Şekil 3. 1. 1 $u-v$ tepeleri bitişik olan n tepeli G Grafi

2. Durum: n tepeli G grafının u ve v tepeleri yol grafın uç tepeleri olsun. Bu durumda Şekil 3.1.2 deki gibi $u - v$ tepeleri arasındaki içten ayırık yolların sayısı 1, uzaklığın değeri $n - 1$ dir;

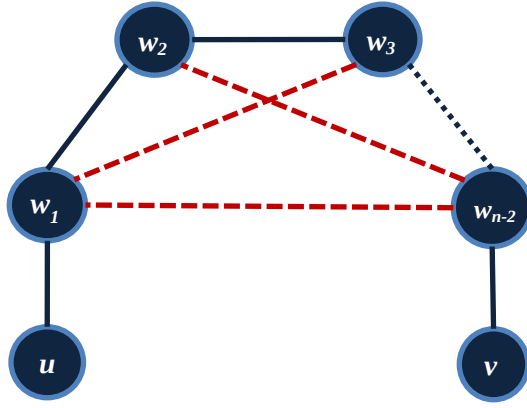
$$\kappa(u,v) = 1$$

$$d(u,v) = n - 1 \text{ dir.}$$



Şekil 3. 1. 2 $u-v$ tepeleri bitişik olmayan n tepeli G Grafi

3. Durum: u ve v ayırık tepeler ve $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeleri arasında Şekil 3.1.3 deki gibi $n - 2$ tepeli tam grafın alt grafı olacak şekilde bağlantılar olsun. Bu durum da $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeleri arasındaki ayrıtlar $\kappa(u,v)$ yi değiştirmez fakat $d(u,v)$ yi azaltır ve $d(u,v) \geq 3$ tür.



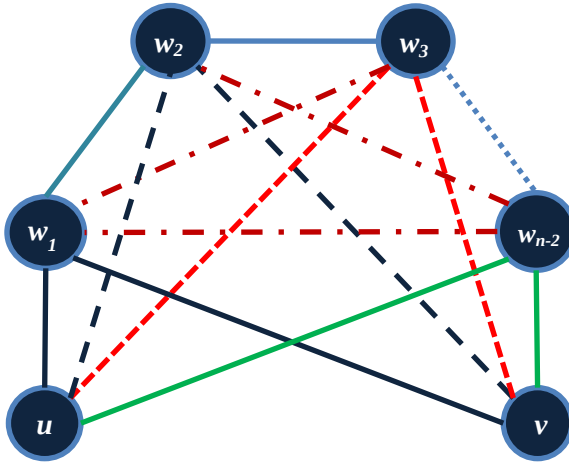
Şekil 3. 1. 3 $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeleri bitişik olan n tepeli G Grafi

4. Durum: u ve v tepelerinin her ikisi de $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepelerinden en az bir tanesiyle daha bitişik olacak şekilde bir ayırtla bağlı olması durumunda $\kappa(u,v)$ artar $d(u,v)$ azalır;

$$\kappa(u,v) \leq n - 2$$

$$d(u,v) = 2$$

Eğer u ve v tepelerinin her ikisi de Şekil 3.1.4 deki gibi $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepelerinin her biriyle bağlantılı olursa $\kappa(u,v) = n - 2$ ve $d(u,v) = 2$ değerini alır.



Şekil 3. 1. 4 $u-v$ tepeleri dışında diğer tepeleri bitişik olan n tepeli G Grafi

Sonuçta 1. durum, 2. durum, 3. durum ve 4. durumdan dolayı u ve v tepeleri arasındaki içten ayırık yolların sayısı arttıkça bu tepeler arasındaki uzaklık artmaz.

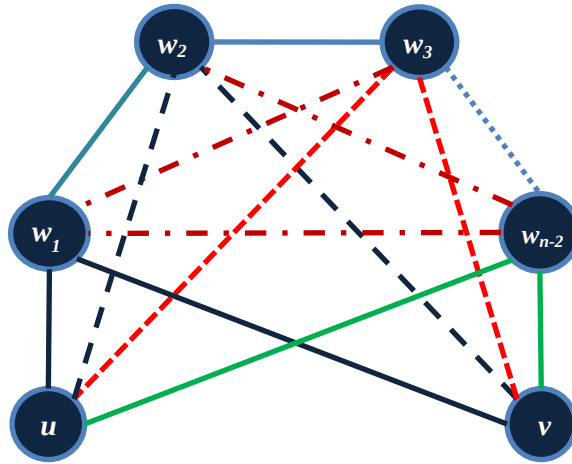
Teorem 3.1.5: $n \geq 3$ tepeli birleştirilmiş bir G grafının her $u - v$ tepe çifti için $d(u,v)$ arttıkça $\kappa(u,v)$ artmaz.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.1.4 ün ispatına benzer şekilde yapılacaktır. $u - v$ tepelerinin bitişik olup olmamalarına göre iki durum vardır.

1. Durum: G grafının $u - v$ tepeleri bitişik tepeler ise $d(u,v) = 1$ ve $1 \leq \kappa(u,v) \leq n - 1$, eğer G tam graf ise $\kappa(u,v) = n - 1$ dir. Bu durumda $d(u,v)$ yi artırmak için $u - v$ tepeleri arasındaki bağlantıyı iptal etmek gerekir ki bu da $\kappa(u,v)$ yi azaltır.

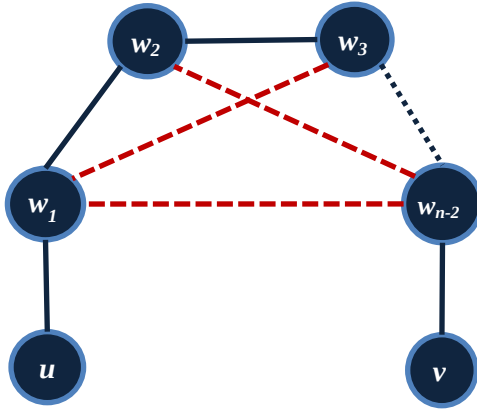
2. Durum: $u - v$ tepeleri bitişik değil ise $d(u,v) > 1$ dir. Bu durumda üç farklı durum oluşacaktır. Bunlar;

2a. Durum:

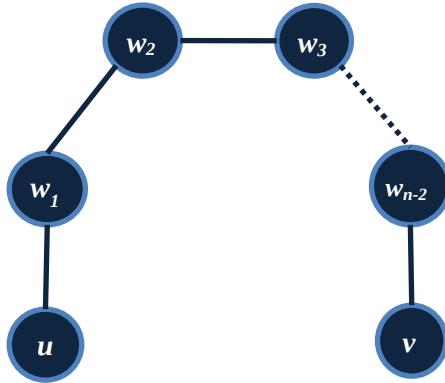


Şekil 3.1.5 $u-v$ tepeleri dışında diğer tepeleri bitişik olan n tepeli G Grafı

u ve v tepelerinin her ikisi de $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepelerinin her biriyle bitişik olursa $d(u,v) = 2$ ve $\kappa(u,v) = n - 2$ değerini alır. Eğer u ve v tepelerinin her ikisi de $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepelerinden en az bir tanesiyle bağlantılı olacak şekilde birer ayrıtla bitişik olması durumunda $d(u,v) = 2$ ve $1 \leq \kappa(u,v) \leq n - 2$. Bu durumda u ve v tepelerinin her ikisi de $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeleri ile olan bağlantıların sayısı azaldıkça $d(u,v)$ yi değiştirmez ama $\kappa(u,v)$ azalır.

2b. Durum:**Şekil 3.1.6** $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeleri bitişik olan n tepeli G Grafi

Eğer $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepelerinin oluşturduğu graf G grafının $n - 2$ tepeli alt tam grafi olsun. Bu durumda $d(u, v) = 3$ $\kappa(u, v) = 1$ dir. Eğer $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepelerinin oluşturduğu graf tam grafın alt grafi ise $3 \leq d(u, v) \leq n - 1$ ve $\kappa(u, v) = 1$ dir. Dolayısıyla $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeleri arasındaki ayrıtların azalması $d(u, v)$ yi artırır fakat $\kappa(u, v)$ yi değiştirmez.

2c. Durum:**Şekil 3.1.7** $u-v$ tepeleri bitişik olmayan n tepeli G Grafi

$w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ tepeleri arasındaki bağlantıların grafın birleştirilmişliğini bozmamak üzere yol graf olacak şekilde azalması durumunda $d(u, v) = n - 1$ olacak şekilde artar, bu durumda $\kappa(u, v) = 1$ olarak kalır.

Sonuçta 1. ve 2. durumdan dolayı u ve v tepeleri arasındaki uzaklık arttıkça içten ayırık yolların sayısı $\kappa(u, v)$ artmaz.

Teorem 3.1.6: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş bir G grafinin her $u-v$ tepe çifti için

$$d(u, v) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{\kappa(u, v)} \right\rfloor + 1$$

dir.

İspat: G grafi birleştirilmiş bir graf olduğundan grafin her $u-v$ tepe çifti için $1 \leq \kappa(u, v) \leq n-1$ dir. $u-v$ tepelerinin $\kappa(u, v)$ değeri için 3 durum ortaya çıkar.

1. Durum: Eğer $u-v$ tepeleri arasında yalnız bir tane içten ayırık yol var ise $\kappa(u, v) = 1$ dir. Bu tepeler grafin uç tepeleri ise aralarındaki uzaklık en çok $d(u, v) = n-1$ dir,

$$d(u, v) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{1} \right\rfloor + 1 = n-1 \quad \text{dir.}$$

Eğer u, v tepeleri bir ayrıtla bitişik ise $d(u, v) = 1$ dir dolayısıyla;

$$d(u, v) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{1} \right\rfloor + 1$$

$n \geq 2$ olduğu için sağlanır.

2. Durum: $u-v$ tepeleri arasındaki içten ayırık yolların sayısı en çok $\kappa(u, v) = n-1$ dir. Bu yolların $n-2$ tanesi u ve v nin dışındaki tepeler üzerinden bir tanesi de u ile v yi birleştiren ayrıt üzerindendir. Bu durumda bu tepeler arasındaki uzaklık $d(u, v) = 1$ dir. $\left\lfloor \frac{n-2}{n-1} \right\rfloor = 0$ olduğundan;

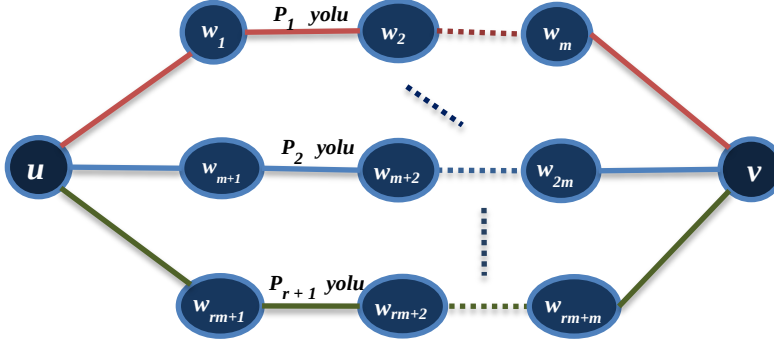
$$d(u, v) = \left\lfloor \frac{n-2}{n-1} \right\rfloor + 1 = 0 + 1 = 1$$

3. Durum: $u-v$ tepeleri arasındaki içten ayırık yolların sayısı $1 < \kappa(u, v) < n-1$ ise bu aralıktaki herhangi bir $\kappa(u, v)$ değeri için iki durum vardır.

3a. Durum: Eğer Şekil 3.1.8 deki gibi grafin $u-v$ tepeleri dışındaki $n-2$ tane tepesi için $m = \frac{n-2}{\kappa(u, v)}$ $\{m \in \mathbb{Z}^+\}$ olacak şekilde ise (tepeler içten ayırık yolların üzerine eşit olarak dağılır ise) $d(u, v)_{max} = m + 1$ dolayısıyla

$$d(u, v) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{\kappa(u, v)} \right\rfloor + 1 = m + 1$$

$$d(u, v) \leq m + 1$$



Şekil 3.1.8 G Grafi

3b. Durum: Eğer grafın u - v tepeleri dışındaki $n - 2$ tane tepesi için $m \neq \frac{n-2}{\kappa(u,v)}$ $\{m \in \mathbb{Z}^+\}$ ise $d(u, v)$ durum 3a ya göre en az 1 azalır ve $d(u, v) \leq m$ olur, $\kappa(u, v)$ değişmediğinden $\left\lfloor \frac{n-2}{\kappa(u,v)} \right\rfloor$ değeri de azalmaz dolayısıyla

$$d(u, v) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{\kappa(u,v)} \right\rfloor + 1 \text{ olur.}$$

Eğer $P_1, P_2, \dots, P_{r+1}$ yollarındaki tepeler arasında bağlantılar varsa ve bunlar kullanılarak içten ayrık yolların sayısını değiştirir ise bu durumda Durum 3 geçerlidir.

Durum 1, 2 ve 3 ten dolayı ispat tamamlanmıştır.

Teorem 3.1.7: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş bir G grafının her u - v tepe çifti için

$$\kappa(u, v) \leq 2 \left\lfloor \frac{n-2}{d(u, v)} \right\rfloor + 1$$

dir.

İspat: G grafi birleştirilmiş bir graf olduğundan grafın her u - v tepe çifti için $1 \leq d(u, v) \leq n - 1$ dir. u - v tepelerinin $d(u, v)$ değeri için 3 durum ortaya çıkar.

1. Durum: Eğer $u-v$ tepeleri arasındaki uzaklık $d(u, v) = 1$ ise bu tepeler 1 ayrıtla bitişik olacağından içten ayrık yolların sayısı $1 \leq \kappa(u, v) \leq n - 1$ dir.

$$\kappa(u, v) \leq 2 \left\lfloor \frac{n-2}{1} \right\rfloor + 1 = 2n - 3$$

$n \geq 2$ olduğu için sağlanır.

2. Durum: $u-v$ tepeleri arasındaki uzaklık $d(u, v) = n - 1$ ise bu durumda tepeler grafin kenar tepeleri olacağından aralarındaki içten ayrık yolların sayısı $\kappa(u, v) = 1$ dir ve $\left\lfloor \frac{n-2}{n-1} \right\rfloor = 0$ dir, dolayısıyla

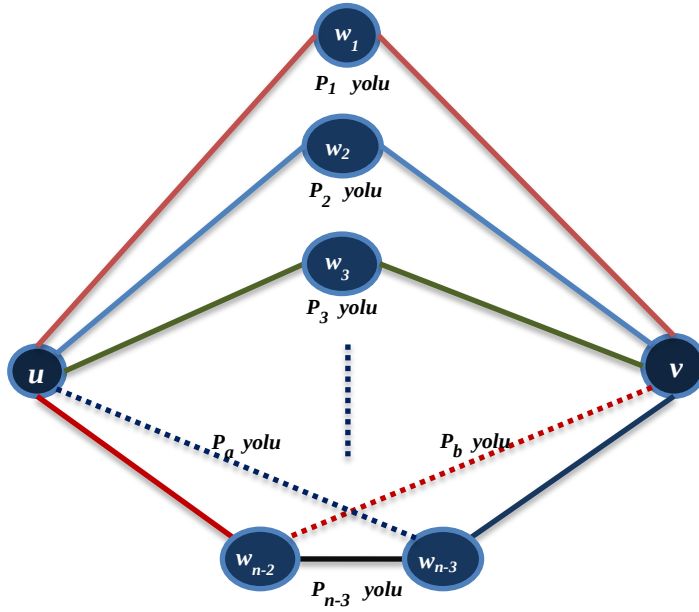
$$\kappa(u, v) = 2 \left\lfloor \frac{n-2}{n-1} \right\rfloor + 1 = 0 + 1 = 1$$

dir.

3. Durum: $u-v$ tepeleri arasındaki uzaklık $1 < d(u, v) < n - 1$ ise bu aralıktaki herhangi bir $d(u, v)$ değeri için üç durum vardır.

3a. Durum: Eğer Şekil 3.1.9 deki gibi grafin u ve v tepeleri arasında $u-v$ tepeleri dışındaki $n - 2$ tane tepesi üzerinden farklı $n - 2$ tane $d(u, v) = 2$ olan yol vardır.

$m = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, \{m \in \mathbb{Z}^+\}$ ise burada $2m + 3 \geq n$ ve $\kappa(u, v) = n - 2 \leq 2m + 1$ dir, $\kappa(u, v) \leq 2 \left\lfloor \frac{n-2}{d(u,v)} \right\rfloor + 1$ sağlanır.



Şekil 3.1.9 G Grafi

3b. Durum: Eğer Şekil 3.1.9 deki gibi P_a ve P_b yolları iptal edilir ve w_{n-2} ve w_{n-3} i içeren P_{n-3} yolu kullanılır ise bu durum $d(u, v)$ yi değiştirmez ama $\kappa(u, v)$ 1 azalır. Dolayısıyla eşitsizlik korunur.

3c. Durum: Eğer Şekil 3.1.8 deki grafin u - v tepeleri dışındaki $n - 2$ tane tepesi için $m = \frac{n-2}{\kappa(u,v)}$ $\{m \in \mathbb{Z}^+\}$ olacak şekilde (tepeler içten ayrık yolların üzerine eşit olarak dağılır ise) $d(u, v)_{max} = m + 1$ olur.

$$m + 1 = \frac{n - 2}{\kappa(u, v)} + 1$$

$$d(u, v) = \frac{(n - 2) + \kappa(u, v)}{\kappa(u, v)}$$

$$\kappa(u, v) = \frac{(n - 2) + \kappa(u, v)}{d(u, v)}$$

$$\kappa(u, v) = \frac{(n-2)+\kappa(u,v)}{m+1} \leq \frac{2(n-2)}{m+1} \quad \{\kappa(u, v) \leq n - 2\}$$

$$\kappa(u, v) \leq \left\lfloor \frac{2(n-2)}{m+1} \right\rfloor \quad \{\kappa(u, v) \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\kappa(u, v) \leq \left\lfloor \frac{2(n-2)}{m+1} \right\rfloor \leq 2 \left\lfloor \frac{n-2}{m+1} \right\rfloor + 1 = 2 \left\lfloor \frac{n-2}{d(u, v)} \right\rfloor + 1$$

dir. Durum 1, 2 ve 3 ten dolayı ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 3.1.1: $n \geq 3$ tepeli birleştirilmiş bir G grafinin her u - v tepe çifti için

$$\kappa(u, v) d(u, v) \leq 2n - 3$$

dir.

İspat:

1. Durum: Teorem 3.1.6 dan

$$d(u, v) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{\kappa(u, v)} \right\rfloor + 1 \leq \frac{n-2}{\kappa(u, v)} + 1$$

$$d(u, v) \leq \frac{n-2}{\kappa(u, v)} + 1 \leq \frac{n-2 + \kappa(u, v)}{\kappa(u, v)}$$

$$\kappa(u, v) d(u, v) \leq n - 2 + \kappa(u, v)$$

$$\kappa(u, v)_{\max} \leq n - 1 \quad \text{olduğundan}$$

$$\kappa(u, v) d(u, v) \leq n - 2 + n - 1$$

$$\kappa(u, v) d(u, v) \leq 2n - 3$$

dir.

2. Durum: Teorem 3.1.7 den

$$\kappa(u, v) \leq 2 \left\lfloor \frac{n-2}{d(u, v)} \right\rfloor + 1 \leq 2 \frac{n-2}{d(u, v)} + 1$$

$$\kappa(u, v) \leq \frac{2n-4}{d(u, v)} + 1 \leq \frac{2n-4 + d(u, v)}{d(u, v)}$$

$$\kappa(u, v) d(u, v) \leq 2n - 4 + d(u, v)$$

$$d(u, v)_{\max} \leq n - 1$$

olduğundan

$$\kappa(u, v) d(u, v) \leq 2n - 4 + n - 1$$

$$\kappa(u, v) d(u, v) \leq 3n - 5$$

dir.

Durum 1 ve 2 den

$$\kappa(u, v) d(u, v) \leq 3n - 5$$

$$\kappa(u, v) d(u, v) \leq 2n - 3$$

dir. Bu durumda

$$2n - 3 \leq 3n - 5$$

$$5 - 3 \leq 3n - 2n$$

$$2 \leq n$$

olduğundan $\kappa(u, v) d(u, v) \leq 2n - 3 \leq 3n - 5$

dir. Sonuç olarak en iyi yaklaşım

$$\kappa(u, v) d(u, v) \leq 2n - 3$$

dir.

Şimdi de ağaç graflarda içten ayrık yollar, tepe ve ayrıt sayılarıyla ilgili yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 3.1.1: Bir ağaçta bir tepe çifti arasında tam bir yol vardır (Lawler, 2001).

$\forall u, v \in T$ için $\kappa(u, v) = 1$ dir.

Yardımcı Teorem 3.1.2: n tepeli P yol grafi ve T ağacının toplam ayrıt sayısı $n - 1$ dir (Lawler, 2001).

Genel graf tiplerinden olan ağaç yapılarında derece bağlantılılık indeksinin genel ifadesini aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1.8: n tepeli bir T ağacı için derece bağlantılılık indeksi

$$\kappa_d(T_n) = 2(n-1)^2 \text{ dir.}$$

İspat:

$$\kappa_d(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u,v)$$

Ağaçlar için Yardımcı Teorem 3.1.1 den $\kappa(u,v)=1$ olduğundan

$$\kappa_d(T) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] 1$$

n tepeli grafın $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tane $u-v$ ikili alt kümesi vardır. Bu alt kümelerde her tepe $n-1$ defa kullanılır. Dolayısıyla her tepenin derecesi $n-1$ defa toplanmış olur.

$$= (n-1)\deg(v_1) + (n-1)\deg(v_2) + \dots + (n-1)\deg(v_n)$$

$$= (n-1)[\deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n)]$$

Teorem 2.1.2 ve Yardımcı Teorem 3.1.2 den dolayı

$$= (n-1)[2(n-1)]$$

$$= 2(n-1)^2$$

dir.

Derece bağlantılılık indeksinin herhangi bir G grafı için alabileceği en büyük ve en küçük değer aralığı bir sonraki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.1.9: n tepeli G grafının derece bağlantılılık indeksi $\kappa_d(G)$ için $2(n-1)^2 \leq \kappa_d(G) \leq n(n-1)^3$ dir.

İspat: n tepeli G grafinın Derece Bağlantılılık İndeksi $\kappa_d(G)$ nin en büyük değerini alması grafin tepe derecelerinin ve tepe ikilileri arasındaki içten ayık yolların sayısının en büyük olması ile mümkündür. Herhangi bir grafin tepe dereceleri en çok $n-1$ dir ve aynı zamanda tepe ikilileri arasındaki içten ayık yolların sayısı en çok o tepelerden tepe derecesi küçük olan tepenin tepe derecesine eşit veya daha küçüktür (Teorem 2.1.5). Dolayısıyla tepe ikililerinin tepe dereceleri ne kadar büyük olursa içten ayık yolların sayısı da o kadar büyük olur. Bu durum tam grafta mümkündür. Sonuç olarak $\kappa_d(G)$ nin en büyük değerini alması için grafin tam graf (K_n) olması gerekir.

$\kappa_d(G)$ nin en küçük değeri alması için grafin içten ayık yollarının sayısının 1 ve tepe derecelerinin toplamının en küçük olması gerekir bu da grafin n tepeli ağaç veya yol graf olmasıyla mümkündür. Dolayısıyla derece bağlantılılık indeksi $\kappa_d(G)$ nin en küçük değeri ağaçlarda mümkündür. $\kappa_d(T_n)$ Teorem 3.1.8 de ispatlanmıştır. Dolayısıyla $\kappa_d(G)$ nin sınırları aşağıdaki gibidir.

$$\kappa_d(T_n) \leq \kappa_d(G) \leq \kappa_d(K_n)$$

Bura da n tepeli tam grafin tüm tepe dereceleri $n - 1$ dir. Bütün tepe çiftleri için $\kappa(u,v) = n - 1$ dir. Dolayısıyla tam grafin derece bağlantılılık indeksini;

$$\kappa_d(K_n) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u, v)$$

$$\kappa_d(K_n) = \binom{n}{2} [(n - 1) + (n - 1)](n - 1)$$

$$\kappa_d(K_n) = \frac{n(n - 1)}{2} [2(n - 1)](n - 1)$$

$$\kappa_d(K_n) = n(n - 1)^3$$

olarak hesaplanır.

Ağaçlar için ise $\kappa_d(G) = 2(n - 1)^2$ olduğundan

$$\kappa_d(T_n) \leq \kappa_d(G) \leq \kappa_d(K_n)$$

$$2(n - 1)^2 \leq \kappa_d(G) \leq n(n - 1)^3 \quad \text{dir.}$$

Teorem 3.1.10: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş bir G grafi için, grafin örtü sayısı ile derece bağlantılılık indeksi arasında $\alpha(G) < \kappa_d(G)$ bağıntısı vardır.

İspat: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun.

$$1 \leq \alpha(G) \leq n - 1$$

$$2(n - 1)^2 \leq \kappa_d(G) \leq n(n - 1)^3$$

eşitsizliklerinde $n - 1 < 2(n - 1)^2$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$$0 < 2(n - 1)^2 - n - 1$$

$$0 < (n - 1)[2(n - 1) - 1]$$

$$0 < (n - 1)[2n - 3]$$

$n \geq 2$ olduğundan $n - 1 < 2(n - 1)^2$ eşitsizliği sağlanmıştır.

Teorem 3.1.11: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş bir G grafi için, grafin bağımsızlık sayısı ve derece bağlantılılık indeksi için $\beta(G) < \kappa_d(G)$ dir.

İspat: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun.

$$1 \leq \beta(G) \leq n - 1$$

$$2(n - 1)^2 \leq \kappa_d(G) \leq n(n - 1)^3$$

eşitsizliğinde $n - 1 < 2(n - 1)^2$ olduğunu gösterilmesi yeterlidir. Bu eşitsizliğin ispatı Teorem 3.1.10 da yapılmıştır.

Teorem 3.1.12: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş herhangi bir G grafi için, grafin baskınlık sayısı ve derece bağlantılılık indeksi arasında $\gamma(G) < \kappa_d(G)$ bağıntısı vardır.

İspat: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun.

$$1 \leq \gamma(G) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

$$2(n-1)^2 \leq \kappa_d(G) \leq n(n-1)^3$$

eşitsizliklerinde $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil < \frac{n}{2}$ olduğundan $\frac{n}{2} < 2(n-1)^2$ eşitsizliğinin gösterilmesi yeterlidir.

$n \geq 2$ olmak üzere $\frac{n}{2} < 2(n-1)^2$ eşitsizliği sağlandığı aşıkardır.

Teorem 3.1.13: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş bir G grafi için, grafin yarıçap değeri ve derece bağlantılılık indeksi arasındaki bağıntı $r(G) < \kappa_d(G)$ biçimindedir.

İspat: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun.

$$1 \leq r(G) \leq \frac{n}{2}$$

$$2(n-1)^2 \leq \kappa_d(G) \leq n(n-1)^3$$

eşitsizliğinde $\frac{n}{2} < 2(n-1)^2$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bu ispat Teorem 3.1.12 da yapılmıştır.

Teorem 3.1.14: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş bir G grafi için, grafin çap değeri ve derece bağlantılılık indeksi arasındaki bağıntı $diam(G) < \kappa_d(G)$ dir.

İspat: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun.

$$1 \leq diam(G) \leq n-1$$

$$2(n-1)^2 \leq \kappa_d(G) \leq n(n-1)^3$$

eşitsizliğinde $n-1 < 2(n-1)^2$ olduğunu gösterilmesi yeterlidir. Bu ispat Teoram 3.1.10 de yapılmıştır.

Teorem 3.1.15: Herhangi bir G grafindan bir e ayrıtının çıkarılması grafin derece bağlantılılık indeksini azaltır.

$$\kappa_d(G - e) < \kappa_d(G)$$

dir.

İspat: İspat üç durumda incelenecektir. Burada G nin herhangi iki u ve v tepesi ve bu tepeleri birleştiren ayrıt e olsun. $a, b, t \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere G grafi için $\deg(u)=a$, $\deg(v)=b$ ve $\kappa(u,v)=t$ olsun.

1. Durum: Graftan çıkarılan e ayrıtı grafının birleştirilmişliğini bozmayan bir ayrıt olsun. Bu durumda G nin birleştirilmişliğinin bozulmaması için $a, b, t > 2$ olmalıdır. Çünkü $G - e$ grafi için $\deg(u)=a-1$, $\deg(v)=b-1$ ve $\kappa(u,v)=t-1$ olur. Dolayısıyla G grafindaki $u-v$ tepe ikilisi için derece bağlantılılık indeksi $\kappa_d(G)$ hesaplanırken

$$\kappa_d(u, v) = [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u, v) = (a + b)t$$

olan değer $G - e$ de $u-v$ tepe çifti için $\kappa_d(G - e)$ hesaplanırken

$$\kappa_d(u, v) = [a - 1 + b - 1](t - 1)$$

olur ki bu durumda ikinci hesaplama ilk hesaplamadan küçüktür. Bunun dışında u tepesiyle grafta varsa v tepesi dışındaki ve v tepesiyle de u tepesi dışındaki tepe ikililerinin $[\deg(m) + \deg(n)]\kappa(m, n)$ değeri hesaplanırken u ve v nin tepe dereceleri birer azaldığı için içten ayrık yolların sayısı azalmasa bile derece bağlantılılık değeri azalır, dolayısıyla $\kappa_d(G - e) < \kappa_d(G)$ dir.

2. Durum: G den çıkarılan e ayrıtı grafın v tepesini izole tepe olarak bıraksın. Bu durum da yine $\kappa_d(G - e) < \kappa_d(G)$ olur, çünkü G nin n tane tepesi varken $G - e$ grafın da $n - 1$ tane tepeden oluşan birleştirilmiş graf ve bir izole tepe olacaktır. Bu durum da $\kappa_d(G)$ hesaplanırken $\binom{n}{2}$ tane durum varken $\kappa_d(G - e)$ hesaplanırken $\binom{n-1}{2}$ tane durum olacağından $\kappa_d(G - e) < \kappa_d(G)$ olur.

3. Durum: Çıkarılan e ayrıtı G grafını $n_1 + n_2 = n$ olacak şekilde n_1 ve n_2 tepeli G_1 ve G_2 graflarına ayırsın. Dolayısıyla $\binom{n}{2} > \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}$ olduğundan $\kappa_d(G) > \kappa_d(G_1) + \kappa_d(G_2)$ dir

Durum 1, 2 ve 3 den dolayı $\kappa_d(G - e) < \kappa_d(G)$ dir.

Teorem 3.1.16: Herhangi bir G grafindan bir v tepesinin çıkarılması durumunda grafın derece bağlantılılık indeksi

$$\kappa_d(G - v) < \kappa_d(G)$$

dir.

İspat: Bir graftan bir tepe çıkarıldığında graftan en az 1 ayrıt eksilmiştir olur. Dolayısıyla Teorem 3.1.15 den dolayı $G - v$ grafının derece bağlantılılık değeri G nin derece bağlantılılık değerinden daha küçüktür.

Sonuç 3.1.2: H grafi n tepeli G grafının birleştirilmiş bir alt grafi olmak üzere;

$$\kappa_d(H) < \kappa_d(G)$$

dir.

İspat: H grafi G grafının alt grafi olduğundan G den tepe veya ayrıt çıkarılarak oluşturulmuş bir graftır. Dolayısıyla Teorem 3.1.15 den ve Teorem 3.1.16 dan dolayı H nin derece bağlantılılık indeksi G nin derece bağlantılılık indeksinden küçüktür.

Dolayısıyla herhangi bir G grafına bir v tepesinin toplanmasıyla oluşan grafın derece bağlantılılık indeksi artar.

$$\kappa_d(G + v) > \kappa_d(G)$$

dir.

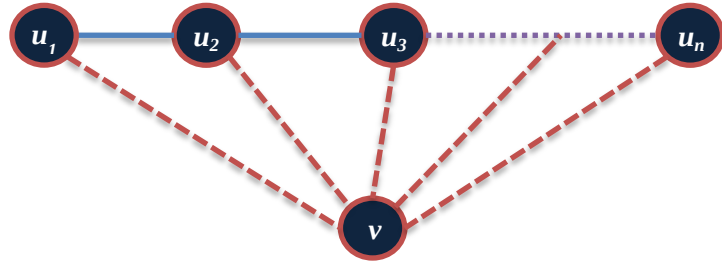
Çünkü G , n tepeli herhangi bir graf olsun. G grafına v tepesinin toplanmasıyla oluşan $G + v$ grafi $n+1$ tepeli bir graf, v tepesi n dereceli bir tepe ve $G + v$ nin v dışındaki tepelerinin dereceleri de G dekilerin 1 fazlası olacağından derece bağlantılılık indeksi $\kappa_d(G)$ hesaplanırken $\binom{n}{2}$ tane durum yerine $\binom{n+1}{2}$ tane durum hesaplanır. Hem durum sayısındaki artma hem tepe derecelerindeki artma hem de herhangi tepe çifti için toplanan tepe üzerinden farklı içten ayrık yolların hesaplanmasından dolayı artma olur. Bunlar da $\kappa_d(G + v)$ nin değerini $\kappa_d(G)$ den daha büyük yapar. Dolayısıyla $\kappa_d(G + v) > \kappa_d(G)$ olur.

Sonuç 3.1.3: n tepeli P_n yol grafına bir v tepesinin toplanmasıyla oluşan grafın derece bağlantılılık indeksi;

$$\kappa_d(P_n + v) = 3(3n + 2)(n - 1)$$

dir.

İspat: P_n grafına v tepesinin toplanmasıyla oluşan $P_n + v$ grafi $n+1$ tepeli bir graftır. Bu durumda $\kappa_d(P_n + v)$ hesaplanırken $\binom{n+1}{2}$ kombinasyonu kadar durum vardı. Bu durumlar 5 farklı grupta incelenir.



Şekil 3.1.10 $P_n + v$ Grafi

1. Durum: u_1 ve u_n tepe çifti 2 dereceli tepelerdir ve bir çifttir. Aralarındaki içten ayrık yolların sayısı 2 dir. Dolayısıyla bu grubun $\kappa_d(P_n + v)$ ye katkısı $1(2 + 2)2$ kadardır.

2. Durum: 2 dereceli u_1 ve u_n tepeleriyle n dereceli v tepesinin ikilileri 2 adettir. Aralarındaki içten ayrık yolların sayısı 2 dir. Dolayısıyla bu grubun $\kappa_d(P_n + v)$ ye katkısı $2(2 + n)2$ kadardır.

3. Durum: 3 dereceli $u_2 \dots u_{n-1}$ tepeleri arasındaki ikililerin sayısı $\binom{n-2}{2}$ adettir. Aralarındaki içten ayrık yolların sayısı 2 dir. Dolayısıyla bu grubun $\kappa_d(P_n + v)$ ye katkısı $\frac{(n-2)(n-3)}{2}(3 + 3)2 = 6(n - 2)(n - 3)$ kadardır.

4. Durum: 3 dereceli $u_2 \dots u_{n-1}$ tepeleriyle n dereceli v tepesi arasındaki ikililerin sayısı $(n - 2)$ adettir. Aralarındaki içten ayrık yolların sayısı 3 tür. Dolayısıyla bu grubun $\kappa_d(P_n + v)$ ye katkısı $(n - 2)(3 + n)3$ kadardır.

5. Durum: 2 dereceli u_1 ve u_n tepeleriyle 3 dereceli $u_2 \dots u_{n-1}$ tepeleri arasındaki ikililerin sayısı $2(n-2)$ adettir. Aralarındaki içten ayrık yolların sayısı 2 dir. Dolayısıyla bu grubun $\kappa_d(P_n + v)$ ye katkısı $2(n-2)(2+3)2$ kadardır.

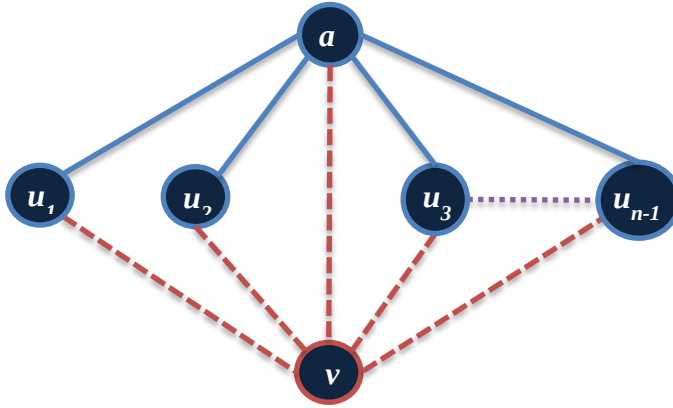
$$\kappa_d(P_n + v) = 8 + 4(n+2) + 6(n-2)(n-3) + 3(n-2)(n+3) + 20(n-2)$$

düzenlendiğinde $\kappa_d(P_n + v) = 3(3n+2)(n-1)$ olarak bulunur.

Sonuç 3.1.4: n tepeli yıldız graf S_n e bir v tepesinin toplanmasıyla oluşan grafın derece bağlantılılık indeksi;

$$\kappa_d(S_n + v) = 2n(5n-4) \text{ dir.}$$

İspat: S_n 'e v tepesinin toplanmasıyla oluşan $S_n + v$ grafi $n+1$ tepeli bir graftır. Bu durumda $\kappa_d(S_n + v)$ hesaplanırken $\binom{n+1}{2}$ kombinasyonu kadar durum vardır. Bu durumlar üç farklı grupta incelenir.



Şekil 3.1.11 $S_n + v$ Grafi

1. Durum: n dereceli a tepesiyle yine n dereceli v tepesinin ikilisi 1 adettir. Aralarındaki içten ayrık yolların sayısı n dir. Dolayısıyla bu grubun $\kappa_d(S_n + v)$ ye katkısı $(n+n)n$ kadardır.

2. Durum: 2 dereceli $u_1 \dots u_{n-1}$ tepeleri arasındaki ikililerin sayısı $\binom{n-1}{2}$ adettir. Aralarındaki içten ayrık yolların sayısı 2 dir. Dolayısıyla bu grubun $\kappa_d(S_n + v)$ ye katkısı $\frac{(n-1)(n-2)}{2} (2+2)2 = 4(n-1)(n-2)$ kadardır.

3. Durum: n dereceli a ve v tepeleriyle 2 dereceli $u_1, \dots, u_{n-1}$ tepeleri arasındaki ikililerin sayısı $2(n-1)$ adettir. Aralarındaki içten ayırık yolların sayısı 2 dir. Dolayısıyla bu grubun $\kappa_d(S_n + v)$ ye katkısı $2(n-1)(2+n)2$ kadardır.

$$\kappa_d(S_n + v) = 2n^2 + 4(n-1)(n-2) + 2(n-1)(n+2)$$

düzenlendiğinde $\kappa_d(S_n + v) = 2n(5n-4)$ olarak bulunur.

Sonuç 3.1.5: T , $n \geq 3$ tepeli herhangi bir ağaç graf olmak üzere, T ağacına toplanan bir v tepesi için derece bağlantılılık indeksi

$$\kappa_d(P_n + v) \leq \kappa_d(T_n + v) \leq \kappa_d(S_n + v)$$

dir.

İspat: n tepeli G grafının derece bağlantılılık indeksi hesaplanırken $\frac{n(n-1)}{2}$ tane durum vardır. Bir v tepesi de bu durumların $n-1$ tanesinde vardır ve her tepe $n-1$ defa kullanılır. Yardımcı Teorem 3.1.2 den dolayı da ağaçtaki ayırıt sayısı $n-1$ dir. Teorem 2.1.2 den dolayı bir grafın tepe dereceleri toplamı ayırıt sayısının iki katıdır. Sonuç olarak ağaçlarda derece bağlantılılık indeksi hesaplanırken oluşan tüm durumlardaki tepe dereceleri toplamı $2(n-1)^2$ dir. Bu durumda ağaça bir v tepesinin eklenmesiyle oluşan grafın derece bağlantılılık indeksi hesaplanırken oluşan tüm grafların tepe ikililerinin dereceleri toplamı yine aynı olur ancak derece bağlantılılık indeksini etkileyen faktör tepe ikilileri arasındaki içten ayırık yolların sayısıdır.

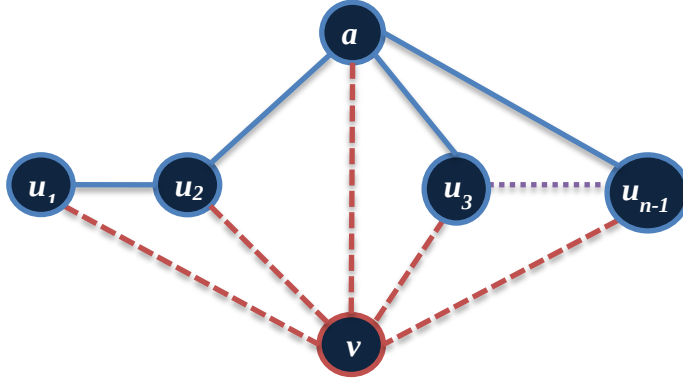
Tüm ağaçların yarıçapları yarıçapı en küçük 1 olan S_n yıldız grafı ve yarıçapı en büyük $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olan P_n yol grafı arasındadır. Bu S_n den P_n ye yarıçapı artan ağaç graflara bir v tepesinin toplanmasıyla oluşan grafların tepe ikilileri arasındaki içten ayırık yolların sayısı azalır. Şöyle ki Şekil 3.1.11 da yıldız grafa toplanan v tepesiyle oluşan grafa;

1. Durum: $u_1 \dots u_{n-1}$ tepeleri arasında içten ayırık 2 yol vardır.

2. Durum: $u_1 \dots u_{n-1}$ tepeleriyle a ve v tepeleri arasında yine 2 yol vardır.

3. Durum: a ve v tepeleri arasında da $n-1$ tane yol vardır.

Burada S_n ’e v tepesi toplamadan önceki grafın yarıçapını bir artırmak için u_1 tepesini a tepesi yerine u_2 tepesine birleştirek bu durumda Şekil 3.1.12 oluşur.



Şekil 3.1.12 $n+1$ tepeli G Grafı

Bu durumda

1. **Durum:** $u_1 \dots u_{n-1}$ tepeleri arasında içten ayık 2 yol vardır.
2. **Durum:** $u_1 \dots u_{n-1}$ tepeleriyle a ve v tepeleri arasında yine 2 yol vardır.
3. **Durum:** a ve v tepeleri arasında da $n-2$ tane yol vardır.

Dolayısıyla 3. durumdaki içten ayık yol sayısı 1 azaldığından dolayı derece bağlantılılık indeksi azalır. Bu durum bundan sonraki yarıçapın arttığı bütün ağaçlar için benzer şekildedir. Dolayısıyla

$$\kappa_d(P_n + v) \leq \kappa_d(T_n + v) \leq \kappa_d(S_n + v)$$

$$3(3n + 2)(n - 1) \leq \kappa_d(T_n + v) \leq 2n(5n - 4)$$

dir.

Teorem 3.1.17: n tepeli herhangi bir G grafına bir v tepesinin toplanmasıyla oluşan grafın derece bağlantılılık indeksi;

$$3(3n + 2)(n - 1) \leq \kappa_d(G + v) \leq (n + 1)n^3$$

dir.

İspat: Teorem 3.1.9 den dolayı bir grafın derece bağlantılılık indeksinin en büyük olması için o grafın tam graf olması gerekir. Dolayısıyla n tepeli tam bir grafa bir v tepesinin toplanmasıyla oluşan $G + v$ grafi yine $n+1$ tepeli bir tam graf olacaktır. Dolayısıyla $n+1$ tepeli $G + v$ grafi $n+1$ tepeli K_{n+1} tam grafi olacağından derece bağlantılılık indeksi $\kappa_d(G + v) = \kappa_d(K_{n+1}) = (n + 1)n^3$ tür. Bu da $\kappa_d(G + v)$ nin en büyük değeridir.

Derece bağlantılılık indeksinin en küçük değeri için Teorem 3.1.9 den dolayı grafın ağaç ya da yol graf olması gerekir. G ye bir v tepesinin toplanmasıyla oluşan $G + v$ grafi $n+1$ tepeli bir graf olur. Sonuç 3.1.5 den dolayı $G + v$ grafi en küçük değerini $\kappa_d(P_n + v)$ de alır. $\kappa_d(P_n + v) \leq \kappa_d(G + v)$ dir. Sonuç 3.1.3 ten $\kappa_d(P_n + v) = 3(3n + 2)(n - 1)$ dir.

3.2 Temel Graf Sınıflarında Derece Bağlantılılık İndeksi Üzerine Sonuçlar

Bu bölümde temel graf sınıflarında derece bağlantılılık indeksi için genellemeler verilmiştir.

Sonuç 3.2.1: n tepeli yol grafın derece bağlantılılık indeksi $\kappa_d(P_n) = 2(n - 1)^2$ dir.

İspat: n tepeli yol grafın tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yolların sayısı yani $\kappa(u,v)=1$ olduğundan derece bağlantılılık indeksi grafın bütün tepe çiftlerinin derecelerini toplamına eşit olacaktır. Dolayısıyla $\binom{n}{2}$ si tane $(u, v) \in V$ tepe ikilisi vardır. Bu ikililerin 1 tanesi uç tepelerdir ve dereceleri toplamı 2 dir. $\binom{n-2}{2}$ tanesinin dereceleri toplamı 4 tür. Geriye kalan tepe ikililerinin ise dereceleri toplamı 3 tür.

Sonuç olarak yol grafın derece bağlantılılık indeksi;

$$\kappa_d(P_n) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u, v)$$

$$\kappa_d(P_n) = 3 \left[\binom{n}{2} - \binom{n-2}{2} - 1 \right] + 4 \binom{n-2}{2} + 2$$

$$\kappa_d(P_n) = 2n^2 - 4n - 2$$

$$\kappa_d(P_n) = 2(n-1)^2 \text{ olur.}$$

Sonuç 3.2.2: n tepeli çevre grafin derece bağlantılık indeksi

$$\kappa_d(C_n) = 4n^2 - 4n \text{ dir.}$$

İspat: Çevre grafin tüm tepe ikilileri arasındaki içten ayrık yolların sayısı $\kappa(u,v)=2$ dir ve her tepesi için $\deg(u)=2$ olduğundan, tepe çiftlerinin sayısını ikili tepe derecelerinin toplamının 2 katı olan 8 ile çarpımı çevre grafin derece bağlantılık indeksini verir.

$$\kappa_d(C_n) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u,v)$$

$$\kappa_d(C_n) = 8 \binom{n}{2}$$

$$\kappa_d(C_n) = 8 \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\kappa_d(C_n) = 4n(n-1)$$

$$\kappa_d(C_n) = 4n^2 - 4n \text{ dir.}$$

Sonuç 3.2.3: n tepeli yıldız grafin derece bağlantılık indeksi

$$\kappa_d(S_n) = 2(n-1)^2 \text{ dir.}$$

İspat: n tepeli yıldız grafta tüm tepe ikilileri arasındaki içten ayrık yolların sayısı $\kappa(u,v)=1$ dir. Grafin bir tepesi için $\deg(u) = n-1$ diğer tüm tepeleri için $\deg(u)=1$ olduğundan grafin tepelerini 2 grupta inceleyebiliriz. 1 dereceli tepelerin 2 elemanlı alt küme sayısı $\binom{n-1}{2}$, 1 ve 2 derecelilerin sayısı $n-1$ tanedir. Tüm bunlardan;

$$\kappa_d(S_n) = 2 \binom{n-1}{2} + (n-1)(n-1+1)$$

$$\kappa_d(S_n) = 2 \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1)n$$

$$\kappa_d(S_n) = 2(n-1)(n-1)$$

$$\kappa_d(S_n) = 2(n-1)^2 \text{ elde edilir.}$$

Sonuç 3.2.4: n tepeli tekerlek grafin derece bağlantılılık indeksi $\kappa_d(W_{1,n-1}) = 12(n-1)^2$ dir.

İspat: Tekerlek grafta $n-1$ tane 3 dereceli, 1 tane $n-1$ dereceli tepe vardır. Bütün tepe çiftleri için içten ayrık yolların sayısı $\kappa(u,v)=3$ tür. 1 tepesi için $\deg(u)=n-1$ diğer tüm tepeleri için $\deg(u)=3$ olduğundan, grafin tepelerini 2 grupta inceleyebiliriz. 3 dereceli tepelerin 2 elemanlı alt küme sayısı $\binom{n-1}{2}$, 3 ve $n-1$ dereceli tepelerin 2 li alt kümelerinin sayısı $n-1$ tanedir. Sonuç olarak, derece bağlantılık indeksi;

$$\kappa_d(W_{1,n-1}) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u, v)$$

$$\kappa_d(W_{1,n-1}) = \binom{n-1}{2} (3+3)3 + (n-1)(n-1+3)3$$

$$\kappa_d(W_{1,n-1}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} 18 + (n-1)(n+2)3$$

$$\kappa_d(W_{1,n-1}) = (n-1)(n-2)9 + (n-1)(n+2)3$$

$$\kappa_d(W_{1,n-1}) = 3(n-1)[3(n-2) + (n+2)]$$

$$\kappa_d(W_{1,n-1}) = 12(n-1)^2 \text{ olur.}$$

Sonuç 3.2.5: n tepeli tam grafin derece bağlantılılık indeksi $\kappa_d(K_n) = n(n-1)^3$ dir.

İspat: n tepeli tam grafin tüm tepe dereceleri $n - 1$ dir. Grafin tüm tepe çiftleri için içten ayrık yolların sayısı $\kappa(u,v)=n-1$ dir. Buradan derece bağlantılılık indeksinin;

$$\kappa_d(K_n) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u, v)$$

$$\kappa_d(K_n) = \binom{n}{2} [(n-1) + (n-1)](n-1)$$

$$\kappa_d(K_n) = \frac{n(n-1)}{2} 2(n-1)^2$$

$$\kappa_d(K_n) = n(n-1)^3 \text{ olacağı görülür.}$$

Sonuç 3.2.6: $K_{a,b}$ $a+b>3$ tepeli ve $a \leq b$ olan tam parçalı grafin derece bağlantılılık indeksi $\kappa_d(K_{a,b}) = 3a^2b^2 + a^3b - a^2b - ab^2$ dir.

İspat: Tam parçalı grafin derece bağlantılılık indeksi $\kappa_d(K_{a,b})$ nin hesaplaması 3 farklı durumda incelenmelidir.

1.durum: a tane b dereceli tepe arasında içten ayrık yolların sayısı b dir.

2.durum: b tane a dereceli tepe arasında içten ayrık yolların sayısı a dir.

3.durum: a ve b dereceli tepeler arasında ab tane ikili vardır ve bu tepeler arasındaki içten ayrık yolların sayısı tepe derecesi küçük olan tepelerin sayısına yani a ye eşittir. Dolayısıyla derece bağlantılılık indeksi;

$$\kappa_d(K_{a,b}) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u, v)$$

$$\kappa_d(K_{a,b}) = \binom{a}{2} [(b+b)b] + \binom{b}{2} [(a+a)a] + [ab(a+b)a]$$

$$\kappa_d(K_{a,b}) = \frac{a(a-1)}{2} [2b^2] + \frac{b(b-1)}{2} [2a^2] + [a^2b(a+b)]$$

$$\kappa_d(K_{a,b}) = a^2b^2 - ab^2 + a^2b^2 - a^2b + a^3b + a^2b^2$$

$$\kappa_d(K_{a,b}) = 3a^2b^2 + a^3b - a^2b - ab^2 \quad \text{dir.}$$

Eğer $a = b = \frac{n}{2}$ ise

$$\kappa_d \left(K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \right) = 3 \left(\frac{n}{2} \right)^2 \left(\frac{n}{2} \right)^2 + \left(\frac{n}{2} \right)^3 \left(\frac{n}{2} \right) - \left(\frac{n}{2} \right)^2 \left(\frac{n}{2} \right) - \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n}{2} \right)^2$$

$$\kappa_d \left(K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \right) = \frac{4n^4}{16} + \frac{n^4}{16} - \frac{n^3}{8} - \frac{n^3}{8}$$

$$\kappa_d \left(K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \right) = \frac{n^3(n-1)}{4}$$

olarak elde edilir.

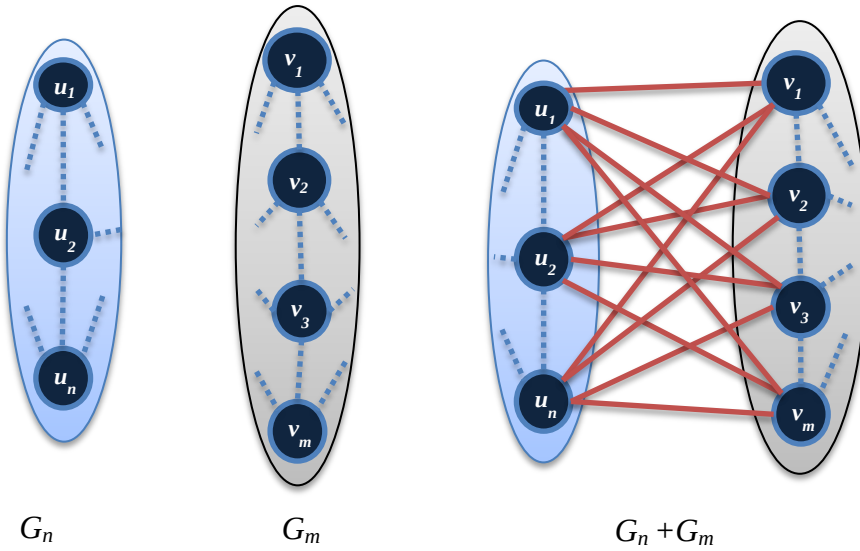
4. GRAF İŞLEMLERİ ALTINDA DERECE BAĞLANTILILIK İNDEKSİ

Çalışmanın bu bölümünde iki grafın çeşitli graf işlemleri altında kullanılması ile oluşan yeni graflarda derece bağlantılılık indeksleri incelenmiştir.

Teorem 4.1: $n \leq m$ olmak üzere, n tepeli G_n grafı ile m tepeli G_m grafının toplanmasıyla oluşan $G_n + G_m$ grafının derece bağlantılılık indeksi

$$\kappa_d(G_n + G_m) > \kappa_d(G_n) + \kappa_d(G_m) \text{ dir.}$$

İspat: İspat iki durumda incelenecektir.



Şekil 4.1

G_n ve G_m Graflarının toplamı: $G_n + G_m$

1. Durum: $G_n + G_m$ grafının tepe ikilileri G_n ve G_m graflarının tepe ikililerini içerdiğinden $\binom{n+m}{2} > \binom{n}{2} + \binom{m}{2}$ dir.

$$\frac{(n+m)(n+m-1)}{2} > \frac{n(n-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2}$$

$$n^2 + 2nm + m^2 - n - m > n^2 - n + m^2 - m$$

$$2mn > 0$$

$n > 0, m > 0$ olduğundan $2mn > 0$ dır. Dolayısıyla hesaplanması gereken derece bağlantılılık değerleri daha fazladır ve bu fazlalık mn tanedir.

$u_i \in V(G_n), u_j \in V(G_m)$ ve $n \leq m$ olduğundan u_i-v_j tepeleri için $\kappa(u_i, v_j) = n$ dir ve derece bağlantılılık indeksi en az

$$\{nm[\deg(u_i) + \deg(v_j)] \kappa(u_i, v_j)\}$$

$$nm[n + m + 2]n$$

$$n^2m(n + m + 2)$$

kadar artar.

2. Durum: $G_n + G_m$ grafında G_n nin tepe dereceleri m ve G_m nin tepe dereceleri n kadar artar ve G_n nin tepe ikililerinde derece toplamı artacağından derece bağlantılılık değerleri artar, benzer şekilde G_m nin de derece bağlantılılık değerleri artar. $G_n + G_m$ nin derece bağlantılılık değerleri artar.

Durum 1 ve 2 den dolayı $\kappa_d(G_n + G_m) > \kappa_d(G_n) + \kappa_d(G_m)$ tür.

Yardımcı Teorem 4.1: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için toplamı sabit olan iki sayının çarpımlarının en büyük olması için bu sayıların eşit olması gereklidir.

İspat: c sabit, $x + y = c$ ve $f(x, y) = xy$ fonksiyonun en büyük olması için,

$$y = c - x \text{ olduğundan } f(x) = x(c - x) = cx - x^2$$

$f'(x) = c - 2x = 0$ olması için $x = \frac{c}{2}$ ve $y = \frac{c}{2}$ olmalıdır ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2: n tepeli G_n grafi ile m tepeli G_m grafının çarpılmasıyla oluşan $G_n \times G_m$ grafi için derece bağlantılılık indeksi

$$\kappa_d(P_n \times P_m) \leq \kappa_d(G_n \times G_m) \leq \kappa_d(K_n \times K_m)$$

dir.

İspat: Herhangi bir grafın derece bağlantılılık indeksi Teorem 3.1.9 dan dolayı $\kappa_d(P_n)$ ve $\kappa_d(K_n)$ arasındadır. Dolayısıyla herhangi iki grafın çarpımının derece bağlantılılık indeksinin sınırlarını bulmak için Teorem 3.1.9 ve Yardımcı Teorem 4.1 den $P_n \times P_n$ grafının derece bağlantılılığı en küçük ve $K_n \times K_m$ grafının derece bağlantılılığı da en büyük değerlerini alır. Dolayısıyla $G_n \times G_m$ grafının derece bağlantılılık indeksi $P_n \times P_m$ ve $K_n \times K_m$ graflarının derece bağlantılılık indeksleri arasındadır.

Teorem 4.3: n tepeli P_n grafi ile m tepeli P_m grafının çarpılmasıyla oluşan $P_n \times P_m$ grafi için derece bağlantılılık indeksi

$$\kappa_d(P_n \times P_m) > \kappa_d(P_n) \kappa_d(P_m) \quad \text{dir.}$$

İspat: $P_n \times P_m$ grafının $n.m$ tane tepesi vardır. Bu tepeler üç grupta toplanır.

1. 2 dereceli tepeler 4 tanedir.
2. 3 dereceli tepeler $2n+2m-4$ tanedir.
3. 4 dereceli tepeler $(n-2)(m-2)$ tanedir.

$\kappa_d(P_n \times P_m) > \kappa_d(P_n) \kappa_d(P_m)$ burada bütün tepe derecelerini iki ve tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yolların sayısı iki olarak hesaplandığında

$$\binom{nm}{2} (2+2)2 > 2(n-1)^2 2(m-1)^2$$

$$\frac{nm(nm-1)}{2} 8 > 2(n-1)^2 2(m-1)^2$$

$$nm(nm-1) > (n-1)(n-1)(m-1)(m-1)$$

$n > 0, m > 0$ olduğundan eşitsizlik sağlanır.

Ancak $\kappa_d(P_n \times P_m)$ için en iyi sonuç 3 farklı tepe çifti arasındaki durumların incelenmesiyle bulunur.

1. Durum: 2 dereceli 4 tepe için $\binom{4}{2}$ durum vardır. Bu tepeler arasındaki içten ayrık yolların sayısı 2 dir.

2. Durum: 3 dereceli $2(n-2) + 2(m-2)$ tepe için $\binom{2n+2m-8}{2}$ durum vardır. Bu tepeler arasındaki içten ayrık yolların sayısı 3 tür.

3. Durum: 4 dereceli $(n-2)(m-2)$ tepe için $\binom{(n-2)(m-2)}{2}$ durum vardır. Bu tepeler arasındaki içten ayrık yolların sayısı $n \geq 4, m \geq 4$ için 4 tür.

4. Durum: 2 ve 3 dereceli $8(n+m-4)$ tepe için $\binom{8(n+m-4)}{2}$ durum vardır. Bu tepeler arasındaki içten ayrık yolların sayısı 2 dir.

5. Durum: 2 ve 4 dereceli $4(n-2)(m-2)$ tepe için $\binom{4(n-2)(m-2)}{2}$ durum vardır. Bu tepeler arasındaki içten ayrık yolların sayısı 2 dir.

6. Durum: 3 ve 4 dereceli $2(n+m-4)(n-2)(m-2)$ tepe için $\binom{2(n+m-4)(n-2)(m-2)}{2}$ durum vardır. Bu tepeler arasındaki içten ayrık yolların sayısı 3 dir.

$$\begin{aligned} \kappa_d(P_n \times P_m) = & \binom{4}{2} (2+2)2 + \binom{2n+2m-8}{2} (3+3)3 \\ & + \binom{(n-2)(m-2)}{2} (4+4)4 + \binom{8(n+m-4)}{2} (2+3)2 \\ & + \binom{4(n-2)(m-2)}{2} (2+4)2 \\ & + \binom{2(n+m-4)(n-2)(m-2)}{2} (3+4)3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_d(P_n \times P_m) = & 48 + 18(n+m-4)(2n+2m-9) \\ & + 16(n-2)(m-2)[(n-2)(m-2)-1] \\ & + 40(n+m-4)(8n+8m-33) \\ & + 24(n-2)(m-2)[4(n-2)(m-2)-1] \\ & + 21(n+m-4)(n-2)(m-2)[2(n+m-4)(n-2)(m-2)-1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_d(P_n \times P_m) = & 48 + 18(n+m-4)(2n+2m-9) \\ & + 16(n-2)(m-2)[(n-2)(m-2)-1] \\ & + 40(n+m-4)(8n+8m-33) \\ & + 24(n-2)(m-2)[4(n-2)(m-2)-1] \\ & + 21(n+m-4)(n-2)(m-2)[2(n+m-4)(n-2)(m-2)-1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_d(P_n \times P_m) &= 48 + 178(n + m - 4)(2n + 2m - 9) + 120(n + m - 4) \\
&\quad + 112(n - 2)^2(m - 2)^2 - 40(n - 2)(m - 2) \\
&\quad + 42(n + m - 4)^2(n - 2)^2(m - 2)^2 \\
&\quad - 21(n + m - 4)(n - 2)(m - 2)
\end{aligned}$$

$x = n - 2$ ve $y = m - 2$ dönüşümleri yapıldığında

$$\begin{aligned}
\kappa_d(P_{x+2} \times P_{y+2}) &= 48 + 178(x + y)(2x + 2y - 1) + 120(x + y) + 112x^2y^2 \\
&\quad - 40xy + 42(x + y)^2x^2y^2 - 21(x + y)xy
\end{aligned}$$

olarak düzenlenir.

$$\kappa_d(P_n) \kappa_d(P_m) = 2(n - 1)^2 2(m - 1)^2$$

$$\kappa_d(P_{x+2}) \kappa_d(P_{y+2}) = 4(x + 1)^2 (y + 1)^2$$

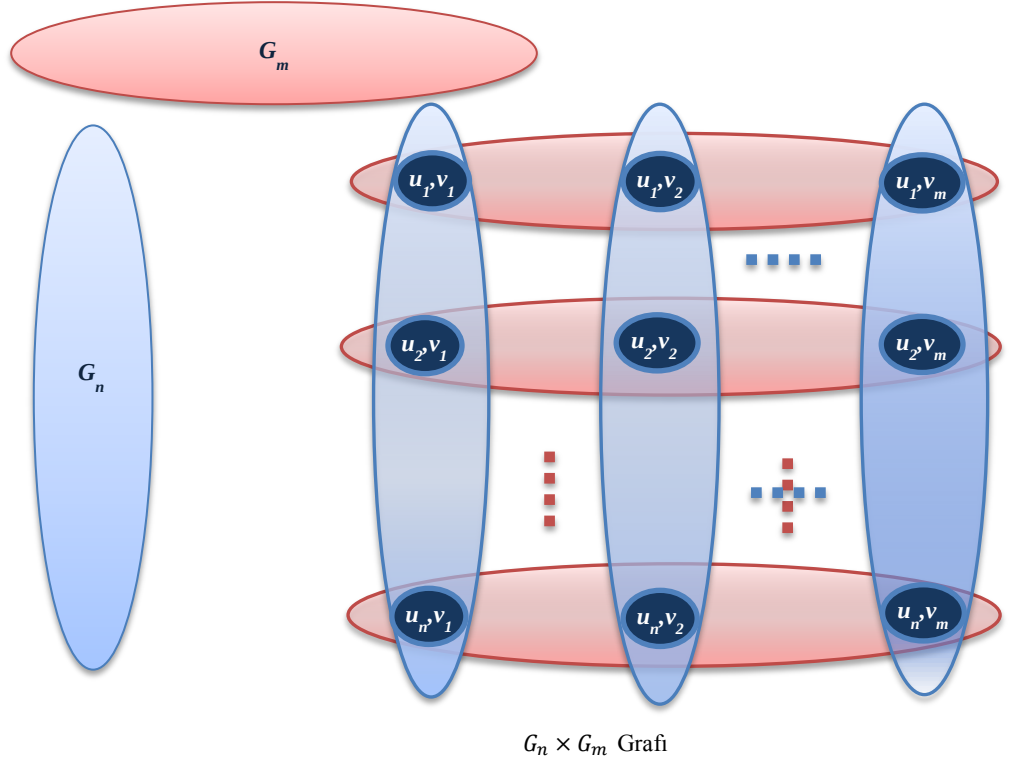
olduğundan $\kappa_d(P_{x+2} \times P_{y+2}) > \kappa_d(P_{x+2}) \kappa_d(P_{y+2})$ dir.

Teorem 4.4: n tepeli G_n grafi ile m tepeli G_m grafinin çarpılmasıyla oluşan $G_n \times G_m$ grafi için derece bağlantılılık indeksi

$$nm\kappa_d(G_n \times G_m) > 4\kappa_d(G_n) \kappa_d(G_m)$$

dir.

İspat:



Şekil 4.2 G_n ve G_m Graflarının Çarpımı: $G_n \times G_m$

Derece bağlantılılık indeksinin en büyük olduğu graf tam graf olduğundan $\kappa_d(K_n) \kappa_d(K_m) \geq \kappa_d(G_n) \kappa_d(G_m)$ dir. Dolayısıyla $\kappa_d(K_n \times K_m)$ ve $\kappa_d(K_n) \kappa_d(K_m)$ arasındaki sıralama $\kappa_d(G_n \times G_m)$ ve $\kappa_d(G_n) \kappa_d(G_m)$ arasında da vardır.

$$\kappa_d(K_n) \kappa_d(K_m) = n(n-1)^3 m(m-1)^3$$

K_n tepe dereceleri $n-1$ ve K_m tepe dereceleri $m-1$ olduğundan $K_n \times K_m$ grafinin tepelerinin dereceleri: $n+m-2$ dir.

$K_n \times K_m$ grafinin tepe ikilileri arasındaki içten ayırık yolların sayısı: $n+m-2$ dir.

$K_n \times K_m$ grafinin tepe sayısı nm dir. Dolayısıyla

$$\kappa_d(K_n \times K_m) = \binom{nm}{2} (n+m-2+n+m-2)(n+m-2)$$

$$\kappa_d(K_n \times K_m) = \frac{nm(nm-1)}{2} 2(n+m-2)^2$$

$$\kappa_d(K_n \times K_m) = nm(nm-1)(n+m-2)^2 \text{ dir.}$$

$$\kappa_d(K_n \times K_m) = nm(nm-1)(n+m-2)^2 \text{ ve}$$

$$\kappa_d(K_n)\kappa_d(K_m) = n(n-1)^3m(m-1)^3 \text{ yi karşılaştırabilmek için}$$

$$y = n + m - 2 \text{ ve } x = nm - 1 \text{ dönüşümü uygulansın. Burada}$$

$$(n-1)(m-1) = (nm-1) - (n+m-2) = x-y$$

$$\kappa_d(K_n \times K_m) = (x+1)xy^2 \text{ ve}$$

$$\kappa_d(K_n)\kappa_d(K_m) = nm[(n-1)(m-1)][(n-1)(m-1)][(n-1)(m-1)] \text{ dir.}$$

$$\kappa_d(K_n)\kappa_d(K_m) = (x+1)[x-y][x-y][x-y] \text{ burada } x-y < x \text{ olduğundan}$$

$x-y = x$ yazıldığında ifade büyür ve eşitsizlik durumunu bozmaz. Dolayısıyla

$$\kappa_d(K_n)\kappa_d(K_m) = (x+1)xx[x-y] \text{ ifadesiyle } \kappa_d(K_n \times K_m) = (x+1)xy^2$$

ifadesini kıyaslamak için $\kappa_d(K_n \times K_m)$ yi $\frac{n}{2} \frac{m}{2}$ çarpıldığında $\frac{nm}{4} \kappa_d(K_n \times K_m) =$

$$\frac{nm}{4}(x+1)xy^2 \text{ olur ve } nm = x \text{ alınırsa } \frac{nm}{4} \kappa_d(K_n \times K_m) = \frac{x}{4}(x+1)xy^2 \text{ olur.}$$

$$\text{Her iki ifade de 4 ile genişletilirse } nm\kappa_d(K_n \times K_m) = (x+1)x^2y^2 \text{ ve}$$

$$4\kappa_d(K_n)\kappa_d(K_m) = 4(x+1)x^2(x-y) \text{ olur.}$$

Bu durumda $y^2 > 4(x-y)$ yi doğrulamak gerekir.

$$y = n + m - 2 \text{ ve } x = nm - 1 \text{ olduğundan}$$

$$(n+m-2)^2 > 4(nm-1-(n+m-2))$$

$$n^2 + m^2 + 2^2 + 2(nm-2n-2m) > 4(nm-n-m+1)$$

$$n^2 + m^2 + 4 + 2nm - 4n - 4m > 4nm - 4n - 4m + 4$$

$$n^2 - 2nm + m^2 > 0$$

$$(n - m)^2 \geq 0$$

ancak $\kappa_d(K_n)\kappa_d(K_m)$ hesaplanırken yukarı yuvarlamalardan dolayı

$$nm \kappa_d(K_n \times K_m) > 4\kappa_d(K_n)\kappa_d(K_m) \text{ dir, dolayısıyla}$$

$$nm\kappa_d(G_n \times G_m) > 4\kappa_d(G_n)\kappa_d(G_m)$$

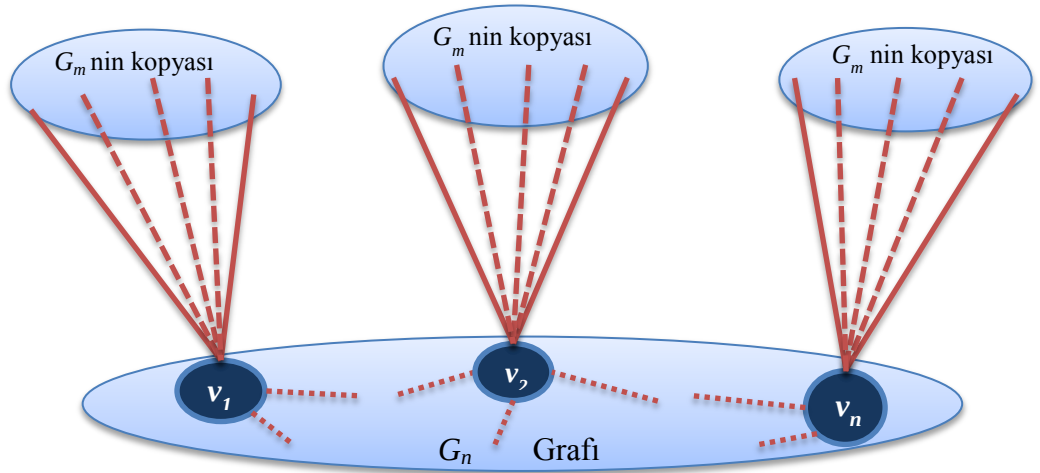
dir.

Teorem 4.5: $n \geq m$ olmak üzere, n tepeli G_n grafi ile m tepeli G_m grafinin taçlama işlemiyle oluşan $G_n \circ G_m$ grafları için

$$\kappa_d(G_n \circ G_m) > \kappa_d(G_n) + (n + m + 4)\kappa_d(G_m)$$

dir.

İspat:



Şekil 4.3 G_n ve G_m Graflarının Taçlama İşlemi: $G_n \circ G_m$

$G_n \circ G_m$ grafinin derece bağlantılılık değerini beş farklı durumda hesaplanır.

1. Durum: Tepe dereceleri 1 artmış olan G_m grafinin kendi içindeki derece bağlantılılık indeksinden n tane vardır. Dolayısıyla bu durumun $\kappa_d(G_n \circ G_m)$ katkısı $n\kappa_d(G_m)$ den daha fazladır.

2. Durum: G_m grafları ile G_m nin G_n de bitişik olduğu durumların derece bağlantılılıkları mn tanedir. Bu durumda tepeler arasındaki içten ayırık yolların sayısı $\kappa(u_{G_m}, v_{G_m}) + 1$ dir. Dolayısıyla bu durumun $\kappa_d(G_n \circ G_m)$ katkısı $mn(\deg(u_{G_m}) + 1 + \deg(v_{G_n}) + m)(\kappa(u_{G_m}, v_{G_m}) + 1) \geq 2\kappa_d(G_m)$ dir çünkü $\deg(v_{G_n}) + m \geq \deg(u_{G_m})$ ve $n \geq m$ dir.

3. Durum: Tepe dereceleri m tane artmış olan G_n grafinin derece bağlantılık indeksi vardır. Dolayısıyla bu durumun $\kappa_d(G_n \circ G_m)$ katkısı $\binom{n}{2}[\deg(u_{G_n}) + m + \deg(v_{G_n}) + m]\kappa(u_{G_n}, v_{G_n}) = \kappa_d(G_n) + \binom{n}{2}2m\kappa(u_{G_n}, v_{G_n}) = \kappa_d(G_n) + n(n-1)m\kappa(u_{G_n}, v_{G_n})$ kadardır.

4. Durum: Tepe dereceleri 1 artmış olan G_m grafinin kendi dışındaki G_m graflarıyla derece bağlantılık değeri için $mm\binom{n}{2}$ tane durum vardır. Bu durumda tepeler arasındaki içten ayırık yolların sayısı 1 dir. Dolayısıyla bu durumun $\kappa_d(G_n \circ G_m)$ katkısı $m^2\binom{n}{2}(\deg(u_{G_m}) + \deg(v_{G_m}) + 2)1 \geq m\kappa_d(G_m)$ dir çünkü $n \geq m$ ve $\kappa(u_{G_m}, v_{G_m}) < m$ dir.

5. Durum: G_m grafları ile G_m nin G_n de bitişik olmadığı tepeler arasındaki derece bağlantılılıklar $m(n-1)n$ tane durum vardır. Bu durumda tepeler arasındaki içten ayırık yolların sayısı 1 dir. Dolayısıyla bu durumun $\kappa_d(G_n \circ G_m)$ katkısı $m(n-1)n(\deg(u_{G_m}) + 1 + \deg(v_{G_n}) + m)1 \geq 2\kappa_d(G_m)$ dir çünkü $\deg(v_{G_n}) + m \geq \deg(u_{G_m})$, $\kappa(u_{G_m}, v_{G_m}) < m \leq n$ dir.

Durum 1, 2, 3, 4 ve 5 ten

$$\kappa_d(G_n \circ G_m) > n\kappa_d(G_m) + 2\kappa_d(G_m) + \kappa_d(G_n) + n(n-1)m\kappa(u_{G_n}, v_{G_n}) + m\kappa_d(G_m) + 2\kappa_d(G_m)$$

$$\kappa_d(G_n \circ G_m) > (n+m+4)\kappa_d(G_m) + \kappa_d(G_n) + n(n-1)m\kappa(u_{G_n}, v_{G_n})$$

dolayısıyla

$$\kappa_d(G_n \circ G_m) > (n+m+4)\kappa_d(G_m) + \kappa_d(G_n)$$

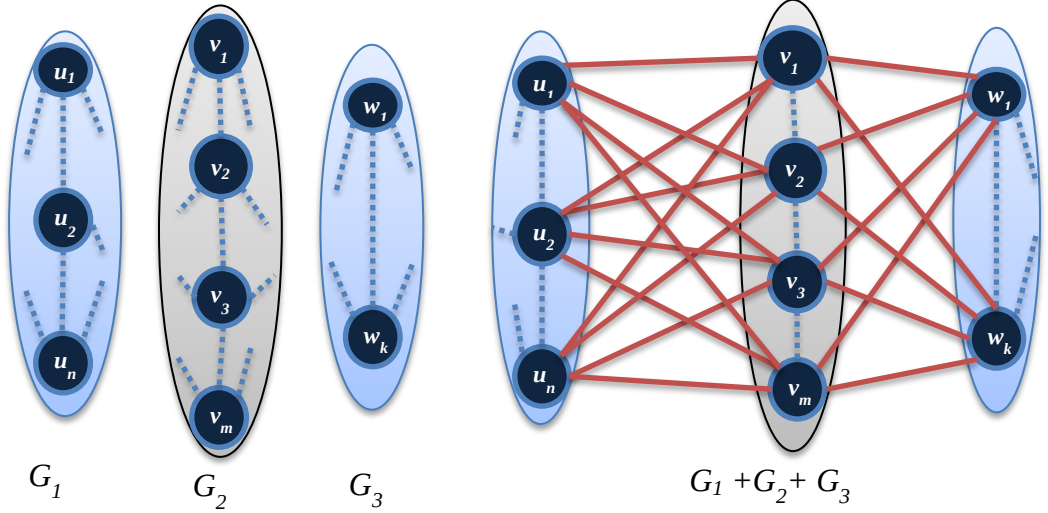
dır.

Teorem 4.6: $G_1, G_2, \dots, G_n$ gibi üç veya daha fazla ayırık grafların ardışık(sıralı) toplamı ile oluşan $G_1 + G_2 + \dots + G_n$ grafları için

$$\kappa_d(G_1 + G_2 + \dots + G_n) > \kappa_d(G_1) + \kappa_d(G_2) + \dots + \kappa_d(G_n)$$

dır.

İspat:



Şekil 4.4 G_1, G_2 ve G_3 Graflarının Sıralı Toplamı: $G_1 + G_2 + G_3$

$G_1 + G_2 + \dots + G_n$ grafinin tepe sayısı $V(G_1) + V(G_2) + \dots + V(G_n) = m$ tane olsun. $G_1 + G_2 + \dots + G_n = (G_1 + G_2) \cup (G_2 + G_3) \cup \dots \cup (G_{n-1} + G_n)$ olduğundan Teorem 4.1 den dolayı

$$\kappa_d(G_1 + G_2) > \kappa_d(G_1) + \kappa_d(G_2)$$

$$\kappa_d(G_2 + G_3) > \kappa_d(G_2) + \kappa_d(G_3)$$

$$\kappa_d(G_{n-1} + G_n) > \kappa_d(G_{n-1}) + \kappa_d(G_n)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \kappa_d(G_1 + G_2) + \kappa_d(G_2 + G_3) + \dots + \kappa_d(G_{n-1} + G_n) \\ & > \kappa_d(G_1) + 2\kappa_d(G_2) + 2\kappa_d(G_3) + \dots + 2\kappa_d(G_{n-1}) + \kappa_d(G_n) \\ & > \kappa_d(G_1) + \kappa_d(G_2) + \kappa_d(G_3) + \dots + \kappa_d(G_{n-1}) + \kappa_d(G_n) \end{aligned}$$

ve

$$\binom{m}{2} > \binom{V(G_1)}{2} + \binom{V(G_2)}{2} + \dots + \binom{V(G_n)}{2}$$

olduğundan

$$\kappa_d(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) > \kappa_d(G_1 + G_2) + \kappa_d(G_2 + G_3) + \cdots + \kappa_d(G_1 + G_2)$$

dir, dolayısıyla ispat tamamlanmıştır.

5. DERECE BAĞLANTILILIK İNDEKSİYLE DİĞER İNDEKSLER ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Bu bölümde derece bağlantılılık indeksiyle diğer uzaklık indeksleri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Yardımcı Teorem 5.1: n tepeli çevre graf C_n nin derece uzaklık indeksi

$$D'(C_n) = \begin{cases} \frac{n(n^2-1)}{2} & , \quad n \text{ tek ise} \\ \frac{n^3}{2} & , \quad n \text{ çift ise} \end{cases} \quad \text{dir.}$$

İspat:

1. Durum: n tek ise çevre grafın bir tepesinden diğer bütün tepelerine olan uzaklıklar sırasıyla

$$1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, \dots, 2, 1 \quad \text{dir.}$$

$$D'(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [\deg(u) + \deg(v)] d(u,v)$$

Tepe ikilileri toplamı 4 olduğundan hesaplama yapılırken $d(u,v)$ lerin toplamını 4 ile çarpmak yeterlidir. n tane tepe olduğundan ve her tepe ikilisi için iki defa değer hesaplandığından n ile çarpıp 2 ye bölünmelidir, dolayısıyla

$$D'(C_n) = \frac{n}{2} 4 \left(1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + \dots + 2 + 1 \right)$$

$$1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} = \frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right)}{2} = \frac{n^2 - 1}{8}$$

$$D'(C_n) = 2n \left(2 \frac{n^2 - 1}{8} \right)$$

$$D'(C_n) = \frac{n(n^2-1)}{2} \text{ olur.}$$

2. Durum: n çift ise çevre grafın bir tepesinden diğer bütün tepelerine olan uzaklıklar sırasıyla

$1, 2, \dots, \left(\frac{n}{2} - 1\right), \frac{n}{2}, \left(\frac{n}{2} - 1\right), \dots, 2, 1$ dir.

$$D'(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [\deg(u) + \deg(v)] d(u, v)$$

1.duruma benzer şekilde hesaplama yapıldığında

$$D'(C_n) = \frac{n}{2} 4 \left(1 + 2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \dots + 2 + 1 \right)$$

$$1 + 2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right) \left(\frac{n}{2} - 1 + 1\right)}{2} = \frac{n(n-2)}{8}$$

$$D'(C_n) = 2n \left(2 \frac{n(n-2)}{8} + \frac{n}{2} \right)$$

$$D'(C_n) = \frac{n^3}{2}$$

dir.

Teorem 5.1: $n < 8$ için Hamilton Çevre içeren n tepeli bir G grafında

$$\kappa_d(G) \geq D'(G) \quad \text{dir.}$$

İspat:

1. Durum: n tepeli Hamilton Çevreyi C_n olarak alırsak, C_n için Derece Bağlantılılık indeksi Sonuç 3.2.2 den ve derece uzaklık indeksi Yardımcı Teorem 5.1 den

$$\kappa_d(C_n) = 4n(n-1) \quad \text{ve} \quad D'(C_n) = \begin{cases} \frac{n(n^2-1)}{2} & , \quad n \text{ tek ise} \\ \frac{n^3}{2} & , \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

$$4n(n-1) \geq \frac{n(n^2-1)}{2}$$

$$n(n-1)(7-n) \geq 0$$

Eşitsizliği $1 \leq n \leq 7$ için sağlanır. Benzer şekilde;

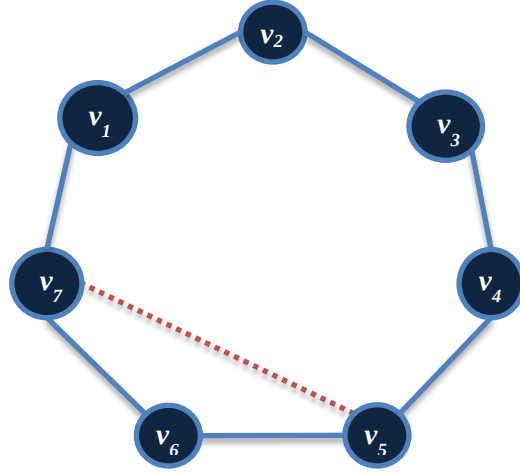
$$4n(n-1) \geq \frac{n^3}{2}$$

$$n(n - (4 + 2\sqrt{2}))(-n + (4 - 2\sqrt{2})) \geq 0$$

Eşitsizliği $(4 - 2\sqrt{2}) \approx 1,17 \leq n \leq 6,82 \approx (4 + 2\sqrt{2})$ için sağlanır.

Dolayısıyla $n < 8$ için Hamilton çevre içeren en basit graflar tek ve çift tepeli C_n graflarıdır. Bütün bu graflar için $\kappa_d(C_n) \geq D'(C_n)$ dir.

2. Durum: C_n grafindaki bitişik olmayan en az bir $u-v$ tepe çiftinin bir ayrıtla birleştirilmesi sonucunda oluşan $C_n + e$ grafinda



Şekil 5.1

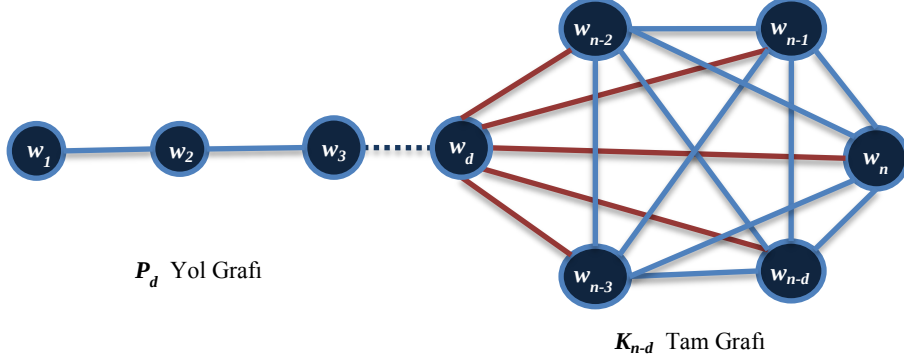
7 Tepeli Çevre Grafa Ayrıt (Kiriş) Eklenmesi

C_n de $\kappa(u, v) = 2$ iken $C_n + e$ grafinda $\kappa(u, v) = 3$ ve C_n de $d(u, v) \geq 2$ iken $C_n + e$ grafinda $d(u, v) = 1$ olacaktır. Dolayısıyla tepe dereceleri toplamı her iki indekste de aynı şekilde değişeceğinden içten ayrık yol sayısı artarken uzaklıklar azalır ve $\kappa_d(G_n) \geq D'(G_n)$ dir.

Benzer şekilde birden fazla bitişik olmayan tepelerin bir ayrıtla birleştirilmesiyle yukarıdaki durumun aynısı gerçekleşeceğinden dolayı yine $\kappa_d(G_n) \geq D'(G_n)$ dir.

Sonuç olarak durum 1 ve 2 den dolayı $\kappa_d(G_n) \geq D'(G_n)$ dir.

Tanım 5.1: n tepeli, $diam(G)$ çaplı $L_{n,d}$ lolipop grafi K_{n-d} tam grafiyle P_d yol grafin bir uç tepesinin K_{n-d} tam grafinin bütün tepeleriyle birleştirilmesiyle oluşur (Morgan et al, 2011).



Şekil 5.2 $L_{n,d}$ Lollipop Grafi

Yardımcı Teorem 5.2: $n \geq 4$ tepeli birleştirilmiş bir G grafinin dış merkezli bağlantılılık indeksi için

$$\xi^c(G) \geq 3(n-1) \text{ bağıntısı vardır (Morgan et al, 2011).}$$

Yardımcı Teorem 5.3: G n tepeli $d=diam(G)$ çaplı bir birleştirilmiş graf olmak üzere dışmerkezli bağlantılılık indeksi

$$\xi^c(G) \leq d(n-d)^2 + O(n^2) \text{ bağıntısına sahiptir (Morgan et al, 2011).}$$

Bu durumda en iyi sonucun Lollipop grafta çapının $\frac{n}{3}$ olduğu $L_{n,\frac{n}{3}}$ grafta gerçekleşir ve sonuç

$$\xi^c(G) \leq \frac{4}{27}n^3 + O(n^2)$$

şeklindedir (Morgan et al, 2011).

Yardımcı Teorem 5.4: n tepeli yol graf P_n nin dışmerkezli bağlantılılık indeksi

$$\xi^c(P_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3n^2 - 6n + 4) & , \text{ } n \text{ çift ise} \\ \frac{3}{2}(n-1)^2 & , \text{ } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir (Morgan et al, 2011).

Teorem 5.2: $n \geq 3$ tepeli birleştirilmiş herhangi bir G grafi için

$$\kappa_d(G) > \xi^c(G)$$

dir.

İspat: G grafinin çapı $diam(G)$ olsun. $\frac{n}{3} \leq d \leq n-1$ aralığında oluşan lolipop graflar için durum incelemesi yapılmalıdır.

1. Durum: $d = n-1$ ise graf yol graf olur. Dolayısıyla Sonuç 3.2.1 ve Yardımcı Teorem 5.4 gereği

$$\kappa_d(P_n) = 2(n-1)^2 > \xi^c(P_n) = \frac{3}{2}(n-1)^2$$

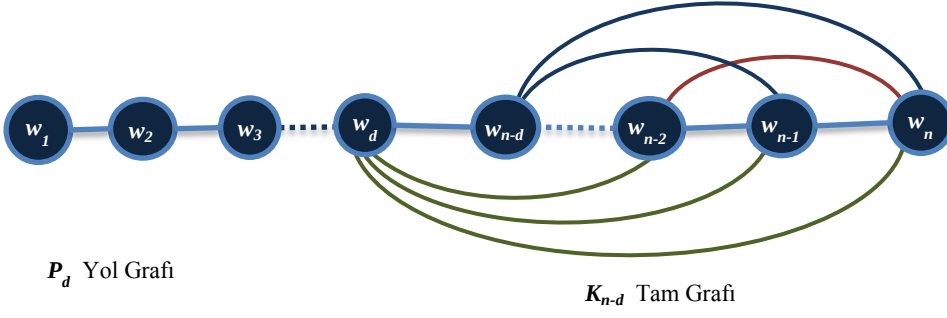
ve

$$\begin{aligned} \kappa_d(P_n) &= 2(n-1)^2 > \xi^c(P_n) = \frac{1}{2}(3n^2 - 6n + 4) = \frac{1}{2}[3(n^2 - 2n + 1) + 1] \\ \kappa_d(P_n) &= 2(n-1)^2 > \frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dir. $n \geq 3$ olduğundan sağlanır.

$$\kappa_d(P_n) = 2(n-1)^2 \geq \xi^c(P_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3n^2 - 6n + 4) & , \text{ } n \text{ çift ise} \\ \frac{3}{2}(n-1)^2 & , \text{ } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

2. Durum: Eğer $\frac{n}{3} \leq d < n-1$ ise G grafi Şekil 5.2 deki gibi $L_{n,d}$ olur ve K_{n-d} tam grafi oluşur. P_d nin uç tepesi w_d yi de K_{n-d} nin her tepesiyle birleştirildiğinden dolayı K_{n-d} ye dahil edersek K_{n-d+1} tam grafi oluşur. Çap $n-1$ den $\frac{n}{3}$ e azalırken K_{n-d} grafinin tepe sayısı arttığından dolayı $\xi^c(G)$ artarken $\kappa_d(K_{n-d})$ de artar. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 5.3 gereği çapın $\frac{n}{3}$ olma durumu $\xi^c(G)$ en büyük olduğundan $d = \frac{n}{3}$ durumunda incelenmelidir.



Şekil 5.3 $L_{n,d}$ Lolipop Grafi

Dolayısıyla $\kappa_d(L_{n,d})$ hesaplamak için üç farklı durum oluşur.

2a. Durum : K_{n-d+1} grafi için Derece Bağlantılılık indeksi

$$\kappa_d(K_{n-d+1}) \geq (n - d + 1)(n - d + 1 - 1)^3 = (n - d + 1)(n - d)^3 \quad \text{dir.}$$

Yardımcı Teorem 5.3 gereği çapın $d = \frac{n}{3}$ olma durumu incelenmelidir.

$$\kappa_d(K_{n-d+1}) = \left(n - \frac{n}{3} + 1\right) \left(n - \frac{n}{3}\right)^3 \geq \left(\frac{2n}{3}\right)^4 \geq \frac{16}{81}n^4$$

$$\kappa_d(K_{n-d+1}) \geq \frac{16}{81}n^4 \geq \frac{4}{27}n^3 + O(n^2)$$

$n \geq 3$ olduğundan sağlanır.

2b. Durum: $\kappa_d(P_{d-1})$ hesaplanması gerekir.

2c. Durum: P_{d-1} ve K_{n-d+1} graflarının tepe ikililerinin olduğu derece bağlantılılık değerlerinin toplamı hesaplanması gereklidir.

2a, 2b ve 2c durumlarında hesaplanan değerlerin toplamı $\kappa_d(L_{n,d})$ değerini verecektir. $\kappa_d(L_{n,d})$ nin hesaplamasında sadece 2a durumunda

$$\kappa_d(L_{n,d}) \geq K_{n-d+1} \geq \frac{16}{81}n^4 \geq \frac{4}{27}n^3 + O(n^2) \geq \xi^c(G)$$

olduğundan $\kappa_d(L_{n,d}) > \xi^c(G)$ dir.

Dolayısıyla 1. ve 2. durumlardan dolayı

$$\kappa_d(L_{n,d}) > \xi^c(G)$$

dir.

Teorem 5.3: Birleştirilmiş herhangi bir G grafi için

$$\kappa_d(G) > M_1(G)$$

dir.

İspat: G grafinin u tepesi için yerel bağlantılılık değeri;

$$\kappa(u) = \sum_{v \in V} \kappa(u, v) \geq n - 1 \geq \deg(u)$$

u tepesinin yerel derece bağlantılılığı ise;

$$\kappa_d(u) = \deg(u) \kappa(u) \geq \deg(u) \deg(u)$$

Grafın tüm tepeleri için yerel derece bağlantılılıkların toplanmasıyla grafın derece bağlantılılık indeksi bulunur.

$$\kappa_d(G) = \sum_{u \in V} \kappa_d(u) \geq \sum_{u \in V(G)} \deg^2(u) = M_1(G)$$

olduğundan ispat tamamlanmıştır.

Teorem 5.4: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş bir G grafinin her bir u - v tepe çifti için

$$2 \leq \deg(u) + \deg(v) \leq 2n - 2$$

İspat: G nin her iki u, v tepesi için

$$1 \leq \deg(u) \leq n - 1$$

$$1 \leq \deg(v) \leq n - 1$$

olduğundan $2 \leq \deg(u) + \deg(v) \leq 2n - 2$ dir.

Teorem 5.5: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş bir G grafinin her bir u - v tepe çifti için

$$2 \leq \kappa(u, v) + d(u, v) \leq n$$

dir.

İspat: G grafinin her bir u - v tepe çifti için $1 \leq \kappa(u, v) \leq n - 1$ olduğundan $\kappa(u, v)$ değeri için üç durum ortaya çıkar

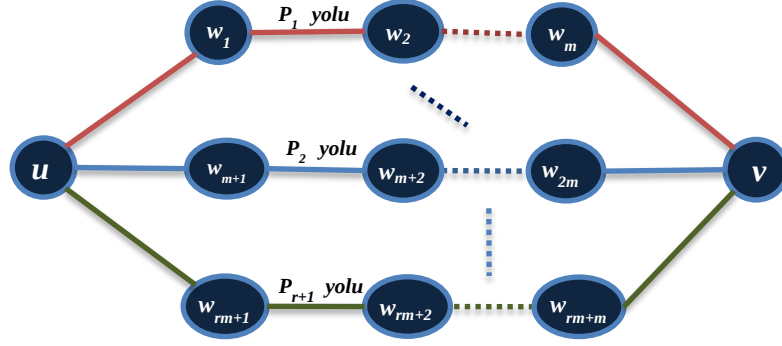
1. Durum: Eğer u - v tepeleri arasında yalnız bir tane içten ayırık yol var ise $\kappa(u, v) = 1$ dir. Bu tepeler grafin uç tepeleri ise aralarındaki uzaklık en çok $1 \leq d(u, v) \leq n - 1$ dir, dolayısıyla $2 \leq \kappa(u, v) + d(u, v) \leq n$ dir.

2. Durum: u - v tepeleri arasındaki içten ayırık yolların sayısı en çok $\kappa(u, v) = n - 1$ dir. Bu yolların $n - 2$ tanesi u ve v nin dışındaki tepeler üzerinden 1 tanesi de u ile v yi birleştiren ayırık üzerindendir. Bu durumda bu tepeler arasındaki uzaklık $d(u, v) = 1$ dir dolayısıyla $2 \leq \kappa(u, v) + d(u, v) \leq n$ dir.

3. Durum: u - v tepeleri arasındaki içten ayırık yolların sayısı $1 < \kappa(u, v) < n - 1$ ise bu aralıktaki herhangi bir $\kappa(u, v)$ değeri için iki durum vardır.

3a. Durum: Eğer Şekil 5.4 deki gibi grafin u - v tepeleri dışındaki $n - 2$ tane tepesi için $m = \frac{n-2}{\kappa(u, v)}$ $\{m \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq m \leq n - 2\}$ olacak şekilde ise (tepeler içten ayırık yolların üzerine eşit olarak dağılır) $d(u, v)_{max} = m + 1$ dolayısıyla;

$$d(u, v) \leq m + 1$$



Şekil 5.4 G Grafi

$$m = \frac{n-2}{k(u,v)}, \quad \kappa(u,v) = \frac{n-2}{m} \text{ dir.}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} \kappa(u,v) + d(u,v) &= \frac{n-2}{m} + m + 1 \\ \frac{n-2}{m} + m + 1 &\leq n \end{aligned}$$

Olduğu gösterilmelidir. Bunun için eşitsizliğin her iki tarafını m ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} n-2 + m^2 + m &\leq nm \\ m^2 + m - 2 &\leq nm - n \\ (m+2)(m-1) &\leq n(m-1) \\ (m+2)(m-1) - n(m-1) &\leq 0 \\ (m-1)[m+2-n] &\leq 0 \end{aligned}$$

Bu durumda eşitsizlik $1 \leq m \leq n-2$ aralığında sağlanır.

3b. Durum: Eğer grafın $u-v$ tepeleri dışındaki $n-2$ tane tepesi için $m \neq \frac{n-2}{\kappa(u,v)}$ $\{m \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq m \leq n-2\}$ ise $d(u,v)$ durum 3a ya göre en az 1 azalır ve $d(u,v) \leq m$ olur, $\kappa(u,v)$ değişmediğinden $2 \leq \kappa(u,v) + d(u,v) \leq n$ eşitsizliği korunur.

Eğer $P_1, P_2, \dots, P_{r+1}$ yollarındaki tepeler arasında bağlantılar varsa ve bunlar kullanılarak içten ayrık yolların sayısını değiştirir ise bu durumda durum 3 geçerlidir.

Durum 1, 2 ve 3 ten dolayı ispat tamamlanır.

Teorem 5.6: $n \geq 2$ tepeli birleştirilmiş bir G grafi için

$$2n(n-1) \leq \kappa_d(G) + D'(G) \leq n^2(n-1)^2$$

dir.

İspat: G grafinın her u - v tepe çifti için $A_i = \deg(u) + \deg(v)$, $d_i(u, v)$ ve $\kappa_i(u, v)$ i . inci tepe çifti için sırasıyla derece toplamaları, uzaklık ve içten ayırık yolları ifade etsin.

$$\begin{aligned} \kappa_d(G) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)] \kappa(u, v) \\ &= A_1 \kappa_1(u, v) + A_2 \kappa_2(u, v) + \cdots + A_{\binom{n}{2}} \kappa_{\binom{n}{2}}(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'(G) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [\deg(u) + \deg(v)] d(u, v) = A_1 d_1(u, v) + A_2 d_2(u, v) + \cdots \\ &\quad + A_{\binom{n}{2}} d_{\binom{n}{2}}(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_d(G) + D'(G) &= A_1 [\kappa_1(u, v) + d_1(u, v)] + A_2 [\kappa_2(u, v) + d_2(u, v)] + \cdots \\ &\quad + A_{\binom{n}{2}} [\kappa_{\binom{n}{2}}(u, v) + d_{\binom{n}{2}}(u, v)] \end{aligned}$$

Teorem 5.5 den dolayı

$$2 \left[A_1 + A_2 + \cdots + A_{\binom{n}{2}} \right] \leq \kappa_d(G) + D'(G) \leq n \left[A_1 + A_2 + \cdots + A_{\binom{n}{2}} \right]$$

Teorem 5.4 den dolayı

$$2 \binom{n}{2} \leq A_1 + A_2 + \cdots + A_{\binom{n}{2}} \leq (2n-2) \binom{n}{2}$$

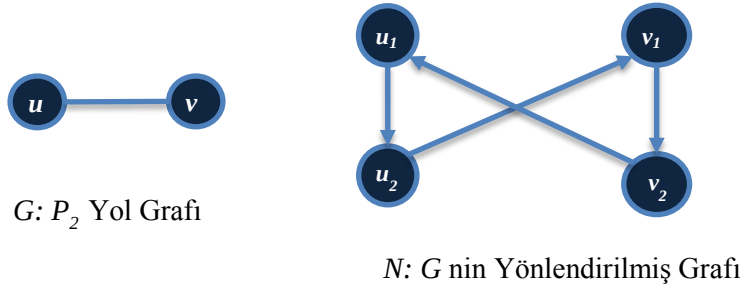
$$n(n-1) \leq A_1 + A_2 + \cdots + A_{\binom{n}{2}} \leq n(n-1)^2$$

Dolayısıyla

$$2n(n-1) \leq \kappa_d(G) + D'(G) \leq n^2(n-1)^2 \text{ elde edilir.}$$

6. DERECE BAĞLANTILILIK İNDEKSİNİ HESAPLAYAN ALGORİTMA VE PROGRAM

Derece bağlantılılık indeksini hesaplamak için grafin tepe ikililerinin yerel bağlantılıklarının hesaplanması gerekir. Bunun için *Maksimum Akış (Maxflow) Probleminin* çözüm algoritması olan *Breadth-First Ford-Fulkerson Algoritmasından* yararlanılır. Maksimum akış probleminin çözümü olan bu algoritmaya maksimum akış algoritması denir. Bu algoritmada ayrıt ağırlıkları bir olan yönlü grafin tepe ikilileri arasındaki maksimum akış bu tepeler arasındaki yerel bağlantılılığa karşılık gelmektedir. Yalnız bu algoritma yönlü graflarda çalışmaktadır. Dolayısıyla başlangıçta yönsüz olan grafin yönlü grafa dönüştürülmesi gerekir. Bunun için G grafinin her v tepesi için iki kopya tepe v_1, v_2 oluşturulur ve 1 nolu tepe 2 nolu tepeye yönlü bir ayrıtla birleştirilir. Bu işlem her tek numaralı tepeden ardışığı olan çift numaralı tepeye olacak şekilde yapılır. Sonra G nin her uv ayrıtı için v_2u_1 ve u_2v_1 yönlü ayrıtlar ile 2 nolu tepeden 1 nolu tepeye olacak şekilde birleştirilir. Bu işlem aşağıda Şekil 6.1 de gösterilmiştir (Kocay ve Kreher, 2005).



Şekil 6.1

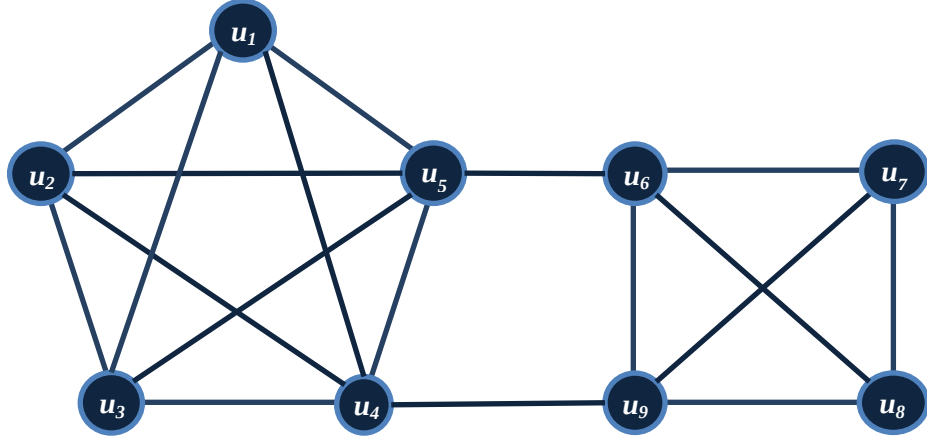
Graf Yönlendirme İşlemi

Derece bağlantılılık indeksini hesaplayan algoritma aşağıda verilmiştir.

6.1 Derece Bağlantılılık İndeksini Hesaplayan Algoritma

1. **Adım:** G grafinin A bitişiklik matrisi girilir.
2. **Adım:** Yönlendirilmiş G grafinin ayrıtlar matrisi E , A bitişiklik matrisinden yararlanarak oluşturulur.
3. **Adım:** Tepe dereceleri A bitişiklik matrisinden yararlanarak hesaplanır.
4. **Adım:** A matrisin tepe ikilileri arasındaki içten ayrık yolların sayısına karşılık gelen maksimum akış kapasitesi (*Maxflow*) (*Breadth-First Ford-Fulkerson algoritması kullanılarak*) hesaplanır: E matrisinin çift numaralı tepelerinden kendinden küçük ardışık olmayan tek numaralı tepeler arasındaki maksimum akış maxflow algoritması kullanılarak hesaplanır.
5. **Adım:** Her tepe ikilisi için Adım 4 hesaplanarak derece bağlantılılık indeksi hesaplanır.

Bu algoritmanın karmaşıklığı maksimum akış algoritmasının karmaşıklığına bağlıdır. Maksimum akış algoritmasının karmaşıklığı da Breadth-First Ford-Fulkerson algoritmasıyla çözüldüğü için o algoritmanın karmaşıklığına bağlıdır. Dolayısıyla grafin tepe sayısı n ayrıt sayısı m olmak üzere, breadth-first Ford-Fulkerson algoritmasının uygulandığı maksimum akış algoritmasının karmaşıklığı $O(nm^2)$ (Kocay ve Kreher, 2005; Edmonds and Karp, 1972) dir. Ancak bu işlem n tepeli bir graf için $\binom{n}{2}$ tekrar sayısı kadar uygulanacağı için algoritmanın karmaşıklığı $O(n^3m^2)$ dir.



Şekil 6.2 9 Tepeli G Grafi

Şekil 6.2 deki G grafinin derece bağlantılılık indeksini Matlabta hesaplayan programın kaynak kodu aşağıda verilmiştir. Yalnız bu programın çalışması için matlab programında *GrTheory* kütüphanesi ve bu kütüphanede *grMaxFlows.m* ve *grValidation.m* programlarının yüklü olması gereklidir.

6.2 Matlab Kaynak Kodu

```
matrisboyut=9;    % A matrisinin boyutu giriliyor
```

```
% A matrisi ve geçici E ayrıtlar matrisi oluşturuluyor
```

```
A=zeros(matrisboyut,matrisboyut);
```

```
E=zeros(matrisboyut*matrisboyut,2);
```

```
A=[0 1 1 1 1 0 0 0 0;          % A Bitişiklik Matrisi girişi
    1 0 1 1 1 0 0 0 0;
    1 1 0 1 1 0 0 0 0;
    1 1 1 0 1 0 0 0 1;
    1 1 1 1 0 1 0 0 0;
    0 0 0 0 1 0 1 1 1;
    0 0 0 0 0 1 0 0 1;
    0 0 0 0 0 1 0 0 1;
    0 0 0 1 0 1 1 1 0];
```

```
satir=1;
```

```
% A bitişiklik matrisi verilen graf yönlendirilmiş grafa dönüştürülüyor
```

```
% E dönüştürülmüş grafın ayrıtlar matrisi  $2 \times n$  boyutlu
```

```
for i=1:matrisboyut
```

```
    E(satir,1)=2*i-1;
```

```
    E(satir,2)=2*i;
```

```
    s=satir;
```

```
    satir=satir+1;
```

```
for j=i+1:matrisboyut
```

```
    if A(i,j)==1
```

```
        E(satir,1)= 2*j;
```

```
        E(satir,2)=2*i-1;
```

```
        E(satir+1,1)=2*i;
```

```
        E(satir+1,2)=2*j-1;
```

```
        s=satir;
```

```
        satir=satir+2;
```

```
    end
```

```

    end
end

```

```

% Esas EE matrisi oluşturuluyor
% Çünkü geçici E matrisinde sonlarda boş(null) elemanları bulunabilir
% Bu matris ile elemanları null olmayan matris elde ediliyor.
EE=zeros(s,2);
for (i=1:s)
    EE(i,1)=E(i,1);
    EE(i,2)=E(i,2);
end

```

```

% Tepe dereceleri bir dizine atanıyor
TepeDereceleri=zeros(matrisboyut,1);
for i=1:matrisBoyut
    for j=1:matrisBoyut
        if A(i,j)==1
            TepeDereceleri(i)=TepeDereceleri(i)+1;
        end
    end
end
end

```

```

%Derece Bağlantılılık indeksi (Connectiondegree) hesaplaması yapılıyor
Connectiondegree=0;
for i=1:matrisboyut
    for j=i+1:matrisboyut
        kaynak=2*i;
        hedef=2*j-1;
        [M,K]=grMaxFlows(EE,kaynak,hedef);
        Connectiondegree=Connectiondegree+(TepeDereceleri(i)+TepeDereceleri(j))*K;
    end
end
end

```

SONUÇ:

Bir iletişim ağı için en önemli görev fonksiyonunu yerine getirebileceği iletişimin korunmasıdır. Bunu da tepeler arasındaki bağın çeşitliliği ile koruyabilir. Ağın bazı tepe veya tepelerinde oluşabilecek hasarlar bu ağın işlevini tam olarak gerçekleştirmesini engeller. Bu nedenle iletişim ağları tasarlanırken, veri akışının devamlılığını sağlamak için ağın bozulmalara karşı göstereceği direnci önemsemek gerekir. Direnci fazla olan bir model diğerlerine göre daha çok tercih edilir. Dolayısıyla bir sorunla karşılaşılması halinde ağda oluşabilecek hasar baştan en aza indirgemiş olur. Bunun için önceden teorik yaklaşımlar yapılabilir. Bu yaklaşımlar *zedelenebilirlik (vulnerability)* adıyla graf teoride önemli bir yer tutmaktadır.

Bu tezin içeriğinde grafların zedelenebilirliğini ölçmek için *Derece Bağlantılılık İndeksi* adıyla yeni bir ölçüm tanımlanmıştır. Derece bağlantılılık indeksi hesaplanırken grafın tüm tepe ikilileri arasındaki içten ayrık yolların sayısının kullanılması; grafın tüm tepe çiftlerinin bağlantılılıklarının tepe dereceleriyle birlikte hesaba katılması ve sonuçta toplam bir değer olarak sunmasıyla; yeni tanımlanmış bu indeks grafın bozulmalara karşı direnci hakkındaki yorumlamaları daha da güvenilir yapmaktadır. Sonuç olarak derece bağlantılılık indeksi aynı tepe sayısına sahip iki grafın sağlamlık değerlendirmesinde zedelenebilirlik ölçümü olarak daha hasas bir değer üretir.

Bu tezde derece bağlantılılık indeksinin genel ve özel graflar üzerindeki hesaplamaları yapılarak; iki farklı graf modelinden zedelenebilirliği daha büyük olanın daha sağlam bir yapıya sahip olduğu gösterilmiştir. Graf işlemleri altında incelemelerde bulunulmuş ve sonuçları verilmiştir. Ayrıca graf indeksleri ile bu ölçüm arasındaki ilişkilere ait sonuçlar verilmiştir. Son bölümde ise bir grafın derece bağlantılılık indeksini hesaplayan $O(n^3m^2)$ karmaşıklığında bir algoritma ve bu algoritmanın uygulandığı bir matlab programı verilmiştir. Bu program aracılığıyla istenilen grafın derece bağlantılılık hesaplaması yapılır.

Sonuç olarak bu çalışmada diğer zedelenebilirlik ölçümlerinden farklı yeni bir ölçüm önerilmiştir. Bu ölçümle diğer ölçümlerden daha hassas bir veri elde edilmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ashrafi, A.R., Ghorbani, M. and Hemmasi, M.,** 2009, Eccentric connectivity polynomials of C_{12n+2} fullerenes, *Digest Journal of Nanomaterials and Biostructures*, No.3, 483-486 pp.
- Barefoot, C.A., Entringer, R. and Swart, H.C.,** 1987, Vulnerability in Graphs – A Comparative Survey, *J. Combin. Math. Combin. Comp.*1: 13-22 pp.
- Barefoot, C. A., Entringer, R. and Swart, H.,** 1987, Vulnerability in Graphs-A Comparative Survey, Proceedings of the first Carbondale combinatorics conference (Carbondale, Ill., 1986), *J. Combin. Math. Combin. Comput*1: 13-22 pp.
- Beineke, L. W., Oellerman, O. R. and Pippert, R. E.,** 2002, The Average Connectivity of a Graph, *Discrete Math.*, 252, 31- 45 pp.
- Bucicovschi, O. and Cioabă, S.M.,** 2008, The minimum degree distance of graphs of given order and size, *Discrete Applied Mathematics*, 156, 3518–3521 pp.
- Buckley, F., and Harary, F.,** 1990, Distance in Graphs, Addison Wesley Publishing Comp., California USA., 335 p.
- Chartrand., G., and Lesniak., L.,** 2005, Graphs and Digraphs, Chapman&Hall/CRC Press, USA., 386 p.
- Christofides, N.,** 1986, Graph Theory An Algorithmic Approach, Academic Press Inc., London, 400 p.
- Dankelmann, P., Goddard, W. and Swart, C.S.,** 2004, The average eccentricity of a graph and its subgraphs, *Utilitas Mathematica*, 65, 41-51 pp.
- Dankelmann, P., Gutman, I. , Mukwembi, S. and Swart, H.C.,** 2009, On the degree distance of a graph, *Discrete Applied Mathematics*, 157, 2773-2777 pp.
- Diestel., R.,** 2005, Graph Theory, Springer Verlag Heidelberg, New York, 410 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Dobrynin, A.A. and Kochetova, A.A.,** 1994, Degree distance of a graph, a degree analogue of the wiener index, *J. Chem. In& Comput. Sci.*, 34, 1082-1086 pp.
- Edmonds, J.R. and Karp, R.M.,** 1972, Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems, *Journal of the Association of Computing Machinery*, 19, 248-264 pp.
- Grimaldi R.P.,** 2004, *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison Wesley, United States of America, 830 p.
- Gupta, S. and Singh, M.,** 2002, Application of graph theory: Relationship of eccentric connectivity index and wiener's index with anti-inflammatory activity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 266, 259 -268 pp.
- Gutman, I.,** 1994, Selected properties of the Schultz molecular topological index, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 34, 1087 – 1089 pp.
- Gutman, I. and Trinajstić, N.,** 1972, Graph theory and molecular orbitals Total π -electron energy of alternant hydrocarbons, *Chem. Phys. Lett.*, 17, 535–538 pp.
- Hartsfield, N. and Ringel, G.,** 1990, *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*, Academic Press, 446 p.
- Hosseini-Zadeh, S., Hamzeh, A. and Ashrafi, A.R.,** 2009, Wiener-type invariants of some graph operations, *Filomat* 23, 3, pages 103–113 pp.
- Kocay, W. and Kreher, D.L.,** 2005, *Graph, Algorithms, and Optimization*, Chapman&Hall/CRC Press, USA, 483 p.
- Lawler, E.,** 2001, *Networks and Matroids, Combinatorial Optimization*, General Pub., Toronto, 391 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Morgan, M.J., Mukwembi, S. and Swart, H.C., 2011, On the eccentric connectivity index of a graph, *Discrete Mathematics*, 311, 1229-1234 pp.

Schultz, H.P., 1989, Topological organic chemistry. 1. Graph Theory and topological indices of alkanes, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 29, 227 – 228 pp.

Sharma, V., Goswami R. and Madan, A. K., 1997, Eccentric connectivity index: A novel highly discriminating topological descriptor for structure-property and structure-activity studies, *J. Chem. Inf. And Modeling*, 37, 273-282 pp.

West., D.B., 2001, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, USA 588 p.

Wiener, H., 1947, Structural determination of paraffin boiling points, *J. Am. Chem. Soc.*, 69, 17–20pp.

Zhou, B. and Trinajstić, N., 2010, On reverse degree distance, *Journal of Mathematical Chemistry*, 268-275 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Ümit GÜRSOY, 14 Eylül 1976 yılında Burdur ilinin Bucak ilçesinin Yüreğil köyünde doğdu. İlköğrenimini 1987 yılında Burdur Karamanlı Devrim İlkokulunda tamamladı. Aynı yıl Isparta Anadolu Ticaret Lisesi'ni kazanarak orta öğrenimine başladı. 1992 yılında Burdur Cumhuriyet Lisesine geçerek 1994 yılında mezun oldu. 1995 yılında Ege Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı. 2000 yılında Matematik Bölümünün Bilgisayar Bilimleri Opsiyonu'ndan mezun oldu. Şubat 2002'de Ege Üniversitesi Matematik Bölümünde Yüksek Lisans programına başladı. 2 Haziran 2005 "*Graflarda Merkezler ve Uzaklıklara İlişkin Kavramlar*" adlı tezini başarıyla sundu. Eylül 2007 de Ege Üniversitesi Matematik Bölümünde doktora eğitimine başladı.