



EGE ÜNİVERSİTESİ



E. Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YENİDEN DÜZENLENMİŞ ÇEKİM TEORİLERİ

Enes TUNÇ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Can Battal KILINÇ

Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 402.02.01

Sunuş Tarihi : 03.07.2014

Bornova-İZMİR

2014

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

YENİDEN DÜZENLENMİŞ ÇEKİM TEORİLERİ

Enes Tunç

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Can Battal KILINÇ

Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 402.02.01

Sunuş Tarihi : 03.07.2014

Bornova-İZMİR

2014

Enes Tunç tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan “Yeniden Düzenlenmiş ekim Teorileri” başlıklı bu alışma E.. Lisansüstü Eğitim ve ėretim Yönetmeliėi ile E.. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve ėretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 03.07.2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

Jüri yeleri:

İmza

Jüri Bařkanı

: Prof. Dr. Orner Ltfi Değirnasıcı

Raportör ye

: Doç. Dr. Murat Gerçekliėin

ye

: Prof. Dr. Can Kılınç

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “YENİDEN DÜZENLENMİŞ ÇEKİM TEORİLERİ” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

03 / 07 / 2014

İmzası

Adı-Soyadı

ENES TUNÇ

ÖZET

YENİDEN DÜZENLENMİŞ ÇEKİM TEORİLERİ

TUNÇ, Enes

Yüksek Lisans Tezi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Can Battal KILINÇ

Temmuz 2014, 124 sayfa

Yeniden düzenlenmiş çekim teorilerine olan ilgi son yıllarda hem teorik hem de gözlemsel çalışmalardan dolayı artış göstermektedir. Genel Rölativite'ye yapılan bu yeniden düzenlemeler sonucunda bir çok alternatif çekim teorisi ortaya çıkmıştır. Bu teorilerin belki de ilk akla geleni ve en basit olanı $f(R)$ çekim teorileridir.

Bu çalışmada standart kozmolojik modelden başlayıp, $f(R)$ teorilerine ve bu teorilerin belirli özelliklerine değinilmiştir. Ancak burada $f(R)$ teorilerin asıl dikkate alınma nedeni, kozmolojide şu an sorunlu bir kavram olan kozmolojik sabite gerek duymadan $f(R)$ teorileri, evrenin genişlemesini uzay-zaman yapısının geometrik özellikleri ile açıklamaya çalışmasıdır. Bu teori alan denklemlerinde gerekli olan geometrinin elde edilebilmesi için skaler alanlara veya bazı özel potansiyellere gerek duymaktadır.

$f(R)$ teorileri metrik, Palatini ve metrik-affine formalizmi olmak üzere üç kısımda incelenir, ancak literatürde asıl analizler metrik formalizminde yapılmıştır. Bu bağlamda, bu tezde $f(R) \propto R^n$ ve $f(R) \propto R^{-n}$ modelleri üzerinden klasik Friedmann denklemleri ile yeniden düzenlenmiş Friedmann denklemleri karşılaştırılmış ve aralarındaki farklılıklara değinilmiştir. Salt matematiksel açıdan bakılırsa sonsuz sayıda $f(R)$ teorisi elde etmek mümkün olduğundan dolayı, bu teorilerin hem kozmolojik hem de yerel ölçeklerde sınırlanması oldukça önemlidir. Bu noktada ise teoriye gözlemler yol göstermektedir.

Anahtar sözcükler: genel rölativite, karanlık enerji, $f(R)$ çekim teorileri, Brans-Dicke teori, skaler tensör teoriler, kozmoloji.

ABSTRACT**MODIFIED GRAVITY THEORIES**

TUNÇ, Enes

MSc in Astronomy and Space Sciences

Supervisor: Prof. Dr. Can Battal KILINÇ

July 2014, 124 page

The interest in modified gravity theories has witnessed an increase both because of theoretical and due to observational studies. Many alternative gravity theories have come up in consequence of these modifications done to General Relativity Theory. Probably the simplest and the first come to mind of these theories is $f(R)$ theories of gravity.

In this study, starting from the standart cosmologic model, $f(R)$ theories and these theories characteristic features are dealt with. However, the main reason for considering $f(R)$ theories is that $f(R)$ theories try to explain the expansion of the universe by referring to the geometrical properties of space-time structure without needing the cosmological constant which is currently a controversial concept in cosmology. Scalar fields or certain potentials are needed in order to obtain the necessary geometry in theory field equations.

$f(R)$ theories are analysed in three sections which are metric, Palatini and metric-affine; however, in literature essential analyses are made according to metric formulations. In this regard, classical Friedmann equations are compared with modified Friedmann equations on the basis of $f(R) \propto R^n$ ve $f(R) \propto R^{-n}$ models and the differences between the two are mentioned. When viewed from the pure mathematical angle, since it is possible to obtain infine number of $f(R)$ theories, it is very important to limit these theories both cosmological and local scales. At this point, observations guide the theory.

Keywords: general relativity, dark energy, $f(R)$ theories of gravity, Brans-Dicke theory, scalar-tensor theory, cosmology.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince bana her konuda danışmalık yapan Prof. Dr. Can Battal KILINÇ'a, maddi ve manevi yönden destek veren ve beni bugünlere taşıyan aileme teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez yazım süresince beni yalnız bırakmayan Ayhan AY ve Ahmet TOPAÇOĞLU'na ayrıca teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xviii
1. GİRİŞ	1
2. ÇEKİM TEORİLERİ	5
2.1 İyi Bir Çekim Teorisi Nasıl Olmalıdır?	5
2.1.1 Lagrangian Mekanizması ve Klasik Alan Teorisi.....	5
2.1.2 Özel rölativite teorisi.....	6
2.1.3 Genel rölativite teorisi	7
2.2 Genel Rölativite Teorisinin Çözümü	9
2.3 FRW Metriği ve Friedmann Denklemleri.....	15
2.3.1 FRW metriği.....	16
2.3.2 Hubble parametresi	18
2.3.3 Friedmann denklemleri	19
2.4 Genel Rölativite Teorisinin Açıklayabildiği Kozmolojik Durumlar	27

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
2.4.1 Kırmızıya kayma, ışıınım uzaklığı ve hubble kanunu	27
2.4.2 İlkel çekirdek sentezlenmesi	29
2.4.3 Kozmik mikrodalga ardalan ışıınımı	29
2.5 Genel Rölativite Teorisinin Açıklayamadığı Kozmolojik Durumlar	30
2.5.1 Karanlık madde.....	30
2.5.2 Karanlık enerji	34
3. $f(R)$ ÇEKİMİNDE ALAN DENKLEMLERİ	42
3.1 $f(R)$ Metrik Formalizmi	44
3.1.1 $f(R)$ metrik çekiminde FRW evreni.....	48
3.1.2 $f(R)$ metrik çekimindeki ve genel rölativitedeki friedmann denklemleri arasındaki farklılıklar	50
3.2 Palatini $f(R)$ Çekimi.....	58
3.3 Metrik-Affine Formalizmi	60
4. GENEL RÖLATİVİTE İLE $f(R)$ METRİK TEORİ ARASINDAKİ BAZI FARKLILIKLAR	62
4.1 Konformal Dönüşüm Nedir?.....	64
4.2 Skaler Tensör Teori ve Brans Dicke Teorisi.....	65
4.3 $f(R)$ Metrik Teorinin ve Brans Dicke Teorinin Eşdeğerliliği.....	68

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

4.4 $f(R)$ Metrik Teori ve Korunum Kanunları	69
4.4.1 Jordan sistemi metriğinin fiziksel olduğu durum.....	71
4.4.2 Einstein sistemi metriğinin fiziksel olduğu durum	73
4.5 $f(R)$ Metrik Teoride Enerji Koşulları	74
4.6 Einstein ve Jordan Konformal Sistemlerinin Bazı Farklı Fiziksel Sonuçları	78
4.6.1 Genişletilmiş ve hipergenşletilmiş enflasyon.....	78
4.6.2 Genişletilmiş çekimde karadelik termodinamikleri	80
4.6.3 Genişletilmiş çekimde toz baskın evren	82
5. $f(R)$ METRİK TEORİNİN KOZMOLOJİK SINIRLAMALARI VE KARANLIK ENERJİ.....	84
5.1 $f(R)$ Metrik Karanlık Enerji Modelleri İçin Kozmolojik Sınırlamalar	84
5.2 $f(R)$ Metrik Çekiminde Karanlık Enerji	86
5.3 $f(R)$ Metrik Çekiminde Karanlık Enerjinin Durum Denklemi	97
6. $f(R)$ TEORİ ÜZERİNDEKİ YEREL SINIRLAMALAR	99
6.1 Chameleon Mekanizmasına Sahip Olan $f(R)$ Metrik Çekimi.....	99
6.2 $f(R)$ Çekiminde İnce Kabuk Parametresi	102
6.3 $f(R)$ Çekiminde Güneş Sistemi Deneyleri	104

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
7. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	108
KAYNAKLAR	110
ÖZGEÇMİŞ.....	124

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 M31 galaksisi için teorik modeller ile karanlık madde halosu dahil olmadan gözlenen dönme eğrisi.....	33
2.2 SN Ia verileri için ışıınım uzaklığı ve kırmızıya kayma grafiği	36
2.3 Kozmolojik sabitin ve maddenin enerji yoğunlukları üzerindeki gözlemsel sınırlamalar	37
2.4 Çakışma probleminin grafiksel gösterimi	39
3.1 $f(R) \propto R^n$ modeline ait α ve n parametrelerinin grafiği.....	54
3.2 $f(R) = R - \mu^4/R$ ve Λ CDM modellerinin $H(z)/H_0$ ile z ve ω ile z değerlerinin karşılaştırılması.....	57
3.3 $f(R) = R - \mu^4/R$ modeli için ışıınım uzaklığı ve z değerlerinin karşılaştırılması.....	58
5.1 (m, r) düzlemindeki P_1, P_5 ve P_6 sabit noktaları	94
5.2 q_a, q_b, q_c ve q_d ile gösterilen dört $f(R)$ modelinin (m, r) düzlemindeki konumu	95
5.3 Hu ve Sawicki ve Starobinsky modellerinin (m, r) düzlemindeki konumu .	97

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge

Sayfa

3.1 $f(R) \propto R^n$ modelinde n aralıklarına göre H_0 , n^{eni} ve χ^2 değerleri.....55

3.2 $f(R) \propto R^n$ modelinde n değerine göre evrenin yaşı.....56

YENİDEN DÜZENLENMİŞ ÇEKİM TEORİLERİ

1. GİRİŞ

Evrende büyük ölçeklerde geçerli olan kuvvet çekim kuvvetidir. Çekim kuvveti, uzay-zaman yapısı ile enerji-momentum arasında ilişki kuran Einstein alan denklemleri tarafından tanımlandığı için, evreni tanımlayan teori Einstein' ın Genel Rölativite prensibidir. Bununla beraber, evreni tanımlayan bir diğer temel kavram, yeteri kadar büyük ölçeklerde homojen ve izotrop evreni öngören kozmolojik prensiptir. Homojenlik geometrik yapının her yerde aynı olması anlamına gelirken, izotropi ise bir yüzeye herhangi bir noktadan bakıldığında her tarafın yönden bağımsız olarak aynı görüneceği anlamına gelir. Dolayısıyla, kozmolojik prensibe göre evrende büyük ölçekte madde dağılımı doğrultu ve yönden bağımsızdır, bu da evrenin uzaysal olarak belirli bir merkezinin olmadığını ima eder. Bu prensiplere göre günümüz evreni homojen, izotrop ve genişleyen bir evrendir. Böyle bir evreni temsil eden metrik ise Friedmann-Robertson-Walker (FRW) metriğidir. Einstein alan denklemleri kozmolojik prensip varsayımı altında çözülürse, evrenin yoğunluk ve sıcaklık parametrelerini zamanın bir fonksiyonu olarak veren Friedmann denklemleri elde edilir. Bu denklemlere göre evren çok erken zamanlarda oldukça yüksek sıcaklığa ve yoğunluğa sahipti. Hatta $t = 0$ anında sonsuz sıcaklık ve yoğunluğa sahip olan bir evrenle karşılaşılır. Bu modele Standart Kozmolojik Model adı verilir. Hubble kanunu, ilkel çekirdek sentezi ve kozmik mikrodalga ardalan ışıınımı sayesinde bu modelin teorik olarak öne sürdüğü homojen, izotrop, genişleyen ve ilk zamanlarda aşırı sıcak-yoğun evren öngörüsü gözlemsel olarak kanıtlamıştır. Diğer taraftan, bu model, ufuk sorunu, düzlük sorunu, yapıların oluşum sorunu ve manyetik monopoller gibi bazı sorunlarla karşı karşıyadır. Çözüm olarak, skaler alanların neden olduğu üstel olarak genişleme fazı olan enflasyon ileri sürülmüştür. Bununla birlikte, enflasyon aslında evrenin geçirdiği ilk hızlanma fazıdır ve enflasyon sayesinde Standart Kozmolojik Model' e ilk düzenleme de yapılmıştır.

1990' lı yıllarda gözlemsel kozmolojinin gelişmesi sayesinde günümüz evreninin tekrar bir hızlanma fazından geçtiği anlaşılmıştır. İkinci hızlanma fazı madde baskınlığı döneminden sonra başlayan geç zaman kozmik hızlanmasıdır. Karanlık enerji adı verilen ve $\omega = P/\rho < -1/3$ (burada P ve ρ sırasıyla

maddenin basıncı ve enerji yoğunluğudur) durum denkleminde sahip olan, negatif basınçlı yeni bir bileşen bu hızlanmadan sorumludur. Karanlık enerjinin varlığı süpernova Ia (SN Ia) (Perlmutter, 1999; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Riess et al., 1998; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Riess et al., 1999; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010), büyük ölçekli yapı (Tegmark et al., 2004; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Tegmark et al., 2006; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010), baryon akustik salınımı (Eisenstein et al., 2005; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Percival et al., 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010) ve CMB (Spergel et al., 2003; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Spergel et al., 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Komatsu et al., 2009; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010) gibi çok sayıda gözlem tarafından desteklenmekte (De Felice and Tsujikawa, 2010) ancak henüz gözlemsel olarak keşfedilememiştir. Karanlık enerjinin en güçlü adayı olan kozmolojik sabit ise bazı teorik problemler ile yüz yüzedir. Bu teorik problemlerden ilki, eğer kozmolojik sabit parçacık fiziğinin vakum enerjisinden kaynaklanıyorsa, bu durumda kozmolojik sabitin teorik değeri ile gözlenen değeri arasında yaklaşık 10^{120} kat fark bulunmaktadır. Buna ince ayar problemi denir. İkincisi ise, madde ile kozmolojik sabitin enerji yoğunluklarının zaman içerisinde hızlı bir biçimde değişmesine rağmen, günümüzde neden kıyaslanabilir seviyede olduğudur. Bu ise çakışma problemidir.

Yakın zamandaki bu astrofiziksel gözlemlerden ve şu anki kozmolojik hipotezlerden dolayı, Einstein alan denklemlerinin madde kısmının evrenin "karanlık enerji" ve "karanlık madde" tarafı olan egzotik madde-enerji türünü içermeyi kabul etmediği müddetçe, bu denklemlerin artık Güneş sistemi, galaksi, ekstra-galaksi ve kozmik ölçeklerde çekim için iyi bir test olmadığı ortaya çıkmıştır (Capozziello and De Laurentis, 2011). Bu gibi problemler, kozmolojik sabite alternatif bazı modellerin araştırılmaya başlanmasına neden olmuştur. Bu modellerde kozmolojik sabitin rolünü üstlenebilecek skaler alanlar ileri sürülmüş ve enflasyondaki gibi hızlanarak genişleme elde edilmeye çalışılmıştır. Einstein alan denklemlerinin madde kısmının yeniden düzenlendiği bu modellerden başlıcaları quintessence, Chaplygin gazı, takyon alanı, k-essence ve phantomdur. Buna karşın geometri kısmının yeniden düzenlendiği başlıca modeller ise $f(R)$ çekimi, Kaluza-Klein teorisi, skaler tensör teoriler, süpergravity ve TeVeS (Tensör-Vektör-Skaler Gravity)' dir. Bu teorilerde Lagrangian içerisinde yapılan düzeltmeler Einstein denklemlerinin lineer olmama durumunu arttırır. Bunun

sonucu olarak ise Einstein denklemlerinin madde kısmında skaler alanlar gibi ekstra serbestlik dereceleri ortaya çıkar. Bu serbestlik derecelerinden elde edilen yeni geometriyi ayırmak kolay değildir ve bu yüzden bu teorileri çalışmak zordur. Fakat, bununla ilgili fiziksel modellerin çoğu uzaysal olarak homojen ancak yönbağımlı (anizotrop) Bianchi modelleri olduğu için ve gözlenen evren büyük ölçüde homojen ve izotrop olduğu için hareket denklemleri kısmen sadeleşebilir (Capozziello and De Laurentis, 2011).

$f(R)$ çekiminde ise, Lagrangian yoğunluğu f , R' nin keyfi bir fonksiyonudur. Burada R terimine Ricci skaleri veya eğrilik skaleri adı verilir ve uzay zaman eğriliği ile ilgili bir terimdir. $f(R)$ çekiminde, etkiden türetilen alan denklemleri üç formalizme sahiptir. Birincisi, metrik tensör $g_{\mu\nu}'$ ye göre etkinin değiştirilmesi ile elde edilen standart metrik formalizmidir. Bu formalizmde, bir vektörün yönünü değiştirmeden eğri bir manifold boyunca nasıl hareket ettirileceğini tanımlayan bağıntı olan affine bağıntısına ait katsayılar grubu olan $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ terimi, $g_{\mu\nu}'$ ye bağlıdır. İkincisi formalizm $g_{\mu\nu}$ ve $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ 'nın etkinin değiştirildiğinde bağımsız değişkenler olarak işlem gördüğü Palatini formalizmidir. Bu iki yaklaşım R' de lineer olmayan Lagrangian yoğunluğu için farklı alan denklemlerine neden olur, oysa Genel Rölativite etkisi için bu iki etki birbiri ile özdeş ancak gösterimleri farklıdır. Üçüncü formalizm ise metrik-affine formalizmidir. Burada ise madde etkisi hem $g_{\mu\nu}$ metrik tensöre hem de $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ bağıntısına bağlıdır. Buna ek olarak, $f(R)$ teorileri genellikle Jordan konformal sistemi üzerine kurulmuşlardır ve belirli dönüşümler ile Einstein konformal sisteminde de temsil edilmektedir. Uzay veya zaman benzeri aralıkların uzunluklarını ve uzay veya zaman benzeri vektörlerin normlarını etkileyen dönüşüm konformal dönüşümdür. Konformal dönüşüm koordinat dönüşümünden oldukça farklı bir kavramdır ve bir sistemi tanımlayan temel nicelikleri değiştirebilmektedir. Konformal dönüşümler sonucu elde edilen yeni sistemler olan konformal sistemler, farklı gravitasyonel alanları ve farklı fizikleri tanımladıkları için (Faraoni et al., 1999), bu sistemler üzerine kurulan teoriler de aynı fiziksel süreçleri farklı şekilde açıklamaktadır.

$f(R)$ modelleri yaklaşık otuz yıldır çalışılmaktadır fakat bu modellerin geçerliliğini göstermek için literatürde hiç bir genel kriter yoktur (Amendola et al., 2007). Bununla beraber geçerli $f(R)$ modelleri, kozmolojik ve yerel ölçekteki

sınırlamaların her ikisinden de geçmelidir. $f(R)$ teorileri kozmolojik ölçeklerde sınırlamak için en genel iki kriter, uzaysal olarak düz, homojen ve izotropik bir ardalanda hızlanma sürecinin bulunması ve bu sürecin ardından gelen standart madde çağına varlığıdır (Amendola et al., 2007). Kozmolojik ölçekte $f(R)$ teorileri üzerindeki sınırlamalar zayıf olmasına karşın, yerel çekim testleri $f(R)$ çekimi üzerindeki en sıkı kısıtlamaları verir (Gu and Lin, 2011). $f(R)$ çekimi skaler tensör teoriler olarak formüle edildiği zaman, ortaya çıkan skaler alan, madde ile güçlü bir şekilde birleşir ve eşdeğerlik prensibi ihlal edilir. Fakat $f(R)$ çekimi bu durumdan chameleon mekanizması sayesinde kurtulabilmektedir (Hees and Füzfa, 2013; Brax et al., 2008). Chameleon modeline göre, skaler alanın kütlesi yerel madde yoğunluğuna bağlı olan bir birleşme sergiler. Bu sayede, Dünya gibi yüksek yoğunluklu bir ortamda uygulanan herhangi bir deneyde eşdeğerlik prensibi ihlalinin etkisi deneysel olarak gizli kalır. Dolayısıyla Dünya gibi yüksek yoğunluklu ortamlarda skaler alanlar ile madde arasındaki böylesi güçlü birleşmenin neden gözlenemediği açıklanmaya çalışılmıştır ve eşdeğerlik prensibinin sınırlamalarından kurtulunulmuştur.

Bu çalışmada, temel olarak $f(R)$ çekiminin kozmolojik sabite gerek duymadan evrenin geç zamanındaki hızlanarak genişlemesini nasıl açıkladığı incelenmiştir. Bu bağlamda, Bölüm 2' de standart kozmolojik modelden, Bölüm 3' de tüm formalizmleri ile $f(R)$ çekiminden ve $g_{\mu\nu}$ metriğine göre varyasyona tabi tutulan $f(R)$ metrik çekimindeki Friedmann denklemlerinden bahsedilmiştir. Bu denklemlerin klasik Friedmann denklemlerinden farklılığı bazı modeller cinsinden ortaya konulmuş ve bazı gözlemsel sınırlamalar verilmiştir. Bölüm 4' te Genel Rölativite ile $f(R)$ metrik çekiminin bazı farklılıklarından bahsedilmiştir. Bölüm 5' te $f(R)$ metrik çekimi için kozmolojik ölçekteki sınırlamalar ortaya konulmuş ve $f(R)$ metrik çekiminde karanlık enerji incelenmiştir. Bölüm 6' da yerel ölçeklerdeki sınırlamalar ortaya konulmuş ve chameleon mekanizması tanıtılmıştır. Bölüm 7 ise tartışma ve sonuç kısmıdır.

2. ÇEKİM TEORİLERİ

2.1. İyi Bir Çekim Teorisi Nasıl Olmalıdır?

Teorik olarak, herhangi bir rölativistik çekim teorisinin başarılı olabilmesi için bazı asgari şartları sağlaması gereklidir. İlk olarak, herhangi bir rölativistik çekim teorisi gezegen yörüngeleri, öz çekici yapılar gibi bazı astrofiziksel gözlemleri açıklayabilmelidir. Bu, herhangi bir rölativistik çekim teorisinin zayıf enerji limitinde Newtonian dinamiklerini yeniden oluşturabilmesi anlamına gelir ve ayrıca, deneysel olarak iyi kurulmuş olan klasik Güneş sistemi testlerinden de başarıyla geçmelidir. İkinci olarak, herhangi bir rölativistik çekim teorisi galaktik ölçekleri tahmin ettiği varsayımından hareketle, galaktik dinamikleri yeniden oluşturabilmelidir. Üçüncü olarak, herhangi bir rölativistik çekim teorisi galaksi kümeleri gibi büyük ölçekli yapının problemini ve son olarak yoğunluk parametresi, Hubble sabiti, genişleme oranı gibi kozmolojik parametreleri kendi içinde tutarlı bir şekilde yeniden oluşturabilmelidir (Capozziello and De Laurentis, 2011).

2.1.1. Lagrangian Mekanizması ve Klasik Alan Teorisi

Lagrangian mekanizması klasik fiziğin bir formülasyonudur. Bu formülasyon boyutsuz parçacıkların hareketini tanımlar. Bu parçacıkların konumları birbirinden bağımsız değişkenler olarak genelleştirilmiş koordinatlar tarafından karakterize edilir. Bir parçacık sisteminin mekanik durumu tamamen parçacıkların konumu ve hızları belirtilerek tanımlanabilir.

Her bir parçacık için Lagrangian mekanizması zamana, genelleştirilmiş koordinat q ve genelleştirilmiş hız $\dot{q}$ ' ya bağlı olan bir $L(q, \dot{q}, t)$ fonksiyonunu ile tanımlanır.

Lagrangian, etki adı verilen bir S fonksiyonundaki temel nesnedir. Bu etki

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1.1.1)$$

şeklinde dir. Burada t_0 ve t_1 zamanları iki farklı anı gösterir.

Lagrangian mekaniğindeki en temel kanun en küçük etki prensibi veya Hamiltonian prensibidir. Bu prensibe göre, herhangi bir şekilde hareket eden

parçacıkların etkileri daima en küçük olası değeri almaktadır. Bu, S' in varyasyonu kullanılarak formalize edilebilir. Burada parçacığın bitiş noktası sabit tutulmakta ve yörünge değişimi ise $q \rightarrow q + \delta q$ şeklinde minimum seviyede olmaktadır. S fonksiyonunun ekstremumu

$$\delta S = 0 \quad (2.1.1.2)$$

olmalıdır. Bu, herhangi bir fiziksel yörünge için etkinin varyasyonunun sıfır olması gerektiğine işaret eder. Gerekli işlemlerden sonra

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (2.1.1.3)$$

formuna ulaşılır. Bu hareket denklemlerine Euler-Lagrangian denklemleri denir.

2.1.2. Özel Rölativite Teorisi

Özel rölativite eylemsiz referans sistemlerini tanımlayan bir teoridir. Einstein tarafından formülize edilen bu teori, iki temel postüla üzerine temellendirilmiştir

- Rölativite prensibi: Tüm eylemsiz gözlemciler eşdeğerdir. Fizik için tüm sistemler geçerli sistemlerdir. Bu yüzden tercih edilen hiç bir eylemsiz sistem mutlak değildir.

- Işık hızının invaryantlığı prensibi: Işık hızı tüm eylemsiz sistemlerde aynıdır.

Dört boyutlu uzay zamanda

$$x^0 = ct = t \quad (2.1.2.1)$$

$$x^1 = x \quad (2.1.2.2)$$

$$x^2 = y \quad (2.1.2.3)$$

$$x^3 = z \quad (2.1.2.4)$$

nicelikleri tanıtılabilir. Burada $\mu = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere x^μ şeklinde uzay zaman koordinatları gösterilebilir. $t = x^0$ zaman koordinatına karşılık geliyorken, x , y ve z ise sırasıyla x^1, x^2 ve x^3 uzay koordinatlarına karşılık gelir. c ise birimi bir olarak seçilen ışık hızıdır.

Özel rölativite Minkowski uzay zamanı denilen dört boyutlu uzay zamanda ifade edilir. Minkowski uzay zamanı Euclidean uzayına bir zamansal boyut eklenerek oluşturulur. Bu uzay zamanda bir metrik tensör tanımlanır. Bu metriğin matris formu

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.2.5)$$

şeklindedir. Bu uzay zamandaki vektörler dört boyutludur ve dörtlü vektörler olarak adlandırılır.

2.1.3. Genel Rölativite Teorisi

Özel Rölativite' de fizik kanunlarının tüm eylemsiz gözlemciler için aynı olduğundan bahsedilmişti. Buna ek olarak, Genel Rölativite prensibi ivmeli olan tüm gözlemciler için fizik kanunlarının aynı olduğunu belirtir. Bu durum ise rölativite prensibinin genelleştirilmesi olan yeni prensiplere işaret eder. Bu prensipler

- Genel kovaryans prensibi: Fizik kanunları tüm gözlemciler için aynı olmalıdır. Bunun matematiksel sonuçları ise, fizik kanunlarının invariant nesneler, yani tensörler cinsinden ifade edilmesi gerektiridir.

- Einstein eşdeğerlik prensibi: Eğer uniform bir gravitasyonel alanda serbest düşme gerçekleşiyorsa, bu serbest düşme hareketini uniform ivmelenmeden ayırt etmek mümkün değildir. Bu prensip üç kısma ayrılabilir:

1. Zayıf eşdeğerlik prensibi: Evrensel serbest düşme olarak da bilinen bu prensibe göre, gravitasyonel kütle ile eylemsizlik kütlesi birbirine eşdeğerdir ve yüksüz, serbest düşen tüm test parçacıkları aynı yörüngeyi izler. Gravitasyonel kütle, bir cismin kütlesinin çekim kuvvetine olan tepkisidir, yani cismin durgun

halde olan kütesidir. Eylemli kütle ise cismin momentumu tarafından belirlenen küttedir, yani cismin hareketli olduğu zamanki kütesidir. Bu prensip, cismin yalnızca başlangıç pozisyonuna ve hızına bağlı olan, cismin içeriğine ve yapısına bağlı olmayan, statik bir laboratuvar da serbest düşen bir cismin yörüngesine işaret etmektedir. Yani madde doğrudan metrik ile birleşir.

2. Yerel Lorentz invaryanslığı: Laboratuvar da bir serbest düşme hareketi herhangi bir yerel gravitasyonel olmayan serbest düşüş hızından bağımsızdır.

3. Lorentz konum invaryanslığı: Serbest düşen bir laboratuvar da herhangi bir yerel gravitasyonel olmayan deneyin sonucu bu deneyin nerede ve ne zaman gerçekleştirildiğinden bağımsızdır. şeklindedir.

Bu eşdeğerlik prensiplerinin yanısıra, başarılı bir çekim teorisinin sağlamak zorunda olduğu bazı enerji koşulları vardır. Bunlar

- Zayıf Enerji Koşulu: Bu koşul, her bir gözlemcinin kendi durgun sisteminde pozitif bir madde enerji yoğunluğu ölçmesi gerektiğini söyler. Matematiksel gösterimi ise ρ maddenin enerji yoğunluğu ve P ise basıncı olmak üzere, $\rho \geq 0$ ve $\rho + P \geq 0$ 'dır.

- Null Enerji Koşulu: Bu koşul, her bir gözlemcinin kendi durgun sisteminde pozitif bir madde enerji koşulunu ölçmesinin zorunlu olmadığını, ancak basınç ile enerji yoğunluğunun toplamının pozitif olması gerektiğini söyler. Bu açıdan zayıf enerji koşulunun özel bir durumudur. Matematiksel gösterimi ise, $\rho + P \geq 0$ 'dır.

- Baskın Enerji Koşulu: Bu koşul, enerji yoğunluğunun pozitif olması gerektiğini ve basıncın mutlak büyüklüğüne eşit veya daha büyük olması gerektiğini söyler. Bu açıdan zayıf eşdeğerlik koşulunu da içerir. Matematiksel gösterimi ise $\rho \geq |P|$ 'dir.

- Güçlü Enerji Koşulu: Bu koşul, null enerji koşuluna ilave olarak, aşırı derecede büyük negatif basınca izin vermemektedir. Matematiksel gösterimi ise $\rho + P \geq 0$ ve $\rho + 3P \geq 0$ 'dir.

Bu gereklilikleri ve prensipleri karşılayan Genel Rölativite teorisi, hem yerel seviyede hem de kozmolojik ölçeklerde çekimi tanımlayan en istikrarlı ve en basit teoridir (Carroll, 2004).

2.2. Genel Rölativite Teorisinin Çözümü

Genel Rölativite' nin üzerine kurulduğu matematiksel araç tensördür. Tensör herhangi bir koordinat dönüşümü altında invaryant kalan geometrik bir nesnedir. Metrik tensör ise Genel Rölativite ve kozmolojide önemli bir rol oynayan simetrik tensördür. Burada, dejenere olmayan, yani determinantı sıfırdan farklı olan ($g = |g_{\mu\nu}| \neq 0$) bir $g_{\mu\nu}$ metriği tanımlansın. Bu metrik verilen bir uzay zamanda uzaklıklar ve açıların nasıl bulunacağını belirler. Bir uzay zaman mesafesinin uzunluğu

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2.1)$$

şeklinde. Burada dx^μ , x^μ yönündeki sonsuz küçük mesafedir. Bu uzunluk koordinat dönüşümleri altında invaryanttır.

Genel Rölativite' nin çözümü için kullanılan bir diğer nicelik Γ ile gösterilen Christoffel bağıntısıdır. Bu bağıntı

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} [\partial_\gamma g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\gamma} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma}] \quad (2.2.2)$$

ile belirtilir, burada $\partial_\gamma \equiv \frac{\partial}{\partial x^\gamma}$ dır.

Uzay zaman genel olarak eğridir. Eğrilik, Riemann tensörü tarafından belirlenir. Bu tensör düz Minkowski metriğinden sapmayı belirleyen bir niceliktir ve

$$R_{\mu\sigma\nu}^\rho = \partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \quad (2.2.3)$$

ile gösterilir.

Riemann tensörünün büzülmesi sonucu Ricci tensörü elde edilir ve simetrik olan bu tensör

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} \quad (2.2.4)$$

ile gösterilir.

Ricci tensörünün büzülmesi sonucu eğrilik skaleri veya Ricci skaleri denilen nicelik elde edilir ve

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.2.5)$$

ile gösterilir.

Uzay zamanda enerji yoğunluğu ile momentum akısını tanımlayan stress enerji tensörü,

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta(L_m \sqrt{-g})}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} \quad (2.2.6)$$

formundadır. Gravitasyonel etkileşim sadece yeteri kadar büyük kütleli cisimlerde rol oynadığından dolayı gravitasyonel alan çalışmalarında makroskobik cisimlerle ilgilenilir. Makroskobik cisimler için enerji momentum tensörü

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu} \quad (2.2.7)$$

şeklinde. Burada p cismin basıncı, ρ enerji yoğunluğu, u_{μ} ve u_{ν} ise dörtlü hız bileşenleridir.

Bu matematiksel altyapıdan sonra artık Einstein alan denklemleri elde edilebilir. Hareket denklemlerini bulmak için öncelikle etki elde edilmelidir. Genel Rölativite' de bu etkiye Einstein Hilbert etkisi adı verilir ve bu etki

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (2.2.8)$$

formuna sahiptir. Burada $\kappa = \sqrt{8\pi G}$, G çekim sabiti ve g ise metrik tensör $g_{\mu\nu}$ 'nin determinantıdır.

Eğer madde alanları Ψ_M dahil edilirse, madde kısmı olan S_m etkisi

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi_M) \quad (2.2.9)$$

şeklinde ortaya çıkar. Bu ifade, Lagrangian yoğunluğunun madde kısmı kullanılarak

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + L_m(g_{\mu\nu}, \Psi_M)) \quad (2.2.10)$$

formunda yeniden yazılabilir. Şimdi ise etkinin varyasyonu bulunacaktır. Hamiltonian prensibine göre etkinin varyasyonunun sıfır olduğu dikkate alınır

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{1}{2\kappa^2} \delta(\sqrt{-g} R) + \delta(L_m \sqrt{-g}) \right) = 0 \quad (2.2.11)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik ise

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R \delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta(L_m \sqrt{-g})}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0 \quad (2.2.12)$$

eşitliğine neden olur.

Bu eşitliği çözmek için, sırasıyla üç terimin varyasyonu hesaplanmalıdır. Öncelikle δR ifadesinden başlanılsın. Bunun için (2.2.3) Riemann tensörünün varyasyonu

$$\delta R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} = \partial_{\mu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (2.2.13)$$

şeklinde alınır. Christoffel sembolü bir affine bağıntısıdır, bu yüzden bu bağıntının varyasyonu da bir affine bağıntısıdır. Bir bağıntı tensör gibi dönüşmediğinden dolayı onun kovaryant türevini almak kolay değildir. Ancak iki bağıntının farkı tensör gibi dönüşmektedir. Sonuç olarak, Christoffel sembolünün varyasyonunun kovaryant türevi

$$\nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} = \partial_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (2.2.14)$$

formundadır (Carroll, 2004). $R_{\mu\sigma\nu}^\rho$ tanımından $\delta R_{\mu\sigma\nu}^\rho$ ' nü iki Christoffel sembolünün varyasyonunun kovaryant türevleri arasındaki fark olarak yazılabilir

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \nabla_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (2.2.15)$$

Ardından (2.2.4) ilişkisi kullanılırsa,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho \quad (2.2.16)$$

ifadesine ulaşılır. Son olarak, (2.2.5) ilişkisi kullanılarak

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.2.17)$$

eşitliğine ulaşılır.

$$\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0 \quad (2.2.18)$$

eşitliği geçerli olduğundan dolayı, (2.2.17) denkleminin içerisine (2.2.16) ifadesi konulabilir ve sonuç olarak

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma) \quad (2.2.19)$$

eşitliği elde edilir (Poisson, 2007; Guarnizo et al.' den, 2010). Bu eşitlik (2.2.12)' de ilk terimin içerisine konulursa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta R &= \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} + \frac{1}{\delta g^{\mu\nu}} \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma) \right) \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

ifadesi elde edilir. Burada son iki ifade toplam türevdir. Gauss teoremine göre, bu terimler uzay zaman bölgesinin sınırı üzerinde integre edildiği zaman yok olurlar.

Dolayısıyla bu iki terim etkinin varyasyonuna herhangi bir katkıda bulunamaz ve eşitlik

$$\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta R = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.2.21)$$

haline gelir.

Şimdi (2.2.12) eşitliğindeki ikinci varyasyon olan $\delta\sqrt{-g}$ terimi elde edilecektir. Bunun için öncelikle $\ln|M_{ik}| = \ln(\det M)$ eşitliğinden faydalanılır. Burada M tersinir olan keyfi bir matristir ve $\ln M$ ise $\exp \ln M = M$ ile tanımlanır. Bu nicelik varyasyona tabi tutulur ve matrisin izinin dönüşüm özelliği kullanılırsa

$$Tr(M^{-1}\delta M) = \frac{1}{\det M} \delta(\det M) \quad (2.2.22)$$

eşitliği sağlanır. Burada $M = g^{\mu\nu}$ ve $\det M = g^{-1} = \det g^{\mu\nu}$ eşitliği uygulanırsa

$$Tr(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) = g\delta(g^{-1}) \Rightarrow \delta(g^{-1}) = \frac{1}{g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.2.23)$$

ifadesine ulaşılır. Dolayısıyla $\delta\sqrt{-g}$ ifadesi

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \delta[(-g^{-1})^{-1/2}] = -\frac{1}{2}(-g^{-1})^{-3/2}\delta(-g) \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

şeklinde elde edilir (Carroll, 2004). Bu eşitlik (2.2.12) eşitliğinin ikinci terimi olarak yerine konulursa

$$\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x R \delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{4\kappa^2} \int d^4x R g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.2.25)$$

ifadesine ulaşılır.

Son olarak, (2.2.12) eşitliğinin üçüncü terimi olan $\delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})$ ifadesinin karşılığı bulunacaktır. Bunun için (2.2.6)'dan faydalanılırsa

$$\int d^4x \delta(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}T_{\mu\nu} \quad (2.2.26)$$

eşitliği elde edilir.

(2.2.12) eşitliğinin içine (2.2.21), (2.2.24) ve (2.2.26) eşitlikleri yerleştirilirse

$$\int d^4x \left(\frac{1}{2\kappa^2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \right) = 0 \quad (2.2.27)$$

denklemi elde edilir. Son olarak, bu denklem

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.2.28)$$

eşitliğini verir (Carroll, 1997; Klanova' dan, 2013). Bu denkleme Einstein alan denklemi adı verilir. Burada sol kısım geometriyi, sağ kısım ise maddeyi temsil etmektedir. Bu denklemler verilen bir uzay zaman bölgesi için madde ve geometri arasındaki ilişkinin elde edilmesini sağlar.

Einstein alan denklemleri lineer değildir. g_{ik} metrik tensöründen 6 tane bağımsız bileşen gelir. Maddenin enerji momentum tensöründe ortaya çıkan dörtlü hız bileşeni u^i , $u^i u_i = 1$ ilişkisine sahiptir, dolayısıyla buradan 3 bağımsız bileşen gelir. Son olarak Einstein denklemlerinden maddenin dağılım ve hareketinin tamamen belirlenebilmesi için basınç ve yoğunluk arasındaki ilişkiyi veren durum denklemi de Einstein denklemlerine eklenmelidir. Dolayısıyla ρ/c^2 ifadesinden de 1 bağımsız bileşen gelir. Tüm bu bağımsız bileşenler toplanırsa Einstein alan denklemlerinin 10 bilinmeyenli 10 denklemden oluştuğu görülür.

(2.2.28) denkleminin sol tarafına Einstein tensörü de denilmektedir ve bu tensör $G_{\mu\nu}$ ile gösterilir. Bu tensör korunumludur, dolayısıyla (2.2.18) eşitliğinin geçerli olduğu anlamına gelen $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ eşitliği garanti altına alınır. Bu ise enerjinin ve momentumun yerel seviyede korunduğu anlamına gelir. $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$

olduğundan dolayı, $\Lambda g_{\mu\nu}$ terimi bu ilişkiyi bozmadan eklenebilir. Λ terimine kozmolojik sabit adı verilir ve alan denklemlerine eklenmesi ile bu denklemlerin görünüşü

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.2.29)$$

haline gelir. Bu denklem Einstein tensörü olarak da yazılabilir

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.2.30)$$

Kozmolojik sabitin Einstein alan denklemlerine eklenmesinin sebebi, bu denklemleri yazdığı zaman Einstein'ın sonlu ve statik evren görüşünü kabul etmesiydi. Sınırlı ve statik evren zamanla çekim tarafından kendi içine çöktürülecektir. Bu durumda statiklik durumu bozulacaktı. Bunun önüne geçmek için çekime zıt bir şekilde çalışan bu sabiti denklemlere eklemiştir. Statik Einstein evreninde bu durum matematiksel olarak

$$\kappa^2 \rho = \frac{1}{r^2} = \Lambda \quad (2.2.31)$$

şeklinde ifade edilir. Burada r evrenin eğrilik yarıçapıdır.

2.3. FRW Metriği ve Friedmann Denklemleri

Astronomik gözlemlere göre madde evrenin her tarafına düzgün bir biçimde dağılmıştır. Kozmolojik prensip evrende hiçbir özel noktanın ve yönün olmadığı belirtir. Bu ise galaksilerin uzayda ve farklı açısall yönlerde düzgün bir şekilde dağıldığı anlamına gelmektedir. Bir diğer deyişle, büyük ölçeklerde evren hem homojen hem de izotropiktir.

Fakat astronomik gözlemlere göre evren genişlemektedir, bu yüzden homojenlik ve izotropi kısa bir süreliğine uygulanamaz (Carroll, 1997). Genişleyen evren statik evren düşüncesini çürütmüştür. Burada bu koşulları sağlayan bir metrik formunda Einstein alan denklemlerinin çözümü araştırılacaktır.

2.3.1. FRW Metriği

FRW (Friedmann-Robertson-Walker) metriğini elde etmek için öncelikle 4 uzay koordinatına (x, y, z, ω) sahip olan 4 boyutlu Euclidean uzayı ile başlanılsın. Sonsuz küçük bir çizgi elemanının uzunluğu

$$d^2l = d^2x + d^2y + d^2z + d^2\omega \quad (2.3.1.1)$$

şeklindedir. Ardından küresel koordinatlarda bunu yazmak için

$$x = r \cos \theta \sin \phi \quad (2.3.1.2)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.3.1.3)$$

$$z = r \cos \phi \quad (2.3.1.4)$$

dönüşümü yapılır. Bu durumda çizgi elemanı

$$d^2l = d^2r + r^2 d^2\Omega + d^2\omega \quad (2.3.1.5)$$

formuna sahip olur. Burada

$$d^2\Omega = d^2\theta + \sin^2\theta d^2\phi \quad (2.3.1.6)$$

eşitliği vardır.

Evren uzaysal olarak homojen ve izotrop olduğundan dolayı, 4 boyutlu uzaydaki üçlü bir hiperkürenin yüzey formunu alır. Bu kapsamda, hiperküre terimi yalnızca pozitif eğrilik durumunu değil, aynı zamanda sıfır ve negatif eğrilik durumunu da içerecektir. Yüzey üzerindeki noktalar 4 boyutlu uzaydaki bir noktadan R uzaklığına aynı olmalıdır

$$x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2 = R^2 \quad (2.3.1.7)$$

Bu ifade (2.3.1.2), (2.3.1.3) ve (2.3.1.4) cinsinden

$$r^2 + \omega^2 = R^2 \quad (2.3.1.8)$$

şeklinde yazılır. Buradan ise

$$rdr + \omega d\omega = 0 \quad (2.3.1.9)$$

sonucuna ulaşılır. Bu ifade ise

$$d^2\omega = -\frac{r^2 d^2r}{\omega^2} \quad (2.3.1.10)$$

eşitliği anlamına gelir. Burada (2.3.1.8) ifadesi yerine konulursa

$$d^2\omega = \frac{r^2 d^2r}{r^2 - R^2} \quad (2.3.1.11)$$

denkleminde ulaşılır. Bu denklem (2.3.1.5)' in içine konulursa

$$d^2l = \frac{d^2r}{1 - r^2/R^2} + r^2 d^2\Omega \quad (2.3.1.12)$$

eşitliği elde edilir. Denklemin sağ tarafında üç uzaysal boyut bulunmaktadır ve burada R evrenin yarıçapıdır. (2.2.1) denkleminde Genel Rölativistik formda iki uzay zaman noktası arasındaki mesafe verilmişti. Homojen, izotropik ve genişleyen bir uzayda bu mesafe t zaman koordinatı ile beraber

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)d\sigma^2 \quad (2.3.1.13)$$

şeklinde verilir. Burada $d\sigma^2$ çizgi elemanı ds^2 ' nin uzaysal kısmıdır ve

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}(u)du^\alpha du^\beta \quad (2.3.1.14)$$

ile ifade edilir. Burada u^α üçlü uzaysal koordinatları ve $\gamma_{\alpha\beta}$ ise 3 boyutlu metriği temsil eder.

Friedmann metriğini elde etmek için zamanın da eklenmesi gereklidir. Uzay bileşenlerinin zamana bağlı oldukları bilinmektedir, bu yüzden evrenin göreceli genişlemesini temsil eden ölçek faktörü $a(t)$ eklenirse, metrik

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{d^2r}{1 - r^2/R^2} + r^2 d^2\Omega \right) \quad (2.3.1.15)$$

haline gelir. Burada $a(t) \equiv R(t)/R_0$ boyutsuz ölçek faktörüdür. Şimdi, evrenin eğriliği

$$k = \frac{1}{R^2} \quad (2.3.1.16)$$

olarak tanımlanır. Bu eğrilik (2.3.1.15) denkleminde konulursa, homojen, izotropik ve genişleyen evreni tanımlayan Friedmann-Robertson-Walker (FRW) metriği elde edilir

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{d^2r}{1 - kr^2} + r^2 d^2\Omega \right) \quad (2.3.1.17)$$

k eğriliği, reel yarıçapa sahip olan kapalı (küresel) evren için pozitiftir. Tamamen baryonik madde ile kaplı olan kapalı evrenin genişlemesi yavaşlayacaktır ve sonuçta böyle bir evren geriye çökmeye başlayacaktır. İmajiner yarıçapa sahip olan açık (hiperbolik) evren için k niceliği negatiftir. Son olarak, sonsuz R yarıçapına sahip olan düz evren için ise bu değer sıfıra karşılık gelmektedir (Carroll, 1997; Klanova' dan, 2013).

2.3.2. Hubble Parametresi

Evrenin genişlemesi ölçek faktörü $a(t)$ ile ilişkilidir. Genişleme oranı Hubble parametresi H adı verilen bir nicelik tarafından

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.3.2.1)$$

şeklinde temsil edilmektedir. Hubble parametresi zamanla değişen bir niceliğe bağlı olduğundan dolayı, bu parametrenin değeri zamanla değişecektir. Hubble parametresinin günümüz değeri H_0 ile gösterilir. Planck uydusu tarafından bu parametrenin değeri

$$H_0 = 67.80 \pm 0.77 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (2.3.2.2)$$

olarak ölçülmüştür (Ade et al., 2013)

Bununla beraber, kozmolojide kullanışlı olan H_0^{-1} Hubble zamanı ve Hubble hacmi kavramları da tanımlanabilir. Ölçek faktörü a' nın yaklaşık olarak iki katına çıktığı zaman aralığına Hubble zamanı denir. Hubble hacmi ise, evrenin genişlemesinden dolayı ışık hızından daha büyük bir oranda gözlemciden uzaklaşan cisimlerin ötesini çevreleyen küresel bir evren bölgesidir.

2.3.3. Friedmann Denklemleri

Friedmann denklemleri ölçek faktörünün zaman ile nasıl değiştiğini ve farklı evren modelleri ile benzeştirme yapabilmek için kullanılabildiğinden dolayı modern kozmolojide en çok kullanılan denklemlerden birisidir. Bu denklemleri elde edebilmek için gözlemsel olarak uyumlu olan uzaysal düz ($k = 0$) FRW metriği göz önünde bulundurulmalıdır. (2.3.1.17) denkleminde

$$d^2s = -dt^2 + a^2(t)(d^2r + r^2d^2\Omega) \quad (2.3.3.1)$$

ifadesine ulaşılır. Bu metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix} \quad (2.3.3.2)$$

ve

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)} \end{pmatrix} \quad (2.3.3.3)$$

matris formunda yazılan kovaryant ve kontravaryant metrik tensör anlamına gelmektedir.

(2.2.2) kullanılarak (2.3.3.1) metriğinin sıfırdan farklı olan Christoffel bileşenleri

$$\Gamma_{xx}^t = \Gamma_{yy}^t = \Gamma_{zz}^t = \dot{a}a \quad (2.3.3.4)$$

$$\Gamma_{xt}^x = \Gamma_{yt}^y = \Gamma_{zt}^z = \Gamma_{tx}^x = \Gamma_{ty}^y = \Gamma_{tz}^z = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.3.3.5)$$

elde edilir. (2.2.4) Ricci tensörünün içerisine bu terimler yerleştirilirse, sıfırdan farklı olan Ricci tensörleri

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (2.3.3.6)$$

$$R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = \ddot{a}a + 2\dot{a}^2 \quad (2.3.3.7)$$

olarak elde edilir. (2.2.5), (2.3.3.3), (2.3.3.6) ve (2.3.3.7) kullanılarak Ricci skaleri

$$R = 3\ddot{a}a + 3\frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2}{a^2} \quad (2.3.3.8)$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$R = 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 6(2H^2 + \dot{H}) \quad (2.3.3.9)$$

şeklinde sadeleştirilebilir.

Mükemmel akışkan için maddenin enerji momentum tensörü

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (2.3.3.10)$$

ile verilir. Burada ρ_m enerji yoğunluğu ve P_m ise basınçtır. (2.3.3.2) denklemi kullanılarak indisler indirilirse

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} T^{\alpha}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 P \end{pmatrix} \quad (2.3.3.11)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin izi

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\rho + 3P \quad (2.3.3.12)$$

şeklindedir (Klanova, 2013).

2.3.3.1. Birinci Friedmann denklemi

(2.2.29) Einstein alan denkleminin zaman bileşenleri

$$R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} R + \Lambda g_{tt} = \kappa^2 T_{tt} \quad (2.3.3.1.1)$$

şeklindedir. Bu eşitliğin içerisine (2.3.3.2), (2.3.3.6), (2.3.3.7), (2.3.3.9) ve (2.3.3.11) konulursa

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\kappa^2 \rho + \Lambda}{3} \quad (2.3.3.1.2)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu, düz evren için birinci Friedmann denklemidir. Bu denklem, maddenin ve kozmolojik sabitin enerji yoğunluğunun ölçek faktörü ile nasıl değiştiğini söyler. Enerji yoğunlukları ve ölçek faktörü arasındaki bu ilişki, rölativistik olmayan maddenin enerji yoğunluğu ve rölativistik olan maddenin enerji yoğunluğu açısından açıklanabilir. Rölativistik olmayan maddenin sahip olduğu enerji yoğunluğu $\rho_m \propto a^{-3}$ ile verilirken, rölativistik parçacıklarda ise $\rho_r \propto a^{-4}$ ile verilir. Dolayısıyla, rölativistik olmayan madde için enerji yoğunluğu $\rho_m = \rho_0^m / a^3$ şeklindeyken, rölativistik maddenin enerji yoğunluğu $\rho_r = \rho_0^r / a^4$ şeklindedir. Burada ρ_0^i günümüz enerji yoğunluğudur ve dolayısıyla gözlenebilir bir niceliktir (Trodden and Carroll, 2004).

Farklı tür enerji yoğunlukları için Friedmann denklemi çözülebilir. (2.3.3.1.2) denkleminde ρ_m için olan ifade kullanılırsa

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad (2.3.3.1.3)$$

ilişkisine ulaşılır. Dolayısıyla, Einstein alan denklemleri Friedmann denklemleri çerçevesinde çözümlerse evrenin genişlediği ortaya çıkar. Bu da statik evren düşüncesinin geçersiz olduğu anlamına gelir.

Benzer şekilde, ρ_r için olan ifade kullanılırsa

$$a(t) \propto \sqrt{t} \quad (2.3.3.1.4)$$

ilişkisi elde edilir. Işınım ve madde arasındaki farklılık bu bileşenlerin farklı genişleme oranına sahip olmasına neden olmaktadır (Trodden and Carroll, 2004).

Şimdi ise, Friedmann denklemlerinde kozmolojik sabitin evrenin genişleme oranını nasıl değiştireceği görülecektir. Daha önceden bahsedildiği gibi, kozmolojik sabit statik evreni elde etmek için gerekli olan terimdi. Ancak genişleyen evren için kozmolojik sabit artık yeni bir enerji bileşeni olarak dikkate alınacaktır. (2.2.30) denkleminde Λ evrenin genişlemesi sırasında enerji yoğunluğu sabit olan bir bileşen gibi davranır. Eğer (2.3.3.1.2) denklemi bu koşul altında çözümlerse

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow a(t) = e^{\sqrt{\Lambda/3}t} \quad (2.3.3.1.5)$$

eşitliği elde edilir. Bu çözüm de Sitter çözümü olarak bilinmektedir ve tamamen kozmolojik sabitten oluşan bir evreni tanımlamaktadır. Bu çözümün herhangi bir fiziksel karşılığı olmamasına rağmen matematiksel olarak kullanışlıdır.

Evrenin evrimini daha iyi anlayabilmek için, bu üç bileşen bir arada bulunacak şekilde Friedmann denklemi yazılabilir

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_m}{a^3} + \frac{\Lambda}{\kappa^2} \right] \quad (2.3.3.1.6)$$

Buradan evrenin evriminin sahip olduğu üç farklı faz görülmektedir. Işınım küçük ölçeklerde (evrenin başlangıcı) baskındır, dolayısıyla günümüzde baskın durumda değildir. Madde ise ışıma göre daha büyük ölçeklerde baskındır. Kozmolojik sabitin enerji yoğunluğu ise zamanla değişmemektedir. Buradaki tek varsayım (2.3.3.1.6) denklemindeki enerji bileşenleri arasındaki etkileşimin küçük olduğudur, eğer bu varsayım etkileşimler uygulanmayacaksa dikkate alınmalıdır.

Şimdi yeni bir nicelik olan kritik yoğunluk tanımlanabilir. Evrenin genişleme oranı ile yakından ilgili olan bu nicelik

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.3.3.1.7)$$

şeklinde gösterilir (Trodden and Carroll, 2004). Buradan yola çıkarak

$$\Omega_i = \frac{\rho_0^i}{\rho_c} \quad (2.3.3.1.8)$$

yoğunluk parametresi adı verilen yeni bir nicelik tanımlanır. Burada ρ_0^i madde, ışıma veya kozmolojik sabitten herhangi birisinin günümüz enerji yoğunluğunu temsil eder. Dolayısıyla, (2.3.3.1.6) denklemi yoğunluk parametresi cinsinden

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda \quad (2.3.3.1.9)$$

olarak ifade edilebilir. (2.3.1.17) eşitliğinden görüldüğü gibi, evrenin ilave bir bileşeni olarak Friedmann denkleminde rol oynayan uzay zaman eğriliğinin etkisi de dahil edilmelidir. Bu durumda (2.3.3.1.9) eşitliği

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda - \frac{k}{H_0^2 a^2} = \frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda - \frac{\Omega_k}{a^2} \quad (2.3.3.1.10)$$

haline gelir. Burada $\Omega_k = k/H_0^2$ ' dir. Eğer bu denklem $H = H_0$ ve $a = 1$ olan günümüz zamanında dikkate alınırsa

$$1 - \Omega_k = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda \quad (2.3.3.1.11)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, günümüz zamanında evrenin toplam enerji yoğunluğu

- $\rho_T^0 > \rho_c \Rightarrow \Omega_k > 1$ kapalı evren
- $\rho_T^0 < \rho_c \Rightarrow \Omega_k < 1$ açık evren
- $\rho_T^0 = \rho_c \Rightarrow \Omega_k = 1$ düz evren

şeklinde olur. Bu sayede, evrenin toplam enerji yoğunluğu, evrenin genişleme etkilerinin uzay zaman eğriliğinin nasıl anlaşılacağında kullanılabilen bir niceliktir.

2.3.3.2. İkinci Friedmann denklemi

Birinci Friedmann denklemlerinde Einstein alan denklemlerinin sadece zamansal kısmı dikkate alınmıştı. Şimdi ise uzaysal kısımlar göz önünde bulundurulacaktır.

(2.3.3.12) kullanılarak, (2.2.29) Einstein alan denklemlerinin izinin

$$-R + 4\Lambda = \kappa(-\rho + 3P) \quad (2.3.3.2.1)$$

şeklinde olduğu görülür. Bu ifadeye (2.3.3.9) eklenirse

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\kappa^2 \frac{-\rho + 3P}{6} - 4\Lambda \quad (2.3.3.2.2)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.69) birinci Friedmann denklemi burada yerine konulursa

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-\kappa^2(\rho + 3P) + \Lambda}{3} \quad (2.3.3.2.3)$$

denklemi elde edilir. Bu, ikinci Friedmann denklemidir. Bu denklem ölçek faktörünün ikinci türevi hakkında bilgi verdiği için, evrenin ivmelenerek genişlemesinin anlaşılmasını sağlar. Fakat bu denklemin çözülebilmesi için madde, ışıınım ve kozmolojik sabite ait durum denklemi gereklidir. Bu denklem

$$\omega = \frac{p}{\rho} \quad (2.3.3.2.4)$$

ile ifade edilir. (2.3.3.2.4) denklemi (2.3.3.2.3) denkleminde yerine konulursa, hızlanan bir evren için $\omega = P/\rho < -1/3$ koşulunun gerektiği anlaşılır.

Korunum denklemi

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \quad (2.3.3.2.5)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem genişleyen evrende enerji yoğunluğunun evrimini tanımlar ve

$$\frac{d\rho}{dt} = -3(\rho + p)\frac{1}{a}\frac{da}{dt} \quad (2.3.3.2.6)$$

şeklinde yazılabilir. (2.3.3.2.4) denklemi yerine konulursa

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho(1 + \omega)\frac{1}{a}\frac{da}{dt} \Rightarrow \rho = \begin{cases} \frac{\rho^0}{a^{3(1+\omega)}} & \omega = \text{sabit} \\ \rho^0 e^{\int_a^{13} \frac{[1+\omega(a)]da}{a}} & \omega = \omega(a) \end{cases} \quad (2.3.3.2.7)$$

süreklilik denklemi elde edilir. Bu eşitlik ölçek faktörü ile enerji yoğunluklarının nasıl değiştiğini gösterir. Rölativistik olmayan madde için $\omega_m = 0$ iken, rölativistik madde için $\omega_r = 1/3$ ' tür. (2.3.3.2.7) denkleminden kozmolojik sabitin durum denklemi de elde edilebilir. Daha önceden belirtildiği gibi, kozmolojik sabit evrenin genişlemesi sırasında enerji yoğunluğu sabit olan bir akışkan gibi davranmaktadır. Dolayısıyla sabit ρ_Λ ' yı elde edebilmek için $\omega = -1$ olması gerekmektedir. Bu da $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ demektir. Yani hızlanarak genişleyen bir evreni elde edebilmek için, negatif basınca sahip olan kozmolojik sabit gerekmektedir.

Şimdi ölçek faktörünün ikinci türevini farklı bileşenlerin nasıl etkilediği görülebilir

- *Madde baskın durum,* $p = 0 \Rightarrow \ddot{a} < 0$ *Yavaşlayan genişleme*
- *Işınım baskın durum,* $p = \rho/3 \Rightarrow \ddot{a} < 0$ *Yavaşlayan genişleme*
- *Λ baskın durum,* $p = -\rho \Rightarrow \ddot{a} > 0$ *Hızlanan genişleme*

Evrenin hızlanması hakkında bileşenlerin etkilerini daha iyi anlamak için, ivmelenme parametresi

$$q_0 = -\frac{1}{H_0^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)_{t=t_0} = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (2.3.3.2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Bu parametre üzerinden evrenin genişlemesi hakkında konuşulabilir. Pozitif bir q_0 değeri $\ddot{a} < 0$ ' a karşılık gelir. Bunun anlamı, uzayda herhangi iki noktanın göreceli hızlarının azalması yani evrenin genişlemesinin yavaşlamasıdır. Evrenin genişleme hızı arttığı zaman $\ddot{a} > 0$ olmalıdır. Bu da q_0 ' ın negatif olmasını gerektirmektedir. Bu parametre Ω_i cinsinden

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_i - \Omega_\Lambda \quad (2.3.3.2.9)$$

olarak yazılır. Bu yüzden eğer gözlemler hızlanarak genişleme ile mutabıksa, standart kozmolojik model sadece madde ve ışınım ile açıklanamaz, hatta $q_0 < 0$

durumunu elde etmek için gerekli olan benzer bir durum denkleminde sahip kozmolojik sabit veya farklı bir bileşen gereklidir (Martinelli, 2011).

2.4. Genel Rölativite Teorisinin Açıklayabildiği Kozmolojik Durumlar

Genel Rölativite üzerine temellendirilen evren modeline standart model adı verilir. Bu model homojen, izotropik ve genişleyen bir evreni öngörmektedir. Eğer zamanda geriye doğru gidilecek olursa, daha küçük, daha sıcak ve yoğun bir evrenle karşılaşılacaktır. Erken evrene dair farklı süreçlerin gözlemleri ile Genel Rölativite' nin ve Friedmann denklemlerinin oluşturduğu teorik standart modelin uyduğu birçok nokta vardır. Bunlar, Genel Rölativite teorisinin başarıları olarak ele alınacaktır.

2.4.1. Kırmızıya Kayma, Işınım Uzaklığı ve Hubble Kanunu

Eğer laboratuvarında salınan bir fotonun dalga boyu λ_0 , gözlenen dalga boyu da $\lambda > \lambda_0$ ise, bu fotonun

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (2.4.1)$$

ile verilen z (kırmızıya kayma) kesri kadar kırmızıya kaymış olduğu söylenebilir. Evren a oranında genişliyorken, parçacıkların dalga boyları

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{a} \quad (2.4.2)$$

ölçeğinde olur. (2.4.1) ve (2.4.2) karşılaştırılırsa

$$z = \frac{1 - a}{a} \quad (2.4.3)$$

$$a = \frac{1}{1 + z} \quad (2.4.4)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bir gözlemci kaynaktan daha büyük gravitasyonel potansiyelde bulunduğu zaman gravitasyonel kırmızıya kayma meydana gelir. Bu durumun fiziksel açıklaması ise, enerji kesrini kaybeden parçacığın farklı potansiyel ile karşılaşmasıdır.

Genel Rölativite' ye göre fizik kanunlarının tüm koordinatlarda aynı olduğu daha önceden bahsedilmişti. Ancak bazı koordinatlarda çalışmak daha kolaydır. Bunlardan birisi de comoving koordinat sistemidir. Burada metriğin köşegen elemanları hariç tüm bileşenleri sifıra eşittir. Bu ise fiziksel olarak izotropik bir evrende çalışıldığı anlamına gelir.

Comoving koordinatlarda a ölçek faktöründeki bir cisme olan uzaklık

$$dz = c \int_a^1 \frac{da}{a^2 H(a)} \quad (2.4.5)$$

ile verilir. Sadece içeriği çok iyi bilinen bir evren için $a(t)$ Friedmann denklemlerinden elde edilebilir. Fakat gerçek evren için $a(t)$ ' yi belirlemek kolay değildir. Bunun için ise

$$d_L(z) = \frac{cz}{H_0} \left[1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z \right] + O(z^3) \quad (2.4.6)$$

yaklaşımı yapılır. $z \ll 1$ olduğunda

$$d_L(z) = czH_0^{-1} \quad (2.4.7)$$

elde edilir (Martinelli, 2011). Burada $d_L(z)$ comoving koordinat sistemindeki ışınım uzaklığıdır. Buna Hubble kanunu denir. Bu kanun daha uzak kaynakların bizden daha hızlı bir şekilde uzaklaştıklarını söylemektedir. Bu genel ilerleme hareketinin gözlemi, statik evrenden vazgeçilmesine ve Friedmann tarafından önerilen genişleyen evrenin kabul edilmesine neden olmuştur.

Bu gözlemler standart kaynak olarak kullanılan galaksilerde gerçekleştirilmiştir. Standart kaynaklar fiziksel uzaklığın bir göstergesi olarak

kullanılmaktadır. Mutlak parlaklıkları ile görünen parlakları arasındaki ilişkiden yararlanarak bu cisimlerin uzaklıkları bulunabilmektedir ve galaksilerin kırmızıya kaymış dalgaboyu gözlemlerinden indirgenmiş Hubble parametresi belirlenir

$$h_0 = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \quad (2.4.8)$$

2.4.2. İlkel Çekirdek Sentezlenmesi

Genişleyen evrende ölçek faktörü zamanla artmaktadır. Bunun anlamı, geçmişte ölçek faktörünün günümüzdekinden daha küçük olduğudur, bu da yoğunluğun daha yüksek olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla geçmişte kaçınılmaz olarak evrenin T sıcaklığı da daha yüksek ve eğer zamanda yeteri kadar geri gidilirse evren tamamen iyonize formda olmalıydı.

Yapılan teorik hesaplamalara göre, evrende ilkel helyum bolluğu yaklaşık olarak 0.25' dir (Steigman, 2006; Martinelli' den, 2011). Bu değer ise evrende helyumun ölçülen bolluğu ile uyumludur, bu yüzden ilkel çekirdek sentezlenmesi genişleyen evren modelinin bir diğer gözlemsel kanıtıdır.

2.4.3. Kozmik Mikrodalga Ardalan Işınımı

Genişleyen model geçmişte daha sıcak bir evren önermiştir ve bu yüzden evren geçmişte tamamen iyonize madde ile dolu olmalıydı. Bu ise, madde ve fotonların geçmişte tek bir akışkan gibi olması, Thomson saçılması ile etkileşimleri ve termal dengede olmaları anlamına gelmektedir. Thomson saçılmasının zaman ölçeği genişlemenin zaman ölçeğinden daha küçük olduğu zaman evren fotonlara opak ve fotonlar serbest bir şekilde hareket edemiyorlardı. Ancak aksi durumda yani, Thomson saçılmasının zaman ölçeği genişlemenin zaman ölçeğinden daha büyük olduğu durumda, evren artık fotonlara transparan olur ve fotonlar serbest olarak yayıldılar. Ancak fotonlar kara cisim tayfında görülen termal dengenin hafızasında yer etmiş durumda olacaklardı. Genişlemeden dolayı fotonların enerji yoğunluğu zamanla azalacaktır. Bundan dolayı bu spektrumun maksimumu günümüzde mikrodalga bölgesindedir. Böylece genişleyen model ilkel evrenin fotonlar için opak olduğunu ve kara cisim ardalan ışımasının şu anda mutlaka mikrodalga boylarında

gözlemlenmesi gerektiğini öngörmüştür; bu nedenle bu ışıma kozmik mikrodalga aralan ışıması denilmektedir.

İlk olarak 1964' te izotropik mikrodalga ışıması keşfedilmiş ve deneyler sayesinde bu ışımanın $T_0 = 2.725 \pm 0.004 K$ sıcaklığında kara cisim tayfına sahip olduğu anlaşılmıştır. Dolayısıyla genişleyen evren modelinin bir başka gözlemsel kanıtı da elde edilmiş olur.

Kozmik mikrodalga aralan ışıması ile yakından ilgili olan baryon akustik salınımından da bahsedilebilir. Aslında bu salınımın nedeni erken evrende var olan akustik dalgalar tarafından oluşturulmuş, evrenin görünür baryonik madde yoğunluğundaki periyodik dalgalanmalardır. Bu salınımın ölçümü ile kozmolojik parametreler kısıtlanarak karanlık maddenin doğası hakkında bazı bilgiler elde edilebilmektedir (Martinelli, 2011).

2.5. Genel Rölativite Teorisinin Açıklayamadığı Kozmolojik Durumlar

Gözlemsel kozmolojinin gelişmesi sayesinde, evrenin evrimi ve genel yapısı hakkında daha önceden ileri sürülen teorileri sınama fırsatı elde edilmiştir. O zamana kadar birçok astrofiziksel ve kozmolojik olayı açıklayabilen Genel Rölativite' nin bazı yeni olaylar karşısında açıklama getirmekte zorlandığı görülmüştür. Kozmolojik ölçekte önem arz eden bu olaylar karanlık madde ve karanlık enerji kavramlarıdır.

2.5.1. Karanlık Madde

Teorik öngörüler için Ω_i parametreleri olarak girilen tüm kozmolojik parametrelerin değerlerini, kozmolojik gözlemler sayesinde ölçmek mümkündür. Bu parametrelerden birisi olan madde yoğunluğu Ω_m , ışıma uzaklığı (Riess et al., 2004; Martinelli' den, 2011) ve bazı başka ölçümler (Komatsu et al., 2011; Martinelli' den, 2011) ile 0.25 olarak ölçülmüştür. Ancak buradaki uyumsuzluk, evrendeki ışığı alınabilen tüm maddenin bu değeri açıklamak için yeterli olmamasıdır.

Bu uyumsuzluğun açıklanması için ileri sürülen düşünce, elektromanyetik olarak etkileşmeyen ve bu yüzden görülemeyen ancak gravitasyonel etkileşimle

evrenin toplam madde yoğunluğunda hesaba katılan farklı bir madde türünün var olduğunu şeklidir, bu yeni madde türüne karanlık madde denir.

Karanlık maddeyi doğrudan gözlemlemek mümkün değildir ancak gravitasyonel etkileşim sayesinde astrofiziksel gözlemlerde karanlık maddenin varlığının işaretleri bulunabilir. Karanlık maddenin varlığının ilk kanıtı M_c Coma kümesinin kütesinin ölçülmesidir. Örneğin yüzlerce galaksi içeren Coma kümesinin kütlesi toplam ışıyım ölçülerek bulunabilir. Kütle - ışıyım oranından $M_c = 3 \cdot 10^{13} M_\odot$ olarak elde edilen kütleyi ışıyıma dönüştürmek mümkündür. Ancak aynı kümelerin kütlesi dinamik olarak da dikkate alınıp tahmin edilebilir. Küme öz çekici sistem olarak dikkate alınabilir bu yüzden Virial teoremi kullanılabilir

$$K + 2W = 0 \quad (2.5.1.1)$$

burada K ve W sistemin kinetik ve gravitasyonel enerjisidir. Bu ilişkiden

$$K = -\frac{W}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} M_c \langle v^2 \rangle = \frac{\alpha G M_c^2}{2 r_h} \quad (2.5.1.2)$$

eşitliği elde edilir. Burada α küme ışıyım profiliyle ilgili bir parametredir, $\langle v^2 \rangle$ hızın karesidir ve r_h ise bir küre olarak düşünülen kümenin yarıçapıdır ve toplam kütleinin yarısını içerir. r_h küme profilinden elde ediliyorken $\langle v^2 \rangle$ radyal hız dağılımının karesi sayesinde ölçülebilir, böylece

$$M_c = 2 \cdot 10^{15} M_\odot \quad (2.5.1.3)$$

eşitliği elde edilir. Buna göre, kütle-ışıyım oranından elde edilen kütleinin dinamik olarak tahmin edilen kütleden yaklaşık 10^2 kat daha az olduğu görülebilir. Buradan da kümedeki maddenin neredeyse tamamına yakınının görülebilir madde formunda olmadığı, dinamik özellikleri tamamıyla saptanan karanlık madde formunda olduğu ortaya çıkar.

Karanlık maddenin bir diğer işareti de galaksilerdeki dönme eğrisinin gözlemidir. Gravitasyonel ivmelenmeden dolayı galaktik merkezdeki yıldızların

yörüngesi uzaklığa bağlıdır. Bu ivmelenme eğer maddenin küresel olarak dağıldığı varsayılırsa

$$a = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (2.5.1.4)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $M(r)$ r uzaklığına bağlı olarak bulunan kütledir. İvme $a = v^2/r$ şeklinde ifade edilirse, galaksi merkezinden r uzaklığı içerisindeki kütle yıldızın hızıyla ilgilidir

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (2.5.1.5)$$

Küresel sistemde $M(r) \propto r^3$ tür ve bu yüzden hızın merkezden olan uzaklık ile nasıl değiştiği hesaplanabilir

$$v \propto r \quad (2.5.1.6)$$

Ancak yıldız dağılımı galaksinin ışınım profiliyle de ilgilidir, genelde

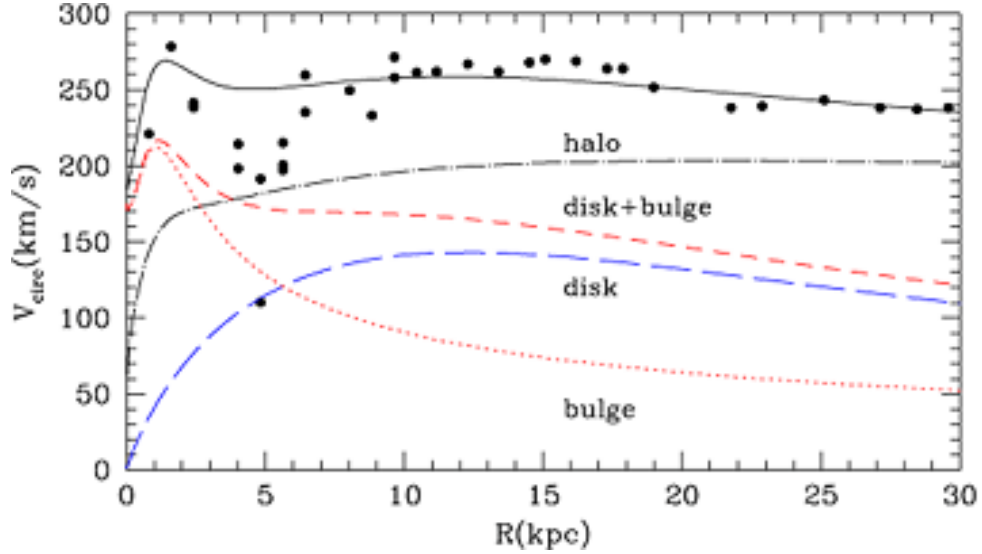
$$I(r) = I_0 e^{\frac{r}{r_s}} \quad (2.5.1.7)$$

davranışını sergiler. Burada r_s karakteristik yarıçaptır, genelde birkaç Kpc'dir, galaksi kütesinin çoğunu içerir. Bu yüzden, ilk olarak ($r > r_s$) şeklinde çok büyük uzaklıktaki yıldızlar aynı kütle tarafından çekileceklerdir, bu yüzden hız yarıçapla

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (2.5.1.8)$$

şeklinde azalır. Ancak, gözlenen galaksi dönme eğrileri (Şekil 2.1) sayesinde bu davranış sadece $r \approx r_s$ için görülmektedir, daha büyük yarıçapta iken yıldızların hızları sabit değer almaktadır.

Bu durum, gözlenen hız eğrisini verebilmesi için r_s' in dışında görünmeyen maddenin varlığını ve bu maddenin de galaksinin halosunda saklı olması gerektiği şeklinde açıklanabilir.



Şekil 2.1: M31 galaksisi için ve teorik modeller ile ve karanlık madde halosu dahil olmadan gözlenen dönme eğrisi (Klypin et al., 2002; Martinelli' den, 2011).

Ancak bu karanlık madde normal madde veya kozmolojide bilindiği şekliyle baryonik madde değildir, gözlenemeyecek kadar soğuk olmalıdır. Aslında baryonların ve fotonların nümerik yoğunlukları arasındaki oran güçlü bir şekilde sabittir (Steigman, 2006; Martinelli' den, 2011)

$$\eta = (5.5 \pm 0.05) \cdot 10^{-10} \quad (2.5.1.9)$$

Burada η parametresi çekirdek sentezlenmesi sürecinde baryonlar ile fotonların sayı yoğunluğunun oranıdır. Baryonların nümerik yoğunluklarıyla ilgili olan bu değer, rölativistik olmayan enerji yoğunluğuna baryonların (Ω_b) toplam katkısının saptanması amacıyla kullanılabilir

$$\eta = 2.74 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2.73K}{T} \right)^3 \Omega_b h^2 \quad (2.5.1.10)$$

Böylece η' nın değerinin ölçümü ve Hubble sabiti $h_0 = H_0/100'$ in indirgenmesi ile

$$\Omega_b = 0.04 \pm 0.01 \quad (2.5.1.11)$$

elde edilir (Dodelson, 2003; Martinelli' den, 2011). Bu değer gözlemsel verilerle gayet uyumlu olarak ilkel çekirdek sentezi kullanılarak da elde edilmişti. Üstelik maddenin toplam enerji yoğunluğu $\Omega_m \approx 0.25$ bazı farklı gözlemlerle de doğrulanmıştır. Bu yüzden evrende maddenin yaklaşık olarak % 80' inin $\Omega_{dm} \approx 0.21$ olarak baryonik olmayan maddeden oluştuğu söylenebilir.

2.5.2. Karanlık Enerji

Λ kozmolojik sabitinden evrenin hızlanarak genişlemesinden sorumlu olan bileşen olarak daha önceden bahsedilmişti. Bu sabit şimdi daha ayrıntılı bir şekilde analiz edilip tanıtılacaktır. Bu bileşenin varlığından karanlık maddede olduğu gibi, sadece kozmolojik evrim üzerindeki etkileri sayesinde dolaylı olarak anlam çıkartılabilir. Karanlık enerjinin varlığını doğrulayabilecek gözlemleri bulmak için, Friedmann denklemleri çalışılabilir çünkü öncelikle bu denklemler Ω_i ' nin bir fonksiyonu olarak evrenin yaşının hesaplanmasına imkan sağlar ve gözlemlerle tahmin edilen değerlerin kıyaslanmasını sağlar. İkinci olarak ise ışınım uzaklığı üzerinde ivmelenerek genişlemenin etkilerinin veriler ile teorik hesaplara göre analiz edilmesini sağlar.

Evrenin yaşının alt limiti bilinen en yaşlı yıldızların yaşı tespit edilerek tahmin edilebilir; bunlar küresel kümelerin içindeki düşük metal bolluğuna sahip yıldızlardır ve onların evrimlerinin çalışılması ile evrenin yaşı

$$t_u > 13.5 \pm 2 \text{ Milyar yıl} \quad (2.5.2.1)$$

olmalıdır (Jimenez et al., 1996; Martinelli' den, 2011). Şimdi teorik olarak Big Bang' ten ($a = 0$ olduğunda) günümüz t_0 zamanına kadar olan süre hesaplanmak istenmektedir. Evrenin yaşı kozmolojik parametreler Ω_i ' nin fonksiyonu olarak değişmektedir. Eğer yalnızca maddeden oluşan düz evren $\Omega_m = 1$ göz önünde bulunduruluyorsa, birinci Friedmann denklemi

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{1}{a^3} \Rightarrow \sqrt{a} da = H_0 dt \quad (2.5.2.2)$$

şeklinde olur. $0 < t < t_0$ ve $0 < a < 1$ ile integre edilip $h_0 = 0.7$ alınırsa

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \approx 9.3 \text{ Milyar yıl} \quad (2.5.2.3)$$

elde edilir.

Bu yüzden eğer madde evrenin tek bileşeni ise, tahmin edilen yaş gözlemlerle uyumsuz olacaktır. Evren bileşeni olarak sadece ışıınım dikkate alınırsa, daha düşük yaş $t_0 = (2H_0)^{-1}$ elde edilir, dolayısıyla sadece madde ve ışıınımı dahil edilerek evrenin gözlemlerle uyumlu olan yaşını bulmak mümkün değildir.

Aynı yöntem sayesinde, eğrilik veya kozmolojik sabit tarafından getirilen tüm enerji yoğunlukları ile boş evrenini yaşını hesaplamak da mümkündür, ilk durumda $t_0 = H_0^{-1}$ iken ikinci durumda $t_0 = +\infty$ olur ve bu da Big Bang yok demektir. Bu yüzden bu iki bileşeni evrenin teorik yaşını arttırmak için madde ve ışıınım içeren bir modelde göz önüne almalıyız.

Aslında, madde ve kozmolojik sabit tarafından oluşturulan ($\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$) düz evren varsayılırsa

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{H_0^{-1}}{\sqrt{1 - \Omega_m}} \ln \left[\frac{\sqrt{1 - \Omega_m} + 1}{\Omega_m} \right] \quad (2.5.2.4)$$

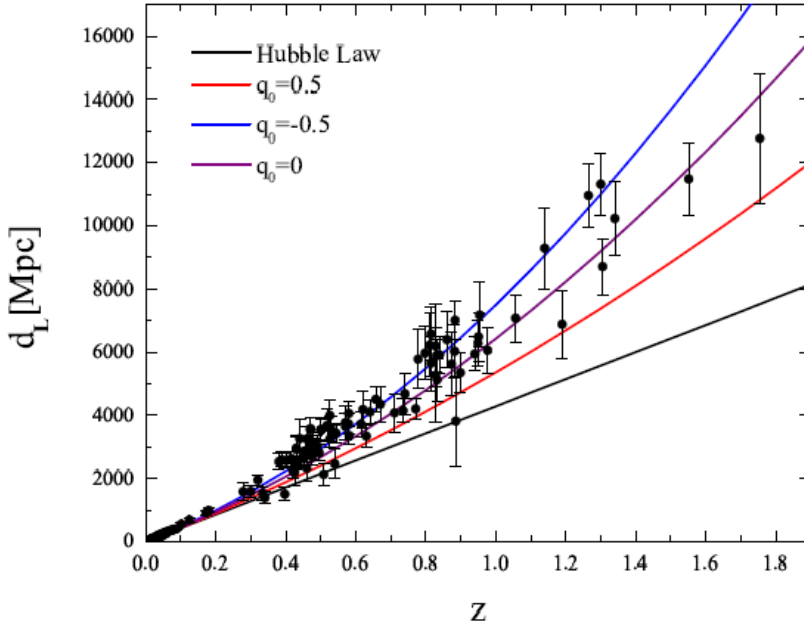
ve $\Omega_m = 0.25$ ve $h_0 = 0.7$ alınırsa

$$t_0 \approx 14.2 \text{ Milyar yıl} \quad (2.5.2.5)$$

değeri elde edilir. Bu yüzden enerji yoğunlukları kıyaslanabilir madde ve kozmolojik sabitli bir model küresel kümeler ile elde edilen alt yaş limiti ile uyumludur.

Karanlık enerjinin daha da önemli işareti, yalnızca madde ve ışıınım ile hesaplanan ışıınım uzaklığından gözlenen sapmadır. Hubble kanunu $d_L = czH_0^{-1}$ sadece $z \ll 1$ için geçerlidir, daha büyük kırmızıya kaymalarda (2.4.6) denklemindeki daha yüksek mertebeler dikkate alınmalıdır. Hubble kanunundan

bu sapmalar (2.3.3.2.9) denklemindeki ivmelenme parametresi ile ilişkili olduğu için, evrenin bileşenleri hakkında birçok bilgiler verecektir.

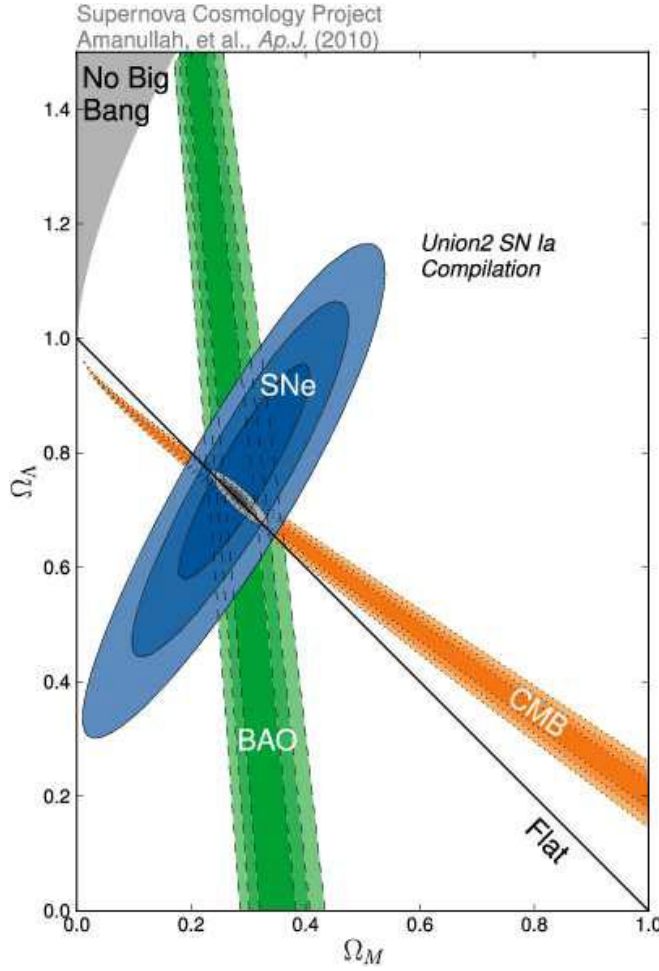


Şekil 2.2: $q_0 = 0.5$ (kırmızı çizgi), $q_0 = 0$ (mor çizgi) ve $q_0 = -0.5$ (mavi çizgi) ile ışınım uzaklığı. Siyah çizgi düşük kırmızıya kaymadaki Hubble kanunudur. Noktalar ve hata payları SN Ia verileridir (Riess et al., 2004; Martinelli' den, 2011).

Dolayısıyla q_0 ' in farklı değerleri ile ortaya konulmuş teorik modeller ile gözlemsel verileri kıyaslamak mümkündür. Şekil 2.2' den görüldüğü gibi süpernova verisi negatif q_0 ile uyumludur; bunun anlamı evrenin şu an madde ve ışınım ile açıklanamayan hızlanarak genişleme fazında olduğudur. Hatta bu iki bileşen ivmelenme parametresine pozitif katkı bile yapmaktadır, bu yüzden kozmolojik sabit gibi ivmelenme parametresi q_0 ' a negatif katkı yapacak karanlık enerji akışkanına ihtiyaç vardır (Martinelli, 2011).

2.5.2.1. Kozmolojik sabit

Hızlanarak genişleme fazını açıklayan en basit aday kozmolojik sabittir. Bu bileşen için durum denklemleri parametresi $\omega = -1$ ' dir ve q_0 ' a negatif katkıda bulunduğu (2.3.3.2.8) denklemleri ile görülmektedir.



Şekil 2.3: Ω_Λ ve Ω_m üzerindeki gözlemsel sınırlamalar (Martinelli, 2011).

Bu yüzden Ω_Λ ışınım uzaklığı verisi ile sınırlandırılabilir, çünkü ışınım uzaklığı özellikle karanlık enerjiye duyarlıdır. Şekil 2.3' de Union 2 süpernovasından Ω_Λ ve Ω_m üzerindeki sınırlamalar görülebilir. Buna göre, süpernova, baryon akustik salınımı ve kozmik mikrodalga ardalan gözlemlerinin neredeyse birbirleri ile dik şekilde çakışması sayesinde, madde ve kozmolojik sabit üzerinde ciddi sınırlamalar elde edilebilmektedir. Yozlaşmadan dolayı kozmik mikrodalga ardalanı sınırlaması sadece tek başına yeterli değildir çünkü grafikte ucu açık bir görünüm sergilemektedir. Grafiğe göre bu üç gözlemin kesiştiği bölge aynı zamanda evrenin uzaysal olarak düz olduğunu da göstermektedir. Yine de kozmolojik sabit üzerinde bazı ciddi teorik problemler bulunmaktadır. Bunlardan en önemli olanları çakışma ve ince ayar problemleridir.

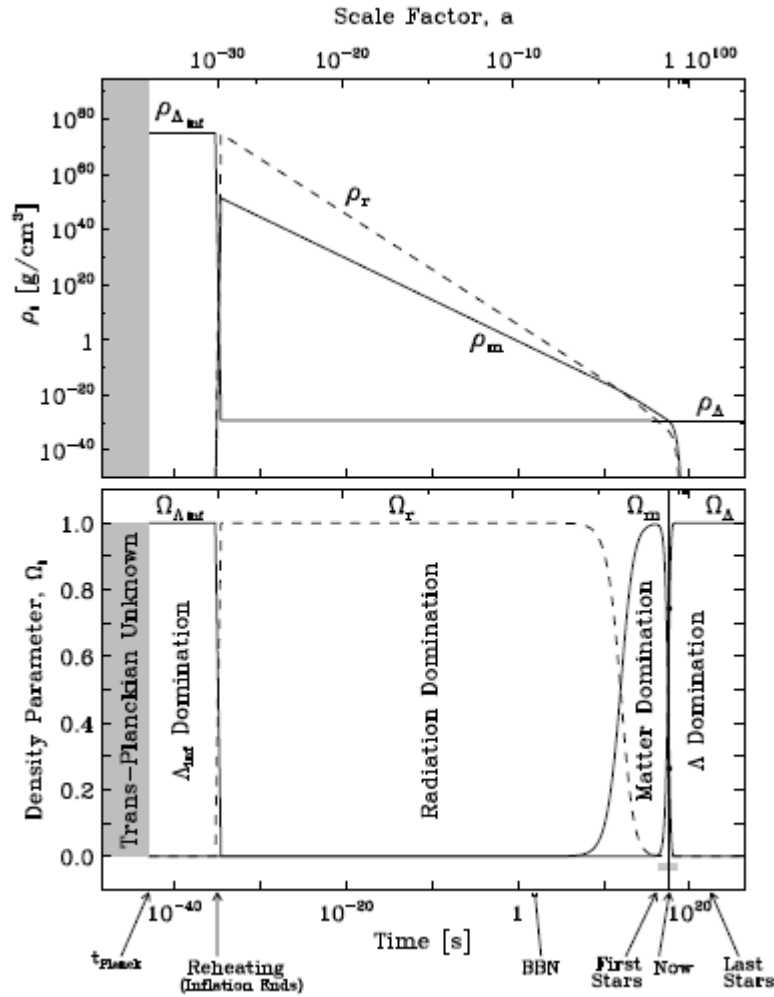
İlk problem, oranları zamanla hızlı bir biçimde değişse bile, maddenin ve kozmolojik sabitin enerji yoğunluğunun günümüz zamanında karşılaştırılabilir olmasından doğmaktadır

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_m} = a^3 \quad (2.5.2.1.1)$$

Geçmiş zamanlarda aslında maddenin enerji yoğunluğu kozmolojik sabite göre oldukça baskındı, örneğin Planck zamanında yani Big Bang' den $t_p = 5.3906 \times 10^{-44}$ sn sonra bu iki oran $\rho_\Lambda/\rho_m \approx 10^{-123}$ tür. Bu iki bileşenin kırmızıya kayma ile nasıl değiştiği bilindiğinden, madde ve kozmolojik sabitin katkısının birbirine eşdeğer olduğunda kırmızıya kayma z_t hesaplanabilir

$$(1 + z_t) = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{1/3} \Rightarrow z_t \approx 0.3 \quad (2.5.2.1.2)$$

Böylece, kozmolojik bakış açısından eşdeğerlik günümüz zamanına gerçekten yakın olmaktadır ama burada maddeden sabit enerji yoğunluğuna sahip olan kozmolojik sabite geçisi öngörebilecek hiçbir fiziksel mekanizma yoktur. Bu yüzden kozmolojik sabitin değerini, geçmişte madde baskın dönemden gelecekteki kozmolojik sabit baskınlığına değiştirmeye ihtiyaç vardır ama neden evrenin böylesi özel bir anında yaşadığımız açıklanamamaktadır.



Şekil 2.4: Çakışma probleminin grafiğinin gösterimi (Lineweaver and Egan, 2007; Martinelli' den, 2011)

Kozmolojik sabite ilişkin bir diğer konu da onun fiziksel yorumundan doğmaktadır; bu bileşen evren genişliyorken enerji yoğunluğunu sabit tutan akışkan gibi davranır, bu yüzden kozmolojik sabitin aynı özelliğe sahip vakum enerjisi ile ilişkili olduğu düşünülebilir. Minkowski uzay-zamanında vakum durumunda enerji-momentum tensörünün ortalama değerinin alınmasıyla vakum enerjisinin kozmolojik sabit gibi davrandığı gösterilebilir ve invariant simetrik tensör elde edilirse bu metrikle orantılı olur. Bu, yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse eğri uzay-zamana da uygulanabilir, dolayısıyla

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{vac} = \rho_{vac} g_{\mu\nu} \quad (2.5.2.1.3)$$

elde edilir. Friedmann denklemlerine giren etkili kozmolojik sabit

$$\Lambda = 8\pi G \rho_{vac} + \Lambda_0 \quad (2.5.2.1.4)$$

şeklinde verilir (Straumann, 2002; Martinelli' den, 2011). Burada Λ_0 sabittir.

Evren düz olarak ($\rho_{tot} = \rho_c$) bilindiği için, $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ kritik enerji yoğunluğunu aşamaz

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 8 \times 10^{-47} h_0^2 GeV^4 \quad (2.5.2.1.5)$$

Kuantum alan teorisi kullanarak vakum enerjisi hesaplanabilir. Kuantum alan teorisine göre serbest bir alanın vakum enerjisi sonsuzdur. Bu durum, klasik Lagrangian' deki alanların belirsizlik mertebeleri ile ilgilidir ve klasik mertebeler dikkate alındığı zaman ortaya çıkmamaktadır. Bu yüzden teorik vakum enerjisi daha küçük bir değere normalize edilmelidir.

Sıfır nokta enerjisi de denilen vakum enerjisi $E = \omega/2 = \sqrt{k^2 + m^2}/2$ ile verilir. Burada ω frekans, k ve m ise kuantum alanının momentumu ve kütlesidir. Bu alanın teorik olarak sonsuz olan sıfır nokta enerjilerini ölçülebilir bir değere normalize edebilmek için $k_{max}(\gg m)$ ölçeği yok olana kadar toplanırsa

$$\rho_{vac} = \int_0^{k_{max}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \quad (2.5.2.1.6)$$

ile verilen vakum enerji yoğunluğu elde edilir. İntegralde büyük $k(\gg m)$ modu baskın olduğundan dolayı

$$\rho_{vac} \approx \int_0^{k_{max}} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} k = \frac{k_{max}^4}{16\pi^2} \quad (2.5.2.1.7)$$

yaklaşık değeri elde edilir. k_{max} ölçeği Planck kütlesi m_{Pl} ' ne eşit olarak alınır, vakum enerji yoğunluğu $\rho_{vac} \approx 10^{76} GeV^4$ olarak bulunur (Karakatsanis, 2010).

Kozmolojik sabitin değeri gözlemsel olarak $\rho_\Lambda \cong 10^{-47} GeV^4$ tür. Parçacık fiziği açısından Λ ile vakum enerjisi birbirine özdeş kavramlardır. Kozmolojik sabitin gözlenen değeri ile vakum enerjisinin teorik değeri arasında

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{vac}} \approx 10^{-123} \quad (2.5.2.1.8)$$

kat fark bulunmaktadır. Dolayısıyla vakum enerji yoğunluğunun şu anki evren ile uyuşması için Planck çağı esnasında 10^{123} ' te 1 seviyesinde ince ayara ihtiyaç vardır. Böyle bir aşırı ince ayar teorik seviyede kesinlikle kabul edilemez. Bu uyumsuzluğa ince ayar problemi denir. Problemi daha keskin yapan şey, Λ ' nın alan denklemlerinde iş görmesine rağmen bu uyumsuzluğun ortaya çıkmasıdır. Parçacık fiziğinin bazı teorik öngörülleri ile bu sorun hafifletilebilmekte yani uyumsuzluk mertebesi düşürülebilmekte ancak ortadan kaldırılamamaktadır (Trodden and Carroll, 2004). Dolayısıyla kozmolojik sabiti, vakum enerjisi olarak açıklamak için, küçük fakat yok olmayan Λ değerini vermesi için Λ_0 değerine ayarlanmış denge terimi $8\pi G\rho_{vac}$ eklenmesi gereklidir.

Bu gibi problemler yüzünden kozmolojik sabite alternatif bazı modeller ortaya konulmuştur. Bu modeller, kozmolojik sabite gerek duymadan evrenin hızlanarak genişlemesini açıklayabilmek amacıyla Einstein alan denklemlerine yapılan düzenlemelerin sonucudur. Bu yeniden düzenlemeler Einstein alan denklemlerinin hem geometri hem de madde kısmında yapılmaktadır. Geometri kısmının düzenlendiği modellerden birisi de $f(R)$ teorileridir. $f(R)$ teorilerde evrenin geç zaman hızlanması kozmolojik sabite gerek kalmadan, sadece standart madde ve geometri terimleri vasıtasıyla açıklanmıştır. Bir sonraki bölümde neden Einstein alan denklemlerine düzenleme yapma ihtiyacının doğduğu incelenip bu düzenlemelerin tarihçesi ele alınacaktır. Ardından $f(R)$ teorilerinin sahip olduğu farklı gösterimlere ayrı ayrı değinilip bu formalizmlerin alan denklemleri elde edilecektir. Ancak asıl analizler literatürde en çok çalışılan gösterim olan metrik formalizmi üzerinden yapılacaktır.

3. $f(R)$ ÇEKİMİNDE ALAN DENKLEMLERİ

Kozmolojik sabitin karşı karşıya olduğu sorunlar nedeniyle, kozmolojik sabit olmaksızın evrenin hızlanarak genişlemesini açıklayacak alternatif modeller bir süredir tartışılmaktadır. Bunun için Einstein alan denklemlerinin madde ve geometri kısımları yeniden düzenlenmektedir. Yeniden düzenlenmiş Einstein denklemleri genişletilmiş çekim teorileri olarak da bilinir ve aslında ilk olarak tamamen farklı bir amaç için formülize edilmişlerdir. Genel Rölativite' ye ilk düzenlemeler Weyl (Weyl, 1919) ve Eddington (Eddington, 1923) tarafından önerilmiştir.

1960' lı yılların başında kuantum çekim problemi ortaya çıktığı zaman, aslında bu Einstein Lagrangian' ine yapılacak olan ilk düzenlemelerin de bir işaretiydi. Ortaya çıkan bu problemin kökeni, doğadaki tüm kuvvetlerin kuantum alan teorisi olarak ifade edilmeye çalışılmasıdır. Fakat kuantum alan teorisi cinsinden ifade edilmeye çalışılması sonucunda Genel Rölativite tam olarak çalışmamaktadır. Bu yüzden Einstein Lagrangian' ine yüksek mertebeden Ricci skalerleri ekleyip düzenleme yapmanın bu sorunu hafifleteceği düşünülmüştür (Utiyama and DeWitt, 1962; Martinelli' den, 2011).

Bu yeniden düzenlemeler kuantum etmenlerinden doğmaktadır ve dolayısıyla çok yüksek enerjilerde veya eğriliklerde, yani Big Bang' den sonraki ilk anlar esnasında düzeltmeler yapmak gereklidir. Çekimin karakteristik ölçeği 10^{-33} cm Planck ölçeği seviyesindedir ki bu seviyede çekim ile ilgili klasik olmayan etkileri denemek mümkün değildir. Böyle bir ölçeğe şu anki deneyler ile ulaşmak olası görünmemekle birlikte, yakın zamanda ulaşılabileceği de kuşkuludur. Ancak Genel Rölativite ve kuantum alan teorisini beraber uyumlu hale getirmeyi tercih etmek için birçok neden vardır. Aslında şu anda deneysel olarak ulaşılamaz görülen Planck ölçeği bu konu ile oldukça yakından ilgilidir. En basit örnek Big Bang senaryosudur ki burada evren kaçınılmaz olarak Planck ölçeğinden bile daha küçük boyutlara gitmiştir.

Genel Rölativite ve kuantum alan teorisi tanımladığı fiziksel bölgelerde oldukça başarılıdır. Genel Rölativite yeteri kadar büyük ölçekler üzerindeki klasik bakış açısından eylemsiz ve gravitasyonel sistemler tanımlamasında başarılı iken, klasik tanımın bozulduğu küçük ölçekli bölgelerde veya yüksek enerjilerde kuantum alan teorisi başarılıdır. Ancak, bu iki teori bir araya geldiği zaman çalışmamaktadır çünkü kuantum alan teorisi uzay-zamanın düz olduğunu

varsaymıştır. Diğer taraftan, Genel Rölativite ise maddenin kuantum doğasını dikkate almamaktadır. Bu yüzden doğal olarak, eğer kuantum ölçeklerinde güçlü bir gravitasyonel alan varsa ne olacağı bilinmemektedir. Bunun yanısıra kuantum alanlarının çekimin varlığında nasıl davranacağı, bu iki teorinin uyumlu olduğu boyutun ne olduğu da bilinmemektedir. Bunun da ötesinde, çekimin yüksek enerjilerde veya küçük ölçeklerde bir kuantum temsilinin, veya çekimin bir etkileşim olarak doğasını sürdüreceğinin bile kesin bir kanıtı yoktur (Capozziello and De Laurentis, 2011).

1960' lı yıllardan beri süregelen bu gibi tartışmalar dikkate alındığında, Einstein teorisinde ortaya çıkan bu gibi eksiklikler Genel Rölativite' nin gravitasyonel etkileşimi açıklayan tek teori olup olmadığının sorgulanmasına yol açmıştır. Bu yüzden birçok yüksek boyutlu çekim teorisi ortaya çıkmış ve bunların hepsi kozmolojinin ve teorik fiziğin farklı alanlarına uygulanmıştır. Örneğin, sonraki bölümlerde görüleceği üzere, standart enflasyon teorisinin yanısıra genişletilmiş ve hipergenışletilmiş enflasyon senaryoları, genişletilmiş çekimde karadelik termodinamikleri, kozmolojik sabite gerek duymadan evrenin geç zaman hızlanması gibi durumlar bu çekim teorilerinin başlıca uygulama alanlarıdır.

Sonuç olarak, Genel Rölativite birçok teorik ve deneysel konuda başarılı olmasına rağmen, bir final teori olamayacak bazı eksikliklere sahiptir. Bu çalışmada, yüksek mertebeli çekim teorilerinden sadece $f(R)$ çekimi göz önünde bulundurulacaktır.

Yeniden düzenlenmiş çekim teorilerinde $f(R)$ çekimi geniş bir şekilde çalışılmaktadır. Burada Lagrangian yoğunluğu, Ricci skaleri R ' nin keyfi bir fonksiyonudur. $f(R)$ çekiminde Einstein alan denklemlerinin geometri kısmında düzenlemeler yapılmaktadır. Evrenin geç zaman hızlanarak genişlemesini kozmolojik sabite gerek kalmadan skaler alanları öne sürerek açıklamaya çalışan bu teoriler, temel olarak üç formalizmde gösterilir. Birincisi ve belki de literatürde en çok çalışılanı metrik formalizmidir. Metrik formalizminde alan denklemleri, metrik tensör $g_{\mu\nu}$ ' ye göre varyasyona tabi tutulur ve $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ Christoffel bağıntısı $g_{\mu\nu}$ ' ye bağlıdır. İkinci formalizm ise Palatini formalizmidir. Burada alan denklemleri varyasyona tabi tutulduğu zaman, metrik tensör $g_{\mu\nu}$ ve Christoffel bağıntısı $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ bağımsız değişkenler olarak işlem yapılır. Genel Rölativite etkisi için bu iki etki

birbiri ile özdeş olmasına rağmen, $f(R)$ çekiminde farklı alan denklemleri ortaya çıkmaktadır. Üçüncü formalizm ise metrik-affine formalizmidir. Bu formalizmde ise etkinin madde kısmı hem $g_{\mu\nu}$ metrik tensöre hem de $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ Christoffel bağıntısına bağlıdır. İlk olarak metrik formalizmindeki $f(R)$ çekimi ile başlayalım.

3.1. $f(R)$ Metrik Formalizmi

$f(R)$ çekimindeki 4 boyutlu etkinin genel formu

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x L_m(g_{\mu\nu}, \Psi_m) \quad (3.1.1)$$

şeklinde (De Felice and Tsujikawa, 2010). Burada g , $g_{\mu\nu}$ ' nün determinanı ve L_m ise $g_{\mu\nu}$ ve madde alanları Ψ_m ' ye bağlı olan maddenin Lagrangian' ıdır. $f(R)$ çekiminde alan denklemlerini elde etmek için, (3.1.1) etkisi $g_{\mu\nu}$ ye göre varyasyona tabi tutulmalıdır

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{1}{2\kappa^2} \delta(\sqrt{-g} f(R)) + \delta(L_m \sqrt{-g}) \right) = 0 \quad (3.1.2)$$

Bu ifadede her iki taraf $\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}$ ile çarpılıp

$$\int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{\delta f(R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{f(R) \delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta(L_m \sqrt{-g})}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} \right) = 0 \quad (3.1.3)$$

şeklinde genişletilebilir. Bu üç terim sırayla varyasyona tabi tutulup toplam olarak ifade edilecektir. Öncelikle, ilk terimdeki $\delta f(R)$ ifadesi elde edilmelidir. (2.2.16) ve (2.2.17) eşitlikleri burada kullanılırsa

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho) \quad (3.1.4)$$

eşitliğine ulaşılır. Kovaryant türevlerin hesabı

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \quad (3.1.5)$$

ifadesini sağlar (Guarnizo et al., 2010). Burada $\square$ D'Lambert operatörüdür ve $\square = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ ile verilir. Şimdi bir $F(R)$ fonksiyonu

$$F(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R} \quad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlanarak $\partial f(R) = F(R)\partial R$ şeklinde yazılabilir. (3.1.5) denklemi göz önüne alınarak bu denklem

$$\delta f(R) = F(R)\delta R = F(R)(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}) \quad (3.1.7)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi bu ifade (3.1.3) denklemindeki ilk terimde yerine konulursa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \delta f(R) \sqrt{-g} &= \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x F(R) (R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}) \sqrt{-g} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

elde edilir. (3.1.3) denkleminin ikinci terimi için (2.2.24) eşitliği kullanılırsa

$$\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x f(R) \delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{4\kappa^2} \int d^4x f(R) g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.1.9)$$

elde edilir.

(3.1.3) denkleminin üçüncü terimi ise (2.2.26) klasik Einstein çekimindeki gibidir.

Şimdi, (3.1.8), (3.1.9) ve (2.2.26) denklemleri (3.1.3) denkleminde kullanılırsa

$$\int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{F(R)}{\delta g^{\mu\nu}} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right) = 0 \quad (3.1.10)$$

denkleme ulaşılır. Buradan da $f(R)$ metrik formalizminde hareket denklemleri elde edilir

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)F(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (3.1.11)$$

$g^{\mu\nu}$ ile çarparak (3.1.11) denkleminin izi alınır

$$F(R)R^\mu_\mu - \frac{1}{2}f(R)\delta^\mu_\mu - (\nabla^\mu \nabla_\mu - \delta^\mu_\mu \square)F(R) = \kappa^2 T^\mu_\mu \quad (3.1.12)$$

$\delta^\mu_\mu = 4$ ve $\nabla^\mu \nabla_\mu = \square$ olduğundan dolayı, alan denkleminin izi

$$F(R)R + 3\square F(R) - 2f(R) = \kappa^2 T \quad (3.1.13)$$

formunu alır (Klanova, 2013). Burada $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ ve

$$\square F = (1/\sqrt{-g})\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu F) \quad (3.1.14)$$

dir. Yeniden düzenlenmiş çekim teorilerinin geçerlilik koşullarından birisi de, zayıf enerji limitlerinde Einstein alan denklemlerine dönüşebilmeleridir. Eğer $f(R) = R$ olursa $F(R) = 1$ olur ve $f(R)$ metrik çekimi Einstein alan denklemlerine dönüşür ve izi de $R = -\kappa^2 T$ olur, dolayısıyla bu durumda Ricci skaleri madde tarafından belirlenir. $f(R)$ metrik formalizminde $\square F(R)$ terimi (3.1.13) denkleminde yok olmaz, bunun anlamı ise ilave bir skaler serbestlik derecesinin ortaya çıkmasıdır. Bu ilave serbestlik derecesini görmek için (3.1.13) denklemini vakumda yazılırsa

$$\square F(R) = \frac{1}{3}(2f - RF(R)) \quad (3.1.15)$$

elde edilir ve

$$-\frac{dV_{eff}}{dR} \equiv \frac{1}{3}(2f - RF(R)) \quad (3.1.16)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\square F(R) = -\frac{dV_{eff}}{dR} \quad (3.1.17)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik, scalaron adı verilen ilave skaler serbestlik derecesi veya bir skaler alan olarak kabul edilir. Sclaron ya $f(R)$ metrik formalizminin alan denkleminin izinde ya da $f(R)$ teori Einstein sisteminde temsil edildiği zaman ortaya çıkar. Einstein sistemi temsilinde, bu ilave serbestlik derecesi gravitasyonel olarak adi madde ile birleşmektedir. Bunun bir sonucu olarak skaler alanın kütlesi ardalan enerji yoğunluğuna bağlı olarak değişmektedir. Madde ile birleşen skaler alanlara ileriki bölümlerde de değinilecektir.

(3.1.13) iz denklemi skaler alan $\phi \equiv F(R)'$ nin (sclaron) dinamiklerini belirlemektedir (Iosifidis, 2013). Genel Rölativite' de sadece kütlesiz graviton vardır, ancak Genel Rölativite etkisine R , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ gibi terimlere bağlı olan ekstra terimler eklendiği zaman scalaron gibi skaler alanlar ortaya çıkmaktadır. Sclaron bu ekstra geometrik terimlerin sonucu olarak alan denklemlerinin madde kısmında ortaya çıkmaktadır.

Hızlanma fazı geçiren evrenin anlaşılması, Ricci skalerinin sabit yani $\square F(R) = 0$ olduğu denklemlerin vakum çözümüne karşılık gelen de Sitter çözümü aracılığı olmaktadır. Bu yüzden bir $f(R)$ modelinin de Sitter benzeri çözümleri verebilmesi için

$$F(R)R - 2f(R) = 0 \quad (3.1.6)$$

denklemini sağlaması gereklidir. Bu denkleme göre, $f_R = 2f/R$ olmalıdır. Bu eşitliği verebilecek olan $f(R)$ modeli, aslında Starobonsky tarafından ilk enflasyon modeli olarak önerilen $f(R) = R + \alpha R^2$ modelidir (Starobinsky, 1980; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010). Bu modelde αR^2 terimi R' den daha büyük olduğu zaman hızlanarak genişleme elde edilmekte, R' ye eşit olduğu zaman enflasyon bitmekte ve R' den daha küçük olduğunda ise yeniden ısınma ortaya çıkmaktadır.

3.1.1. $f(R)$ Metrik Çekiminde FRW Evreni

İlk bölümde, homojen, izotropik ve uzaysal olarak düz olan bir evrene işaret eden kozmolojik prensibin esas alındığından ve bu özelliklere sahip olan evreni de FRW metriğinin temsil ettiğinden bahsedilmişti. Ancak bu metrik Einstein evreninde ele alınmıştı. Şimdi ise bu $f(R)$ metrik çekimi çerçevesinde ele alınıp alan denklemleri elde edilecektir. (2.3.1.17) denkleminde hareketle

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 \quad (3.1.1.1)$$

denklemini yazılabilir. Düz FRW metriği dikkate alınmıştır. Dolayısıyla (2.57)' den $g_{\mu\nu}$ ' nün determinantının

$$g = a^6(t) \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3(t) \quad (3.1.1.2)$$

olduğu görülür. (2.3.3.2)' ten Hubble parametresinin türevi

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \quad (3.1.1.3)$$

olarak bulunur. Bu ise

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H} \quad (3.1.1.4)$$

eşitliğine neden olur. (2.3.3.9) denklemini yeniden yazmak için (2.3.2.1) ve (3.1.13) eşitliklerinden yararlanılırsa

$$R = 12H^2 + 6\dot{H} \quad (3.1.1.5)$$

eşitliği elde edilir. F ve $g_{\mu\nu}'$ nün tüm bileşenleri sadece zamana bağlı olduğundan dolayı, t' ye göre türevleri alınıp yerine konur ve $\sqrt{-g}'$ nin değeri de eklenirse

$$\square F = \frac{1}{a^3} \partial_t (-a^3 \partial_t F) \quad (3.1.1.6)$$

elde edilir. Bunun sonucu ise

$$\square F = -\ddot{F} - 3H\dot{F} \quad (3.1.1.7)$$

şeklindedir.

Göz önünde bulundurulan metrik diagonal olduğundan dolayı köşegen elemanlar hariç diğer bileşenler sıfırdır. Dolayısıyla sadece zaman bileşeni ile konum bileşenleri dikkate alınacaktır. İlk olarak, (3.1.11) denklemi zaman bileşeni cinsinden

$$FR_{00} - \frac{1}{2} f g_{00} + (g_{00} \square - \nabla_0 \nabla_0) F - \kappa^2 g_{00} T_{00} = 0 \quad (3.1.1.8)$$

şeklinde yazılır. (3.1.14), (2.3.3.6) ve (2.3.3.11) denklemleri burada yerine konulursa

$$3FH^2 = (FR - f)/2 - 3H\dot{F} + \kappa^2 \rho_m \quad (3.1.1.9)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem $f(R)$ çekimi için birinci Friedmann denklemidir (Klanova, 2013).

İkinci olarak, (3.1.11) denklemi konum bileşenleri cinsinden

$$FR_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} f g_{\alpha\beta} + (g_{\alpha\beta} \square - \nabla_\alpha \nabla_\beta) F - \kappa^2 g_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.1.1.10)$$

şeklinde yazılır. F bileşeni sadece zamana bağlı olduğundan dolayı $\nabla_x \nabla_x F$ terimi yok olur. Kalan terim için ise (3.1.1.7), (2.3.3.7) ve (2.3.3.11) denklemleri yerine konulursa

$$-2F\dot{H} = \ddot{F} - H\dot{F} + \kappa^2(\rho_m + P_m) \quad (3.1.1.11)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu da $f(R)$ çekimi için ikinci Friedmann denklemdir (Klanova, 2013). Burada

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + P_m) = 0 \quad (3.1.1.12)$$

şeklinde yazılan süreklilik denklemi, birinci ve ikinci Friedmann denklemlerinin mükemmel akışkan varsayımı için mutlaka göz önünde bulundurulmalıdır (De Felice and Tsujikawa, 2010).

3.1.2. $f(R)$ Metrik Çekimindeki ve Genel Rölativitedeki Friedmann Denklemleri Arasındaki Farklılıklar

Klasik Friedmann denklemleri ile $f(R)$ metrik çekimindeki Friedmann denklemlerini fiziksel olarak birebir kıyaslamak pek kullanışlı değildir. Çünkü $f(R)$ fonksiyonuna göre bu denklemlerin matematiksel ve fiziksel sonuçları farklı olacaktır. Bu da genel bir kıyas yapmanın mümkün olmadığı ve ancak model üzerinden karşılaştırma yapmanın anlamlı olacağını belirtir. Bununla beraber, literatürde en çok çalışılan iki $f(R)$ modeli üzerinden kıyaslama yapılacaktır. Bu modellerden ilki $f(R) \propto R^n$ modeli (Capozziello et al., 2003a), ikincisi ise $f(R) = R - \mu^{2(n+1)}/R^n$ (Carroll et al., 2003) modelidir. Buradaki temel düşünce, yeniden düzenlenmiş Friedmann denklemlerine dayanan bu modellerin, uygun ρ ve P parametreleri sayesinde hızlanarak genişleme koşulunu veren durum denklemini verebilmesidir. Dolayısıyla bu modeller geç zaman hızlanmayı da açıklamaya çalışmaktadır ve literatürde $f(R)$ teoriler üzerine temellendirilen karanlık enerji modelleri olarak da geçmektedirler.

(3.1.1.9) ve (3.1.1.11) denklemleri

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{3f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} [f(R) - Rf'(R)] - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \dot{R}f''(R) \right\} = \frac{1}{3} \kappa^2 \rho \quad (3.1.2.1)$$

ve

$$2 \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{f'(R)} \left\{ 2 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2} [f(R) - Rf'(R)] \right\} = -\kappa^2 P \quad (3.1.2.2)$$

olarak tekrar yazılabilir. Eğer bu iki denklem birleştirilirse

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \frac{1}{2f'(R)} \left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{3} [f(R) - Rf'(R)] \right\} = \\ & = -\frac{\kappa^2}{6} [\rho + 3P] \end{aligned} \quad (3.1.2.3)$$

eşitliği elde edilir. $f(R) = R$ göz önüne alınırsa, $f'(R) = 1$ ve $f'' = f''' = 0$ elde edilir ve (3.1.2.1) ve (3.1.2.3) denklemleri içerisinde kozmolojik sabit barındırmayan standart Friedmann denklemlerine indirgenir.

Bu aslında, $f(R)$ çekim teorilerini geç zaman kozmik hızlanmayı açıklama yolu olarak ilk dikkate alma teşebbüsüdür. Asıl amaç karanlık enerjiyi açıklayan yeniden düzenlenmiş çekime sahip olmak ve böylece evrenin geç zaman hızlanmasını açıklamaktır. Bunun en basit yolu da

$$\rho_{DE} = \frac{\kappa^{-2}}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} [f(R) - Rf'(R)] - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \dot{R}f''(R) \right\} \quad (3.1.2.4)$$

$$\begin{aligned} P_{DE} = \frac{\kappa^{-2}}{f'(R)} & \left\{ 2 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2} [f(R) - Rf'(R)] \right\} \\ & \quad (3.1.2.5) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan karanlık enerjinin enerji yoğunluğu ve basınç niceliklerini yeniden yazarak

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\kappa^2\rho_{DE} \quad (3.1.2.6)$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{\kappa^2}{6}[\rho_{DE} + 3P_{DE}] \quad (3.1.2.7)$$

eşitliklerine ulaşmaktır. Burada

$$\rho_{tot} = \rho + \rho_{DE} \quad (3.1.2.8)$$

$$P_{tot} = P + P_{DE} \quad (3.1.2.9)$$

eşitlikleri vardır. Bazı basit yeniden tanımlamalar aracılığı ile, standart Friedmann denklemleri formundaki kozmolojik dinamikleri yöneten denklemler elde edilir. Ayrıca, etkide tanıtılan yüksek mertebeden terimler şimdi uygun bir şekilde ρ_{DE} ve P_{DE} olarak ifade edilmiştir, çünkü bu terimler burada karanlık enerjinin rolünü oynamaktadır. Bu yüzden teori, karanlık enerjinin dahil olduğu Genel Rölativite formuna getirilir (Capozziello et al., 2003a; Sotiriou' den, 2007).

Burada asıl önemli olan, $\omega_{eff} < -1/3$ etkili durum denklemini verecek olan modeldir. R' nin bir fonksiyonu olarak incelenmiş olan bu nicelikler açıkça bu durumla ilişkilidir ve etkili durum denklemi $f(R)$ fonksiyonel formuna bağlı olacaktır. Bu yüzden hızlanmayı verebilecek olan ve literatürde en çok çalışılan iki modelin incelenmesi yararlı olacaktır.

1. Model: Hızlanarak genişlemeyi veren bu model $f(R) \propto R^n$ formuna sahiptir (Capozziello, 2002). Eğer $f(R) = f_0 R^n$ ve ölçek faktörü de genel kuvvet kanunu $a(t) = a_0(t/t_0)^\alpha$ olarak varsayılp bu eşitlikler (3.1.2.4) ve (3.1.2.5) deklemlerinde yerine konulursa, n ' in bir fonksiyonu olarak ω

$$\omega = -\frac{6n^2 - 7n - 1}{6n^2 - 9n + 3} \quad (3.1.2.10)$$

şeklindedir ($n \neq -1$). α ise n cinsinden

$$\alpha = \frac{-2n^2 + 3n - 1}{n - 2} \quad (3.1.2.11)$$

şeklindedir. (3.1.2.11) denklemine göre, $-100 > n$ durumu için α' nın kesinlikle arttığı bulunuyorken, $100 < n$ durumu için ise, α' nın kesinlikle azaldığı görülür. Yani bu iki aralık dışındaki n için α' nın artış veya azalış sürekli olmamaktadır. Süreklilik sadece bu iki aralıkta olmaktadır. Uygun n seçimi istenilen ω_{DE} değerini verir. Örneğin, $n = 2$ değeri $\omega_{eff} = -1$ i ve $\alpha = \infty$ u sağlar. Einstein Hilbert etkisine bu kuadratik düzeltme Starobinsky enflasyonunda kullanılmıştır. Ancak bu noktada, süpernova gözlemlerini ve evrenin yaşını kullanarak n i sınırlamak mümkündür.

(2.4.1.5) ve (2.4.5.6) denklemlerine benzer şekilde, eğer, uzaklık modülünün tahmin edilen teorik öngürüsü ile gözlemleri arasındaki kıyaslama yapılırsa ışıınım uzaklığı

$$d_L = \frac{c}{H_0} (1 + z) \int_0^z \frac{1}{E(\zeta)} d\zeta \quad (3.1.2.12)$$

genel ifadesi ile gösterilir. Burada $E(\zeta) = H_0/H'$ tır. Eğer $f(R) = f_0 R^n$ modelinden başlanılırsa, bu durumda kırmızıya kayma cinsinden Hubble parametresi

$$H(z) = H_0(1 + z)^{1/\alpha} \quad (3.1.2.13)$$

ilişkisi ile verilir. Bu durumda ışıınım uzaklığı

$$d_L(z, H_0, n) = \frac{c}{H_0} (1 + z) \int_0^z (1 + \zeta)^{-1/\alpha} d\zeta \quad (3.1.2.14)$$

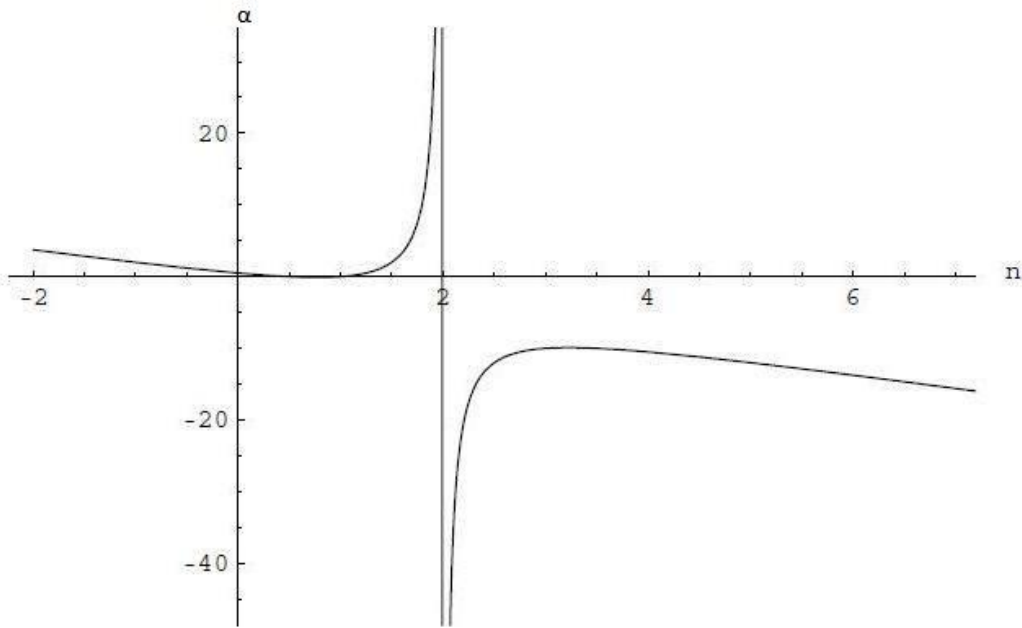
şeklinde olur ve integrasyondan sonra

$$d_L(z, H_0, n) = \frac{c}{H_0} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right) (1 + z) \left[(1 + z)^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} - 1 \right] \quad (3.1.2.15)$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifade $\alpha = 0,1$ için tanımsızdır, bu yüzden ışınım uzaklığı bu gibi singüleritelerin varlığında kontrol edilmelidir. Sonuç olarak, n' in beş bölgesinde uygulanabilir. Bu bölgeler

- $n < \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$
- $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) < n < \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2} < n < 1$
- $1 < n < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$
- $n > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$

şeklinde dir.



Şekil 3.1: Grafik α' nın n' e karşı davranışını göstermektedir. Eksponensiyel α büyümesinden dolayı ölçek faktörü de aynı davranışı sergilemektedir. Ölçek faktörünün eksponensiyel genişlemesi ise negatif ω' ya karşılık gelmektedir (Capozziello et al., 2003a).

Şekil 3.1 ' e bakılırsa, n ' in bir fonksiyonu olarak Hubble parametresinin, α ile aynı eğilimi gösterdiği görülür. $n \rightarrow 2$ için (3.1.2.11) denkleminin sonsuza gittiği kolaylıkla görülebilmektedir. n ' in yukarıdaki beş değer aralığı, evrenin yaşı kullanılarak test edilebilir ve diğer değer aralıkları evrenin yaşı ile uyumsuzdur. Bu sonuç Çizelge 3.1' de görülmektedir. H_0 ve χ^2 ' nin en uygun değerleri ile ilgili olarak Çizelge 3.1' den, fiziksel olarak sadece $\frac{1}{2} < n < 1$ aralığı dışlanabilir. Burada χ^2 uzaklık modülünün teorik ve gözlemsel değeri arasındaki farktır. Diğer durumlarda, sonuçlar Hubble parametresi ve χ^2 ' nin her ikisi için de en uygun değerleri verir.

Çizelge 3.1: Sonuçlar SN Ia verilerine sahip olan $f(R) \propto R^n$ modeline eklenerek elde edilmiştir. İlk sütun çalışılan n ' in aralığını verir, ikinci sütun görel olarak en iyi H_0 ' ı verir, üçüncü sütun en iyi n değeri olan n^{best} , i, son sütun ise uzaklık modülünün teorik ve gözlemsel değeri arasındaki fark olan χ^2 indeksini verir (Capozziello et al., 2003a).

Range	$H_0^{best} (km \ sec^{-1} Mpc^{-1})$	n^{best}	χ^2
$-100 < n < 1/2(1 - \sqrt{3})$	65	-0.73	1.003
$1/2(1 - \sqrt{3}) < n < 1/2$	63	-0.36	1.160
$1/2 < n < 1$	100	0.78	348.97
$1 < n < 1/2(1 + \sqrt{3})$	62	1.36	1.182
$1/2(1 + \sqrt{3}) < n < 3$	65	1.45	1.003
$3 < n < 100$	70	100	1.418

Şimdi bu modele göre evrenin yaşının ne olacağına bakılabilir. Evrenin yaşı teorik olarak Hubble parametresi elde edilirse kolayca bulunabilir. Şimdi, H' ın tanımından $f(R) \propto R^n$ kullanılırsa

$$t = \alpha H^{-1} \quad (3.1.2.17)$$

elde edilir. α ve n birbirine bağlı olduğu için

$$t = \frac{-2n^2 + 3n - 1}{n - 2} H^{-1} \quad (3.1.2.18)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu yüzden, evrenin yaşının basit olarak $t = \alpha(n)H_0^{-1}$ olduğu görülür.

İlk olarak negatif t değerini veren n aralığı dışlanmalıdır. (3.1.2.17) denkleminde evrenin yaşı için negatif değerlerin, negatif α için elde edileceği açıktır, bu yüzden $1/2 < n < 1$ ve $n > 2$ değerleri hariç tutulur. Sonuçlar Çizelge 3. 2' de görülmektedir.

Çizelge 3. 2: Yaş testinin sonuçları. İlk sütun test aralığını temsil etmektedir. İkinci sütun süpernova testlerinden elde edilen $1\sigma H_0$ aralığını göstermekten, üçüncü sütun 10 – 18 milyar yıl arasında oluşan evrenin yaşını elde etmeye izin veren n değerini verir. Son sütun ise her bir aralığın en uygun değeri için elde edilen yaş değerlerini gösterir (Capozziello et al., 2003a).

Range	$\Delta H (km\ sec^{-1} Mpc^{-1})$	Δn	$t(n^{best})(Gyr)$
$-100 < n < 1/2(1 - \sqrt{3})$	50 – 80	$-0.67 \leq n < -0.37$	23.4
$1/2(1 - \sqrt{3}) < n < 1/2$	57 – 69	$-0.37 < n \leq -0.07$	15.6
$1 < n < 1/2(1 + \sqrt{3})$	56 – 70	$1.28 \leq n < 1.36$	15.3
$1/2(1 + \sqrt{3}) < n < 2$	54 – 78	$1.37 < n \leq 1.43$	24.6

Modelin son testi ise, veriler için önemli olan n aralığının aynı zamanda hızlanarak genişleme oranını da sağladığından emin olmaktır. Hızlanma davranışına sahip olmak için $a = a_0 t^\alpha$ ölçek faktörü fonksiyonunda, α' nın 1' den daha büyük olduğu değerlere gidilmelidir. $\alpha > 1$ için, $-0.67 < n < -0.37$ ve $1.37 < n < 1.43$ aralıkları hızlanarak genişlemeyi sağlar. Diğer taraftan, Çizelge 3.2' nin 15.6 ve 15.3 milyar yıl değerine sahip olan n aralıkları, bu bağlamda ($q_0 > 0$ ve $0 < \alpha < 1$) kozmolojik dinamiklerini vermez.

Sonuç olarak, $f(R) \propto R^n$ ($n \neq 1$) türüne sahip olan rölativistik Lagrangian üzerine temellendirilen kozmolojik modellerin uygun sınırlamalar sayesinde, SN Ia ve evrenin yaş testi gibi gözlemler ile fiziksel olarak uyumlu olduğu belirtilebilir (Capozziello et al., 2003a).

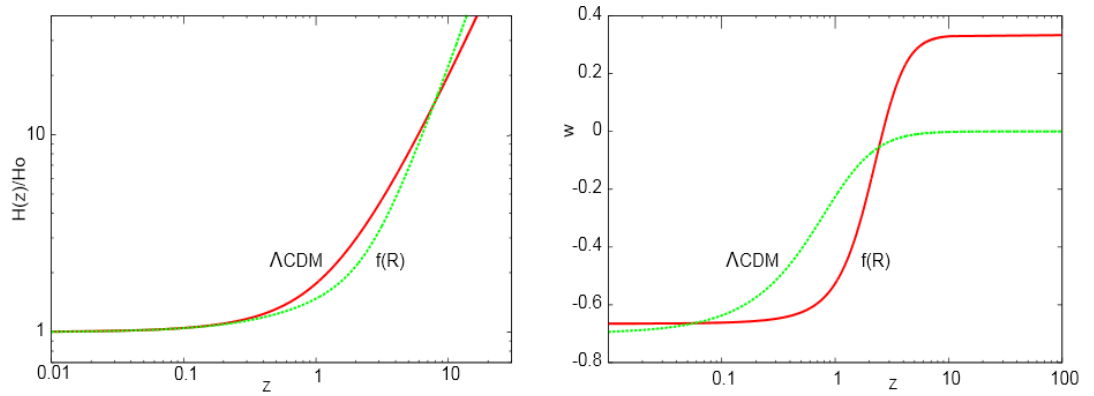
2. Model: Bu model $f(R) = R - \mu^{2(n+1)}/R^n$ modelidir, burada μ uygun bir şekilde seçilen parametredir. Bu durumda ω_{DE} yine n' in fonksiyonu olarak

$$\omega_{DE} = -1 + \frac{2(n+2)}{3(2n+1)(n+1)} \quad (3.1.2.19)$$

şeklinde yazılır. Burada da ilk modelde olduğu gibi ölçek faktörü için $a(t) = a_0(t/t_0)^\alpha$ genel kuvvet varsayımı yapılmıştır. Bu modelin en tipik örneği $n = 1'$

dir. Bu durumda $\omega_{DE} = -2/3$ olur. Bu model sınıfında pozitif n' in R^n modelinin aksine, etki denkleminde R ile ters orantılı terimin varlığına işaret ettiğine dikkat edilmelidir. Bu modelin altında yatan temel düşünce, genişleyen evrende R' nin zamanla artacağı ve geç zaman hızlanmasında baskın terim olarak öne çıkıp, bu hızlanmayı açıklayacağını düşünülmesidir.

Şimdi bu modele ait olan bazı gözlemsel veriler ve sınırlamalar dikkate alınıp Λ CDM modeli ile olan bazı farklılıklarına değinilebilir.



Şekil 3.2: $f(R) = R - \mu^4/R$ ve Λ CDM' in en uygun versiyonunun karşılaştırılması. Her iki durumda da $\Omega_m = 0.3$ ' tür. Soldaki $H(z)/H_0$ ve sağdaki ω durum denklemi (3.1.2.20) denkleminde tanımlanmıştır (Fairbairn and Rydbeck, 2007).

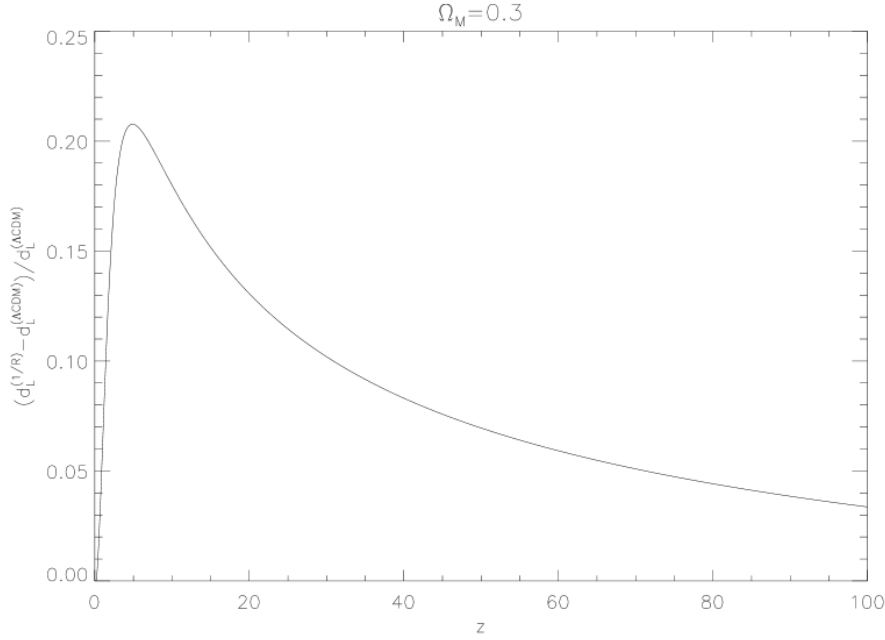
Sağ taraftaki grafikte durum denklemi çizilmiştir ve buna göre, farklı durum denklemlerine göre teorilerin kırmızıya kayma ile değişimi görülmektedir. Diğer deyişle, bu durumda durum denklemi

$$\omega = \frac{2}{3} \frac{(1+z)}{H} \frac{dH}{dz} - 1 \quad (3.1.2.20)$$

formundadır ve yüksek kırmızıya kaymalarda teorik ışınlam ile aynı olan $\omega \rightarrow 1/3$ ifadesi görülebilir.

Şekil 3.2' nin sol tarafından, $H(z)/H_0$ ' ın düşük kırmızıya kaymalarda her iki model için de benzer olduğu görülebilir. Fakat $z \approx 0.5$ ' den $z \approx 10$ ' a kadar kırmızıya kaymalarda $f(R)$ modelinin daha düşük $H(z)/H_0$ ' a karşılık geldiği görülebilir. $z \approx 10$ ' dan sonra ise durum tersine dönmektedir. Bu, $z = 0$ ve $z = 1000$ arasında ışınlam/açısal uzaklık integrallerinin benzer olduğu anlamına gelir. Yani $z = 1000$ civarındaki bölgeye kadar bu iki modelin ışınlam uzaklığı ve

açısal uzaklığı arasındaki oran oldukça küçüktür. Bu nokta, $f(R)$ ve Λ CDM modeli için ışınım uzaklıkları arasındaki kesirsel farklılığı gösteren Şekil 3.3' e bakarak daha net görülebilir. İkisi arasındaki fark özellikle yüksek kırmızıya kaymalarda oldukça düşüktür, fakat $z = 5$ civarında zirveye ulaşır.



Şekil 3.3: $\Omega_m = 0.3$ olduğu zaman düz Λ CDM ve en uygun $1/R$ modeli için kırmızıya kaymanın fonksiyonu olarak ışınım uzaklığı arasındaki fark (Fairbairn and Rydbeck, 2007).

Eğer $z \approx 1 - 5$ civarındaki kırmızıya kaymalarda Hubble diyagramı daha iyi bilinirse, modeller arasındaki olası farklılıklar daha iyi bir şekilde ortaya çıkartılır. CMB' den $z \approx 1100$ ' de ve süpernova verilerinden de $z < 1.5$ ' de veri elde edildiğinden dolayı, bu iki model arasında ayırım yapmak şu an zordur (Fairbairn and Rydbeck, 2007).

Kısacası, $1/R$ modelinin tanımladığı evren, yüksek kırmızıya kaymada $a \propto t^{1/2}$ yi işaret eder. Bununla birlikte, bu modelin tanımladığı evren, küresel kümelerin yaş tayini ile de uyumludur. Aynı zamanda, düşük kırmızıya kaymalarda, Λ CDM' e oldukça benzeyen genişleme tarihlerini elde etmek mümkündür (Fairbairn and Rydbeck, 2007).

3.2. Palatini $f(R)$ Formalizmi

Palatini formalizminde $g_{\mu\nu}$ metriği ve $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ Christoffel bağıntısı bağımsız değişkenler olarak ele alınır. Bu formalizme göre, herhangi bir uzay-zaman

bölgesi yalnızca metrik ile değil, aynı zamanda afin ile de doludur. Burada afin, Riemann eğrilikli uzayının metrik özelliklerinin veya uzayda iki nokta arasında bir vektörün taşınması ile ortaya çıkacak olan özelliklerin bütünüdür. Dolayısıyla bu formalizmde afin bağlantı katsayıları, metrik uzayda olduğu gibi Christoffel sembolleri değildir, yani metrikten bağımsızdır. Etki, yapısal olarak metrik formalizmi ile aynı olmasına rağmen Riemann ve Ricci tensörleri bağımsız Christoffel bağıntısı ile kurulmuşlardır. Dolayısıyla, bu özellikler altında (3.1.1) etkisi $g_{\mu\nu}$ metriğine göre varyasyona tabi tutulursa, metrik formalizmi ile benzer sonuçlara ulaşılır

$$F(R)R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (3.2.1)$$

Burada $R_{\mu\nu}(\Gamma)$, $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ Christoffel bağıntısının fonksiyonu ile ilgili olan Ricci tensörüdür ve genellikle $R_{\mu\nu}(g)$ metrik bağıntısı cinsinden hesaplanan Ricci tensöründen farklıdır. (3.2.1) denkleminin izi

$$F(R)R - 2f(R) = \kappa^2 T \quad (3.2.2)$$

formundadır. Burada $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ 'dür ve Ricci skaleri $R(T)$ doğrudan T ile ilgilidir ve metrik formalizmindeki Ricci skaleri $R(g) = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(g)$ ' den farklıdır.

(3.1.1) etkisinin $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ bağıntısına göre varyasyonu alınır, bir diğer alan denklemini olan

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(g) = \\ = \frac{\kappa^2 T_{\mu\nu}}{F} - \frac{FR(T) - f}{2F}g_{\mu\nu} + \frac{1}{F}(\nabla_\mu \nabla_\nu F - g_{\mu\nu} \square F) \\ - \frac{3}{2F^2} \left[\partial_\mu F \partial_\nu F - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla F)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

denklemini elde edilir. Einstein çekiminde ($f(R) = R - 2\Lambda$ ve $F(R) = 1$) (3.2.2) ve (3.2.3) alan denklemleri sırasıyla (3.1.11) ve (3.1.13) denklemleri ile özdeşdir. Ancak, fark R' de lineer olmayan terimleri içeren $f(R)$ modelleri için ortaya çıkar. Ayrıca burada (3.1.13) iz denkleminde olduğu gibi, Palatini formalizminin iz denkleminde $\square F$ terimi bulunmamaktadır. $\square F$ terimi skalaronun dinamiklerini belirleyen bir terimdi. Dolayısıyla bu formalizmde skalaron ortaya çıkmamaktadır. (De Felice and Tsujikawa, 2010).

Bununla birlikte, Palatini $f(R)$ çekiminin ardaalan kozmolojik dinamikleri Sotiriou (2006a; 2006b), Amarzguioui et al. (2006), Fay et al. (2007a) ve Poplawski (2007) tarafından yapılan çalışmalarda $f(R) = R - \alpha/R^n$ ($n > 0$) modeli için ışınlım, madde ve hızlanma çağları farkedilebilmiştir. Ayrıca Palatini $f(R)$ çekimi ile ilgili bir çok çalışma (Koivisto, 2006; Li and Chu, 2006; Li et al. 2007; Tsujikawa et al., 2008; Flanagan, 2004a; 2004b; 2004c; Iglesias et al. 2007; Olmo, 2007a; Olmo, 2008; Olmo, 2009; ve Barausse, 2008) yapılmıştır.

3.3. Metrik-Affine Formalizmi

Etkinin varyasyonunu almak için bir diğer yol metrik-affine formalizmidir. Bu formalizmde S_m madde etkisi hem $g_{\mu\nu}$ metrik tensörüne hem de $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ Christoffel bağıntısına bağlıdır. Bu formalizmin etkisi

$$S_{affine} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m(g_{\mu\nu}, \Gamma_{\nu\gamma}^\mu, \psi^{(m)}) \quad (3.3.1)$$

şeklindeir. Palatini formalizminde madde etkisinin $\Gamma_{\nu\gamma}^\mu$ bağıntısından bağımsız olduğu varsayılmıştı, oysaki görüldüğü gibi metrik-affine formalizmde böyle bir varsayım yoktur. Bu, metrik-affine formalizminin Palatini $f(R)$ çekiminden temel farklılığıdır. Dikkate alınan madde alanları mükemmel akışkanlar, elektromanyetik alanlar veya skaler alanlar olduğunda, metrik-affine $f(R)$ çekimi Palatini $f(R)$ çekimine indirgenebilir, dolayısıyla metrik-affine formalizminin kozmolojik sonuçlarını ayrıntılı olarak çalışmaya gerek yoktur çünkü bu alanların madde etkileri daha başka bir varsayıma gerek duymadan Christoffel bağıntısından bağımsızdır. Bu da, metrik-affine çekiminin öngördüğü kozmolojinin Palatini $f(R)$ çekiminden farklı olamayacağı anlamına gelir

(Sotiriou and Liberati, 2007). Ayrıca metrik-affine $f(R)$ çekimi henüz tamamlanmamış bir konudur. Dolayısıyla bu formalizmin kozmolojik sonuçları tam olarak bilinmemektedir (Capozziello et al., 2009). Bu açıdan bakıldığında zaman aslında metrik-affine formalizminin $f(R)$ çekimin en genel durumu olduğu söylenebilir.

4. GENEL RÖLATİVİTE İLE $f(R)$ METRİK TEORİ ARASINDAKİ BAZI FARKLILIKLAR

Einstein alan denklemlerinin hızlanarak genişlemeyi verebilmesi için madde kısmının karanlık bileşenlerini kabul etmesi zorunludur. Aslında buradaki temel kavram, gerekli geometriyi oluşturacak şekilde alan denklemlerinin madde kısmında değişiklikler yapmaktır. Tüm $f(R)$ çekimlerinde ise, kozmolojik sabit kavramı yerine skaler alanlar rol oynamaktadır. Çünkü Lagrangian içerisinde tanıtılan yeni bileşenler yüksek mertebeden olduğu için, bu yüksek mertebeden denklemler sonucu ortaya yeni serbestlik dereceleri çıkmaktadır. Bu serbestlik derecelerinin başında ise skaler alanlar gelir. Skaler alanlar bir çok yüksek mertebeden çekim teorisinde benzer rolü oynamaktadır. Bunu görmek için (3.1.11) eşitliği

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa^2}{F(R)}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2F(R)}g_{\mu\nu}[RF(R) - f(R)] + \frac{1}{F(R)}[\nabla_\mu\nabla_\nu F(R) - g_{\mu\nu}F(R)] \quad (4.1)$$

olarak yazılır. Denklemin sağ tarafının metrik için kaynak terimler olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu denklem, metriğin madde tarafından ve eğrilik skaleri ile ilgili terimler tarafından meydana getirildiğini söyler. Bunu görmenin bir diğer yolu da (3.1.13) iz denklemdir. (3.1.13)' e göre, eğrilik skalerinin maddenin ve kaynak olarak davranan diğer eğrilik terimlerinin enerji momentum tensörünün T izine sahip olan ikinci mertebeden diferansiyel denklemi sağladığı görülmektedir. Böylece (3.1.13) denkleminde sunulan yüksek mertebeden terimlerin rolü ortaya çıkmaktadır. Eğrilik skaleri, artık uzay zaman metriğini ve bu metriğin (3.1.13) izi tarafından belirlenen tüm dinamiklerini oluşturmaya yardım eden dinamik bir varlıktır.

Bu noktada $f(R)$ metrik çekimi ile Genel Rölativite' nin yapısal farklılığı ortaya çıkmaktadır. Genel Rölativite' de tek dinamik alan metrik ve metriğin tamamen $G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$ denklemi sayesinde madde dağılımı tarafından karakterize edilen formudur. Eğrilik skaleri yalnızca yerel madde dağılımı tarafından değil, aynı zamanda $R = -\kappa^2 T$ cebirsel denklemi sayesinde de belirlenmektedir. $f(R)$

durumunda ise, $g_{\mu\nu}$ ve R niceliklerinin her ikisi de dinamik alanlardır, yani bu nicelikler diferansiyel denklemler tarafından yönetilirler. Üstelik metrik ve metriğin türevlerinin kullanıldığı $R_{\mu\nu}$ cinsinden ifade edilen R eğrilik skaleri, artık metriğin kendisinin belirlenmesinde önemli rol oynamaktadır (Olmo, 2007a).

Bahsedilen bu farklılıklar yapısalıdır ve $f(R)$ metrik formalizmine teoriye ait olan tüm modeller için geçerlidir. Bununla beraber, daha özel farklılıklardan bahsetmek için $f(R)$ metrik formalizmindeki modellere başvurulmalı veya $f(R)$ metrik formalizmine belirli dönüşümler ile eşdeğer hale gelen yüksek mertebeden çekim teorileri incelenmelidir. Bu yüksek mertebeden çekim teorileri ile Genel Rölativite arasındaki önemli farklılıklardan birisi de konformal dönüşümdür.

Genel Rölativite' nin yeniden düzenlenmesinde Lagrangian' e eklenen yeni terimlerden dolayı denklemlerin matematiksel boyutu artmakta ve yeni serbestlik dereceleri meydana gelmektedir. Bu da denklemlerdeki nonlineerliliğin artmasına neden olmaktadır. Eğer bu yeniden düzenlemeler sonucu ortaya çıkan yeni denklemlerdeki bazı dinamik değişkenler konformal dönüşüme tabi tutulursa, yeni bir konformal sisteme geçilmiş olunur. Bu yeni sisteme Einstein konformal sistemi adı veriliyorken, orjinal sisteme ise Jordan konformal sistemi denir. Yeni konformal sistem yeni bir gravitasyon ve yeni bir fizik demektir (Faraoni et al., 1999). En basit hali $L = f(R)$ olmak üzere, yüksek mertebeden çekim teorilerinde bu yeni dinamik değişkenler Jordan konformal sistemi adı verilen yeni bir sistemde temsil edilmektedir. Bu farklı temsiliin sebebi, Genel Rölativite' yi karakterize eden bazı enerji koşullarının ve prensiplerin yeni teorilerde ihlal edilmesidir. Dolayısıyla, Einstein alan denklemlerine yapılan ilk düzenlemeler Jordan sisteminde temsil edilmeye başlanmış ve zamanla yüksek mertebeli çekim teorileri için Jordan sistemi adeta klasik gösterim haline gelmiştir. Elbette bu gösterim keyfidir. Bütün $f(R)$ çekim teorileri, gerekli konformal dönüşümler ile Einstein sisteminde de gösterilmektedir. Bu iki konformal sistem arasındaki farklılığın nedenleri ve fiziksel sonuçlarına değinilecektir. Fakat bundan önce, konformal dönüşüm kavramı incelenmelidir.

4.1. Konformal Dönüşüm Nedir?

Bir konformal dönüşüm $g_{\mu\nu}$ metriğini bir diğer metrik olan $\tilde{g}_{\mu\nu}$ metriğine

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu} \quad (4.1.1)$$

kuralı ile dönüştürür. Burada $\Omega^2(x^i)$ uzay zaman koordinatı x' in keyfi bir fonksiyonudur. Bu, bir çizgi elemanına uygulanan konformal dönüşüme eşdeğerdir

$$\widetilde{ds}^2 = \Omega^2(x)ds^2 \quad (4.1.2)$$

En temel anlamda bir çizgi elemanı mesafeyi tanımlayan bir nicelik olduğu için, (4.1.2) eşitliği uzay zaman manifoldu üzerinde noktadan noktaya farklılık gösteren bir oran ile, uzaklığın değişebileceğini ima etmektedir. Aynı zamanda bu değişiklik oranı, belirtilmiş herhangi bir yönde de olmamaktadır. Dolayısıyla bu değişim oranı izotropik olabilir. Örneğin, x ve y yönünde aynı oranda genişleme veya büzülme temsil edilebilir.

Bunun yanı sıra, konformal dönüşüm $g_{\mu\nu}$ metriği cinsinden de ifade edilebilir.

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x)\tilde{g}_{\mu\nu} \quad (4.1.3)$$

Burada tilda simgesi yeni sistemi tanımladığı için, bu dönüşüm sayesinde yeni bir konformal sisteme geçiş yapılmış olunur. (4.1.3)' den

$$g^{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x)\tilde{g}^{\mu\nu} \quad (4.1.4)$$

elde edilir. (2.2.2) Christoffel sembolü için

$$\Gamma_{\nu\gamma}^{\mu} = \widetilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^{\mu} - (f_{\nu}\delta_{\lambda}^{\mu} + f_{\lambda}\delta_{\nu}^{\mu} - \tilde{f}^{\mu}\tilde{g}_{\nu\lambda}) \quad (4.1.5)$$

elde edilir. Burada $\tilde{f}^{\mu} = \tilde{g}^{\mu\nu}f_{\nu}$, f_{ν} ise

$$f \equiv \ln \Omega \quad (4.1.6)$$

olmak üzere

$$f_\nu \equiv \frac{\partial_\nu \Omega}{\Omega} = \partial_\nu f \quad (4.1.7)$$

dir. Ricci skaleri ise

$$R = \Omega^2 (\tilde{R} + 6\tilde{\square}f - 6\tilde{g}^{\mu\nu} f_\mu f_\nu) \quad (4.1.8)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\tilde{\square}f = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu f) \quad (4.1.9)$$

yeni sistemde D'alembert operatörüdür (Fujii and Maeda, 2003).

Burada tanımlanan bu dönüşümler en genel durumları ile verilmiştir. Üzerinde çalışılan çekim teorisine göre dönüşümler farklılık göstermektedir. Jordan konformal sistemi üzerine temellendirilen $f(R)$ teoriler konformal dönüşümler aracılığı ile skaler alan içeren bazı yüksek mertebeden çekim teorilerine eşdeğer olmaktadır. Skaler alan içeren bu yüksek mertebeden çekim teorileri ise skaler tensör çekim teorileri ve Brans Dicke teorisidir.

4.2. Skaler Tensör Teori ve Brans Dicke Teorisi

Genel Rölativite etkileşimi açıklamak için yalnızca $g_{\mu\nu}$ metriğini kullandığı için bir tensör teoridir. Diğer taraftan, skaler tensör teoriler tensör alanı ile beraber skaler alan da içerirler. Genel Rölativite' nin ve skaler tensör teorilerin her ikisi de çekimi hem teorik olarak hem de deneysel olarak başarılı bir şekilde açıklar ancak fiziksel limitlerinde farklılık bulunmaktadır.

Jordan sisteminde skaler tensör çekim teorilerinin etkisi

$$S_{ST} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi_i) \quad (4.2.1)$$

şeklinde dir. Burada $V(\phi)$, ϕ skaler alanının potansiyelidir. $\omega(\phi)$ ise ϕ ' nin fonksiyonudur ve boyutsuz birleşme sabiti olarak bilinir (Bergmann, 1968; Faraoni' den, 2004; Wagoner, 1970; Faraoni' den, 2004; Nordtvedt, 1970; Faraoni' den, 2004).

Eğer skaler tensör çekim teorilerinde bulunan $\omega(\phi)$ ifadesi fonksiyon olarak değil, sadece ω terimi olarak yazılırsa, bu durumda Brans Dicke teorisi elde edilir. Buradan da anlaşılacağı gibi, Brans Dicke teorisi aslında skaler tensör çekim teorilerinin özel bir durumudur. Jordan sisteminde Brans Dicke teorisinin etkisi

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi_i) \quad (4.2.2)$$

ile verilir. Bu durumda alan denklemleri

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu} \quad (4.2.3)$$

$$\square \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad , \quad \square \phi = \frac{8\pi T}{3 + 2\omega} \quad (4.2.4)$$

şeklinde olur (Jordan, 1938; Faraoni' den, 2004; Jordan, 1952; Faraoni' den, 2004; Fierz, 1956; Faraoni' den, 2004; Brans and Dicke, 1961; Faraoni' den, 2004). Eğer (4.2.2) etkisi $g_{\mu\nu}$ ' ye göre varyasyona tabi tutulursa (4.2.3) alan denklemi, eğer ϕ ' ye göre varyasyona tabi tutulursa (4.2.4) Klein-Gordon denklemi elde edilir. (4.2.4)' de bulunan ilk denklem Klein Gordon denklemi, ikinci denklem ise Klein-Gordon denkleminin göre elde edilen alan denklemdir. Jordan sisteminde gravitasyonel alan $g_{\mu\nu}$ metriği ve Brans Dicke alanı ϕ tarafından

tanımlanmaktadır. (4.2.3) denklemi, enerji-momentum tensörünün ve ϕ skaler alanının uzay zaman eğriliğini nasıl etkilediğini belirtmektedir. (4.2.4) denklemi ise, enerji-momentum tensörünün izinin ϕ skaler alanı için kaynak olarak davrandığı şeklinde yorumlanabilir. Yani bu iki denklem gravitasyonel alanları ve skaler alanın dinamiğini tanımlamaktadır (D'Hondt, 1999). (4.1.1) konformal dönüşümü sayesinde

$$\Omega = \sqrt{G\phi} \quad (4.2.5)$$

ve

$$d\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{16\pi G}} \frac{d\phi}{\phi} \quad (4.2.6)$$

dönüşümleri ile verilen skaler alanın yeniden tanımlanması ile, Einstein sistemi etkisi

$$S = \int d^4x \left\{ \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi} - U(\phi) \right] + e^{\left(-8\sqrt{\frac{\pi G}{2\omega+3}} \tilde{\phi} \right)} L_{matter}(\tilde{g}) \right\} \quad (4.2.7)$$

elde edilir. Burada $U(\phi)$ Einstein sisteminde potansiyeldir. Etkinin gravitasyonel kısmı yalnızca $\tilde{g}_{\mu\nu}$ metriğini değil, aynı zamanda çekim kaynağı olarak davranan Brans Dicke alanı $\tilde{\phi}$ ' yı da içermektedir. Buradaki skaler alan herhangi bir şekilde denklemlerde yok edilememektedir, dolayısıyla uzay zaman yapısına daima nüfuz etmektedir. Bu yüzden Einstein sisteminde vakum çözümü düşünülemez (Capozziello and Faraoni, 2011). Ayrıca Lagrangian' in madde kısmına katsayı olarak denkleme giren $\tilde{\phi}$ alanı bu sayede minimum olmayan birleşme sergilemektedir.

ϕ alanı için düz uzaydaki (4.2.4) Klein Gordon denkleminin eğri uzay zamana genişletilmesi sonucunda

$$\square\phi + \xi R\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (4.2.8)$$

genelleştirilmiş Klein Gordon denklemi elde edilir. Burada $\xi R\phi$ terimine birleşme terimi denir ve ϕ alanı ile R skaler eğriliği arasında ilişki kurar. Minimum birleşme için $\xi = 0$ iken minimum olmayan birleşme için $\xi \neq 0$ ' dır. (4.2.7) denkleminin gravitasyonel kısmında ϕ ile R arasında doğrudan bir ilişki bulunmamaktadır. Dolayısıyla gravitasyonel kısım minimum düzeyde birleşme sergilemektedir. Ancak madde kısmında ϕ alanına bağlı olan eksponensiyel faktör sayesinde, skaler alan doğrudan madde ile minimum olmayan düzeyde birleşme sergilenir (Faraoni et al., 1999).

4.3. $f(R)$ Metrik Teorinin ve Brans Dicke Teorinin Eşdeğerliliği

Eğer Brans Dicke parametresi $\omega = 0$ seçilirse, Brans Dicke teori $f(R)$ metrik teoriye eşdeğer hale gelir. Bunun için öncelikle yardımcı bir χ alanı tanıtılır. Bu yardımcı alandan kasıt, Lagrangian' de ω gibi hiç bir kinetik terimin bulunmaması ve bu yüzden de hiç bir dinamiğin olmamasıdır.

(4.2.2) Brans Dicke etkisinde yeni bir χ alanı tanıtılırsa

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} (f(\chi) + f_{,\chi}(\chi)(R - \chi)) + L_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M) \right) \quad (4.3.1)$$

eşitliği elde edilir. Eğer bu yeni etki χ' ye göre varyasyona tabi tutulursa

$$f_{,\chi\chi}(\chi)(R - \chi) = 0 \quad (4.3.2)$$

eşitliği elde edilir. Bu da $f_{,\chi\chi}(\chi) \neq 0$ ise $R = \chi$ olduğu anlamına gelir.

Şimdi bir ϕ değişkeni

$$\phi = f_{,\chi}(\chi) \quad (4.3.3)$$

şeklinde tanımlansın. Bu değişken (4.3.1)' de kullanılırsa

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa^2} (f(\chi(\phi)) + \phi R - \phi \chi(\phi)) + L_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M) \right] \quad (4.3.4)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada alan potansiyeli olan $V(\phi)$ terimi

$$V(\phi) = \frac{\phi \chi(\phi) - f(\chi(\phi))}{2\kappa^2} \quad (4.3.5)$$

olarak tanımlanır. Bu ifade (4.3.4)' de kullanılırsa

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - V(\phi)] + S_{matter}(g_{\mu\nu}, \Psi_i) \quad (4.3.6)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.3.6) denklemi (4.2.2) Brans Dicke etkisinin $\omega = 0$ olduğu duruma eşittir. Bu eşitlikten dolayı, $f(R)$ metrik çekiminin Brans Dicke teorisinin ve skaler tensör çekim teorilerinin özel bir sınıfı olduğu görülebilir (Klanova, 2013).

4.4. $f(R)$ Metrik Teorileri ve Korunum Kanunları

(3.1.11) $f(R)$ metrik çekiminin vakum durumu

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)F(R) = 0 \quad (4.4.1)$$

formuna sahiptir. Bu denklem Jordan sisteminde temsil edilmektedir ve konformal dönüşüm sonucu ortaya çıkan yeni sistemin özellikleri ve korunum kanunları, her iki sistemin de ayrı ayrı fiziksel olduğu varsayımı altında incelenecektir.

Kuantum düzeltmelerinden ortaya çıkan R^2 terimlerine sahip olan ikinci dereceden Lagrangian yoğunlukları, $f(R)$ teorilerinin en çok çalışılan durumudur ve bunlar Einstein çekimine indirgenebilir. Bu tür çekim teorileri için, teoriyi Einstein çekimine eşleştiren konformal dönüşüm Legendre dönüşümüdür.

(4.4.1) denkleminde göre, Jordan sistemi yalnızca metrik tensör $g_{\mu\nu}$ ' yü içermektedir. İyi bilinen bir yöntemle göre, $g_{\mu\nu}$ ve türevleri ile ilgili olan yeni değişken çifti $(\tilde{g}_{\mu\nu}, p)$

$$p = f'(R) \quad , \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} \quad (4.4.2)$$

şeklinde tanıtılır (Higgs, 1959; Magnano and Sokolowski' den, 1993; Bicknell, 1974; Magnano and Sokolowski' den, 1993; Whitt, 1984; Magnano and Sokolowski' den, 1993; Magnano et al., 1987; Magnano and Sokolowski' den, 1993; Jakubiec and Kijowski, 1987; Magnano and Sokolowski' den, 1993; Jakubiec and Kijowski, 1989a; Magnano and Sokolowski' den, 1993; Jakubiec and Kijowski, 1989b; Magnano and Sokolowski' den, 1993). Burada p skaleri boyutsuzdur ve konformal yeniden ölçeklendirmenin düzenini sağlamak için genelde $p > 0$ olarak varsayılmıştır. Böylece $g_{\mu\nu}$ ve $\tilde{g}_{\mu\nu}$ metrikleri aynı işarete sahip olurlar. $p = \exp \left[\sqrt{2/3} \phi \right]$ şeklinde bir skaler alan tanımlanırsa, Einstein sistemindeki Lagrangian

$$\tilde{L} = \sqrt{-\tilde{g}} [\tilde{R} - \tilde{g}_{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 2V(\phi)] \quad (4.4.3)$$

elde edilir. Buradaki potansiyel

$$V(\phi) = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} r[p(\phi)] - \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} f(r[p(\phi)]) \quad (4.4.4)$$

formuna sahiptir. Bu potansiyel, Jordan sistemindeki orjinal Lagrangian olan $L = f(R)\sqrt{-g}$ ifadesine bağlıdır ve bu ifadeden elde edilmiştir.

(4.4.1) eşitliğinden de görüldüğü gibi, Jordan sisteminde çekim bütünüyle metrik tensör $g_{\mu\nu}$ ile belirlenir. Einstein sisteminde, ϕ skaler alanı metrik tensör $\tilde{g}_{\mu\nu}$ için kaynak olarak davranır ve biçimsel olarak dış "madde alanı" rolünü oynar. Ancak, (4.4.1) eşitliğinden de görüldüğü üzere, vakum durumu söz konusu olduğu için henüz herhangi bir madde alanı yoktur. Bu yüzden orjinal teori, Einstein sisteminde meydana gelen skaler alanı kabul eder ve bu skaler alan ise,

Jordan sisteminde yüksek mertebeden alan denklemlerinden dolayı, ek serbestlik derecesi olarak kabul edilir. Bu bakış açısına göre, Genel Rölativite' ye matematiksel olarak eşdeğer olmasına rağmen, $f(R)$ çekim teorisi fiziksel olarak Genel Rölativite' den farklıdır çünkü $f(R)$ teorisinin Einstein sistemi gösteriminde çekim artık sadece metrik tensör ile değil, aynı zamanda skaler alan ile temsil edilmektedir (Magnano and Sokolowski, 1993).

Şimdi, $f(R)$ metrik çekim teorilerinde Einstein sisteminin ve Jordan sisteminin ayrı ayrı fiziksel olarak ele alındığı durumlar incelenip sonuçları ortaya konacaktır. Ancak burada dikkat edilmesi gereken kavram, Genel Rölativite' de geçerli olan minimum düzeyde birleşmenin, lineer olmayan çekim teorilerinde ve Brans Dicke teorisinin genel hali olan skaler tensör çekim teorilerinde de korunması gerektiğidir. Minimum düzeyde birleşmenin ihlali farklı madde türlerinin farklı şekilde birleşeceği anlamına gelmektedir. Dolayısıyla zayıf eşdeğerlik prensibi ihlal edilecektir. Böylesi bir durumdan kaçınmak için yüksek mertebeden çekim teorilerinde skaler alan ile maddenin minimum düzeyde birleşmesi beklenmelidir. Bu veriler altında, $f(R)$ çekim teorilerinde Jordan sistemi metriği $g_{\mu\nu}$ ' nün fiziksel olarak ele alındığı ve sonra da Einstein sistemi metriği $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ' nün fiziksel olarak ele alındığı durumlar incelenip korunum kanunları arasındaki farklılıklar belirtilecektir.

4.4.1. Jordan Sistemi Metriğinin Fiziksel Olduğu Durum

Çekim ve madde alanları için Lagrangian' in

$$L = [f(R) + 2L_{mat}(\Psi, g)]\sqrt{-g} \quad (4.4.1.1)$$

şeklinde olduğu varsayalım. Burada Ψ madde alanlarını temsil etmektedir. Böylece gravitasyonel alan denklemleri de

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} [\sqrt{-g}f(R)] &= f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}f'(R) = \\ &= T_{\mu\nu}(\Psi, g) \end{aligned} \quad (4.4.1.2)$$

formunda olur. Burada kovaryant korunum yasasına göre $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ eşitliği geçerlidir. $g_{\mu\nu}$ metriği (4.4.2) konformal dönüşüme tabi tutulursa

$$\tilde{L}(\tilde{g}, \phi, \Psi) =$$

$$= \left[\tilde{R}(\tilde{g}) - \tilde{g}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 2V(\phi) + 2e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} L_{mat} \left(\Psi, e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \tilde{g} \right) \right] \sqrt{-g} \quad (4.4.1.3)$$

şeklinde Einstein sistemi Lagrangin' i elde edilir (Magnano et al., 1987; Magnano and Sokolowski' den, 1993). Bu eşitlik dinamik olarak (4.4.1) Lagrangian' ine eşittir. Burada, daha önceden belirtildiği gibi, $\phi \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \ln p$ skaler alanın sahip olduğu kinetik terimdir ve $V(\phi)$ potansiyeli ise (4.4.4) formundadır. (4.4.1.3) eşitliğinde madde Lagrangian' indeki $\tilde{g}$ metriği ile skaler alanın doğrudan birleşmesinden dolayı, skaler alan ile madde arasında minimum olmayan düzeyde birleşme olduğuna dikkat edilmelidir. (4.4.1.3) Lagrangian' i sayesinde

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}(\phi, \tilde{g}) + e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\phi} T_{\mu\nu} \left(\Psi, e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \tilde{g} \right) \quad (4.4.1.4)$$

formunda olan alan denklemi elde edilir. Burada $\tilde{G}_{\mu\nu}$, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ metriğinde hesaplanan standart Einstein tensörüdür ve $t_{\mu\nu}$ ise ϕ alanının stress enerji tensörüdür ve

$$t_{\mu\nu} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - V(\phi) \tilde{g}_{\mu\nu} \quad (4.4.1.5)$$

ile ifade edilir. Korunum yasasına göre

$$\tilde{\nabla}^\nu \left[t_{\mu\nu}(\phi, \tilde{g}) + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} T_{\mu\nu} \left(\Psi, e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \tilde{g} \right) \right] = 0 \quad (4.4.1.6)$$

eşitliği elde edilir ve (4.4.1.3)' den elde edilen Lagrangian' e göre, iki stress enerji tensörü Einstein sisteminde ayrı ayrı korunumlu değildir.

Bu resimde, etkileşimli Lagrangian L_{mat} ' nin konformal olarak invariant olduğu özel durumu hariç, ϕ skaler alanı herbir çekici maddenin hareketini etkilemektedir. Bu teori fiziksel bakış açısından Genel Rölativite' ye eşdeğer değildir, hatta çekim, Jordan sisteminde yalnızca metrik tensör tarafından temsil edilmektedir, oysaki Einstein sisteminde, madde ile evrensel olarak birleşen ϕ skaleri tarafından temsil edilen, geometrik olarak gravitasyonel serbestlik derecesi vardır. Bununla birlikte, korunum kanunlarında bu bakış açısından, orjinal metrik $g_{\mu\nu}$ ' nün fiziksel olduğu varsayımından hiç bir tutarsızlık meydana gelmemektedir (Magnano and Sokolowski, 1993).

4.4.2. Einstein Sistemi Metriğinin Fiziksel Olduğu Durum

Bu durumda, ϕ alanı madde ile birleşmez çünkü bu sefer çekimin görüşünü metrikseldir. Einstein sistemindeki Lagrangian

$$\tilde{L} = \sqrt{-\tilde{g}} [\tilde{R} - \tilde{g}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \tilde{\phi}_{,\nu} - 2V(\phi) + 2L_m(\psi, \tilde{g})] \quad (4.4.2.1)$$

şeklinde. Lagrangian' in madde kısmında ϕ bulunmadığı için, skaler alanın madde ile birleşmediği görülebilmektedir. (4.4.2.1) Lagrangian' i

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}(\phi, \tilde{g}) + T_{\mu\nu}(\psi, \tilde{g}) \quad (4.4.2.2)$$

$$\tilde{\square}\phi = \frac{dV}{d\phi} \quad (4.4.2.3)$$

$$\frac{\delta}{\delta\psi}(L_m\sqrt{-g}) = 0 \quad (4.4.2.4)$$

şeklindeki alan denklemlerine neden olur ve madde ile ϕ arasında herhangi bir etkileşim olmadığı için, bu durumda korunumlu nicelikler toplam stress- enerji tensörü $t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}$ ile $t_{\mu\nu}$ ve $T_{\mu\nu}$ tensörleridir. Bu da $\tilde{\nabla}^\nu t_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}^\nu T_{\mu\nu} = 0$ anlamına gelir.

Vakum Jordan konformal sistemi denilen $L = f(R)\sqrt{-g}$ ifadesi ile (4.4.2.1)' deki madde terimlerinin varlığında, ϕ skaler alanının olduğu madde

Jordan konformal sistemi dikkate alındığında, konformal olarak invaryant madde sistemleri haricinde, iki Jordan sistemi de birbirinden farklıdır. (4.4.2.1) denkleminde madde minimum olmayan düzeyde metrik ile birleşmiştir. Bu sistemin genel özelliği, çekimin olmadığı düz uzay zamanda, verilen bir madde türü için standart forma indirgenemeyen lineer olmayan Lagrangian' dir. Bu durum ise korunum kanunlarını ciddi biçimde etkiler. Jordan konformal sistemi içerisinde gravitasyonel alan denklemlerini "bütünüyle gravitasyonel kısma" ayırmak mümkündür. Böylece dört madde korunum kanunu Genel Rölativite' de olduğu gibi aynı şekilde denklemlerden görülebilir. Bu kanunlar madde değişkenleri ile beraber bir dizi eğri skaler karma terimini gerektirir ve bu nedenle hiç bir şekilde Einstein teorisindeki korunum kanunu olan $T_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$ a benzemezler. Bu yüzden bu sistemde madde evren çizgilerinin (kütlesiz parçacıklar hariç) eğriliğine bağlı olduğu da açıkça görülebilir.

Diğer taraftan Einstein sisteminde güçlü eşdeğerlik prensibi sağlanır; çekimin bu versiyonu ile Genel Rölativite arasındaki olası tek fark, tek rolü metrik alanını etkilemek için sınırlandırılmış olan skaler alana verilen fiziksel yorumdan kaynaklanabilir. Hatta ϕ için, çekimin sıfır spinli geometrik olmayan bileşeni olduğu varsayımı bile yapılabilir (Magnano and Sokolowski, 1993).

4.5. $f(R)$ Metrik Teoride Enerji Koşulları

İlk bölümlerde Genel Rölativite için enerji koşulları belirtilmişti. Bu bölümde ise $f(R)$ metrik çekimi için enerji koşulları elde edilecektir.

(3.1.11) alan denklemi

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}^{(curv)} + \tilde{T}_{\mu\nu}^{(matter)} \quad (4.5.1)$$

formunda yazılabilir. Burada sol taraftaki ilk terim eğriliğe, ikinci terim ise adi maddeye ait olan enerji momentum tensörlerini gösterir ve $\tilde{T}_{\mu\nu}^{(matter)} = T_{\mu\nu}^{(matter)} / f'(R)$ eşitliği bulunmaktadır. $T_{\mu\nu}^{(matter)}$ ise (2.2.7) ile verilen makroskobik cisimlere ait olan enerji momentum tensörüdür. $T_{\mu\nu}^{(curv)}$ ise

$$T_{\mu\nu}^{(curv)} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [f(R) - Rf'(R)] + (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \nabla^\alpha \nabla^\beta f'(R) \right\} \quad (4.5.2)$$

ile verilir.

(3.1.11) denklemi kullanılarak etkili enerji momentum tensörü

$$T_{\mu\nu}^{eff} = \frac{\kappa^{-2}}{f'(R)} \left\{ T_{\mu\nu}^m + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [f(R) - Rf'(R)] + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f'(R) \right\} \quad (4.5.3)$$

$$T^{eff} = \frac{\kappa^{-2}}{f'(R)} \{ T^m + 2(f(R) - Rf'(R)) - 3\square f'(R) \} \quad (4.5.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bu yüzden, $R_{\mu\nu}$ etkili enerji momentum tensörü ve bu tensörün izi cinsinden

$$R_{\mu\nu} = \kappa^2 \left(T_{\mu\nu}^{eff} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{eff} \right) \quad (4.5.5)$$

şeklinde yazılabilir. Uzaysal olarak düz FRW metriğinde etkili enerji yoğunluğu ve basınç

$$\rho^{eff} = \frac{\kappa^2}{F(R)} \left[\rho - \frac{1}{2} (f(R) - RF(R)) - 3H\dot{R}f''(R) \right] \quad (4.5.6)$$

$$P^{eff} = \frac{\kappa^2}{F(R)} \left[P + \frac{1}{2} (f(R) - RF(R)) + (2\dot{R}H + \ddot{R})f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) \right] \quad (4.5.7)$$

şeklinde dir. Şimdi bu denklemler null enerji koşulunu ve güçlü enerji koşulunu sağlayacak şekilde sırasıyla

$$\rho + P + (\ddot{R} - \dot{R}H)f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) \geq 0 \quad (4.5.8)$$

$$\rho + 3P + (f(R) - RF(R)) + 3(\ddot{R} + \dot{R}H)f''(R) + 3\dot{R}^2 f'''(R) \geq 0 \quad (4.5.9)$$

şeklinde yazılır.

Zayıf enerji ve baskın enerji koşulları ise sırasıyla

$$\rho - \frac{1}{2}(f(R) - Rf'(R)) - 3H\dot{R}f''(R) \geq 0 \quad (4.5.10)$$

$$\rho - P - (5\dot{R}H + \ddot{R})f''(R) - \dot{R}^2 f'''(R) - (f(R) - Rf'(R)) \geq 0 \quad (4.5.11)$$

şeklindedir (Atazadeh et al., 2008).

Bu enerji koşulları aynı zamanda FRW modelleri bağlamında verilen bir $f(R)$ modeli üzerinde sınırlama yapmak için de kullanılabilir. Bu gibi sınırlamaları belirlemek için öncelikle Ricci skaleri ve uzaysal olarak düz bir FRW geometrisinin Ricci skalerinin türevleri ivmelenme q , sarsıntı (jerk) j ve kopma (snap) s parametreleri cinsinden

$$R = -6H^2(1 - q) \quad (4.5.12)$$

$$\dot{R} = -6H^3(j - q - 1) \quad (4.5.13)$$

$$\ddot{R} = -6H^4(s + q^2 + 8q + 6) \quad (4.5.14)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$j = \frac{1}{H^3} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad s = \frac{1}{H^4} \frac{\ddot{\ddot{a}}}{a} \quad (4.5.15)$$

eşitlikleri bulunmaktadır. Null, zayıf, güçlü ve baskın enerji koşulları bu parametreler cinsinden yazılırsa, zayıf eşdeğerlik koşulu hariç geri kalan tüm enerji koşullarının s parametresine bağlı olduğu görülür. s parametresinin şu ana kadar güvenilir bir ölçümü bulunmadığından dolayı, gözlemler ile uygun olacak şekilde $f(R)$ çekiminde enerji koşulları sınırlamaları zayıf enerji koşulu esas alınarak örneklendirilecektir. Örnek model olarak da $f(R) = \alpha R^n$ dikkate alınacaktır.

Zayıf enerji koşulu günümüz zamanında q , ρ ve j parametrelerine bağlı olarak

$$2\rho_0 + f_0 + 6H_0^2(1 - q_0)f'_0 + 36H_0^4(j_0 - q_0 - 2)f''_0 \geq 0 \quad (4.5.16)$$

şeklinde yazılır. Bu sayede zayıf enerji koşulu üzerindeki sınırlamaların q_0 ve j_0 gözlemsel değerleri ile modelden gelen α ve n değerlerine bağlı olduğu görülebilir. Dolayısıyla (4.5.16) eşitsizliği bu parametreler cinsinden

$$\alpha(-1)^n(An^2 - (A + 1)n + 1) \geq 0 \quad (4.5.17)$$

şeklinde yazılır. Burada $A = (j_0 - q_0 - 2)/(1 - q_0)^2$ şeklindedir. Bu eşitsizliğin α işaretine ve n ' in değerine bağlı olduğu açıktır. Tüm R değerleri için $f'(R) > 0$ gerekliliği ile birlikte α 'nın olası iki işareti, $f(R) = \alpha R^n$ modeli için

$$\alpha(-1)^n n(3.3H_0)^{2n-2} < 0 \quad (4.5.18)$$

eşitsizliğini verir. Bu durumda α 'nın iki farklı durumu göz önünde bulundurularak izin verilen olası n değerleri

- $\alpha > 0 \Rightarrow n = 3, 1, -2, -4, -6, \dots$
- $\alpha < 0 \Rightarrow n = 2, -1, -3, -5, \dots$

şeklinde olur. $f(R) = \alpha R^n$ modeli için SN Ia Hubble diyagramı fit edilerek elde edilen $n = 3.5$ gözlemsel değeri uygun duruma getirilebilir (Capozziello et al., 2007a; Santoz et al.' dan, 2007). Ayrıca $f(R) = \alpha R^n$ modelinin, FRW modelleri için tam çözümlere ve $n > 1$ veya $n < 3/4$ eşitsizliklerini gerektiren kararlı madde baskınlığı dönemine işaret ettiği anlaşılmıştır. $n > 1$ sınırlaması zayıf enerji koşulunu ihlal etmemekte, ancak $n < 3/4$ koşulu ihlal etmektedir (Clifton and Barrow, 2005; Santoz et al.' dan, 2007).

4.6. Einstein ve Jordan Konformal Sistemlerinin Bazı Farklı Fiziksel Sonuçları

Önceki bölümlerde de görüldüğü üzere, konformal dönüşüm tekniklerinin kozmolojide ve astrofizikte birçok uygulamaları olduğundan dolayı, prensipte ve pratikte konu oldukça önemlidir. Aynı fiziksel durumun farklı konformal sistemler cinsinden ifadesi farklı sonuçlara neden olabilmektedir. Genel Rölativite' ye dayanan bazı kozmolojik süreçler yüksek mertebeden çekim Rölativite çerçevesinde açıklanamayan durumları çözüme kavuşturacaktır. Bu bölümde tanıtılan sonuçları belli başlı sonuçlardır ve literatürün tümünü kapsamamaktadır.

4.6.1. Genişletilmiş ve Hiper genişletilmiş Enflasyon

Guth' ın Genel Rölativite üzerine temellendirdiği "eski enflasyon" (Guth, 1981; Capozziello and Faraoni' den, 2011) düşüncesine alternatif olarak, skaler tensör veya yüksek mertebeden Ricci skalerinin olduğu çekim teorileri gibi Einstein Hilbert etkisine yapılan düzeltmeleri içeren genişletilmiş veya hiper genişletilmiş enflasyon düşüncesi ileri sürülmüştür. Eski enflasyonda her bir Hubble zamanı ve her bir Hubble hacmi başına gerçek vakum kabarcıklarının çekirdeklenme oranı $\eta\nu = \Gamma/H^4$ tür, burada Γ birim zamandaki çekirdeklenme oranıdır. Çoğu alan teorisinde Γ doğru ve yanlış vakumu ayıran potansiyel bariyerleri tarafından belirlenen bir sabittir. Genel rölativite temelli eski enflasyonda H' da bir sabit olduğu için çekirdeklenme oranı $\eta\nu'$ de sabittir. Bu yüzden, enflasyonu sona erdiren faz dönüşümünü tamamlamak için, yeterli sayıda kabarcık mutlaka her bir Hubble zamanı ve Hubble hacmi başına çekirdeklenmelidir, $\eta\nu \approx 1$ olmalıdır. Ancak, eğer enflasyon standart Big Bang modelinin problemlerini çözmek için yeteri kadar uzun sürerse, $\eta\nu \ll 1$ sınırı mutlaka korunmalıdır. Eğer $\eta\nu$ çok büyükse, çok sayıda gerçek vakum kabarcığı enflasyonu oldukça erken bir şekilde durduracaktır. Birinci mertebe faz geçişi Genel Rölativite' den ziyade Brans Dicke teorisinde daha iyi çalışır. Genişletilmiş enflasyonun üzerine kurulduğu çözüm

$$a(t) = a_0(1 + \delta t)^{\omega + \frac{1}{2}} \quad (4.6.1.1)$$

$$\phi(t) = \phi_0(1 + \delta t)^2 \quad (4.6.1.2)$$

şeklindedir (Mathiazhagan and Johri, 1984; Capozziello and Faraoni' den, 2011). Burada a ölçek faktörü, ϕ skaler alan ve ω Brans Dicke parametresidir. Eğer $\omega > 1/2$ ise bu çözüm güç yasası enflasyonu çözümünü tanımlar. Güç yasası enflasyonunda aslında Genel Rölativite ve ekponensiyel potansiyel $V(\phi)$ kullanılır. Hubble parametresi $H = (\omega + 1/2)/t$ sabit değildir, bu yüzden gerçek vakum kabarcıklarının çekirdeklenme oranı $\eta v = \Gamma/H^4 \propto t^4$ zamana bağlıdır, ve bu eski enflasyonun problemi için bir çare olabilir. Ancak burada büyük kabarcık problemi denilen ciddi bir eksiklik bulunmaktadır (La et al., 1989; Capozziello and Faraoni' den, 2011; Weinberg, 1989; Capozziello and Faraoni' den, 2011). Buna göre, erken durumda, çekirdeklenme oranı ηv küçüktü ama sıfır değildi ve gerçek vakum kabarcıklarının sadece birkaçı erkenden çekirdeklenmişti. Bunlar Hubble yarıçapından oldukça küçüktü, ve bu yüzden uzay zaman eğriliği tarafından hissedilir şekilde etkilenmiyorlardı, ışık hızında genişliyorlar ve düz uzay zamandaymış gibi evrimleşiyorlardı. Bunlar Hubble yarıçapı ile kıyaslanabilir boyuta geldiği zaman enflasyonel kozmik oranda genişlemeye başladılar ve sonuçta kozmolojik boyutlara ulaştılar. Bu erken üretilen kabarcıklar az sayıda olduğundan ve bunlarda oldukça büyüdüğünden dolayı, daha sonra sayısız küçük kabarcık çekirdeklenmesi gibi son bulmadılar ve CMB' de önemli bir iz bıraktılar. Bu kabarcıklar inhomojeniteleri meydana getirdiler ki bu inhomojeniteler, metrik tensör ve enflasyonun kuantum dalgalanmaları tarafından oluşturulan inhomojeniteleri bastırmıştır. Bu kabarcık-indüklenmiş dalgalanmalar şu anki teknoloji ile ortaya çıkarılabilir seviyededir (Kolb, 1991; Capozziello and Faraoni' den, 2011; La et al., 1989; Capozziello and Faraoni' den, 2011; Liddle and Wands, 1991; Capozziello and Faraoni' den, 2011). Fakat henüz gözlenememiştir ve bu durum genişletilmiş enflasyon için ciddi bir engel oluşturmaktadır. Bununla beraber, genişletilmiş enflasyonun büyük kabarcık problemini çözmek için çeşitli teoriler de ortaya atılmıştır. Genişletilmiş enflasyonun bu problemi, Brans Dicke çekimi yerine skaler tensör teori kullanılarak çözüleceği düşünülmüştür. Bu durumda aşırı genişletilmiş enflasyona ulaşılır. Ancak burada da zamana bağımlı olan $\omega(\phi)$ birleşme fonksiyonunun ince ayar problemi bulunmaktadır (Capozziello and Faraoni, 2011).

4.6.2. Genişletilmiş Çekimde Karadelik Termodinamikleri

Hawking karadeliklerin yarı-klasik ışınlam yaydığının keşfi, karadeliklerin sıcaklığının belirlenmesini olası kılmıştır. Sıcaklık belirleme, karadelik termodinamiklerinin tüm yapısına anlam veren önemli bir içeriktir ve entropi ve karadelik termodinamikleri kavramını anlamlı kılmaktadır.

Genel Rölativite' de karadelik termodinamikleri $K_B T_H = \hbar \kappa_g / 2\pi K c$ (burada c ışık hızı, K Boltzman sabiti ve κ_g ise ufku yüzey çekimidir) tarafından verilen karadelik Hawking sıcaklığı T_H , $S_{BH} = c^3 A / 4 \hbar G = A / l_{Pl}^2$ (burada A olay ufku alanı ve $l_{Pl} = \sqrt{\hbar G / c^3}$ Planck uzunluğudur) entropi, ve iç enerji $M c^2$ (burada M karadelik kütlesidir) ile belirtilir. Kararlı Genel Rölativite karadelikleri için karadelik termodinamikleri aşağıdaki kanunlarla ifade edilir.

- Sıfırıncı kanun: κ_g yüzey çekimi, ve bu yüzden kararlı karadelinin T_H sıcaklığı, olay ufku üzerinde sabittir.

- Birinci kanun: Kütlesi M , açısal momentumu J ve yükü Q olan bir karadelikte kararlı durumlar arasındaki termodinamik geçişlerde bu kanun

$$dM = K_B T_H dS_{BH} + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ + \delta q \quad (4.6.2.1)$$

şeklinde. Burada Ω_H ve Φ_H ufuk üzerindeki açısal hız ve elektrostatik potansiyel, δq ise eğer var ise, karadelik ufku dışındaki kararlı madde dağılımından dolayı M ' deki değişikliktir. Bu kanun ufuk üzerindeki S_{BH} , T_H , A , Ω_H ve Φ_H yerel nicelikleri ile uzaysal sonsuzlukta ölçülen M , J ve Q nicelikleri arasındaki bağıntıyı verir.

- İkinci kanun: Herhangi bir klasik işlemde ufuk alanı A azalamaz ve bu yüzden entropi değişimi $\Delta S_{BH} \geq 0$ olur.

- Üçüncü kanun: Bir karadelinin sıcaklığını sınırlı sayıda fiziksel işlem ile sıfıra düşürmek imkansızdır, veya (T_H ve κ_g uç (extremal) karadelik için yok olduğundan dolayı) uç olmayan bir karadelik sınırlı sayıda fiziksel süreç tarafından uç yapılamaz.

Burada uç (extremal) karadelik, T_H Hawking sıcaklığı sıfır olan karadeliktir. Bu durum, κ_g yüzey çekiminin de sıfır olması anlamına gelir (Capozziello and Faraoni, 2011).

Brans Dicke teoride maddenin çöküşü esnasında ufuk alanının azaldığı bulunmuştur. İkinci kanun ufuk alanının azalamayacağını belirttiği için, bu durum ikinci kanunu ihlal etmektedir (Scheel et al., 1995a; Faraoni' den, 2010; Scheel et al., 1995b; Faraoni' den, 2010; Kerimo and Kalligas, 1998; Faraoni' den, 2010; Kerimo, 2000; Faraoni' den, 2010). İkinci kanunun değişmesi karadelik entropisinin de değişmesine neden olacaktır. Benzer sorun $f(R)$ metrik formalizminde ve $f(R)$ Palatini formalizminde de bulunmaktadır. Bu sorun Brans Dicke teoride

$$S_{BH} = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{g^{(2)}} \phi = \frac{\phi A}{4} \quad (4.6.2.2)$$

şeklinde bir entropi-alan düzeltme terimi ile giderilebilmektedir. Burada $g^{(2)}$ ufuk yüzeyi Σ' ya metriğin sınırlanmış determinantıdır ve ϕ ise Brans Dicke skaler alanıdır. Bu denklem Brans Dicke teorisinin etkili gravitasyonel birleşmesi $G_{eff} = \phi^{-1}$ ile Newton sabiti G' nin yer değiştirilmesi ile anlaşılır. Bu durumda $S_{BH} = A/4G_{eff}$ şeklinde gelir ve dolayısıyla S_{BH} niceliği de sabit olur (Kang, 1996; Faraoni' den, 2010).

Benzer şekilde, Brans Dicke teorisinin Einstein sistemi temsiliinde de S_{BH} niceliği sabit hale gelmektedir. Null vektörleri ve konformal olarak invariant olan tüm madde formlarının yanı sıra null geodezikleri de konformal dönüşümden etkilenmemektedir. Ancak olay ufkunun alanı değişmektedir ve entropi formülündeki $S_{BH} = \frac{A}{4G} \rightarrow \frac{A}{4G_{eff}} = \frac{\phi A}{4}$ değişimi, $g_{\mu\nu}'$ nün konformal dönüşümünden dolayı alandaki değişim olarak anlaşılabilir. (4.1.1) konformal dönüşümü $\tilde{g}_{\mu\nu}^{(2)} = \Omega^2 g_{\mu\nu}^{(2)}$ ile Brans Dicke teorisinin Einstein sistemindeki olay ufku alanı

$$\tilde{A} = \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\tilde{g}^{(2)}} = \int_{\Sigma} d^2x \Omega^2 \sqrt{g^{(2)}} = G\phi A \quad (4.6.2.3)$$

şeklinde gösterilirse, bu durumda ϕ skaler alanının ufuk üzerinde sabit olduğu varsayılmış ve bunun sonucu olarak S_{BH} niceliği de sabit hale gelir. ϕ skaler alanının ufuk üzerinde sabit olduğu varsayımı yapılmadığı takdirde, yüzey çekimi sabit olamayacak ve sıfırcı kanun ihlal edilecektir. Bu yüzden entropi-alan ilişkisi $\tilde{S}_{BH} = \tilde{A}/4G$ Einstein sisteminde de geçerlidir (Faraoni, 2010).

Brans Dicke karadelığının Einstein karadeliginden bir diğer farkı, eğer skaler alan Brans Dicke karadelığının ufkunda yok oluyorsa, bu durum karadelğin sıfır sıcaklığa sahip olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Sıfır sıcaklık ise sıfır entropiye neden olmaktadır. Dolayısıyla üçüncü kanun ihlal edilmektedir. Bu tür karadeliklere soğuk karadelikler denilmektedir (Capozziello and Faraoni, 2011).

Brans Dicke teori bağlamında skaler alanın ufuk üzerinde yok olduğu veya ıraksak olduğu durum hariç, tüm kararlı Brans Dicke karadelikleri Genel Rölativite karadelikleri ile aynıdır. Ufku dışında sabit skaler alana sahip olan Brans Dicke karadeligi böylelikle Genel Rölativite karadeligine indirgenebilmektedir (Faraoni, 2010).

4.6.3. Genişletilmiş Çekimde Toz Baskın Evren

$f(R)$ teorilerin öngördüğü evren ile Genel Rölativite' nin evreninin bazı farklılıklara sahip olduğu daha önceden belirtilmişti. Aslında bu farklılıklar hangi $f(R)$ formalizminde çalışıldığına ve hangi $f(R)$ modelinin dikkate alındığına göre de değişmektedir. Buna bir örnek olarak, $\alpha = \text{sabit}$, $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere $f(R) = \alpha R^n$ tipi $f(R)$ metrik teorilerinde toz baskın dönem göz önünde bulundurulursa, Jordan ve Einstein konformal sistemlerine göre ölçek faktörü

$$a \propto \eta^{2n/(2n-3)} \quad , \quad \tilde{a} \propto \eta^{(n-3)/(2n-3)} \quad (4.6.3.1)$$

şeklinde olur. (2.3.3.2.8) frenleme parametresi bu durumda

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{3-2n}{n} \right) \quad , \quad \tilde{q} = \frac{2n-3}{n-3} \quad (4.6.3.2)$$

şeklinde olur. Buna göre, evren Jordan sisteminde $n > 3/2$ için hızlanıyorken, Einstein sisteminde ise $3 < n < 3/2$ için hızlanmaktadır. $n = 4$ seçilirse $q = -5/8$ ve $\tilde{q} = 5$ olur. İlk durumda evren hızlanıyorken, ikinci durumda yavaşlamaktadır (Carlioni et al., 2005; Hammami' den, 2012).

Aslında bu gibi örnekler çoğaltılabilir. Fakat burada literatürde en çok çalışılan formalizm ve modeller dikkate alınmıştır. Aslında bu farklılıklar sadece Genel Rölativite ile $f(R)$ çekimi arasındaki farklılıklar olarak düşünülmemeli, Einstein ve Jordan konformal sistemleri arasındaki farklılıklar olarak da dikkate alınmalıdır. Zira daha önceden de belirtildiği gibi, $f(R)$ teoriler ucu açık ve genel bir yapı sergilediği için, fiziksel sınırları ve farklılıkları belirlemek formalizme ve yapılan modele göre değişkenlik göstermektedir.

5. $f(R)$ METRİK TEORİNİN KOZMOLOJİK SINIRLAMALARI VE KARANLIK ENERJİ

Salt matematiksel açıdan ele alındığında sonsuz sayıda $f(R)$ teori elde etmek mümkündür. Bu durumun ise fiziksel olmadığı açıktır. Fiziksel geçerlilik için, astronomik gözlemler ve bazı temel kozmolojik verilerden faydalanarak birbiri ardına gelen ışınlım, madde ve hızlanma çağlarını fark edebilecek geçerli $f(R)$ modelleri oluşturulmalıdır. Bunun için öncelikle $f(R) = R - \alpha/R^n$ modeli ileri sürülmüştür (Capozziello, 2002; Capozziello et al., 2003a; 2003b; Carroll, 2004). İlk başta, modeldeki R^{-n} teriminin baskın hale gelip bu geç zaman hızlanmayı açıklayacağı ileri sürülmüştü. Ancak daha sonradan bu modelin madde kararsızlığı (Dolgov and Kawasaki 2003; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Faraoni 2006a; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010), kozmolojik tedirginliklerin kararsızlığı (Carroll et al., 2006; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Bean et al., 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Song et al., 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Sawicki and Hu 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Faulkner et al., 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010), madde döneminin yokluğu (Amondola et al., 2007a; 2007b; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Fairbairn 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010) ve yerel çekim sınırlamaları (Olmo 2005a; 2005b; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Faraoni 2006b; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Erickcek 2006; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Chiba 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Navarro and Acoleyen 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Capozziello and Tsujikawa 2008; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010) gibi bazı problemlere sahip olduğu anlaşılmıştır. Bu konuyla ilgili olarak bu bölümde önce $f(R)$ çekimi için kozmolojik sınırlamalar elde edilecek ve sonra $f(R)$ karanlık enerji modellerine değinilecektir.

5.1. $f(R)$ Metrik Karanlık Enerji Modelleri İçin Kozmolojik Sınırlamalar

$f(R)$ çekiminde negatif kütle anlamına gelen takyonik kararsızlıktan kaçınmak için

$$R \geq R_0(> 0) \quad \text{için} \quad f_{,R} > 0 \quad , \quad f_{,RR} > 0 \quad (5.1.1)$$

koşulları sağlanmalıdır (Starobinsky, 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010). Burada R_0 Ricci skalerinin günümüz değeridir. Daha önceden bahsedildiği gibi, $f(R)$ teorisinin yüksek boyutlu doğasından dolayı scalaron denilen ilave bir skaler serbestlik derecesi ortaya çıkmaktadır ve bu scalaron $f_{,R} \equiv df/dR$ ile gösterilir. Buradan hareketle, ilk koşul scalaronun varlığını temsil etmektedir. İkinci koşul ise scalaronun kütlesi ile ilgili bir terimdir. Scalaronun Compton dalgaboyu $\lambda_{Compton} \equiv m_{f,R}^{-1}$ ile gösterilir, burada m scalaronun kütlesidir. Genellikle bu dalgaboyu boyutsuz olarak

$$B \equiv \frac{f_{,RR}}{1 + f_{,R}} R' \frac{H}{H'} \quad (5.1.2)$$

ile gösterilir. Burada $' \equiv d/d \ln a'$ dır.

İlk koşulun ihlali negatif enerjiye sahip olan teorik parçacıkların ortaya çıkmasına, ikinci koşulun ihlali ise skaler alanın imajiner kütleye sahip olmasına neden olur. Örneğin önceki bölümlerde üzerinde durulan $f(R) = R - \mu^{2(n+1)}/R^n$ modeli $f_{,RR} > 0$ koşulunu sağlamadığı için, bu modelin öngördüğü kozmolojik evrimde madde dönemi bulunmamakta ve madde kararsızlıkları olmaktadır.

İkinci koşul, (3.1.1) denklemindeki madde Lagrangian' i L_m için

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \quad (5.1.3)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad (5.1.4)$$

enerji korunumu ifadesi, enerji yoğunluğu ρ_m ve ρ_r olan rölativistik olmayan madde ve ışıınım için sağlanmalıdır. Bu eşitlikler $f(R)$ çekimi için birinci ve ikinci Friedmann denklemlerine konulursa

$$3FH^2 = (FR - f)/2 - 3H\dot{F} + \kappa^2(\rho_m + \rho_r) \quad (5.1.5)$$

$$-2\dot{H}F = \ddot{F} - H\dot{F} + \kappa^2\left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r\right) \quad (5.1.6)$$

eşitlikleri elde edilir (Amendola et al., 2007). (5.1.5) ve (5.1.6) denklemleri, FRW evreninde oluşturulan herhangi bir $f(R)$ metrik modelinin madde ve ışınının enerji yoğunluklarının korunum kanununa uyması gerektiğini ifade eder. Bu aynı zamanda $f(R)$ metrik çekimi için kozmolojik sınırlama olarak da göz önünde bulundurulabilir.

Üçüncü koşul, $0 < Rf_{,RR}/f_{,R} < 1$ koşulu anlamına gelen de Sitter noktasında $Rf_{,R} = 2f$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu aynı zamanda (3.1.18) denkleminin karşılığı gelmektedir (Tsujikawa, 2010).

Son koşul ise, $R_0 \gg R$ için $f(R) \rightarrow R - 2\Lambda$ olmasıdır. Bu, eğrilik skalerinin günümüzdekinden çok daha küçük olduğu geçmiş zamanlarda, herhangi bir $f(R)$ teorisinin Λ CDM modeline yakınsaması olarak değerlendirilebilir. Buradan hareketle, herhangi bir $f(R)$ modelinin erken zamanlarda Genel Rölativite ile birebir uyumlu olması gerektiği ve farklılığın ancak geç zamanlarda olması gerektiği yorumu yapılabilir (Tsujikawa, 2010).

5.2. $f(R)$ Metrik Çekiminde Karanlık Enerji

Bu bölümde kozmolojik olarak geçerliliği tamamlamak için $f(R)$ metrik teori tarafından verilen karanlık enerji modelinin koşulları düzenlenecektir. Burada kozmolojik olarak geçerlilikten kasıt, herhangi bir $f(R)$ modelinin geç zaman hızlanma fazından önce uygun kozmolojik evrimi sağlaması için yeteri kadar uzun bir madde baskın dönemi verebilmesidir.

(5.1.5) ve (5.1.6) denklemlerinin içerdiği kozmolojik dinamikleri belirlemek için, (5.1.5) denklemi boyutsuz nicelikler cinsinden yazılabilir.

$$1 = \frac{\kappa^2 \rho_m}{3FH^2} + \frac{\kappa^2 \rho_r}{3FH^2} + \frac{R}{6H^2} - \frac{f}{6FH^2} - \frac{\dot{F}}{HF} \quad (5.2.1)$$

(5.2.1) denklemindeki terimler

$$x_1 = -\frac{\dot{F}}{HF} \quad (5.2.2)$$

$$x_2 = -\frac{f}{6FH^2} \quad (5.2.3)$$

$$x_3 = \frac{R}{6H^2} \quad (5.2.4)$$

$$x_4 = \frac{\kappa^2 \rho_r}{3FH^2} \quad (5.2.5)$$

boyutsuz niceliklerle tanımlansın. Buradan hareketle yoğunluk parametreleri, bu boyutsuz parametreler cinsinden aşağıdaki gibi

$$\Omega_m = \frac{\kappa^2 \rho_m}{3FH^2} = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \quad (5.2.6)$$

$$\Omega_r = x_4 \quad (5.2.7)$$

$$\Omega_{DE} = x_1 + x_2 + x_3 \quad (5.2.8)$$

yazılabilir (Amendola et al., 2007).

İleriki kısımlarda yararlı olacak olan bazı fiziksel yorumlamalardan bahsedilebilir. t_i zamanında başlayıp t_f zamanında sona eren e-kat artışın sayısı $N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \ln a$ ile verilir. Dolayısıyla $dN = H dt$ eşitliği geçerlidir. Basitlik olarak, $dx/dN = f(x, y, N)$ ve $dy/dN = g(x, y, N)$ şeklinde iki tane birinci mertebeden diferansiyel denklem göz önünde bulundursun. Burada f ve g keyfi fonksiyonlardır. Bu denklemlere dinamik denklemler denir. Eğer f ve g fonksiyonları N terimini içermiyorsa, o zaman bu denklemlere otonom denklem sistemi denir (Klanova, 2013).

Bu eşitliklerden ve parametrelerden hareketle

$$\frac{dx_1}{dN} = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1x_3 + x_4 \quad (5.2.9)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = \frac{x_1x_3}{m} - x_2(2x_3 - 4 - x_1) \quad (5.2.10)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = -\frac{x_1 x_3}{m} - 2x_3(x_3 - 2) \quad (5.2.11)$$

$$\frac{dx_4}{dN} = x_4(x_1 - 2x_3) \quad (5.2.12)$$

şeklinde dört otonom denklem elde edilir. Bu denklemler belirli bir zaman aralığında yoğunluk parametrelerinin ölçek faktörüne göre nasıl değiştiğini göstermektedir.

İleriki kısımlarda kullanışlı olacak olan

$$m = \frac{d \ln F}{d \ln R} = \frac{R f_{,RR}}{f_{,R}} = \frac{\dot{F} R}{\dot{R} F} \quad (5.2.13)$$

$$r = -\frac{d \ln f}{d \ln R} = -\frac{R f_{,R}}{f} = \frac{x_3}{x_2} \quad (5.2.14)$$

nicelikleri tanımlanır. Burada m' in r' nin bir fonksiyonu olduğu açıkça görülebilir. Λ CDM modelinde $m = 0'$ dir. $0'$ dan daha fazla sapan m , daha dinamik karanlık enerji demektir.

Böyle bir sistemin etkili durum denklemi

$$\omega_{eff} \equiv -1 - 2\dot{H}/(3H^2) \quad (5.2.15)$$

formundadır. Bu denklem ise

$$\omega_{eff} = \frac{1 - 2x_3}{3} \quad (5.2.16)$$

ifadesine eşittir. Eğer $\tilde{\Omega}_X = \tilde{\Omega}_{DE}\omega_{DE} + \tilde{\Omega}_{rad}/3$ tanımlaması yapılırsa, ω_{eff} parametresi enerji yoğunlukları cinsinden

$$\omega_{eff} = \tilde{\Omega}_{DE}\omega_{DE} + \tilde{\Omega}_{rad}/3 \quad (5.2.17)$$

ile gösterilir (Amendola et al., 2007).

Kozmolojik dinamikleri elde edebilmek için burada $\rho_r = 0$ anlamına gelen $x_4 = 0$ varsayımı yapılacaktır. Çünkü Big Bang' den çok kısa bir zaman sonrası hariç, ışıınım kozmolojik evrim üzerinde etkili olamamıştır. Şimdi, $dx_i/dN = 0$ ile karakterize edilen sabit noktalar araştırılacaktır. Bir fonksiyonun veya bir dönüşümün sabit noktası, fonksiyon veya dönüşüm tarafından kendisine eşleştirilen noktadır. Dinamik bir sistemin final durumu, bu sistemin evrimini veren fonksiyonun sabit noktasına karşılık gelecek şekilde evrim geçirir. Sabit nokta ise, herhangi bir dinamik sistemin başlangıç koşullarını dikkate almaksızın bu sistemin evrimini inceleyen bir dizi fiziksel özelliktir. Başlangıç koşullarının tam olarak belirlenemediği bazı dinamik fiziksel durumlarda, böylesi çözümler sistemin evrimini ortaya koyar. Özellikle enflasyon veya yüksek boyutlu çekim gibi skaler alanların bulunduğu durumlarda, çekici çözümleri araştırmak oldukça yararlıdır.

(5.2.9) – (5.2.12) denklemlerinde $x_4 = 0$ yazılırsa, geriye kalan üç denklemden sırayla x_1 , x_2 ve x_3 ' e sıfır verilerek (r, m) düzlemindeki altı sabit nokta elde edilir. Bu sabit noktalar, $f(R)$ metrik formalizminde herhangi bir modelin kozmolojik dinamiklerini ve evrimini belirleyecektir. Gerekli işlemlerden sonra, herhangi bir $m(r)$ için böyle bir dinamik sistemin sabit noktaları

$$P_1: (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2) \quad (5.2.18)$$

$$P_2: (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0) \quad (5.2.19)$$

$$P_3: (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) \quad (5.2.20)$$

$$P_4: (x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 0) \quad (5.2.21)$$

$$P_5: (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3m}{1+m}, \frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)} \right) \quad (5.2.22)$$

$$P_6: (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)} \right) \quad (5.2.23)$$

şeklinde (Amendola et al., 2007). Bu bağlamda bazı $f(R)$ modellerinin kozmolojik dinamikleri birçok araştırmacı (Clifton and Barrow 2005; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Li and Barrow 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Bergliaffa 2006; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Fay et al., 2007b; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Amendola and Tsujikawa 2008; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; De Souza and Faraoni 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Goheer et al., 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Bazeia et al., 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Atazadeh and Sepangi 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Clifton 2008; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Evans et al., 2008; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Abdelwahab et al., 2008; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Goheer et al., 2009; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Paul et al., 2009; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Moldenhauer and Ishak 2009; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010) tarafından ayrıntılı olarak çalışılmıştır.

Şimdi ise bu sabit noktaların kararlılığı araştırılacaktır. Bunun için öncelikle, madde baskın dönem

$$\omega_{eff} = 0 \quad (5.2.24)$$

koşulu ile tanımlanır ve rölativistik olmayan akışkan mutlaka

$$\Omega_m = 1 \quad (5.2.25)$$

koşulunu sağlamalıdır (De Felice and Tsujikawa, 2010).

(2.3.3.2.3) denklemine göre hızlanma koşulunun olması için

$$\omega_{eff} < -\frac{1}{3} \quad (5.2.26)$$

koşulu gerçekleşmelidir. Daha önceki bölümlerde Λ CDM modeli için $\omega_{eff} = -1$ olduğundan ve phantom olmayan, yani $\omega_{eff} < -1$ olmayan bir hızlanma için, durum denkleminin $-1 < \omega_{eff} < -1/3$ olması gerektiğinden bahsedilmişti.

P_1 ve P_6 noktaları boyunca bu iki dönem elde edilmelidir. Bunun için (5.2.18) – (5.2.23) denklemlerindeki her bir noktanın x_1 , x_2 , x_3 değerleri (5.2.6) ve (5.2.16) denklemine konulursa

$$P_1: \quad \Omega_m = 0 \quad \omega_{eff} = -1 \quad (5.2.27)$$

$$P_2: \quad \Omega_m = 2 \quad \omega_{eff} = 1/3 \quad (5.2.28)$$

$$P_3: \quad \Omega_m = 0 \quad \omega_{eff} = 1/3 \quad (5.2.29)$$

$$P_4: \quad \Omega_m = 0 \quad \omega_{eff} = 1/3 \quad (5.2.30)$$

$$P_5: \quad \Omega_m = 1 - \frac{m(7 + 10m)}{2(1 + m)^2} \quad \omega_{eff} = -\frac{m}{1 + m} \quad (5.2.31)$$

$$P_6: \quad \Omega_m = 0 \quad \omega_{eff} = \frac{2 - 5m - 6m^2}{3m(1 + 2m)} \quad (5.2.32)$$

değerleri elde edilir. (5.2.24) koşulunun $m = 0$ için P_5 noktasında ve $m = -(5 \pm \sqrt{73})/12$ için P_6 noktasında sağlanabildiği görülmektedir, ancak P_6 noktası (5.2.25) rölativistik olmayan akışkan koşulunu sağlamaz. Bu ise, P_5 noktasının standart madde çağı için uygun olduğu anlamına gelir (Amendola et al., 2007).

$\omega_{eff} = -1$ ' e göre, $m = 1$ veya $m \rightarrow \pm\infty$ limiti alınarak P_1 ve hatta P_6 noktası için standart hızlanma belirlenebilir. Yani ya P_1 ya da P_6 noktaları geç zaman kozmik hızlanmasından sorumlu olabilir (De Felice and Tsujikawa, 2010). Bu ise herhangi bir geçerli karanlık enerji modelinin mutlaka madde baskın dönem anlamına gelen P_5 noktası civarında başlaması gerektiği ve hızlanma noktaları olan P_1 ya da P_6 noktalarına ulaşması anlamına gelir. Dolayısıyla bu üç noktadan başka noktaları analiz etmeye gerek yoktur.

$m(r) = -r - 1$ için olan x_2, x_3 yüzeyinin (5.2.9) – (5.2.11) sisteminin altuzayı olduğuna dikkat edilmelidir ve bu yüzden bu yüzey geçilemez. Bu durum r için

$$\frac{dr}{dN} = r(1 + m + r) \frac{\dot{R}}{HR} \quad (5.2.33)$$

denkleminde elde edilen r ve m' in tanımı kullanılarak görülebilir. Bu denklem $\dot{R}/HR$ ıraksak olmadığı sürece $m = -r - 1$ in $dr/dN = 0$ anlamına geldiğini açıkça göstermektedir. Bunun anlamı ise, (r, m) düzleminde $(-1, -1)$ noktalarından geçen bir doğru olan $m = -r - 1$ doğrusu boyunca sistemin evriminin belirlenmesidir. Zaten (5.2.14) denkleminin içine (5.2.22) ve (5.2.23) yerleştirilirse, P_5 ve P_6 noktalarının $m(r) = -r - 1$ çizgisi üzerinde olduğu görülür.

Bu sabit noktaların kararlılığını analiz etmek için yalnızca bu noktalar civarındaki zaman bağımlı lineer tedirginlikler $\delta x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 'i göz önünde bulundurmak yeterlidir (De Felice and Tsujikawa, 2010). Bunun için ise sadece hızlanarak genişlemeyi veren P_1 , P_5 ve P_6 noktaları dikkate alınsın.

(1) P_1 : de Sitter noktası

Bu noktanın zamana bağımlı lineer tedirginlikleri sonucu elde edilen denklemlerin çözümünden kararlılık için gerekli koşulun

$$0 < m_1 \leq 1 \quad (5.2.34)$$

olduğu görülür. Burada $m_1 = m(r = -2)$ P_1 noktasındaki m' in değeridir (Amendola et al., 2007).

(5) P_5 : Ölçeklendirme çözümleri

P_5 noktası $a \propto t^{2/3}$ ve $\Omega_m = 1$ e sahip olan standart madde dönemini temsil eder. (5.2.31) eşitliğinde, $\Omega_m = 1$ ve $\omega_{eff} = 0$ değerlerini verecek olan m değeri, aynı zamanda standart madde döneminin var olması için gerekli olan koşul olarak dikkate alınır. Eğer

$$m(r = -1) = 0 \quad (5.2.35)$$

eşitliği varsa, P_5 noktasının böyle bir standart madde dönemine sahip olduğu söylenebilir.

Madde döneminin varlığı için kriter

$$m(r \leq -1) > 0 \quad , \quad m'_5(r \leq -1) > -1 \quad (5.2.36)$$

ile verilir. Burada $m'_5 = \frac{dm}{dr}(r_5)$ ' dir. Aynı zamanda (5.2.35) koşulunun da gerekli olduğuna dikkat edilmelidir (Amendola et al., 2007).

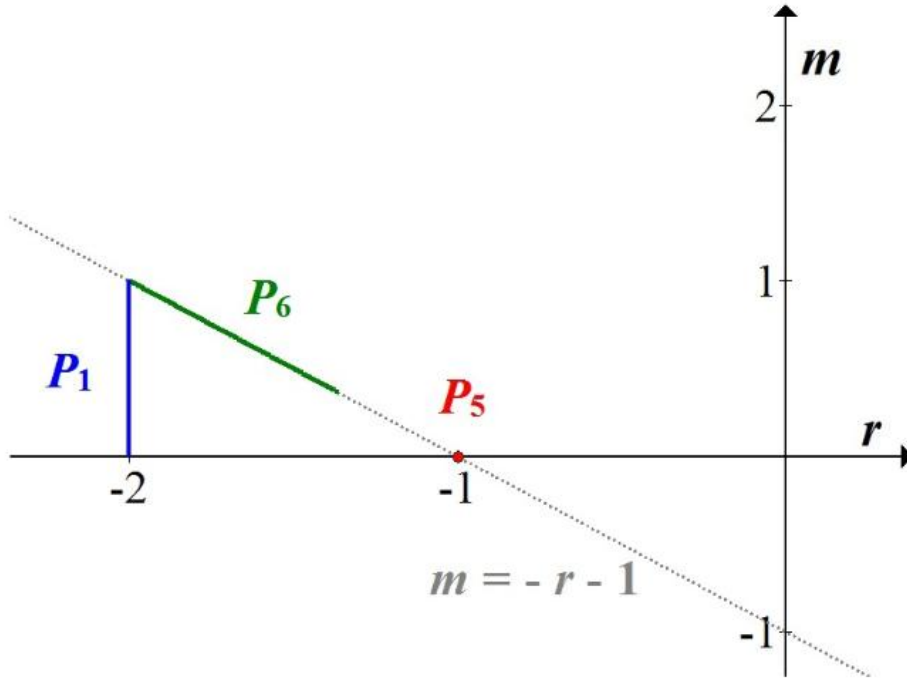
(6) P_6 : Eğriliğin baskın olduğu nokta

Bu durum, m değerine bağlı olan etkili durum denkleminde sahip olan eğri baskınlığına karşılık gelmektedir. Gerekli işlemler sonucunda bu sınırlamalara uyan kararlılık ve hızlanma koşulunun

$$\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) < m < 1\right), \quad \dot{m}_6 < -1 \quad (5.2.37)$$

olduğu ortaya çıkar (Amendola et al., 2007).

Şekil 5.1 (m, r) düzleminde gerekli koşullara sahip olan P_1 , P_5 ve P_6 sabit noktalarını göstermektedir.



Şekil 5. 1: (m, r) düzlemindeki P_1 , P_5 ve P_6 sabit noktaları. Buna göre, herhangi bir geçerli $f(R)$ metrik karanlık enerji modeli mutlaka madde baskın dönem anlamına gelen P_5 noktası civarında başlamalı ve hızlanma noktaları olan P_1 ya da P_6 noktalarına ulaşmalıdır (Klakova, 2013).

Tüm bu sonuçlar göz önüne alınacak olursa, olası iki kozmolojik model sınıfı elde edilir (De Felice and Tsujikawa; 2010):

A Sınıfı:

$P_5(r \approx -1, m \approx 0)$ ' da başlıyor

$P_1(r = -2, 0 < m \leq 1)$ ' in içinden geçiyor

B Sınıfı:

$P_5(r \approx -1, m \approx 0)$ ' da başlıyor

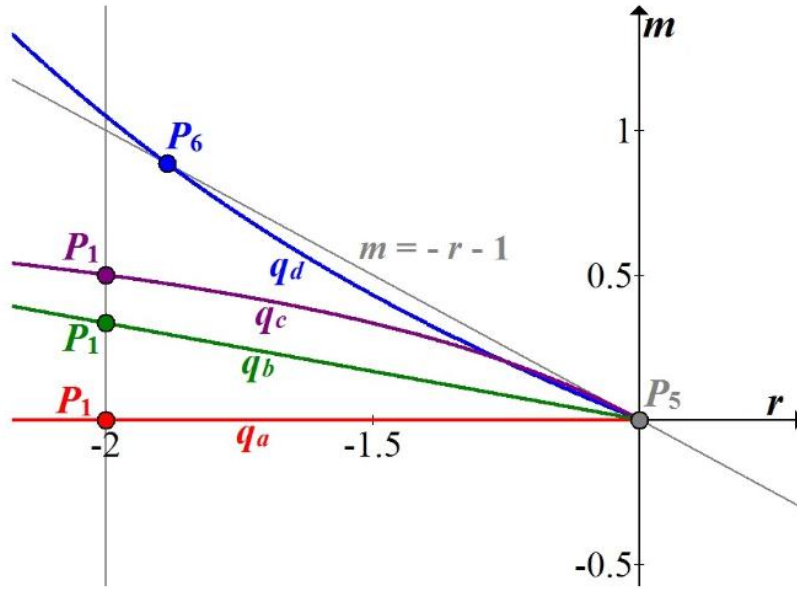
$P_6(m = -r - 1), \frac{\sqrt{3}-1}{2} < m < 1$ ' in içinden geçiyor

Sonuç olarak, (5.1.1) eşitsizliğinden dolayı geçerli $f(R)$ karanlık enerji modellerinin, yukarıda bahsedilen argümanlar ile tutarlı olan $m > 0$ koşulunu sağlaması gereklidir.

En basit model olan Λ CDM modelinin $m = 0$ ' a karşılık geldiğinden bahsedilmişti. Λ CDM modeli A Sınıfı içerisindedir:

$$f = R - 2\Lambda \quad (5.2.38)$$

ve Şekil 5.2' de q_a çizgisi ile temsil edilmektedir (Klanova, 2013).



Şekil 5.2: (m, r) düzlemindeki yörüngeler. $q_a: m = 0$ yani Λ CDM modeli; $q_b: m = -\frac{1}{3}(r+1)$ yani $f(R) = (R^b - \Lambda)^c$ modeli; $q_c: m = \frac{r+1}{r}$ yani $f = R - \alpha R^n$ modeli; $q_d: m = -0.15(r+1)(r^2 + r + 5)$ yani $m(r) = -c(r+1)(r^2 + ar + b)$ modeli (Klanova, 2013).

Λ CDM modelinin genelleştirilmiş bir diğer sınıfı A modelidir (Amendola et al., 2007):

$$f = (R^b - \Lambda)^c \quad (5.2.39)$$

burada b ve c keyfi parametrelerdir. Bu model Şekil 5.2' de q_b tarafından temsil edilmektedir.

A sınıfına giren bir başka model (Starobinsky, 1980)

$$f = R - \alpha R^n, \quad \alpha > 0, \quad 0 < n < 1 \quad (5.2.40)$$

dikkate alınsın. Daha önceden bahsedilen bu model aynı zamanda Starobinsky tarafından önerilen ilk enflasyon modelidir. Bu model Şekil 5.2' de q_c tarafından temsil edilmektedir.

B sınıfına örnek olarak

$$m(r) = -c(r + 1)(r^2 + ar + b) \quad (5.2.41)$$

modeli verilebilir (Amendola and Tsujikawa, 2008). Burada a ve c keyfi parametrelerdir ve a pozitifdir. Bu model Şekil 5.2' de q_d çizgisi ile temsil edilmektedir.

Hem kozmolojik hem de yerel ölçeklerde geçerli olan iki $f(R)$ modelinden birincisi Hu ve Sawicki tarafından önerilmiştir (Hu and Sawicki, 2007)

$$f(R) = R - \mu R_c \frac{(R/R_c)^{2n}}{(R/R_c)^{2n} + 1} \quad (5.2.42)$$

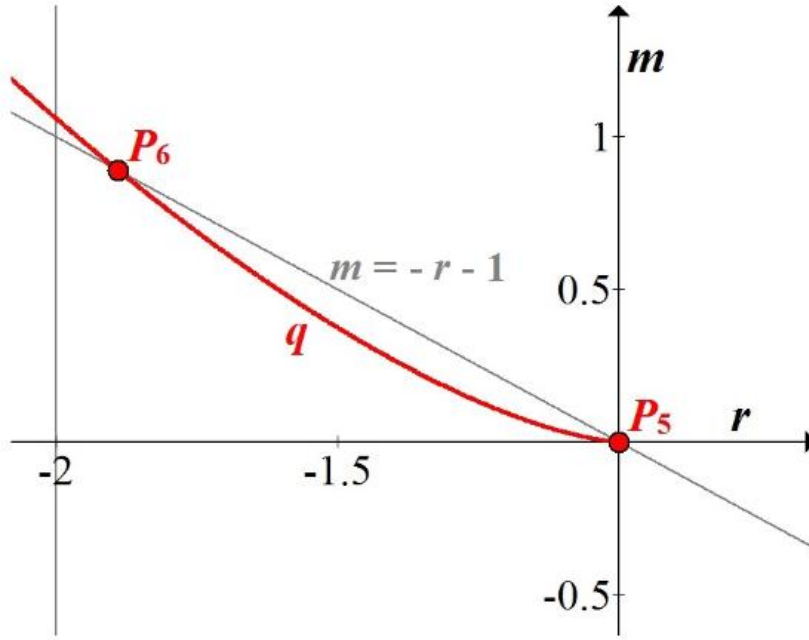
Diğeri ise Starobinsky tarafından önerilmiştir (Starobinsky, 2007)

$$f(R) = R - \mu R_c (1 - (1 + R^2/R_c^2)^{-n}) \quad (5.2.43)$$

burada n , μ ve R_c pozitif sabitlerdir. Bu iki model $f(R)$ metrik formalizmindedir. $R \gg R_c$ için her iki modelle beraber

$$f(R) = R - \mu R_c (1 - (R_c/R)^{2n}) \quad (5.2.44)$$

yaklaşımı elde edilir. Bu eğrinin Şekil 5.3' te q çizgisi tarafından temsil edildiği görülmektedir. q çizgisinin P_6 noktasını geçecek şekilde hızlandığı görülmektedir, bu yüzden bu model B Sınıfı' na dahildir. Bununla beraber, evrenin ardalan genişleme tarihi kullanılarak (5.2.42) ve (5.2.43) modelleri için gözlemsel sınırlamalar Dev et al., 2008; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Martinelli et al., 2009; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Cardone et al., 2009; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Ali et al., 2010; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010 tarafından çalışılmıştır.



Şekil 5.3: (m, r) düzlemindeki q : $m = 3 \cdot 2^{-2/3}(-r - 1)^{3/2}$ yörüngesi (Klanova, 2013).

5.3. $f(R)$ Metrik Çekiminde Karanlık Enerjinin Durum Denklemi

$f(R)$ modellerinde karanlık enerjiyi anlamak için etkili durum parametresi tanımlanmalıdır ve bu parametrenin evrenin hızlanarak genişlemesini verebilmesi için $\omega_{eff} < -1/3$ olmalıdır. Bunun için de $f(R)$ çekiminde karanlık enerjinin durum denklemi tanımlanmalıdır.

SN Ia gözlemleri ile uyumlu $f(R)$ modellerini karşılaştırmak için (3.1.1.9) ve (3.1.1.11) denklemleri

$$3AH^2 = \kappa^2(\rho_m + \rho_r + \rho_{DE}) \quad (5.3.1)$$

$$-2A\dot{H} = \kappa^2[\rho_m + (4/3)\rho_r + \rho_{DE} + P_{DE}] \quad (5.3.2)$$

şeklinde yeniden yazılsın. Burada A sabittir ve

$$\kappa^2 \rho_{DE} \equiv (1/2)(FR - f) - 3H\dot{F} + 3H^2(A - F) \quad (5.3.3)$$

$$\kappa^2 P_{DE} \equiv \ddot{F} + 2H\dot{F} - (1/2)(FR - f) - (3H^2 + 2\dot{H})(A - F) \quad (5.3.4)$$

eşitlikleri yine yeniden düzenlenmiş Friedmann denklemlerinden ve (5.1.5) ve (5.1.6) denklemlerinden yazılabilir. Daha önceden baryonik madde ve eğrilik için olduğu gibi, yine karanlık enerjinin basınç ve enerji yoğunluklarının

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + P_{DE}) = 0 \quad (5.3.5)$$

şeklindeki süreklilik denklemini sağlaması gereklidir. (5.3.3) ve (5.3.4) denklemlerinden karanlık enerjinin durum denklemi

$$\omega_{DE} = -1 + \frac{1}{f'} \frac{Rf'' + \dot{R}(f'''\dot{R} - 2Hf'')}{(f'R - f)/2 - 3Hf''\dot{R}} \quad (5.3.6)$$

şeklinde bulunur. Buna göre, geç zaman hızlanmasını açıklayan herhangi bir $f(R)$ teorisinin durum denklemi -1 ' den küçük olmalıdır (Karakatsanis, 2010).

6. $f(R)$ TEORİ ÜZERİNDEKİ YEREL SINIRLAMALAR

Çekime yapılabilecek en basit düzenleme, minimum olmayan bir şekilde madde ile birleşen bir skaler alanın tanıtılmasıdır. Skaler alanlar fizikte uzun bir süredir vardır, ancak şu ana dek bu skaler alanların hiç birisi keşfedilememiştir. Kozmolojide, evrendeki hemen hemen kütsüz olan skaler alanlara dair kanıtlar artmaktadır. Bu kanıtlar, şu anki enerjinin %73' ünün negatif basınca sahip olan karanlık enerji bileşeninden meydana geldiğini öneren süpernova ışınım-uzaklık ölçümlerinden (Perlmutter, 1999; Winther' den, 2010; Riess et al., 1999; Winter' dan, 2010) CMB anizotropisine (Spergel, 2003; Winther' den, 2010) kadar bir çok gözlemden oluşmaktadır. Bununla beraber, kütsüz skaler alanlar sicim ve süperçekim teorilerinde de bulunmaktadır. Ancak, bu kütsüz alanlar genel olarak doğrudan gravitasyonel kuvvete sahip olan madde ile birleşir ve bu yüzden eşdeğerlik prensibinin kabul edilemez derecedeki ihlaline neden olurlar.

Eğer bir ϕ skaler alanı rölativistik olmayan madde ile birleşirse, bu durum deneysel olarak kısıtlanabilen bir beşinci kuvvet etkileşimine neden olur. Bu gibi durumlarda yerel çekim deneyleri ile uygunluk için baryonlar ile böylesi güçlü bir etkileşim ortadan kaldırılmalıdır. Bu, chameleon mekanizması denilen bir mekanizma altında beşinci kuvveti saklama yoludur (Khoury and Weltman, 2004a; 2004b; Tsujikawa' dan, 2010) . Bu mekanizmada alanın kütlesi kendisini çevreleyen ortamdaki madde yoğunluğuna bağlı olarak değişir. Eğer alan yüksek yoğunluklu bölgede yeterince kütleyle sahipse, küresel simetrik bir cisim kendi yüzeyi etrafında "ince kabuk" ' a sahip olabilir ve dolayısıyla madde ile alan arasındaki etkili birleşme cismin dışında ortadan kaldırılabilir.

6.1. Chameleon Mekanizmasına Sahip Olan $f(R)$ Metrik Çekimi

Einstein sisteminde etki

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - V(\phi) \right] + S_m(e^{2Q\kappa\phi} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi_m) \quad (6.1.1)$$

formundadır. Burada

$$\phi = -\frac{1}{2Q\kappa} \ln[1 + f(R)] \quad (6.1.2)$$

$$V(\phi) = \frac{Rf_R(R) - f(R)}{2\kappa^2[1 + f_R(R)]^2} \quad (6.1.3)$$

$$\tilde{R} = R[\tilde{g}_{\mu\nu}] \quad (6.1.4)$$

dır.

Burada (6.1.3) denklemindeki V potansiyeli, ϕ skaler alanının, Ricci skaleri R ise (6.1.2) denklemindeki ϕ 'nin bir fonksiyonudur. S_E etkisindeki skaler alan madde etkisi S_m 'deki Jordan sistemi metriği $g_{\mu\nu}$ aracılığıyla madde ile ilave bir birleşim kazanır. Bu ilave birleşim chameleon mekanizmasının anahtarıdır. Madde yoğunluğu ortamına bağlı olan, farklı çevrelerde farklı şekilde davranan ϕ skaler alanını ortaya çıkarır.

S_E etkisine sahip olan $f(R)$ chameleon çekimini çalışmak için, kürenin içinde ve dışında sabit ancak farklı kütle yoğunluğuna sahip olan, küresel simetrik bir sistem dikkate alınsın. $\rho^*(r)$ kütle yoğunluğu dağılımına sahip olan küresel simetrik bir uzay-zaman için alan denklemi

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{\partial V_{eff}(\phi, \rho^*)}{d\phi} \quad (6.1.5)$$

şeklinde verilir. Burada $\phi(r)$, sistemin merkezinden olan uzaklığa bağlı olan bir skaler alandır ve etkili potansiyel V_{eff} ise

$$V_{eff}(\phi, \rho^*) \equiv V(\phi) + e^{Q\kappa\phi} \rho^* \quad (6.1.6)$$

şeklinde tanımlanır. Kütle yoğunluğu $\rho^*(r)$ Einstein sisteminde korunan bir niceliktir. $\rho^* = e^{3Q\kappa\phi}$ ilişkisi sayesinde, bu nicelik S etkisine sahip olan $f(R)$ çekiminde kütle yoğunluğu ρ ile ilgilidir.

Güneş sistemi deneylerinden gelen sınırlamaları sağlamak için, etkili potansiyel V_{eff} bir minimuma sahip olmalı ve ρ^* kütle yoğunluğu, (Dünya'nın

içinde ($\rho_{\oplus}^* \approx 5.5 \text{ g/cm}^3$), atmosferde ($\rho_{atm}^* \approx 10^{-3} \text{ g/cm}^3$) ve atmosferin dışında ($\rho_{uzay}^* \approx 10^{-24} \text{ g/cm}^3$) bölgelerini de kapsayacak şekilde) Güneş sistemine eşit olduğu zaman, minimum civarında olmalıdır. ϕ_m minimum potansiyelin konumu ve m ise ϕ 'nin kütlesi olmak üzere

$$\partial_{\phi} V_{eff}(\phi_m, \rho^*) = 0 \quad (6.1.7)$$

$$m^2(\rho^*) \equiv \partial_{\phi}^2 V_{eff}(\phi_m, \rho^*) \quad (6.1.8)$$

eşitlikleri geçerli olmalıdır. Bu iki temel koşul

(1) ϕ_m 'in varlığı

(2) $m^2 > 0$

(3) $\rho^* \approx \rho_{\oplus}^*, \rho_{atm}^*, \rho_{uzay}^*$ olduğunda, büyük m (yani kısa compton dalgaboyu)

gereklilikleri sayesinde yeniden düzenlenir.

r_s yarıçapına sahip olan ve içinde $\rho_{iç}^*$, dışında ise $\rho_{dış}^*$ olan birbirinden farklı ancak sabit kütle yoğunluklarına sahip olan bir küre dikkate alınsın. ϕ_{merkez} ve ϕ_{sonsuz} minimum potansiyellerin konumları, $m_{iç}$ ve $m_{dış}$ kütleler, M_s kürenin toplam kütlesi ve Φ_s ise r_s 'deki (yani kürenin yüzeyindeki) Newtonian kütlesi olmak üzere

$$\partial_{\phi} V_{eff}(\phi_{merkez}, \rho_{iç}^*) = 0 \quad , \quad \partial_{\phi} V_{eff}(\phi_{sonsuz}, \rho_{dış}^*) = 0 \quad (6.1.9)$$

$$m_{iç}^2 \equiv \partial_{\phi}^2 V_{eff}(\phi_{merkez}, \rho_{iç}^*) \quad , \quad m_{dış}^2 \equiv \partial_{\phi}^2 V_{eff}(\phi_{sonsuz}, \rho_{dış}^*) \quad (6.1.10)$$

$$M_s \equiv \frac{4\pi}{3} r_s^3 \rho_{iç}^* \quad , \quad \Phi_s \equiv \frac{\kappa^2}{8\pi} \frac{M_s}{r_s} \quad (6.1.11)$$

şeklinde yazılabilir. (6.1.5) denkleminin çözümü olan, alan profili ϕ

$$\begin{cases} \phi(r < r_s) \cong \phi_{merkez} \\ \phi(r > r_s) \cong -\left(\frac{Q\kappa}{4\pi}\right)\left(\frac{3\Delta r_s}{r_s}\right)\frac{M_s e^{-m_{dış}(r-r_s)}}{r} + \phi_{sonsuz} \end{cases} \quad (6.1.12)$$

şeklindedir. İnce kabuk koşulu ise

$$0 < \frac{\Delta r_s}{r_s} \equiv \frac{\kappa(\phi_{sonsuz} - \phi_{merkez})}{6Q\Phi_s} \quad (6.1.13)$$

formuna sahiptir.

İnce kabuk parametresi $\Delta r_s/r_s$ sırasıyla $\kappa\phi_{sonsuz} - \kappa\phi_{merkez}$ ve ϕ tarafından uyarılan beşinci kuvvetin şiddeti, $\Phi_s - \Phi_{sonsuz}$ (burada $\Phi_{sonsuz} \equiv \Phi(r = \infty) \equiv 0$) Newtonian gravitasyonel kuvvetinin şiddeti ile ilgili olan iki potansiyelin oranıdır. Bu yüzden, ince kabuk koşulu Newtonian çekimi ile karşılaştırıldığında beşinci kuvvetin zayıflığını gerektirmektedir.

(6.1.12) denklemindeki ϕ profili $f(R)$ fonksiyonu ve $\rho_{iç}^*$ ve $\rho_{dış}^*$ kütle yoğunlukları verildiği zaman belirlenen ince kabuk parametresi $\Delta r_s/r_s$ ' ye bağlıdır. Bu nedenle, beşinci kuvvet için Güneş sistemi sınırlamaları $\Delta r_s/r_s$ ' yi ve bu yüzden de $f(R)$ ' yi sınırlayabilir (Gu and Lin, 2011).

6.2. $f(R)$ Çekiminde İnce Kabuk Parametresi

İnce kabuk parametresi $\Delta r_s/r_s$ ve $f(R)$ fonksiyonu arasındaki ilişki sayesinde, ince kabuk parametresi sınırlamasını veren Güneş sistemi çekimi testlerinden genel $f(R)$ üzerindeki sınırlamalar elde edilir. Ayrıca $f(R)$ ve $m_{iç}$ ile $m_{dış}$ kütleleri arasındaki ilişkinin türetilmesi için, $m_{iç}^2 > 0$ ve $m_{dış}^2 > 0$ minimum potansiyellerin varlığının gerekliliği de $f(R)$ ' nin temel koşuludur.

İnce kabuk parametresi, (6.1.9) denklemini sağlayan ϕ_{merkez} ve ϕ_{sonsuz} minimum potansiyellerin konumları sayesinde $f(R)$ ile ilgilidir. Güneş sisteminde Genel Rölativite' den sapma küçük olmalıdır, bu durum matematiksel olarak $|f| \ll R$ ve $|f_R| \ll 1$ eşitsizlikleri ile verilir. Bu (6.1.9) eşitliği

$$\partial_\phi V_{eff} \cong \frac{1}{\sqrt{6\kappa}} \left[(R - \kappa^2 \rho^*) + \left(2f - 3Rf_R + \frac{1}{2}f_R \kappa^2 \rho^* \right) \right] \quad (6.2.1)$$

$$\partial_\phi^2 V_{eff} \cong \left(\frac{1}{3f_{RR}} - R + \frac{1}{6} \kappa^2 \rho^* \right) + \left(-\frac{4}{3} f + \frac{7}{3} R f_R - \frac{1}{12} f_R \kappa^2 \rho^* \right) \quad (6.2.2)$$

şeklinde yazılır. ϕ_m minimum potansiyelin konumu $\partial_\phi V_{eff}(\phi_m, \rho^*) = 0$ ile belirlenir, bu yüzden

$$[R + 2f - 5R f_R/2]_{\phi_m} \cong \kappa^2 \rho^* \quad (6.2.3)$$

olmalıdır. Daha düşük mertebe için

$$R(\phi_m) \cong \kappa^2 \rho^* \quad (6.2.4)$$

dır. Dolayısıyla, bu yaklaşım altında

$$\phi_m \cong -\frac{1}{2Q\kappa} f_R(R \cong \kappa^2 \rho^*) \quad (6.2.5)$$

$$m^2(\rho^*) = \partial_\phi^2 V_{eff}(\phi_m, \rho^*) \cong \left[\left(\frac{1}{3f_{RR}} - \frac{5}{6} R \right) + \left(-f + \frac{11}{6} R f_R \right) \right]_{R \cong \kappa^2 \rho^*} \quad (6.2.6)$$

eşitliklerine ulaşılır ve $f(R)$ ile ince kabuk parametresi arasındaki ilişki

$$\frac{\Delta r_s}{r_s} \cong -\frac{f_R(\kappa^2 \rho_{dış}^*) - f_R(\kappa^2 \rho_{iç}^*)}{2\Phi_s} \quad (6.2.7)$$

şeklinde olur.

Erken zamanlarda Genel Rölativite' den küçük sapmayı gerektiren büyük patlama, çekirdek sentezlenmesi ve kozmik mikrodalga ardalan gözlemlerinden dolayı, geçerli $f(R)$ modellerinin çoğunda, $R_1 \ll R_2$ olduğu zaman $|f_R R_1| \gg |f_R R_2|$ olur, bunun sonucu olarak da geç zamanlarda Genel Rölativite' den belirgin bir sapmaya sahip olan kozmik hızlanma meydana gelir. Bu durumda;

$$\Delta r_s/r_s \cong -f_R(\kappa^2 \rho_{dış}^*)/2\Phi_s \quad \rho_{dış}^* \ll \rho_{iç}^* \quad \text{için} \quad (6.2.8)$$

eşitsizliği geçerli olur. $\rho_{dış}^* \ll \rho_{iç}^*$ koşulu bir çok Güneş sistemi deneyinde sağlanmıştır (Gu and Lin, 2011).

6.3. $f(R)$ Çekimindeki Güneş Sistemi Deneyleri

Güneş sistemi sınırlamaları uyarlamak için, (6.1.13) denklemindeki ince kabuk koşulu Güneş sisteminde sağlanması gereklidir. Bu koşul $V_{eff}(\phi, \rho^*)$ minimum etkin potansiyelin varlığını ve $|f_R|$ 'nin küçüklüğünü gerektirmektedir.

(6.2.6) denkleminden V_{eff} minimumunun varlığı anlamına gelen yani $m^2 > 0$ eşitsizliğinin sonucu olarak

$$0 < R f_{RR} < 2/5 \quad R \cong \kappa^2 \rho^* \geq 3 \times 10^5 H_0^2 \quad (6.3.1)$$

elde edilir. Burada, $10^{-24} g/cm^3$ ' den (uzay) $5.5 g/cm^3$ ' e (Dünya) kadar değişen kütle yoğunluğu ρ^* a sahip olan ve buna karşılık 3×10^5 ' den $\mathcal{O}(10^{30})$ ' a kadar (yani 10^{30} mertebesi) değişen R/H_0^2 ' ye sahip olan, Güneş sistemi testlerindeki çeşitli ortamlar dikkate alınmıştır.

İnce kabuk parametresinin üst sınırı $(\Delta r_s/r_s)_{max}$, (6.1.13) ve (6.2.7) denklemleri aracılığı ile f_R için

$$0 < -f_R < 2\Phi_s \cdot (\Delta r_s/r_s)_{max} \ll \Phi_s \quad R \cong \kappa^2 \rho_{dış}^* \quad (6.3.2)$$

şeklinde bir üst sınır belirler. Dolayısıyla Güneş ve Dünya' yı kapsayan Güneş sistemi deneylerinden elde edilen $(\Delta r_s/r_s)_{max}$ üst sınırı dikkate alınacaktır.

Güneş sisteminde post Newtonian parametresinin deneysel testleri ile

$$(\Delta r_s/r_s)_{max} = 1.15 \times 10^{-5} \quad (6.3.3)$$

değeri elde edilmiştir (Will, 2006, Gu and Lin' den, 2011; Capozziello and Tsujikawa, 2008, Gu and Lin' den, 2011). Güneş için $\Phi_\odot \cong 2.12 \times 10^{-6}$ ve $\rho_{dış}^* \cong \rho_{uzay}^* \cong 10^{-24} g/cm^3$ ile $R/H_0^2 \approx 3 \times 10^5$ kullanıldığında

$$-5 \times 10^{-11} < f_R < 0 \quad (6.3.4)$$

elde edilir.

Dünya için yapılan deneylerde ise durum biraz daha karmaşıktır. Bu durumda küresel simetrik sistem Yer, atmosfer ve uzay şeklinde üç bölgeye ayrılır ve bu bölgelerin kütle yoğunlukları

$$\rho^*(r) = \begin{cases} \rho_{\oplus}^* \cong 5.5 \text{ g/cm}^3 & 0 < r < r_{\oplus} \\ \rho_{atm}^* \cong 10^{-3} \text{ g/cm}^3 & r_{\oplus} < r < r_{atm} \\ \rho_{uzay}^* \cong 10^{-24} \text{ g/cm}^3 & r > r_{atm} \end{cases} \quad (6.3.5)$$

şeklindedir. Burada $r_{\oplus} \cong 6.4 \times 10^3 \text{ km}$ ' dir ve atmosferin kalınlığı $\Delta d_{atm} = r_{atm} - r_{\oplus} \cong 10 - 100 \text{ km}$ ' dir. Bu değerlere göre

$$\frac{\Delta r_{atm}}{r_{atm}} \equiv \frac{\kappa(\phi_{uzay} - \phi_{atm})}{6Q\Phi_{atm}} \ll 1 \quad , \quad \Phi_{atm} \equiv \frac{1}{6}\kappa^2\rho_{atm}^*r_{atm}^2 \quad (6.3.6)$$

şeklindeki ince kabuk koşulunun sağlanması ile, skaler alan potansiyeli (Khoury and Weltman, 2003, Gu and Lin' den, 2011)

$$\phi(r) \cong \begin{cases} \phi_{\oplus} & 0 < r < r_{\oplus} \text{ için} \\ \phi_{atm} & r_{\oplus} < r < r_{atm} \text{ için} \\ -\left(\frac{Q\kappa}{4\pi}\right)\left(\frac{3\Delta r_{\oplus}}{r_{\oplus}}\right)\frac{M_{\oplus}e^{-m_{uzay}(r-r_{atm})}}{r} + \phi_{uzay} & r > r_{atm} \text{ için} \end{cases} \quad (6.3.7)$$

ve ince kabuk parametresi

$$\frac{\Delta r_{\oplus}}{r_{\oplus}} \equiv \frac{\kappa(\phi_{uzay} - \phi_{atm})}{6Q\Phi_{\oplus}} \ll 1 \quad , \quad \Phi_{\oplus} \equiv \frac{1}{6}\kappa^2\rho_{\oplus}^*r_{\oplus}^2 \quad (6.3.8)$$

şeklindedir. Burada $\phi_{\oplus}$, ϕ_{atm} ve ϕ_{uzay} sırasıyla üç bölgedeki etkili potansiyel V_{eff} minimumunun konumunu belirtmektedir, $M_{\oplus} \cong 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ dünyanın kütlesi ve $\Phi_{\oplus} \cong 7 \times 10^{-10}$ ile $\Phi_{atm} \cong 10^{-13}$ Newtonian potansiyelleridir. (6.3.6) denklemindeki ince kabuk koşulu $\Delta r_{\oplus}/r_{\oplus} \ll 1$ doğrudan sağlanır. $i = \oplus, atm$ için $0 < \Delta r_i/r_i < (\Delta r_i/r_i)_{max} \ll 1$ şeklinde olan ince kabuk parametresinin deneysel sınırları $|f_R|$ ' ye

$$0 < -f_R(\kappa^2 \rho_{uzay}^*) < 2\Phi_i \cdot (\Delta r_i / r_i)_{max} \ll \Phi_i, \quad i = \oplus, atm \quad (6.3.9)$$

şeklinde bir üst sınır verir dolayısıyla burada $\rho_{atm}^* \gg \rho_{uzay}^*$ için $|f_R(\kappa^2 \rho_{atm}^*)| \ll |f_R(\kappa^2 \rho_{uzay}^*)|$ eşitsizliği geçerlidir.

Asıl deneysel sınır, atmosferin ince bir kabuğa sahip olması gerektiğinden elde edilir, yani ince kabuğun kalınlığı atmosferin kalınlığından daha küçük olmalıdır: $0 < \Delta r_{atm} / r_{atm} < \Delta d_{atm} / r_{atm}$. Atmosferin kalınlığı $\Delta d_{atm} \cong 50 \text{ km}$ alınırsa $\Delta d_{atm} / r_{atm} \cong 8 \times 10^{-3}$ olur ve bu durumda, f_R üzerinde oldukça sıkı bir sınırlama elde edilir

$$-10^{-15} \leq f_R < 0 \quad (6.3.10)$$

burada $R/H_0^2 \approx 3 \times 10^5$ alınmıştır.

Sonuç olarak, Güneş sistemindeki ince kabuk koşulundan dolayı (6.3.1) denklemindeki $R f_{RR}$ üzerindeki sınırlama ve sabit olmayan $f(R)$ için ise (6.3.10) denkleminde $|f_R|$ üzerinde güçlü üst sınırı elde edilmiştir (Gu and Lin, 2011).

$f(R)$ çekimi üzerindeki yerel ve deneysel sınırlamalar Olmo, 2005a; 2005b; Faraoni, 2006b; Erickcek et al., 2006; Chiba et al., 2007; Navarro and Acoleyen, 2007; Faulkner et al., 2007; Amendola and Tsujikawa, 2008; Hu and Sawicki, 2007; Capozziello and Tsujikawa, 2008; Brax et al., 2008; Dev et al., 2008; Kainulainen et al., 2007; Kainulainen and Sunhede, 2008; Olmo, 2007b; Zhang 2007; Cembranos, 2006; Zakharov et al., 2006; Jin et al., 2007; Baghran et al., 2007; Ruggiero and Iorio, 2007; Gerard, 2007; Shao et al., 2006; Capozziello et al., 2007b; Multamaki and Vilja, 2008; Hui et al., 2009; Bisabr, 2010 tarafından çalışılmıştır.

Literatürde hem kozmolojik hem de yerel çekim testlerinden başarıyla geçen bir dizi $f(R)$ teorisi çalışılmıştır. Bunlar Amendola et al., 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Li and Barrow, 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Amendola and Tsujikawa, 2008; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Hu and Sawicki, 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Starobinsky, 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Appleby and Battye, 2007; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Tsujikawa, 2008; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Deruelle et al.,

2008; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Cognola et al., 2008; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010; Linder, 2009; De Felice and Tsujikawa' dan, 2010 olarak sıralanabilir.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

İlk olarak alternatif çekim teorileri, Genel Rölativite ile kuantum teorisini uyumlu hale getirmek amacıyla Einstein alan denklemlerine yapılan yeniden düzenlemeler sonucunda ortaya çıkmıştır. Bu teorilerden birisi de $f(R)$ teorileridir. $f(R)$ teorilerinde evrenin geç zaman hızlanması kozmolojik sabite gerek duymadan geometrik bileşenler sayesinde açıklanmaya çalışılmaktadır. Bu teorilerde geometrik kısımda yapılan düzenlemeler sonucunda alan denklemlerinin boyutu artmakta, bu da madde kısmında skaler alanların ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Gerekli skaler alanların henüz keşfedilememiş olması $f(R)$ teoriler için önemli bir eksiklik olarak görülmektedir.

$f(R)$ teorileri metrik, Palatini ve metrik-affine formalizmi olarak üç farklı gösterime sahiptir. Literatürde en çok çalışılan gösterim metrik formalizmi olduğu için burada da metrik formalizmi üzerinde yapılan analizler üzerinde durulmuştur. Günümüz evrenini en iyi şekilde ifade eden metrik FRW metriği olduğu için, $f(R)$ metrik formalizmi çerçevesinde FRW metriği çözümleri incelenmiştir. Ortaya çıkan alan denklemlerinin fiziksel olarak anlam ifade edebilmesi için $f(R)$ modellerine gerek vardır. Bu bağlamda literatürde $f(R) \propto R^n$ ve $f(R) \propto R^{-n}$ modelleri öne çıkmaktadır. Modellerde bulunan bazı serbest parametreler durum denkleminin hızlanarak genişlemeyi verebilmesi için SN Ia, BAO, yaş testi gibi bazı gözlemsel nicelikler kullanılarak sınırlandırılmıştır ve ancak bu modeller böylesi sınırlamalar altında geçerli olabilmektedir.

$f(R)$ teoriler Jordan konformal sistemi adı verilen sistem üzerine kurulmuştur ancak bazı dönüşümler ile Einstein konformal sistemine dönüştürülebilmektedir. Farklı sistemlerde ifade edilen teorilerin fiziksel ve matematiksel sonuçları da farklı olmaktadır. Bu çalışmalarda $f(R)$ teorideki korunum kanunları her iki sistemin de ayrı ayrı fiziksel olduğu varsayımı altında incelenip sonuçları ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar ile Genel Rölativite' deki korunum kanunları kıyaslanmıştır. Einstein sistemi ile Jordan sisteminin aynı fiziksel süreçlere uygulandığı zaman ortaya çıkan farklılıklar incelenmiştir.

Matematiksel olarak sonsuz sayıda $f(R)$ teori elde etmek mümkün olduğundan dolayı, bu teorilerin fiziksel olarak geçerli olabilmesi için sınırlandırılması gereklidir. Kozmolojik açıdan herhangi bir $f(R)$ teorisinin geçerli olabilmesi için madde döneminin var olması ve geç zaman hızlanmasını

verebilmesi gereklidir. Bunu elde edebilmek için, $f(R)$ metrik teorisinin de Sitter noktasını, madde döneminin varlığını ve geç zaman hızlanmasını veren sabit noktaları ve bu sabit noktaların kararlılıkları araştırılmalıdır. Bu bağlamda, bazı $f(R)$ modellerinin bu sabit noktaların gerekliliklerini karşılayıp karşılamadığı araştırılmıştır. Özellikle Hu ve Sawicki (Hu and Sawicki, 2007) ve Starobinsky (Starobinsky, 2007) modelleri kozmolojik olarak geçerli modeller olarak dikkat çekmektedir.

$f(R)$ teorilerde ortaya çıkan skaler alan madde ile güçlü bir şekilde birleşmiştir. Bu birleşmenin sonucu olarak eşdeğerlik prensibi ihlal edilmekte ve doğadaki dört temel kuvvete ek olarak beşinci temel kuvvetten bahsedilmektedir. Eşdeğerlik prensibi ihlalinden ve beşinci kuvvetin sınırlamalarından kaçınmak için chameleon mekanizması öne sürülmüştür. Skaler alanın kütlesinin kendisini çevreleyen ortamdaki madde yoğunluğuna bağlı olduğunu ileri süren chameleon mekanizması, eğer alan yüksek yoğunluklu bölgede yeterince kütleye sahipse, küresel simetrik bir cisim kendi yüzeyi etrafında "ince kabuğa" sahip olabileceğini belirtir. İnce kabuk sayesinde madde ile skaler alan arasındaki etkileşim cismin dışında ortadan kalktığı ve dolayısıyla bu gibi bir etkileşimin deneysel olarak neden gözlenemediği sorusuna açıklama getirilmektedir.

Sonuç olarak, kozmolojik sabitin sorunlu bir kavram olması yeni teorilerin ve modellerin ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Şu ana dek deneysel olarak keşfedilebilmiş herhangi bir skaler alan olmaması ve günümüzde bu teorilerin öne sürdüğü skaler alanların ölçümünün mümkün olmamasından dolayı Λ CDM modeli kozmolojide hala önemli bir yere sahiptir. Ancak, teorik ve gözlemsel gelişmelere bağlı olarak alternatif çekim teorilerine olan ilginin artacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abdelwahab, M., Carloni, S. and Dunsby, P. K. S.**, 2008, Cosmological dynamics of exponential gravity, *Class. Quant. Grav.* 25:135002.
- Ade, P.A.R., Aghanim, N., Alves, M. I. R. et al.**, 2013, Planck 2013 results. I. overview of products and scientific results, *arXiv:1303.5062*.
- Ali, A., Gannouji, R., Sami, M. and Sen, A. A.**, 2010, Background cosmological dynamics in $f(R)$ gravity and observational constraints, *Phys. Rev. D* 81:104029.
- Amarzguoui, M., Elgaroy, O., Mota, D. F. and Multamaki, T.**, 2006, Cosmological constraints on $f(R)$ gravity theories within the palatini approach, *Astron. Astrophys.* 454:707-714.
- Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D. and Tsujikawa, S.**, 2007, Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models, *Phys. Rev. D* 75, 083504.
- Amendola, L., Polarski, D. and Tsujikawa, S.**, 2007a, Are $f(R)$ dark energy models cosmologically viable?, *Phys. Rev. Lett.* 98:131302.
- Amendola, L., Polarski, D. and Tsujikawa, S.**, 2007b, Power-laws $f(R)$ theories are cosmologically unacceptable, *Int. J. Mod. Phys. D* 16:1555-1561.
- Amendola, L. and Tsujikawa, S.**, 2008, Phantom crossing, equation-of-state singularities, and local gravity constraints in $f(R)$ models, *Phys. Lett. B* 660:125-132.
- Appleby, S. A. and Battye, R. A.**, 2007, Do consistent $f(R)$ models mimic general relativity plus Λ ?, *Phys. Lett. B* 654:7-12.
- Atazadeh, K. and Sepangi, H. R.**, 2007, Accelerated expansion in modified gravity with a yukawa-like term, *Int. J. Mod. Phys. D* 16:687-698.
- Atazadeh, K., Khaleghi, A., Sepangi, H. R. and Tavakoli, Y.**, 2008, Energy conditions in $f(R)$ gravity and brans-dicke theories, *Int. J. Mod. Phys. D* 18:1101-1111.
- Baghran, S., Farhang, M. and Rahvar, S.**, 2007, Modified gravity with $f(R) = \sqrt{R^2 - R_0^2}$, *Phys. Rev. D* 75:044024.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Barausse, E., Sotiriou, T. P. and Miller, J. C.**, 2008, Curvature singularities, tidal forces and the viability of palatini $f(R)$ gravity, *Class. Quant. Grav.* 25:105008.
- Bazeia, D., da Cunha, C., Menezes, R. and Petrov, A. Y.**, 2007, Perturbative aspects and conformal solutions of $f(R)$ gravity, *Phys. Lett. B* 649:445-453.
- Bean, R., Bernat, D., Pogossian, L., Silvestri, A. and Trodden, M.**, 2007, Dynamics of linear perturbations in $f(R)$ Gravity, *Phys. Rev. D* 75:064020.
- Bergliaffa, Santiago Esteban Perez**, 2006, Constraining $f(R)$ theories with the energy conditions, *Phys. Lett. B* 642 311-314.
- Bergmann, P. G.**, 1968, Comments on the scalar-tensor theory, *Int. J. Theor. Phys.* 1 , 25.
- Bicknell, G. V.**, 1974, Non-viability of gravitational theory based on a quadratic lagrangian, *J. Phys.*, A7,1061.
- Bisabr, Y.**, 2010, Solar system constraints on a cosmologically viable $f(R)$ theory, *Phys. Lett. B* 683:96-100.
- Brans, C. and Dicke, R. H.**, 1961, Mach's principle and a relativistic theory of gravitation, *Phys. Rev.* 124, 925.
- Brax, P., van de Bruck, C., Davis, A. C. and Shaw, D. J.**, 2008, $f(R)$ gravity and chameleon theories, *Phys. Rev. D* 78:104021.
- Capozziello, S.**, 2002, Curvature quintessence, *Int. J. Mod. Phys. D* 11:483-492.
- Capozziello, S., Carloni, S. and Troisi, A.** 2003a, Quintessence without scalar fields, *astro-ph/0303041*.
- Capozziello, S., Cardone, V. F., Carloni, S. and Troisi, A.**, 2003b, Curvature quintessence matched with observational data, *Int. J. Mod. Phys. D* 12:1969-1982.
- Capozziello, S., Carloni, S. and Troisi, A.** 2007a, Low surface brightness galaxies rotation curves in the low energy limit of R^n gravity: no need for dark matter?, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 375:1423-1440.
- Capozziello, S., Stabile, A. and Troisi, A.**, 2007b, The newtonian limit of $f(R)$ gravity, *Phys. Rev. D* 76:104019.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Capozziello, S. and Tsujikawa, S.,** 2008, Solar system and equivalence principle constraints on $f(R)$ gravity by chameleon approach, *Phys. Rev. D* **77**:107501.
- Capozziello, S. De Laurentis, M. and Faraoni, V.** 2009, A bird's eye view of $f(R)$ -gravity, *arXiv:0909.4672*.
- Capozziello, S. and De Laurentis, M.** 2011, Extended theories of gravity, *arXiv:1108.6266*.
- Capozziello, S. and Faraoni, V.,** 2011, Beyond Einstein Gravity, Springer, New York, 450p.
- Cardone, V. F., Diaferio, A. and Camera, S.,** 2009, Constraining $f(R)$ theories with type Ia supernovae and gamma ray bursts, *arXiv:0907.4689*.
- Carlóni, S., Dunsby, P. K. S., Capozziello, S. and Troisi, A.,** 2005, Cosmological dynamics of R^n gravity, *Class. Quant. Grav.* **22**:4839-4868.
- Carroll, S.,** 1997, Lecture notes on general relativity, *arXiv:gr-qc/9712019*.
- Carroll, S.,** 2004, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Addison Wesley, San Francisco, 513p.
- Carroll, S., Duvvuri, V., Trodden, M. and Turner, S. M.,** 2003, Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?, *astro-ph/0306438*.
- Carroll, S., Sawicki, I., Silvestri, A. and Trodden, M.,** 2006, Modified-source gravity and cosmological structure formation, *New J. Phys.* **8**:323.
- Cembranos, J. A. R.,** 2006, The newtonian limit at intermediate energies, *Phys. Rev. D* **73**:064029.
- Chiba, T., Smith, T. L. and Erickleck, A. L.,** 2007, Solar system constraints to general $f(R)$ gravity, *Phys. Rev. D* **75**:124014.
- Clifton, T. and Barrow, J. D.,** 2005, The power of general relativity, *Phys. Rev. D* **72**:103005.
- Clifton, T.,** 2008, Higher powers in gravitation, *Phys. Rev. D* **78**:083501.
- Cognola, G., Elizalde, E., Nojiri, S., Odintsov, S. D., Sebastiani, L. and Zerbini, S.,** 2008, Class of viable modified $f(R)$ gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion, *Phys. Rev. D* **77**:046009.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- D'Hondt, E.**, 1999, From Minimal to Nonminimal Coupling in Cosmological Inflation, MSc Thesis, Vrije Universiteit Brussel, Faculteit van de Wetenschappen Departement Natuurkunde, 105p.
- De Felice, A. and Tsujikawa, S.**, 2010, $f(R)$ theories, *Living Rev. Relativity* 13: 3.
- De Souza, J. C. C. and Faraoni, V.**, 2007, The phase space view of $f(R)$ gravity, *Class. Quant. Grav.* 24:3637-3648.
- Deruelle, N., Sasaki, M. and Sendouda, Y.**, 2008, "Detuned" $f(R)$ gravity and dark energy, *Phys. Rev. D* 77:124024.
- Dev, A., Jain, D., Jhingan, S., Nojiri, S., Sami, M. and Thongkool, I.**, 2008, Delicate $f(R)$ gravity models with disappearing cosmological constant and observational constraints on the model parameters, *Phys. Rev. D* 78:083515.
- Dodelson, S.**, 2003, Modern Cosmology, Academic Press, Massachusetts, 440p.
- Dolgov, A. D. and Kawasaki, M.**, 2003, Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?, *Phys. Lett. B* 573 1-4.
- Eddington, A. S.**, 1923, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge University Press, London, 284p.
- Erickcek, A. L., Smith, L. and Kamionkowski, M.**, 2006, Solar system tests do rule out $1/R$ gravity, *Phys. Rev. D* 74:121501.
- Eisenstein, D. J., Zehavi, I., Hogg, D. W. et al.**, 2005, Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies, *Astrophys. J.* 633:560-574.
- Evans, J. D., Hall, L. M. H. and Caillol, P.**, 2008, Standard cosmological evolution in a wide range of $f(R)$ models, *Phys. Rev. D* 77:083514.
- Fairbairn, M. ve Rydbeck, S.**, 2007, Expansion history and $f(R)$ modified gravity, *astro-ph/0701900*.
- Faraoni, V., Gunzig, E. ve Nardone, P.**, 1999, Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology, *Fund. Cosmic Phys.* 20:121.
- Faraoni, V.**, 2004, Cosmology in Scalar-Tensor Gravity, Kluwer Academic Publisher, The Netherlands, 274p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Faraoni, V.**, 2006a, Matter instability in modified gravity, *Phys. Rev. D* **74**:104017.
- Faraoni, V.**, 2006b, Solar system experiments do not yet veto modified gravity models, *Phys. Rev. D* **74** 023529.
- Faraoni, V.**, 2010, Black hole entropy in scalar-tensor and $f(R)$ gravity: an overview, *arXiv:1005.2327v1*.
- Faulkner, T., Tegmark, M., Bunn, E. F. and Mao, Y.**, 2007, Constraining $f(R)$ gravity as a scalar tensor theory, *Phys. Rev. D* **76**:063505.
- Fay, S., Tavakol, R. and Tsujikawa, S.**, 2007a, $f(R)$ gravity theories in palatini formalism: cosmological dynamics and observational constraints, *Phys. Rev. D* **75**:063509.
- Fay, S., Nesseris, S. and Perivolaropoulos, L.**, 2007b, Can $f(R)$ modified gravity theories mimic a Λ CDM cosmology?, *Phys. Rev. D* **76**:063504.
- Flanagan, E. E.**, 2004a, The conformal frame freedom in theories of gravitation, *Class. Quant. Grav.* **21**:3817.
- Flanagan, E. E.**, 2004b, Higher order gravity theories and scalar tensor theories, *Class. Quant. Grav.* **21** 417-426.
- Flanagan, E. E.**, 2004c, Palatini form of $1/R$ gravity, *Phys. Rev. Lett.* **92**:071101.
- Fierz, M.**, 1956, On the physical interpretation of p.jordan's extended theory of gravitation, *Helv. Phys. Acta* **29** 128.
- Fujii, Y. and Maeda, K.**, 2003, The Scalar-Tensor Theory of Gravitation, Cambridge University Press, Cambridge, 260p.
- Gerard, J. M.**, 2007, The strong equivalence principle from gravitational gauge structure, *Class. Quant. Grav.* **24**:1867-1878.
- Goheer, N., Leach, J. A. and Dunsby, P. K. S.**, 2007, Dynamical systems analysis of anisotropic cosmologies in R^n gravity, *Class. Quant. Grav.* **24**:5689-5708.
- Goheer, N., Goswami, R. and Dunsby, P. K. S.**, 2009, Dynamics of $f(R)$ -cosmologies containing einstein static models, *Class. Quant. Grav.* **26**:105003.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Gu, J. and Lin, W.**, 2011, Solar system constraints of $f(R)$ chameleon gravity, arXiv:1108.1782
- Guarnizo, A., Cataneda, L. and Tejeiro, J. M.**, 2010, Boundary term in metric $f(R)$ gravity: field equations in the metric formalism, *Gen. Rel. Grav.* 42:2713-2728.
- Guth, A. H.**, 1981, Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems, *Phys. Rev. D* 23, 347.
- Hammani, A.**, 2012, Cosmological Dynamics, Statistics and Numerical Techniques of $f(R)$ Gravity, MSc Thesis, Institute of Theoretical Astrophysics University of Oslo, 118p.
- Hees, A. and Füzfa, A.**, 2013, Can the chameleon mechanism explain cosmic acceleration while satisfying solar system constraints?, arXiv:1302.6527.
- Higgs, P. W.**, 1959, Quadratic lagrangians and general relativity, *Nuovo Cim.* 11 816.
- Hu, W. and Sawicki, I.**, 2007, Models of $f(R)$ cosmic acceleration that evade solar-system tests, *Phys. Rev. D* 76:064004.
- Hui, L., Nicolis, A. and Stubbs, C.**, 2009, Equivalence principle implications of modified gravity models, *Phys. Rev. D* 80:104002.
- Iglesias, A., Kaloper, N., Padilla, A. and Park, M.**, 2007, How (not) to palatini, *Phys. Rev. D* 76:104001.
- Iosifidis, D.**, 2013, Modified Gravity and Cosmology, Phd Thesis, University of Sussex, School of Mathematical and Physical Sciences, Physics and Astronomy, 120p.
- Jakubiec, A. and Kijowski, J.**, 1987, On the universality of einstein equations, *Gen. Rel. Grav.* 19 719.
- Jakubiec, A. and Kijowski, J.**, 1989a, On the universality of linear lagrangians for gravitational field, *J. Math. Phys.* 30 1073.
- Jakubiec, A. and Kijowski, J.**, 1989b, On theories of gravitation with nonlinear lagrangians, *Phys. Rev. D* 39 1406.
- Jimenez, R., Macdonald, J., Pagel, B. and Thejll, P.**, 1996, Age of global clusters: a new approach, astro-ph/9602132v2.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Jin, X., Liu, D. and Li, X.**, 2007, Solar system tests disfavor $f(R)$ gravities, *arXiv:astro-ph/0610854*.
- Jordan, P.**, 1938, Zur empirischen kosmologie, *Naturwiss* 26 417.
- Jordan, P.**, 1952, Schwerkraft und weltfall, grundlagen der theoretische kosmologie, *Braunschweig: Vieweg und Sohns*.
- Kainulainen, K., Piilonen, J., Reijonen, V. and Sunhede, D.**, 2007, Spherically symmetric spacetimes in $f(R)$ gravity theories, *Phys. Rev. D* 76:024020.
- Kainulainen, K. and Sunhede, D.**, 2008, Stability of spherically symmetric spacetimes in metric $f(R)$ gravity, *Phys. Rev. D* 78, 063511.
- Kang, G.**, 1996, Black hole area in brans-dicke theory, *Phys. Rev. D* 54, 7483.
- Karakatsanis, K.**, 2010, Implications of $f(R)$ Modification to Gravity, MSc Thesis, Theoretical Physics Group, Imperial College, London, 37p.
- Kerimo, J. and Kalligas, D.**, 1998, Gravitational collapse of collisionless matter in scalar-tensor theories: scalar waves and black hole formation, *Phys. Rev. D* 58, 104002.
- Kerimo, J.**, 2000, Dynamical black holes in scalar-tensor theories, *Phys. Rev. D* 62, 104005.
- Khoury, J. and Weltman, A.**, 2003, Chameleon cosmology, *Phys. Rev. D* 69:044026.
- Khoury, J. and Weltman, A.**, 2004a, Chameleon fields: awaiting surprises for tests of gravity in space, *Phys. Rev. Lett.* 93, 171104.
- Khoury, J. and Weltman, A.**, 2004b, Chameleon cosmology, *Phys. Rev. D* 69, 044026.
- Klanova, K.**, 2013, Certain Aspects of $f(R)$ Gravity, Phd Thesis, Faculty of Science, Masaryk University Department of Theoretical Physics and Astrophysics, 112p.
- Klypin, A., Zhao, H. and Somerville, R. S.**, 2002, Lcdm-based models for the milky way and m31 I: dynamical models, *Astrophys. J.* 573:597-613.
- Koivisto, T.**, 2006, The matter power spectrum in $f(R)$ gravity, *Phys. Rev. D* 73:083517.
- Kolb, E. W.**, 1991, First-order inflation, *Physica Scripta* T36, 376.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Komatsu, E., Dunkley, J., Nolta, M. R. et al.**, 2009, Five-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological interpretation, *Astrophys. J. Suppl.* 180:330-376.
- Komatsu, E., Smith, K. M., Dunkley, J. et al.**, 2011, Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological interpretation, *Astrophys. J. Suppl.* 192:18.
- La, D., Steinhardt, P. J. and Bertschinger, E.**, 1989, Prescription for successful extended inflation, *Phys. Lett. B* 231, 231.
- Li, B. and Chu, M. C.**, 2006, Cmb and matter power spectra of early $f(R)$ cosmology in palatini formalism, *Phys. Rev. D* 74 104010.
- Li, B., Chan, K. C. and Chu, M. C.**, 2007, Constraints on $f(R)$ cosmology in the palatini formalism, *Phys. Rev. D* 76:024002.
- Li, B. and Barrow, J. D.**, 2007, The cosmology of $f(R)$ gravity in the metric variational approach, *Phys. Rev. D* 75:084010.
- Liddle, A. R. and Wands, D.**, 1991, Microwave background constraints on extended inflation voids, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 253, 637.
- Linder, E. V.**, 2009, Exponential gravity, *Phys. Rev. D* 80:123528.
- Lineweaver, C. H. and Egan, C. A.**, 2007, The Cosmic coincidence as a temporal selection effect produced by the age distribution of terrestrial planets in the universe, *arXiv:astro-ph/0703429*.
- Magnano, G., Ferraris, M. and Francaviglia, M.**, 1987, Nonlinear gravitational lagrangians, *Gen. Rel. Grav.* 19 465.
- Magnano, G. and Sokolowski, L. M.**, 1993, On physical equivalence between nonlinear gravity theories, *Phys. Rev. D* 50:5039-5059.
- Martinelli, M., Melchiorri, A. and Amendola, L.**, 2009, Cosmological constraints on the hu-sawicki modified gravity scenario, *Phys. Rev. D* 79:123516.
- Martinelli, M.**, 2011, Constraining Modified Gravity Theories with Cosmology, Phd Thesis, University of Rome, Scuola di Dottorato in Scienze Astronomiche, Chimiche, Fisiche e Matematiche “Vito Volterra”, 123p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Mathiazhagan, C. and Johri, V. B.**, 1984, An inflationary universe in brans-dicke theory: a hopeful sign of theoretical estimation of the gravitational constant, *Class. Quantum Grav.* 1 L29.
- Moldenhauer, J. and Ishak, M.**, 2009, A minimal set of invariants as a systematic approach to higher order gravity models: physical and cosmological constraints, *JCAP* 0912:020.
- Multamaki, T. and Vilja, I.**, 2008, Constraining newtonian stellar configurations in $f(R)$ theories of gravity, *Phys. Lett. B* 659:843-846.
- Navarro, I. and Acoleyen, K. V.**, 2007, $f(R)$ actions, cosmic acceleration and local tests of gravity, *JCAP* 0702:022.
- Nordtvedt, K.**, 1970, Post-newtonian metric for a general class of scalar-tensor gravitational theories and observational consequences, *Astrophysical Journal*, vol. 161, p.1059.
- Olmo, J.G.**, 2005a, The gravity lagrangian according to solar system experiments, *Phys. Rev. Lett.* 95, 261102.
- Olmo, J.G.**, 2005b, Post-newtonian constraints on $f(R)$ cosmologies in metric and palatini formalism, *Phys. Rev. D* 72 083505 gr-qc/0505135.
- Olmo, J.G.**, 2007a, Limit to general relativity in $f(R)$ theories of gravity, *Phys. Rev. D* 75:023511.
- Olmo, J.G.**, 2007b, Violation of the equivalence principle in modified theories of gravity, *Phys. Rev. Lett.* 98:061101.
- Olmo, J.G.**, 2008, Hydrogen atom in palatini theories of gravity, *Phys. Rev. D* 77:084021.
- Olmo, J.G.**, 2009, New phenomenology for palatini $f(R)$ theories: non-singular universes, *arXiv:0910.3734*.
- Paul, B. C., Debnath, P. S. and Ghose, S.**, 2009, Accelerating universe in modified theories of gravity, *Phys. Rev. D* 79:083534.
- Percival, W. J., Cole, S., Eisenstein, J. et al.**, 2007, Measuring the baryon acoustic oscillation scale using the Sdss and 2dfgrs, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 381:1053-1066.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G. et al.,** 1999, Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae, *Astrophys. J.* 517:565-586.
- Poisson, E.,** 2007, A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 252p.
- Poplawski, N. J.,** 2007, The cosmic snap parameter in $f(R)$ gravity, *Class. Quant. Grav.* 24:3013-3020.
- Riess, A. et al.,** 1998, Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astron. J.* 116:1009-1038.
- Riess, A., Kirshner, R. P., Schmidt, B. P. et al.,** 1999, Bvri light curves for 22 type Ia supernovae, *Astron. J.* 117:707-724.
- Riess, A.G., Strolger, L. G., Tonry, J. et al.,** 2004, Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the hubble space telescope: evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution, *Astrophys. J.* 607:665-687.
- Ruggiero, M. L. and Iorio, L.,** 2007, Solar system planetary orbital motions and $f(R)$ theories of gravity, *JCAP* 0701:010.
- Santos, J., Alcaniz, J. S., Rebouças, M. J. and Carvalho, F. C.,** 2007, Energy conditions in $f(R)$ gravity, *Phys. Rev. D* 76:083513.
- Sawicki, I. and Hu, W.,** 2007, Stability of cosmological solution in $f(R)$ models of gravity, *Phys. Rev. D* 75:127502.
- Scheel, M. A., Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A.,** 1995a, Collapse to black holes in brans-dicke theory: I. horizon boundary conditions for dynamical spacetimes, *Phys. Rev. D* 51 4208-4235.
- Scheel, M. A., Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A.,** 1995b, Collapse to black holes in brans-dicke theory: II. comparison with general relativity, *Phys. Rev. D* 51:4236-4249.
- Shao, C. G., Cai, R. G., Wang, B. and Su, R. K.,** 2006, An alternative explanation of the conflict between $1/R$ gravity and solar system tests, *Phys. Lett. B* 633 164-166.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Song, Y. S., Hu, W. and Sawicki, I.**, 2007, The large scale structure of $f(R)$ gravity, *Phys. Rev. D* **75**:044004.
- Sotiriou, T. P.**, 2006a, Constraining $f(R)$ gravity in the palatini formalism, *Class. Quant. Grav.* **23** 1253-1267.
- Sotiriou, T. P.**, 2006b, Unification of inflation and cosmic acceleration in the palatini formalism, *Phys. Rev. D* **73** 063515.
- Sotiriou, T. P.**, 2007, Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology, Phd Thesis, International School for Advanced Studies, 199p.
- Sotiriou, T. P. and Liberati, S.**, 2007, Metric-affine $f(R)$ theories of gravity, *AnnalsPhys.* **322**:935-966.
- Spergel, D. N., Verde, L., Peiris, H. V. et al.**, 2003, First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: determination of cosmological parameters, *Astrophys. J. Suppl.* **148**:175-194.
- Spergel, D. N., Bean, R., Dore, O. et al.**, 2007, Wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) three year results: implications for cosmology, *Astrophys. J. Suppl.* **170**:377.
- Starobinsky, A.**, 1980, A new type of isotropic cosmological models without singularity, *Phys. Lett. B* **91** 99-102.
- Starobinsky, A.**, 2007, Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity, *JETP Lett.* **86**:157-163.
- Steigman, G.**, 2006, Primordial nucleosynthesis: successes and challenges, *Int. J. Mod. Phys. E* **15**:1-36.
- Straumann, N.**, 2002, On the cosmological constant problems and the astronomical evidence for a homogeneous energy density with negative pressure, *astro-ph/0203330v1*.
- Tegmark, M., Strauss, M., Blanton, M. et al.**, 2004, Cosmological parameters from sdss and wmap, *Phys. Rev. D* **69**:103501.
- Tegmark, M., Eisenstein, D., Strauss, M. et al.**, 2006, Cosmological constraints from the sdss luminous red galaxies, *Phys. Rev. D* **74**:123507.
- Trodden, M. and Carroll, S. M.**, 2004, Tasi lectures: introduction to cosmology, *astro-ph/0401547v1*.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Tsujikawa, S.**, 2008, Observational signatures of $f(R)$ dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints, *Phys. Rev. D* **77**:023507.
- Tsujikawa, S., Uddin, K. and Tavakol, R.**, 2008, Density perturbations in $f(R)$ gravity theories in metric and palatini formalisms, *Phys. Rev. D* **77**:043007.
- Tsujikawa, S.**, 2010, Dark energy: investigation and modeling, *arXiv:1004.1493v1*.
- Utiyama, R. and De Witt S. B.**, 1962, Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields, *J. Math. Phys.* **3**, 608.
- Wagoner, R. V.**, 1970, Scalar-tensor theory and gravitational waves, *Phys. Rev. D* **1**, 3209.
- Weinberg, E. J.**, 1989, Some problems with extended inflation, *Phys. Rev. D* **40** 3950.
- Weyl, H.**, 1919, Eine neue erweiterung der relativitätstheorie, *Ann. Phys.* **59**, 101.
- Whitt, B.**, 1984, Fourth-order gravity as general relativity plus matter, *Phys. Lett.* **145B** 176.
- Will, C. M.**, 2006, The confrontation between general relativity and experiment, *Living Rev. Rel.* **9**:3.
- Winther, H. A.**, 2010, Chameleon Models with Field-dependent Couplings, MSc Thesis, Institute of Theoretical Astrophysics University of Oslo, 161p.
- Zakharov, A. F., Nucita, A. A., De Paolios, F. and Ingrosso, G.**, 2006, Solar system constraints on R^n gravity, *Phys.Rev. D* **74** 107101.
- Zhang, P.**, 2007, The behavior of $f(R)$ gravity in the solar system, galaxies and clusters, *Phys. Rev. D* **76**:024007.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

ADI-SOYADI: ENES TUNÇ

CİNSİYETİ: BAY

DOĞUM TARİHİ: 08.06.1987

DOĞUM YERİ: BORNOVA

MEDENİ HALİ: BEKÂR

TEL.(EV): (02123510627)

TEL.(CEP): (05052488877)

ADRESİ: İNÖNÜ MAHALLESİ. 984 SOK. NO:40 BORNOVA/İZMİR

E-MAİL ADRESİ: enestunc87@gmail.com

EĞİTİM DURUMU

2011-2014: EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ,
ASTRONOMİ VE UZAY BİLİMLERİ ANABİLİM DALI, GENEL
ASTRONOMİ, Yüksek Lisans Öğrencisi.

2005-2011: EGE ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ ASTRONOMİ VE UZAY
BİLİMLERİ BÖLÜMÜ.

2001-2004: HAYRETTİN DURAN LİSESİ.

1997-2001: YAHYA KEMAL BEYATLI İLKÖĞRETİM OKULU.

1994-1997: YAVUZ SELİM İLKÖĞRETİM OKULU.

ÖZGEÇMİŞ (devam)**KATILDIĞI ETKİNLİKLER:**

2010: KARANLIK MADDE FARKINDALIĞI HAFTASI, EGE
ÜNİVERSİTESİ, DİNLEYİCİ.

2012: KARA DELİKLER: BİLGİ VE HESAPLAMA KAPASİTESİNE YENİ
BİR BAKIŞ AÇISI, YAŞAR ÜNİVERSİTESİ, DİNLEYİCİ.

2013: FEZA GÜRSEY YAZ OKULLARI, KOZMOLOJİ YAZ OKULU,
BOĞAZİÇİ ÜNİVERSİTESİ, KONUŞMACI.

YABANCI DİL:

İNGİLİZCE: ORTA SEVİYEDE

BİLGİSAYAR BİLGİSİ: İYİ SEVİYEDE (Windows NT, Microsoft Ofis 2013;
Excel, Word, PowerPoint, Access, Internet).

REFERANSLAR:

PROF. DR. CAN BATTAL KILINÇ; Tel no: +90 232 3884000 / 1741, Mail:
can.kilinc@ege.edu.tr.