

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**REZİDÜEL HATA ANALİZİNE DAYALI BERNOULLİ SIRALAMA
(COLLOCATION) METODU VE KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE
UYGULANMASI**

DOKTORA TEZİ

Kübra ERDEM BİÇER

**MATEMATİK ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

MANİSA 2014

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**REZİDÜEL HATA ANALİZİNE DAYALI BERNOULLİ
SIRALAMA (COLLOCATION) METODU VE KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI**

DOKTORA TEZİ

Arş. Gör. Kübra ERDEM BİÇER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Ekim 2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Kasım 2014

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet SEZER

Prof. Dr. Necdet BİLDİK

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

Doç. Dr. Mehmet ÇEVİK

MANİSA 2014

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	i
SEMBOL LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
TEŞEKKÜR	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xii
1. BÖLÜM	1
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	7
KAYNAK ÖZETLERİ	7
2.1 Kısmi Diferansiyel Denklemler.....	7
2.1.1 İkinci Mertebe Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması.....	9
2.1.2 Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Matematiksel Modellemeleri.....	10
2.1.3 Başlangıç Değer Problemi.....	13
2.1.4 Yardımcı Koşullar.....	14
2.1.5 İyi Tanımlanmış Problemler.....	14
2.2 Bernoulli Polinomları.....	15
2.2.1 Tarihi Gelişim.....	15
2.2.2 Bernoulli Polinomları ve Bazı Özellikleri.....	17
2.2.2.1 Bernoulli Polinomları ile ilgili Bazı Bağintı ve Formüller.....	20
3. BÖLÜM	23
PROBLEMİN TANITILMASI VE ÇÖZÜM METODU	23
3.1. İkinci Mertebe Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem İçin Temel Matris Bağintıları.....	24
3.1.1. Yaklaşım Fonksiyonu ile Türevleri Arasındaki Matris Bağintısı.....	26
3.1.2. Koşulların Matris Formu.....	28
3.2 Çözüm Metodu.....	29
4. BÖLÜM	32
HATA ANALİZİ ve ÇÖZÜMÜN İYİLEŞTİRİLMESİ	32
4.1 Rezidüel Hata Analizi.....	32

4.2 Çözümlerin İyileştirilmesi.....	34
5. BÖLÜM.....	36
ARAŞTIRMA BULGULARI.....	36
6. BÖLÜM.....	96
SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	96
REFERANSLAR.....	98
EKLER.....	106
EK 1.....	106
EK 2.....	110
EK 3.....	117
EK 4.....	124
ÖZGEÇMİŞ.....	130

SEMBOL LİSTESİ

$a_{r,s}$	Bilinmeyen Bernoulli katsayıları
b_k	Bernoulli sayıları
N, M	Kesme sınırları
L	Lineer operatörü
R_N	Rezidüel fonksiyon
$[W; G]$	Arttırılmış matris
U_N	N kesme sınırı için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü
$U_{N,M}$	N, M kesme sınırı için iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü
$ e_N $	Bernoulli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonu
$ e_{N,M} $	Tahmini mutlak hata fonksiyonu
$ E_{N,M} $	İyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonu

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 5.1 Örnek 5.1' in $u(x, t)$ tam çözümü, $N = 7$, $M = 10$ için $u_N(x, t)$ Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli çözümlerinin karşılaştırılması.....	38
Şekil 5.2 Örnek 5.1' in $N = 7$, $M = 10$ için $ e_N(x) $ mutlak hata fonksiyonu, $ e_{N,M}(x) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $ E_{N,M}(x) $ iyileştirilmiş çözümünün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	40
Şekil 5.3 Örnek 5.2' nin $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$ tam çözümü, $N = 10$ ve $M = 11$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	45
Şekil 5.4 Örnek 5.4' ün e^{x-t} tam çözümü, $N = 10$ ve $M = 11$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	51
Şekil 5.5 Örnek 5.4' ün $N = 10$ ve $M = 11$ için $ e_N(x, t) $ mutlak hata fonksiyonu, $ e_{N,M}(x, t) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $ E_{N,M}(x, t) $ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	52
Şekil 5.6 Örnek 5.5' in e^{x+t} tam çözümü, $N = 7$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $N = 10$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	55
Şekil 5.7 Örnek 5.6' nın $e^{-2t} \sin x$ tam çözümü, $N = 3$ ve $M = 4$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	58
Şekil 5.8 Örnek 5.6' nın $e^{-2t} \sin x$ tam çözümü, $N = 7$ ve $M = 8$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	60
Şekil 5.9 Örnek 5.7' nin $u(x, y) = ye^x + x \cosh y$ tam çözümü, $u_7(x, y)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{7,8}(x, y)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	64
Şekil 5.10 Örnek 5.7' nin $u(x, y) = ye^x + x \cosh y$ tam çözümü, $u_{13}(x, y)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{13,14}(x, y)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	65

Şekil 5.11 Örnek 5.7' nin $ e_7(x, y) $ mutlak hata fonksiyonu, $ e_{7,8}(x, y) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $ E_{7,8}(x, y) $ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	67
Şekil 5.12 Örnek 5.7' nin $ e_{13,14}(x, y) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $ E_{13,14}(x, y) $ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	68
Şekil 5.13 Örnek 5.8' in $u(x, y) = \cos(2x)\sin(2y)$ tam çözümü, $u_7(x, y)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{7,8}(x, y)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	72
Şekil 5.14 Örnek 5.8' in $u(x, y) = \cos(2x)\sin(2y)$ tam çözümü, $u_{13}(x, y)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{13,14}(x, y)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	73
Şekil 5.15 Örnek 5.8' in $ e_7(x, y) $ mutlak hata fonksiyonları ile $ e_{7,8}(x, y) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	74
Şekil 5.16 Örnek 5.8' in $ e_{13}(x, y) $ mutlak hata fonksiyonu ve $ e_{13,14}(x, y) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	75
Şekil 5.17 Örnek 5.9' un $u(x, t) = e^t x^2$ tam çözümü ile $N = 4, 7, 10$ değerleri için bulunan yaklaşık Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	81
Şekil 5.18 Örnek 5.9' un $u(x, t) = e^t x^2$ tam çözümü ile $u_{4,5}(x, t)$, $u_{7,8}(x, t)$, $u_{10,11}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	83
Şekil 5.19 Örnek 5.9' un $ e_4(x, t) $ mutlak hata fonksiyonu, $ e_7(x, t) $ mutlak hata fonksiyonu ve $ e_{10}(x, t) $ mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	84
Şekil 5.20 Örnek 5.9' un $ e_{4,5}(x, t) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu, $ e_{7,8}(x, t) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $ e_{10,11}(x, t) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	86
Şekil 5.21 Örnek 5.9' un $ E_{4,5}(x, t) $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonu, $ E_{7,8}(x, t) $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonu ve $ E_{10,11}(x, t) $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	87

Şekil 5.22 Örnek 5.10' un $x + x^2 \sinh t$ tam çözümü, $u_7(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü, $u_{13}(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{13,14}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	92
Şekil 5.23 Örnek 5.10' un $N = 7$ ve $M = 8$ için $ e_N(x, t) $ mutlak hata fonksiyonu, $ e_{N,M}(x, t) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $ E_{N,M}(x, t) $ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	94
Şekil 5.24 Örnek 5.10' un $N = 13$ ve $M = 14$ için $ e_{N,M}(x, t) $ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $ E_{N,M}(x, t) $ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	95

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 5.1 Örnek 5.1' in $N = 3$, $M = 4$ ve $N = 7$, $M = 10$ için $ e_N $ mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.....	37
Çizelge 5.2 Örnek 5.2' nin $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$ tam çözümü, $N = 3$, $M = 4$ için $u_N(x,t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x,t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	41
Çizelge 5.3 Örnek 5.2' nin $N = 3$, $M = 4$ için $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	42
Çizelge 5.4 Örnek 5.2' nin $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$ tam çözümü, $N = 7$, $M = 8$ için $u_N(x,t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x,t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	42
Çizelge 5.5 Örnek 5.2' nin $N = 7$, $M = 8$ için $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	43
Çizelge 5.6 Örnek 5.2' nin $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$ tam çözümü, $N = 10$, $M = 11$ için $u_N(x,t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x,t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	43
Çizelge 5.7 Örnek 5.2' nin $N = 10$, $M = 11$ için $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	44
Çizelge 5.8 Örnek 5.3' ün $x^2 + t$ tam çözümü, $N = 7$, $M = 8$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	46
Çizelge 5.9 Örnek 5.3' ün $N = 7$, $M = 8$ için $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	47

Çizelge 5.10 Örnek 5.4' ün e^{x-t} tam çözümü, $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 10$, $M = 11$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	48
Çizelge 5.11 Örnek 5.4' ün $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 10$, $M = 11$ için $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	49
Çizelge 5.12 Örnek 5.5' in e^{x+t} tam çözümü, yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	53
Çizelge 5.13 Örnek 5.5' in $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	54
Çizelge 5.14 Örnek 5.6' nın $e^{-2t} \sin x$ tam çözümü, $N = 7$ ve $M = 8$ için U_N yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $U_{N,M}$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	56
Çizelge 5.15 Örnek 5.6' nın $N = 7$ ve $M = 8$ için $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	57
Çizelge 5.16 Örnek 5.7' nin $ye^x + x \cosh y$ tam çözümü, $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 13$, $M = 14$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	61
Çizelge 5.17 Örnek 5.7' nin $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 13$, $M = 14$ için $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	62
Çizelge 5.18 $\cos(2x)\sin(2y)$ tam çözümü, $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 13$, $M = 14$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	69
Çizelge 5.19 Örnek 5.8' in $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 13$, $M = 14$ için $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	70

Çizelge 5.20 Örnek 5.9' un $e^t x^2$ tam çözümü, $N=4, M=5$ ve $N=7, M=8$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	77
Çizelge 5.21 Örnek 5.9' un $N=4, M=5$ ve $N=7, M=8$ için $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	78
Çizelge 5.22 Örnek 5.9' un $N=10, M=11$ değeri için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü, iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü, $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	79
Çizelge 5.23 Örnek 5.10' un $N=7$ ve $M=8, 10, 14$ değerleri için $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	89
Çizelge 5.24 Örnek 5.10' un $x + x^2 \sinh t$ tam çözümü, $N=7, M=8$ ve $N=13, M=14$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması.....	89
Çizelge 5.25 Örnek 5.10' un $N=7, M=8$ ve $N=13, M=14$ için $ e_N $ mutlak hata, $ e_{N,M} $ tahmini mutlak hata ve $ E_{N,M} $ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	90

TEŞEKKÜR

Akademik hayatıma başladığımdan beri danışmanlığımı yürüten, her zaman tecrübelerini benimle paylaşan, maddi manevi desteğini benden esirgemeyen ve çalışmalarım konusunda beni sürekli motive eden saygıdeğer hocam Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamın tamamlanmasında bilgisini, tecrübesini benden hiç esirgemeyerek çalışma azmi ve bilim adamı vasıflarıyla bana her zaman örnek olan ve çalışmalarımda çok büyük yardımını gördüğüm saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mehmet SEZER’e ve hem lisans hayatım hem de yüksek öğrenim hayatım boyunca tecrübelerinden faydalandığım, gerek insani gerek bilim adamı vasıflarıyla örnek aldığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Necdet BİLDİK’e teşekkürü bir borç bilirim.

Üzerimde çok büyük emeği olan canım annem, babam ve kardeşlerime hayatım boyunca her an yanımda olup her türlü fedakarlığı göstererek bugünlere ulaşmama vesile oldukları için şükranlarımı sunar, göstermiş olduğu sabır, destek, anlayış ve yardımlarından dolayı sevgili eşim Gürcan BİÇER’e çok teşekkür ederim.

ÖZET

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kısmi diferansiyel denklemlerin tarihsel gelişimi anlatılmış kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm metotları ile ilgili literatür bilgisi sunulmuştur.

İkinci bölümde, kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili temel tanım ve kavramlara değinilmiştir. Ayrıca Bernoulli polinomlarının tarihsel gelişimi anlatılarak Bernoulli polinomlarının bazı özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için Bernoulli sıralama (collocation) metodu tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde, Bernoulli sıralama metodunun doğruluğunu göstermek amacı ile rezidü fonksiyonlarına dayalı hata analizi geliştirilmiştir.

Beşinci bölümde, Bernoulli sıralama (collocation) metodu ve rezidüel hata analizi kısmi diferansiyel denklemlerin çeşitli modellemelerine uygulanmıştır. Elde edilen çözümlerin tablo değerleri ve grafikleri verilerek birbirleri ile karşılaştırılmıştır.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise yapılan çalışmaya ait sonuçlar yorumlanmış ileride yapılabilecek çalışmalara dair önerilerde bulunulmuştur.

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, the historical development and literature of partial differential equations are presented.

In the second chapter, basic concepts and definitions of partial differential equations are mentioned. Also the historical development and some features of Bernoulli polynomials are given.

In the third chapter, Bernoulli collocation method is introduced to obtain the second order linear partial differential equations.

In the fourth chapter, the error analysis based on residual function is developed to demonstrate the accuracy of Bernoulli collocation method.

In the fifth chapter, Bernoulli collocation method and residual error analysis are applied to various model of partial differential equations. The table value and figures of the obtained solutions are given and compared each other.

In the sixth chapter, the results of the study are interpreted and related for future works are also suggested.

I.BÖLÜM

GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünün ilk ortaya çıkışındaki süreç 18. yüzyılın ortalarında Euler (1707-1783) ve d'Alembert'in (1717-1783) dalga denklemini keşfetmesiyle başlamıştır. Daha sonra Euler'in dikdörtgensel ve dairesel silindirin titreşimi problemini ele almasıyla iki boyutlu kısmi diferansiyel denklemler ortaya çıkmıştır. Euler bu denklemi çözmek için şimdilerde değişkenlerine ayırma metodu olarak bilinen metodu kullanmış ve çeşitli özel çözümler elde etmiştir. Euler son olarak sesin yayılımı üzerine olan çalışmalarında iki ve üç boyutlu uzaylardaki dalga denkleminin silindirik ve küresel dalga çözümlerini elde etmiştir. Bundan sonraki süreç Fourier serileri ve değişkenlerine ayırma metodundaki uygulamalarda ortaya çıkan özel fonksiyonların davranışları hakkındaki bilgi eksikliğinden dolayı sınırlanmıştır. Yerçekimi teorisi ile ilgili araştırmalar sonucu Laplace denklemi ortaya çıkmıştır. Potansiyel teorisi hakkındaki ilk önemli çalışma Legendre (1752-1833) tarafından 1782'de yapılmıştır. Legendre bu çalışmada küresel yerçekimini incelemiş ve Legendre polinomlarını tanıtmıştır. Legendre ve Laplace, temeli 19. yüzyılın en geniş çaplı çalışması olan harmonik fonksiyon teorisine dayanan potansiyel teorisi, Legendre polinomlarının kullanımı ve küresel harmonikler ile ilgili çalışmalarına 1780 li yıllar boyunca devam etmişlerdir. Bununla birlikte 18. yüzyılda ne Laplace denkleminin çözümü ne de özel fonksiyonların kullanımı ile ilgili gelişme olmamıştır.

19. yüzyılda kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili gelişmeler olağanüstü artış göstermiştir. Bu gelişmeler sadece fiziğin yeni alanlarının üzerine değil aynı zamanda analitik fonksiyon teorisi,

varyasyon analizi, adi diferansiyel denklemler ve diferansiyel geometri gibi matematiğin çeşitli alanlarında da kendini göstermiştir. İlk temel çalışma Fourier (1768-1830) tarafından 1807 yılında ısı iletimi ve trigonometrik seriler üzerine yapılmıştır. Fourier çalışmalarına devam ederek ısı iletimi denklemini türetmiş ve özel ısı denklemini değişkenlerine ayırma ve Fourier serileri aracılığıyla çözmüştür. Daha sonra Poisson (1781-1840) çok boyutlu problemleri çözmek için trigonometrik serilere ek olarak Legendre polinomlarını ve küresel harmonikleri kullanmıştır. Aynı zamanda Fourier serileri ile ilgili gelişmeler devam etmiş, Fourier, Cauchy (1789-1857) ve Poisson çeşitli ısı iletimi ve su dalgaları problemlerini çözmek için Fourier integrallerini kullanmışlardır.

19. yüzyıldaki matematikçiler Legendre ve Laplace tarafından başlatılan araştırmaları devam ettirmişlerdir. Poisson denkleminin türetilmesiyle ilgili ilk çalışma Gauss (1777-1855) tarafından yapılmıştır. Bununla birlikte Legendre, Laplace, Poisson ve Gauss'un bütün bu çalışmalarına rağmen halen Laplace denkleminin çözümünün genel özellikleri hakkında hiçbir şey bilinmemekteydi. 1828 yılında, Green (1793-1841), Green fonksiyonlarını türetmiş ve Green fonksiyonu kavramını tanıtmıştır.

19. yüzyılın ortalarına kadar matematikçiler Laplace ya da Poisson denklemlerinin çözümlerinin varlığını fiziksel açıdan kabul etmişlerdir. Özellikle Green, Green fonksiyonunun varlığını fiziksel olgulara dayandırmıştır. Bununla birlikte 19. yüzyılın diğer yarısında kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine geniş çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda sadece Laplace ve Poisson denklemleri değil aynı zamanda değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemler de ele alınmıştır. Özellikle Riemann (1826-1866) ve Hadamard (1865-1963) hiperbolik denklemler için başlangıç değer problemini, Picard (1856-1941) ve diğerleri eliptik denklemler için ve Cauchy ve Kowalevsky (1850-1891) analitik katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerinin genel sistemleri için başlangıç değer ya da Cauchy problemini ele almışlardır. Böylelikle matematikçiler farklı denklemler için farklı tip sınır ve başlangıç şartları kullanılması gerektiğinin farkına varmışlardır ve şimdilerde kullanılan eliptik, hiperbolik ve parabolik tip olmak üzere kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması ortaya çıkmıştır. Bu sınıflandırma 1889 da DuBois-Reymond (1831-1889) tarafından tanıtılmıştır. Genel kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili araştırmalara ek olarak Laplace denkleminin Dirichlet ve Neumann problemlerinin analitik fonksiyon teorisi, varyasyonlar analizi ve integral denklem metodu ile çözümlerinin araştırılması devam etmiştir. Özellikle Schwarz (1843-1921) ve Poincare (1854-1912) özdeğer probleminin varlığını ispatlamak için büyük çaba sarfetmişlerdir.

19. yüzyıl boyunca matematikçiler ve fizikçiler, 18. yüzyılda Euler ve d'Alembert tarafından ele alınan dalga hareketi teorisiyle ilgilenmeye devam etmişlerdir. Dalga denkleminin başlangıç-sınır değer problemini, Helmholtz denkleminin ise sınır değer problemini çözmek için eğrisel koordinatlarda değişkenlerine ayırma metoduyla ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Bessel (1784-

1846) tarafından ortaya konulan Bessel fonksiyon teorisi dalga yayılımı çalışmalarında büyük önem taşımaktadır. Dalga ve Helmholtz denklemlerinin başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinde değişkenlerine ayırma metoduna ek olarak Poisson, Helmholtz (1821-1894) ve Kirchhoff (1824-1887) tarafından integral gösterimleri de kullanılmıştır. Dalga yayılımı teorisinin en büyük araştırması 1864'de Maxwell tarafından ortaya konulan elektromanyetizma kanunu üzerine olmuştur. Maxwell (1831-1879) kendi denklemlerinden elektromanyetik dalgaların uzayda ışık hızında hareket ettiğini ve ışığın kendisinin elektromanyetik bir olay olduğunu ortaya atmıştır. Maxwell'in çalışmaları 19. yüzyılda matematiksel fizik adına en ilgi çeken çalışmalar olmuştur.

Bu yüzyılın başlarında kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerini çözmek için integral denklemler teorisinin gelişimi ile birlikte kısmi diferansiyel denklemler teorisinde yeni büyük bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır. İntegral denklemler 1870 yılında Neumann (1832-1925) tarafından Laplace denkleminin Dirichlet problemini çözmek için ardışık yaklaşımlar metodunda kullanılmıştır. Fakat Neumann integral denklemler ile ilgili sistematik genel bir teori ortaya koyamamıştır. Bununla ilgili ilk adım Volterra (1860-1940) tarafından 1896 ve 1897 yılları arasında şimdilerde ikinci tip Volterra denklemi olarak bilinen denklemleri çözmek için ardışık yaklaşımlar metodunun kullanılmasıyla ancak teori bir anlam kazanmıştır. Volterra'dan ilham alan Fredholm kendi teorisini geliştirmiş ve bu teoriyi Laplace denkleminin Dirichlet problemini çözmek için kullanmıştır. Hilbert Fredholm'ün fikirlerini basit olarak formülize etmiş keyfi fonksiyonların integral denklemlerin öz fonksiyon serisine açılabilirliğini ortaya atmış sonuçlarını matematiksel fiziğe uygulamıştır. İntegral denklemler metodu özellikle akustik, elektromanyetik ve orta büyüklükte esnek dalga problemleri gibi bir çok matematiksel fizik problemlerine uygulanmıştır.

Volterra, Fredholm ve Hilbertin çalışmaları 20. yüzyıla yansımış kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır değer problemlerinin uygulamaları ile fonksiyonel analiz ve Hilbert uzay teorisine öncülük etmiştir.

19. yüzyıldaki çalışmalara geri dönülürse kısmi diferansiyel denklemler ilk olarak çözümün var ve tek olması anlamına gelen iyi tanımlanmış problemler ile birlikte sürekli olan sınır ve başlangıç şartlarına bağlı problemlere uygulanmıştır. Bu gibi problemlerde serilerin elde edilmesi ve çözümün integral gösterimi ön plana çıkmıştır. Fakat bilimdeki ihtiyaç arttıkça bu gibi gösterimler nümerik hesaplamalar için uygun olmamaya başlamıştır. Böylece matematikçiler, matematiksel fiziğin sınır ve başlangıç değer problemlerinin çözümü için bilgisayar bilimi ile etkileşimi olan yeni nümerik analiz metotları üretmişlerdir. Aynı zamanda lineer modellemelerin belli bir alanda yararlı ve geçerli olduğu, bir çok fiziksel olayın sadece lineer olmayan modellemeler ile ifade edilebileceği anlaşılmıştır. Akışkan ve gaz dinamiği,

esneklik ve kimyasal reaksiyonlardaki açığa çıkan zorlu problemlerin artışı ile birlikte 20. yüzyılda matematikçiler lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem çalışmalarına yönelmişlerdir. Son olarak son yarım yüzyılda matematikçiler iyi tanımlanmış problemlerin sadece fizik problemleri olmadığını farkına varmışlardır. Özellikle sarsıntısız uçak kanadı tasarımı ve radar, sonar ve tıp ile ilgili ters saçılma problemleri matematikçileri yeni metotlar üretmeye teşvik etmiştir (Colton, 1988).

Kısmi diferansiyel denklemlerin çeşitli sınıflarının yaklaşık çözümleri üzerine hata analizi ile birlikte bir çok çözüm metodu geliştirilmiştir. Dehghan ve Ghesmati (2010) ve Dehghan ve Shokri (2008) ikinci mertebeden bir boyutlu hiperbolik telgraf denklemlerinin çözümlerini incelemişlerdir. Lakestani ve Saray (2010) bir boyutlu ikinci mertebeden lineer telgraf denklemlerinin çözümünde interpolasyon ölçekleme fonksiyonlarına dayalı bir metot geliştirmişlerdir. Ayrıca Telgraf denklemlerinin çözümlerinde polinom olmayan spline metodu (Ding et al, 2012), ayrık öz fonksiyon metodu (Aloy et al, 2007), diferansiyel dönüşüm metodu (Biazar and Eslami, 2010), Adomian ayrıştırma metodu (Abdou, 2005), (Biazar and Ebrahimi, 2007), Legendre multiwavelet Galerkin metodu (Yousefi, 2010) ve Chebyshev Tau metodu (Saadatmandi and Dehghan, 2010) gibi bir çok nümerik yöntemler kullanılmıştır. Lineer olmayan telgraf denklemleri için çekirdek metodu (Yao, 2011) ve Rothe's yaklaşımına dayalı bir metot geliştirilmiştir (Azab and El-Gamel, 2007). İki boyutlu hiperbolik telgraf denklemlerinin çözümlerinde diferansiyel kuadratik metodu (Jiwari et al, 2012) ve modifiye edilmiş B-spline diferansiyel kuadratik metodu kullanılmıştır (Mittal, 2014).

Dehghan ve Shokri (2009-a) iki boyutlu uzayda değişken katsayılı lineer hiperbolik denklemlerin çözümlerinde radyal temel fonksiyonlarını kullanmışlardır. Karışık koşullar altında ikinci mertebeden hiperbolik denklemlerin çözümleri için Rashidina ve diğerleri (2007) spline metodunu ve Ding ve Zhang (2008), parametrelili spline metodunu geliştirmişlerdir.

Lokal bir boyutlu sonlu farklar metodu, bir boyutlu parabolik diferansiyel denklemlerin çözümlerinde (Wang, 2011) ve iki boyutlu parabolik diferansiyel denklemlerin çözümlerinde (Wang T. and Wang Y., 2014) kullanılmıştır. Haar ve Legendre waveletlerine dayalı nümerik metot İslam ve diğerleri (2013) tarafından geliştirilmiştir. Random parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde Galerkin metodu (Gittelsohn et al, 2014), lineer ve lineer olmayan parabolik ve hiperbolik denklemlerin çözümleri için Adomian ayrıştırma metodu (Bougoffa and Rach, 2013), Neumann sınır şartı altında lineer olmayan parabolik diferansiyel denklemlerin çözümleri için kübik B-splines metodu (Mittal and Jain, 2012), dördüncü mertebeden parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için B-splines metodu (Mittal and Jain, 2011) ve üç boyutlu parabolik kısmi diferansiyel denklemler için lokal meshless metodu (Yao et al, 2012) kullanılmıştır. Ayrıca radyal temel fonksiyonları kullanılarak bir boyutlu parabolik denklemler (Dehghan and Tatari, 2006) ve non-local parabolik kısmi diferansiyel denklemler çözülmüştür

(Tatari and Dehghan, 2009). Dördüncü mertebeden parabolik kısmi diferansiyel denklemler ayrıca Adomian ayrıştırma metodu kullanılarak da çözülmüştür (Wazwaz, 2002). Ayrıca Dehghan (2004) non-local sınır şartları ile iki boyutlu parabolik kısmi diferansiyel denklemler için Adomian ayrıştırma metodunu geliştirmiştir.

Isı dağılımı problemini çözmek için kübik spline fark metodu (Wang et al, 2012), kompakt sonlu farklar yaklaşımına dayalı metot (Mohebbi and Dehghan, 2010), sonlu farklar metodu (Azari and Zhang, 2010), cubic B-splines sıralama metodu (Mittal and Jain, 2012) ve Bessel sıralama metodu (Yüzbaşı and Şahin, 2013) kullanılmıştır. Lineer olmayan ısı dağılımı problemi için ise diferansiyel cebirsel denklem metodu (Liu, 2014), üstel fonksiyon metodu (Wen et al, 2009) kullanılırken kesirli ısı dağılım problemleri Sinc-Legendre sıralama metodu (Saatmandi et al, 2012) ve Tau yaklaşımı (Saatmandi and Dehghan, 2011) ile çözülmüştür.

Klein-Gordon denkleminin çözümlerinde Adomian ayrıştırma metodu (El-Sayed, 2003), (Biazar and Ebrahimi, 2006), tanh ve sin-cos metodu (Wazwaz, 2005), ikincil denklem metodu (Sirendaoreji, 2007), He'nin varyasyonel iterasyon metodu (Abbasbandy, 2007), asimptotik iterasyon metodu (Taşkın et al, 2008), radyal temel fonksiyonları (Dehghan and Shokri, 2009), kübik B-spline metodu (Rashidina et al, 2010) ve Taylor matris metodu (Bülbül and Sezer, 2013) kullanılmıştır.

Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde Legendre spectral metodu (Doha and Al-Kholi, 2001), küresel Tao metodu (Doha and Abd-Elhameed, 2005), radyal temel fonksiyonları (Hu et al, 2005), (Duy and Tran-Cong, 2009), Sinc-Galerkin metodu (Alonso and Bowers, 2009), Shannon wavelet algoritması (Gobbi and Spigler, 2012) ve wavelet sıralama metodu (Aziz et al, 2013) kullanılmıştır. Helmholtz denklemlerinin çözümlerinde ise sonlu farklar metodu (Singer and Turkel, 2006), (Britt et al, 2010) ve kuadratik spline sıralama metodu (Fairweather et al, 2011) kullanılmıştır. Abushama ve Bialecki (2008) poisson denklemlerini modifiye edilmiş spline sıralama metodunu kullanarak çözmüştür. Laplace denkleminin çözümünde Ahmadi ve Abidi, Chebyshev Tau (2007) tekniğini geliştirmişlerdir.

Ayrıca kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde Chebyshev polinom yaklaşımı (Akyüz-Daşcıoğlu, 2009), Taylor polinom çözümü (Bülbül and Sezer, 2011), Bernstein seri çözümü (Isık et al, 2014), diferansiyel dönüşüm metodu, Adomian ayrıştırma metodu ve varyasyonel iterasyon metodu (Bildik and Konuralp, 2006) kullanılmıştır. Heat-like ve wave-like denklemlerinin çözümleri için Adomian ayrıştırma metodu (Wazwaz and Gorguis, 2004), varyasyonel iterasyon metodu (Batiha et al, 2007), He'nin homotopi pertürbasyon metodu (Öziş and Ağırseveni, 2008) ve varyasyonel iterasyon metodu (Shou and He, 2008) kullanılmıştır. Kesirli heat-like ve wave-like denklemleri için Momani (2005) ayrıştırma metodunu kullanmıştır.

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Taylor polinom çözümü (Bülbül, 2011), Chebyshev polinom çözümü (Yüksel, 2011), Bessel sıralama metodu (Yüzbaşı, 2012) ve Legendre polinom çözümü (Kemancı, 2012) kullanılmıştır. Bernoulli polinomları kullanılarak lineer Fredholm integro diferansiyel fark denklemleri (Erdem et al, 2011), yüksek mertebeden lineer diferansiyel-fark denklemleri (Erdem and Yalçınbaş, 2012) ve lineer delay fark denklemleri (Erdem and Yalçınbaş, 2012) çözülmüştür.

II. BÖLÜM

KAYNAK ÖZETLERİ

2.1 Kısmi Diferansiyel Denklemler

Akışkanlar dinamiği, elektromanyetik teori, kuantum mekaniği ve trafik akışı gibi bir çok fiziksel problem kısmi diferansiyel denklemler ile tanımlanır. Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerine ulaşmak oldukça zor olduğundan yaklaşık çözümlere ihtiyaç duyulmuştur. Bununla birlikte tutarlı bir araştırma yürütmek için genel teoriyi anlamak çok önemlidir. Örneğin, geçerli yaklaşık çözümü elde etmek için elimizdeki kısmi diferansiyel denklemin çeşidini belirlememiz gerekir. Gerçekten bazı kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için o denkleme uygun şartlar verilmelidir. Genel teori bilgileri olmaksızın bu denklemlerin kötü tanımlanmış olup olmadığını veya kullanılan çözüm metodunun doğru olup olmadığını anlayamayız.

Tanım 2.1 (Kısmi Türev) $x_1, x_2, \dots, x_n$, n bağımsız değişkenli f fonksiyonunun tam diferansiyeli

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

olmak üzere $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ baz formunun lineer kombinasyonudur. Burada kısmi türevler

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2 Bir bağımlı değişkenin birden çok bağımsız değişkene göre kısmi türevleri ile birlikte bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. u bağımlı ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi diferansiyel denklem

$$F = (x_1, \dots, x_n, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

olarak ifade edilebilir.

Bir kısmi diferansiyel denklemin mertebesi o denklemdeki en yüksek türeve sahip olan terimin mertebesine eşittir.

Adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi kısmi diferansiyel denklemlerde de lineer denklemler ile lineer olmayan denklemleri ayırt edebilmek oldukça önemlidir.

Lineer denklem, bağımlı değişkenlerin ya da bağımlı değişkenlerin türevlerinin çarpımını denklemde ya da sınır veya başlangıç koşullarında içermez.

Örnek olarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ birinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklem (Basit dalga denklemi)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi(x, y), \text{ ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklem (Poisson denklemi)}$$

verilebilir.

Tanım 2.3 Bir kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevlerine göre lineer ise bu denkleme yarı lineer denklem denir. Örnek olarak

$$(u+3) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \sin u$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0$$

denklemleri verilebilir.

Tanım 2.4 Eğer en yüksek mertebeden türeve sahip terimin katsayısı sadece bağımsız değişkenin fonksiyonu ise böyle bir yarı lineer denkleme hemen hemen lineer denklem denir.

Örneğin

$$(x+3)\frac{\partial u}{\partial x} + xy^2\frac{\partial u}{\partial y} = u^3$$

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (xy+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u\frac{\partial u}{\partial x} + u^2\frac{\partial u}{\partial y} = u^4.$$

Süperpozisyon Prensipleri : Lineer denklemlerde eğer u_1 ve u_2 fonksiyonlarının her ikisi birden verilen denklemi sağlıyorsa herhangi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha u_1 + \beta u_2$ de verilen denklemi sağlar. Bu özellik genellikle lineer denklemlerin çözümünü oluşturmak için kullanılır. Fakat bu özellik lineer olmayan denklemler için geçerli değildir. Böyle olması lineer olmayan denklemleri daha ilgi çekici fakat daha zor yapar (School of Mathematics, University of Leeds MATH3414, lecture notes).

2.1.1 İkinci Mertebe Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bir bölge ve A, B, C, D, E, F ve G , Ω da tanımlanmış x ve y değişkenlerinin fonksiyonları olsunlar. A, B ve C fonksiyonları $C^2(\Omega)$ sınıfından ve Ω da hepsi birden sıfır olmayan fonksiyonlar olsunlar. İkinci mertebeden lineer, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem,

$$Lu = A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u = G(x, y)$$

biçimindedir. Ω da tanımlanmış,

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - A(x, y)C(x, y)$$

fonksiyonuna L operatörünün diskriminantı denir.

Tanım 2.5 $(x_0, y_0) \in \Omega$ bir nokta olsun.

(a) $\Delta(x_0, y_0) > 0$ ise L operatörü (x_0, y_0) noktasında hiperboliktir.

(b) $\Delta(x_0, y_0) = 0$ ise L operatörü (x_0, y_0) noktasında paraboliktir.

(c) $\Delta(x_0, y_0) < 0$ ise L operatörü (x_0, y_0) noktasında eliptiktir (Anar, 2005).

2.1.2 Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Matematiksel Modellemeleri

Kısmi diferansiyel denklemler, temel fizik kurallarının ve çeşitli uzay ve zaman skalalarında doğa olaylarının matematiksel tanımını ortaya koymaktadır. Örneğin, astronomik skalaya sahip olaylar yerçekimi kuralları tarafından kontrol edilmektedir. Kuantum mekaniği atomik skalalardaki olayları tanımlamada kullanılırken elektromanyetizma teorisi günlük olaylardaki skalaları kontrol eder. Birçok önemli problem büyük sayıdaki nesnelerin birbirleriyle etkileşiminden ortaya çıkar. Bu problemleri tanımlamak için temel fizik kurallarını kullanmak zordur. Örneğin sandalyeye otururken yere düşmeyiz. Bunun temel nedeni sandalyeyi oluşturan atomlar arasındaki elektriksel güçtür. Bu güçler sertliği ile sandalyeyi tutar. Bir çok sayıdaki nesne arasındaki etkileşimi tarif etmek için elektromanyetizma denklemlerini (Maxwell's denklemleri) çözmenin mümkün olmadığı açıktır. Bir başka örnekte gaz akışını ele alırsak her molekül Newton kurallarına dayanır fakat uygulamada özgün moleküllerin Avogadro sayısındaki değişimi çözemeyiz. Bu nedenle bir çok uygulamada daha basit modeller yapmaya ihtiyaç vardır (Pinchover, Rubinstein, 2005).

Dalga Denklemi

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

denklemine bir boyutlu homojen dalga denklemi,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t)$$

denklemine ise bir boyutlu homojen olmayan dalga denklemi denir. Bu denklemlerde c , pozitif bir sabit ve F dalgaya etki eden bilinen bir dış kuvvet olmak üzere x değişkeni yer, t değişkeni zamanı göstermektedir.

Telin titreşiminin yansıması, boyuna titreşim hareketi, boyuna ses dalgaları, kablolardaki elektrik sinyalleri, zardaki titreşimin yansıması, uzaydaki ses dalgaları, elektromanyetik dalgalar fizikte dalga denklemlerinin oluşumuna örnek olarak verebileceğimiz durumların bazılarıdır (Sneddon, 2006). Dalga denklemi, en çok titreşen yay hareketinin modelinde kullanılır (Weinberger, 1965). Ayrıca elektrodinamik, elektromanyetik, akışkanlar mekaniği ve akustik gibi alanlardaki uygulamalarda da dalga denklemi ile karşılaşılır (Polyanin, 2002). Bir boyutlu dalga denkleminin çözümü bize l uzunluğunda titreşim halinde olan bir telden t saniye sonra x kadar uzaklıktaki enine yer değişimi verir. Bu tip denklemler başlangıç ve sınır koşulları ile ele alınır (Yüzbaşı, 2012).

Son yıllarda,

$$u_{tt} - u_{xx} = q(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T,$$

dalga denklemi

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, t) = g_1(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

Dirichlet sınır koşulları,

$$u_t(x, 0) = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

Neumann sınır koşulu ve

$$\int_0^l u(x, t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

lineer olmayan (nonlocal) integral koşulu ile alınarak değişik metotlar ile bu problemin nümerik çözümleri üzerine çalışmalar yapılmıştır (Dehghan, 2005), (Yousefi et al, 2010). Burada $(x, t) \in [0, l] \times [0, T]$ için q, f_1, f_2, g_1 ve g_2 tanımlı fonksiyonlardır. Ayrıca bu problemin çözümün varlık ve teklik teoremi Bouzani (1999) tarafından verilmiştir (Yüzbaşı, 2012).

Telgraf Denklemi

α, β ve γ sırasıyla rezistans, kapasitans ve indüktans sabitleri olmak üzere, x konumunda ve t anındaki telgraf denklemi

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t)$$

şeklindedir. Telgraf denklemleri genellikle kablo iletim hattındaki elektrik sinyallerinin yayılımında kullanılmaktadır (Bülbül, 2011).

Klein-Gordon Denklemi

a ve $b > 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu$$

olarak verilen denkleme lineer Klein-Gordon denklemi denir. Klein-Gordon denklemlerinin kuantum fiziğinde ve yoğun madde fiziğinde geniş alanda uygulamaları bulunmaktadır. (Seakweng Vong, Zhibo Wang, 2014).

Isı Denklemi

Isı denklemi, parabolik tipten lineer kısmi diferansiyel denklemlerin en önemli örneğidir.

$$u_t = ku_{xx}$$

denklemine bir boyutlu homojen ısı denklemi;

$$u_t - ku_{xx} = F(x, t)$$

denklemine de bir boyutlu homojen olmayan ısı denklemi denir. Burada k , pozitif bir sabittir. (Çağlıyan ve Çelebi, 2010). Bu denklemin çözümü, termal olarak izole edilmiş bir çubuğun ucundan x kadar uzaklıkta ve t saniye sonraki sıcaklığı verir. Bu tip denklemler başlangıç ve sınır değer problemleridir (Bülbül, 2011).

Laplace Denklemi

Laplace denklemi, lineer eliptik tipten kısmi diferansiyel denklemlerin çok önemli bir denklemidir.

n boyutlu Laplace denklemi

$$\nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) \text{ ve } U(x) = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

olmak üzere

$$\Delta U(x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

şeklinde ifade edilir (Anar, 2005).

Laplace denklemi için iyi konulmuş problemler, sınır değer problemleridir. Bir bölgede Laplace denklemini ve bölgenin sınırı üzerinde önceden verilen bir koşulu sağlayan bir fonksiyonun bulunması problemine Laplace denklemi için bir sınır değer problemi denir. Laplace denklemi için Dirichlet ve Neumann denilen iki ana sınır değer problemi vardır. Bazen Dirichlet problemine birinci sınır değer problemi; Neumann sınır problemine ise ikinci sınır değer problemi denir (Çağlıyan ve Çelebi, 2010).

Poisson Denklemi

$D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve $\rho(x)$ ise D bölgesinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \rho(x), \quad x \in D$$

denklemine Poisson denklemi denir (Anar, 2005).

Poisson denklemleri St. Venant teorisini özetler. Poisson denklemleri ayrıca sıkıştırılmaz akışkanların yavaş hareketlerinde, elektrikteki ters-kare metodunda ve yük yoğunluğu ya da kutup kuvvetinin sıfır olmadığı noktalardaki maddelerin manyetizmalarında karşımıza çıkar (Smith, 1978).

Helmholtz denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = -\theta(x)$$

ile verilen denklem Helmholtz denklemi olarak adlandırılır. Bu denklemler zamanla harmonik değişim gösteren elektromanyetik veya akustik dalgalarla uyarılmış ortamlardaki alan dağılımını modellemek için kullanılır. $\lambda < 0$ durumu, madde transfer problemlerini ifade etmektedir (Bülbül, 2011).

2.1.3 Başlangıç Değer Problemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

denklemi ile bağlantılı olan temel problem, başlangıç değer problemi, veya Cauchy problemidir. Bu problem (2.1) denklemini ve verilmiş,

$$u(x_1, \dots, x_n, 0) = \Phi(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, \dots, x_n, 0) = \psi(x_1, \dots, x_n)$$

başlangıç koşullarını sağlayan, $u(x_1, \dots, x_n, t)$ çözümünün aranması problemidir. Φ ve ψ fonksiyonları $t = 0$ da x uzayında tanımlanmış fonksiyonlardır. Φ ve ψ ye başlangıç verileri

denir. $\mathbb{R}^{n+1} (x, t)$ uzayında $t = 0$ düzlemi, problemin başlangıç yüzeyi veya başlangıç manifoldu olarak adlandırılır (Anar, 2005).

2.1.4 Yardımcı Koşullar

a) Sınır koşulları: Uygulamalarda, x_i ler genellikle uzay değişkenleridir ve çözüm Ω uzayında bir bölgede çözülebilir. Bu durumda $\partial\Omega$ sınırında sağlanacak olan bazı koşullar olacaktır. Bu koşullara sınır koşulları denir (School of Mathematics, University of Leeds MATH 3414 lecture notes). n dış birim normal vektörü olmak üzere bazı sınır koşulları

Dirichlet koşulu:

$$u(x, t) = f(x, t) \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$

Neumann (veya akı) koşulu:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = f(x, t) \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$

Karışık (Robin veya yayılım) koşulu:

$$u(x, t) + \beta(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = f(x, t) \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$

şeklindedir (Bülbul 2011).

b) Başlangıç Koşulları: Ayrıca uygulamalarda, bağımsız değişkenlerin birisi zaman (t) değişkeni olabilir. Bu durumda bazı başlangıç koşulları olacaktır. Yani $t = 0$ anında u bağımlı değişkeni Ω bölgesindedir (School of Mathematics, University of Leeds MATH 3414, lecture notes).

2.1.5 İyi Tanımlanmış Problemler

Verilen başlangıç ve sınır koşul fonksiyonları, katsayı fonksiyonları ve kısmi diferansiyel denklemdaki kaynak terimi ile birlikte, kısmi diferansiyel denklem ile modellenen problemin verilerini oluşturur denir. Eğer verilerdeki küçük değişimler, çözümde küçük değişimler oluşturuyorsa, çözüm veriye sürekli bağımlıdır denir. Eğer Problemin bir çözümü varsa, çözüm

tek ise ve çözüm verilere sürekli bağımlı ise, problem iyi tanımlanmış olarak adlandırılır. Eğer koşullardan herhangi biri sağlanmıyorsa, o zaman probleme kötü tanımlanmış denir.

2.2 Bernoulli Polinomları

2.2.1 Tarihi Gelişim

İsviçreli matematik, mekanik ve astronomi bilgini olan Jacques Bernoulli Seriler kuramının ve olasılıklar hesabının gelişmesine katkıda bulunmuştur.

Jacques Bernoulli 27 Aralık 1654'de Basel'de doğmuştur. Babası Nikolaus Bernoulli varlıklı bir bankacının kızıyla evlenmiş ve ecza ticaretinden büyük bir servet yapmıştır. Jacques 1684'te zengin bir eczacının kızı olan Judith Stupanus ile evlenmiştir.

Babasının karşı çıkmasına karşın öğrenimine matematik ve astronomiyle başlayan Jacques Bernoulli 1671'de felsefe, 1676'da da tanrıbilim konusunda yüksek lisans derecesi almıştır. Aynı yıl Cenevre'de matematik dersi vermeye ve ilk bilimsel çalışmalarını yapmaya başlamıştır. 1677'den sonra gittiği Fransa'da iki yıl boyunca Descartes ve Malebranche'ın bilimsel düşünce ve yöntemlerini öğrenmek fırsatını bulan Jacques Bernoulli, sonradan 1681-1682 yılları arasında da Hollanda ve İngiltere'ye giderek Jan Hudde ve Robert Hooke gibi bilim adamlarıyla görüş alışverişinde bulunmuştur.

Basel'e döndükten sonra, katı hal mekaniği ve sıvı cisimler üzerine deneysel çalışmalara girilerek, o dönemin en etkin dergilerinde çağın bilimsel sorunlarına yönelik makaleler yayımlamaya başlamıştır. O yıllardaki en önemli çalışması, Descartes'm Geometrie'sini inceledikten sonra, 1687'de bir üçgenin birbirine dik iki doğru tarafından dört eşit parçaya bölünebileceğini göstermesidir.

1687'de Basel Üniversitesi'nde matematik profesörü olan Bernoulli, bu görevini yaşamının sonuna değin sürdürüp 16 Ağustos 1705'de Basel'de ölmüştür.

Leibnitz 1687'de yerçekimsel bir alandaki sabit iniş eğrisinin biçimini belirleme problemini ortaya atmış, çözümünü önce kendisi, daha sonra 1689'da Huygens bulmuştur. Jacques Bernoulli'nin bu çözümleri incelemesi, onun Leibnitz'in diferansiyel hesap çalışmalarını öğrenmesine neden olmuştur.

Jacques Bernoulli matematik çalışmalarını sürdürürken, babasının isteğine uyarak tıp öğrenimi gören kardeşi Jean da babasından gizlice ağabeyinin gözetimi altında matematik öğrenimine

başlamıştır. Ne var ki çalışmaya birlikte başlamış olmalarına karşın sonradan, ilgilendikleri konuyu bile birbirlerinden gizleyecek duruma gelen iki kardeş arasındaki çekişme ömür boyu sürmüştür.



Jean Bernoulli 1696’da, Gröningen Üniversitesi’nde matematik profesörüyken, bir noktadan başka bir noktaya inen bir cismin inişini en kısa zamanda yapabilmesi için izlemesi gereken yolun belirlenmesi problemini ortaya atmıştır. Bugün “brakistokron” problemi adıyla bilinen bu problem konusunda Jacques kardeşini kendi düşüncelerini çalmakla suçlayınca, iki kardeşin arası açılmıştır; ancak aralarındaki tartışma, birbirlerinin ortaya attıkları problemlerle uğraşmalarını hiçbir zaman engellememiştir. Nitekim Jacques, kardeşinden bir yıl sonra “brakistokron” problemini Leibnitz’inkine benzer bir biçimde, ama ondan bağımsız olarak çözdüğü gibi, bu probleme karşıt olarak “izoperimetri” ya da “eşçevre” problemi olarak bilinen yeni bir soru ortaya atmıştır. Verilen $A(-a,0)$ ve $B(a,0)$ gibi iki noktayı birbirine bağlayan sabit uzunluktaki bütün eğriler arasından $\int S''y'' dx$ integralini maksimum yapan eğrinin bulunmasına ilişkin bu problem, bugün “değişimler hesabı” olarak bilinen matematik dalının

doğuş nedeni kabul edilir. Jean Bernoulli ile Leibnitz bu problem üzerinde çok uğraşmalarına karşın doğru çözümü bulamamışlardır. Kardeşinin 1697’de verdiği yanıtı inceleyen Jacques Bernoulli, çözümün yanlış olduğunu gösterdiği gibi, izoperimetri probleminin doğru çözümünü de 1701’de yine kendisi vermiştir.

Jacques Bernoulli’nin bilimsel çalışmalarının belirgin özelliği, büyük kuramların temelini atmış olmasından değil, belli problemlerin açık ve ustaca verilmiş analitik çözümlerinden kaynaklanır.

Örneğin kendi adını taşıyan, $y = p(x)y + q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$) diferansiyel denkleminin verdiği çözüm bunun en anlamlı örneklerinden biridir.

Doğa bilimlerinde temel felsefesini, doğadaki tüm süreçlerin sürekli olduğu inancına dayandıran Bernoulli’nin mekanikle ilgili çalışmalarında da bu düşünce belirgin bir biçimde gözlenmektedir. Jacques Bernoulli, mekanik, değişimler (varyasyonlar) hesabı, olasılıklar hesabı, seriler kuramı gibi kuramların gelişmesine olduğu kadar, cebirin ve sonsuz küçükler hesabının gelişmesine de önemli katkıda bulunmuş, çalışmalarıyla yüksek analizde kullanılan birçok yöntemin doğuşunu hazırlamıştır (Smith, 1923).

2.2.2 Bernoulli Polinomları ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.6 Herhangi x kompleks sayısı için $B_n(x)$ Bernoulli polinomunun genel ifadesi,

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

şeklindedir. Burada $|z| < 2\pi$ dir. $B_n(0)$ sayılarına Bernoulli sayıları denir ve B_n ile gösterilir.

Böylece $|z| < 2\pi$ olmak üzere

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

şeklinde yazılır.

Teorem 2.1 $B_n(x)$ fonksiyonu x in bir polinomu ise, bu taktirde

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

İspat : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1} e^{xz} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n \right)$ elde edilir. z^n lerin katsayıları eşitlendiğinde

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$$

denklemleri elde edilir.

Teorem 2.2 $B_n(x)$ Bernoulli polinomları $n \geq 1$ için

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

fark denklemini sağlar. Böylece eğer $n \geq 2$ ise

$$B_n(0) = B_n(1)$$

elde edilir.

İspat : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1) - B_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^{n+1}$

denklemlerinden

$$z \frac{e^{(x+1)z}}{e^z - 1} - z \frac{e^{xz}}{e^z - 1} = ze^{xz}$$

özelliliği elde edilir.

Teorem 2.3 $n \geq 2$ için

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

elde edilir.

Bu teoremden Bernoulli sayılarını hesaplamak için tekrarlama bağıntısı elde edilir. Tanım 2.6 dan $B_0 = 1$ olduğu kabul edilirse diğer bazı Bernoulli sayıları aşağıdaki gibidir:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}, B_9 = 0, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{11} = 0, \dots$$

Bernoulli sayıları yardımı ile Teorem 2.1 kullanılarak bazı $B_n(x)$ Bernoulli polinomları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$$

$$B_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x$$

$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x$$

$$B_{10}(x) = x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}$$

$\vdots$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k x^{n-k}, \quad (b_k = B_k = B_k(0) \text{ Bernoulli Sayısı olmak üzere})$$

(Apostol, 1976).

2.2.2.1 Bernoulli Polinomları ile ilgili Bazı Bağntı ve Formüller

1. Türev ve İntegral Bağntıları

$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k x^{n-k}$ ifadesinin her iki tarafının diferansiyelini alınırsa,

$$\frac{d}{dx} B_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) b_k x^{n-k-1} = n B_{n-1}(x)$$

olur. Buradan

$$\frac{d^p}{dx^p} B_n(x) = \frac{n!}{(n-p)!} B_{n-p}(x)$$

elde edilir.

$\frac{d}{dx} B_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) b_k x^{n-k-1} = n B_{n-1}(x)$ denkleminde n yerine $n+1$ yazılır ve integral

alınırsa

$$\int_a^x B_n(y) dy = \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(x) - B_{n+1}(a)]$$

denklemini bulunur.

2. Fark Bağntıları

$$B_0(x+1) = B_0(x)$$

$$B_1(x+1) = B_1(x) + 1$$

$$B_n(x+1) = B_n(x) + n x^{n-1}, \quad (n \geq 2)$$

$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$ ifasında x yerine $x+1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{ze^{(x+1)z}}{e^z - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} z^n \\ \Rightarrow ze^{xz} + \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} B_n(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

z^n 'in katsayılarını karşılaştırılırsa,

$$B_{n+1}(x) = B_n(x) + nx^{n-1}$$

ifadesi bulunur.

3. Toplam Formülü

$$\sum_{s=1}^m s^n = \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}] , \quad n \geq 1$$

$$s^n = \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(s+1) - B_{n+1}(s)] \text{ 'dir.}$$

Buradan,

$$\sum_{s=1}^m s^n = \sum_{s=0}^m s^n = \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)] \quad \text{elde edilir.}$$

4. Simetrier

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

$$(-1)^n B_n(-x) = B_n(x) + nx^{n-1}.$$

5. Çarpım Bağıntısı

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{n=0}^{m-1} B_n \left(x + \frac{n}{m} \right).$$

6. Çarpımın İntegrali

$$\int_0^1 B_n(x) B_m(x) dx = (-1)^{n-1} \frac{m!n!}{(m+n)!} B_{n+m} , \quad m, n \geq 1.$$

7. Fourier Seri Bağıntısı

$$B_n(x) = \frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^n}.$$

8. Ters Dönüşüm Formülü

$$x^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x).$$

9. Falling Factorial Bağıntısı

$$B_{n+1}(x) = B_{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_{k+1}.$$

$$10. \int_0^1 B_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$11. B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$$

$$12. B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -(1 - 2^{1-n}) B_n(0)$$

$$13. \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x) = (n+1)x^n$$

$$14. \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

$$15. B_n = \frac{-nT_{n-1}}{2^n(2^n - 1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$16. B_{2n-1}(x) = 2(-1)^{n+1}(2n-1)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi mx)}{(2\pi m)^{2n-1}}$$

$$B_{2n}(x) = 2(-1)^{n+1}(2n)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi mx)}{(2\pi m)^{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots \text{ ve } 0 \leq x \leq 1 \text{ (Çay, 2011)}.$$

III. Bölüm

PROBLEMİN TANITILMASI VE ÇÖZÜM METODU

Bu çalışmada fizik ve mühendislik alanlarındaki problemlerin yanı sıra, kimya ve biyoloji alanlarındaki problemlerin çözülmesinde bir matematiksel model olarak en çok kullanılan denklemlerden birisi olan, lineer ikinci mertebe

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y) u = G(x, y) \quad (3.1)$$

kısmi diferansiyel denklemlerin Bernoulli polinomları kullanılarak çözümleri incelenecektir. Bu çözümler incelenirken $\Omega = \{(x, y) : -1 \leq x, y \leq 1\}$ dikdörtgensel bölge ve $\partial\Omega$ de Ω 'nın sınırı olmak üzere $\partial\Omega$ 'da tanımlanan aşağıdaki koşullar ele alınacaktır (Akyüz-Daşcıoğlu, 2009). Koşullar:

i. $x = \alpha_k$ ve $y = \beta_k$ noktalarında verildiğinde, α_k ve β_k sabitler olmak üzere

$$\sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{i,j}^k u^{(i,j)}(\alpha_k, \beta_k) = \lambda \quad . \quad (3.2)$$

ii. $y = \gamma_k$ noktasında verildiğinde, γ_k sabit olmak üzere

$$\sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{i,j}^k(x) u^{(i,j)}(x, \gamma_k) = g(x). \quad (3.3)$$

iii. $x = \eta_k$ noktasında verildiğinde, η_k sabit olmak üzere

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{i,j}^k(y) u^{(i,j)}(\eta_k, y) = h(y). \quad (3.4)$$

Yukarıda tanımlanan (3.1), (3.2), (3.3) ve (3.4) denklemlerindeki $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $D(x, y)$, $E(x, y)$, $F(x, y)$ ve $G(x, y)$ fonksiyonları Ω da tanımlı, $g(x)$ ve $b_{i,j}^k(x)$ ler $-1 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı ve $h(y)$ ve $c_{i,j}^k(y)$ ler de $-1 \leq y \leq 1$ aralığında tanımlı fonksiyonlardır. $t, p, m \in Z^+$ ve $a_{i,j}^k$, λ bilinen sabitlerdir.

(3.1) denklemindeki $u(x, y)$ bilinmeyen fonksiyonunun

$$u(x, y) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N a_{r,s} B_{r,s}(x, y) \quad (3.5)$$

gibi iki değişkenli kesilmiş Bernoulli serisine açılabilir varsayalım. Burada $B_r(x)$ ve $B_s(y)$ ler sırasıyla, r . ve s . dereceden Bernoulli polinomları olmak üzere $B_{r,s}(x, y) = B_r(x)B_s(y)$ dir. Ayrıca $a_{r,s}$ ler de bilinmeyen Bernoulli katsayılarıdır.

$0 \leq x \leq k$ ve $0 \leq y \leq l$ olmak üzere Bernoulli sıralama noktaları, iki değişkenli fonksiyonlar için

$$x_i = \frac{k}{N} i, \quad y_j = \frac{l}{N} j, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (3.6)$$

olarak genişletilebilir.

3.1. İkinci Mertebe Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem İçin Temel Matris Bağıntıları

Bernoulli sıralama (collocation) metodunda amaç; verilen problemi bir matris denklemine dönüştürüp Bernoulli bilinmeyen katsayılar matrisini bularak kesilmiş Bernoulli seri çözümünü

elde etmektir. Bunun için ilk olarak (3.1) denklemindeki terimlerin matris denklemini oluşturmamız gerekmektedir.

(3.1) denkleminin kesilmiş Bernoulli polinomları cinsinden yaklaşık çözümü

$$u(x, y) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N a_{r,s} B_{r,s}(x, y)$$

olarak verilsin. Bu ifadenin matris denklemini

$$\mathbf{B} = [B_0(x) \quad B_1(x) \quad \cdots \quad B_N(x)]_{1 \times (N+1)},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} B_0(y) & \cdots & B_N(y) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_0(y) & \cdots & B_N(y) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & B_0(y) & \cdots & B_N(y) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

ve bilinmeyen Bernoulli katsayıları

$$\overline{\mathbf{A}} = [a_{0,0} \quad a_{0,1} \quad \cdots \quad a_{0,N} \quad a_{1,0} \quad a_{1,1} \quad \cdots \quad a_{1,N} \quad \cdots \quad a_{N,0} \quad a_{N,1} \quad \cdots \quad a_{N,N}]^T_{(N+1)^2 \times 1}$$

olmak üzere

$$u(x, y) = \mathbf{B}(x) \mathbf{Q}(y) \overline{\mathbf{A}} \quad (3.7)$$

şeklinde verilir.

Ayrıca, Bernoulli polinomları

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad \cdots \quad x^N] \quad \text{ve}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0}b_1 & \binom{1}{1}b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{0}b_2 & \binom{2}{1}b_1 & \binom{2}{2}b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{3}{0}b_3 & \binom{3}{1}b_2 & \binom{3}{2}b_1 & \binom{3}{3}b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{4}{0}b_4 & \binom{4}{1}b_3 & \binom{4}{2}b_2 & \binom{4}{3}b_1 & \binom{4}{4}b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{5}{0}b_5 & \binom{5}{1}b_4 & \binom{5}{2}b_3 & \binom{5}{3}b_2 & \binom{5}{4}b_1 & \binom{5}{5}b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{N}{0}b_N & \binom{N}{1}b_{N-1} & \binom{N}{2}b_{N-2} & \binom{N}{3}b_{N-3} & \binom{N}{4}b_{N-4} & \binom{N}{5}b_{N-5} & \dots & \binom{N}{N}b_0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{B}^T(x) = \zeta \mathbf{X}^T(x) \Leftrightarrow \mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x) \zeta^T$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada b_k lar Bernoulli sayılarıdır.

3.1.1. Yaklaşım Fonksiyonu ile Türevleri Arasındaki Matris Bağntısı

$\mathbf{B}(x)$ ' in $\mathbf{B}^{(1)}(x)$ ve $\mathbf{B}^{(2)}(x)$ türevleri arasında

$$\mathbf{B}^{(1)}(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{T}^T$$

$$\mathbf{B}^{(2)}(x) = \mathbf{B}^{(1)}(x) \mathbf{T}^T = \mathbf{B}(x) (\mathbf{T}^T)^2$$

bağıntıları vardır. Ardışık olarak devam edilirse $\mathbf{B}(x)$ ve $\mathbf{B}(x)$ ' in i . mertebe türevi arasındaki bağıntı

$$\mathbf{B}^{(i)}(x) = \mathbf{B}^{(i-1)}(x) (\mathbf{T}^T) = \mathbf{B}(x) (\mathbf{T}^T)^i \quad (3.8)$$

biçiminde genellenir.

Burada

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

şeklinde bir matristir.

Benzer şekilde $Q(y)$ 'nin j . mertebe türevi de

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} T^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(y) &= Q(y)\bar{T} \\ Q^{(2)}(y) &= Q^{(1)}(y)\bar{T} = Q(y)(\bar{T})^2 \\ &\vdots \\ Q^{(j)}(y) &= Q^{(j-1)}(y)(\bar{T}) = Q(y)(\bar{T})^j \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Burada $\bar{T}$, $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ tipinde köşegensel blok matristir.

Sonuç olarak $u^{(i,j)}(x,y) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N a_{r,s} B_{r,s}^{(i,j)}(x,y)$ şeklindeki iki değişkenli kesilmiş Bernoulli serisi için

$$u^{(i,j)}(x,y) = B^{(i)}(x)Q^{(j)}(y)\bar{A} = B(x)(T^T)^i Q(y)(\bar{T})^j \bar{A} \quad (3.10)$$

şeklindeki matris bağıntısı elde edilir.

Bulunan (3.7) ve (3.10) eşitlikleri yardımıyla (3.1) denklemindeki bilinmeyen fonksiyon ve kısmi türevler aşağıdaki matris denklemlerine dönüştürülür

$$\begin{aligned}
u^{(0,0)}(x, y) &= u(x, y) = \mathbf{B}(x)\mathbf{Q}(y)\bar{\mathbf{A}} \\
u^{(1,0)}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{B}(x)(\mathbf{T}^T)\mathbf{Q}(y)\bar{\mathbf{A}} \\
u^{(2,0)}(x, y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathbf{B}(x)(\mathbf{T}^T)^2\mathbf{Q}(y)\bar{\mathbf{A}} \\
u^{(0,1)}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{B}(x)\mathbf{Q}(y)(\bar{\mathbf{T}})\bar{\mathbf{A}} \\
u^{(0,2)}(x, y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathbf{B}(x)\mathbf{Q}(y)(\bar{\mathbf{T}})^2\bar{\mathbf{A}} \\
u^{(1,1)}(x, y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \mathbf{B}(x)\mathbf{J}^T\mathbf{Q}(y)(\bar{\mathbf{T}})\bar{\mathbf{A}}
\end{aligned} \quad (3.11)$$

3.1.2. Koşulların Matris Formu

Bu kısımda önceki bölümde bulunan matris denklemleri yardımıyla (3.2), (3.3) ve (3.4) ile verilen koşulların matris formları oluşturulacaktır. Böylece (3.2) koşulu için

$$\sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{i,j}^k u^{(i,j)}(\alpha_k, \beta_k) = \left(\sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{i,j}^k \mathbf{B}(\alpha_k)(\mathbf{T}^T)^i \mathbf{Q}(\beta_k)(\bar{\mathbf{T}})^j \right) \bar{\mathbf{A}} = \lambda_k, \quad (3.12)$$

(3.3) koşulu için

$$\sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{i,j}^k(x) u^{(i,j)}(x, \gamma_k) = \left(\sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{i,j}^k(x) \mathbf{B}(x)(\mathbf{T}^T)^i \mathbf{Q}(\gamma_k)(\bar{\mathbf{T}})^j \right) \bar{\mathbf{A}} = g_k(x), \quad (3.13)$$

ve son olarak (3.4) koşulu için

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{i,j}^k(y) u^{(i,j)}(\eta_k, y) = \left(\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{i,j}^k(y) \mathbf{B}(\eta_k)(\mathbf{T}^T)^i \mathbf{Q}(y)(\bar{\mathbf{T}})^j \right) \bar{\mathbf{A}} = h_k(y) \quad (3.14)$$

matris denklemleri elde edilir.

3.2. Çözüm Metodu

(3.1) kısmi diferansiyel denkleminde (3.11) de bulunan matris denklemleri yerine yazılırsa, (3.1) kısmi diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} & A(x, y)B(x)(T^T)^2 Q(y)\bar{A} + B(x, y)B(x)T^T Q(y)(\bar{T})\bar{A} + \\ & C(x, y)B(x)Q(y)(\bar{T})^2 \bar{A} + D(x, y)B(x)(T^T)Q(y)\bar{A} + \\ & E(x, y)B(x)Q(y)(\bar{T})\bar{A} + F(x, y)B(x)Q(y)\bar{A} = G(x, y) \end{aligned} \quad (3.15)$$

biçiminde matris denklemine dönüştürülür. Diğer yandan (3.6) ile tanımlanan Bernoulli sıralama noktaları (3.15) denkleminde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} & A(x_i, y_j)B(x_i)(T^T)^2 Q(y_j)\bar{A} + B(x_i, y_j)B(x_i)T^T Q(y_j)(\bar{T})\bar{A} + \\ & C(x_i, y_j)B(x_i)Q(y_j)(\bar{T})^2 \bar{A} + D(x_i, y_j)B(x_i)(T^T)Q(y_j)\bar{A} + \\ & E(x_i, y_j)B(x_i)Q(y_j)(\bar{T})\bar{A} + F(x_i, y_j)B(x_i)Q(y_j)\bar{A} = G(x_i, y_j) \\ & i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.16)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece (3.16) sistemi

$$\begin{aligned} & AB(T^T)^2 Q\bar{A} + BB(T^T)Q(\bar{T})\bar{A} + CBQ(\bar{T})^2 \bar{A} + \\ & DB(T^T)Q\bar{A} + EBQ(\bar{T})\bar{A} + FBQ\bar{A} = G \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde temel matris denklemleri olarak yazılabilir.

(3.17) denklemi $\bar{A}$ ortak parantezine alınır ve içerisindeki ifade W ile tanımlanırsa bu taktirde eşitlik

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} AB(T^T)^2 Q + BB(T^T)Q(\bar{T}) + CBQ(\bar{T})^2 + \\ DB(T^T)Q + EBQ(\bar{T}) + FBQ \end{Bmatrix}}_W \bar{A} = G$$

veya kısaca

$$W\bar{A} = G \quad \text{ya da} \quad [W; G] \quad (3.18)$$

olarak yazılabilir.

(3.12), (3.13) ve (3.14) denklemleriyle ifade edilen koşulların matris denklemlerinde (3.6) Bernoulli sıralama noktaları yazılır ve daha sonra benzer şekilde $\bar{A}$ ortak parantezine alınır ve sırasıyla aşağıdaki matris formları elde edilir:

(3.12) denklemi için,

$$\underbrace{\left(\sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{i,j}^k \mathbf{B}(\alpha_k) (\mathbf{T}^T)^i \mathbf{Q}(\beta_k) (\bar{\mathbf{T}})^j \right)}_{\mathbf{U}_I} \bar{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\lambda}_k$$

ya da kısaca

$$\mathbf{U}_I \bar{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\lambda}_k \text{ ya da } [\mathbf{U}_I; \boldsymbol{\lambda}_k]; \quad (3.19)$$

(3.13) denklemi için,

$$\underbrace{\left(\sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{i,j}^k(x_n) \mathbf{B}(x_n) (\mathbf{T}^T)^i \mathbf{Q}(\gamma_k) (\bar{\mathbf{T}})^j \right)}_{\mathbf{U}_2} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{g}_k(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N$$

ya da kısaca

$$\mathbf{U}_2 \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{g}_k \text{ ya da } [\mathbf{U}_2; \mathbf{g}_k]; \quad (3.20)$$

(3.14) denklemi için,

$$\underbrace{\left(\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{i,j}^k(y_l) \mathbf{B}(\eta_k) (\mathbf{T}^T)^i \mathbf{Q}(\gamma_l) (\bar{\mathbf{T}})^j \right)}_{\mathbf{U}_3} \bar{\mathbf{A}} = h_k(y_l), \quad l = 0, 1, \dots, N$$

ya da kısaca

$$\mathbf{U}_3 \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{h}_k \text{ ya da } [\mathbf{U}_3; \mathbf{h}_k] \quad . \quad (3.21)$$

olarak temsil edilir.

(3.1) denkleminin (3.2), (3.3) ve (3.4) koşulları altında çözümünü bulmak için (3.18) deki $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisine (3.19), (3.20) ve (3.21) koşulların arttırılmış matris formları eklenerek

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & ; & \boldsymbol{\lambda}_k \\ \mathbf{U}_2 & ; & \mathbf{g}_k \\ \mathbf{U}_3 & ; & \mathbf{h}_k \\ \mathbf{W} & ; & \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

elde edilir. Bundan sonra, bilinmeyen Bernoulli katsayılarını bulabilmek için

$$\bar{\mathbf{A}} = \left(\tilde{\mathbf{W}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.23)$$

matris denklemi çözülür. Burada $\left[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}} \right]$ arttırılmış matrisine Gauss eliminasyon metodunun uygulanmasıyla sıfır satırları atılarak $\left[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}} \right]$ arttırılmış matrisi elde edilir. (3.22) sisteminin çözümü Matlab' da $\bar{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{W}} \setminus \tilde{\mathbf{G}}$ komutu ile kolayca hesaplanabilmektedir.

Son olarak, bulunan $a_{r,s}; (r, s = 0, \dots, N)$ katsayıları (3.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_N(x, y) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N a_{r,s} B_{r,s}(x, y) \quad (3.24)$$

yaklaşık çözümü bulunur.

IV. BÖLÜM

HATA ANALİZİ ve ÇÖZÜMÜN İYİLEŞTİRİLMESİ

4.1. Rezidüel Hata Analizi

Rezidü fonksiyonu: L türev operatörü olmak üzere, $Lu = f(x)$ diferansiyel denklemi gösterebilirsin. Diferansiyel denklemin $N + 1$ baz fonksiyonu $\phi_n(x)$ 'in toplamından oluşan yaklaşık çözümü

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x)$$

olsun. Bu durumda yaklaşık çözümün diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla elde edilen

$$R(x) = Lu_N - f$$

fonksiyonuna rezidü fonksiyonu denir (Boyd, 2000). Benzer şekilde iki değişkenli rezidü fonksiyonu da tanımlanabilir.

L kısmi türev operatörü olmak üzere, $Lu = f(x, y)$ kısmi türevli bir diferansiyel denklemi gösterebilirsin. Diferansiyel denklemin, baz fonksiyonları $\phi_r(x)$ ve $\phi_s(y)$ çarpımlarının toplamından oluşan yaklaşık çözümü

$$u(x, y) \approx u_{N,N}(x, y) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N a_{r,s} \varphi_r(x) \varphi_s(y)$$

olsun. Bu durumda, yaklaşık çözümün diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla elde edilen

$$R(x, y) = Lu_{N,N} - f \quad (4.1)$$

fonksiyonuna iki değişkenli rezidü (kalan) fonksiyonu denir.

Öncelikle L bir lineer operatör olmak üzere (3.1) denklemini

$$L[u(x, y)] = G(x, y),$$

$$L[u(x, y)] = A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u$$

olarak ifade edelim. Verilen metot için bir rezidüel fonksiyon oluşturulmak istenirse, bu taktirde

$$R_N(x, y) = L[u_N(x, y)] - G(x, y) \quad (4.2)$$

biçiminde yazılır. Burada $u_N(x, y)$; (3.1) denkleminin (3.24) ile verilen yaklaşık çözümünü gösterir. Böylece $u_N(x, y)$,

$$\begin{aligned} L[u_N(x, y)] &= A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u \\ &= G(x, y) + R_N(x, y) \end{aligned}$$

denklemini ve verilen koşulları sağlar.

Ayrıca $u(x, y)$ verilen koşullarla birlikte (3.1)-(3.4) denkleminin tam çözümü olmak üzere $e_N(x, y)$ hata fonksiyonu

$$e_N(x, y) = u(x, y) - u_N(x, y) \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. O zaman (3.2)-(3.4) ve (3.19)-(3.21) homojen olmayan başlangıç koşulları

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{i,j}^k e^{(i,j)}(\alpha_k, \beta_k) &= 0 \\
\sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{i,j}^k(x) e^{(i,j)}(x, \gamma_k) &= 0 \\
\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{i,j}^k(y) e^{(i,j)}(\eta_k, y) &= 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

homojen koşullara indirgenir.

(3.1) ve (4.2) denklemlerinden

$$L[e_N(x, y)] = L[u(x, y)] - L[u_N(x, y)] = -R_N(x, y)$$

hata diferansiyel denklemi elde edilir. Açık olarak hata diferansiyel denklemi ise

$$A(x, y) \frac{\partial^2 e_N}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 e_N}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 e_N}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial e_N}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial e_N}{\partial y} + F(x, y) e_N = -R_N(x, y) \tag{4.5}$$

olur. (4.4) koşulları ile birlikte (4.5) hata diferansiyel denklemi III. Bölümdeki çözüm metodunu uygulanarak çözüldüğünde $e_{N,M}(x, y)$ Bernoulli polinom çözümü elde edilir. Bu çözüm $e_N(x, y)$ hata fonksiyonuna yaklaşımdır. Hata probleminin çözümü için metot uygulanırken, orjinal problemin çözümündeki matrislerde sadece $G(x, y)$ yerine $-R_N(x, y)$ ile birlikte koşulların sağ taraflarının sıfır alınmasına dikkat edilecektir.

4.2 Çözümlerin İyileştirilmesi

Bu kesimde (3.1)-(3.4) ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem formunda ifade edilen problemin Bernoulli polinom çözümleri rezidüel hata fonksiyon tahmini yardımıyla daha iyi hale getirilecektir. Bu iyileştirme yapılırken III. Bölüm de sunulan çözüm metodu takip edilerek $e_N(x, y)$ hata fonksiyonu için $e_{N,M}(x, y)$ yaklaşımı elde edilir. Bulunan bu fonksiyona tahmini hata denilirse daha önceden bulunan yaklaşık çözüm ve tahmini hatanın toplanmasıyla iyileştirilmiş yaklaşık çözüm elde edilir.

Burada, N orjinal problemin yaklaşık çözümü elde edilirken kullanılan kesme sınırını ve M de hata foksiyonu için Bernoulli polinom yaklaşımı elde edilirken kullanılan kesme sınırını gösterdiğinde bu taktirde iyileştirilmiş yaklaşık çözüm

$$u_{N,M}(x, y) = u_N(x, y) + e_{N,M}(x, y)$$

şeklinde ifade edilir. İyileştirilme yapılırken $M > N$ alındığında daha iyi çözümler elde edilir.

V. BÖLÜM

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda, ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için Bernoulli sıralama (collocation) metodu uygulanmıştır. Çözümün doğruluğunu araştırabilmek için rezidüel hata analizi yapılmıştır. İşlemler için Matlab yazılım programı kullanılmıştır.

Örnek 5.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2(x-t)e^{-x-t}, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1, \text{ dalga denklemi}$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \right\} \text{Dirichlet sınır koşulları,}$$

$$u_t(x, 0) = xe^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \} \text{Neumann sınır koşulu ve}$$

$$\left. \int_0^1 u(x, t) dx = -2te^{-t-1} + te^{-t}, \quad 0 \leq t \leq T \right\} \text{lineer olmayan integral koşulu ile ele alınsın.}$$

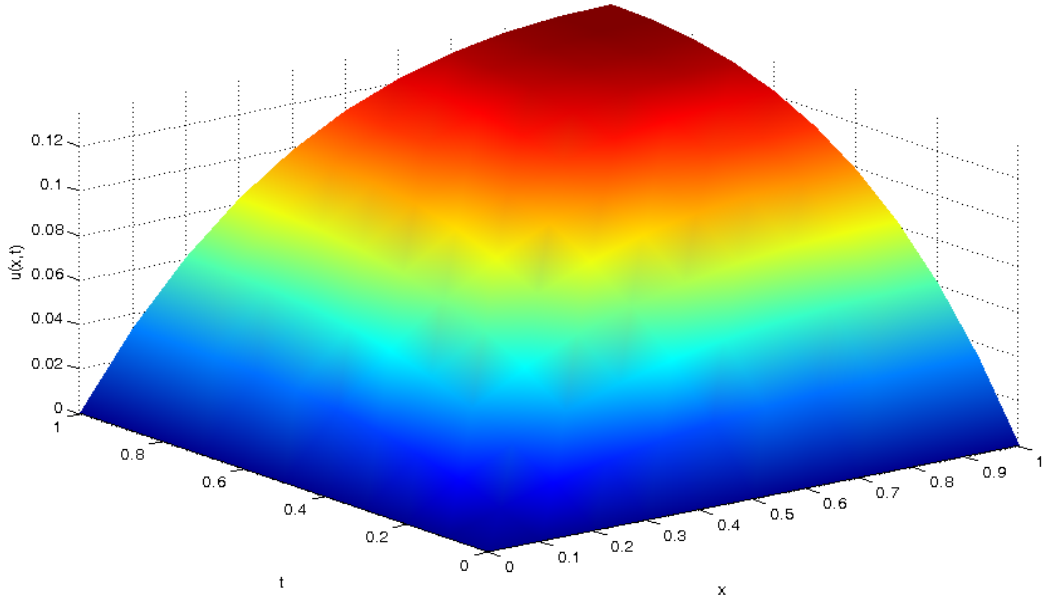
Bu problemin tam çözümü $u(x, t) = xte^{-x-t}$ dir (Shakeri, Dehghan, 2008). Bernoulli Matris metodu kullanılarak N nin ve M nin çeşitli değerleri için Çizelge 5.1 de $|e_N|$ mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatası için tablo değerleri verilmiştir. $u(x, t)$ tam çözümü ile $N=7$ ve $M=10$ için, elde edilen $u_N(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli çözümleri birlikte Şekil 5.1 de

karşılaştırılmıştır. Şekil 5.2 de ise $N = 7$ ve $M = 10$ için $|e_N(x)|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}(x)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}(x)|$ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır.

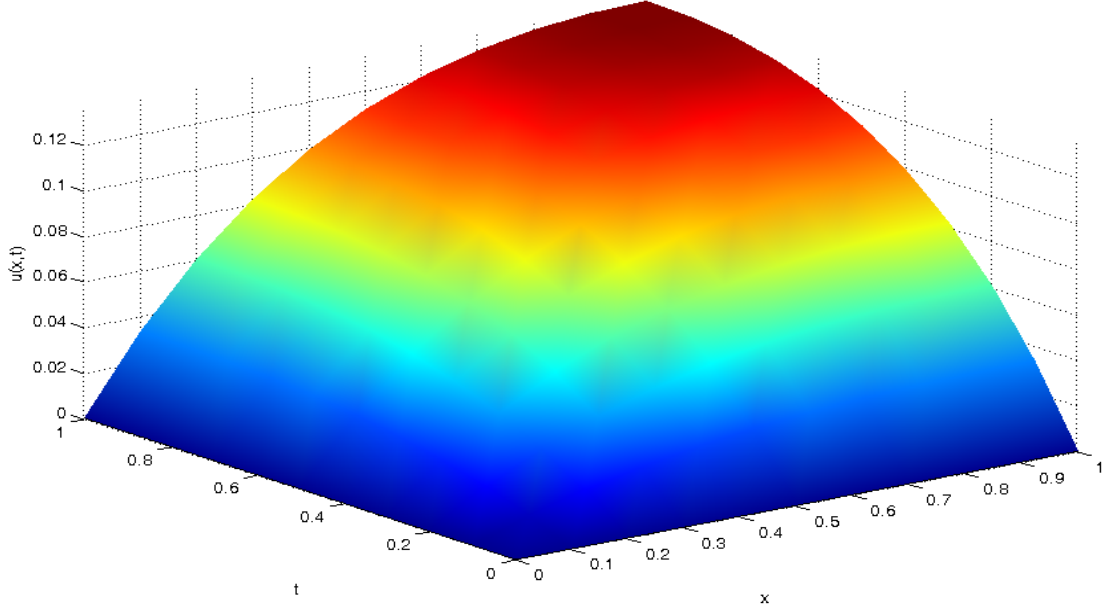
Çizelge 5.1. $N = 3$, $M = 4$ ve $N = 7$, $M = 10$ için $|e_N|$ mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N(x) $	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası	Mutlak Hata $ e_N(x) $	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası
	$N = 3, M = 4$		$N = 7, M = 10$	
$(0,0)$	3.7147e-4	7.0844e-4	1.6642e-9	1.4642e-9
$(0,1/2)$	6.4603e-4	8.1347e-4	2.7762e-8	2.7708e-8
$(0,1)$	2.9759e-4	7.4609e-4	1.7049e-8	1.7038e-8
$(1/2,0)$	2.1300e-3	2.4480e-3	6.7822e-8	6.8070e-8
$(1/2,1/2)$	1.9052e-3	1.3789e-3	4.3160e-8	3.7241e-8
$(1/2,1)$	5.3472e-3	2.3655e-3	5.3314e-7	5.2575e-7
$(1,0)$	1.6690e-3	2.3616e-3	1.0216e-7	1.0295e-7
$(1,1/2)$	2.5654e-3	8.9822e-4	4.9311e-7	4.8538e-7
$(1,1)$	3.5809e-2	1.5865e-2	7.7803e-6	7.8498e-6

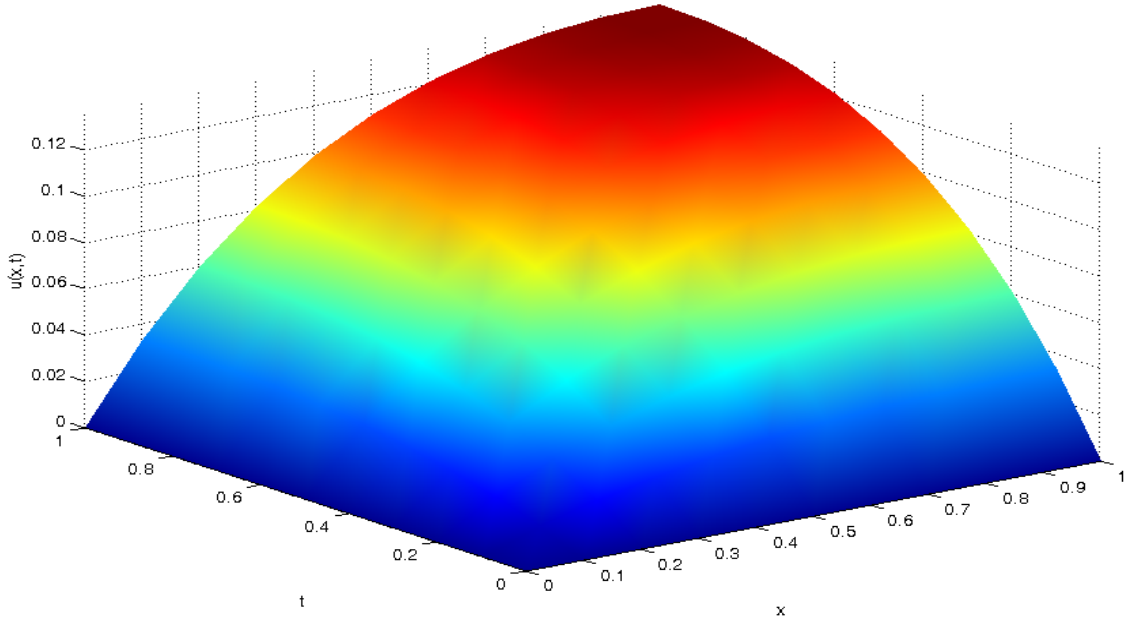
Tam Çözüm $u(x,t) = xte^{-x-t}$



$u_7(x, t)$ Bernoulli polinom çözümü

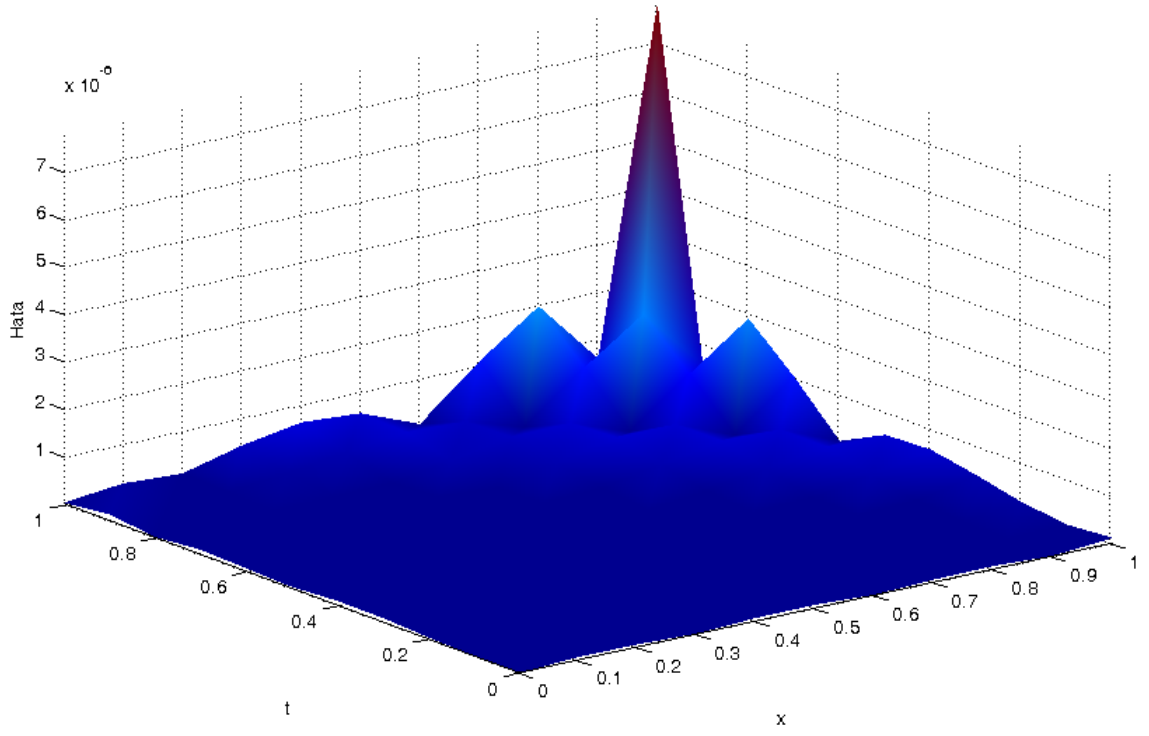


$u_{7,10}(x, t)$ İyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü

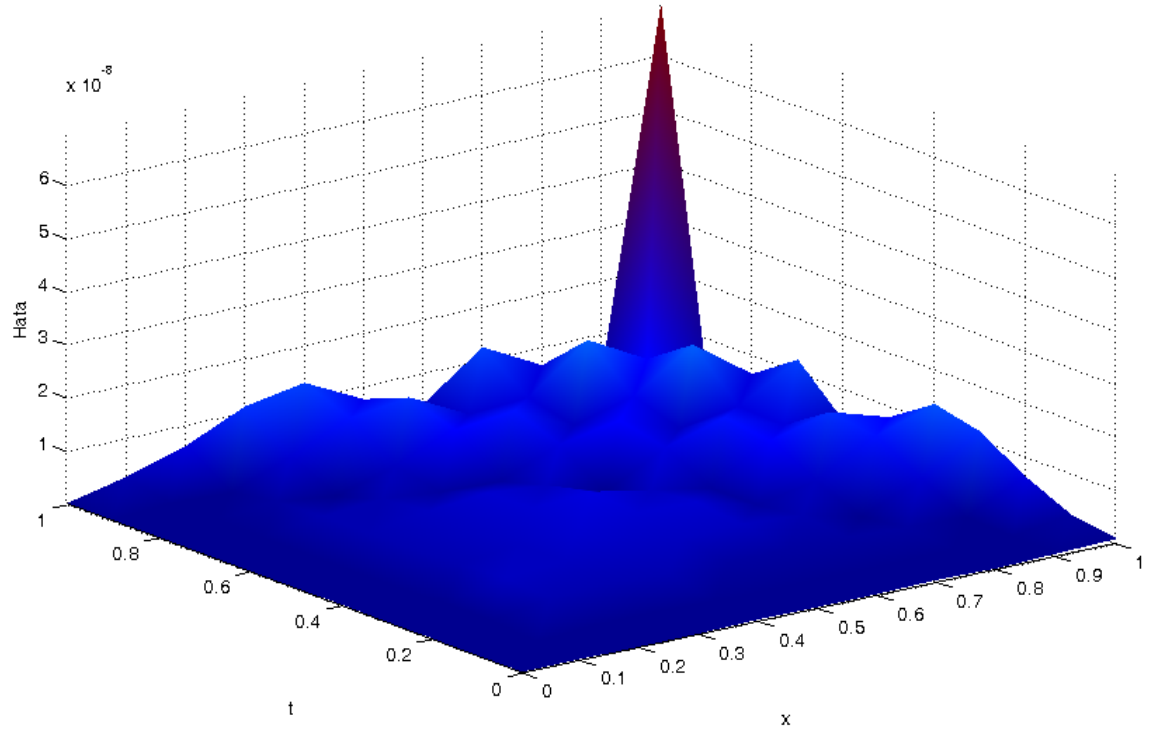


Şekil 5.1 $u(x, t)$ tam çözümü, $N = 7$, $M = 10$ için $u_N(x, t)$ Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli çözümlerinin karşılaştırılması

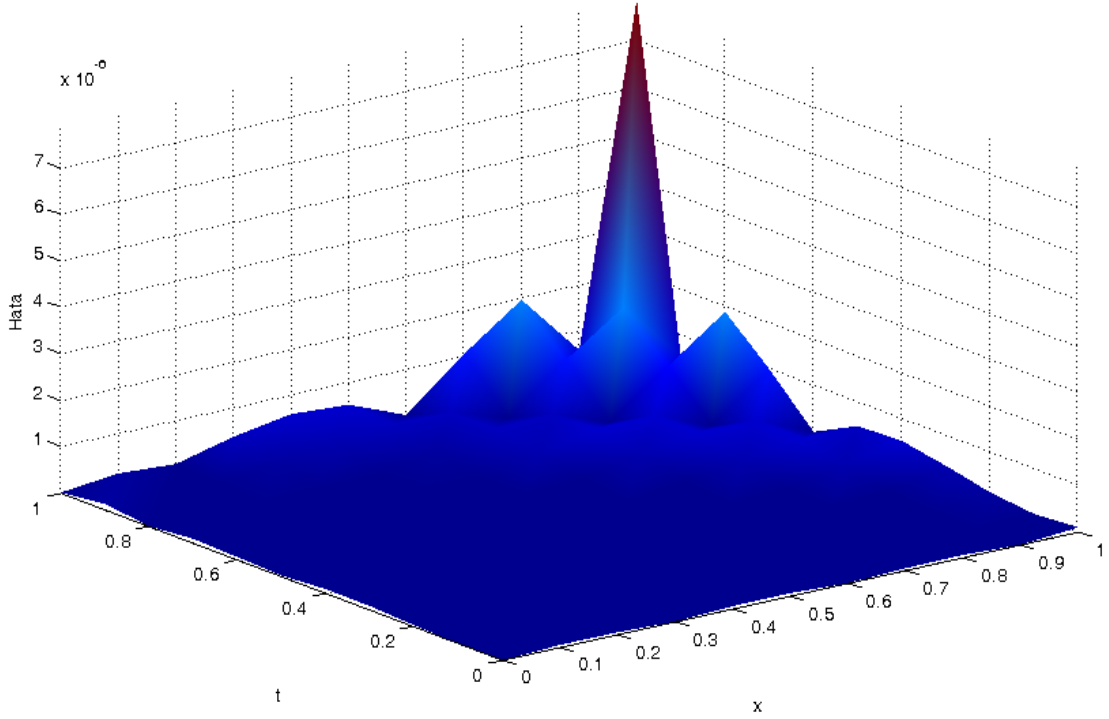
$|e_7(x, t)|$ Mutlak hata fonksiyonu



$|e_{7,10}(x, t)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu



$|E_{7,10}(x,t)|$ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu



Şekil 5.2 $N = 7, M = 10$ için $|e_N(x)|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}(x)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}(x)|$ iyileştirilmiş çözümünün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

Örnek 5.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (2x - 3x^2) \left(-\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{1+t^2} \right) + 6 \ln(1+t^2), \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1,$$

dalga denklemini

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Dirichlet sınır koşulları,

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Neumann sınır koşulu ve

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

lineer olmayan integral koşulu ile ele alalım. Bu problemin tam çözümü $u(x, t) = \ln(1+t^2)(2x-3x^2)$ dir (Yousefi et al, 2010).

Tam çözüm ile Bernoulli matris metodu kullanılarak elde edilen $u_N(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması $N=3$, $M=4$ için Çizelge 5.2 de, $N=7$, $M=8$ için Çizelge 5.4 de ve $N=10$, $M=11$ için ise Çizelge 5.6 da verilmiştir. $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması ise $N=3$, $M=4$ için Çizelge 5.3 de, $N=7$, $M=8$ için Çizelge 5.5 de ve $N=10$, $M=11$ için Çizelge 5.7 de gösterilmiştir. Şekil 5.3 de ise $u(x, t)$ tam çözümü ile $N=10$ ve $M=11$ için elde edilen $u_N(x, t)$ Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli çözümleri karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.2 $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$ tam çözümü, $N=3$, $M=4$ için $u_N(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü $u_N(x, t)$	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $u_{N,M}(x, t)$
	$N=3$	$N=3$	$N=3, M=4$
(0,0)	0	2.515887639e-3	3.143901267e-3
(0,0.5)	0	8.10340834e-4	4.524002564e-4
(0,1)	0	-1.249625075e-3	-8.230592188e-4
(0.5,0)	0	-6.746555672e-3	-7.88006681e-3
(0.5,0.5)	5.578588783e2	6.000915328e-2	6.077274435e-2
(0.5,1)	1.732867951e-1	2.288206792e-1	2.301746495e-1
(1,0)	0	5.966395355e-3	7.770763062e-3
(1,0.5)	-2.231435513e-1	-1.747123869e-1	-1.742353173e-1
(1,1)	-6.931471806e-1	-5.221368388e-1	-5.333618839e-1

Çizelge 5.3 $N = 3$, $M = 4$ için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $	Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $
	$N = 3$	$N = 3, M = 4$	$N = 3, M = 4$
(0,0)	2.5159e-3	6.2801e-4	3.1439e-3
(0,0.5)	8.1034e-4	3.5794e-4	4.5240e-4
(0,1)	1.2496e-3	4.2657e-4	8.2306e-4
(0.5,0)	6.7466e-3	1.1335e-3	7.8801e-3
(0.5,0.5)	4.2233e-3	7.6359e-4	4.9869e-3
(0.5,1)	5.5534e-2	1.3540e-3	5.6888e-2
(1,0)	5.9664e-3	1.8044e-3	7.7708e-3
(1,0.5)	4.8431e-2	4.7707e-4	4.8908e-2
(1,1)	1.7101e-1	1.1225e-2	1.5979e-1

Çizelge 5.4 $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$ tam çözümü, $N = 7$, $M = 8$ için $u_N(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü U_N	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $U_{N,M}$
	$N = 7$	$N = 7$	$N = 7, M = 8$
(0,0)	0	1.47334605e-4	1.476838389e-4
(0,0.5)	0	-2.893490953e-4	-2.788870944e-4
(0,1)	0	-5.801945538e-5	-6.37207116e-5
(0.5,0)	0	-1.514040494e-4	-1.51731577e-4
(0.5,0.5)	5.578588783e-2	5.587106375e-2	5.586265582e-2
(0.5,1)	1.732867951e-1	2.655899053e-1	2.507122443e-1
(1,0)	0	-8.564384501e-5	-1.038282396e-4
(1,0.5)	-2.231435513e-1	-1.306911096e-1	-1.455906743e-1
(1,1)	-6.931471806e-1	1.332857861e-1	3.406748352e-2

Çizelge 5.5 $N = 7, M = 8$ için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $	Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $
	$N = 7$	$N = 7, M = 8$	$N = 7, M = 8$
(0,0)	1.4733e-4	3.4923e-7	1.4768e-4
(0,0.5)	2.8935e-4	1.0462e-5	2.7889e-4
(0,1)	5.8019e-5	5.7013e-6	6.3721e-5
(0.5,0)	1.5140e-4	3.2753e-7	1.5173e-4
(0.5,0.5)	8.5176e-5	8.4079e-6	7.6768e-5
(0.5,1)	9.2303e-2	1.4878e-2	7.7425e-2
(1,0)	8.5644e-5	1.8184e-5	1.0383e-4
(1,0.5)	9.2452e-2	1.4900e-2	7.7553e-2
(1,1)	8.2643e-1	9.9218e-2	7.2721e-1

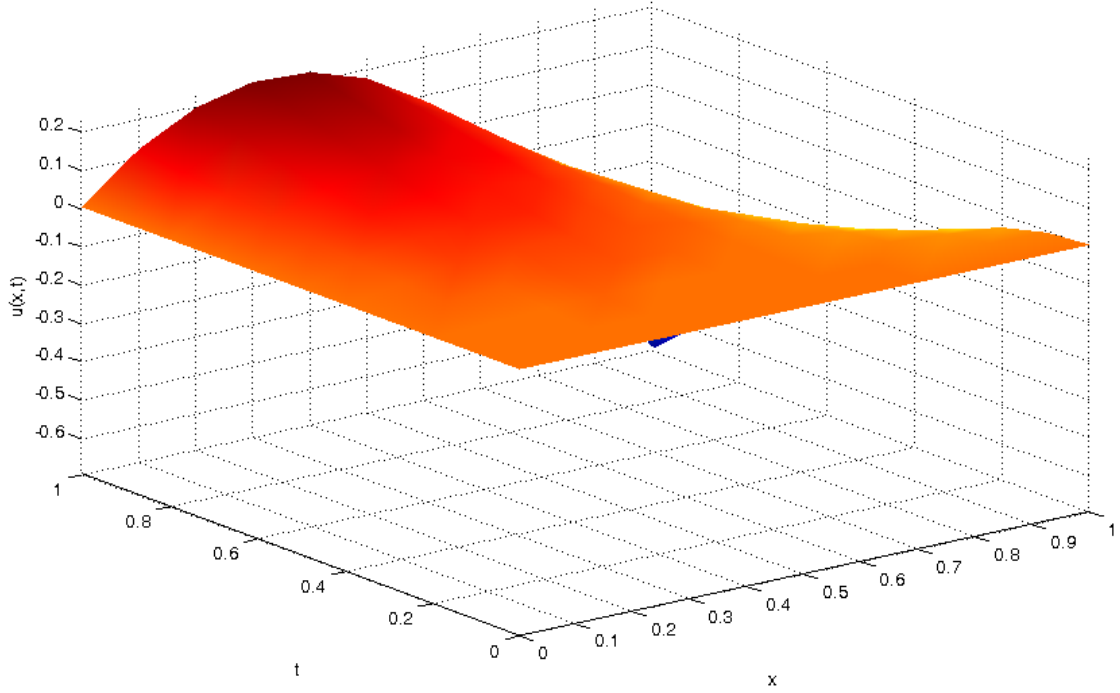
Çizelge 5.6 $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$ tam çözümü, $N = 10, M = 11$ için $u_N(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü $u_N(x, t)$	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $u_{N,M}(x, t)$
	$N = 10$	$N = 10$	$N = 10, M = 11$
(0,0)	0	-1.245723257e-6	-1.037936565e-6
(0,0.5)	0	-7.029047549e-7	-4.454294267e-7
(0,1)	0	2.246566123e-8	5.195826835e-8
(0.5,0)	0	-2.689460395e-6	-2.57433849e-6
(0.5,0.5)	5.578588783e-2	5.578907592e-2	5.578901809e-2
(0.5,1)	1.732867951e-1	1.905063857e-1	1.907028641e-1
(1,0)	0	3.222649564e-6	3.285043881e-6
(1,0.5)	-2.231435513e-1	-2.059259355e-1	-2.057296105e-1
(1,1)	-6.931471806e-1	-4.948297361e-1	-4.950180332e-1

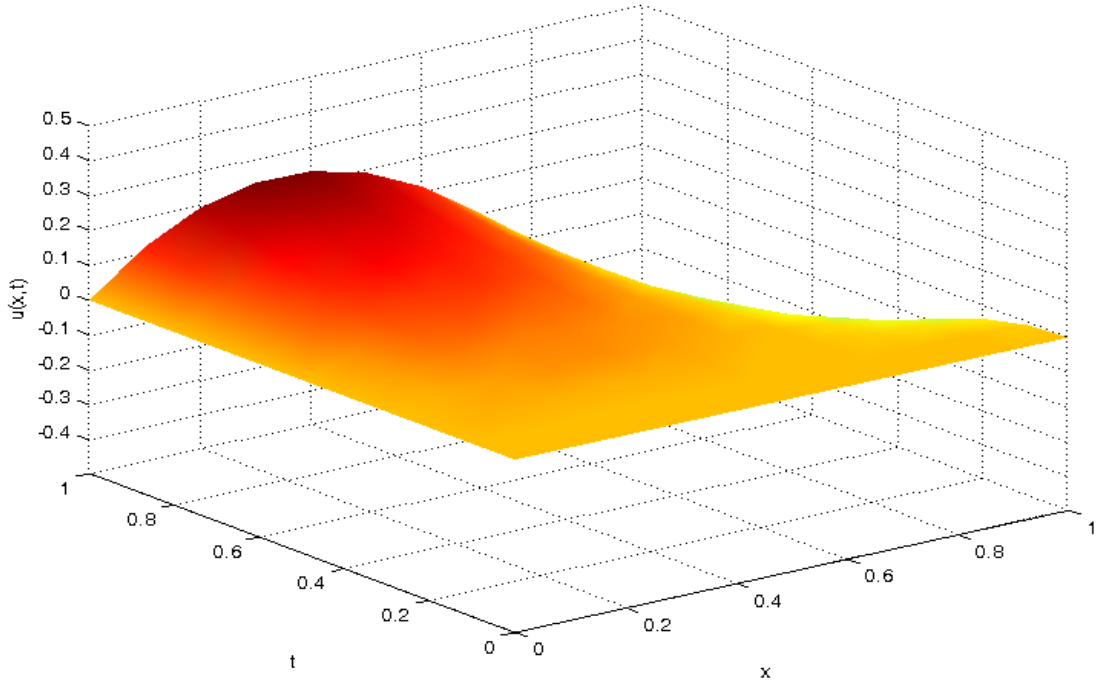
Çizelge 5.7 $N = 10$, $M = 11$ için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $	Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $
	$N = 10$	$N = 10, M = 11$	$N = 10, M = 11$
$(0,0)$	1.2457e-6	2.0779e-7	1.0379e-6
$(0,0.5)$	7.0290e-7	2.5748e-7	4.4543e-7
$(0,1)$	2.2466e-8	2.9493e-8	5.1958e-8
$(0.5,0)$	2.6895e-6	1.1512e-7	2.5743e-6
$(0.5,0.5)$	3.1881e-6	5.7827e-8	3.1303e-6
$(0.5,1)$	1.7220e-2	1.9648e-4	1.7416e-2
$(1,0)$	3.2226e-6	6.2394e-8	3.2850e-6
$(1,0.5)$	1.7218e-2	1.9633e-4	1.7414e-2
$(1,1)$	1.9832e-1	1.8830e-4	1.9813e-1

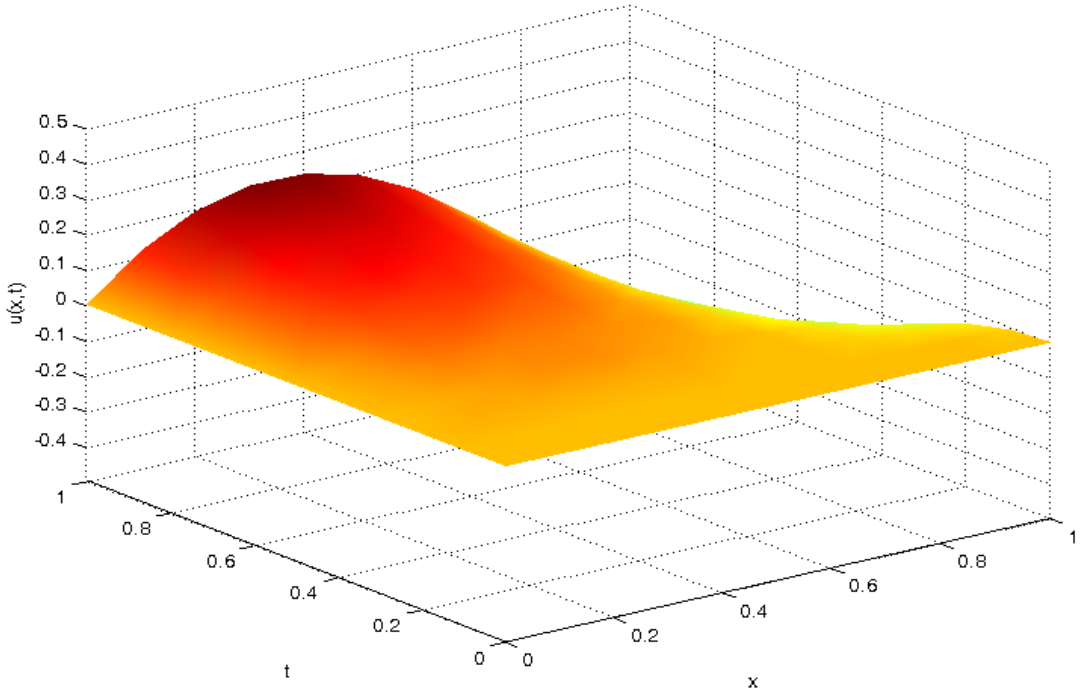
Tam Çözüm $u(x,t) = \ln(1+t^2)(2x-3x^2)$



$u_{10}(x, t)$ Bernoulli polinom çözümü



$u_{10,11}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü



Şekil 5.3 $\ln(1+t^2)(2x-3x^2)$ tam çözümü, $N=10$ ve $M=11$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

Örnek 5.3

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + u = \frac{d^2u}{dx^2} + x^2 + t - 1 \quad \text{telgraf denklemi}$$

$u(x, 0) = x^2$ ve $u_t(x, 0) = 1$ başlangıç koşulları ile ele alınsın. Bu denklemin tam çözümü $u(x, t) = x^2 + t$ dir (Yousefi, 2010).

Bernoulli matris metodu kullanılarak problem $N = 7$ ve $M = 8$ için çözülmüştür. Çizelge 5.8 de tam çözüm, $u_N(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün tablo değerleri verilmiştir. Çizelge 5.9 da ise $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}(x)|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}(x)|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının tablo değerleri verilmiştir.

Çizelge 5.8 $x^2 + t$ tam çözümü, $N = 7$, $M = 8$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm $x^2 + t$	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü $u_N(x, t)$	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $u_{N,M}(x, t)$
	$N = 7$	$N = 7$	$N = 7, M = 8$
(0,0)	0	5.7544e-15	5.7546e-15
(0,1/2)	0.5	0.5	0.5
(0,1)	1	1	1
(1/2,0)	0.25	0.25	0.25
(1/2,1/2)	0.75	0.75	0.75
(1/2,1)	1.25	1.25	1.25
(1,0)	1	1	1
(1,1/2)	1.5	1.5	1.5
(1,1)	2	2	2

Çizelge 5.9 $N = 7$, $M = 8$ için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $	Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $
	$N = 7$	$N = 7, M = 8$	$N = 7, M = 8$
$(0,0)$	5.7545e-15	3.3396e-20	5.7545e-15
$(0,1/2)$	0	0	0
$(0,1)$	0	0	0
$(1/2,0)$	0	0	0
$(1/2,1/2)$	0	0	0
$(1/2,1)$	0	0	0
$(1,0)$	0	0	0
$(1,1/2)$	0	0	0
$(1,1)$	0	0	0

Örnek 5.4

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + u = \frac{d^2u}{dx^2} \text{ telgraf denklemini}$$

$u(x,0) = e^x$ ve $u_t(x,0) = -e^x$ başlangıç koşulları ile verilmiş olsun. Bu denklemin tam çözümü $u(x,t) = e^{x-t}$ dir (Yousefi, 2010).

Çizelge 5.10 da N nin ve M in farklı değerleri için tam çözüm, $u_N(x,t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x,t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümleri karşılaştırılmıştır. Çizelge 5.11 de ise N nin ve M in farklı değerleri için mutlak hata $|e_N|$, tahmini mutlak hata $|e_{N,M}|$ ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hataları $|E_{N,M}|$ mukayese edilmiştir. Şekil 5.4 de $u(x,t)$ tam çözümü, $N = 10$ ve $M = 11$ için elde edilen $u_N(x,t)$ Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x,t)$ iyileştirilmiş Bernoulli çözümleri karşılaştırılmıştır.

Şekil 5.5 de ise $N = 10$ ve $M = 11$ için $|e_N(x)|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}(x)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}(x)|$ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonları gösterilmiştir.

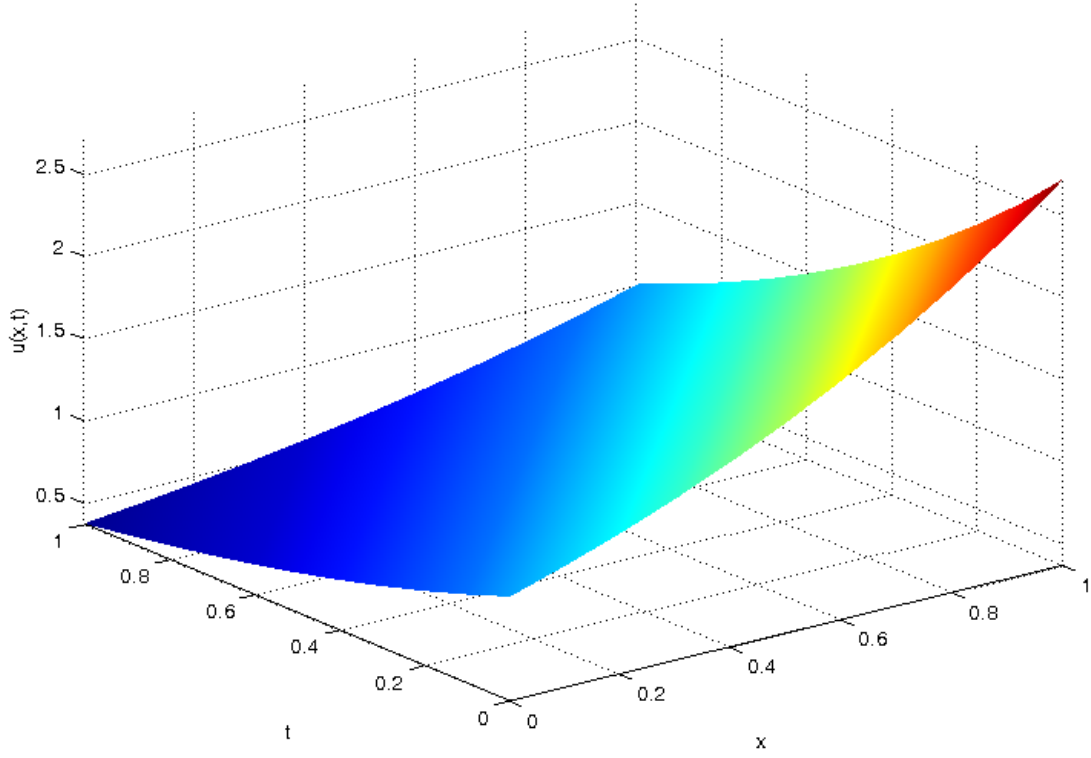
Çizelge 5.10 e^{x-t} tam çözümü, $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 10$, $M = 11$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm e^{x-t}	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü $u_N(x, t)$		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $u_{N,M}(x, t)$	
		$N = 7$	$N = 10$	$N = 7, M = 8$	$N = 10, M = 11$
$(0, 0)$	1.0	0.9999999751	1.0	0.9999999751	1.0
$(0, 1/2)$	6.065306597e-1	6.064056476e-1	6.065306265e-1	6.064105457e-1	6.065306393e-1
$(0, 1)$	3.678794412e-1	3.665638467 e-1	3.678773369e-1	3.666826785e-1	3.678780655 e-1
$(1/2, 0)$	1.648721271	1.648721482	1.648721271	1.648721483	1.648721271
$(1/2, 1/2)$	1.0	0.999999984	1.0	0.9999999851	1.0
$(1/2, 1)$	6.065306597e-1	6.062991824 e-1	6.065305909 e-1	6.063059158 e-1	6.065306195e-1
$(1, 0)$	2.718281828	2.718281803	2.718281828	2.718281803	2.718281828
$(1, 1/2)$	1.648721271	1.648542574	1.648721214	1.64854648	1.648721239
$(1, 1)$	1.0	0.9977070739	0.9999959394	0.9978052706	0.9999977227

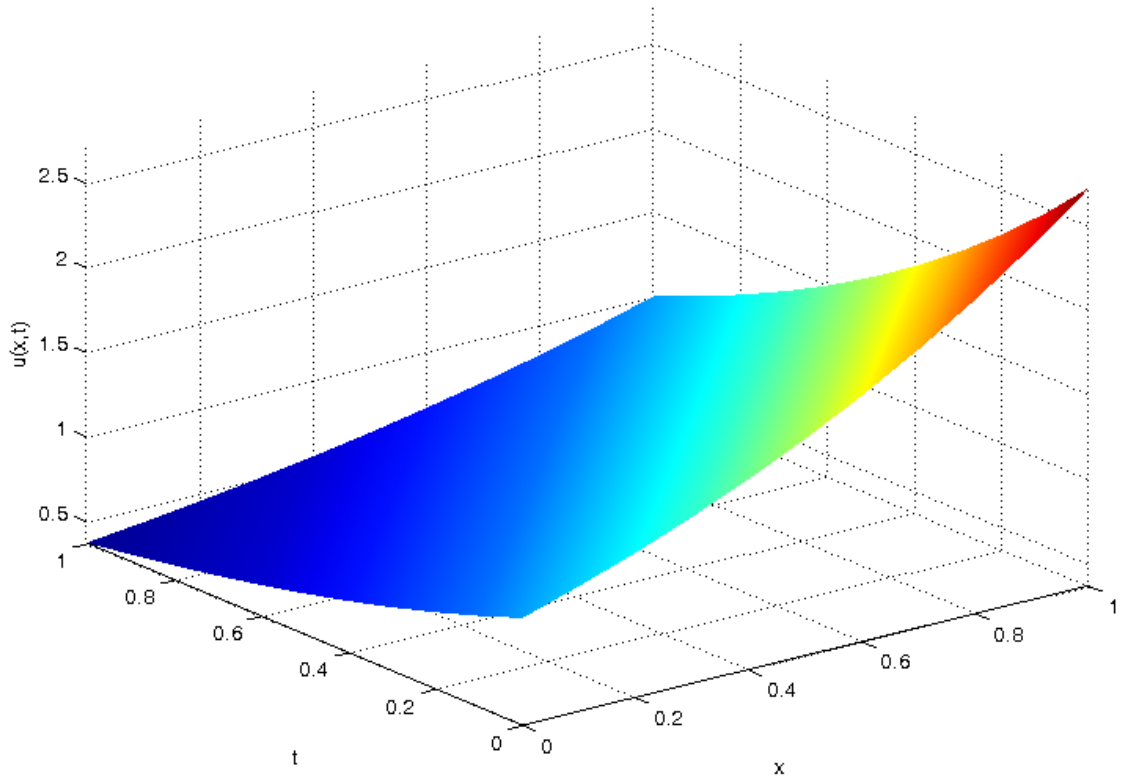
Çizelge 5.11 $N = 7$, $M = 8$ ve $N=10$, $M=11$ için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $		Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $	
	$N = 7$	$N = 10$	$N = 7, M = 8$	$N = 10, M = 11$	$N = 7, M = 8$	$N = 10, M = 11$
$(0,0)$	2.4864e-8	4.4409e-15	2.4850e-8	5.1070e-15	2.4850e-8	5.1070e-15
$(0,1/2)$	1.2501e-4	3.3202e-8	1.2011e-4	2.0417e-8	1.2011e-4	2.0417e-8
$(0,1)$	1.3156e-3	2.1043e-6	1.1968e-3	1.3757e-6	1.1968e-3	1.3757e-6
$(1/2,0)$	2.1151e-7	8.1490e-14	2.1180e-7	2.3315e-14	2.1180e-7	2.3315e-14
$(1/2,1/2)$	1.5991e-8	6.9278e-14	1.4921e-8	1.0347e-13	1.4921e-8	1.0347e-13
$(1/2,1)$	2.5212e-8	6.8861e-8	2.2474e-4	4.0222e-8	2.2474e-4	4.0222e-8
$(1,0)$	1.7870e-4	5.6519e-8	2.5217e-8	1.7764e-15	2.5217e-8	1.7764e-15
$(1,1/2)$	2.2929e-3	4.0606e-6	1.7479e-4	3.1988e-8	1.7479e-4	3.1988e-8
$(1,1)$	2.4864e-8	4.4409e-15	2.1947e-3	2.2773e-6	2.1947e-3	2.2773e-6

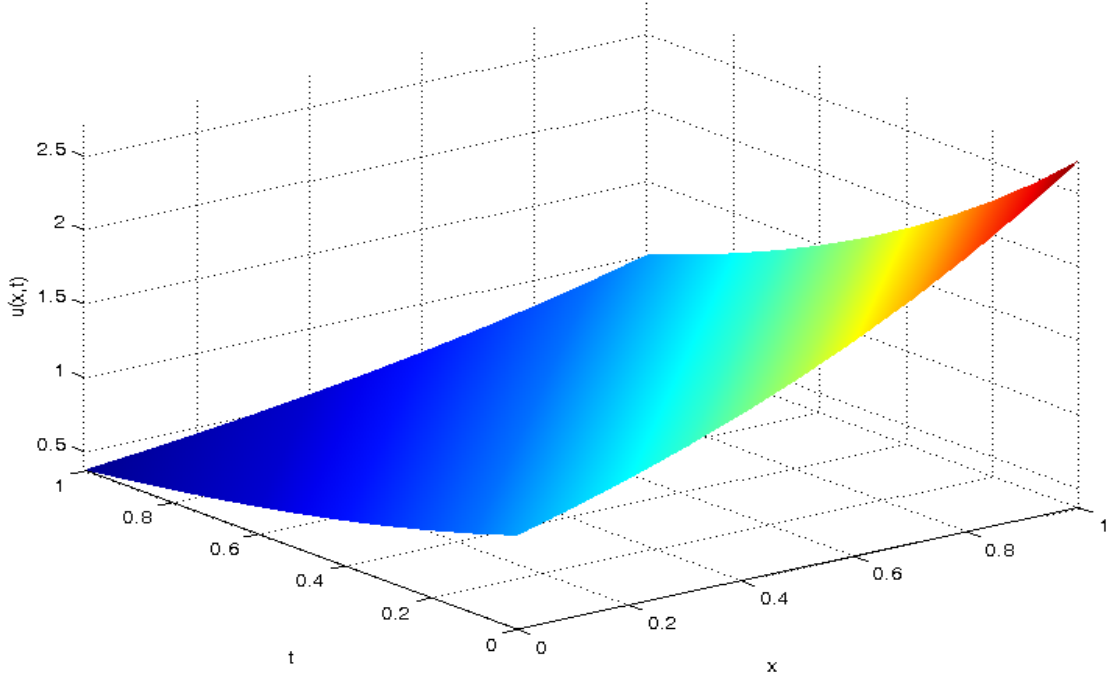
Tam Çözüm $u(x,t) = e^{x-t}$



$u_{10}(x,t)$ Bernoulli polinom çözümü

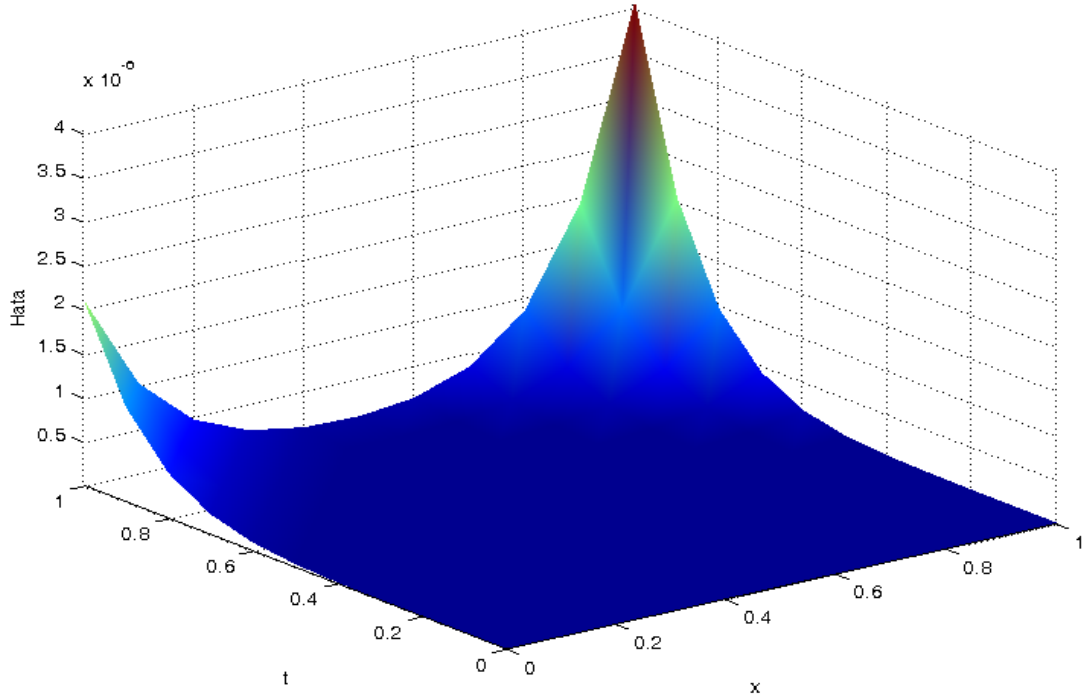


$u_{10,11}(x,t)$ İyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü

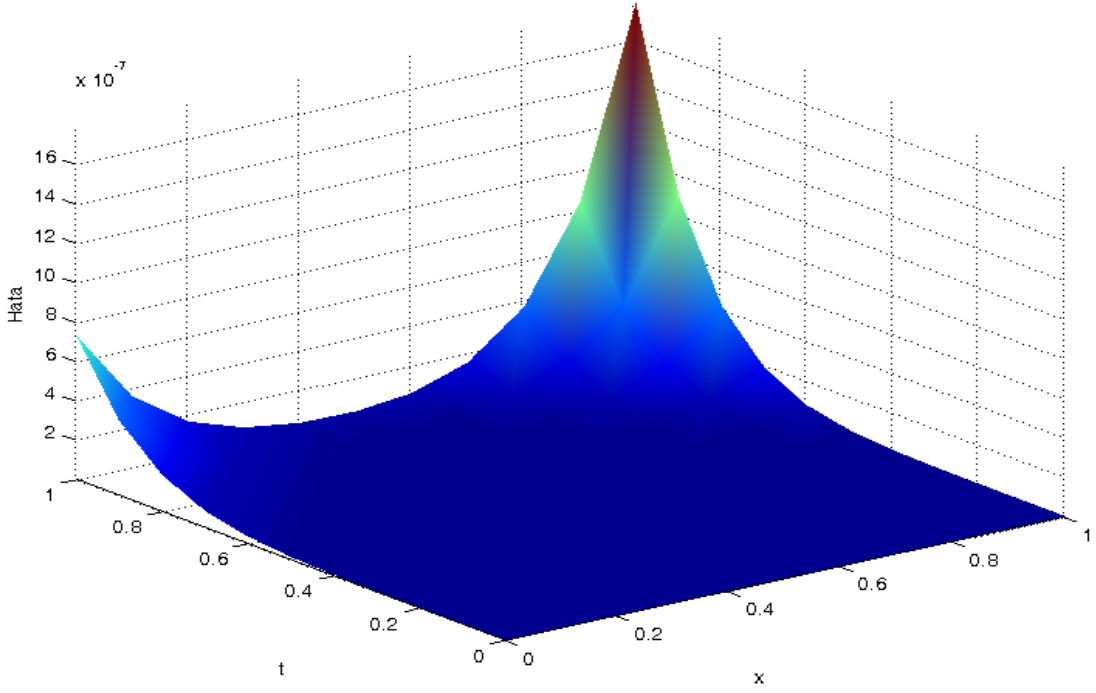


Şekil 5.4. e^{x-t} tam çözümü, $N = 10$ ve $M = 11$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

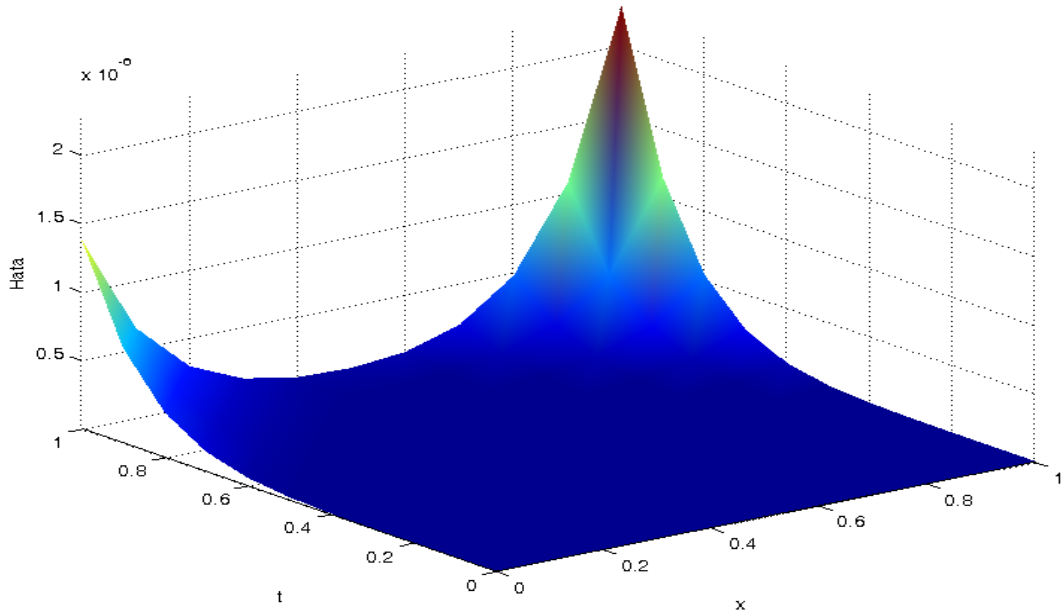
$|e_{10}(x,t)|$ Mutlak hata fonksiyonu



$|e_{10,11}(x,t)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu



$|E_{10,11}(x,t)|$ İyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu



Şekil 5.5 $N = 10$ ve $M = 11$ için $|e_N(x,t)|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}(x,t)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}(x,t)|$ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

Örnek 5.5

$u_{xx} - 2xtu_{tx} + x^2t^2u_{tt} + x^2tu_{xx} - 2u_t + xu = e^{x+t} (x^2t^2 - 2xt + x^2t + x - 1)$ parabolik tip kısmi diferansiyel denklemi

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= e^x \\ u_t(x, 0) &= e^x \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq 1 \text{ başlangıç koşulları ve}$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= e^t \\ u(1, t) &= ee^t \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \text{ sınır koşulları ile verilmiş olsun. Bu problemin tam çözümü}$$

$u(x, t) = e^{x+t}$ dir (Yüzbaşı, 2012). Çizelge 5.12 de tam çözüm, N nin ve M in farklı değerleri için U_N yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $U_{N,M}$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü karşılaştırılmıştır. Çizelge 5.13 de ise N nin ve M in farklı değerleri için mutlak hata $|e_N|$, tahmini mutlak hata $|e_{N,M}|$ ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının $|E_{N,M}|$ karşılaştırılmıştır. Şekil 5.6 da $u(x, t)$ tam çözüm ile $N = 7$ ve $N = 10$ için Bernoulli polinom çözümleri gösterilmiştir. Bunun yanında $N = 10$ için sonuçlar oldukça yakınsak elde edildiğinden iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün bulunmasına gerek kalmamıştır.

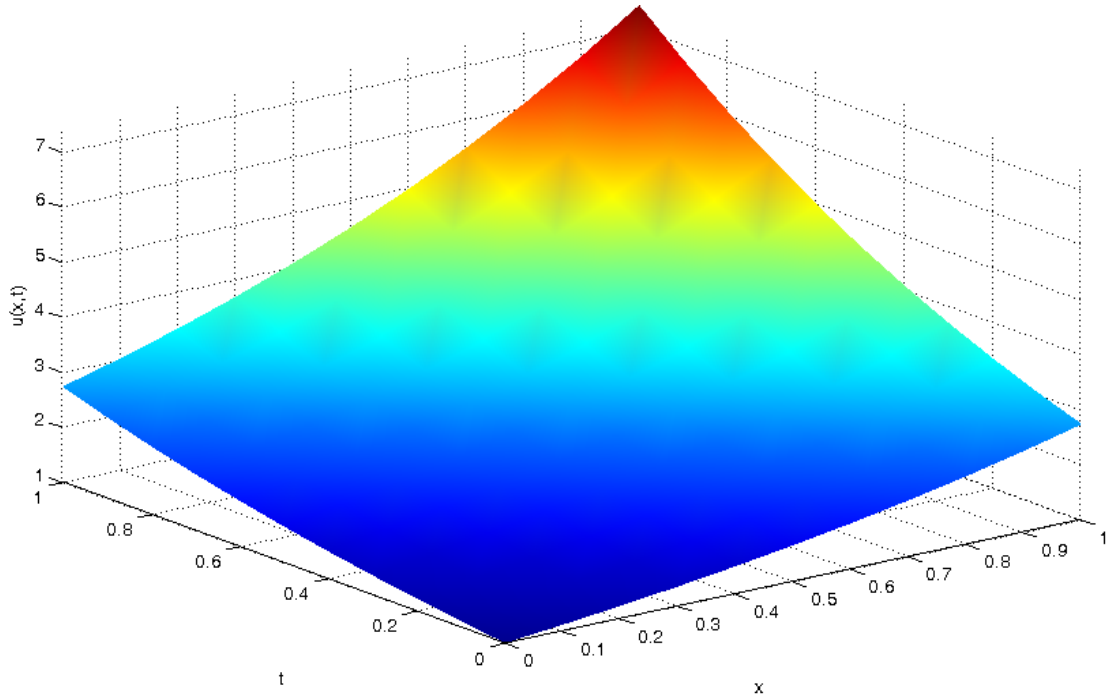
Çizelge 5.12 e^{x+t} tam çözümü, yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm e^{x+t}	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü $u_N(x, t)$		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $u_{N,M}(x, t)$
		$N = 7$	$N = 10$	
$(0, 0)$	1.0	1.000000002	1.0	0.9999999922
$(0, 1/2)$	1.648721271	1.648721457	1.648721271	1.64872147
$(0, 1)$	2.718281828	2.718282187	2.718281828	2.718282145
$(1/2, 0)$	1.648721271	1.64872134	1.648721271	1.64872135
$(1/2, 1/2)$	2.718281828	2.718281612	2.718281828	2.718281604
$(1/2, 1)$	4.48168907	4.481689986	4.48168907	4.48168989
$(1, 0)$	2.718281828	2.718281991	2.718281828	2.718282001
$(1, 1/2)$	4.48168907	4.481689048	4.48168907	4.481689137
$(1, 1)$	7.389056099	7.389056077	7.389056099	7.389056073

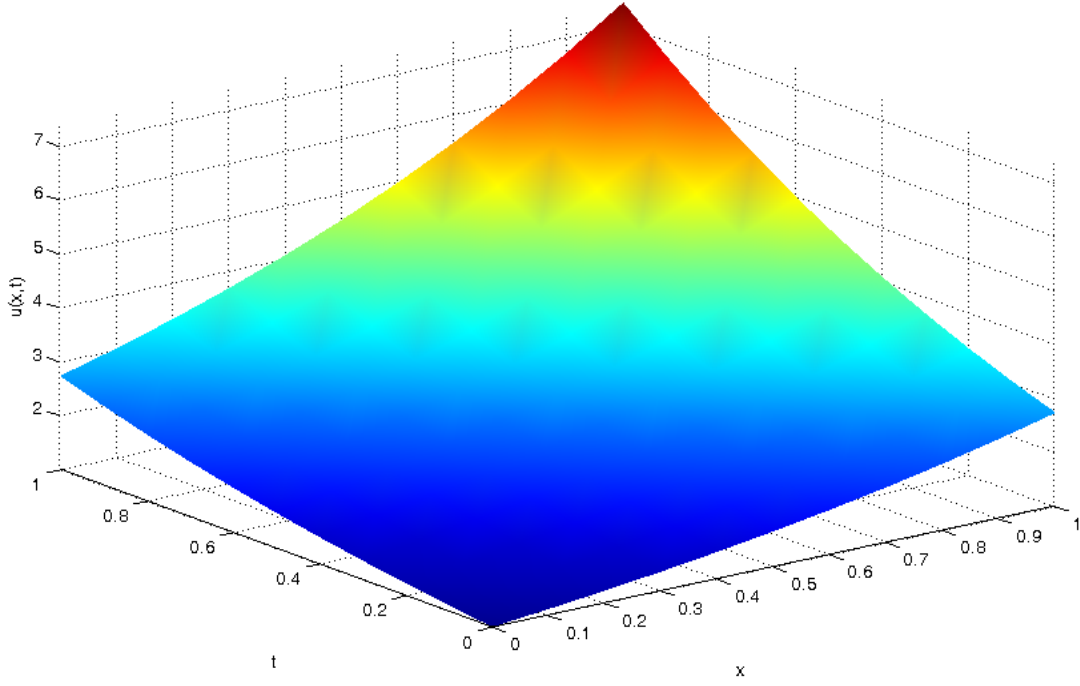
Çizelge 5.13 $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $		Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $
	$N = 7$	$N = 10$	$N = 7, M = 8$	
$(0,0)$	1.9158e-9	0	9.7583e-9	7.8425e-9
$(0,1/2)$	1.8635e-7	0	1.3167e-8	1.9952e-7
$(0,1)$	3.5847e-7	0	4.1545e-8	3.1693e-7
$(1/2,0)$	6.9537e-8	0	9.4965e-9	7.9034e-8
$(1/2,1/2)$	2.1635e-7	0	8.1777e-9	2.2453e-7
$(1/2,1)$	9.1565e-7	0	9.6383e-8	8.1927e-7
$(1,0)$	1.6252e-7	0	1.0085e-8	1.7261e-7
$(1,1/2)$	2.2822e-8	0	8.9889e-8	6.7067e-8
$(1,1)$	2.1830e-8	0	4.4892e-9	2.6319e-8

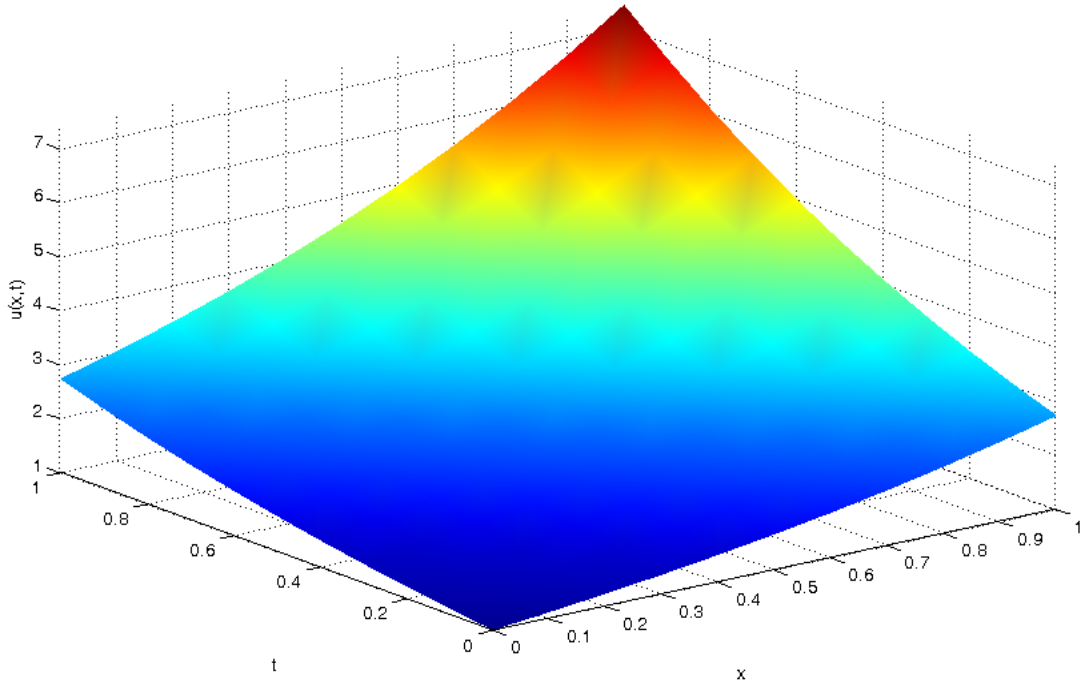
Tam Çözüm $u(x,t) = e^{x+t}$



$u_7(x, t)$ Bernoulli polinom çözümü



$u_{10}(x, t)$ Bernoulli polinom çözümü



Şekil 5.6. e^{x+t} tam çözümü, $N = 7$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $N = 10$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

Örnek 5.6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - u = 0, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 1, \text{ kısmi diferansiyel denklemini}$$

$$u(x, 0) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(\pi, t) = 0, 0 \leq t \leq 1$$

$$u(0, t) = 0, 0 \leq t \leq 1$$

koşulları ile verilmiş olsun. Bu problemin tam çözümü $u(x, t) = e^{-2t} \sin x$ dir. Göz önüne alınan yöntem $N = 3$ ve $N = 7$ için probleme uygulanmıştır. $M = 4$ ve $M = 8$ değerleri için rezidüel hata analizi ve çözümlerin iyileştirilmesi yapılmıştır. Çizelge 5.14 de tam çözüm, $u_N(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün tablo değerleri verilmiştir. Çizelge 5.15 de ise $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}(x)|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}(x)|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının tablo değerleri gösterilmiştir. Şekil 5.7 de $u(x, t)$ tam çözümü, $N = 3$ ve $M = 4$ için elde edilen $u_N(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{N,M}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli çözümleri karşılaştırılmıştır. Şekil 5.8 de ise aynı karşılaştırmalar $N = 7$ ve $M = 8$ için yapılmıştır.

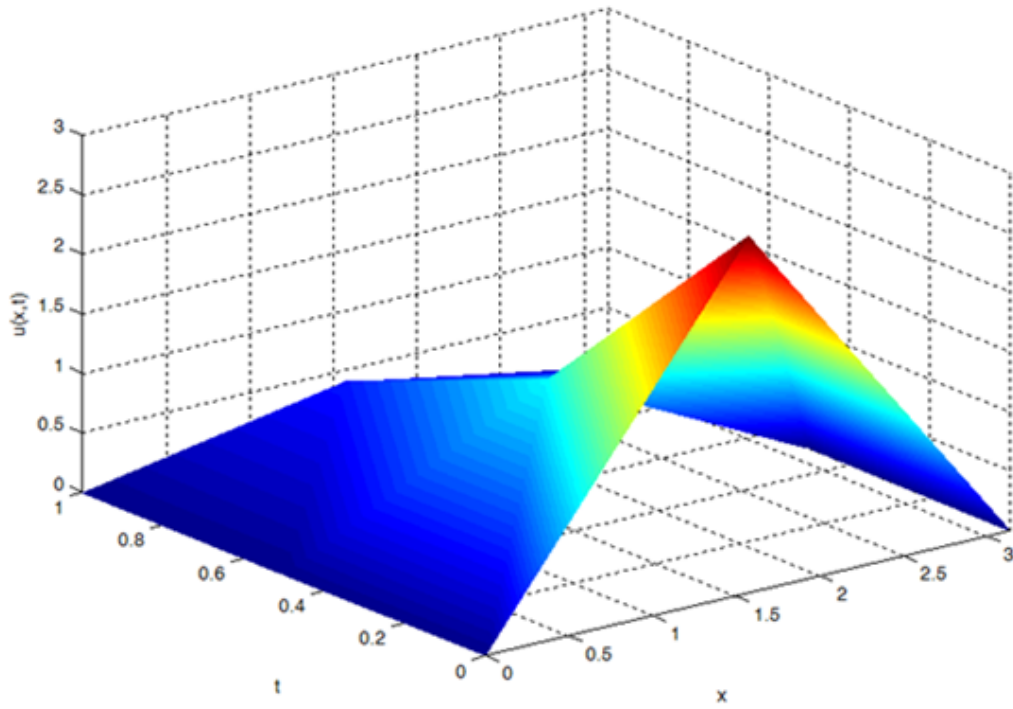
Çizelge 5.14 $e^{-2t} \sin x$ tam çözümü, $N = 7$ ve $M = 8$ için U_N yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $U_{N,M}$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm $e^{-2t} \sin x$	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü $u_N(x, t)$	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $u_{N,M}(x, t)$
	$N = 7$	$N = 7$	$N = 7, M = 8$
$(0, 0)$	0	-7.464641099e-5	-7.551061082e-5
$(0, 1/2)$	0	-1.124716295e-5	-1.032932273e-5
$(0, 1)$	0	-2.110297652e-5	-2.109039795e-5
$(\pi/2, 0)$	1	9.998404565e-1	9.998438148e-1
$(\pi/2, 1/2)$	3.678794412e-1	3.678737492e-1	3.678844915e-1
$(\pi/2, 1)$	1.353352832e-1	1.353323944e-1	1.353378591e-1
$(\pi, 0)$	1.224646799e-16	-7.464641099e-5	-7.551061082e-5
$(\pi, 1/2)$	4.505223801e-17	-1.124716295e-5	-1.032932273e-5
$(\pi, 1)$	1.657379214e-17	-2.110297652e-5	-2.109039788e-5

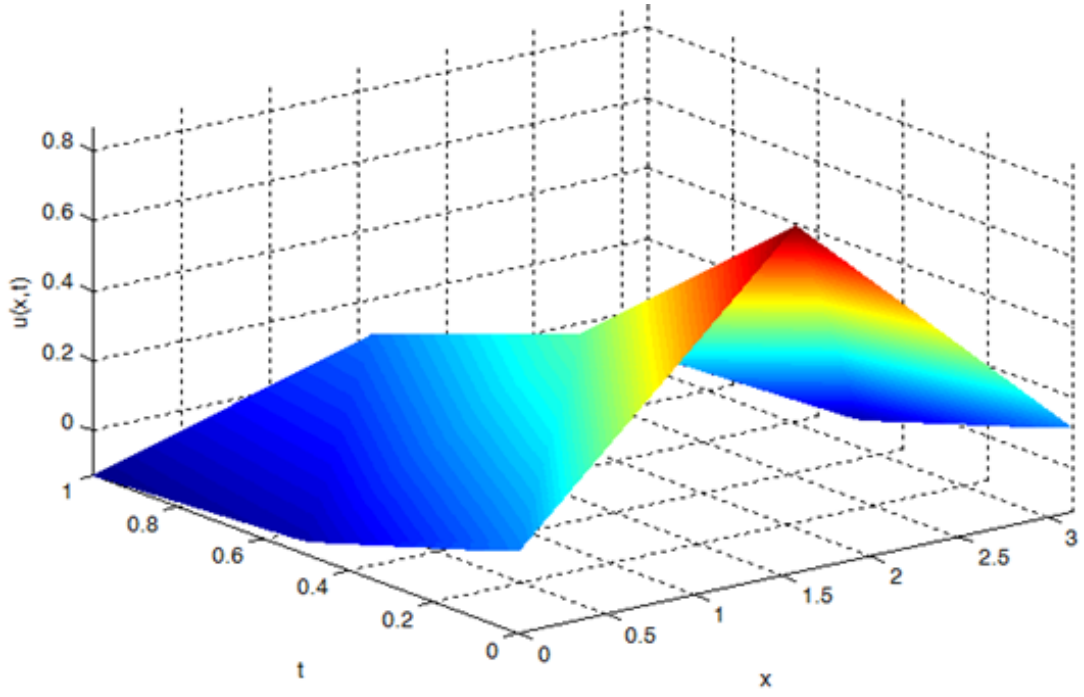
Çizelge 5.15 $N = 7$ ve $M = 8$ için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $	Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $	İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $
	$N = 7$	$N = 7, M = 8$	$N = 7, M = 8$
$(0,0)$	7.4646e-5	8.6420e-7	7.5511e-5
$(0,1/2)$	1.1247e-5	9.1784e-7	1.0329e-5
$(0,1)$	2.1103e-5	1.2579e-8	2.1090e-5
$(\pi/2,0)$	1.5954e-4	3.3583e-6	1.5619e-4
$(\pi/2,1/2)$	5.6920e-6	1.0742e-5	5.0503e-6
$(\pi/2,1)$	2.8888e-6	5.4646e-6	2.5758e-6
$(\pi,0)$	7.4646e-5	8.6420e-7	7.5511e-5
$(\pi,1/2)$	1.1247e-5	9.1784e-7	1.0329e-5
$(\pi,1)$	2.1103e-5	1.2579e-8	2.1090e-5

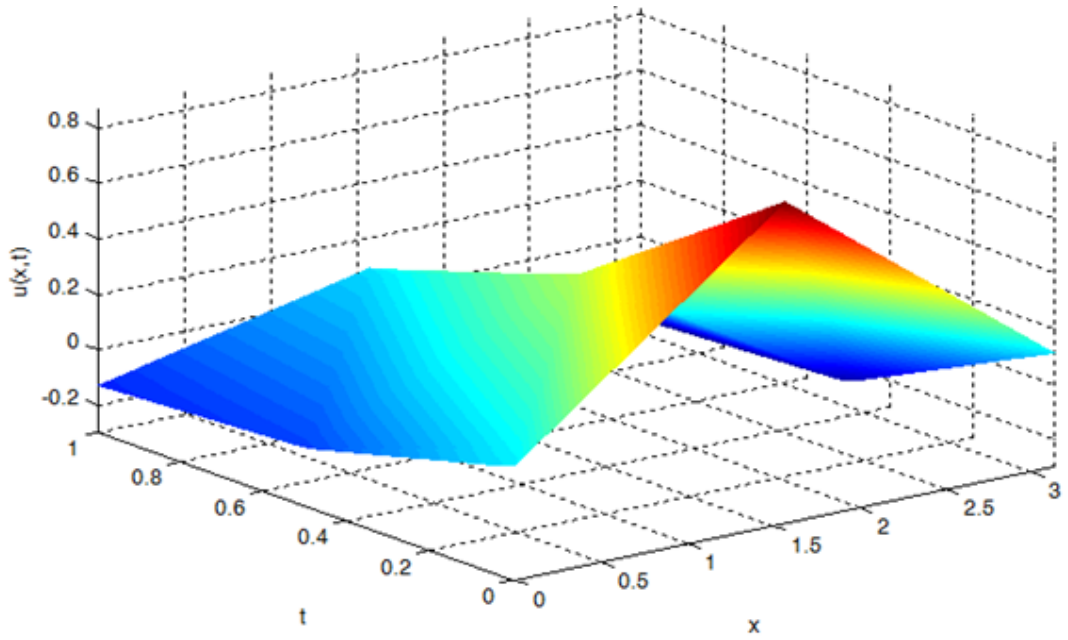
Tam Çözüm $u(x,t) = e^{-2t} \sin x$



$u_3(x, t)$ Bernoulli Polinom Çözümü

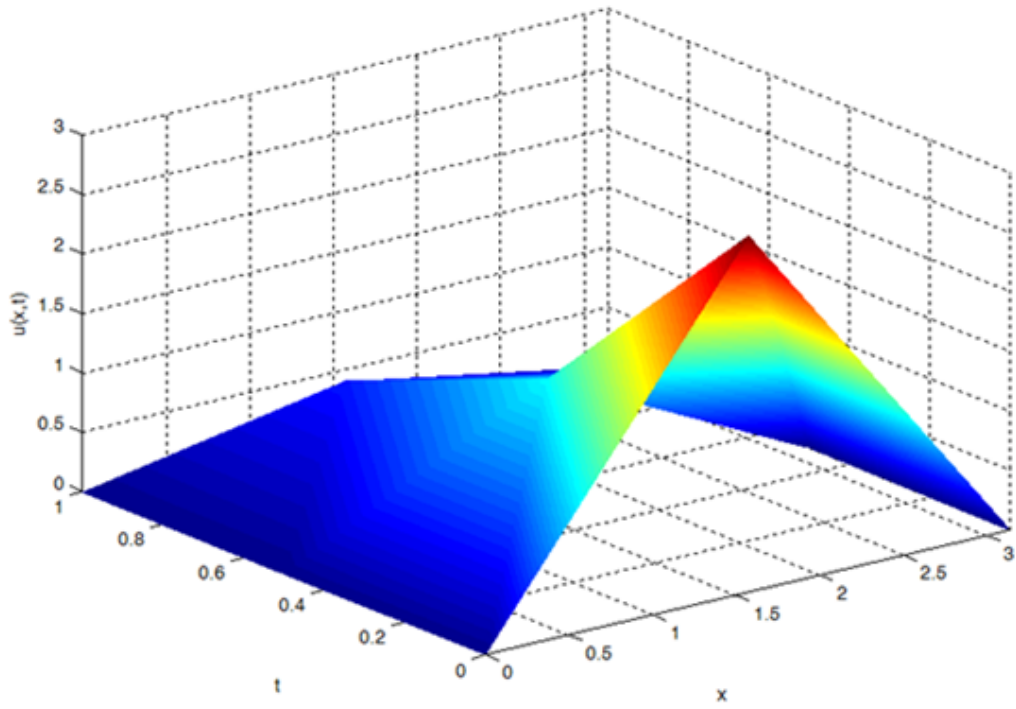


$u_{3,4}(x, t)$ İyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü

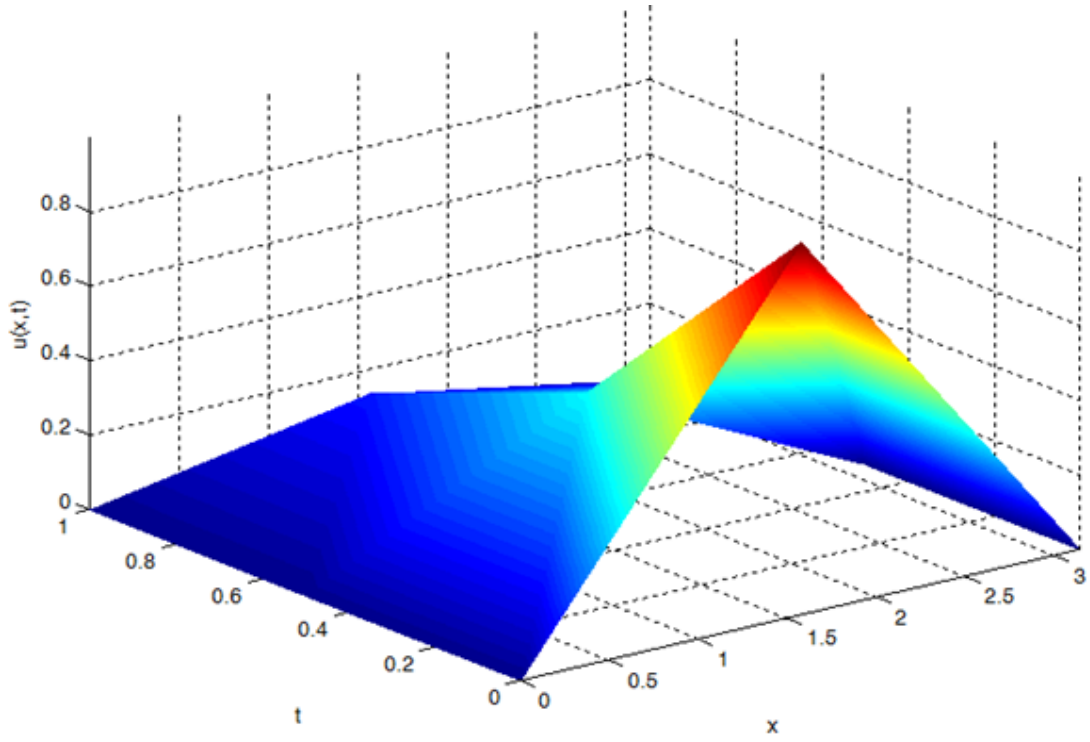


Şekil 5.7 $e^{-2t} \sin x$ tam çözümü, $N = 3$ ve $M = 4$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

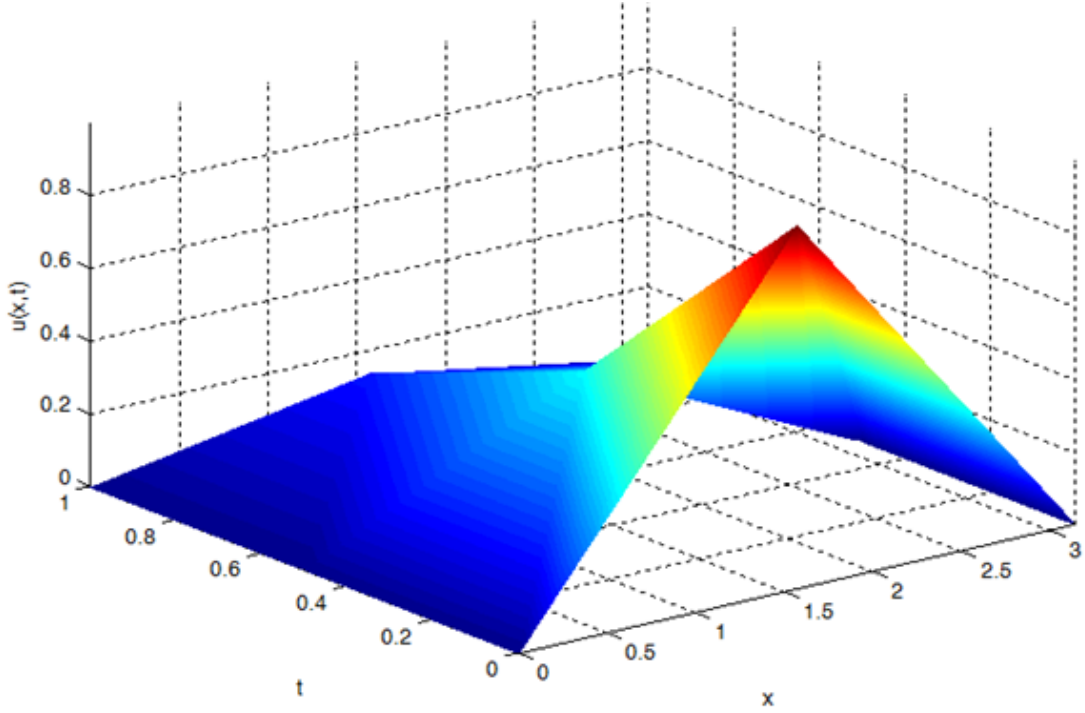
Tam Çözüm $u(x,t) = e^{-2t} \sin x$



$u_7(x,t)$ Bernoulli polinom çözümü



$u_{7,8}(x,t)$ İyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü



Şekil 5.8 $e^{-2t} \sin x$ tam çözümü, $N = 7$ ve $M = 8$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

Örnek 5.7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0 \quad \text{Helmholtz denklemi}$$

$u(0, y) = y$ ve $u_x(0, y) = y + \cosh y$ koşulları ile ele alınsın. Bu problemin tam çözümü $u(x, y) = ye^x + x \cosh y$ dir (Mohyud-Din et al, 2009). III. ve IV. bölümde verilen prosedürler takip edilerek $N = 7, N = 13$ ve $M = 8, M = 14$ değerleri için yaklaşık Bernoulli polinom çözümleri, iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümleri, mutlak hata fonksiyonları, tahmini mutlak hata fonksiyonları ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin mutlak hata fonksiyonları Matlab'da yazılan bilgisayar kodu ile hesaplanmıştır. Çizelge 5.16 da tam çözüm, $N = 7, N = 13$ ve $M = 8, M = 14$ değerleri için elde edilen yaklaşık Bernoulli polinom çözümleri ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümleri karşılaştırılmıştır. Çizelge 5.17 de ise yine

aynı N ve M değerleri için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hataları karşılaştırılmıştır. Şekil 5.9 da tam çözüm, $N = 7$, $M = 8$ değerleri için elde edilen yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü ile karşılaştırılmıştır. Şekil 5.10 da ise aynı karşılaştırma $N = 13$, $M = 14$ değerleri için yapılmıştır. Şekil 5.11 de $N = 7$, $M = 8$ değerleri için mutlak hata fonksiyonu, tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılırken Şekil 5.12 de ise aynı karşılaştırma $N = 13$, $M = 14$ değerleri için verilmiştir.

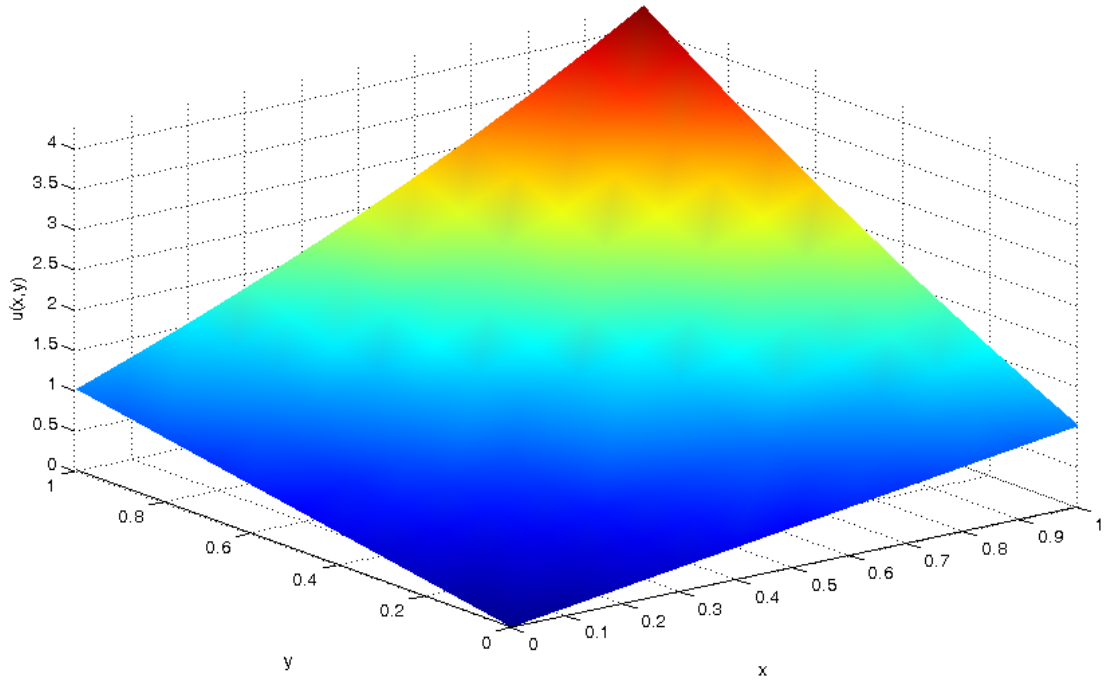
Çizelge 5.16 $ye^x + x \cosh y$ tam çözümü, $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 13$, $M = 14$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm $ye^x + x \cosh y$	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü $u_N(x, t)$		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $u_{N,M}(x, t)$	
		$N = 7$	$N = 13$	$N = 7, M = 8$	$N = 13, M = 14$
$(0, 0)$	0.0	1.5e-9	-6.1062e-15	1.6e-9	-6.2172e-15
$(0, 1/2)$	0.5	4.99999986e-1	0.5	4.999999857e-1	0.5
$(0, 1)$	1.0	1.000000002	1.0	1.000000002	1.0
$(1/2, 0)$	0.5	4.99998147e-1	5.000000004e-1	4.999988699e-1	5.000000004e-1
$(1/2, 1/2)$	1.388173618	1.388171791	1.388173618	1.388171807	1.388173618
$(1/2, 1)$	2.420261588	2.420270056	2.420261588	2.420269533	2.420261588
$(1, 0)$	1.0	1.000103994	0.9999999466	1.000097486	0.9999999466
$(1, 1/2)$	2.486766879	2.486705528	2.486766888	2.486708805	2.486766888
$(1, 1)$	4.261362463	4.261434918	4.261362549	4.261430893	4.261362549

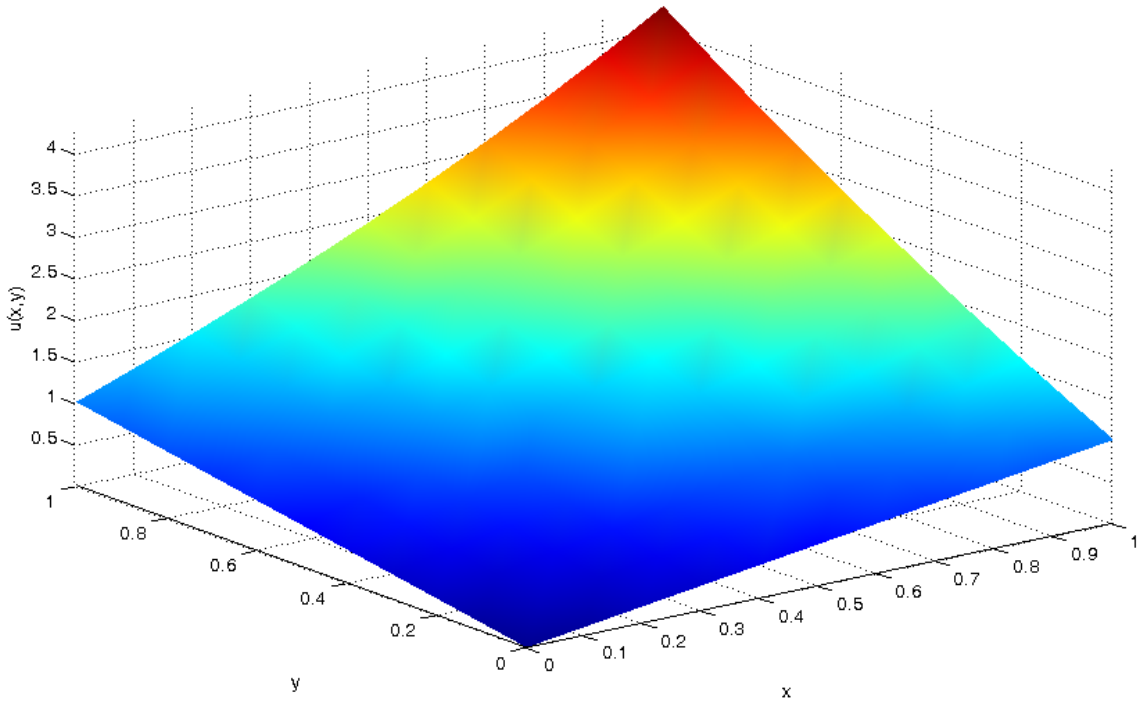
Çizelge 5.17 $N=7$, $M=8$ ve $N=13$, $M=14$ için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $		Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $	
	$N=7$	$N=13$	$N=7, M=8$	$N=13, M=14$	$N=7, M=8$	$N=13, M=14$
$(0,0)$	1.5816e-9	6.1062e-15	1.6129e-9	6.1617e-15	1.6129e-9	6.1617e-15
$(0,1/2)$	1.4278e-8	0	1.4269e-8	0	1.4269e-8	0
$(0,1)$	1.7588e-9	0	1.7279e-9	0	1.7279e-9	0
$(1/2,0)$	1.8530e-6	3.5181e-10	1.1301e-6	3.5095e-10	1.1301e-6	3.5095e-10
$(1/2,1/2)$	1.8273e-6	0	1.8107e-6	0	1.8107e-6	0
$(1/2,1)$	8.4674e-6	0	7.9444e-6	0	7.9444e-6	0
$(1,0)$	1.0399e-4	5.3427e-8	9.7486e-5	5.3358e-8	9.7486e-5	5.3358e-8
$(1,1/2)$	6.1352e-5	8.2212e-9	5.8074e-5	8.0658e-9	5.8074e-5	8.0658e-9
$(1,1)$	7.2455e-5	8.5700e-8	6.8429e-5	8.5471e-8	6.8429e-5	8.5471e-8

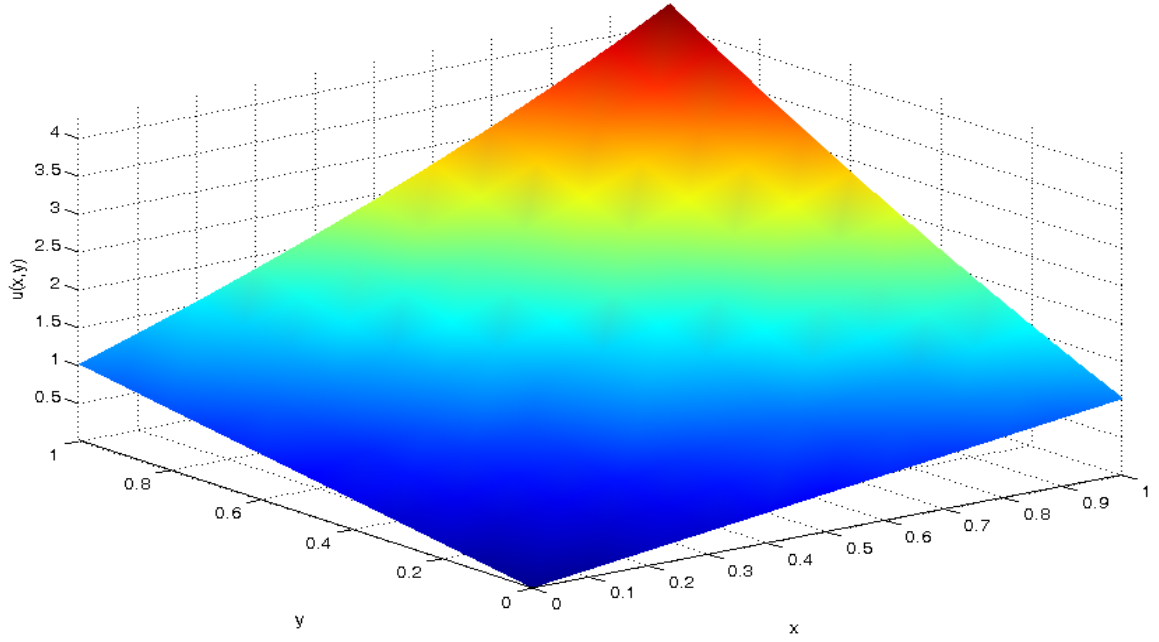
Tam Çözüm $u(x, y) = ye^x + x \cosh y$



$u_7(x, y)$ Yaklaşık Bernoulli polinom çözümü

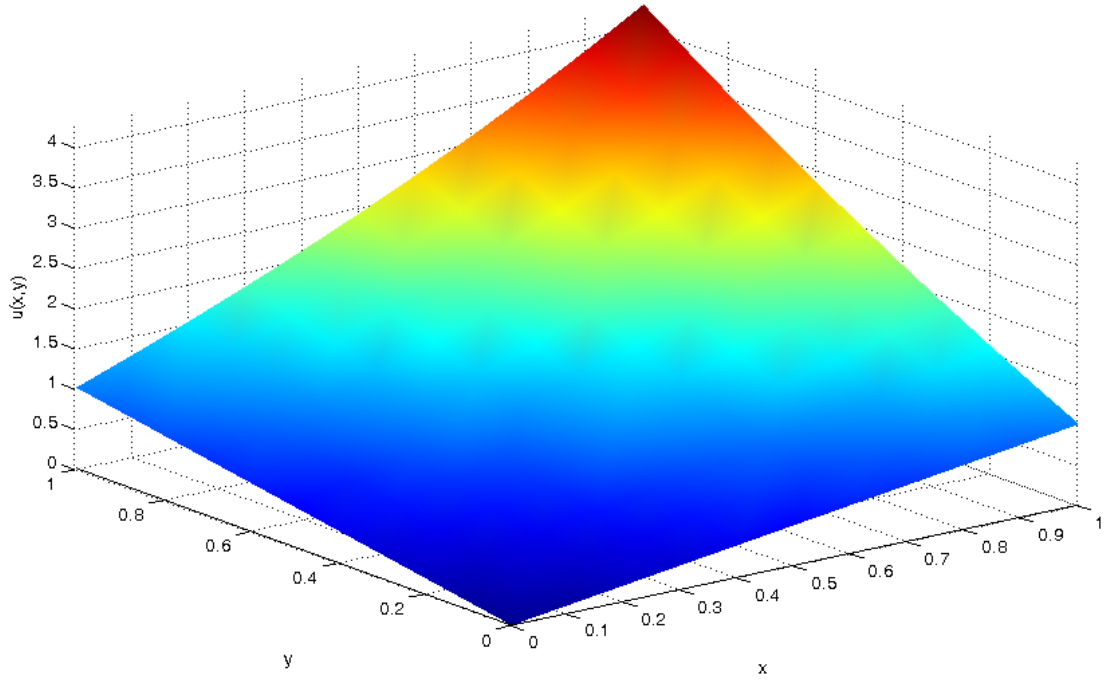


$u_{7,8}(x, y)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü

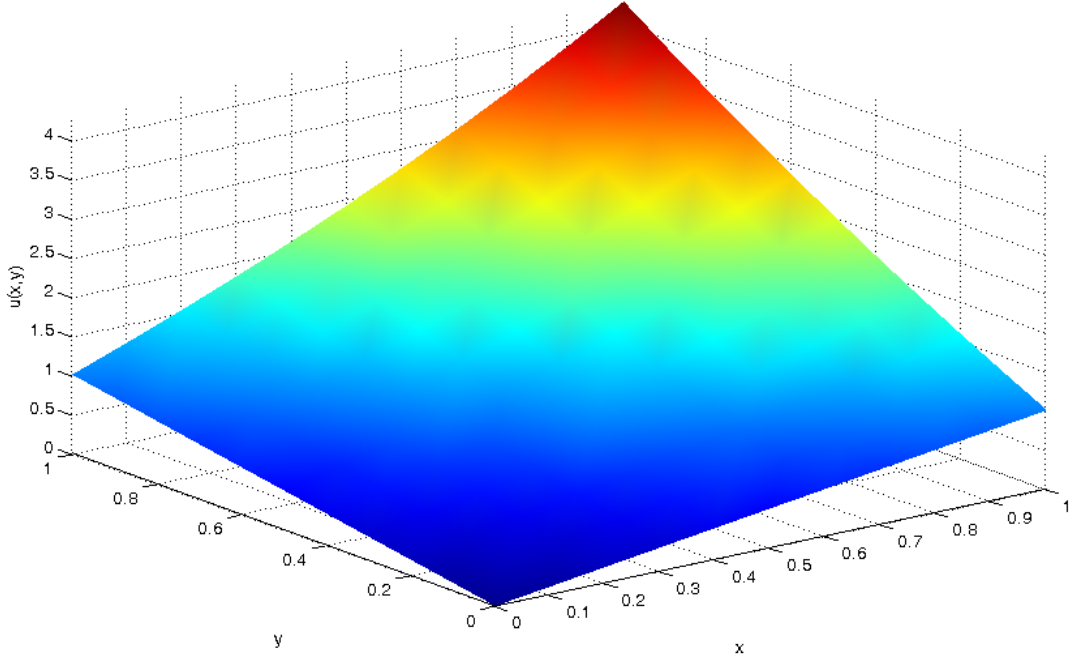


Şekil 5.9 $u(x, y) = ye^x + x \cosh y$ tam çözümü, $u_7(x, y)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{7,8}(x, y)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

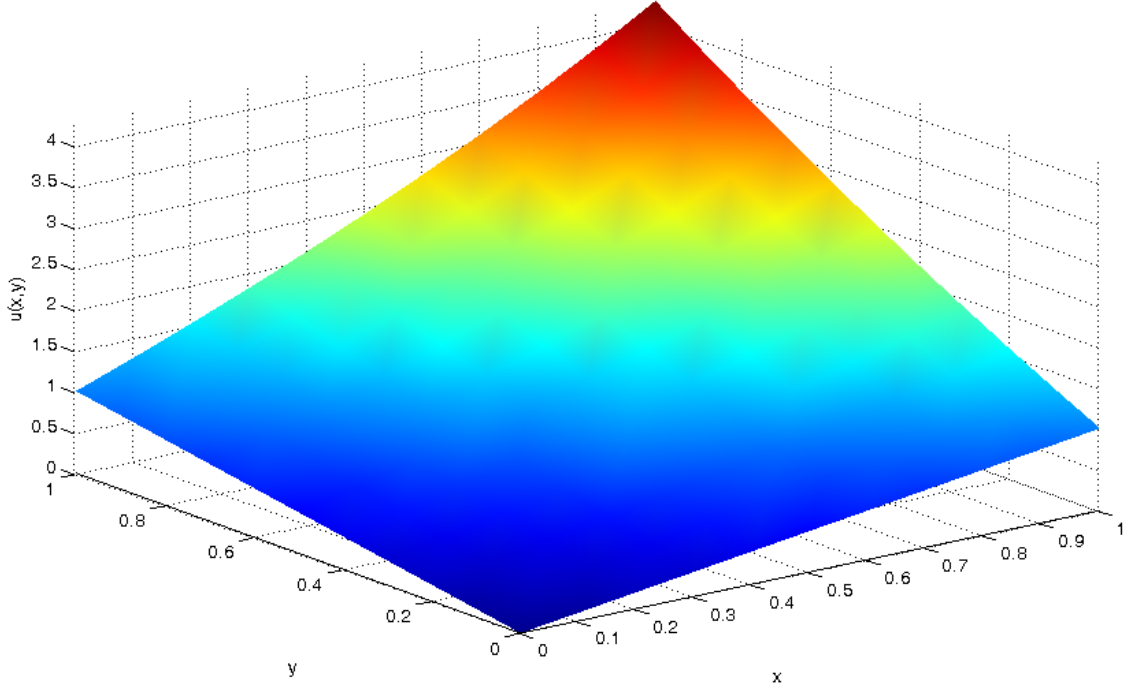
Tam Çözüm $u(x, y) = ye^x + x \cosh y$



$u_{13}(x, y)$ Yaklaşık Bernoulli polinom çözümü

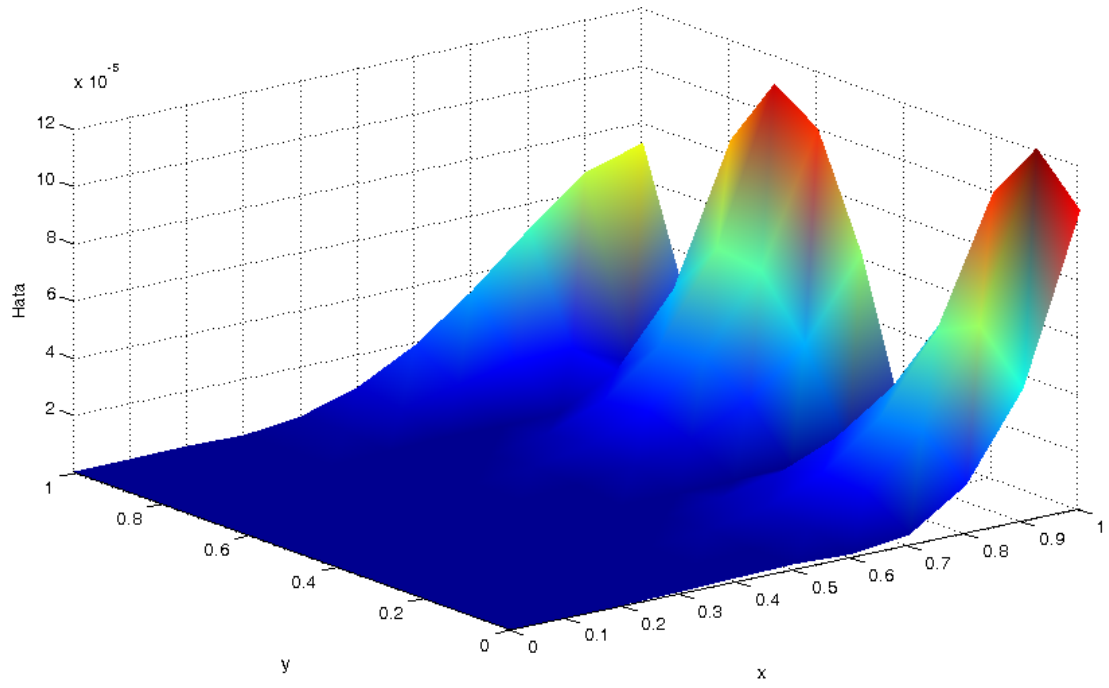


$u_{13,14}(x, y)$ İyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü

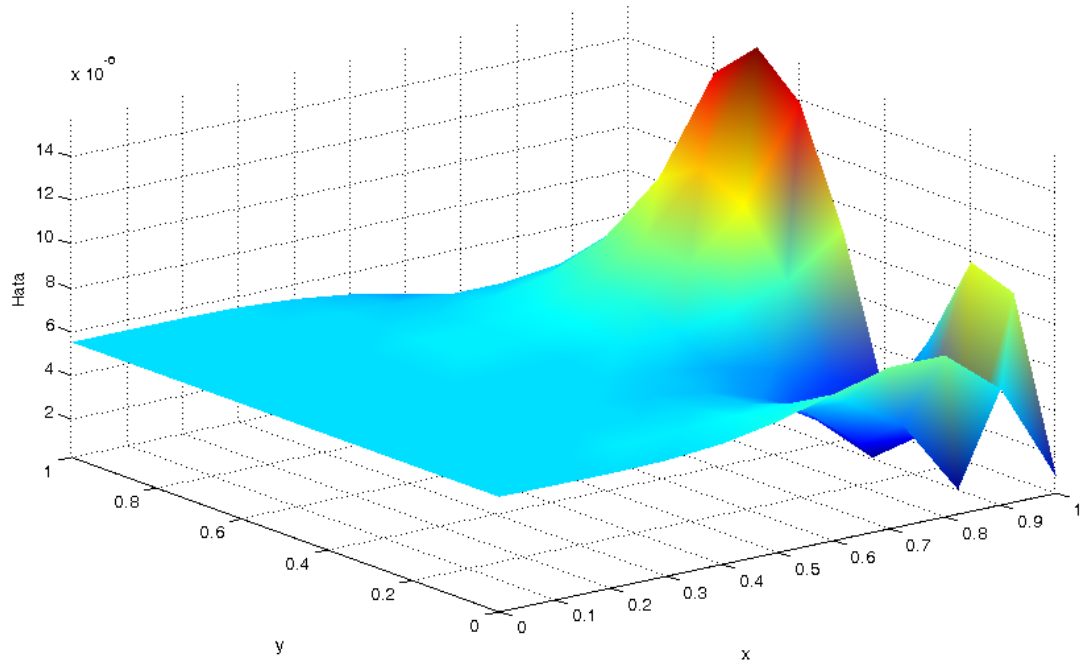


Şekil 5.10 $u(x, y) = ye^x + x \cosh y$ tam çözümü, $u_{13}(x, y)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{13,14}(x, y)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

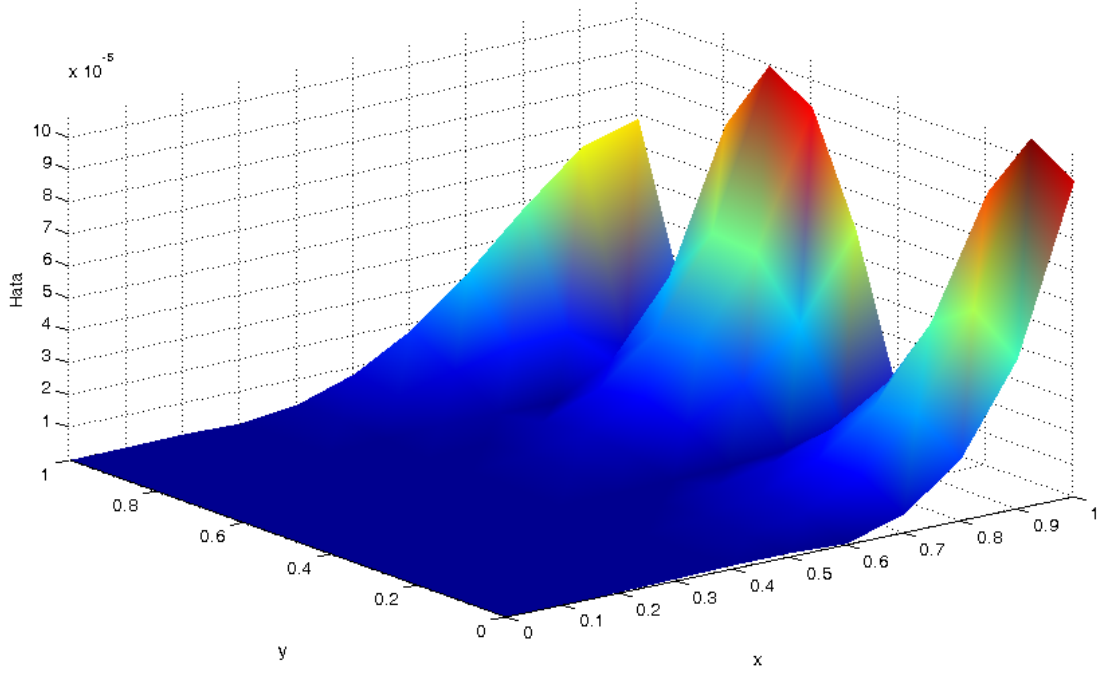
$|e_7(x, y)|$ Mutlak hata fonksiyonu



$|e_{7,8}(x, y)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu

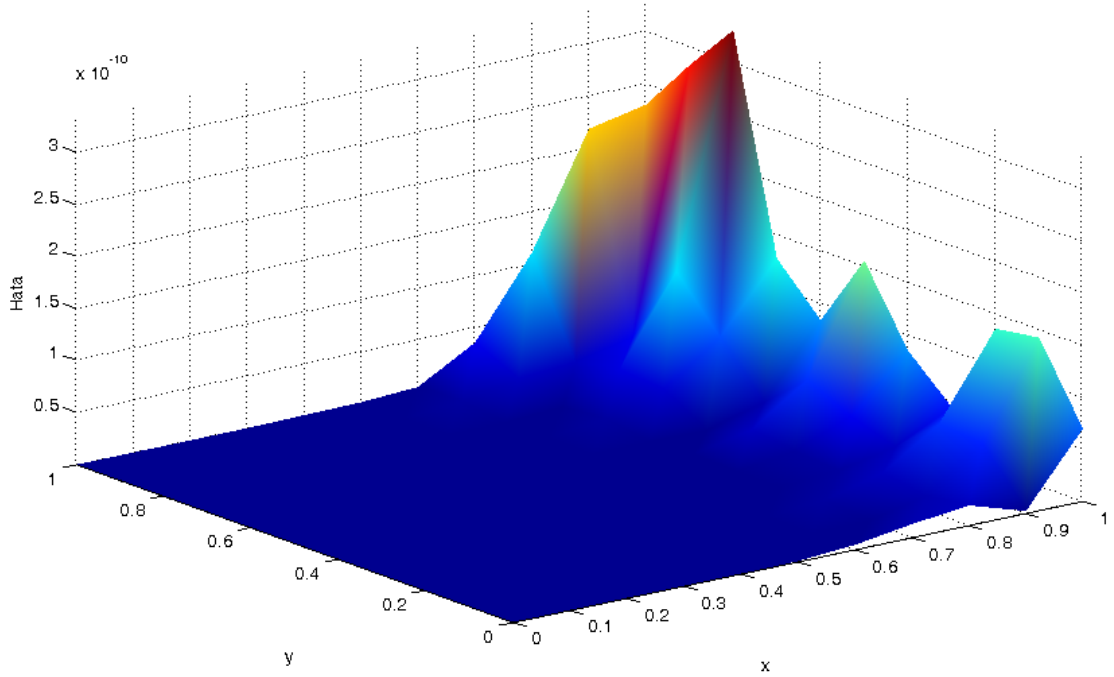


$|E_{7,8}(x,y)|$ İyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu

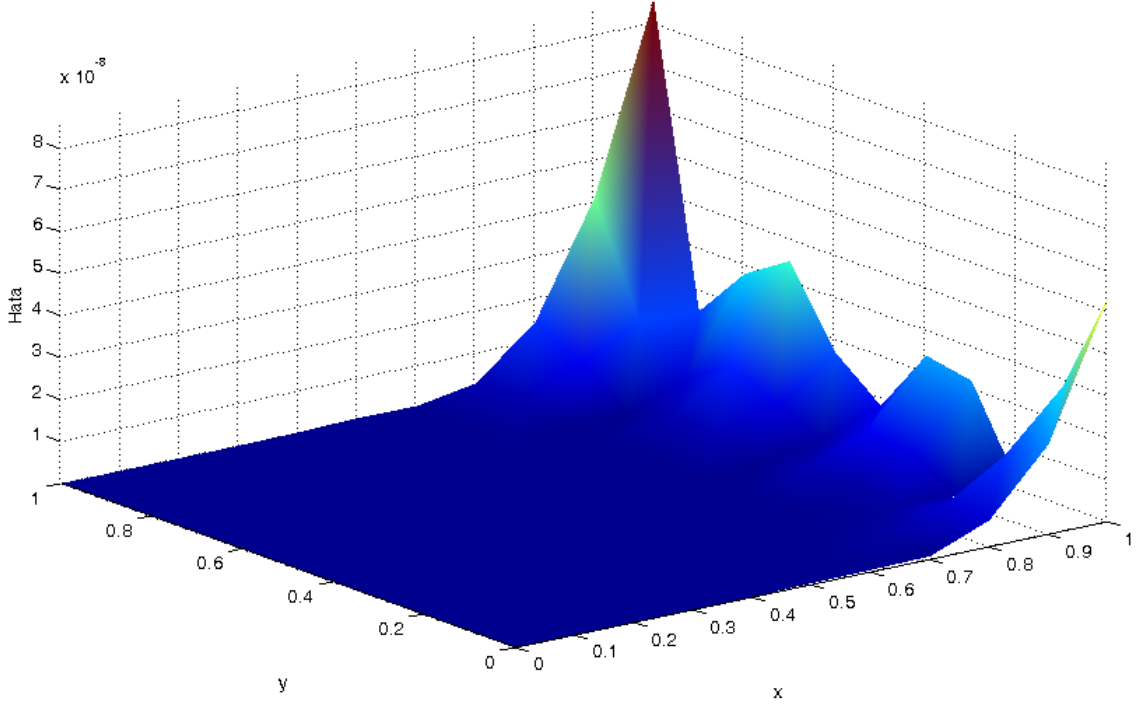


Şekil 5.11 $|e_7(x,y)|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{7,8}(x,y)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{7,8}(x,y)|$ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

$|e_{13,14}(x,y)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu



$|E_{13,14}(x, y)|$ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu



Şekil 5.12 $|e_{13,14}(x, y)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{13,14}(x, y)|$ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

Örnek 5.8 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 0 \text{ Helmholtz denklemini}$$

$u(0, y) = \sin 2y$ ve $u_x(0, y) = 0$ koşulları ile birlikte göz önüne alınsın. Bu problemin tam çözümü $u(x, y) = \cos(2x)\sin(2y)$ dir (Mohyud-Din et al, 2009). N ve M nin çeşitli değerleri için yaklaşık çözümleri Matlab kullanılarak elde edilmiştir. Çizelge 5.18 de tam çözüm, $N = 7, M = 8$ değerleri için elde edilen yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü karşılaştırılmış, benzer işlem $N = 13, M = 14$ değerleri için de yapılmıştır. Çizelge 5.19 da aynı N, M değerleri için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hataları karşılaştırılmıştır.

Şekil 5.13 de tam çözüm ile $N = 7, M = 8$ için bulunan yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü ile karşılaştırılırken Şekil 5.14 de ise bu karşılaştırma

$N = 13$, $M = 14$ değerleri için yapılmıştır. Şekil 5.15 de $N = 7$, $M = 8$ değerleri için elde edilen mutlak hata fonksiyonu ve tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu karşılaştırılırken Şekil 5.16 da ise mutlak hata fonksiyonu ve tahmin edilen mutlak hata fonksiyonunun karşılaştırılması $N = 13$, $M = 14$ için gösterilmiştir.

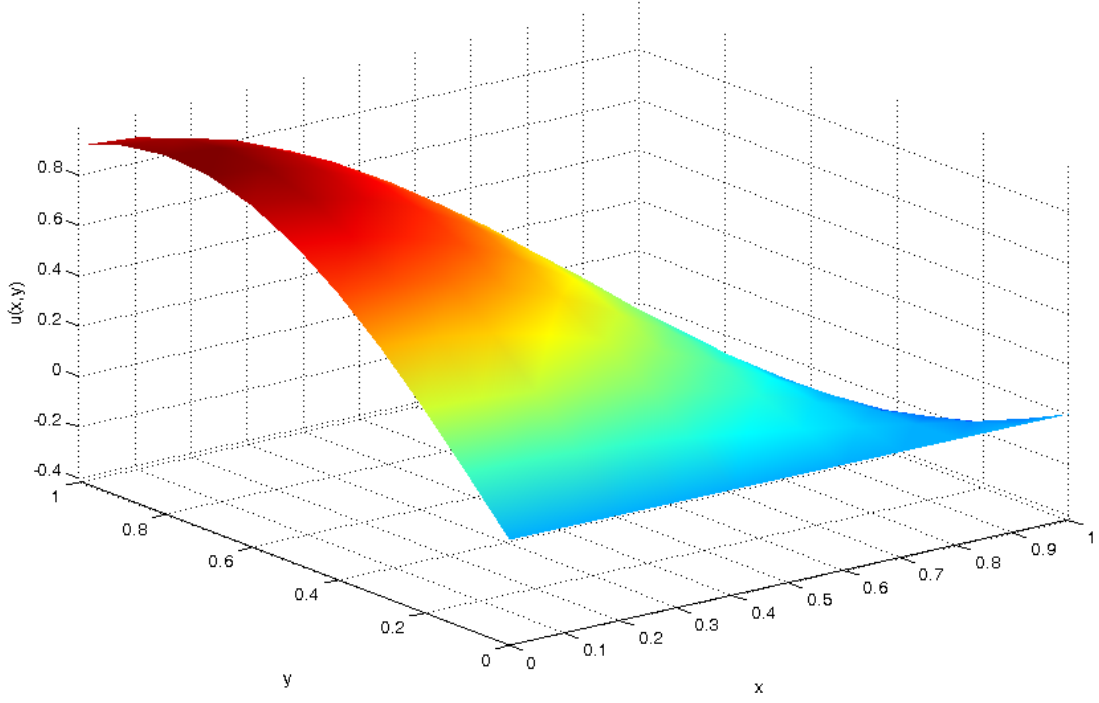
Çizelge 5.18 $\cos(2x)\sin(2y)$ tam çözümü, $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 13$, $M = 14$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm $\cos(2x)\sin(2y)$	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü $u_N(x, t)$		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $u_{N,M}(x, t)$	
		$N = 7$	$N = 13$	$N = 7, M = 8$	$N = 13, M = 14$
$(0, 0)$	0.0	6.915e-7	-1.287858e-14	5.904179e-8	-1.287858709e-14
$(0, 1/2)$	0.0	8.414618784e-1	8.414709848e-1	8.41462333e-1	8.414709848e-1
$(0, 1)$	0.0	9.092980797e-1	9.092974268e-1	9.092979614e-1	9.092974268e-1
$(1/2, 0)$	4.546487134e-1	1.4228624e-3	3e-10	1.190044936e-3	1.3e-10
$(1/2, 1/2)$	4.546487134e-1	4.538583006e-1	4.546487128e-1	4.53856062e-1	4.546487126e-1
$(1/2, 1)$	4.546487134e-1	4.93110996e-1	4.912954965e-1	4.928274838e-1	4.912954976e-1
$(1, 0)$	-3.784012477e-1	2.12837147e-2	-2.592e-7	2.750150666e-2	-4.953e-7
$(1, 1/2)$	-3.784012477e-1	-3.664419653e-1	-3.501758891e-1	-3.696828219e-1	-3.501760621e-1
$(1, 1)$	-3.784012477e-1	-3.595393588e-1	-3.784014257e-1	-3.528626269e-1	-3.784016667e-1

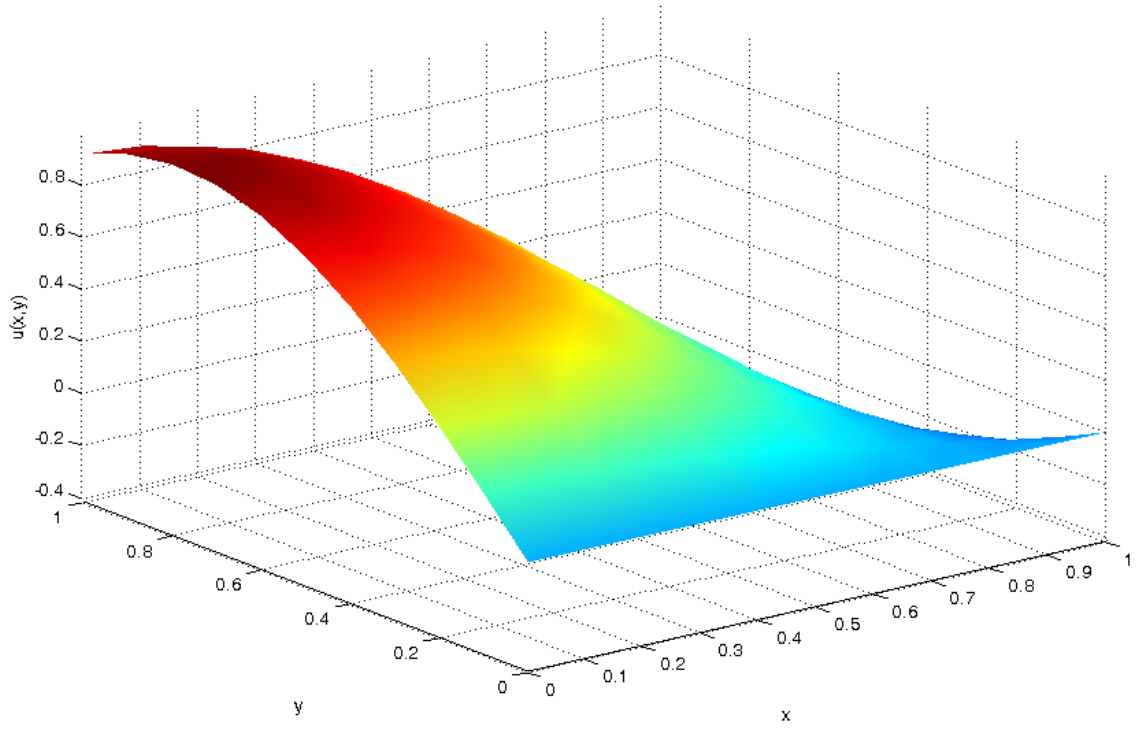
Çizelge 5.19 $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 13$, $M = 14$ için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $		Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $	
	$N = 7$	$N = 13$	$N = 7, M = 8$	$N = 13, M = 14$	$N = 7, M = 8$	$N = 13, M = 14$
$(0,0)$	6.9151e-7	1.2879e-14	5.9042e-7	1.2768e-14	5.9042e-7	1.2768e-14
$(0,1/2)$	8.4146e-1	8.4147e-1	8.4146e-1	8.4147e-1	8.4146e-1	8.4147e-1
$(0,1)$	9.0930e-1	9.0930e-1	9.0930e-1	9.0930e-1	9.0930e-1	9.0930e-1
$(1/2,0)$	4.5323e-1	4.5465e-1	4.5346e-1	4.5465e-1	4.5346e-1	4.5465e-1
$(1/2,1/2)$	7.9041e-4	5.8850e-10	7.9265e-4	7.6965e-10	7.9265e-4	7.6965e-10
$(1/2,1)$	3.8462e-2	3.6647e-2	3.8179e-2	3.6647e-2	3.8179e-2	3.6647e-2
$(1,0)$	3.9968e-1	3.7840e-1	4.0590e-1	3.7840e-1	4.0590e-1	3.7840e-1
$(1,1/2)$	1.1959e-2	2.8225e-2	8.7184e-3	2.8225e-2	8.7184e-3	2.8225e-2
$(1,1)$	1.8862e-2	1.7803e-7	2.5539e-2	4.1901e-7	2.5539e-2	4.1901e-7

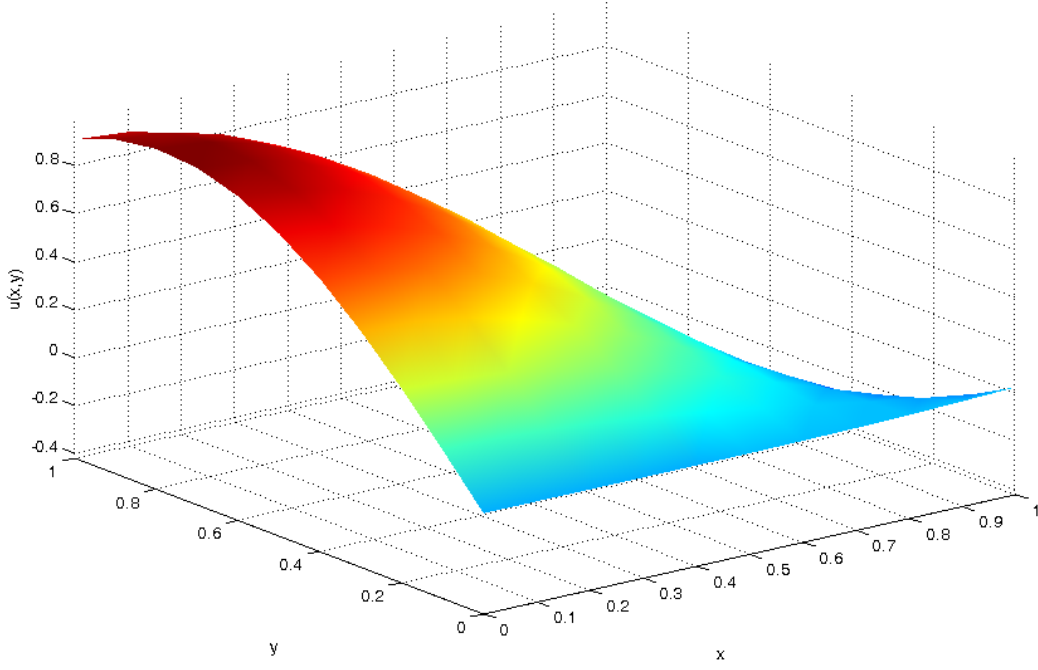
Tam Çözüm $u(x, y) = \cos(2x)\sin(2y)$



$u_7(x, y)$ Yaklaşık Bernoulli polinom çözümü

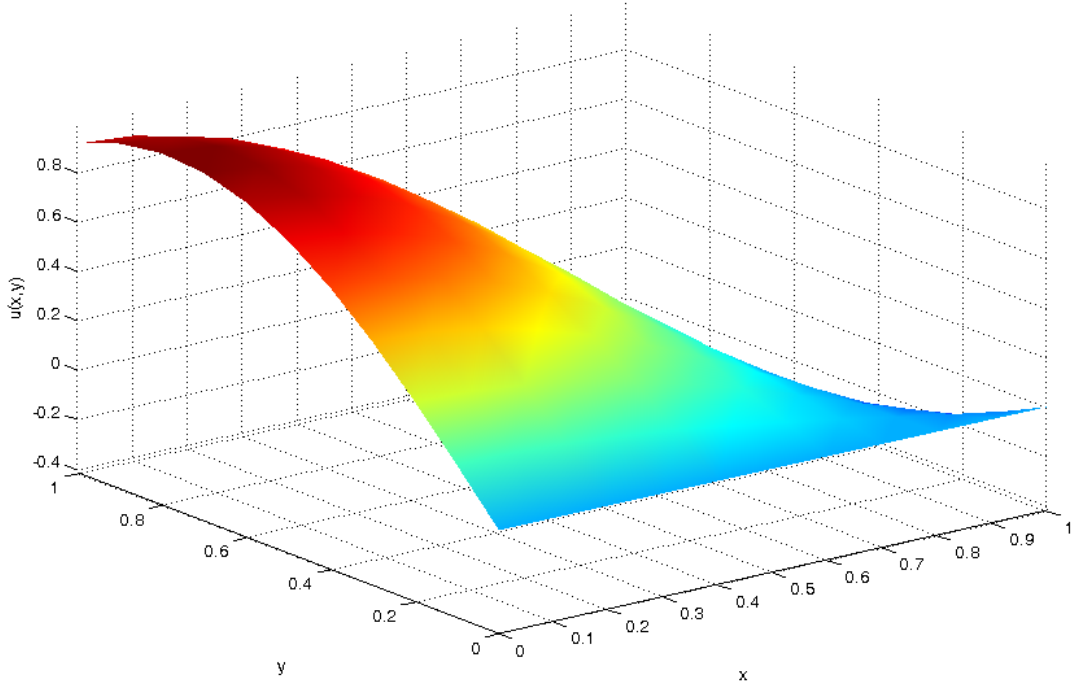


$u_{7,8}(x, y)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü

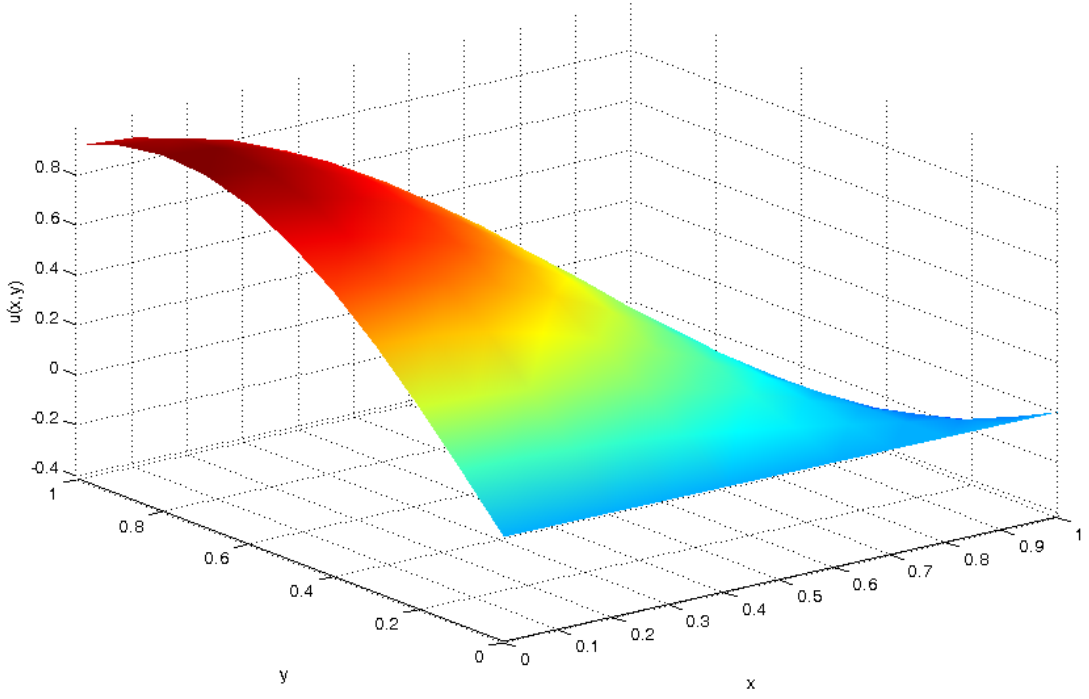


Şekil 5.13 $u(x, y) = \cos(2x)\sin(2y)$ tam çözümü, $u_7(x, y)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{7,8}(x, y)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

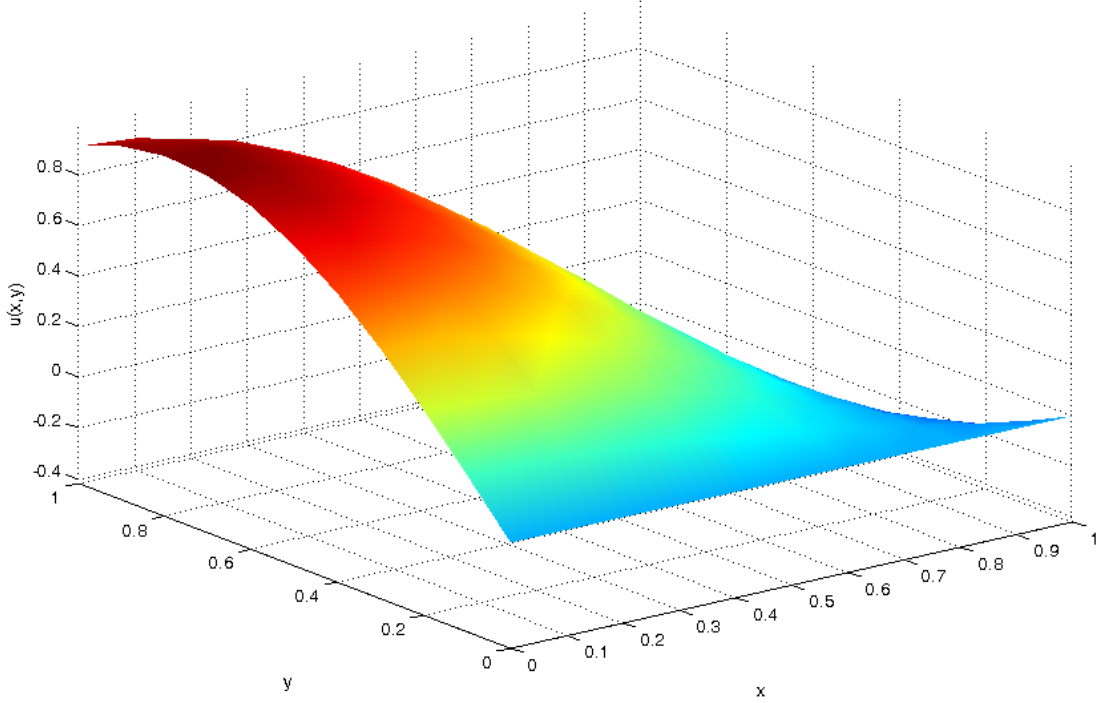
Tam Çözüm $u(x, y) = \cos(2x)\sin(2y)$



$u_{13}(x, y)$ Yaklaşık Bernoulli polinom çözümü

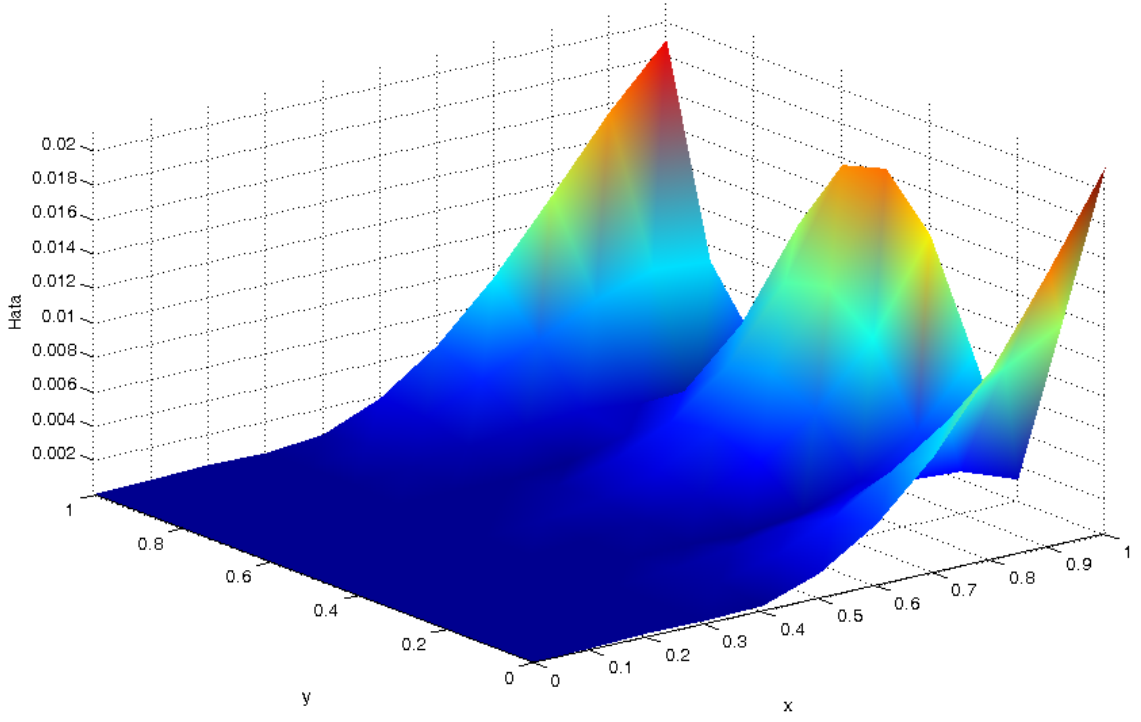


$u_{13,14}(x, y)$ İyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü

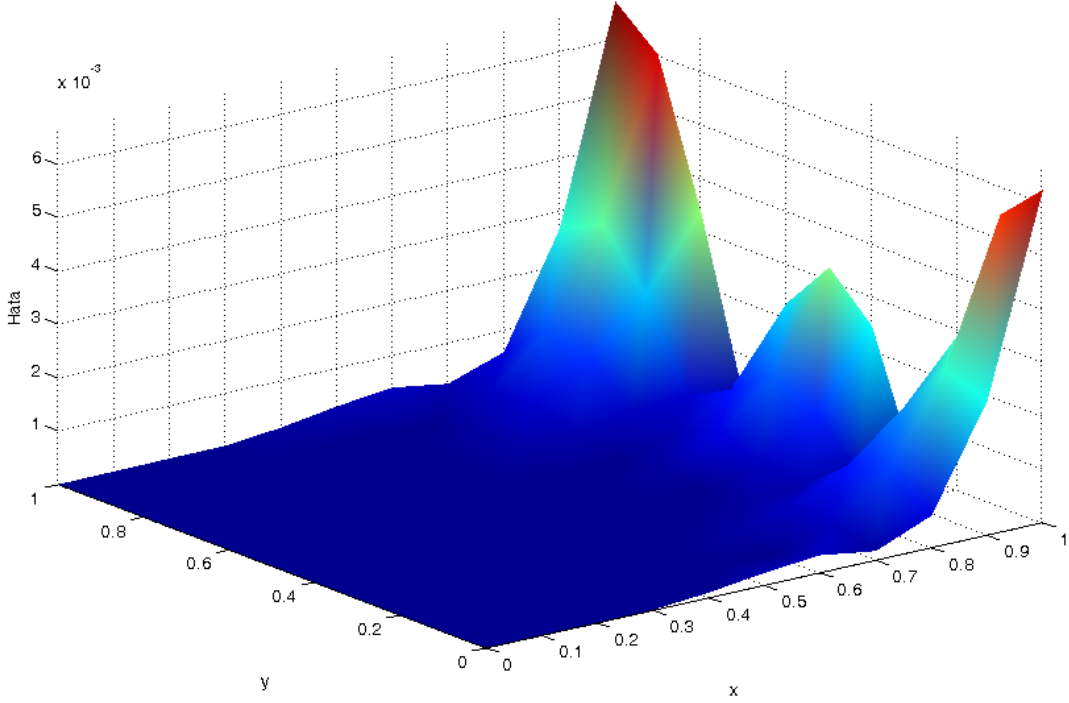


Şekil 5.14 $u(x, y) = \cos(2x)\sin(2y)$ tam çözümü, $u_{13}(x, y)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{13,14}(x, y)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

$|e_7(x, y)|$ Mutlak hata fonksiyonu

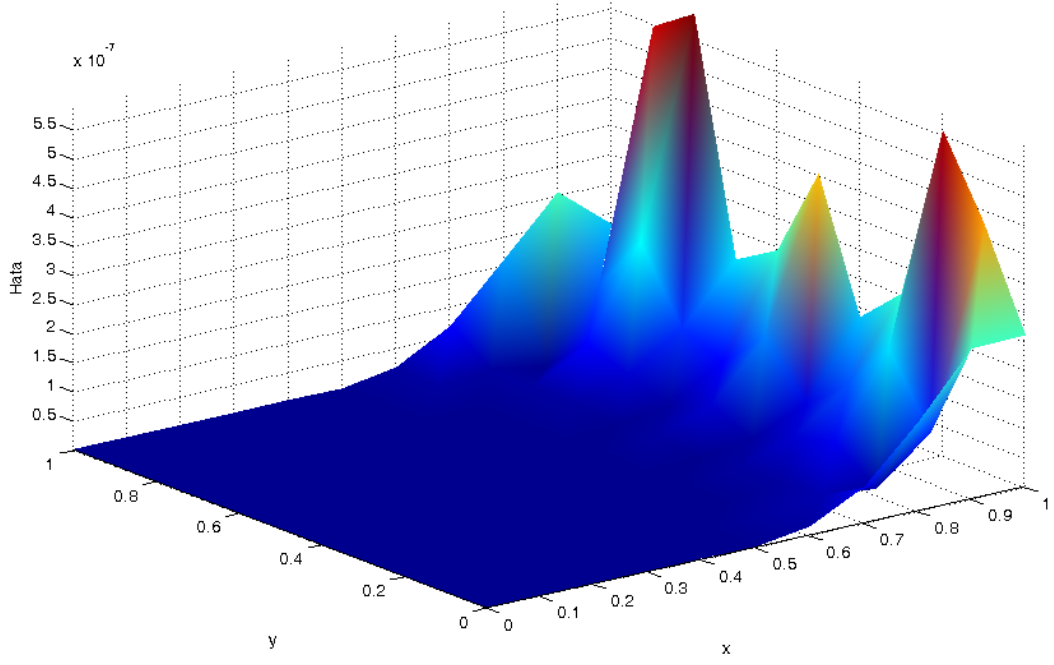


$|e_{7,8}(x, y)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu

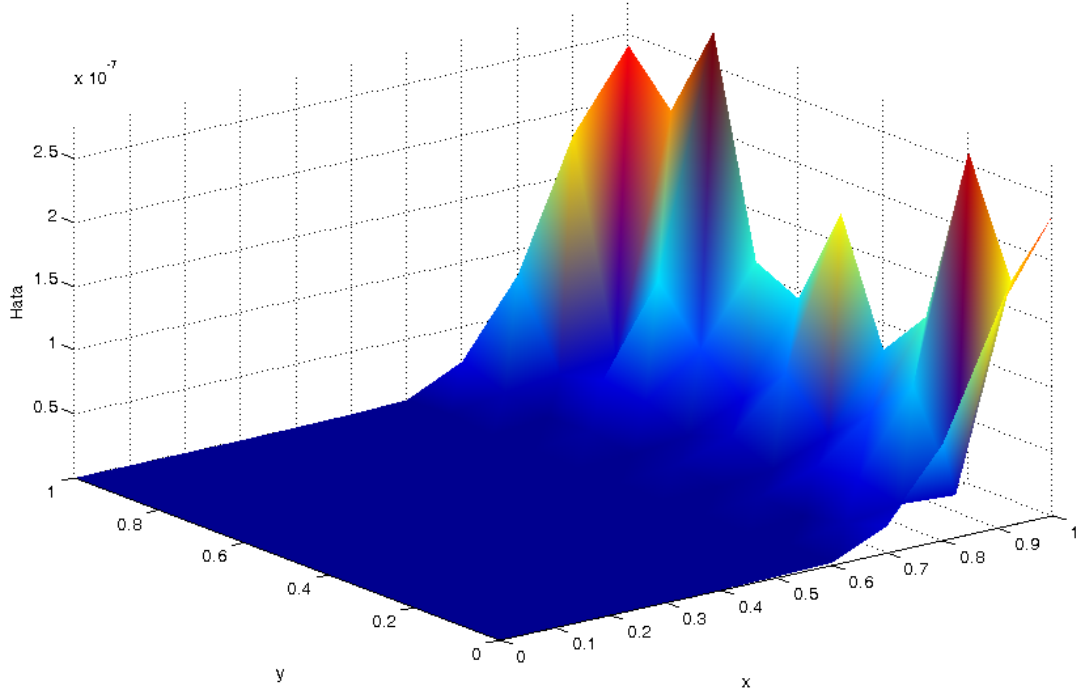


Şekil 5.15 $|e_7(x, y)|$ mutlak hata fonksiyonları ile $|e_{7,8}(x, y)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

$|e_{13}(x, y)|$ Mutlak hata fonksiyonu



$|e_{13,14}(x, y)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu



Şekil 5.16 $|e_{13}(x, y)|$ mutlak hata fonksiyonu ve $|e_{13,14}(x, y)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

Örnek 5.9

$$\frac{du}{dt} - \frac{x^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \text{ parabolic-like denklemini}$$

$u(x, 0) = x^2$ başlangıç şartı ile ele alınsın. Bu problemin tam çözümü $u(x, t) = e^t x^2$ dir (Jin, 2008). Çizelge 5.20 de tam çözüm, $N = 4, M = 5$ değerleri için elde edilen yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü karşılaştırılmış aynı karşılaştırma $N = 7, M = 8$ değerleri için de yapılmıştır. Çizelge 5.21 de aynı N, M değerleri için mutlak hata $|e_N|$, tahmini mutlak hata $|e_{N,M}|$ ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hataları $|E_{N,M}|$ karşılaştırılmıştır. Çizelge 5.22 de ise $N = 10, M = 11$ değerleri için elde edilen Bernoulli polinom çözümü, iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü, $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hataları verilmiştir. Şekil 5.17 de tam çözüm ile $N = 4, 7, 10$ değerleri için bulunan yaklaşık Bernoulli polinom çözümleri karşılaştırılmıştır. Şekil 5.18 de ise tam çözüm ile $N = 4, M = 5, N = 7, M = 8$ ve $N = 10, M = 11$ değerleri için bulunan iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümleri mukayese edilmiştir. Şekil 5.19 da $N = 4, 7, 10$ değerleri için bulunan mutlak hata fonksiyonları, Şekil 5.20 de $N = 4, M = 5, N = 7, M = 8$ ve $N = 10, M = 11$ değerleri için bulunan tahmin edilen mutlak hata fonksiyonları ve Şekil 5.21 de ise yine aynı değerler için bulunan iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır. Bu çözümler yapılırken Matlab da yazılan bilgisayar komutları kullanılmıştır.

Çizelge 5.20 $e^t x^2$ tam çözümü, $N=4, M=5$ ve $N=7, M=8$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm $u(x, t) = e^t x^2$	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü $u_N(x, t)$		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $u_{N,M}(x, t)$	
		$N = 4$	$N = 7$	$N=4, M=5$	$N=7, M=8$
$(0,0)$	0.0	1.56976e-5	-3.1273150e-11	1.68488e-5	-2.61060e-11
$(0,1/2)$	0.0	1.82751e-5	-3.7866543e-11	1.69626e-5	-2.59501e-11
$(0,1)$	0.0	1.89985e-5	-4.0963343e-11	1.69686e-5	-2.605571e-11
$(1/2, 0)$	0.25	0.2499954437	0.25	0.2499988333	0.25
$(1/2, 1/2)$	4.121803177e-1	4.118767854e-1	4.121802254e-1	4.11997337e-1	0.4121802863
$(1/2, 1)$	6.795704571e-1	6.766585823e-1	6.795662722e-1	6.779177808e-1	0.6795692461
$(1,0)$	1.0	0.9999827212	0.9999999999	0.9999838656	0.9999999999
$(1,1/2)$	1.648721271	1.644438759	1.648718814	1.646305843	1.648720545
$(1,1)$	2.718281828	2.690576688	2.718207552	2.702648958	2.718259571

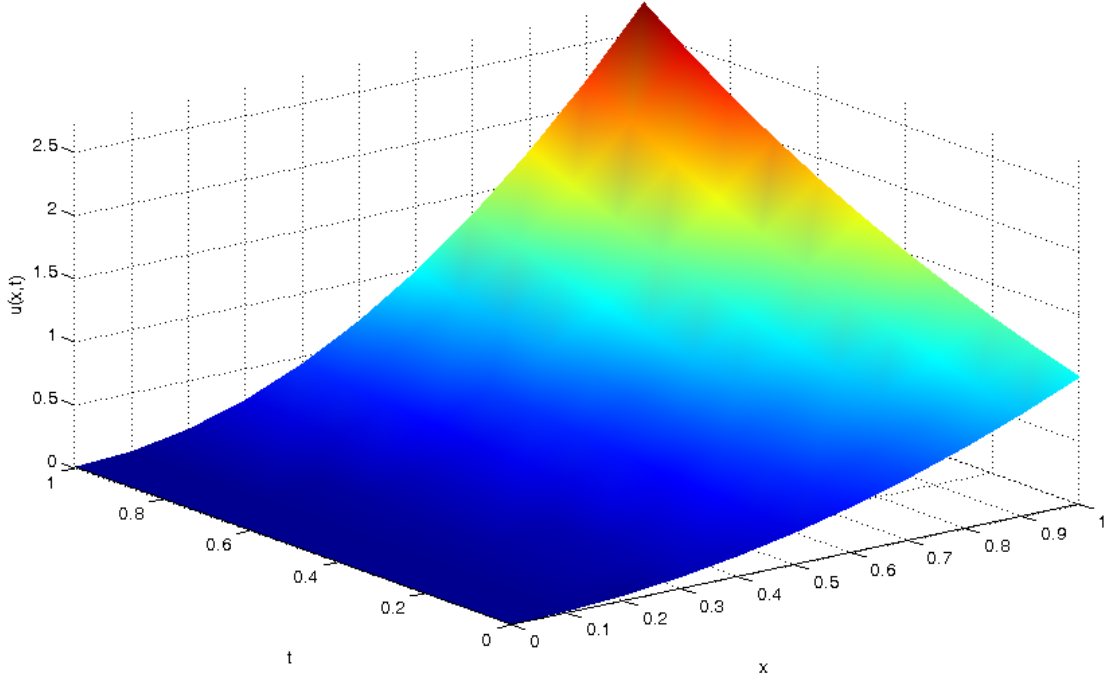
Çizelge 5.21 $N=4, M=5$ ve $N=7, M=8$ için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

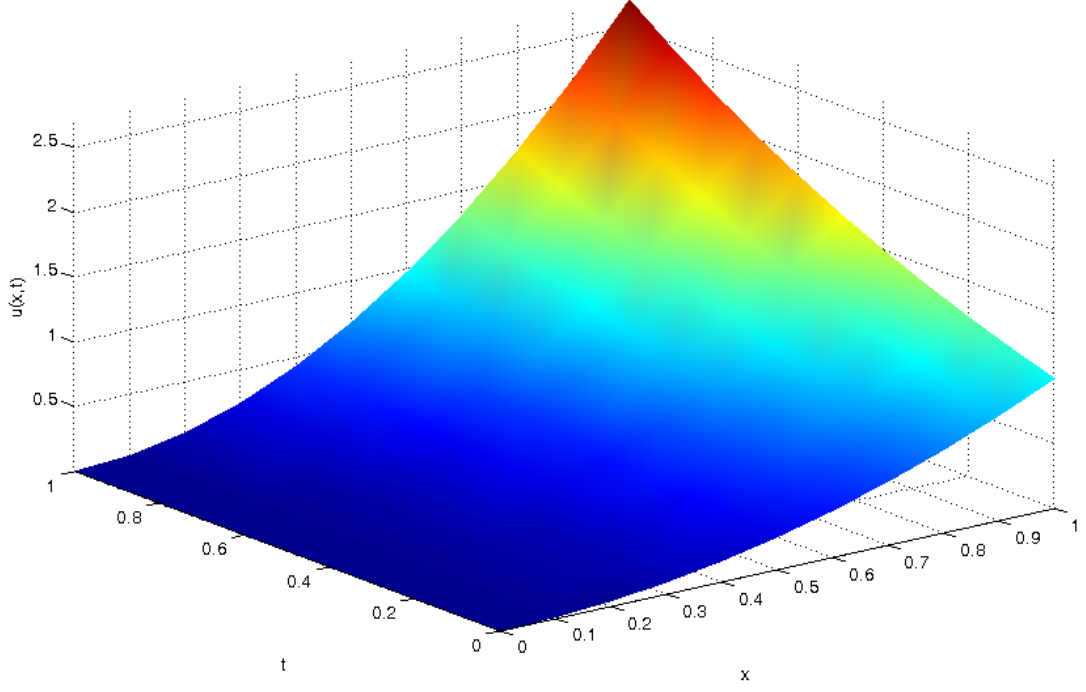
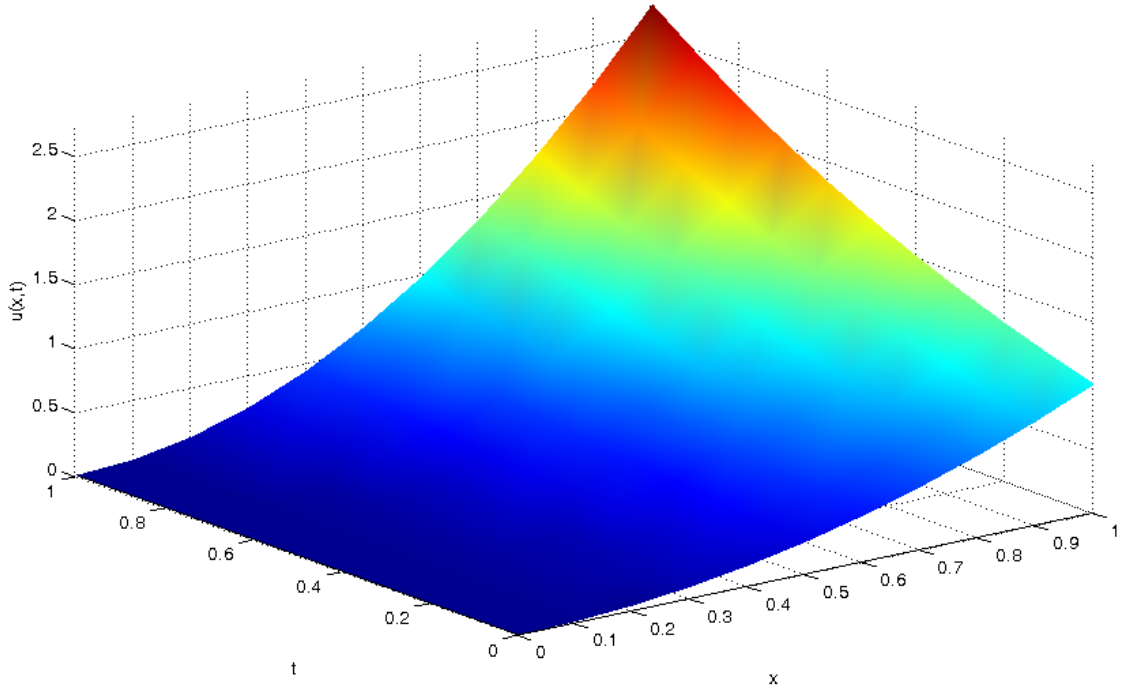
(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $		Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $	
	$N = 4$	$N = 7$	$N = 4, M = 5$	$N = 7, M = 8$	$N = 4, M = 5$	$N = 7, M = 8$
$(0,0)$	1.1512e-6	3.1273e-11	1.6849e-5	2.6106e-11	1.6849e-5	2.6106e-11
$(0,1/2)$	1.3125e-6	3.7867e-11	1.6963e-5	2.5950e-11	1.6963e-5	2.5950e-11
$(0,1)$	2.0299e-6	4.0963e-11	1.6969e-5	2.6056e-11	1.6969e-5	2.6056e-11
$(1/2,0)$	3.3896e-6	7.0703e-12	1.1667e-6	4.5934e-11	1.1667e-6	4.5934e-11
$(1/2,1/2)$	1.2055e-4	9.2279e-8	1.8298e-4	3.1423e-8	1.8298e-4	3.1423e-8
$(1/2,1)$	1.2592e-3	4.1849e-6	1.6527e-3	1.2110e-6	1.6527e-3	1.2110e-6
$(1,0)$	1.1444e-6	1.1940e-10	1.6134e-5	1.0421e-10	1.6134e-5	1.0421e-10
$(1,1/2)$	1.8671e-3	2.4567e-6	2.4154e-3	7.2529e-7	2.4154e-3	7.2529e-7
$(1,1)$	1.2072e-2	7.4276e-5	1.5633e-2	2.2258e-5	1.5633e-2	2.2258e-5

Çizelge 5.22 $N=10, M=11$ değeri için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü, iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü, $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

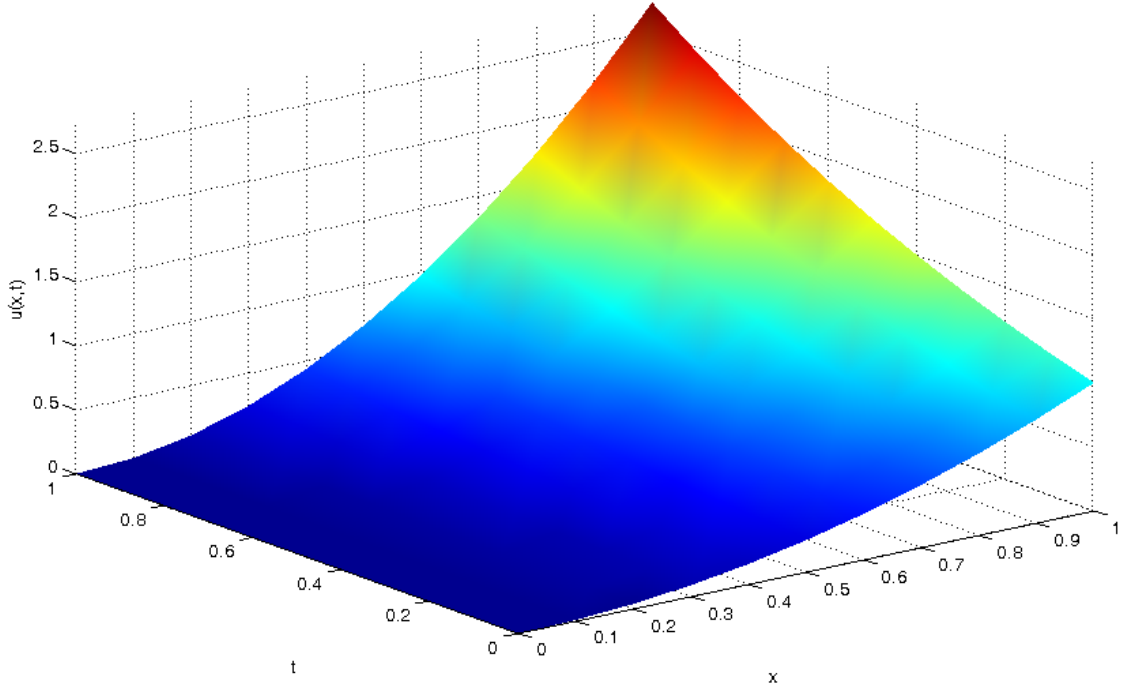
(x_i, t_i)	$u_N(x, t)$	$u_{N,M}(x, t)$	$ e_N $	$ e_{N,M} $	$ E_{N,M} $
$N=10,$ $M=11$					
$(0,0)$	-5.55111e-16	-6.3837e-16	5.5511e-16	2.0682e-18	6.1062e-16
$(0,1/2)$	-7.21644e-16	-6.3837e-16	7.2164e-16	1.5892e-16	5.8287e-16
$(0,1)$	-1.05471e-15	-7.4940e-16	1.0547e-15	4.0555e-16	4.9960e-16
$(1/2,0)$	0.25	0.25	1.6653e-16	1.6318e-18	1.9429e-16
$(1/2,1/2)$	0.4121803176	0.4121803177	4.9878e-11	4.3153e-11	6.7249e-12
$(1/2,1)$	0.6795704462	0.6795704558	1.0939e-8	9.6145e-9	1.3243e-9
$(1,0)$	1.0	1.0	1.6931e-15	8.5976e-8	1.6653e-15
$(1,1/2)$	1.648721269	1.64872127	2.1649e-9	1.8906e-9	2.7432e-10
$(1,1)$	2.718281516	2.71828179	3.1232e-7	2.7427e-7	3.8049e-8

Tam Çözüm $u(x, t) = e^t x^2$

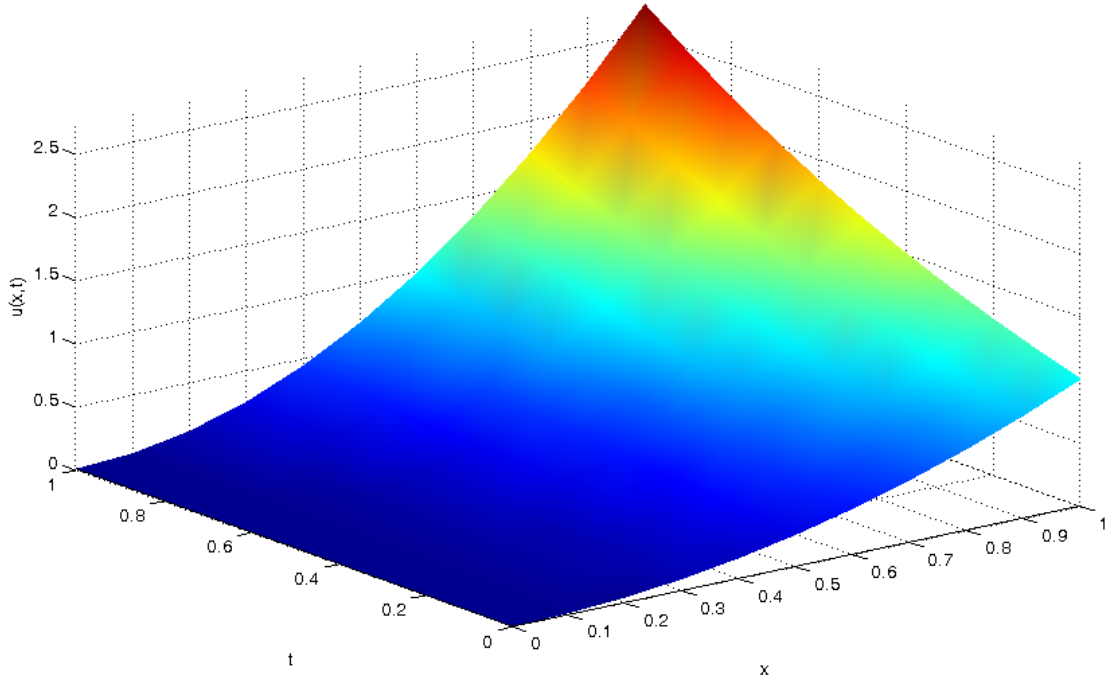


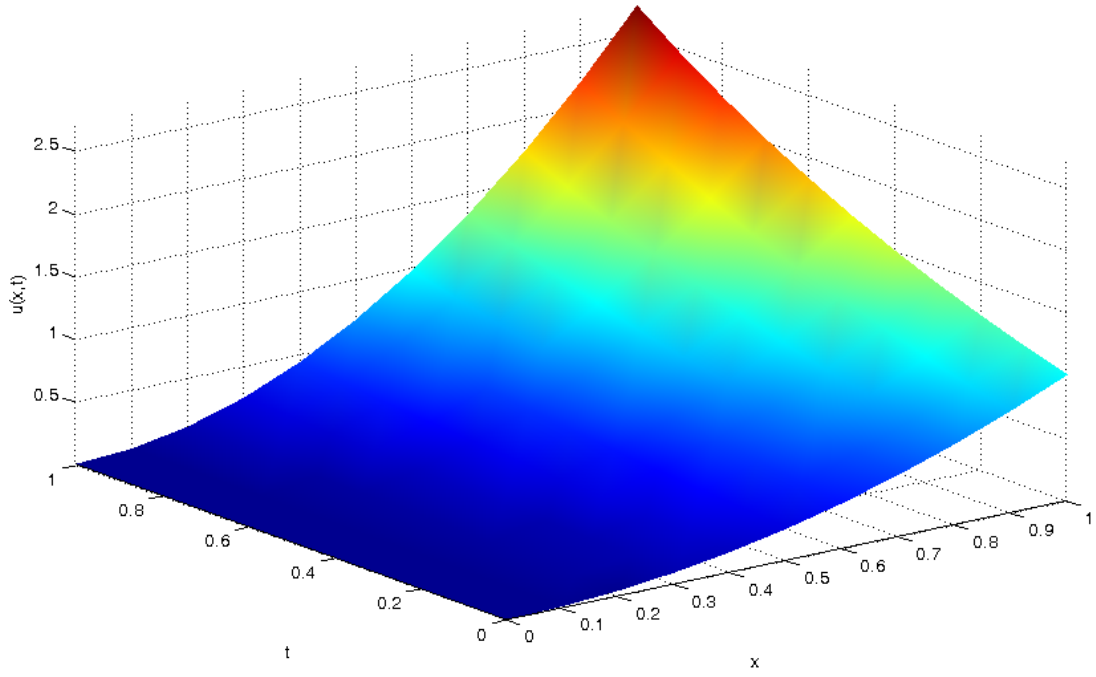
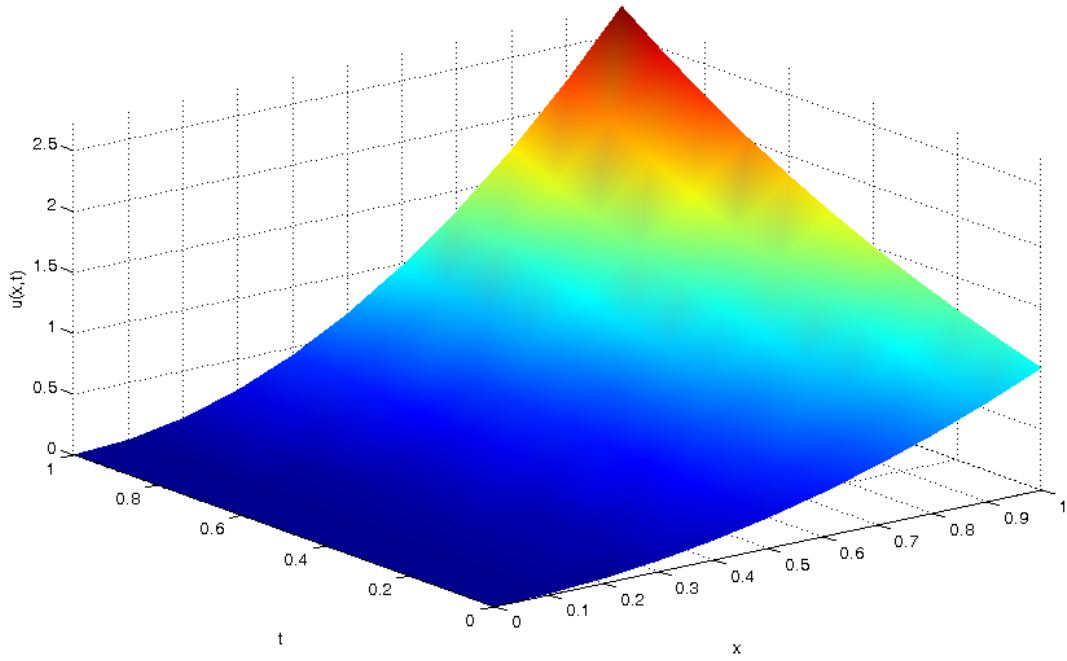
$u_4(x, t)$ Yaklaşık Bernoulli polinom çözümü

 $u_7(x, t)$ Yaklaşık Bernoulli polinom çözümü


$u_{10}(x, t)$ Yaklaşık Bernoulli polinom çözümü

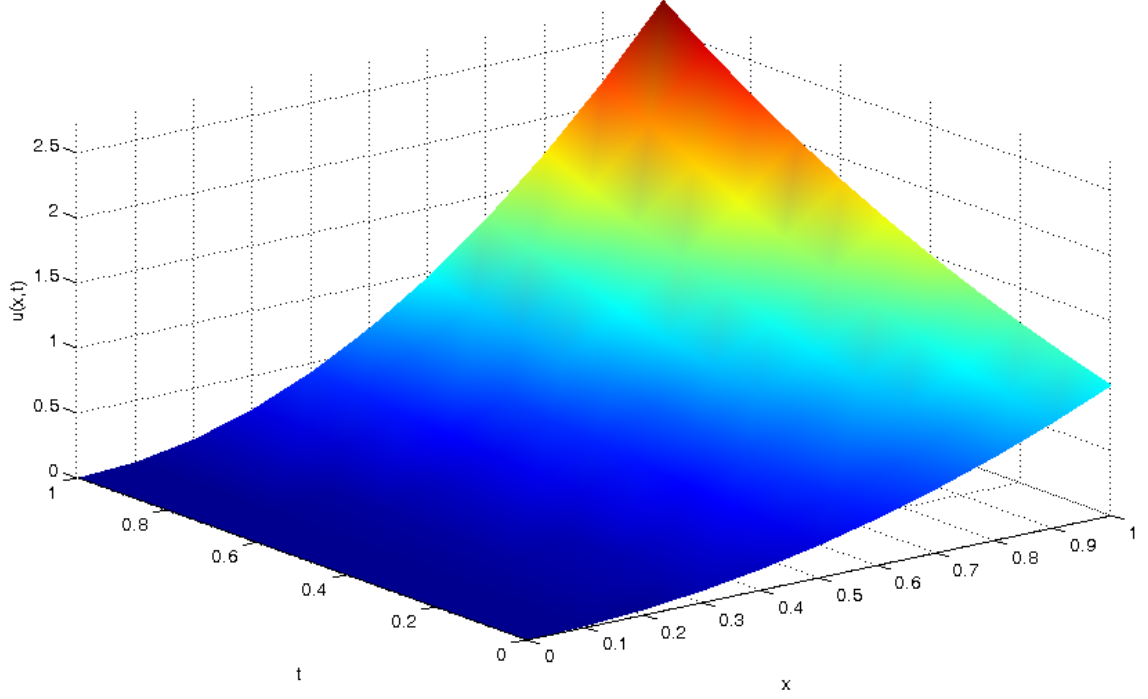


Şekil 5.17 $u(x, t) = e^t x^2$ tam çözümü ile $N = 4, 7, 10$ değerleri için bulunan yaklaşık Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması
Tam Çözüm $u(x, t) = e^t x^2$



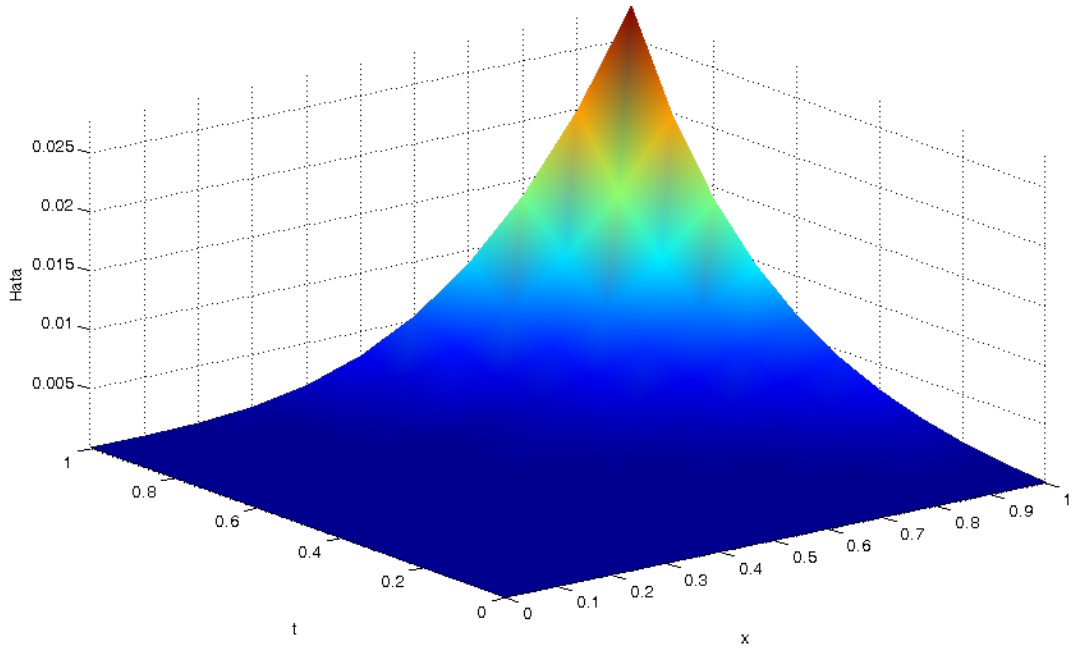
$u_{4,5}(x,t)$ İyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü

 $u_{7,8}(x,t)$ İyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü


$u_{10,11}(x,t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü

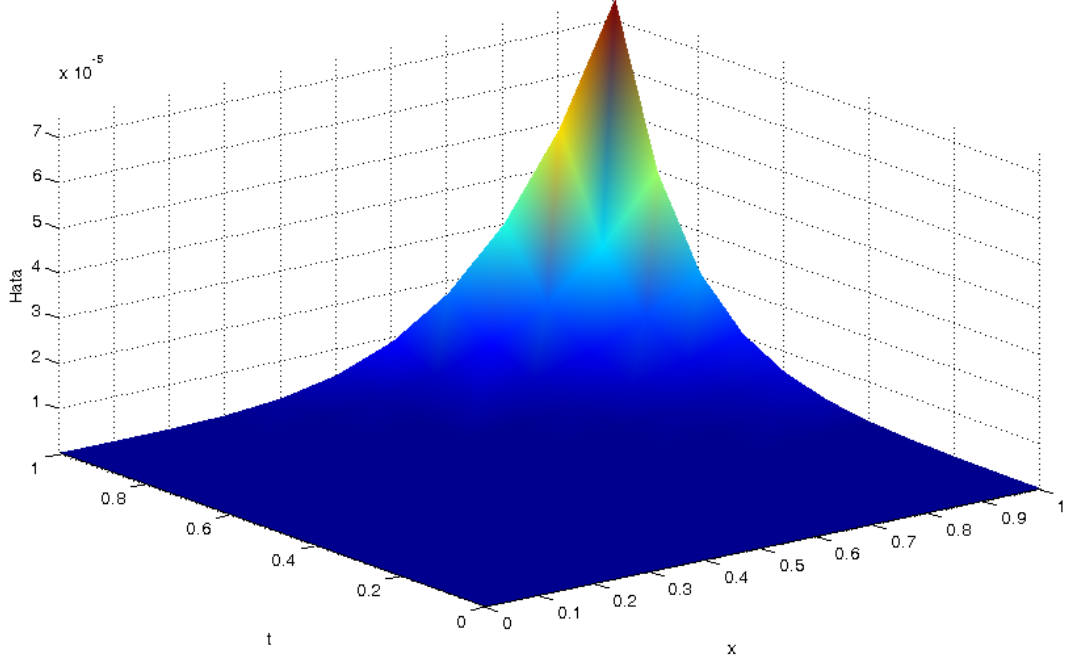


Şekil 5.18 $u(x,t) = e^t x^2$ tam çözümü ile $u_{4,5}(x,t)$, $u_{7,8}(x,t)$, $u_{10,11}(x,t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

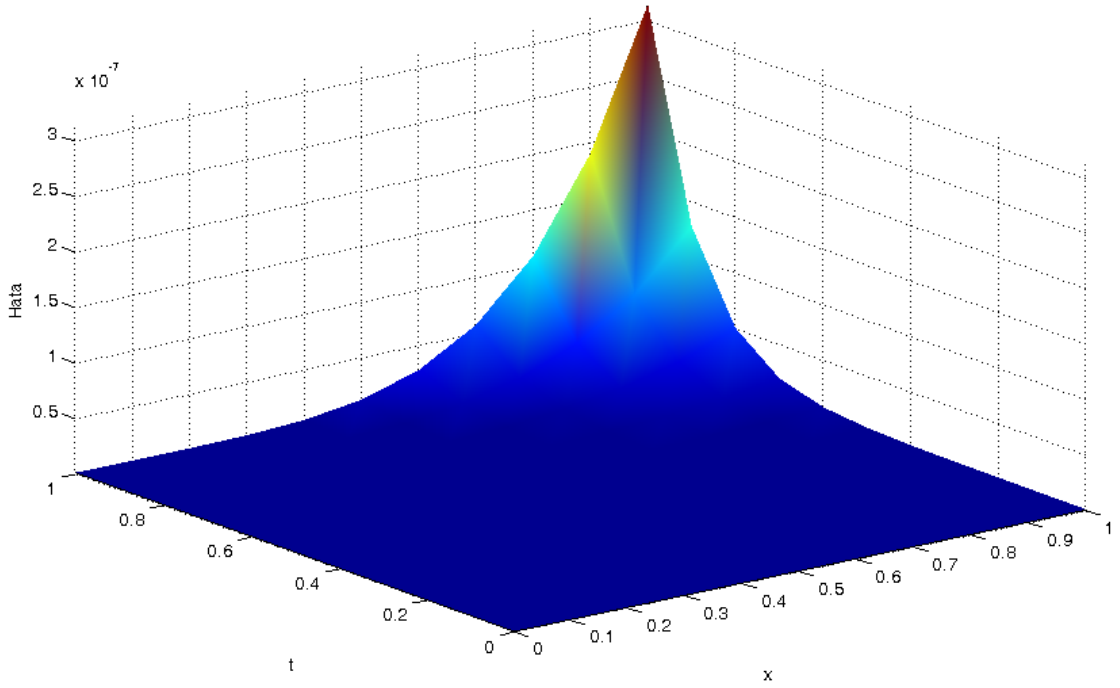
$|e_4(x,t)|$ Mutlak hata fonksiyonu



$|e_7(x, t)|$ Mutlak hata fonksiyonu

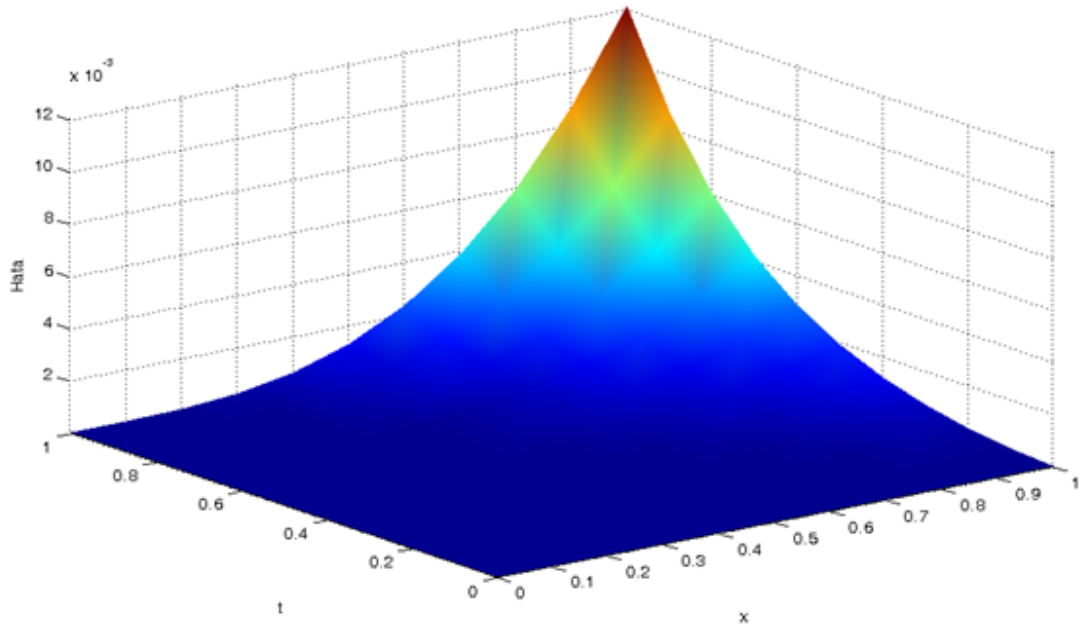


$|e_{10}(x, t)|$ Mutlak hata fonksiyonu

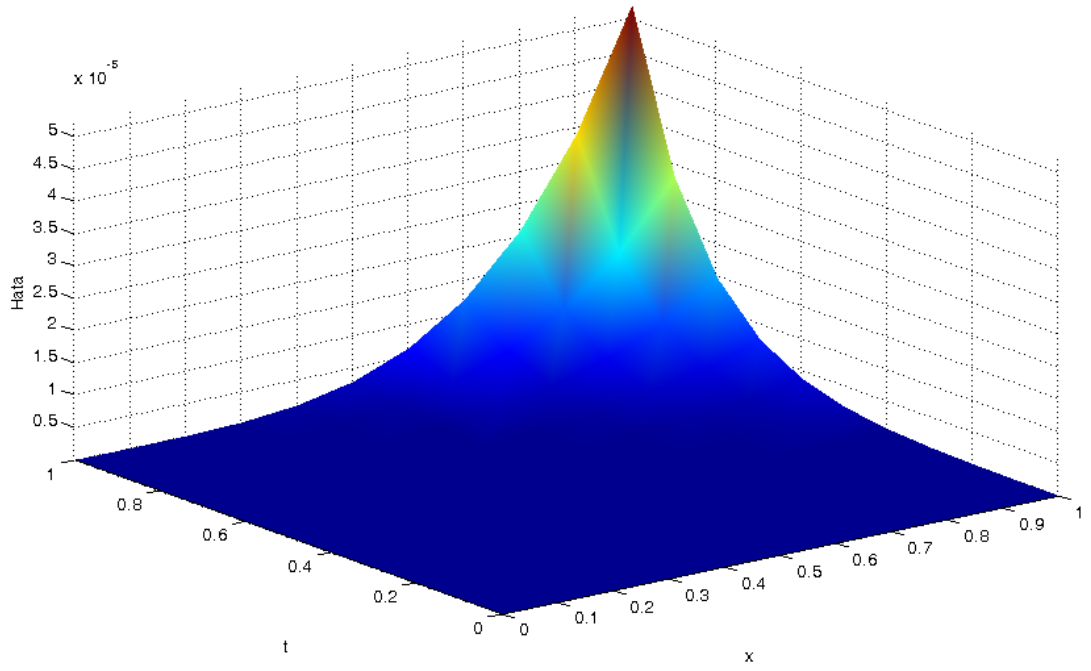


Şekil 5.19 $|e_4(x, t)|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_7(x, t)|$ mutlak hata fonksiyonu ve $|e_{10}(x, t)|$ mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

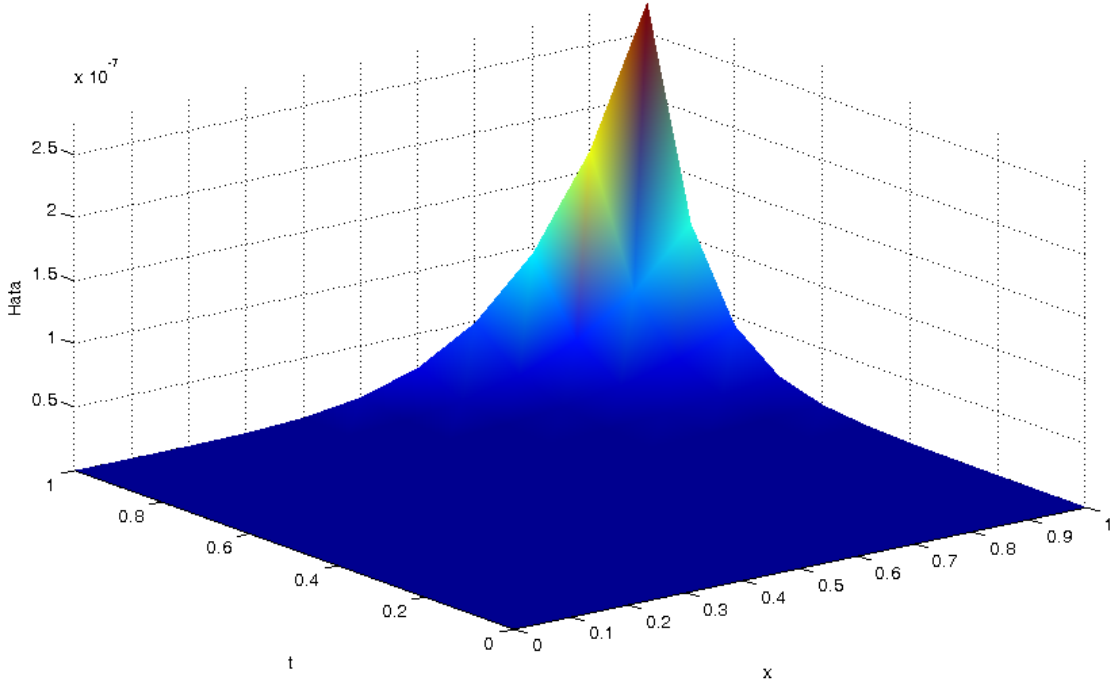
$|e_{4,5}(x,t)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu



$|e_{7,8}(x,t)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu

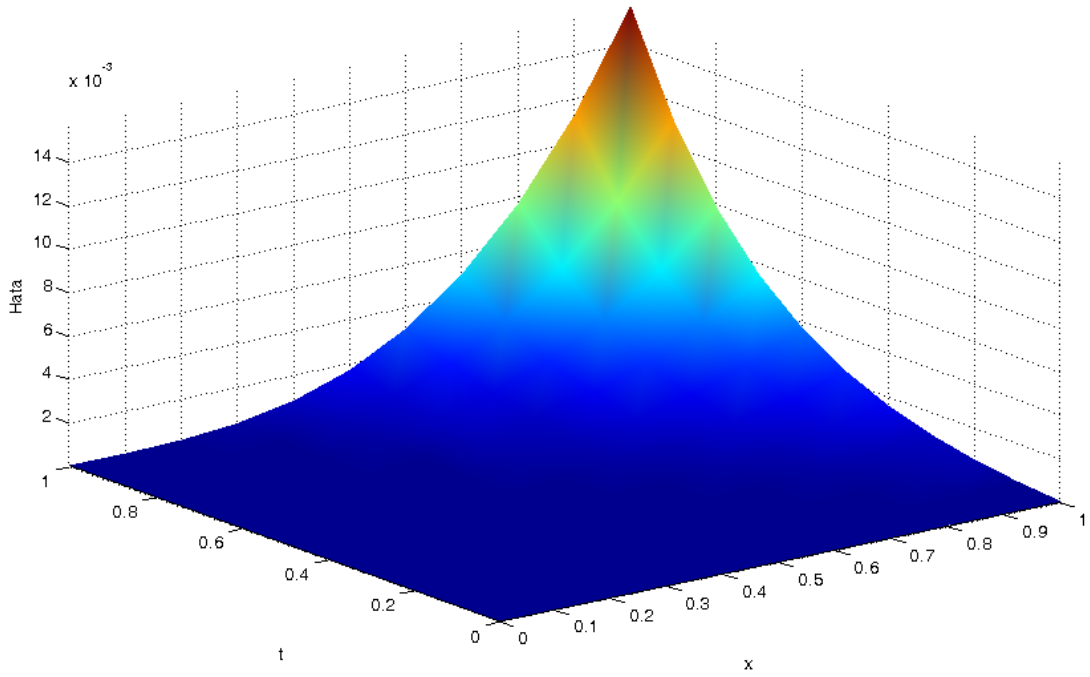


$|e_{10,11}(x,t)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu

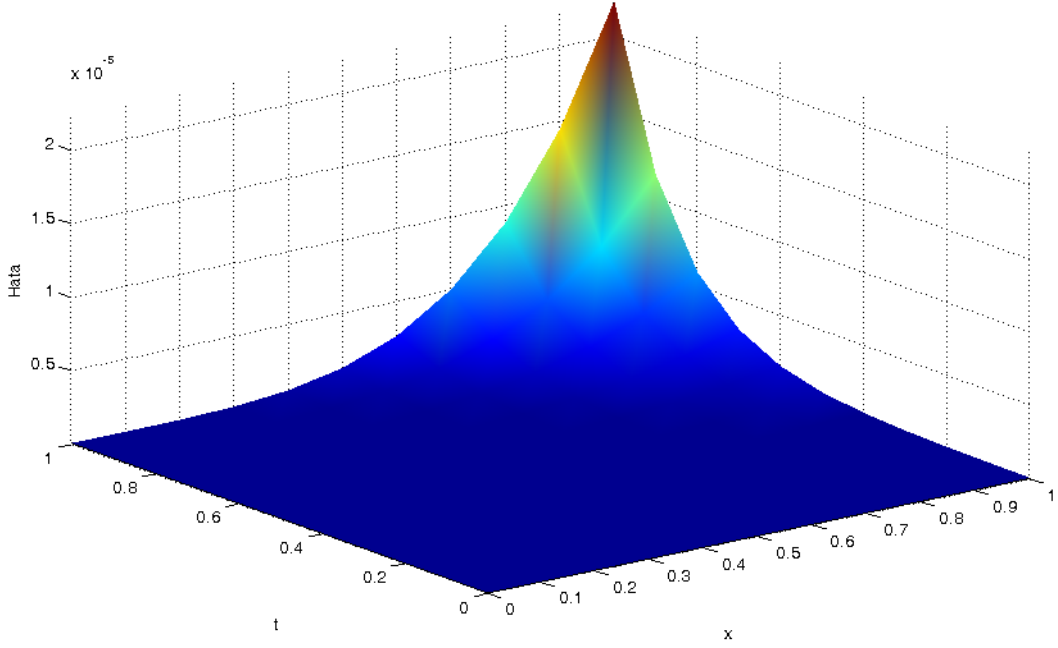


Şekil 5.20 $|e_{4,5}(x,t)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu, $|e_{7,8}(x,t)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $|e_{10,11}(x,t)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

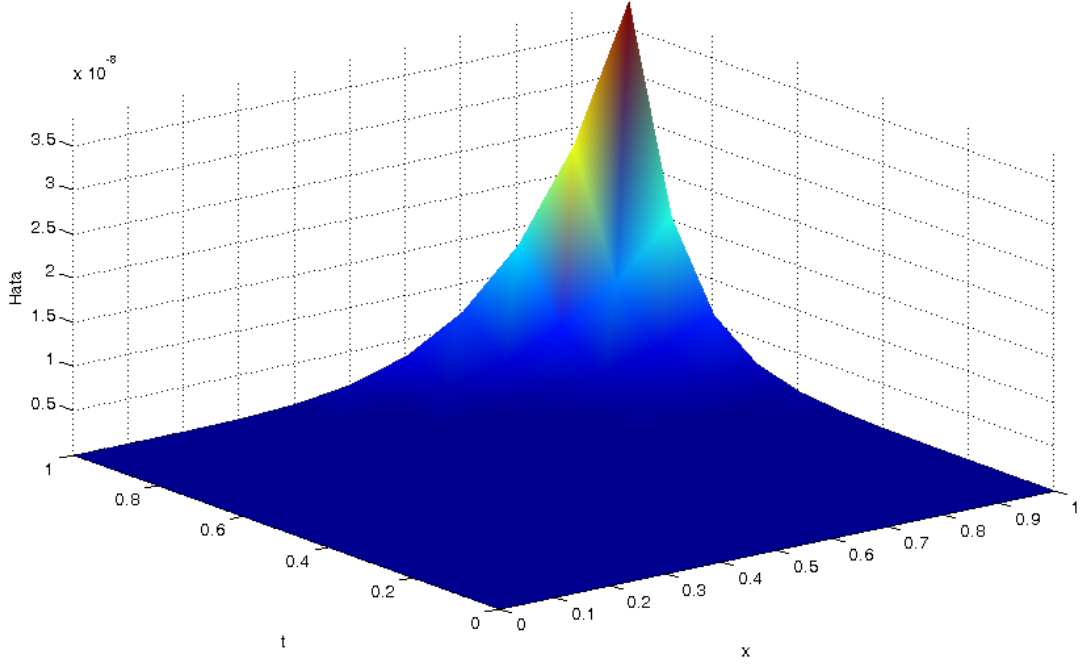
$|E_{4,5}(x,t)|$ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu



$|E_{7,8}(x,t)|$ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu



$|E_{10,11}(x,t)|$ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu



Şekil 5.21 $|E_{4,5}(x,t)|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonu, $|E_{7,8}(x,t)|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{10,11}(x,t)|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

Örnek 5.10:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{x^2}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \text{ hiperbolic-like denklemi}$$

$u(x, 0) = x$ ve $u_t(x, 0) = x^2$ başlangıç şartı ile verilmiş olsun. Bu problemin tam çözümü $u(x, t) = x + x^2 \sinh t$ dir (Lin Jin, 2008).

Bernoulli Matris metodu kullanılarak N nin ve M nin çeşitli değerleri için Matlab da yazılan program kodu yardımıyla problem çözülmüştür. Çizelge 5.23 de $N = 7$ değeri sabit tutularak farklı M değerleri için tahmini mutlak hata ve iyileştirilmiş Bernolli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır. Çizelge 5.24 de tam çözüm ile $N = 7, M = 8$ ve $N = 13, M = 14$ değerleri için bulunan yaklaşık Bernoulli polinom çözümleri ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümleri karşılaştırılmıştır. Çizelge 5.25 de ise aynı değerler için mutlak hata, tahmini mutlak hata ve iyileştirilmiş Bernolli polinom çözümünün mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır. Şekil 5.22 de tam çözüm ile $u_7(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü, $u_{13}(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{13,14}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü karşılaştırılmıştır. Şekil 5. 23 de $N = 7, M = 8$ değerleri için elde edilen mutlak hata fonksiyonu, tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatası karşılaştırılırken Şekil 5.24 de ise $N = 13, M = 14$ değeri için elde edilen tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatası ve karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.23 $N = 7$ ve $M = 8, 10, 14$ değerleri için $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tahmini Mutlak Hata $\left e_{N,M}\right $			İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\left E_{N,M}\right $		
$N = 7$	$M = 8$	$M = 10$	$M = 14$	$M = 8$	$M = 10$	$M = 14$
$(0,0)$	1.2316e-10	3.6431e-13	2.0117e-17	1.3257e-10	9.0460e-12	9.4105e-12
$(0,1/2)$	1.6523e-10	9.0252e-12	9.4984e-12	2.1588e-10	3.7208e-10	3.7161e-10
$(0,1)$	2.2389e-10	3.4149e-11	3.4733e-11	5.6347e-10	7.5321e-10	7.5262e-10
$(1/2,0)$	6.7153e-10	1.2860e-11	3.0953e-16	1.7881e-8	1.7222e-8	1.7209e-8
$(1/2,1/2)$	3.0790e-9	2.5960e-9	2.5855e-9	1.0057e-8	9.5735e-9	9.5630e-9
$(1/2,1)$	5.2073e-9	3.9437e-9	3.9636e-9	2.3018e-8	2.1754e-8	2.1774e-8
$(1,0)$	1.5879e-10	1.1708e-12	5.9724e-17	5.2239e-9	5.0640e-9	5.0652e-9
$(1,1/2)$	9.3259e-9	5.1954e-8	4.0641e-8	5.1784e-6	5.1172e-6	5.2098e-6
$(1,1)$	2.9676e-6	2.6019e-6	2.6680e-6	9.2469e-5	9.2834e-5	9.8104e-5

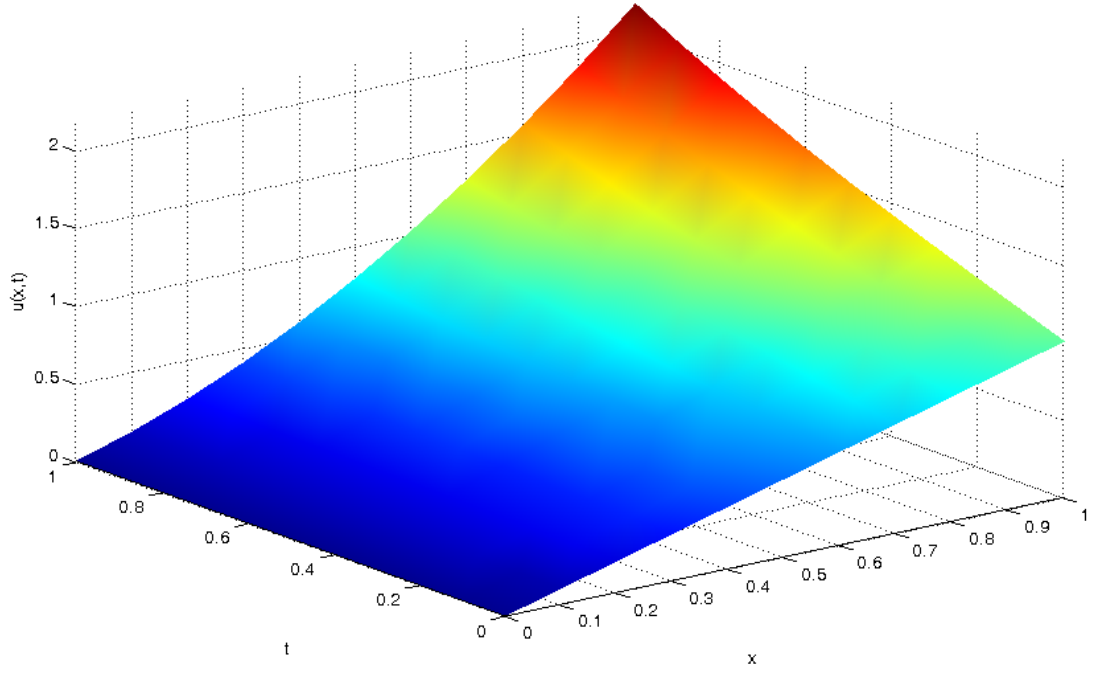
Çizelge 5.24 $x + x^2 \sinh t$ tam çözümü, $N = 7, M = 8$ ve $N=13, M=14$ için yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Tam Çözüm $x + x^2 \sinh t$	Yaklaşık Bernoulli Polinom Çözümü $u_N(x, t)$		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümü $u_{N,M}(x, t)$	
		$N = 7$	$N = 13$	$N = 7, M = 8$	$N=13, M=14$
$(0,0)$	0.0	-9.4102e-12	4.4408e-16	-1.3e-10	2.7755 e-16
$(0,1/2)$	0.0	3e-10	5.8286 e-16	2.1e-10	5.5511 e-16
$(0,1)$	0.0	7e-10	6.6613 e-16	5.6e-10	8.0491 e-16
$(1/2,0)$	0.5	0.5000000172	0.5	0.5000000179	0.5
$(1/2,1/2)$	6.302738264e-1	6.302738194e-1	6.302738264e-1	6.302738163e-1	6.302738264e-1
$(1/2,1)$	7.938002984e-1	7.938002806e-1	7.938002984e-1	7.938002754e-1	7.938002984e-1
$(1,0)$	1.0	0.9999999949	1.0	0.9999999948	1.0
$(1,1/2)$	1.521095305	1.521090136	1.521095306	1.521090127	1.521095306
$(1,1)$	2.175201194	2.175105757	2.175201196	2.175108725	2.175201197

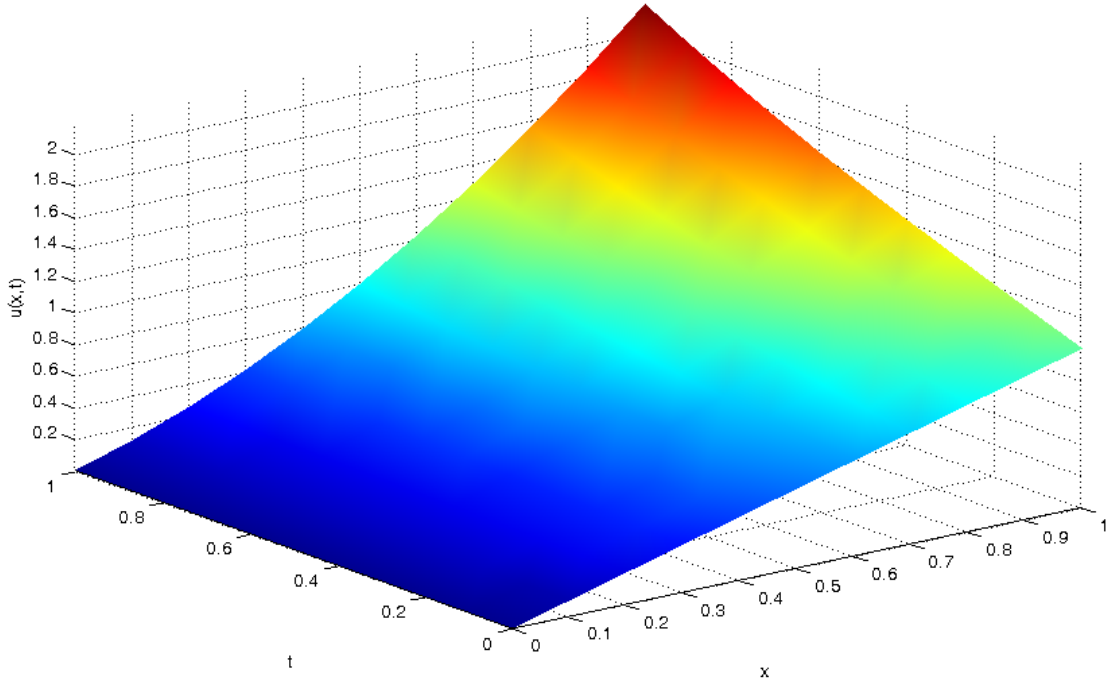
Çizelge 5.25 $N = 7$, $M = 8$ ve $N = 13$, $M = 14$ için $|e_N|$ mutlak hata, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümünün mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x_i, t_i)	Mutlak Hata $ e_N $		Tahmini Mutlak Hata $ e_{N,M} $		İyileştirilmiş Bernoulli Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $ E_{N,M} $	
	$N = 7$	$N = 13$	$N = 7, M = 8$	$N = 13, M = 14$	$N = 7, M = 8$	$N = 13, M = 14$
$(0,0)$	9.4103e-12	4.4409e-16	1.3257e-10	3.6082e-16	1.3257e-10	3.6082e-16
$(0,1/2)$	3.8111e-10	5.8287e-16	2.1588e-10	5.2736e-16	2.1588e-10	5.2736e-16
$(0,1)$	7.8736e-10	6.6613e-16	5.6347e-10	7.2164e-16	5.6347e-10	7.2164e-16
$(1/2,0)$	1.7209e-8	8.0491e-16	1.7881e-8	8.8818e-16	1.7881e-8	8.8818e-16
$(1/2,1/2)$	6.9775e-9	1.0270e-15	1.0057e-8	1.1380e-15	1.0057e-8	1.1380e-15
$(1/2,1)$	1.7811e-8	1.1102e-16	2.3018e-8	2.2204e-16	2.3018e-8	2.2204e-16
$(1,0)$	5.0652e-9	1.0547e-15	5.2239e-9	1.2212e-15	5.2239e-9	1.2212e-15
$(1,1/2)$	5.1691e-6	2.0661e-11	5.1784e-6	2.2290e-11	5.1784e-6	2.2290e-11
$(1,1)$	9.5436e-5	2.6662e-9	9.2469e-5	3.0550e-9	9.2469e-5	3.0550e-9

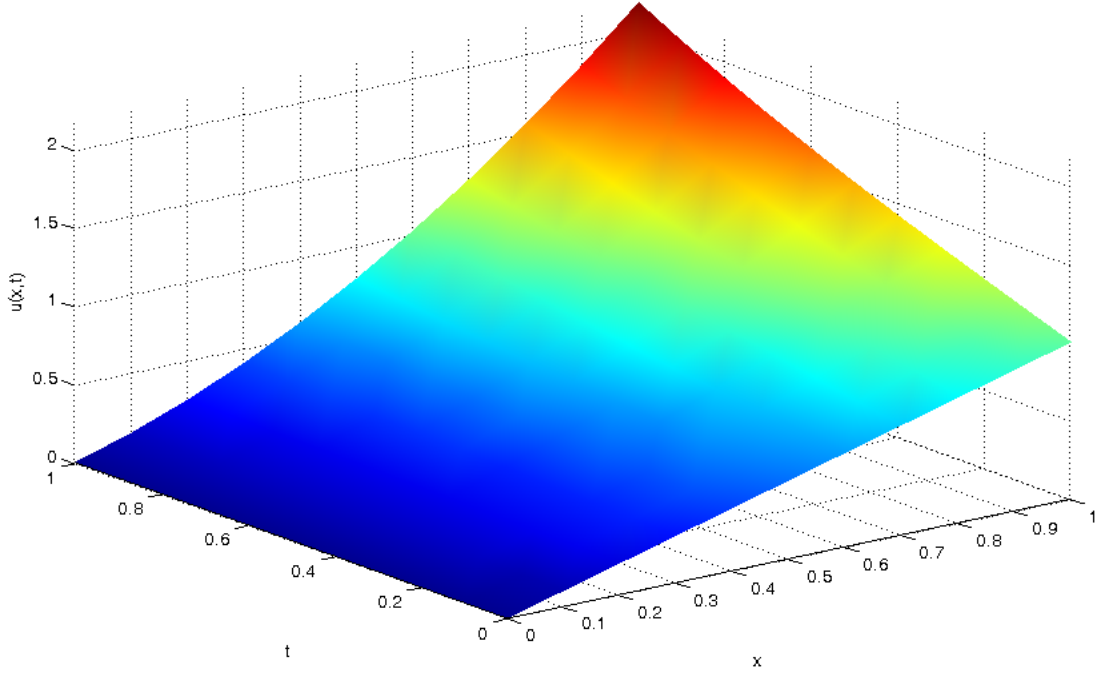
Tam Çözüm $x + x^2 \sinh t$



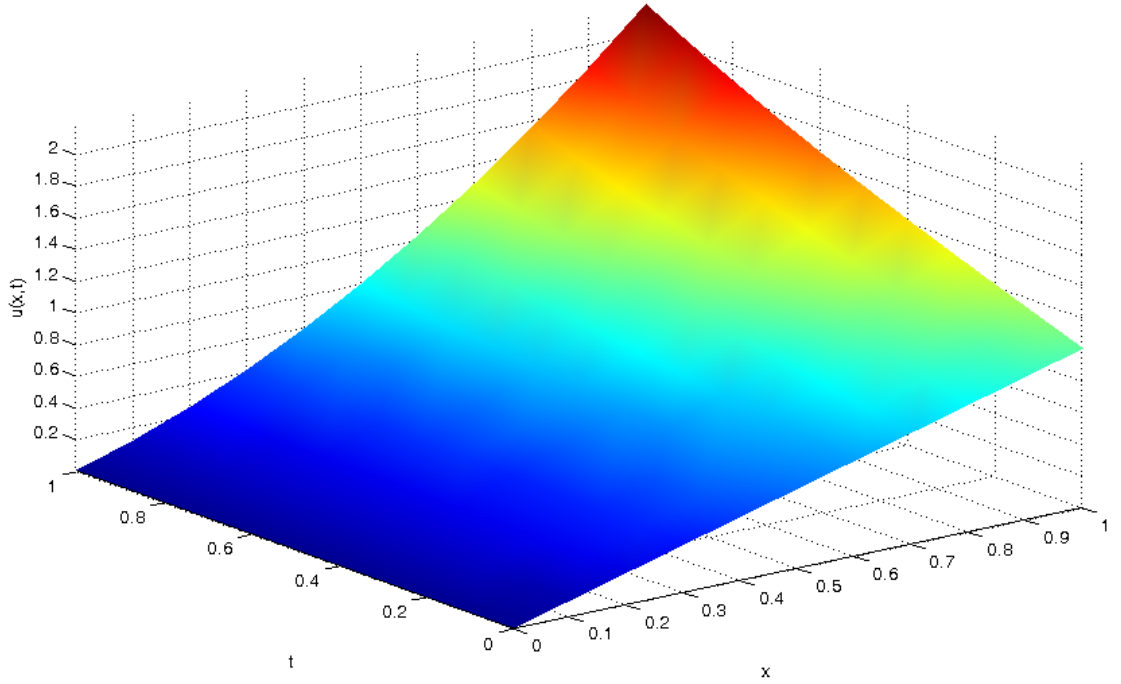
$u_7(x,t)$ Yaklaşık Bernoulli polinom çözümü



$u_{13}(x, y)$ Yaklaşık Bernoulli polinom çözümü

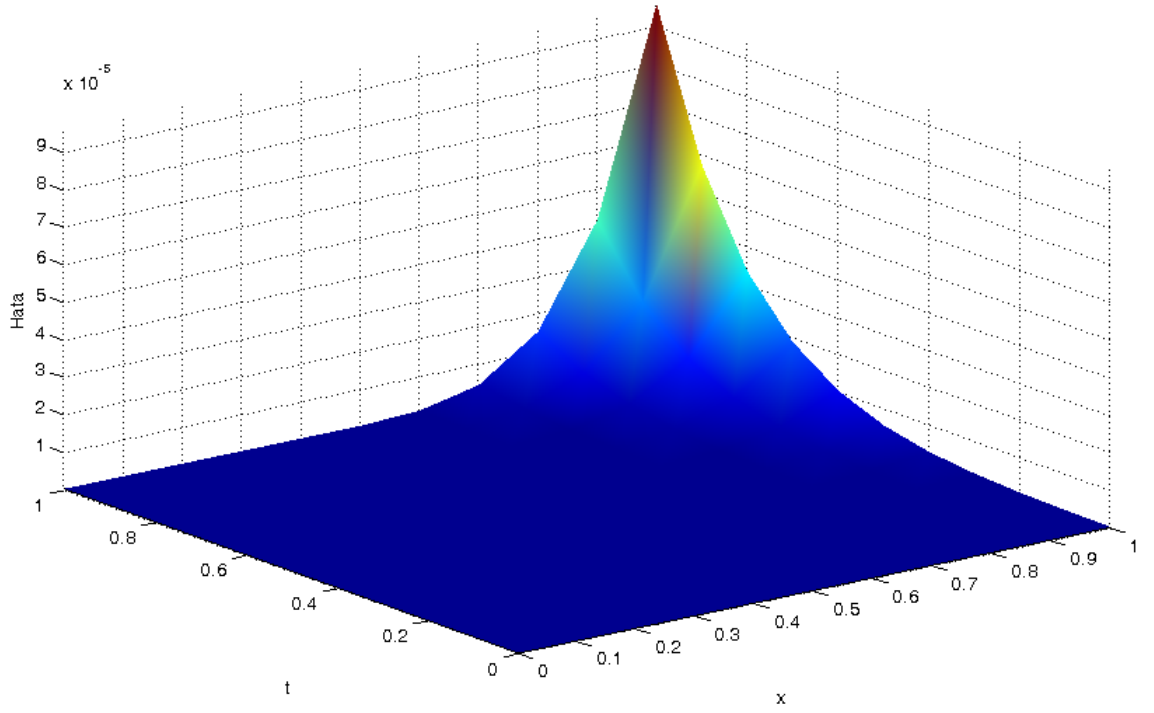


$u_{13,14}(x, y)$ İyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümü

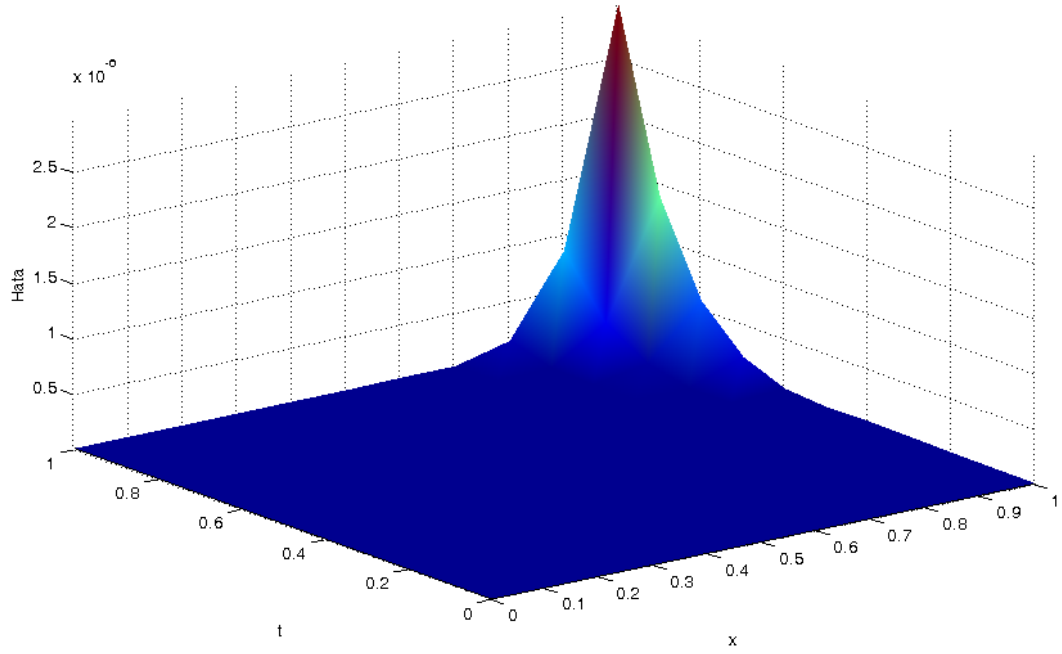


Şekil 5.22 $x + x^2 \sinh t$ tam çözümü, $u_7(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü, $u_{13}(x, t)$ yaklaşık Bernoulli polinom çözümü ve $u_{13,14}(x, t)$ iyileştirilmiş Bernoulli polinom çözümlerinin karşılaştırılması

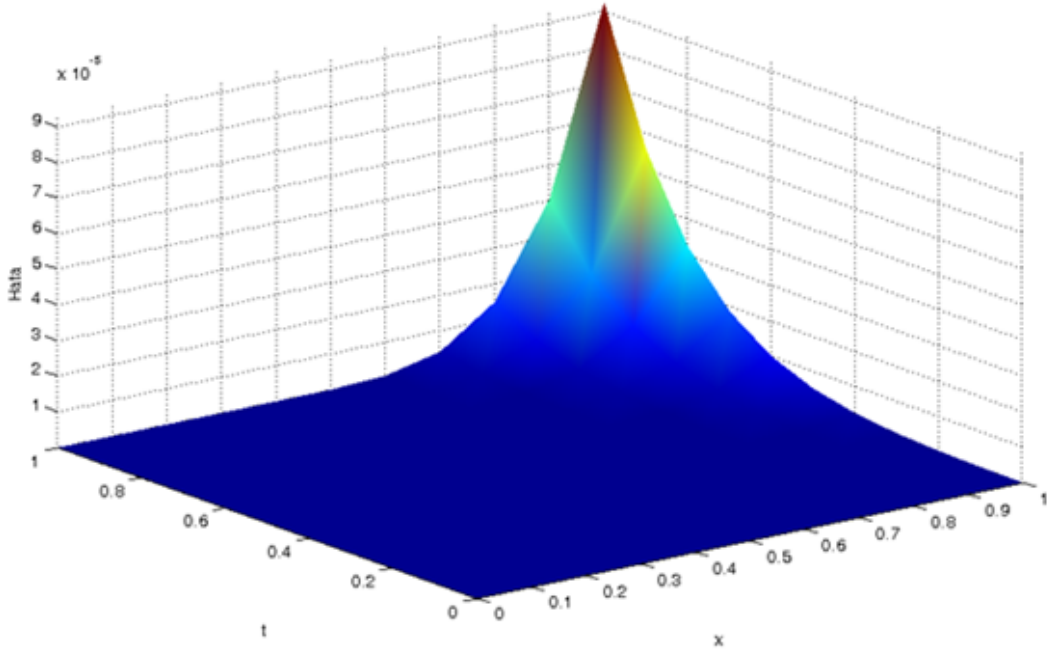
$|e_7(x, t)|$ Mutlak hata fonksiyonu



$|e_{7,8}(x, t)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu

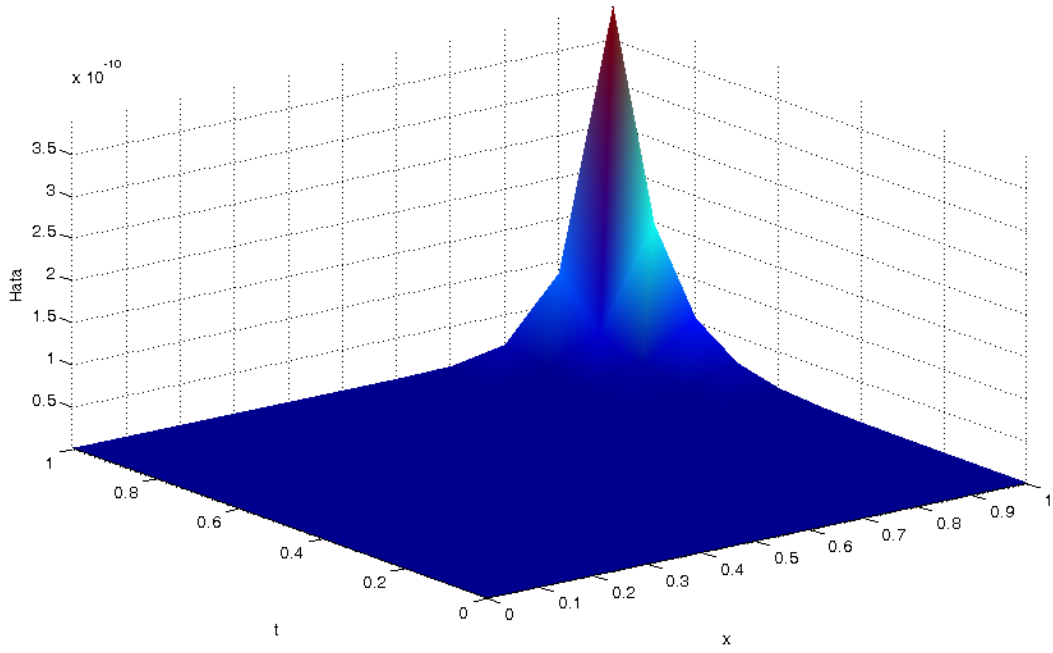


$|E_{7,8}(x,t)|$ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu

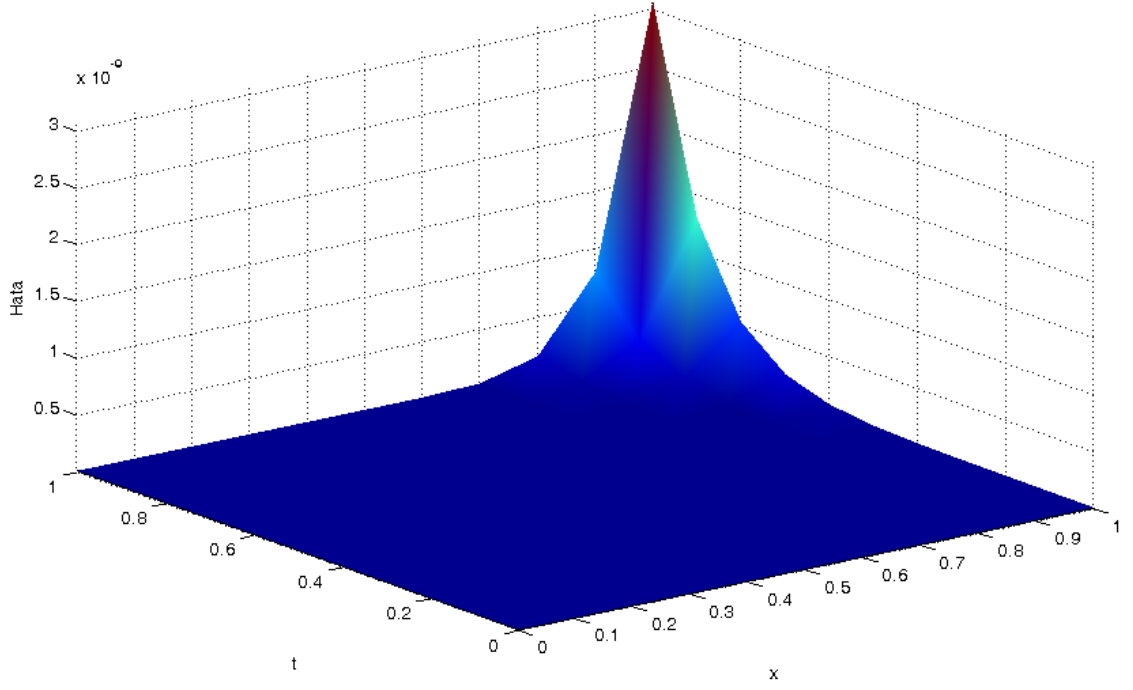


Şekil 5.23 $N = 7$ ve $M = 8$ için $|e_N(x,t)|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}(x,t)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}(x,t)|$ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

$|e_{13,14}(x,t)|$ Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu



$|E_{13,14}(x,t)|$ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu



Şekil 5.24 $N = 13$ ve $M = 14$ için $|e_{N,M}(x,t)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}(x,t)|$ iyileştirilmiş çözümün mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

BÖLÜM VI

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada önce kısmi diferansiyel denklemler ve Bernoulli polinomları hakkında temel bilgiler verilmiş daha sonra ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Bernoulli polinomlarına dayalı bir sıralama (collocation) metodu geliştirilmiştir. Metot, Dirichlet sınır koşulu, Neumann sınır koşulu ve lineer olmayan integral koşulu ile dalga denklemine, telgraf denklemine, parabolik tip diferansiyel denkleme, Helmholtz denklemine, hiperbolic-like ve parabolic-like diferansiyel denklemlerine uygulanmış ve her bir problem için rezidü fonksiyonuna dayalı bir hata fonksiyonu tahmini ortaya konmuştur. Daha sonra bulunan her yaklaşık çözüm bu hata fonksiyonu yardımıyla iyileştirilmiş ve tam çözüme daha da yakın çözümler çizelge ve şekillerle gösterilmiştir. Tahmini hata fonksiyonu, herhangi bir problemin tam çözümünün bilinmediği durumlarda da bulunabilir.

Bernoulli sıralama metodunda N kesme sınırını belirlemek çok önemlidir. Yapılan örneklerde N' in büyük alınması durumunda tam çözüme daha yakın çözümlerin bulunduğu saptanmıştır. Ayrıca N sabit tutulup çeşitli M değerleri için bulunan çözümlerde M nin büyük olması halinde daha iyi çözümün elde edildiği gözlemlenmiştir. Fakat N' in ve M' nin büyük alınması halinde yöntemde kullanılan matrislerin boyutu da büyüdüğünden bilgisayarda yapılan bu işlemler daha uzun sürede gerçekleşmiştir. Kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmada, Bernoulli sıralama metodunun diğer yöntemlere kıyasla birden çok paralel bilgisayarlar kullanılarak çözümün gerçekleştirilebilir olmasından dolayı daha avantajlıdır. Bu çalışmadaki örnekler Matlab programı kullanılarak kısa sürede çözülmüştür.

Bu yöntem, ikinci mertebeden lineer kısmi denklemler için geliştirilmiş olup bu metot daha yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere, iki boyutlu ve daha yüksek boyutlu kısmi diferansiyel denklemlere, kısmi integro-diferansiyel denklemlere ve kısmi diferansiyel denklem sistemlerine uygulanabilir.

REFERANSLAR

- Abbasbandy, S. Numerical solution of non-linear Klein–Gordon equations by variational iteration method, *Int. J. Numer. Meth. Enging* 70:876–881, 2007.
- Abdou, M.A., Adomian decomposition method for solving the telegraph equation in charged particle transport, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 95(3): 407-414, 2005.
- Abushama, A.A. and Bialecki, B., Modified nodal cubic spline collocation for Poisson's equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, 46: 397-418, 2008.
- Ahmadi, M.R. and Abidi, H., The Chebyshev Tau technique for the solution of Laplace's equation, *Applied Mathematics and Computation*, 184: 895–900, 2007.
- Akyüz-Daşcıoğlu, A., Chebyshev polynomial approximation for high-order partial differential equations with complicated conditions, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 25(3): 610-621, 2009.
- Alonso, N. and Bowers, K.L., An alternating-direction Sinc-Galerkin method for elliptic problems, *Journal of Complexity*, 25: 237-252, 2009.
- Aloy, R., Casaban, M.C., Caudillo-Mata, L.A. and Jodar, L., Computing the variable coefficient telegraph equation using a discrete eigenfunctions method, *Computers and Mathematics with Applications*, 54(3): 448-458, 2007.
- Anar, İ. E., 2005. *Kısmi Diferansiyel Denklemler*, Palme Yayıncılık, Ankara, 2005.
- Apostol, T.M., 1976. *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.
- Azari, H., and Zhang, S., A numerical approximation to the solution of an inverse heat conduction problem, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 26(1): 95-106, 2010.
- Aziz, I., Islam, S. and Sarler, B., Wavelets collocation methods for the numerical solution of elliptic BV problems, *Applied Mathematical Modelling*, 37:676–694, 2013.
- Batiha, B., Noorani, M.S.M. and Hashim, I., Application of variational iteration method to heat and wave-like equations, *Physics Letters A*, 369: 55–61, 2007.
- Biazar, J. and Ebrahimi, H., An approximation to the solution of Klein-Gordon equation with initial or boundary value condition, *International Mathematical Forum*, 29: 1433-1439, 2006.

Biazar, J. and Ebrahimi, H., An approximation to the solution of telegraph equation by Adomian decomposition method, *International Mathematical Forum*, 2(45): 2231-2236, 2007.

Biazar, J. and Eslami, M., Analytic solution for telegraph equation by differential transform method, *Physics Letters A*, 374(29): 2904-2906, 2010.

Bildik, N. and Konuralp, A., Two-dimensional differential transform method, Adomian's decomposition method, and variational iteration method for partial differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 83(12): 973-987, 2006.

Bougoffa, L. and Rach, R.C., Solving nonlocal initial-boundary value problems for linear and nonlinear parabolic and hyperbolic partial differential equations by the Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 225: 50-61, 2013.

Bouziani, A., On a class of parabolic equations with a nonlocal boundary condition. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, 10 : 61-77, 1999.

Boyd, J. P., 2000. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover Publications, Inc., Newyork, 2000.

Britt, S., Tsynkov, S. and Turkel, A compact fourth order scheme for the Helmholtz equation in polar coordinates, *J. Sci. Comput.*, 45: 26-47, 2010.

Bülbül, B., and Sezer, M., A Taylor matrix method for the solution of a two-dimensional linear hyperbolic equation, *Applied Mathematics Letters* 24(10): 1716-1720, 2011.

Bülbül, B., İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin Taylor polinom çözümleri, *Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, 2011.

Bülbül, B and Sezer, M., A new approach to numerical solution of nonlinear Klein-Gordon equation, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, Article ID 869749, 7 pages, doi:10.1155/2013/869749, 2013.

Çağlıyan, M. ve Çelebi, O., 2010. *Kısmi Diferansiyel Denklemler*, Dora Yayıncılık, 2010.

Çay, S., Bernoulli polinomlarının matris özellikleri ve integro-diferansiyel denklemlere uygulamaları, *Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 2011.

Dehdhan, M. and Tatari, M., Determination of a control parameter in a one-dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions, *Mathematical and Computer Modelling*, 44(11-12): 1160-1168, 2006.

- Dehghan, M. and Ghesmati, G., Solution of the second-order one-dimensional hyperbolic telegraph equation by using the dual reciprocity boundary integral equation (DRBIE) method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34(1): 51-59, 2010.
- Dehghan, M. and Shokri, A., A meshless method for numerical solution of a linear hyperbolic equation with variable coefficients in two space dimensions, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 25(2): 494-506, 2009.
- Dehghan, M. and Shokri, A., A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation, *Inc. Numer Methods Partial Differential Eq*, 24: 1080–1093, 2008.
- Dehghan, M. and Shokri, A., Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation using radial basis functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230: 400-410, 2009.
- Dehghan, M., Application of the Adomian decomposition method for two-dimensional parabolic equation subject to non-standard boundary specifications, *Applied Mathematics and Computation*, 157(2): 549-560, 2004.
- Dehghan, M., On the solution of an initial-boundary value problem that combines Neumann and integral condition for the wave equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 21(1): 24-40, 2005.
- Ding, H. and Zhang, Parameters spline methods for the solution of hyperbolic equations, *Applied Mathematics and Computation*, 204(2): 938-941, 2008.
- Ding, H., Zhang, Y., Cao, J. and Tian, J., A class of difference scheme for solving telegraph equation by new non-polynomial spline methods, *Applied Mathematics and Computation*, 218(9): 4671-4683, 2012.
- Doha, E.H. and Al-Kholi, M.R, An efficient double Legendre spectral method for parabolic and elliptic partial differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 78(3): 413-432, 2001.
- Doha, E.H., Abd-Elhameed, W.M., Accurate spectral solutions for the parabolic and elliptic partial differential equations by the ultraspherical Tau method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 181: 24–45, 2005.
- Duy, N.M. and Tran-Cong, T., An integrated-RBF technique based on Galerkin formulation for elliptic differential equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33:191–199, 2009.
- El-Azab, M.S. and El-Gamel, M., A numerical algorithm for the solution of telegraph equations, *Applied Mathematics and Computation*, 190(1): 757-764, 2007.

- El-Sayed, S.M., The decomposition method for studying the Klein–Gordon equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 18: 1025-1030, 2003.
- Erdem, K. and Yalçınbaş, S., Bernoulli polynomial approach to high-order linear differential-difference equations, *AIP Conf. Proc.*, 1479: 360-364, 2012.
- Erdem, K. and Yalçınbaş, S., Numerical approach of linear delay difference equations with variable coefficients in terms of Bernoulli polynomials, *AIP Conf. Proc.*, 1493: 338-344, 2012.
- Erdem, K., Yalçınbaş, S. and Sezer, M., A Bernoulli polynomial approach with residual correction for solving mixed linear Fredholm integro-differential difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 19(10): 1619-1631, 2013.
- Fairweather, G., Karageorghis A. and Maack J., Compact optimal quadratic spline collocation methods for the Helmholtz equation, *Journal of Computational Physics*, 230: 2880–2895, 2011.
- Gittelsohn, C.J., Andreev, R. and Schwab, C., Optimality of adaptive Galerkin methods for random parabolic partial differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 263: 189-201, 2014.
- Gobbi, R., Spigler, R., Comparing Shannon to autocorrelation-based wavelets for solving singularly perturbed elliptic BV problems, *BIT .Numer Math*, 51(3):1–23, 2011.
- Hu, H.Y, Li, Z.C. and Cheng, A., Radial basis collocation methods for elliptic boundary value problems, *Computers and Mathematics with Applications*, 50:289-320, 2005.
- Isık, O. R., Sezer, M. and Guney, Z., Bernstein series solution of linear second-order partial differential equations with mixed conditions, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 37:609–619, 2014.
- Islam, S., Aziz, I., Al-Fhaid, A.S. and Shah, A., A numerical assessment of parabolic partial differential equations using Haar and Legendre wavelets, *Applied Mathematical Modelling*, 37(23): 9455-9481, 2013.
- Jin, L., Perturbation method for solving partial differential equations with variable coefficients, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 3(28):1395-1407, 2008.
- Jiwari, R., Pandit, S. and Mittal, R.C., A differential quadrature algorithm to solve the two dimensional linear hyperbolic telegraph equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions, *Applied Mathematics and Computation*, 218(13): 7279-7294, 2012.
- Kemancı, B., İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin Legendre polinom çözümleri ve uygulamaları, *Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, 2012.

Lakestani, M. and Dehghan, M., Collocation and finite difference-collocation methods for the solution of nonlinear Klein-Gordon equation, *Computer Physics Communications*, 181: 1392-1401, 2010.

Lakestani, M. and Saray, B.S., Numerical solution of telegraph equation using interpolating scaling functions, *Computers and Mathematics with Applications*, 60(7): 1964-1972, 2010.

Liu, C.S., On-line detecting heat source of a nonlinear heat conduction equation by a differential algebraic equation method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 76: 153-161, 2014.

Mittal, R.C. and Bhatia, R., A numerical study of two dimensional hyperbolic telegraph equation by modified B-spline differential quadrature method, *Applied Mathematics and Computation*, 244: 976-997, 2014.

Mittal, R.C., Jain, R.K., B-splines methods with redefined basis functions for solving fourth order parabolic partial differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 217(23): 9741-9755, 2011.

Mittal, R.C., Jain, R.K., Cubic B-splines collocation method for solving nonlinear parabolic partial differential equations with Neumann boundary conditions, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12): 4616-4625, 2012.

Mittal, R.C., Jain, R.K., Redefined cubic B-splines collocation method for solving convection–diffusion equations, *Applied Mathematical Modelling*, 36(11): 5555-5573, 2012.

Mohebbi, A. and Dehghan, M., High-order compact solution of the one-dimensional heat and advection–diffusion equations, *Applied Mathematical Modelling*, 34(10): 3071-3084, 2010.

Mohyud-Din, S.T. and Noor, M.A., Homotopy perturbation method for solving partial differential equations, *Z. Naturforsch.* 64a, 157 – 170, 2009.

Momani, S., Analytical approximate solution for fractional heat-like and wave-like equations with variable coefficients using the decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 165: 459-472, 2005.

Öziş, T. and Ağırseven, D., He's homotopy perturbation method for solving heat-like and wave-like equations with variable coefficients, *Physics Letters A*, 372: 5944-5950, 2008.

Pinchover, Y., Rubinstein, J., 2005. *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

Polyanin, A. D., 2000. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, ACRC Press Company, New York, 2000.

- Rashidinia, J., Jalilian, R. and Kazemi, V., Spline methods for the solutions of hyperbolic equations, *Applied Mathematics and Computation*, 190(1), 2007.
- Rashidinia J., Ghasemi, M. and Jalilian R., Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233: 1866-1878, 2010.
- Saadatmandi and A., Dehghan, A Tau approach for solution of the space fractional diffusion equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 62(3): 1135-1142, 2011.
- Saadatmandi, A. and Dehghan, M., Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the Chebyshev Tau method, *Numer Methods Partial Differential Eq.*, 26(1): 239-252, 2010.
- Saadatmandi, A., Dehghan, M. and Azizi, M.R., The Sinc–Legendre collocation method for a class of fractional convection–diffusion equations with variable coefficients, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(11): 4125-4136, 2012.
- Shareri, F. and Dehghan, M., The method of lines for solution of the one dimensional wave equation subject to an integral conservation condition, *Computers & Mathematics with Applications*, 56(9): 2175-2188, 2008.
- Shou, D.H. and He, J.H., Beyond Adomian method: The variational iteration method for solving heat-like and wave-like equations with variable coefficients, *Physics Letters A*, 372: 233-237, 2008.
- Singer, I. and Turkel, E., Sixth-order accurate finite difference schemes for the Helmholtz equation, *Journal of Computational Acoustics*, 14(3): 339-351, 2006.
- Sirendaoreji, Auxiliary equation method and new solutions of Klein-Gordon equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 31: 943-950, 2007.
- Smith, D.E., 1925. *History of Mathematics*, General Publishing Company, Toronto, 1925.
- Smith, G.D., 1978. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford University Press, London, 1978.
- Sneddon, I. N., 2006. *Elements of Partial Differential Equations*, Dover Publications, 2006.
- Taşkın, F., Boztosun, I. and Bayrak, O., Exact solutions of Klein-Gordon equation with exponential scalar and vector potentials, *International Journal of Theoretical Physics*, 47(6): 1612-1617, 2008.
- Tatari, M. and Dehghan, M., On the solution of the non-local parabolic partial differential equations via radial basis functions, *Applied Mathematical Modelling*, 33(3): 1729-1738, 2009.

- Vong, S. and Wang, Z., A High-order compact scheme for the nonlinear fractional Klein–Gordon equation, *Inc. Numer Methods Partial Differential Eq*, DOI 10.1002/num.21912, 2014.
- Wang, C.C., Huang, J.H. and Yang, D.J., Cubic spline difference method for heat conduction, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39(2): 224-230, 2012.
- Wang, T. and Wang, Y.M., A higher-order compact LOD method and its extrapolations for non-homogeneous parabolic differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 237: 512-530, 2014.
- Wang, Y.M., Error and extrapolation of a compact LOD method for parabolic differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(5): 1367-1382, 2011.
- Wazwaz, A.M. and Gorguis, A., Exact solutions for heat-like and wave-like equations with variable coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, 149: 15-29, 2004.
- Wazwaz, A.M., Exact solutions for variable coefficients fourth-order parabolic partial differential equations in higher-dimensional spaces, *Applied Mathematics and Computation*, 130: 415–424, 2002.
- Wazwaz, A.M., The tanh and the sine–cosine methods for compact and noncompact solutions of the nonlinear Klein–Gordon equation, *Applied Mathematics and Computation* 167: 1179–1195, 2005.
- Weinberger, H.F., 1965. *A First Course in Partial Differential Equations*. Blaisdell publishing Company, New York, 1965.
- Wen, Y.X. and Zhou, X.W., Exact solutions for the generalized nonlinear heat conduction equations using the exp-function method, *Computers and Mathematics with Applications* 58(11): 2464-2467, 2009.
- Yao, G., Islam, S. and Sarler, B., Assessment of global and local meshless methods based on collocation with radial basis functions for parabolic partial differential equations in three dimensions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(11): 1640-1648, 2012.
- Yao, H., Reproducing kernel method for the solution of nonlinear hyperbolic telegraph equation with an integral condition, *Numer Methods Partial Differential Eq.*, 27(4): 867-886, 2011.
- Yousefi, S. A., Barikbin, Z. and Dehghan, M., Bernstein Ritz-Galerkin method for solving an initial-boundary value problem that combines Neumann and integral condition for the wave equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26(5): 1236-1246, 2010.
- Yousefi, S. A., Legendre multiwavelet Galerkin method for solving the hyperbolic telegraph equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26,(3) : 535-543, 2010.

Yüksel, G., İkinci mertebe lineer kısmi diferansiyel denklemlerin Chebyshev polinom çözümleri, Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2011.

Yüzbaşı, Ş. and Şahin, N., Numerical solutions of singularly perturbed one-dimensional parabolic convection–diffusion problems by the Bessel collocation method, Applied Mathematics and Computation, 220: 305-315, 2013.

Yüzbaşı, Ş., İkinci mertebe kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Bessel Sıralama (Collocation) Metodu, Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2012.

<https://www.maths.ox.ac.uk/>

EKLER**EK 1**

% Örnek 5.5 in $N=7$, $M=8$ için Bilgisayar Programı

format rat

$N=7$;

$M=8$;

$D=[1 \ -1/(2) \ (1)/(6) \ 0 \ -1/(30) \ 0,1/42 \ 0; 0 \ 1 \ -1 \ (1)/(2) \ 0 \ -1/(6) \ 0 \ 1/6; 0 \ 0 \ 1 \ -3/(2) \ 1 \ 0 \ -1/2 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -2 \ (5)/(3) \ 0 \ -7/6; 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -5/(2) \ 5/2 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -3 \ 7/2; 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -7/2; 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$

syms x

for i=1:(N+1)

$X(1,i)=x^{(i-1)}$;

end

X

$Jx=X*D$

syms y

$Jy=subs(Jx,y)$

$B=zeros(N+1,N+1)$;

for i=1:N

$B(i+1,i)=i$;

end

$P=(D)^{(-1)}*B*D$

$PP=kron(eye(N+1),P)$

$Qy=kron(eye(N+1),Jy)$

$W=Jx*P^2*Qy-2*x*y*(Jx*P*Qy*PP)+x^2*y*(Jx*P*Qy)+x^2*y^2*(Jx*Qy*(PP)^2)-2*(Jx*Qy*PP)+x*Jx*Qy$

s=1;

$WM=zeros((N+1)^2,(N+1)^2)$;

for i=1:N+1

 for j=1:N+1

$WW=[subs(W,\{x,y\},\{(i-1)/N,(j-1)/N\})];$

for k=1:((N+1)*(N+1))

$WM(s,k)=WW(1,k)$;

end

s=s+1;

```

end
end
WM
g=exp(x+y)*(x^2*y^2-2*x*y+x^2*y+x-1)
s=1
G=zeros((N+1)^2,1);
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
G=[subs(g,{x,y},{(i-1)/N,(j-1)/N})];
    GM(s,1)=G(1,1);
s=s+1;
    end
    end
GM
a=0
b=0
c=0
d=1
ub=Jx*subs(Qy,a)
s=1;
Ub=zeros(1,(N+1)^2);
for i=1:N+1
Ub=[subs(ub,(i-1)/N)];
for k=1:((N+1)*(N+1))
    UB(s,k)=Ub(1,k);
end
s=s+1;
end
UB
ut=Jx*subs(Qy*PP,b)
s=1;
U=zeros(1,(N+1)^2);
for i=1:N+1

```

```

U=[subs(ut,(i-1)/N)];
for k=1:((N+1)*(N+1))
    Ut(s,k)=U(1,k);
end
s=s+1;
end
Ut
vb=subs(Jx,c)*Qy
s=1;
Vb=zeros(1,(N+1)^2);
for i=1:N+1
Vb=[subs(vb,(i-1)/N)];
for k=1:((N+1)*(N+1))
    VB(s,k)=Vb(1,k);
end
s=s+1;
end
VB
vn=subs(Jx,d)*Qy
s=1;
Vn=zeros(1,(N+1)^2);
for i=1:N+1
Vn=[subs(vn,(i-1)/N)];
for k=1:((N+1)*(N+1))
    VN(s,k)=Vn(1,k);
end
s=s+1;
end
VN
syms x
f=exp(x)
m=exp(x)
h=exp(y)

```

```

k=exp(y+1)
s=1;
    F=zeros((N+1),1);
    for i=1:N+1
F=[subs(f,(i-1)/N)];
    FF(s,1)=F(1,1)
s=s+1;
    end
s=1;
    Mm=zeros((N+1),1);
    for i=1:N+1
Mm=[subs(m,(i-1)/N)];
    MM(s,1)=Mm(1,1);
s=s+1;
    end
s=1;
    H=zeros((N+1),1);
    for i=1:N+1
H=[subs(h,(i-1)/N)];
    HH(s,1)=H(1,1);
s=s+1;
    end
s=1;
    K=zeros((N+1),1);
    for i=1:N+1
K=[subs(k,(i-1)/N)];
    KK(s,1)=K(1,1);
s=s+1;
    end
WW=[UB;Ut;VB;VN;WM]
GG=[FF;MM;HH;KK;GM]
Wg=[WW GG]
an=WW\GG

```

```
syms t
```

```
U=Jx*Qy*an
```

EK 2

% Örnek 5.7 nin $N=13$, $M=14$ için Bilgisayar Programı

```
format rat
```

```
N=13;
```

```
M=14;
```

```
D=[1 -(1/2) 1/6 0 -1/30 0 1/42 0 -(1/30) 0 5/66 0 -(691/2730) 0 ;0 1 -1 1/2 0 -1/6 0 1/6 0 -3/6 0
5/6 0 -691/210;0 0 1 -(3/2) 1 0 -(1/2) 0 2/3 0 -(3/2) 0 5 0;0 0 0 1 -2 5/3 0 -(7/6) 0 2 0 -(11/2) 0
65/3;0 0 0 0 1 -(5/2) 5/2 0 -(7/3) 0 5 0 -(33/2) 0;0 0 0 0 0 1 -3 7/2 0 -(21/5) 0 11 0 -(429/10);0 0 0
0 0 0 1 -7/2 14/3 0 -7 0 22 0;0 0 0 0 0 0 0 1 -4 6 0 -11 0 286/7;0 0 0 0 0 0 0 0 1 -(9/2) 15/2 0 -
(33/2) 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -5 55/6 0 -(143/6);0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -(11/2) 11 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 -6 13;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -(13/2);0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
```

```
syms x
```

```
for i=1:(N+1)
```

```
    X(1,i)=x^(i-1);
```

```
end
```

```
X
```

```
Jx=X*D
```

```
syms y
```

```
Jy=subs(Jx,y)
```

```
B=zeros(N+1,N+1);
```

```
for i=1:N
```

```
    B(i+1,i)=i;
```

```
end
```

```
P=(D)^(-1)*B*D
```

```
PP=kron(eye(N+1),P)
```

```
Qy=kron(eye(N+1),Jy)
```

```
W=(Jx*P^2*Qy)+(Jx*Qy*(PP)^2)-(Jx*Qy);
```

```
s=1;
```

```
WM=zeros((N+1)^2,(N+1)^2);
```

```
for i=1:N+1
```

```
    for j=1:N+1
```

```
        WW=[subs(W,{x,y},{(i-1)/N,(j-1)/N})];
```

```

for k=1:((N+1)*(N+1))
    WM(s,k)=WW(1,k);
end
s=s+1;
end
end
WM
g=0;
s=1
G=zeros((N+1)^2,1);
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
G=[subs(g,{x,y},{(i-1)/N,(j-1)/N})];
    GM(s,1)=G(1,1);
s=s+1;
end
end
GM
a=0
b=0
ub=subs(Jx,a)*Qy;
s=1;
Ub=zeros(1,(N+1)^2);
for i=1:N+1
Ub=[subs(ub,(i-1)/N)];
for k=1:((N+1)*(N+1))
    UB(s,k)=Ub(1,k);
end
s=s+1;
end
UB
ut=subs(Jx*P,b)*Qy;
s=1;

```

```

U=zeros(1,(N+1)^2);
for i=1:N+1
U=[subs(ut,(i-1)/N)];
for k=1:((N+1)*(N+1))
    Ut(s,k)=U(1,k);
end
s=s+1;
end
Ut

```

```

syms x
f=y;
m=y+cosh(y);
s=1;
    F=zeros((N+1),1);
    for i=1:N+1
F=[subs(f,(i-1)/N)];
    FF(s,1)=F(1,1)
s=s+1;
    end
s=1;
    Mm=zeros((N+1),1);
    for i=1:N+1
Mm=[subs(m,(i-1)/N)];
    MM(s,1)=Mm(1,1);
s=s+1;
    end
WW=[UB;Ut;WM]
GG=[FF;MM;GM]
Wg=[WW GG]
an=WW\GG
syms t
U=Jx*Qy*an

```

```

Ug=y*(exp(x))+x*cosh(y);
Rn=(diff(U,x,2))+diff(U,y,2)-U-g;

format rat

D1=[1 -(1/2) 1/6 0 -1/30 0 1/42 0 -(1/30) 0 5/66 0 -(691/2730) 0 7/6;0 1 -1 1/2 0 -1/6 0 1/6 0 -3/6
0 5/6 0 -691/210 0;0 0 1 -(3/2) 1 0 -(1/2) 0 2/3 0 -(3/2) 0 5 0 -(691/30);0 0 0 1 -2 5/3 0 -(7/6) 0 2
0 -(11/2) 0 65/3 0;0 0 0 0 1 -(5/2) 5/2 0 -(7/3) 0 5 0 -(33/2) 0 455/6;0 0 0 0 0 1 -3 7/2 0 -(21/5) 0
11 0 -(429/10) 0;0 0 0 0 0 0 1 -7/2 14/3 0 -7 0 22 0 -(1001/10);0 0 0 0 0 0 0 1 -4 6 0 -11 0 286/7
0;0 0 0 0 0 0 0 0 1 -(9/2) 15/2 0 -(33/2) 0 143/2;0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -5 55/6 0 -(143/6) 0;0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 -(11/2) 11 0 -(1001/30);0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -6 13 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -
(13/2) 91/6;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -7;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]

syms x
for i=1:(M+1)
    X1(1,i)=x^(i-1);
end
X1
Jx1=X1*D1
syms y
Jy1=subs(Jx1,y)
B1=zeros(M+1,M+1);
for i=1:M
    B1(i+1,i)=i;
end
B1;
P1=(D1)^(-1)*B1'*D1
PP1=kron(eye(M+1),P1)
Qy1=kron(eye(M+1),Jy1)
alfa=1
beta=1
W1=(Jx1*P1^2*Qy1)+(Jx1*Qy1*(PP1)^2)-(Jx1*Qy1);
s=1;
WM1=zeros((M+1)^2,(M+1)^2);
for i=1:M+1
    for j=1:M+1
        WW1=[subs(W1,{x,y},{(i-1)/M,(j-1)/M})];
    end
end
for k=1:((M+1)*(M+1))

```

```

    WM1(s,k)=WW1(1,k);
end
s=s+1;
    end
end
    WM1
    g1=-Rn
    s=1
    G1=zeros((M+1)^2,1);
    for i=1:M+1
        for j=1:M+1
G1=[subs(g1,{x,y},{(i-1)/M,(j-1)/M})];
        GM1(s,1)=G1(1,1);
s=s+1;
        end
        end
    GM1
    a1=0
    b1=0
    ub1=subs(Jx1,a)*Qy1;
    s=1;
    Ub1=zeros(1,(M+1)^2);
    for i=1:M+1
Ub1=[subs(ub1,(i-1)/M)];
    for k=1:((M+1)*(M+1))
        UB1(s,k)=Ub1(1,k);
    end
    s=s+1;
    end
    ut1=subs(Jx1*P1,b)*Qy1;
    s=1;
    U1=zeros(1,(M+1)^2);
    for i=1:M+1

```

```

U1=[subs(ut1,(i-1)/M)];
for k=1:((M+1)*(M+1))
    Ut1(s,k)=U1(1,k);
end
s=s+1;
end
syms x
f1=0
m1=0
s=1;
F1=zeros((M+1),1);
for i=1:M+1
F1=[subs(f1,(i-1)/M)];
FF1(s,1)=F1(1,1);
s=s+1;
end
s=1;
Mm1=zeros((M+1),1);
for i=1:M+1
Mm1=[subs(m1,(i-1)/M)];
MM1(s,1)=Mm1(1,1);
s=s+1;
end

WW1=[UB1;Ut1;WM1]
GG1=[FF1;MM1;GM1]
an1=WW1\GG1
eNM=Jx1*subs(Qy1,y)*an1
syms x y
U=Jx*Qy*an
UNM=vpa(U+eNM)
Ug=y*(exp(x))+x*cosh(y);
eN=U-Ug

```

```

ENM=U+eNM-Ug
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        cozumUN=vpa([subs(U,{x,y},{i,j})],10)
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        tamcozum=vpa([subs(Ug,{x,y},{i,j})],10)
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        cozumUNM=vpa([subs(UNM,{x,y},{i,j})],10)
    end
end
format short e
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        absoluteerroreN=abs([subs(U-Ug,{x,y},{i,j})])
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        absoluteerroreNM=abs([subs(eNM,{x,y},{i,j})])
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        absoluteerrorENM=abs([subs(U+eNM-Ug,{x,y},{i,j})])
    end
end
end

```

EK 3

% Örnek 5.8 in $N=13$, $M=14$ için Bilgisayar Programı

format rat

$N=13$;

$M=14$;

```
D=[1 -(1/2) 1/6 0 -1/30 0 1/42 0 -(1/30) 0 5/66 0 -(691/2730) 0 ;0 1 -1 1/2 0 -1/6 0 1/6 0 -3/6 0
5/6 0 -691/210;0 0 1 -(3/2) 1 0 -(1/2) 0 2/3 0 -(3/2) 0 5 0;0 0 0 1 -2 5/3 0 -(7/6) 0 2 0 -(11/2) 0
65/3;0 0 0 0 1 -(5/2) 5/2 0 -(7/3) 0 5 0 -(33/2) 0;0 0 0 0 0 1 -3 7/2 0 -(21/5) 0 11 0 -(429/10);0 0 0
0 0 0 1 -7/2 14/3 0 -7 0 22 0;0 0 0 0 0 0 0 1 -4 6 0 -11 0 286/7;0 0 0 0 0 0 0 0 1 -(9/2) 15/2 0 -
(33/2) 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -5 55/6 0 -(143/6);0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -(11/2) 11 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 -6 13;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -(13/2);0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
```

syms x

for i=1:(N+1)

$X(1,i)=x^{(i-1)}$;

end

X

$Jx=X*D$

syms y

$Jy=subs(Jx,y)$

$B=zeros(N+1,N+1)$;

for i=1:N

$B(i+1,i)=i$;

end

$P=(D)^{(-1)}*B*D$

$PP=kron(eye(N+1),P)$

$Qy=kron(eye(N+1),Jy)$

$W=(Jx*P^2*Qy)+(Jx*Qy*(PP)^2)+8*(Jx*Qy)$;

$s=1$;

$WM=zeros((N+1)^2,(N+1)^2)$;

for i=1:N+1

for j=1:N+1

$WW=[subs(W,\{x,y\},\{(i-1)/N,(j-1)/N\})]$;

for k=1:((N+1)*(N+1))

$WM(s,k)=WW(1,k)$;

end

```

s=s+1;
    end
end
    WM
    g=0;
    s=1
    G=zeros((N+1)^2,1);
    for i=1:N+1
        for j=1:N+1
G=[subs(g,{x,y},{(i-1)/N,(j-1)/N})];
        GM(s,1)=G(1,1);
s=s+1;
        end
        end
    GM
        a=0
        b=0
        ub=subs(Jx,a)*Qy;
        s=1;
        Ub=zeros(1,(N+1)^2);
        for i=1:N+1
Ub=[subs(ub,(i-1)/N)];
        for k=1:((N+1)*(N+1))
            UB(s,k)=Ub(1,k);
        end
        s=s+1;
        end
        UB
        ut=subs(Jx*P,b)*Qy;
        s=1;
        U=zeros(1,(N+1)^2);
        for i=1:N+1
U=[subs(ut,(i-1)/N)];

```

```

for k=1:((N+1)*(N+1))
    Ut(s,k)=U(1,k);
end
s=s+1;
end
Ut

syms x
f=sin(2*y);
m=0;
s=1;
F=zeros((N+1),1);
for i=1:N+1
F=[subs(f,(i-1)/N)];
FF(s,1)=F(1,1)
s=s+1;
end
s=1;
Mm=zeros((N+1),1);
for i=1:N+1
Mm=[subs(m,(i-1)/N)];
MM(s,1)=Mm(1,1);
s=s+1;
end
WW=[UB;Ut;WM]
GG=[FF;MM;GM]
Wg=[WW GG]
an=WW\GG
syms t
U=Jx*Qy*an
Ug=cos(2*x)*sin(2*x);
Rn=(diff(U,x,2))+diff(U,y,2)+8*U-g;
format rat

```

```

D1=[1 -(1/2) 1/6 0 -1/30 0 1/42 0 -(1/30) 0 5/66 0 -(691/2730) 0 7/6;0 1 -1 1/2 0 -1/6 0 1/6 0 -3/6
0 5/6 0 -691/210 0;0 0 1 -(3/2) 1 0 -(1/2) 0 2/3 0 -(3/2) 0 5 0 -(691/30);0 0 0 1 -2 5/3 0 -(7/6) 0 2
0 -(11/2) 0 65/3 0;0 0 0 0 1 -(5/2) 5/2 0 -(7/3) 0 5 0 -(33/2) 0 455/6;0 0 0 0 0 1 -3 7/2 0 -(21/5) 0
11 0 -(429/10) 0;0 0 0 0 0 0 1 -7/2 14/3 0 -7 0 22 0 -(1001/10);0 0 0 0 0 0 0 1 -4 6 0 -11 0 286/7
0;0 0 0 0 0 0 0 0 1 -(9/2) 15/2 0 -(33/2) 0 143/2;0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -5 55/6 0 -(143/6) 0;0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 -(11/2) 11 0 -(1001/30);0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -6 13 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -
(13/2) 91/6;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -7;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]

```

```

syms x
for i=1:(M+1)
    X1(1,i)=x^(i-1);
end
X1
Jx1=X1*D1
syms y
Jy1=subs(Jx1,y)
B1=zeros(M+1,M+1);
for i=1:M
    B1(i+1,i)=i;
end
B1;
P1=(D1)^(-1)*B1'*D1
PP1=kron(eye(M+1),P1)
Qy1=kron(eye(M+1),Jy1)
alfa=1
beta=1
W1=(Jx1*P1^2*Qy1)+(Jx1*Qy1*(PP1)^2)+8*(Jx1*Qy1);
s=1;
WM1=zeros((M+1)^2,(M+1)^2);
for i=1:M+1
    for j=1:M+1
        WW1=[subs(W1,{x,y},{(i-1)/M,(j-1)/M})];
        for k=1:((M+1)*(M+1))
            WM1(s,k)=WW1(1,k);
        end
    end
    s=s+1;
end

```

```

end
end
WM1
g1=-Rn
s=1
G1=zeros((M+1)^2,1);
for i=1:M+1
    for j=1:M+1
G1=[subs(g1,{x,y},{(i-1)/M,(j-1)/M})];
    GM1(s,1)=G1(1,1);
s=s+1;
    end
    end
GM1
a1=0
b1=0
ub1=subs(Jx1,a)*Qy1;
s=1;
Ub1=zeros(1,(M+1)^2);
for i=1:M+1
Ub1=[subs(ub1,(i-1)/M)];
for k=1:((M+1)*(M+1))
    UB1(s,k)=Ub1(1,k);
end
s=s+1;
end
ut1=subs(Jx1*P1,b)*Qy1;
s=1;
U1=zeros(1,(M+1)^2);
for i=1:M+1
U1=[subs(ut1,(i-1)/M)];
for k=1:((M+1)*(M+1))
    Ut1(s,k)=U1(1,k);

```

```

end
    s=s+1;
end
syms x
f1=0
m1=0
    s=1;
    F1=zeros((M+1),1);
    for i=1:M+1
F1=[subs(f1,(i-1)/M)];
    FF1(s,1)=F1(1,1);
s=s+1;
    end
    s=1;
    Mm1=zeros((M+1),1);
    for i=1:M+1
Mm1=[subs(m1,(i-1)/M)];
    MM1(s,1)=Mm1(1,1);
s=s+1;
    end
    WW1=[UB1;Ut1;WM1]
    GG1=[FF1;MM1;GM1]
    an1=WW1\GG1
    eNM=Jx1*subs(Qy1,y)*an1
syms x y
U=Jx*Qy*an
UNM=vpa(U+eNM)
Ug=cos(2*x)*sin(2*x);
ENM=U+eNM-Ug
eN=U-Ug
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        cozumUN=vpa([subs(U,{x,y},{i,j})],10)

```

```

    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        tamcozum=vpa([subs(Ug,{x,y},{i,j})],10)
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        cozumUNM=vpa([subs(UNM,{x,y},{i,j})],10)
    end
end
format short e

for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        absoluteerroreN=abs([subs(U-Ug,{x,y},{i,j})])
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        absoluteerroreNM=abs([subs(eNM,{x,y},{i,j})])
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        absoluteerrorENM=abs([subs(U+eNM-Ug,{x,y},{i,j})])
    end
end
end

```

EK 4

% Örnek 5.9 un $N=10$, $M=11$ için Bilgisayar Programı

```
format rat
```

```
N=10;
```

```
M=11;
```

```
D=[1 -(1/2) 1/6 0 -1/30 0 1/42 0 -(1/30) 0 5/66;0 1 -1 1/2 0 -1/6 0 1/6 0 -3/6 0;0 0 1 -(3/2) 1 0 -
(1/2) 0 2/3 0 -(3/2);0 0 0 1 -2 5/3 0 -(7/6) 0 2 0;0 0 0 0 1 -(5/2) 5/2 0 -(7/3) 0 5;0 0 0 0 0 1 -3 7/2
0 -(21/5) 0;0 0 0 0 0 0 1 -7/2 14/3 0 -7;0 0 0 0 0 0 0 1 -4 6 0;0 0 0 0 0 0 0 0 1 -(9/2) 15/2;0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 -5;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
```

```
syms x
```

```
for i=1:(N+1)
```

```
    X(1,i)=x^(i-1);
```

```
end
```

```
X
```

```
Jx=X*D
```

```
syms y
```

```
Jy=subs(Jx,y)
```

```
B=zeros(N+1,N+1);
```

```
for i=1:N
```

```
    B(i+1,i)=i;
```

```
end
```

```
P=(D)^(-1)*B'*D
```

```
PP=kron(eye(N+1),P)
```

```
Qy=kron(eye(N+1),Jy)
```

```
W=(Jx*Qy*(PP))-(x^2/2)*(Jx*P^2*Qy);
```

```
s=1;
```

```
WM=zeros((N+1)^2,(N+1)^2);
```

```
for i=1:N+1
```

```
    for j=1:N+1
```

```
        WW=[subs(W,{x,y},{(i-1)/N,(j-1)/N})];
```

```
    for k=1:((N+1)*(N+1))
```

```
        WM(s,k)=WW(1,k);
```

```
    end
```

```
s=s+1;
```

```

end
end
WM
g=0;
s=1
G=zeros((N+1)^2,1);
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
G=[subs(g,{x,y},{(i-1)/N,(j-1)/N})];
    GM(s,1)=G(1,1);
s=s+1;
    end
    end
GM
a=0
ub=Jx*subs(Qy,a)
s=1;
Ub=zeros(1,(N+1)^2);
for i=1:N+1
Ub=[subs(ub,(i-1)/N)];
for k=1:((N+1)*(N+1))
    UB(s,k)=Ub(1,k);
end
s=s+1;
end
UB
syms x
f=x^2;
s=1;
F=zeros((N+1),1);
for i=1:N+1
F=[subs(f,(i-1)/N)];
FF(s,1)=F(1,1)

```

```

s=s+1;
end
WW=[UB;WM];
GG=[FF;GM];
Wg=[WW GG];
an=WW\GG;
syms t
U=Jx*Qy*an
Ug=(exp(y))*(x^2);
Rn=diff(U,y)-(x^2/2)*(diff(U,x,2))-g;
format rat
D1=[1 -(1/2) 1/6 0 -1/30 0 1/42 0 -(1/30) 0 5/66 0;0 1 -1 1/2 0 -1/6 0 1/6 0 -3/6 0 5/6;0 0 1 -(3/2)
1 0 -(1/2) 0 2/3 0 -(3/2) 0;0 0 0 1 -2 5/3 0 -(7/6) 0 2 0 -(11/2);0 0 0 0 1 -(5/2) 5/2 0 -(7/3) 0 5 0;0 0
0 0 0 1 -3 7/2 0 -(21/5) 0 11;0 0 0 0 0 0 1 -7/2 14/3 0 -7 0;0 0 0 0 0 0 0 1 -4 6 0 -11;0 0 0 0 0 0 0
0 1 -(9/2) 15/2 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -5 55/6;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -(11/2);0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1];
syms x
for i=1:(M+1)
    X1(1,i)=x^(i-1);
end
X1
Jx1=X1*D1
syms y
Jy1=subs(Jx1,y)
B1=zeros(M+1,M+1);
for i=1:M
    B1(i+1,i)=i;
end
B1;
P1=(D1)^(-1)*B1'*D1
PP1=kron(eye(M+1),P1)
Qy1=kron(eye(M+1),Jy1)
alfa=1
beta=1
W1=(Jx1*Qy1*(PP1))-(x^2/2)*(Jx1*P1^2*Qy1);

```

```

s=1;
WM1=zeros((M+1)^2,(M+1)^2);
for i=1:M+1
    for j=1:M+1
WW1=[subs(W1,{x,y},{(i-1)/M,(j-1)/M})];
for k=1:((M+1)*(M+1))
    WM1(s,k)=WW1(1,k);
end
s=s+1;
end
end
WM1
g1=-Rn
s=1
G1=zeros((M+1)^2,1);
for i=1:M+1
    for j=1:M+1
G1=[subs(g1,{x,y},{(i-1)/M,(j-1)/M})];
    GM1(s,1)=G1(1,1);
s=s+1;
end
end
GM1
a1=0
ub1=Jx1*subs(Qy1,a1)
s=1;
Ub1=zeros(1,(M+1)^2);
for i=1:M+1
Ub1=[subs(ub1,(i-1)/M)];
for k=1:((M+1)*(M+1))
    UB1(s,k)=Ub1(1,k);
end
s=s+1;

```

```

    end
syms x
f1=0
    s=1;
    F1=zeros((M+1),1);
    for i=1:M+1
F1=[subs(f1,(i-1)/M)];
    FF1(s,1)=F1(1,1);
s=s+1;
    end
WW1=[UB1;WM1];
GG1=[FF1;GM1];
an1=WW1\GG1;
    eNM=Jx1*subs(Qy1,y)*an1
syms x y
U=Jx*Qy*an
UNM=vpa(U+eNM)
Ug=(exp(y))*(x^2);
eN=U-Ug
ENM=U+eNM-Ug
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        cozumUN=vpa([subs(U,{x,y},{i,j})],10)
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        tamcozum=vpa([subs(Ug,{x,y},{i,j})],10)
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        cozumUNM=vpa([subs(UNM,{x,y},{i,j})],10)
    end
end

```

```

    end
end
format short e
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        absoluteerrorN=abs([subs(U-Ug,{x,y},{i,j})])
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        absoluteerrorNM=abs([subs(eNM,{x,y},{i,j})])
    end
end
for i=0:0.5:1
    for j=0:0.5:1
        absoluteerrorENM=abs([subs(U+eNM-Ug,{x,y},{i,j})])
    end
end
end

```

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi : 17.04.1984

Doğum Yeri : İzmir

İlköğretim Okulu : Melih Tuncay İlköğretim Okulu, 1999.

Lise : Bornova Anadolu Lisesi, 2002.

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Manisa, 2007.

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Programı, Manisa, 2010.

Doktora : Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Programı, Manisa.