

**GAUSS PELL SAYILARI**

**Gül ÖZKAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAYIS 2012  
ANKARA**

Gül ÖZKAN tarafından hazırlanan “GAUSS PELL SAYILARI” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Dursun TAŞCI

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr.

.....

Matematik Anabilim Dalı,.

Prof. Dr. Dursun TAŞCI

.....

Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Naim TUĞLU

.....

Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Tarih: /05/2012

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gül ÖZKAN

## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                    |      |
|----------------------------------------------------|------|
| ÖZET.....                                          | iv   |
| ABSTRACT .....                                     | v    |
| TEŞEKKÜR.....                                      | vi   |
| İÇİNDEKİLER .....                                  | vii  |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....                       | viii |
| 1. GİRİŞ .....                                     | 1    |
| 2. II. MERTEBEDEN GAUSS İNDİRGEME BAĞINTILARI..... | 10   |
| 2.1. Gauss Fibonacci Sayısı .....                  | 10   |
| 2.2. Gauss Lucas Sayısı.....                       | 16   |
| 2.3. Gauss Pell Sayısı .....                       | 18   |
| 2.4. Gauss Pell-Lucas Sayısı .....                 | 22   |
| 2.5. Gauss Jacobsthal Sayısı .....                 | 26   |
| 2.6. Gauss Jacobsthal-Lucas Sayısı.....            | 30   |
| 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ $W_n(a, b; p, q)$ DİZİSİ ..... | 34   |

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| 4. GAUSS GENELLEŞTİRİLMİŞ $w_n(a, b; p, q)$ DİZİŐ ..... | 36 |
| KAYNAKLAR .....                                         | 41 |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                          | 43 |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| Simgeler         | Açıklama                            |
|------------------|-------------------------------------|
| $F_n$            | $n$ . Fibonacci sayısı              |
| $J_n$            | $n$ . Jacobsthal sayısı             |
| $L_n$            | $n$ . Lucas sayısı                  |
| $P_n$            | $n$ . Pell sayısı                   |
| $Q_n$            | $n$ . Pell-Lucas sayısı             |
| $W_n$            | $n$ . Genelleştirilmiş dizi         |
| $\mathfrak{J}_n$ | $n$ . Gauss Jacobsthal sayısı       |
| $\tau_n$         | $n$ . Gauss Jacobsthal-Lucas sayısı |
| $f_n$            | $n$ . Gauss Fibonacci sayısı        |
| $j_n$            | $n$ . Jacobsthal-Lucas sayısı       |
| $l_n$            | $n$ . Gauss Lucas sayısı            |
| $p_n$            | $n$ . Gauss Pell sayısı             |
| $q_n$            | $n$ . Gauss Pell-Lucas sayısı       |
| $w_n$            | $n$ . Gauss Genelleştirilmiş dizi   |

## **TEŞEKKÜR**

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Sayın Hocam Prof. Dr.Dursun TAŞCI' ya teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca beni bu günlere getiren, hayatımın her aşamasında sonsuz güven ve desteklerini hissettiğim aileme teşekkür ederim.

**GAUSS PELL SAYILARI****(Yüksek Lisans Tezi)****Gül ÖZKAN****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Mayıs 2012****ÖZET**

Bu çalışmada Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayıları gözönüne alınarak Gauss Pell, Gauss Pell-Lucas, Gauss Jacobsthal ve Gauss Jacobsthal-Lucas sayıları tanımlanmış olup bu sayılarla ilgili bazı özellikler elde edilmiştir. Ayrıca Horadam tarafından tanımlanan  $\{W_n(a, b; p, q)\}$  dizisi yardımıyla Gauss  $\{W_n(a, b; p, q)\}$  dizisi tanımlanmış ve bununla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

**Bilim Kodu : 204.1.025****Anahtar Kelimeler : Gauss Fibonacci, Gauss Lucas, Gauss Pell-Lucas, Gauss-Jacobsthal, Gauss Jacobsthal-Lucas****Sayfa Adedi : 43****Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Dursun TAŞCI**

**GAUSS PELL NUMBERS****(M.Sc. Thesis)****Gül ÖZKAN****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****May 2012****ABSTRACT**

**In this study, Gauss Fibonacci, Gauss Lucas numbers have been considered and so Gauss Pell, Gauss Pell-Lucas, Gauss Jacobsthal and Gauss Jacobsthal-Lucas numbers have been defined. Some properties about this numbers have been obtained.  $\{w_n(a, b; p, q)\}$  is defined with the help of the sequence  $\{W_n(a, b; p, q)\}$  which was defined by Horadam and some results regarding this sequence have been given.**

**Science Code : 204.1.025****Key Words : Gauss Fibonacci, Gauss Lucas, Gauss Pell-Lucas,  
Gauss-Jacobsthal, Gauss Jacobsthal-Lucas****Page Number : 43****Adviser : Prof. Dr. Dursun TAŞCI**

## 1. GİRİŞ

Vorob'yev ve Hoggatt; Fibonacci ve Lucas sayılarını inceleyerek bu sayılar ile ilgili bazı özelliklerden bahsetmişlerdir. [1,5]

Horadam; Pell sayıları ile ilgili bazı özellikler elde etmiştir. [6]

Silva, Hoggatt ve Horadam; genelleştirilmiş Fibonacci sayılarından bahsetmiş ve bu sayılar ile ilgili bazı özdeşlikler elde etmişlerdir. [11,12]

Horadam;  $\{W_n(a, b; p, q)\}$  dizisi ile ilgili özelliklere değinmiştir. [10]

Horadam ve Berzsenyi; Fibonacci sayılarını kompleks düzlemde inceleyerek bu sayılar ile ilgili bazı ilginç özellikler elde etmiştir. [13,14]

Pethe ve Horadam; indirgeme bağıntılarını kullanarak genelleştirilmiş Gauss Fibonacci sayılarını tanımlamış, Fibonacci, Pell ve Chebyshev polinomları arasındaki bağıntıları incelemişlerdir. [15]

Bu çalışmada ilk olarak bazı indirgeme bağıntıları ve özellikleri verildi. Daha sonra Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayılarının tanımı ve özdeşlikleri verilerek bu sayılar yardımıyla Gauss Pell, Gauss Pell-Lucas, Gauss Jacobsthal ve Gauss Jacobsthal-Lucas sayılarının tanımı verilip bu sayılarla ilgili özdeşlikler incelendi. Son olarak da Genelleştirilmiş  $\{W_n(a, b; p, q)\}$  dizisi ile ilgili tanım ve özellikler verilerek Gauss Genelleştirilmiş  $\{w_n(a, b; p, q)\}$  dizisi tanımlanıp bu dizi ile ilgili özdeşlikler verildi.

### 1.1. Tanım[1]:

Fibonacci sayıları,

$F_0 = 0$  ve  $F_1 = 1$  olmak üzere  $n \geq 2$  için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

şeklinde tanımlanır. Bazı Fibonacci sayıları aşağıdaki gibidir:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, K

### 1.2. Teorem[2]:

$F_n$ , n-inci Fibonacci sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

dir.

İspat

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  indirgeme bağıntısını gözönüne alarak,

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

.

.

.

.

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

eşitliklerini yazarız. Yukarıdaki eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\sum_1^n F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

### 1.3. Teorem[3]:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, n \geq 1 \quad (1.1)$$

İspat

İspatımızı n üzerinden tümevarım yöntemi ile yapalım.

$F_0F_2 - F_1^2 = 0$  olduğundan  $n = 1$  için doğrudur.  $n = k$  için doğru olsun. O halde

$$F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}^2 \\
&= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 - F_k F_{k-1} - F_{k-1} F_{k+1} - F_{k+1}^2 \\
&= F_k F_{k+1} - F_k F_{k-1} - F_k^2 - (-1)^k \\
&= F_k F_{k+1} - F_k (F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1} \\
&= F_k F_{k+1} - F_k F_{k+1} + (-1)^{k+1} \\
&= (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

olduğundan  $n = k + 1$  için doğru olur.

#### 1.4. Teorem[4]:

$F_n$ , n-inci Fibonacci sayısını göstermek üzere

$$i) F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \quad n \geq 1 \dots\dots\dots (1.2)$$

$$ii) F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n \dots\dots\dots (1.3)$$

$$iii) m \geq 2 \text{ için } F_m \mid F_n \Leftrightarrow m \mid n \dots\dots\dots (1.4)$$

dir.

#### 1.5. Tanım[5]:

$L_0 = 2$  ve  $L_1 = 1$  olmak üzere  $n \geq 2$  için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Lucas sayıları denir. Bazı Lucas sayıları

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29,K

şeklindedir.

### 1.6. Teorem[2]:

$L_n$ , n-inci Lucas sayısı olmak üzere,

$$i) \sum_{i=1}^n L_i = L_{n+2} - 3$$

$$ii) L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}, n \geq 1 \dots\dots\dots(1.5)$$

$$iii) L_{-n} = (-1)^n L_n, n \geq 1 \dots\dots\dots(1.6)$$

özellikleri elde edilir.

### 1.7. Tanım[6]:

$P_0 = 0$  ve  $P_1 = 1$  olmak üzere  $n > 0$  için

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Pell sayıları denir. Bazı Pell sayıları

1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 379, K

şeklindedir.

### 1.8. Teorem[6]:

$P_n$ , n-inci Pell sayısı olarak tanımlanmak üzere,

$$i) \sum_1^n P_i = P_{n+2} - P_{n+1} - 1$$

$$ii) P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2 = (-1)^n, n \geq 1 \dots\dots\dots(1.7)$$

$$iii) P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n \dots\dots\dots(1.8)$$

$$iv) P_{n+m} = P_m P_{n+1} + P_{m-1} P_n \dots\dots\dots(1.9)$$

dir.

### 1.9. Tanım[7]:

$Q_0 = 2$  ve  $Q_1 = 2$  olmak üzere  $n \geq 0$  için

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Pell-Lucas sayıları denir. Bazı Pell-Lucas sayıları

2, 6, 14, 34, 82, 198, ...

şeklindedir.

### 1.10. Teorem[7]:

$Q_n$ , n-inci Pell-Lucas sayısını göstermek üzere,

$$i) \sum_{i=0}^n Q_i = \frac{1}{2}(Q_{n+1} + Q_n - 2)$$

$$ii) Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 = 8(-1)^{n-1}, n \geq 1 \dots\dots\dots(1.10)$$

$$iii) Q_{-n} = (-1)^{-n} Q_n \dots\dots\dots(1.11)$$

$$iv) Q_{m+n} - Q_{m+n-1} = \frac{1}{2}(Q_m Q_n + Q_{m-1} Q_{n-1}) \dots\dots\dots(1.12)$$

dir.

### 1.11. Tanım[8]:

$J_0 = 0$  ve  $J_1 = 1$  olmak üzere  $n \geq 0$  için

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Jacobsthal sayıları denir. Bazı Jacobsthal sayıları

1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, ...

şeklindedir.

### 1.12 Teorem[8]

$J_n$ , n-inci Jacobsthal sayısı olmak üzere,

$$i) \sum_{i=0}^n J_i = \frac{1}{2}(J_{n+2} - 1)$$

$$ii) J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}, n \geq 1 \dots\dots\dots (1.13)$$

$$iii) J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1} J_n}{2^n} \dots\dots\dots (1.14)$$

$$iv) J_{n+m} = J_m J_{n+1} + 2J_{m-1} J_n \dots\dots\dots (1.15)$$

özdeşlikleri elde edilir.

### 1.13. Tanım[9]:

$j_0 = 2$  ve  $j_1 = 1$  olmak üzere  $n \geq 0$  için

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Jacobsthal-Lucas sayıları denir. Bazı Jacobsthal-Lucas sayıları,

1,5,7,17,31,...

şeklindedir.

### 1.14 Teorem[8]:

$j_n$ , n-inci Jacobsthal-Lucas sayısını göstermek üzere,

$$i) \sum_{i=1}^n j_i = \frac{1}{2}(j_{n+2} - 5)$$

$$ii) j_{n-1}j_{n+1} - j_n^2 = 9(-1)^{n+1} 2^{n-1}, n \geq 1 \dots\dots\dots(1.16)$$

$$iii) j_{-n} = \frac{(-1)^n j_n}{2^n} \dots\dots\dots(1.17)$$

$$iv) 2j_{m+n} - j_{m+n-1} = j_m j_n + 2j_{m-1} j_{n-1} \dots\dots\dots(1.18)$$

eşitlikleri elde edilir.

## 2. II. MERTEBEDEN GAUSS İNDİRGEME BAĞINTILARI

### 2.1. Gauss Fibonacci Sayıları

#### 2.1.1. Tanım[4]:

$z = a + ib$ ,  $i = \sqrt{-1}$  ve  $a, b \in \mathbf{Z}$  şeklinde tanımlı kompleks sayılara Gauss sayıları denir.  $N: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+ \cup \{0\}$ ,  $\forall z$  için  $N(z) = N(a + ib) = \sqrt{a^2 + b^2}$  şeklinde tanımlanan ve aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyona norm fonksiyonu denir ve  $N(z) = \|z\|$  şeklinde gösterilir.

$$N1) \|z\| \geq 0$$

$$N2) \|z\| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$N3) \|wz\| = \|w\| \|z\|, w \in \mathcal{F}$$

#### 2.1.2. Tanım[4]:

$f_0 = i$  ve  $f_1 = 1$  ve  $i = \sqrt{-1}$  olmak üzere  $n \geq 2$  için

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Gauss Fibonacci sayıları denir. Bazı Gauss Fibonacci sayıları

$$1, 1+i, 2+i, 3+2i, 5+3i, 8+5i, \dots$$

şeklindedir. Buradan aşağıdaki ilginç eşitliği elde ederiz.

$$f_n = F_n + iF_{n-1} \tag{2.1}$$

ve

$$\|f_n\| = F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$$

dir.

### 2.1.3. Teorem[4]:

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  ve  $f_0 = i$  ve  $f_1 = 1$  olmak üzere

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

dir.

İspat

$n$  üzerinde tümevarımla ispatımızı yapalım. Buna göre;

$f_0 = (1+i) - 1 = i$  olup  $n = 0$  için doğrudur. Şimdi  $n = k$  için doğru olduğunu kabul ederek  $n = k + 1$  için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} f_i &= \sum_{i=0}^k f_i + f_{k+1} \\ &= (f_{k+2} - 1) + f_{k+1} \\ &= f_{k+3} - 1 \end{aligned}$$

olduğundan  $n = k + 1$  için istenilen elde edilmiş olur.

#### 2.1.4. Teorem[4]:

$F_n$ , n-inci Fibonacci sayısını göstermek üzere

$$f_{-n} = (-1)^{n-1} (F_n - iF_{n+1})$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

Eş. 1.2 ve Eş. 2.1 den,

$$f_{-n} = F_{-n} + iF_{-n-1} = (-1)^{n-1} F_n + i(-1)^n F_{n+1} \text{ elde edilir.}$$

#### 2.1.5. Teorem[4]:

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  ve  $f_0 = i$  ve  $f_1 = 1$  olmak üzere  $n \geq 1$  için

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (2-i)(-1)^n$$

dir.

İspat

Eş. 1.1 ve Eş. 2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 &= F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-2}F_n + i(F_{n-1}F_n - F_{n+1}F_{n-2}) - (F_n^2 + 2iF_{n-1}F_n - F_{n-1}^2) \\
&= F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-2}F_n - F_n^2 + F_{n-1}^2 + i(F_{n-1}F_n + F_{n+1}F_{n-2} - 2F_{n-1}F_n) \\
&= (-1)^n - F_{n-2}F_n + F_{n-1}^2 + i(F_{n+1}F_{n-2} - F_{n-1}F_n) \\
&= (-1)^n - (-1)^{n-1} + i((F_n + F_{n-1})(F_n - F_{n-1}) - F_{n-1}F_n) \\
&= (-1)^n - (-1)^{n-1} + i(F_n^2 - F_{n-1}^2 - (F_{n+1} - F_{n-1})F_{n-1}) \\
&= (-1)^n - (-1)^{n-1} + i(F_n^2 - F_{n-1}^2 - F_{n+1}F_{n-1} + F_{n-1}^2) \\
&= (-1)^n - (-1)^{n-1} + i(F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}) \\
&= (-1)^n - (-1)^{n-1} + i((-1)^{n+1}) \\
&= (-1)^n (2-i)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

#### 2.1.6. Teorem[4]:

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ ,  $f_0 = i$ ,  $f_1 = 1$  ve  $F_n$ , n-inci Fibonacci sayısını göstermek üzere,

$$f_{m+1}f_{n+1} + f_m f_n = (1 + 2i)F_{m+n}$$

dir.

İspat

Eş. 1.3 ve Eş. 2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
f_{m+1}f_{n+1} + f_m f_n &= F_{m+1}F_{n+1} - F_m F_n + i(F_m F_{n+1} + F_{m+1}F_n) + F_m F_n - F_{m-1}F_{n-1} + i(F_m F_{n-1} + F_{m-1}F_n) \\
&= F_{m+1}F_{n+1} - F_{m-1}F_{n-1} + i(F_m F_{n+1} + F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} + F_{m-1}F_n) \\
&= (F_m + F_{m-1})F_{n+1} - F_{m-1}F_{n-1} + i(F_m F_{n+1} + F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} + F_{m-1}F_n) \\
&= F_m F_{n+1} + F_{m-1}(F_{n+1} - F_{n-1}) + i(F_m F_{n+1} + F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} + F_{m-1}F_n) \\
&= F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n + i(F_m F_{n+1} + F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} + F_{m-1}F_n) \\
&= F_{m+n} + i(F_m(F_n + F_{n-1}) + (F_m + F_{m-1})F_n + F_m F_{n-1} + F_{m-1}F_n) \\
&= F_{m+n} + i(2F_m F_n + 2F_m F_{n-1} + 2F_{m-1}F_n) \\
&= F_{m+n} + 2i(F_m(F_n + F_{n-1}) + F_{m-1}F_n) \\
&= F_{m+n} + 2iF_{m+n} \\
&= (1 + 2i)F_{m+n}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

### 2.1.7 Sonuç

$$f_n^2 + f_{n+1}^2 = (1 + 2i)F_{2n}$$

### 2.1.8. Sonuç

$$f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 = (1 + 2i)F_{2n-1}$$

### 2.1.9. Lemma.[4]:

$$2m-1 \mid 2n-1 \Rightarrow 2m-1 \mid m+n-1 \text{ dir.} \quad (2.2)$$

### 2.1.10. Teorem [4]:

$$m > 2 \text{ olsun. O halde } f_m \mid f_n \Leftrightarrow 2m-1 \mid 2n-1$$

### İspat

$\Rightarrow$ : Kabul edelim ki  $f_m | f_n$  olsun. O halde  $\|f_m\| \mid \|f_n\|$ , dir.  $\|f_n\| = F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$  olduğundan  $F_{2m-1} | F_{2n-1}$  dir. Eş. 1.4 den  $2m-1 | 2n-1$  elde edilir.

$\Leftarrow$ :  $2m-1 | 2n-1$  olsun. Eş. 1.4 den  $F_{2m-1} | F_{2n-1}$  olduğundan

$\frac{\|f_n\|}{\|f_m\|} = \frac{\|f_n\|}{\|f_m\|} = \frac{F_{2n-1}}{F_{2m-1}}$  pozitif bir tamsayıdır. Eş. 1.3, Eş. 2.1 ve  $F_m^2 + F_{m-1}^2 = F_{2m-1}$

eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{f_m} &= \frac{F_n + iF_{n-1}}{F_m + iF_{m-1}} = \frac{F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} + i(F_{m-1} F_n - F_m F_{n-1})}{F_m^2 + F_{m-1}^2} \\ &= \frac{F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1}}{F_{2m-1}} + i \frac{F_{m-1} F_n - F_m F_{n-1}}{F_{2m-1}} \\ &= \frac{F_{m+n-1}}{F_{2m-1}} + i \frac{F_{m-1} F_n - F_m F_{n-1}}{F_{2m-1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 1.4 ve Eş. 2.2 den  $F_{m+n-1}/F_{2m-1}$  pozitif bir tamsayıdır. Buradan ve

$\|f_n\|/\|f_m\|$  bir tamsayı olduğundan  $\frac{F_{m-1} F_n - F_m F_{n-1}}{F_{2m-1}}$  bir tamsayı olmalıdır. Böylece

$\frac{f_n}{f_m}$  bir Gauss tamsayıdır. Yani  $f_m | f_n$  dir.

#### 2.1.11 Sonuç[4]:

$m > 2$  olsun. O halde  $F_{2m-1} | (F_{m-1} F_n - F_m F_{n-1}) \Leftrightarrow 2m-1 | 2n-1$

## 2.2. Gauss Lucas Sayıları

### 2.2.1. Tanım[4]:

Gauss Lucas sayıları ,

$l_0 = 2 - i$  ve  $l_1 = 1 + 2i$  olmak üzere  $n \geq 2$  için

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Gauss Lucas sayıları,

$$1 + 2i, 3 + i, 4 + 3i, 7 + 4i, 11 + 7i, 18 + 11i, K$$

şeklindedir. Buradan  $L_n$ , n-inci Lucas sayısı olmak üzere aşağıdaki ilginç eşitlik elde edilir.

$$l_n = L_n + iL_{n-1} \text{ dir.}$$

### 2.2.2. Teorem[4]:

$l_n$ , n-inci Lucas sayısı olmak üzere aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\sum_{i=0}^n l_i = l_{n+2} - (1 + 2i)$$

### 2.2.3. Teorem[4]:

$$l_{-n} = (-1)^n (L_n - iL_{n+1})$$

## İspat

Eşitlik (1.5) den

$$l_{-n} = L_{-n} + iL_{-n-1} = (-1)^n L_n + i(-1)^{n+1} L_{n+1} = (-1)^n (L_n - iL_{n+1}) \text{ olduğu kolayca görülür.}$$

### 2.2.4 Teorem[4]:

$l_n$ , n-inci Lucas sayısı olmak üzere,

$$i) l_{n-1}l_{n+1} - l_n^2 = 5(2-i)(-1)^{n+1}$$

$$ii) l_n^2 - 5f_n^2 = 4(2-i)(-1)^n$$

$$iii) l_n, n \geq 2 \text{ için bileşiktir.}$$

özdeşlikleri elde edilir.

### Örnek:

$$l_5 = 11 + 7i = (2-i)(3+5i) \text{ ve buradan } (2-i) \mid (11+7i) \text{ dir.}$$

$$l_{-n} = (-1)^n (L_n - iL_{n+1}) \text{ olduğundan } (2-i) \mid l_{-n}, n \geq 2 \text{ dir.}$$

## 2.3. Gauss Pell Sayıları

### 2.3.1. Tanım

$p_0 = i$  ve  $p_1 = 1$  olmak üzere  $n \geq 2$  için

$$p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Gauss Pell sayıları denir. Bazı Gauss Pell sayıları

$$1, i + 2, 2 + i, 5 + 2i, 12 + 5i, 29 + 12i, \dots$$

şeklindedir. Buradan,

$$p_n = P_n + iP_{n-1} \tag{2.3}$$

olduğu görülür.

### 2.3.2. Teorem

$$\sum_{i=0}^n p_i = \frac{1}{2}(p_{n+1} + p_n + i - 1)$$

İspat

$p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$  eşitliğinden sırası ile

$$p_0 = p_2 - 2p_1$$

$$p_1 = p_3 - 2p_2$$

.

.

$$p_n = p_{n+2} - 2p_{n+1}$$

ifadelerini yazarız. Buradan taraf tarafa toplama işlemi yaparak,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n p_i &= -2p_1 - (p_2 + p_3 + \dots + p_{n+1}) + p_{n+2} \\
 &= -2p_1 - \sum_{i=2}^{n+1} p_i + p_{n+2} \\
 &= -2p_1 - \sum_{i=0}^n p_i + p_0 + p_1 - p_{n+1} + p_{n+2} \\
 2 \sum_{i=0}^n p_i &= -2 + i + 1 - p_{n+1} + 2p_{n+1} + p_n \\
 &= p_{n+1} + p_n + i - 1
 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Son eşitlikten

$$\sum_{i=0}^n p_i = \frac{1}{2} (p_{n+1} + p_n + i - 1)$$

şeklinde istenilen ifade bulunmuş olur.

### 2.3.3. Teorem

$$p_{-n} = (-1)^{n+1} (P_n - iP_{n+1})$$

İspat

Eş. 1.7 ifadesini gözönüne alarak,

$$p_{-n} = P_{-n} + iP_{-n-1} = (-1)^{n+1} P_n + i(-1)^{n+2} P_{n+1} = (-1)^{n+1} (P_n - iP_{n+1}) \text{ buluruz.}$$

### 2.3.4. Teorem

$$p_{n-1}p_{n+1} - p_n^2 = 2(1-i)(-1)^n$$

İspat

Eş. 1.7 ve Eş.2.3 den

$$\begin{aligned}
 p_{n-1}p_{n+1} - p_n^2 &= P_{n-1}P_{n+1} - P_{n-2}P_n + i(P_{n-1}P_n + P_{n+1}P_{n-2} - 2P_nP_{n-1}) - P_n^2 + P_{n-1}^2 \\
 &= P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2 - (P_{n-2}P_n - P_{n-1}^2) + i(P_{n+1}P_{n-2} - P_nP_{n-1}) \\
 &= (-1)^n - (-1)^{n-1} + i((2P_n + P_{n-1})(P_n - 2P_{n-1}) - P_nP_{n-1}) \\
 &= 2(-1)^n + i(2P_n^2 - 4P_nP_{n-1} + P_nP_{n-1} - 2P_{n-1}^2 - P_nP_{n-1}) \\
 &= 2(-1)^n + i(2P_n^2 - 2P_{n-1}^2 - 4P_nP_{n-1}) \\
 &= 2(-1)^n + 2i(P_n^2 - P_{n-1}^2 - 2P_nP_{n-1}) \\
 &= 2(-1)^n + 2i(P_n^2 - P_{n-1}(P_{n-1} + 2P_n)) \\
 &= 2(-1)^n + 2i(-1)^{n+1} \\
 &= 2(-1)^n(1-i)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

### 2.3.5. Teorem

$$p_{m+1}p_{n+1} + p_m p_n = 2(i+1)P_{m+n}$$

İspat

Eş. 1.8 ve Eş. 2.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
p_{m+1}p_{n+1} + p_m p_n &= P_{m+1}P_{n+1} - P_m P_n + i(P_m P_{n+1} + P_{m+1}P_n) + P_m P_n - P_{m-1}P_{n-1} + i(P_m P_{n-1} + P_{m-1}P_n) \\
&= P_{m+1}P_{n+1} - P_{m-1}P_{n-1} + i(P_m P_{n+1} + P_{m+1}P_n + P_m P_{n-1} + P_{m-1}P_n) \\
&= (2P_n + P_{n-1})P_{m+1} - (P_{m+1} - 2P_m)P_{n-1} + i(P_m P_{n+1} + P_{m+1}P_n + P_m P_{n-1} + P_{m-1}P_n) \\
&= 2P_n P_{m+1} + P_{m+1}P_{n-1} - P_{m+1}P_{n-1} + 2P_m P_{n-1} + i(P_m P_{n+1} + P_{m+1}P_n + P_m P_{n-1} + P_{m-1}P_n) \\
&= 2(P_n P_{m+1} + P_m P_{n-1}) + i(P_m (2P_n + P_{n-1}) + (2P_m + P_{m-1})P_n + P_m P_{n-1} + P_{m-1}P_n) \\
&= 2P_{m+n} + i(2P_m P_n + P_m P_{n-1} + P_{m-1}P_n) \\
&= 2P_{m+n} + 2i(P_m P_{n-1} + P_n (2P_m + P_{m-1})) \\
&= 2P_{m+n} + 2i(P_m P_{n-1} + P_n (P_{m+1})) \\
&= 2P_{m+n} + 2iP_{m+n} \\
&= 2(1+i)P_{m+n}
\end{aligned}$$

bulunur.

### 2.3.6. Sonuç

$$p_n^2 + p_{n+1}^2 = 2(1+i)P_{2n}$$

### 2.3.7. Sonuç

$$p_{n+1}^2 - p_n^2 = 4(1+i)P_{2n-1}$$

## 2.4 Gauss Pell-Lucas Sayıları

### 2.4.1. Tanım

$q_0 = 2 - 2i$  ve  $q_1 = 2 + 2i$  olmak üzere  $n \geq 2$  için

$$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Gauss Pell-Lucas sayıları denir. Bazı Gauss Pell-Lucas sayıları

$$2i + 2, 6 + 2i, 14 + 6i, 34 + 14i, \dots$$

şeklindedir.

Ayrıca,  $Q_n$  n-inci Pell-Lucas sayısını göstermek üzere,

$$q_n = Q_n + iQ_{n-1} \quad (2.4)$$

dir.

### 2.4.2. Teorem

$q_n$  n-inci Gauss Pell-Lucas sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=0}^n q_i = \frac{1}{2}(q_{n+2} - q_{n+1} - 4i)$$

dir.

İspat

$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$  ifadesini gözönüne alarak,

$$q_0 = q_2 - 2q_1$$

$$q_1 = q_3 - 2q_2$$

$$q_2 = q_4 - 2q_3$$

.

.

.

.

.

$$q_n = q_{n+2} - 2q_{n+1}$$

eşitliklerini yazınız. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplayarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n q_i &= -2q_1 - (q_2 + q_3 + \dots + q_{n+1}) + q_{n+2} \\ &= -2q_1 - \sum_{i=2}^{n+1} q_i + q_{n+2} \\ &= -2q_1 - \sum_{i=0}^n q_i + q_0 + q_1 - q_{n+1} + q_{n+2} \quad \text{ve buradan ;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=0}^n q_i &= q_0 - q_1 - q_{n+1} + q_{n+2} \\ &= (2-2i) - (2+2i) - q_{n+1} + q_{n+2} \\ &= q_{n+2} - q_{n+1} - 4i \end{aligned}$$

eşitliğini, dolayısı ile buradan da

$$\sum_{i=0}^n q_i = \frac{1}{2} (q_{n+2} - q_{n+1} - 4i)$$

ifadesini elde ederiz.

### 2.4.3. Teorem

$q_n$  n-inci Gauss Pell-Lucas sayısını göstermek üzere

$$q_{n-1}q_{n+1} - q_n^2 = 8(-1)^{n-1}$$

dir.

İspat

Eş. 1.9 ve Eş. 2.4 den

$$\begin{aligned} q_{n-1}q_{n+1} - q_n^2 &= Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_{n-2}Q_n + i(Q_{n-1}Q_n + Q_{n+1}Q_{n-2} - 2Q_nQ_{n-1}) - Q_n^2 + Q_{n-1}^2 \\ &= Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 - (Q_{n-2}Q_n - Q_{n-1}^2) + i(Q_{n+1}Q_{n-2} - Q_nQ_{n-1}) \\ &= 8(-1)^{n-1} - 8(-1)^{n-2} + i((2Q_n + Q_{n-1})(Q_n - 2Q_{n-1}) - Q_nQ_{n-1}) \\ &= 16(-1)^{n-1} + i(2Q_n^2 - 2Q_{n-1}^2 - 4Q_nQ_{n-1}) \\ &= 16(-1)^{n-1} + 2i(Q_n^2 - Q_{n-1}(Q_{n-1} + 2Q_n)) \\ &= 16(-1)^{n-1} + 2i(Q_n^2 - Q_{n-1}Q_{n+1}) \\ &= 16(-1)^{n-1} + 2i.8(-1)^n \\ &= 16(-1)^{n-1}(1-i) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen ispatlanmış olur.

### 2.4.4. Teorem

$$q_{-n} = (-1)^{-n} (Q_n - iQ_{n+1})$$

İspat

$Q_n$  n-inci Pell-Lucas sayısını göstermek üzere.,Eş. 1.10 dan,

$$q_{-n} = Q_{-n} + iQ_{-n-1} = (-1)^{-n} Q_n + i(-1)^{-n-1} Q_{n+1} = (-1)^{-n} (Q_n - iQ_{n+1}) \text{ bulunur.}$$

#### 2.4.5. Teorem

$Q_n$  n-inci Pell-Lucas sayısını göstermek üzere,

$$q_m q_n + q_{m-1} q_{n-1} = Q_{m+n} (-4 - 4i) + Q_{m+n-1} (12 + 12i)$$

dir.

#### 2.4.6. Sonuç

$Q_n$  n-inci Pell-Lucas sayısı olmak üzere,

$$q_n^2 + q_{n-1}^2 = Q_{2n} (-4 - 4i) + Q_{2n-1} (12 + 12i)$$

dir.

## 2.5. Gauss Jacobsthal Sayıları

### 2.5.1. Tanım

Gauss Jacobsthal sayıları ,

$\mathfrak{J}_0 = \frac{i}{2}$  ve  $\mathfrak{J}_1 = 1$  olmak üzere  $n \geq 2$  için

$$\mathfrak{J}_n = \mathfrak{J}_{n-1} + 2\mathfrak{J}_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Jacobsthal sayıları

$$1, i+1, 3+i, 5+3i, 11+5i, 21+11i, K$$

şeklindedir.

Ayrıca ,  $J_n$  n-inci Jacobsthal sayısını göstermek üzere,

$$\mathfrak{J}_n = J_n + iJ_{n-1} \tag{2.5}$$

dir.

### 2.5.2. Teorem

$J_n$  n-inci Jacobsthal sayısını göstermek üzere ,

$$\mathfrak{J}_{-n} = (-1)^{-n} 2^{-n} \left( -J_n + \frac{i}{2} J_{n+1} \right)$$

elde edilir.

İspat

Eş.1.14 ve Eş. 2.5 den

$$\mathfrak{I}_{-n} = J_{-n} + iJ_{-n-1} = (-1)^{1-n} 2^{-n} J_n + i(-1)^{-n} 2^{-n-1} J_{n+1} = (-1)^{-n} 2^{-n} \left( -J_n + \frac{i}{2} J_{n+1} \right)$$

elde edilir.

### 2.5.3. Teorem

$\mathfrak{I}_n$  n-inci Gauss Jacobsthal sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=0}^n \mathfrak{I}_i = \frac{1}{2} (\mathfrak{I}_{n+2} - 1)$$

dir.

İspat

$\mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}_{n-1} + 2\mathfrak{I}_{n-2}$  eşitliği gözönüne alınarak,

$$\mathfrak{I}_0 = \frac{1}{2} (\mathfrak{I}_2 - \mathfrak{I}_1)$$

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{2} (\mathfrak{I}_3 - \mathfrak{I}_2)$$

.

.

.

$$\mathfrak{I}_n = \frac{1}{2} (\mathfrak{I}_{n+2} - \mathfrak{I}_{n+1})$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \mathfrak{S}_i &= \frac{1}{2}(-\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_{n+2}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_{n+2} - 1)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

#### 2.5.4. Teorem

$$\mathfrak{S}_{n-1}\mathfrak{S}_{n+1} - \mathfrak{S}_n^2 = 2^{n-2}(3-i)(-1)^n$$

İspat

Eş. 1.16 ve Eş. 2.5 den

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{n-1}\mathfrak{S}_{n+1} - \mathfrak{S}_n^2 &= J_{n-1}J_{n+1} - J_{n-2}J_n + i(J_{n-1}J_n + J_{n+1}J_{n-2} - 2J_nJ_{n-1}) - J_n^2 + J_{n-1}^2 \\
&= J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 - (J_{n-2}J_n - J_{n-1}^2) + i(J_{n+1}J_{n-2} - J_nJ_{n-1}) \\
&= (-1)^n 2^{n-1} - (-1)^{n-1} 2^{n-2} + i\left(\frac{1}{2}(J_n + 2J_{n-1})(J_n - J_{n-1}) - J_nJ_{n-1}\right) \\
&= (-1)^n 2^{n-1} - (-1)^{n-1} 2^{n-2} + \frac{i}{2}(J_n^2 - J_nJ_{n-1} - 2J_{n-1}^2) \\
&= (-1)^n 2^{n-1} - (-1)^{n-1} 2^{n-2} + \frac{i}{2}(J_n^2 - (J_n + 2J_{n-1})J_{n-1}) \\
&= (-1)^n 2^{n-1} - (-1)^{n-1} 2^{n-2} + \frac{i}{2}(-1)^{n+1} 2^{n-1} \\
&= (-1)^n 2^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \\
&= (-1)^n 2^{n-2} (3-i)
\end{aligned}$$

elde edilir.

### 2.5.5. Teorem

$J_n$  n-inci Jacobsthal sayısını göstermek üzere,

$$\mathfrak{J}_m \mathfrak{J}_{n+1} + 2\mathfrak{J}_{m-1} \mathfrak{J}_n = J_{m+n} \left( \frac{1}{4} - i \right) + J_{m+n+1} \left( \frac{1}{4} + i \right)$$

dir.

İspat

Eş. 1.15 ve Eş. 2.5 den,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_m \mathfrak{J}_{n+1} + 2\mathfrak{J}_{m-1} \mathfrak{J}_n &= J_m J_{n+1} + 2J_{m-1} J_n - (J_{m-1} J_n + 2J_{m-2} J_{n-1}) + i(J_{m-1} J_{n+1} + J_m J_n + 2J_{m-1} J_{n-1} + 2J_{m-2} J_n) \\ &= J_{m+n} - J_{m+n-2} + 2iJ_{m+n-1} \\ &= J_{m+n} - \frac{1}{2}(J_{m+n} - J_{m+n-1}) + 2iJ_{m+n-1} \\ &= \frac{1}{2}J_{m+n} + \frac{1}{2}J_{m+n-1} + 2iJ_{m+n-1} \\ &= \frac{1}{2} \left( J_{m+n} + \frac{1}{2}(J_{m+n+1} - J_{m+n}) \right) + 2i \frac{1}{2}(J_{m+n+1} - J_{m+n}) \\ &= \left( \frac{1}{4} - i \right) J_{m+n} + \left( \frac{1}{4} + i \right) J_{m+n+1} \end{aligned}$$

yazarız. Böylece teorem ispatlanmış olur.

## 2.6. Gauss Jacobsthal-Lucas Sayıları

### 2.6.1. Tanım

Gauss Jacobsthal-Lucas sayıları ,

$$\tau_0 = 2 - \frac{i}{2} \text{ ve } \tau_1 = 1 + 2i \text{ olmak üzere } n \geq 2 \text{ için}$$

$$\tau_n = \tau_{n-1} + 2\tau_{n-2}$$

şeklinde tanımlanır. Bazı Jacobsthal-Lucas sayıları

$$1 + 2i, 5 + i, 7 + 5i, 17 + 7i, K$$

şeklindedir. Ayrıca ,  $j_n$  n-inci Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere

$$\tau_n = j_n + ij_{n-1} \tag{2.6}$$

şeklindedir.

### 2.6.2. Teorem

$j_n$  n-inci Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere ,

$$\tau_{-n} = (-2)^{-n} \left( j_n - \frac{i}{2} j_{n+1} \right)$$

dir.

İspat

Eş. 1.16 ve Eş. 2.6 dan

$$\tau_{-n} = j_{-n} + ij_{-n-1} = (-2)^{-n} j_n + i(-2)^{-n-1} j_{n+1} = (-2)^{-n} \left( j_n - \frac{i}{2} j_{n+1} \right) \text{ bulunur.}$$

### 2.6.3. Teorem

$\tau_n$ , n-inci Gauss Jacobsthal-Lucas sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=0}^n \tau_i = \frac{1}{2} (\tau_{n+2} - (1 + 2i))$$

dir.

İspat

$\tau_n = \tau_{n-1} + 2\tau_{n-2}$  eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\tau_0 = \frac{1}{2} (\tau_2 - \tau_1)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{2} (\tau_3 - \tau_2)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2} (\tau_4 - \tau_3)$$

.

.

.

.

.

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\tau_{n+2} - \tau_{n+1})$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \tau_i &= \frac{1}{2}(-\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_{n+2}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathfrak{T}_{n+2} - (1 + 2i))
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

#### 2.6.4. Teorem

$\tau_n$ , n-inci Gauss Jacobsthal-Lucas sayısını göstermek üzere

$$\tau_{n-1}\tau_{n+1} - \tau_n^2 = 9(-1)^{n+1} 2^{n-2} (3-i)$$

dir.

İspat

Eş. 1.16 ve Eş.2.6 eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\tau_{n-1}\tau_{n+1} - \tau_n^2 &= j_{n-1}j_{n+1} - j_{n-2}j_n + i(j_{n-1}j_n + j_{n+1}j_{n-2} - 2j_nj_{n-1}) - j_n^2 + j_{n-1}^2 \\
&= j_{n-1}j_{n+1} - j_n^2 - (j_{n-2}j_n - j_{n-1}^2) + i(j_{n+1}j_{n-2} - j_nj_{n-1}) \\
&= 9(-1)^{n+1} 2^{n-1} - 9(-1)^n 2^{n-2} + i\left(j_{n+1} \frac{1}{2}(j_n - j_{n-1}) - j_nj_{n-1}\right) \\
&= 9(-1)^{n+1} 2^{n-1} - 9(-1)^n 2^{n-2} + i\left(\frac{1}{2}j_{n+1}j_n - \frac{1}{2}j_{n+1}j_{n-1} - j_nj_{n-1}\right) \\
&= 9(-1)^{n+1} 2^{n-1} - 9(-1)^n 2^{n-2} + i\left(\frac{1}{2}(j_n + 2j_{n-1})j_n - \frac{1}{2}j_{n+1}j_{n-1} - j_nj_{n-1}\right) \\
&= 9(-1)^{n+1} 2^{n-1} - 9(-1)^n 2^{n-2} + i\left(\frac{1}{2}j_n^2 - \frac{1}{2}j_{n+1}j_{n-1}\right) \\
&= 9(-1)^{n+1} 2^{n-1} - 9(-1)^n 2^{n-2} - \frac{i}{2}9(-1)^{n+1} 2^{n-1} \\
&= 9(-1)^{n+1} 2^{n-2} (3-i)
\end{aligned}$$

yazarız. Bu da teoremi ispatlar.

### 2.6.5. Teorem

$j_n$  n-inci Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere

$$\tau_m \tau_n + 2\tau_{m-1} \tau_{n-1} = j_{m+n} \left( \frac{3}{4} - i \right) + j_{m+n-1} \left( \frac{3}{4} + 5i \right)$$

dir

### 2.6.6. Sonuç

$j_n$  n-inci Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere

$$\tau_n^2 + 2\tau_{n-1}^2 = j_{2n} \left( \frac{3}{4} - i \right) + j_{2n-1} \left( \frac{3}{4} + 5i \right)$$

dir.

### 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ $W_n(a, b; p, q)$ DİZİSİ

Bu bölümde genelleştirilmiş  $\{W_n(a, b; p, q)\}$  indirgeme dizisi ve bu diziler ile ilgili tanım ve teoremler verildi.

#### 3.1. Tanım[6]:

$W_0 = a$  ve  $W_1 = b$  olmak üzere

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı diziye Genelleştirilmiş  $\{W_n(a, b; p, q)\}$  dizisi denir. Bu dizinin bazı terimleri

$$b, pb - qa, p^2b - pqa, K$$

şeklindedir.

#### 3.2. Tanım[6]:

$u_0 = 0$  ve  $u_1 = 1$  olmak üzere

$$u_{n+2} = pu_{n+1} - qu_n$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı diziye  $\{u_n(p, q)\}$  dizisi denir. Ayrıca,

$$u_n(p, q) = W_n(0, 1; p, q) \text{ dır.}$$

**3.3. Teorem[10]:**

$$\sum_{i=0}^{n-1} W_i = \frac{1}{p-q-1} (W_{n+1} - W_1 - (p-1)(W_n - W_0))$$

**3.4. Teorem[10]:**

$$W_{n-1}W_{n+1} - W_n^2 = q^{n-1} (pab - qa^2 - b^2) \quad (3.1)$$

**3.5. Teorem[10]:**

$$W_{-n} = q^{-n} \frac{(au_n - bu_{n-1})}{au_n + (b - pa)u_{n-1}} W_n \quad (3.2)$$

**3.6. Teorem[10]:**

$$aW_{m+n} + (b - pa)W_{m+n-1} = W_m W_n - qW_{m-1}W_{n-1} \quad (3.3)$$

#### 4. GAUSS GENELLEŞTİRİLMİŞ $w_n(a, b; p, q)$ DİZİSİ

Bu bölümde Horadam tarafından verilen  $\{W_n(a, b; p, q)\}$  dizisi Gauss  $\{w_n(a, b; p, q)\}$  dizisine genelleştirilmiştir.

##### 4.1. Tanım

$w_0 = a + i \frac{ap-b}{q}$  ve  $w_1 = b + ia$  olmak üzere

$$w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n \quad (4.1)$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı diziye Gauss Genelleştirilmiş  $\{w_n(a, b; p, q)\}$  dizisi denir. Ayrıca

$$w_n = W_n + iW_{n-1} \quad (4.2)$$

dir.

##### 4.2. Teorem

$$\sum_{i=0}^n w_i = \frac{1}{q-p+1} (-W_{n+2} + (p-1)W_{n+1}) + \frac{a+b-pa}{q-p+1} + i \frac{(p-1)(b-pa) + qa}{q^2}$$

İspat

Eş. 4.1 den

$$\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{q}(pw_1 - w_2) \\
w_1 &= \frac{1}{q}(pw_2 - w_3) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
w_n &= \frac{1}{q}(pw_{n+1} - w_{n+2})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırrsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n w_i &= \frac{1}{q}(pw_1 + (p-1)(w_2 + w_3 + \dots + w_{n+1}) - w_{n+2}) \\
&= \frac{(p-1)}{q} \left( \sum_{i=2}^{n+1} w_i \right) + \frac{p}{q}(b+ia) - \frac{1}{q}w_{n+2} \\
&= \frac{(p-1)}{q} \left( \sum_{i=0}^n w_i - a - \frac{i}{q}(ap-b) - b - ia + w_{n+1} \right) + \frac{p}{q}(b+ia) - \frac{1}{q}w_{n+2} \\
&= \frac{p}{q}b - \frac{(p-1)}{q}(a+b) + \frac{(p-1)}{q}w_{n+1} + \frac{(p-1)}{q} \sum_{i=0}^n w_i - \frac{1}{q}w_{n+2} + i \left( \frac{(p-1)}{q} \left( \frac{(b-ap)}{q} - a \right) + \frac{p}{q}a \right) \\
\sum_{i=0}^n w_i - \frac{(p-1)}{q} \sum_{i=0}^n w_i &= \frac{p}{q}b - \frac{(p-1)}{q}(a+b) + \frac{(p-1)}{q}w_{n+1} - \frac{1}{q}w_{n+2} + i \left( \frac{(p-1)}{q} \left( \frac{(b-ap)}{q} - a \right) + \frac{p}{q}a \right) \\
\sum_{i=0}^n w_i &= \frac{q}{q-p+1} \left[ \left( \frac{p}{q}b - \frac{(p-1)}{q}(a+b) + \frac{(p-1)}{q}w_{n+1} - \frac{1}{q}w_{n+2} \right) + i \left( \frac{(p-1)}{q} \left( \frac{(b-ap)}{q} - a \right) + \frac{p}{q}a \right) \right] \\
&= \frac{1}{q-p+1} (-w_{n+2} + (p-1)w_{n+1}) + \frac{a+b-pa}{q-p+1} + i \frac{(p-1)(b-pa)+qa}{q^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

### 4.3. Teorem

$$w_{n-1}w_{n+1} - w_n^2 = (pab - qa^2 - b^2)q^{n-2}(q-1+ip)$$

İspat

Eş. 3.1 ve Eş. 4.2 den,

$$\begin{aligned}
w_{n-1}w_{n+1} - w_n^2 &= w_{n-1}w_{n+1} - w_{n-2}w_n + i(w_{n-1}w_n + w_{n+1}w_{n-2} - 2w_nw_{n-1}) - w_n^2 + w_{n-1}^2 \\
&= w_{n-1}w_{n+1} - w_n^2 - (w_{n-2}w_n - w_{n-1}^2) + i(w_{n+1}w_{n-2} - w_nw_{n-1}) \\
&= q^{n-1}(pab - qa^2 - b^2) - q^{n-2}(pab - qa^2 - b^2) + i \left[ \frac{1}{q}(pw_n - qw_{n-1})(pw_{n-1} - w_n) - w_nw_{n-1} \right] \\
&= (pab - qa^2 - b^2)(q^{n-1} - q^{n-2}) + i \left( \frac{1}{q}(p^2w_nw_{n-1} - pw_n^2 - pqw_{n-1}^2 + qw_nw_{n-1}) - w_nw_{n-1} \right) \\
&= (pab - qa^2 - b^2)(q^{n-1} - q^{n-2}) + i \left( \frac{p^2}{q}w_nw_{n-1} - \frac{p}{q}w_n^2 - pw_{n-1}^2 \right) \\
&= (pab - qa^2 - b^2)(q^{n-1} - q^{n-2}) + i \left( \frac{p^2}{q} \frac{1}{p}(w_{n+1} + qw_{n-1})w_{n-1} - \frac{p}{q}w_n^2 - pw_{n-1}^2 \right) \\
&= (pab - qa^2 - b^2)(q^{n-1} - q^{n-2}) + i \frac{p}{q}(w_{n+1}w_{n-1} - w_n^2) \\
&= (pab - qa^2 - b^2)(q^{n-1} - q^{n-2}) + i \frac{p}{q}(pab - qa^2 - b^2)q^{n-1} \\
&= (pab - qa^2 - b^2) \left( q^{n-1} - q^{n-2} + i \frac{p}{q}q^{n-1} \right) \\
&= (pab - qa^2 - b^2)q^{n-2}(q - 1 + ip)
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.4. Teorem

$$w_{-n} = q^{-n} \left( \frac{(au_n - bu_{n-1})}{au_n + (b - pa)u_{n-1}} W_n + i \frac{(au_{n+1} - bu_n)}{q(au_{n+1} + (b - pa)u_n)} W_{n+1} \right)$$

İspat

Eş. 3.2 ve Eş. 4.2 den,

$$\begin{aligned}
w_{-n} &= W_{-n} + iW_{-n-1} = q^{-n} \frac{(au_n - bu_{n-1})}{au_n + (b-pa)u_{n-1}} W_n + iq^{-n-1} \frac{(au_{n+1} - bu_n)}{au_{n+1} + (b-pa)u_n} W_{n+1} \\
&= q^{-n} \left( \frac{(au_n - bu_{n-1})}{au_n + (b-pa)u_{n-1}} W_n + i \frac{(au_{n+1} - bu_n)}{q(au_{n+1} + (b-pa)u_n)} W_{n+1} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.5. Teorem

$$w_m w_n - q w_{m-1} w_{n-1} = W_{m+n} \left( \frac{aq^2 + aq + p(b-pa)}{q^2} - 2i \frac{(b-pa)}{q} \right) + W_{m+n-1} \left( \frac{(pa-b)(p^2-q) + (b-pa)q - ap}{q} + 2i \left( a + \frac{p}{q} \right) (b-pa) \right)$$

İspat

Eş. 3.3 ve Eş. 4.2 yi kullanarak,

$$\begin{aligned}
w_m w_n - q w_{m-1} w_{n-1} &= W_m W_n - W_{m-1} W_{n-1} + i(W_{m-1} W_n + W_m W_{n-1}) - q(W_{m-1} W_{n-1} - W_{m-2} W_{n-2} + i(W_{m-2} W_{n-1} + W_{m-1} W_{n-2})) \\
&= W_m W_n - W_{m-1} W_{n-1} - q W_{m-1} W_{n-1} + q W_{m-2} W_{n-2} + i(W_{m-1} W_n + W_m W_{n-1} - q W_{m-2} W_{n-1} - q W_{m-1} W_{n-2}) \\
&= (W_m W_n - q W_{m-1} W_{n-1}) - (W_{m-1} W_{n-1} - q W_{m-2} W_{n-2}) + i(W_{m-1} W_n - q W_{m-2} W_{n-1} + W_m W_{n-1} - q W_{m-1} W_{n-2}) \\
&= a W_{m+n} + (b-pa) W_{m+n-1} - a W_{m+n-2} - (b-pa) W_{m+n-3} + 2i(a W_{m+n-1} + (b-pa) W_{m+n-2}) \\
&= a W_{m+n} + (b-pa) W_{m+n-1} - \frac{a}{q} (p W_{m+n-1} - W_{m+n}) - \frac{(b-pa)}{q} (p W_{m+n-2} - W_{m+n-1}) + 2i(a W_{m+n-1} + (b-pa) W_{m+n-2}) \\
&= a W_{m+n} + (b-pa) W_{m+n-1} - \frac{a}{q} (p W_{m+n-1} - W_{m+n}) - \frac{(b-pa)}{q} \left( p \left( \frac{1}{q} (p W_{m+n-1} - W_{m+n}) \right) - W_{m+n-1} \right) + 2i(a W_{m+n-1} + (b-pa) W_{m+n-2}) \\
&= a W_{m+n} + (b-pa) W_{m+n-1} - \frac{a}{q} (p W_{m+n-1} - W_{m+n}) - \frac{(b-pa)}{q} \left( \frac{p^2}{q} W_{m+n-1} - \frac{p}{q} W_{m+n} - W_{m+n-1} \right) + 2i(a W_{m+n-1} + (b-pa) W_{m+n-2}) \\
&= W_{m+n} \left( a + \frac{a}{q} + \frac{p}{q^2} (b-pa) \right) + W_{m+n-1} \left( \frac{(b-pa)}{q} \left( \frac{p^2}{q} - 1 \right) + (b-pa) - a \frac{p}{q} \right) + 2i(a W_{m+n-1} + (b-pa) W_{m+n-2}) \\
&= W_{m+n} \left( a + \frac{a}{q} + \frac{p}{q^2} (b-pa) - 2i \frac{(b-pa)}{q} \right) + W_{m+n-1} \left( \frac{(pa-b)}{q} \left( \frac{p^2}{q} - 1 \right) + (b-pa) - \frac{a}{q} p + 2i \left( a + \frac{p}{q} \right) (b-pa) \right)
\end{aligned}$$

yazarız. Böylece teorem ispatlanmış olur.

## KAYNAKLAR

1. Vorob'yev, N.N., "Fibonacci Numbers", **Blaisdell**, Newyork, 1-176 (1961).
2. Dunlop, R.A., "The Golden Ratio and Fibonacci Numbers", **World Scientific**, Singapure, 1-13 (1997).
3. Vajda, S., "Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section", Theory and Application, **Ellis Horwood Limited**, 1-50 (1989).
4. Koshy,T., "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", **John Wiley&Sons**, Newyork, 69-100, 518-522 (2001).
5. Hoggatt, V.E.Jr., "Fibonacci and Lucas Numbers", **Houghton-Mifflin**, Boston, 1-65 (1969).
6. Horadam, A.F., "Pell Identities", **Fibonacci Quarterly**, 9 (3): 245-252 (1971).
7. Horadam, A.F., Mahon, J.M., "Pell and Pell-Lucas Polynomials", **Fibonacci Quarterly**, 23 (1): 7-20 (1985).
8. Cerin, Z., "Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers", **Journal of Integer Sequences**, Vol 10, 07.2.5 (2007).
9. Horadam, A.F., "Jacobsthal Representation Numbers", **Fibonacci Quarterly**, 40-54 (1996).
10. Horadam, A.F., "Basic Properties of the Sequence  $w_n(a,b;p,q)$ ", **Fibonacci Quarterly**, 5 (5): 424-434 (1967).
11. Silva, A., Hoggatt, V.E.Jr., "Generalized Fibonacci Numbers", **Fibonacci Quarterly**, 18(4): 290-300 (1980).

12. Horadam, A.F., "A Generalized Fibonacci Sequence", *The Americal Mathematical Monthly*, 68 (5): 455-459 (1961).
13. Horadam, A.F., "Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions", *The Americal Mathematical Monthly*, 70: 289-291 (1963).
14. G.Berzsenyi, "Gaussian Fibonacci Numbers", *Fibonacci Quarterly*, 15: 233-236 (1977).
15. S.Pethe, Horadam A.F., "Generalized Gaussian Fibonacci Numbers", *Bull. Austral. Math. Soc.*, 33: 37-48 (1986).
16. Hoggatt, V.E., Bicknell, M., "Some New Fibonacci Identities", *Fibonacci Quarterly*, 2 (1): 29-32 (1964).
17. Sun Zhi-H., "Expansions and Identities Concerning Lucas Sequences", *Fibonacci Quarterly* 44 (2) 145-153 (2006).
18. Melham, R.S., Shannon, A.G., "On Reciprocal Sums Of Second Order Sequences", *Applications Of Fibonacci Numbers*, 6: 355-364 (1996).
19. Jarden,D., "Recurring Sequences", Riveon Lematematika, *Jerusalem*, (1966)

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : ÖZKAN, Gül  
 Uyruğu : T.C.  
 Doğum tarihi ve yeri : 27.01.1987 ALTINDAĞ  
 Medeni hali : Bekar  
 Telefon : 0 (554) 875 94 97  
 e-mail : gulozkan@gazi.edu.tr

### Eğitim

| Derece | Eğitim Birimi                                                   | Mezuniyet tarihi |
|--------|-----------------------------------------------------------------|------------------|
| Lisans | Gazi Üniversitesi<br>Fen-Edebiyat Fakültesi<br>Matematik Bölümü | 2008             |
| Lise   | Ankara Anadolu Lisesi Ankara                                    | 2004             |

### İş Deneyimi

| Yıl       | Yer                           | Görev               |
|-----------|-------------------------------|---------------------|
| 2010-     | Gazi Üniversitesi             | Araştırma Görevlisi |
| 2009-2010 | Süleyman Demirel Üniversitesi | Araştırma Görevlisi |

### Yabancı Dil

Almanca, İngilizce

### Hobiler

Doğa yürüyüşü, fotoğrafçılık