

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OLASILIKSAL METRİK UZAYLARDA YENİ BİR
YAKINSAKLIK

Fulya ÖZTÜRK

Danışman
Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

II.Danışman
Doç. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN

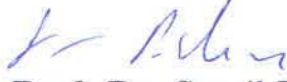
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2014

© 2014 [Fulya ÖZTÜRK]

TEZ ONAYI

Fulya ÖZTÜRK tarafından hazırlanan “Olasılıksal Metrik Uzaylarda Yeni Bir Yakınsaklık” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman


Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN
Süleyman Demirel Üniversitesi

II. Danışman

Doç. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

Jüri Üyesi


Prof. Dr. Salih AYTAR
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Yusuf CİVAN
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi


Yrd. Doç. Dr. Mutlu GÜLOĞLU
Akdeniz Üniversitesi

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Ahmet ŞAHİNER

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Fulya ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. TEMEL KAVRAMLAR	5
3.1. Dağılım Fonksiyonları ve Olasılıksal Metrik Uzaylar	5
3.2. Olasılıksal Normlu Uzaylar	8
3.3. İstatistiksel Yakınsaklık ve İdeal Yakınsaklık	11
3.4. Olasılıksal Normlu Uzaylarda Kuvvetli İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli İdeal Yakınsaklık	13
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	16
4.1. Olasılıksal Normlu Uzaylarda Kuvvetli İdeal Yığılma Noktalarının Bazı Özellikleri ve Kuvvetli Γ –İdeal Yakınsaklık	16
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	24
KAYNAKLAR	25
ÖZGEÇMİŞ	27

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

OLASILIKSAL METRİK UZAYLARDA YENİ BİR YAKINSAKLIK

Fulya ÖZTÜRK

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

II. Danışman: Doç. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN

Bu tez çalışmasında, olasılıksal metrik uzaylarda bir noktanın, bir kümeye olan olasılıksal uzaklığı kavramından yola çıkılarak yeni bir yakınsaklık tanımlanmıştır. Olasılıksal metrik uzaylar üzerinde çeşitli topolojiler tanımlanabilir ancak yapısal özelliği nedeniyle kuvvetli topoloji en uygun olanı olduğundan, kuvvetli topoloji kavramına dayanan, kuvvetli Γ -ideal yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve bu kavrama ilişkin bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, olasılıksal normlu uzaylarda bir dizinin kuvvetli ideal yığılma noktaları kümesinin bazı özellikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde, konunun amacı ve kapsamı hakkında bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, konunun tarihsel gelişimine ve literatür özetine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak, konunun temelini oluşturan dağılım fonksiyonları ve olasılıksal metrik uzay teorisi incelenmiştir. İkinci olarak, olasılıksal metrik uzayların özel biçimleri olan, olasılıksal normlu uzay teorisine ilişkin temel bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü olarak, istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramlarına ilişkin temel bilgiler incelenmiştir. Son olarak, olasılıksal normlu uzaylarda kuvvetli istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli ideal yakınsaklık kavramları hatırlatılarak bu kavramların temel özelliklerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, olasılıksal normlu uzaylar üzerinde ideal D -sınırlılık kavramı tanımlanmış ve bu tip bir uzayda yer alan bir dizinin kuvvetli ideal yığılma noktaları kümesinin bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, olasılıksal normlu uzaylar üzerinde kuvvetli Γ -ideal yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve bu yeni yakınsaklık kavramına ilişkin bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Olasılıksal metrik uzay; olasılıksal normlu uzay; kuvvetli ideal yığılma noktası; ideal D -sınırlı dizi; kuvvetli Γ -ideal yakınsaklık.

2014, 27 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

A NEW TYPE OF CONVERGENCE IN PROBABILISTIC METRIC SPACES

Fulya ÖZTÜRK

Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN

In this thesis, starting from the concept of probabilistic distance from a point to a set in a probabilistic metric space, a new type of convergence is introduced. Although different topologies can be defined on a probabilistic metric space, the strong topology is the most admissible one because of its structure; hence the concept of strong Γ -ideal convergence is introduced via the strong topology, and some basic results are obtained. Moreover, some properties of the set of all strong ideal cluster points of a sequence in a probabilistic normed space are investigated.

In the first chapter, the aim and scope of the subject are presented.

In the second chapter, the historical background and the literature review of the subject are presented.

In the third chapter, first, the distribution functions and probabilistic metric spaces are considered. Second, some basic concepts from the theory of probabilistic normed spaces which is the special form of the theory of probabilistic metric spaces are presented. Third, some preliminaries related to the concepts of statistical convergence and ideal convergence are considered. Finally, the concepts of strong statistical convergence and strong ideal convergence in probabilistic normed spaces are recalled, and their basic properties are considered.

In the fourth chapter, the concept of ideal D -boundedness is introduced in a probabilistic normed space, and some properties of the set of all strong ideal cluster points of a sequence in such a space are investigated. Furthermore, the concept of strong Γ -ideal convergence in a probabilistic normed space is introduced and some basic results related to this concept are obtained.

Keywords: Probabilistic metric space; probabilistic normed space; strong ideal cluster point; ideal D -bounded sequence; strong Γ -ideal convergence.

2014, 27 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan ve beni daima yüreklendiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN'a ve önerilerini benden esirgemeyen Doç. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Aynı zamanda maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Fulya ÖZTÜRK
ISPARTA, 2014

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\overline{A}$	A kümesinin kuvvetli kapanışı
d_L	Değiştirilmiş Lévy metriği
Δ	Dağılım fonksiyonları kümesi
Δ^+	Uzaklık dağılım fonksiyonları kümesi
$\delta(K)$	Pozitif tamsayıların bir K kümesinin doğal yoğunluğu
$\bar{\delta}(K)$	Pozitif tamsayıların bir K kümesinin üst asimptotik yoğunluğu
ε_a	$x = a$ noktasındaki birim basamak fonksiyonu
F, G	Dağılım fonksiyonları
F_{pq}	p ve q noktaları arasındaki uzaklığı gösteren dağılım fonksiyonu
$F_{p,A}$	p noktasının A kümesine olan olasılıksal uzaklığı
$\mathcal{F}$	Bir kümenin alt kümelerinin bir süzgeci (filtresi)
$\mathcal{F}_d$	1 yoğunluklu pozitif tamsayı kümelerinin oluşturduğu süzgeç
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	Bir $\mathcal{I}$ idealine ilişkin süzgeç
$\mathfrak{F}$	Olasılıksal metrik
$\Gamma(x_k)$	(x_k) reel dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi
$\Gamma_s(p_k)$	(p_k) dizisinin kuvvetli istatistiksel yığılma noktalarının kümesi
$\mathcal{I}$	Bir kümenin alt kümelerinin bir ideali
$\mathcal{I}_d$	Sıfır yoğunluklu pozitif tamsayı kümelerinin oluşturduğu ideal
$\mathcal{I}-\lim p_k$	Bir metrik uzayda alınan bir (p_k) dizisinin $\mathcal{I}$ -limiti
$\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$	(p_k) dizisinin kuvvetli $\mathcal{I}$ -yığılma noktalarının kümesi
$\mathbf{M}$	Maksimal üçgen fonksiyon
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{N}_p(t)$	p noktasının kuvvetli t -komşuluğu
$\mathcal{N}_A(t)$	A kümesinin kuvvetli t -komşuluğu
$\mathcal{P}(X)$	Bir X kümesinin kuvvet kümesi
$p_k \rightarrow p$	(p_k) dizisinin p noktasına kuvvetli yakınsaması
$p_k \xrightarrow{s-stat} p$	(p_k) dizisinin p noktasına kuvvetli istatistiksel yakınsaması
$p_k \xrightarrow{s-\mathcal{I}} p$	(p_k) dizisinin p noktasına kuvvetli $\mathcal{I}$ -yakınsaması
R	Genişletilmiş reel sayılar kümesi
R^+	Genişletilmiş negatif olmayan reel sayılar kümesi
R_A	Bir A kümesinin olasılıksal yarıçapı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$(\mathbb{R}^2, \ \cdot\ , G, M)$	Basit Menger uzayı
$(S, \mathfrak{F}, \tau)$	Bir olasılıksal metrik uzay
$stat - \lim p_k$	Bir reel (p_k) dizisinin istatistiksel limiti
T	Üçgen fonksiyon (t-norm)
T^*	t-conorm
$\tau, \tau^*, \tau_T, \tau_{T^*}$	Üçgen fonksiyon
ν	Olasılıksal norm
ν_p	p vektörünün olasılıksal normunu gösteren dağılım fonksiyonu
(V, ν, τ)	Menger olasılıksal normlu uzayı
(V, ν, τ, τ^*)	Bir olasılıksal normlu uzay
θ	V vektör uzayının sıfır vektörü

1. GİRİŞ

Bilimsel çalışmalarda sıkça karşılaşılan belirsizliklerden bazıları uzaklık, uzunluk, konum, vb kavramlara ilişkin ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla bu tip belirsizliklerin geometrik olarak modellenmesi gerekmektedir. Bunu gerçekleştiren araçlardan biri de "olasılıksal metrik uzaylar" teorisidir.

Olasılıksal metrik uzaylar, klasik metrik uzayların bir genellemesi olarak Menger (1942) tarafından "İstatistiksel Metrik Uzaylar" adı altında tanımlanmıştır. Olasılıksal metrik uzaylarda uzaklık ölçümü, klasik anlamda metrik uzaylardaki durumun aksine, istatistiksel (olasılıksal) olarak ifade edilmiştir. Bu tip uzaylarda alınan herhangi iki nokta arasındaki uzaklığa, bir dağılım fonksiyonu karşılık gelmektedir. Örneğin, p ve q noktaları arasındaki uzaklığa F_{pq} dağılım fonksiyonu karşılık gelmekte ve herhangi bir x reel sayısı için $F_{pq}(x)$ değeri, " p ve q noktaları arasındaki uzaklığın x den küçük olma olasılığı" olarak yorumlanmaktadır (Schweizer ve Sklar, 2005). Bu gibi bir olasılıksal genelleştirme fiziksel bilimlerde ve lineer olan ya da lineer olmayan analizde uygulama bulmaktadır.

Topolojik açıdan, olasılıksal metrik uzaylar klasik metrik uzaylardan farklı bazı özelliklere sahiptir. Bugüne kadar olasılıksal metrik uzaylar üzerinde oluşturulan topolojik yapılardan en çok ilgilenileni, kuvvetli topoloji olmuştur. Kuvvetli topoloji, klasik anlamdaki metrik topolojisine benzer olup, bu topoloji yardımıyla tanımlanan yakınsaklık kavramı "kuvvetli yakınsaklık" olarak adlandırılır. Ayrıca, kuvvetli topoloji birinci sayılabilir olup Hausdorff ayırma aksiyomunu sağlar (Schweizer ve Sklar, 2005).

Daha sonraki süreçte Šerstnev (1963) tarafından, olasılıksal metrik uzayların özel bir biçimi olan olasılıksal normlu uzay kavramı tanımlanmıştır. Olasılıksal normlu uzaylar klasik normlu uzayların bir genellemesi niteliğindedir. Bir olasılıksal normlu uzayda vektörlerin normları reel sayılar yerine olasılıksal dağılım fonksiyonları ile ifade edilmektedir. Örneğin, bir p vektörünün normu ν_p dağılım fonksiyonu ile gösterilmek üzere herhangi bir x reel sayısı için $\nu_p(x)$ değeri " p nin normunun x den küçük olma olasılığı" olarak yorumlanır. Ancak, Šerstnev (1963)'in tanımının bazı kısıtlayıcı yanlarının olduğunun anlaşılması üzerine Alsina vd. (1993), Šerstnev'in tanımını kapsayacak şekilde yeni bir olasılıksal normlu uzay tanımı vermişlerdir. Bu yeni tanım Menger olasılıksal normlu uzaylarını elde etmeye olanak sağlamıştır.

Tüm bunların yanısıra olasılıksal normlu uzaylarda sınırlılık kavramı da tanımlanmış olup bu kavram, klasik normlu uzaylardaki sınırlılık kavramından farklıdır ve dağılımsal sınırlılık (D -sınırlılık) olarak adlandırılır. D -sınırlılık

kavramı olasılıksal bir yapıya sahiptir ve Lafuerza-Guillén vd. (1999) tarafından, olasılıksal normlu uzaylarda alınan bir kümenin olasılıksal yarıçapı kavramına dayanılarak tanımlanmıştır.

Olasılıksal normlu uzaylara ilişkin genel bir literatür özetine Sempì (2006)'nin çalışmasında yer verilmiştir.

Bu tez çalışmasında yer alan araçlardan biri de istatistiksel yakınsaklık teorisidir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı klasik yakınsaklık kavramının bir genellemesi olup pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık, toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmaktadır. Ayrıca Fridy (1993), klasik limit noktası kavramından yola çıkarak, bir reel dizinin istatistiksel limit noktası ve istatistiksel yığılma noktası kavramlarını tanımlamıştır. İstatistiksel yığılma noktası kavramının bazı uygulamaları Pehlivan ve Mamedov (2000)'un çalışmasında bulunabilir. Genel bir Hausdorff topolojik uzayında istatistiksel yakınsaklığa ilişkin kavramlar ise Maio ve Kočinac (2008) tarafından tanımlanmıştır.

Tüm bunların yanısıra doğal yoğunluğu sıfır olan pozitif tamsayı kümelerinin ailesinin bir ideal oluşturması gerçeğinden yola çıkılarak, istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesi olan " $\mathcal{I}$ -yakınsaklık ($\mathcal{I}$ -yakınsaklık)" kavramı tanımlanmıştır (Kostyrko vd., 2000). $\mathcal{I}$ -yakınsaklık klasik metrik uzaylardaki diziler için tanımlanmış olup istatistiksel yakınsaklığın ötesinde, daha genel bir yakınsaklık tipidir. Kostyrko vd. (2000) ayrıca istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktalarının bir genellemesi olacak şekilde $\mathcal{I}$ -limit ve $\mathcal{I}$ -yığılma noktaları kavramlarını da tanımlamışlardır.

Bu tez çalışmasında ise, ideal D -sınırlılık kavramı tanımlanarak, olasılıksal normlu uzaylarda bir dizinin kuvvetli ideal yığılma noktaları kümesinin bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, olasılıksal normlu uzaylarda kuvvetli Γ -ideal yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve bu kavrama ilişkin bazı sonuçlar elde edilmiştir. Tüm bunlar gerçekleştirilirken, Şençimen ve Pehlivan (2014)'ın çalışması baz alınmış ve bu çalışma genelleştirilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Olasılıksal metrik uzaylar teorisi ilk olarak Menger (1942) tarafından, "İstatistiksel Metrik Uzaylar" adı altında, metrik uzaylar teorisinin bir genellemesi olarak tanımlanmıştır. Bu teorinin gelişimi ile ilgili geniş bir çalışma, Schweizer ve Sklar'ın temel eseridir (1983, 2005). Ayrıca Constantin ve Istrăţescu (1989)'nın çalışmasında değişik uygulamalara yer verilmektedir.

Olasılıksal normlu uzay kavramı ise, olasılıksal metrik uzay kavramının özel bir biçimidir. Olasılıksal normlu uzay kavramı ilk olarak Šerstnev (1963) tarafından klasik normlu uzayların bir genellemesi olarak tanımlanmıştır. Šerstnev'in tanımının daha sonraki süreçte bazı kısıtlayıcı yanlarının olduğu anlaşılmıştır. Bunun üzerine Alsina vd. (1993) tarafından Šerstnev'in de tanımını kapsayacak şekilde yeni bir tanım verilmiştir. Bu tanım, olasılıksal normlu uzay teorisi ile ilgili çalışma yapan birçok yazar tarafından da benimsenmiştir (Lafuerza-Guillén vd., 1997; Lafuerza-Guillén vd., 1999; Lafuerza-Guillén, 2001; Saadati ve Amini, 2005). Konunun detaylı gelişimi ve tarihçesi Sempi (2006) tarafından ele alınmıştır.

Olasılıksal normlu uzaylar teorisinin temel araçlarından biri de dağılımsal sınırlılık (D -sınırlılık) kavramıdır. D -sınırlılık kavramı klasik normlu uzaylar teorisindeki sınırlılık kavramından çok farklı olup olasılıksal bir yapıya sahiptir. Bu kavram ilk olarak Lafuerza-Guillén vd. (1999) tarafından, olasılıksal normlu uzaylarda alınan bir kümenin olasılıksal yarıçapı kavramına dayanılarak tanımlanmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ise ilk olarak Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından tanımlanmış ve Fridy (1985,1993) tarafından geliştirilmiştir. Şençimen ve Pehlivan (2008), olasılıksal metrik uzaylarda kuvvetli topoloji yardımıyla, kuvvetli istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Daha sonra, Lafuerza-Guillén vd. (1999) tarafından tanımlanan D -sınırlı küme, Fridy ve Orhan (1997) ile Tripathy (1997) tarafından tanımlanan reel istatistiksel D -sınırlı dizi kavramlarına dayanarak, olasılıksal normlu uzaylarda istatistiksel D -sınırlı dizi kavramı tanımlanmıştır (Şençimen ve Pehlivan, 2009b). Hausdorff topolojik uzaylarında istatistiksel yakınsaklık kavramı ve bazı özellikleri ise Maio ve Koçinac (2008) tarafından ele alınmıştır. İstatistiksel yakınsaklığın bir uygulaması, Pehlivan ve Mamedov (2000)'un çalışmasında bulunabilir.

$\mathcal{I}$ -yakınsaklık ise ilk olarak Kostyrko vd. (2000) tarafından tanımlanmış olup istatistiksel yakınsaklık kavramını da içeren oldukça genel bir yakınsaklık tipidir. Ayrıca, Kostyrko vd. (2000) tarafından $\mathcal{I}$ -limit noktası ve $\mathcal{I}$ -yığılma noktası kavramları da tanımlanmıştır. Şençimen ve Pehlivan (2009a) olasılıksal

metrik uzaylarda kuvvetli topoloji yardımıyla, kuvvetli $\mathcal{I}$ –yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır.

Pehlivan vd. (2004), istatistiksel yığılma noktaları kümesinden yola çıkarak, sonlu boyutlu normlu uzaylarda Γ –istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak bu kavramın bazı özelliklerini incelemişlerdir. Son olarak, Şençimen ve Pehlivan (2014), Γ –istatistiksel yakınsaklık kavramını olasılıksal normlu uzaylarda tanımlamış ve Pehlivan vd. (2004)’nin çalışmasını olasılıksal normlu uzaylara uygulamışlardır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak, dağılım fonksiyonları ve olasılıksal metrik uzaylar ile ilgili bazı temel kavramlara ve sonuçlara yer verilecektir. Daha sonra, olasılıksal metrik uzayların özel biçimleri olan olasılıksal normlu uzaylar incelenecektir. Son olarak, olasılıksal normlu uzaylarda kuvvetli istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli ideal yakınsaklık kavramlarına ilişkin bazı temel tanımlara ve sonuçlara yer verilecektir.

3.1. Dağılım Fonksiyonları ve Olasılıksal Metrik Uzaylar

Tanım 3.1.1 Bir dağılım fonksiyonu; $R = [-\infty, \infty]$ üzerinde tanımlı, azalmayan ve $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$ koşullarını sağlayan bir F fonksiyonudur. $(-\infty, \infty)$ üzerinde soldan sürekli dağılım fonksiyonlarının kümesi Δ ile gösterilir. Δ nın elemanları,

$$F \leq G \iff \forall x \in R \quad F(x) \leq G(x)$$

bağıntısıyla kısmi sıralanabilir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.1.2 Herhangi bir $a \in R$ için "a noktasındaki birim basamak fonksiyonları",

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq x \leq a \text{ ise} \\ 1, & a < x \leq \infty \text{ ise} \end{cases} \quad (-\infty \leq a < \infty \text{ için})$$

ve

$$\varepsilon_\infty(x) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq x < \infty \text{ ise} \\ 1, & x = \infty \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ve Δ kümesinde yer alan fonksiyonlardır (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.1.3 $F, G \in \Delta$ olmak üzere

$$F(x - h) - h \leq G(x) \leq F(x + h) + h$$

ve

$$G(x - h) - h \leq F(x) \leq G(x + h) + h$$

koşullarını her $x \in (\frac{-1}{h}, \frac{1}{h})$ için sağlayan tüm $h \in (0, 1]$ sayılarının infimumu

$d_L(F, G)$ ile gösterilir. $\Delta \times \Delta$ üzerinde tanımlanan bu d_L fonksiyonuna "değiştirilmiş Lévy metriği" denir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.1.4 Bir uzaklık dağılım fonksiyonu; $R^+ = [0, \infty]$ üzerinde tanımlı, $F(0) = 0$ ve $F(\infty) = 1$ koşullarını sağlayan, $(0, \infty)$ üzerinde soldan sürekli ve azalmayan bir F fonksiyonudur. Uzaklık dağılım fonksiyonlarının kümesi, Δ^+ ile gösterilir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Teorem 3.1.5 $F \in \Delta^+$ olsun. Bu durumda herhangi bir $t > 0$ için

$$F(t) > 1 - t \iff d_L(F, \varepsilon_0) < t$$

dir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Geometrik olarak $d_L(F, \varepsilon_0)$ uzaklığı, $y = 1 - x$ doğrusu ile F fonksiyonunun grafiğinin kesişim noktasının apsisine eşittir. Eğer gerekirse süreksizlik noktalarında dikey parçalar eklenerek kesişim tamamlanır (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.1.6 Bir $T : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ikili işlemi,

i) Her $x, y, z \in [0, 1]$ için $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ dir,

ii) Her $x, y \in [0, 1]$ için $T(x, y) = T(y, x)$ dir,

iii) $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ olmak üzere her $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$ için

$$T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$$

dir,

iv) Her $x \in [0, 1]$ için $T(x, 1) = x$ dir

koşullarını sağlıyorsa T işlemine bir "üçgen norm (t-norm)" denir (Schweizer ve Sklar, 2005).

$$M(x, y) = \min\{x, y\}$$

$$\Pi(x, y) = xy$$

$$W(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$$

ikili işlemleri sık kullanılan bazı t-normları göstermektedir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.1.7 T bir t-norm olmak üzere her $x, y \in [0, 1]$ için,

$$T^*(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$$

şeklinde tanımlanan T^* fonksiyonuna " T nin t-conorm"u denir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.1.8 $\tau : \Delta^+ \times \Delta^+ \rightarrow \Delta^+$ olmak üzere,

- i) $\tau(F, G) = \tau(G, F)$ dir,
- ii) $\tau(\tau(F, G), H) = \tau(F, \tau(G, H))$ dir,
- iii) $F \leq H$ ve $G \leq K$ ise $\tau(F, G) \leq \tau(H, K)$ dir,
- iv) $\tau(F, \varepsilon_0) = F$ dir

özelliklerini sağlayan τ ikili işlemine "üçgen fonksiyon" denir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Üçgen fonksiyonlar, soldan sürekli t-normlar yardımıyla elde edilebilir. Eğer T , soldan sürekli bir t-norm ise $x \in [0, +\infty]$ olmak üzere

$$\tau_T(F, G)(x) = \sup\{T(F(s), G(t)) : s + t = x\}$$

şeklinde tanımlanan τ_T bir üçgen fonksiyondur. T sürekli ise τ_T üçgen fonksiyonu (Δ^+, d_L) üzerinde düzgün süreklidir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Eğer T^* sürekli bir t-conorm ise

$$\tau_{T^*}(F, G)(x) = \inf\{T^*(F(s), G(t)) : s + t = x\}$$

şeklinde tanımlanan τ_{T^*} fonksiyonu bir üçgen fonksiyondur ve (Δ^+, d_L) üzerinde düzgün süreklidir. Ayrıca $x \in [0, +\infty]$ olmak üzere $\mathbf{M}(F, G)(x) = \min\{F(x), G(x)\}$ biçiminde tanımlanan $\mathbf{M}$ fonksiyonu maksimal üçgen fonksiyondur (Schweizer ve Sklar, 2005).

Aşağıda göz önüne alınacak olan olasılıksal metrik uzay kavramı, klasik anlamdaki metrik uzay kavramının bir genellemesidir. Olasılıksal metrik uzayda noktalar arası uzaklıklar kesin sayısal değerler (reel sayılar) yerine olasılık dağılım fonksiyonları ile ifade edilmektedir.

Tanım 3.1.9 $S \neq \emptyset$, $\mathfrak{F} : S \times S \rightarrow \Delta^+$ ve τ bir üçgen fonksiyon olmak üzere her $p, q, r \in S$ için

- i) $\mathfrak{F}(p, p) = \varepsilon_0$ dir,
- ii) $p \neq q$ ise $\mathfrak{F}(p, q) \neq \varepsilon_0$ dir,
- iii) $\mathfrak{F}(p, q) = \mathfrak{F}(q, p)$ dir,
- iv) $\mathfrak{F}(p, r) \geq \tau(\mathfrak{F}(p, q), \mathfrak{F}(q, r))$ dir,

koşulları sağlanıyorsa $(S, \mathfrak{F}, \tau)$ üçlüsüne bir "olasılıksal metrik uzay" denir. $\mathfrak{F}(p, q) = F_{pq}$ olarak gösterilmek üzere $F_{pq}(x)$ ifadesi " p ile q noktaları arasındaki uzaklığın x den küçük olma olasılığı" olarak yorumlanır (Schweizer

ve Sklar, 2005).

Tanım 3.1.9'da verilen (*iv*) aksiyomu şu şekilde yorumlanır: Bir üçgenin üçüncü kenarı hakkında bilgimiz, diğer iki kenar hakkındaki bildiklerimize simetrik bir biçimde bağlıdır; yani diğer iki kenar hakkında bilgimiz arttıkça üçüncü kenar hakkındaki bilgimiz de artar ya da en azından azalmaz. Öte yandan bir kenarın uzunluğu hakkında bir "üst sınır" bilgimiz var ve ikinci kenar hakkında bir şeyler biliyorsak üçüncü kenar hakkında da fikrimiz var demektir. Ayrıca iki kenarın uzunlukları hakkında "üst sınır" bilgimiz var ise üçüncü kenarın uzunluğunun üst sınırı hakkında da bilgimiz vardır (Schweizer ve Sklar, 2005).

3.2. Olasılıksal Normlu Uzaylar

Olasılıksal normlu uzay kavramı, klasik anlamdaki normlu uzay kavramının bir genellemesidir. Bu tip uzaylardaki vektörlerin normları kesin sayısal değerler yerine olasılık dağılım fonksiyonları ile ifade edilmektedir. Örneğin p bir vektör olmak üzere p nin normu, ν_p dağılım fonksiyonu ile gösterilmektedir. $x \in R^+$ olmak üzere $\nu_p(x)$ değeri " p nin normunun x den küçük olma olasılığı" olarak yorumlanır (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.2.1 V bir reel vektör uzayı, $\tau \leq \tau^*$ olmak üzere τ ve τ^* sürekli üçgen fonksiyonlar ve $\nu : V \longrightarrow \Delta^+$ olmak üzere $\nu(p) = \nu_p$ yazılmak suretiyle her $p, q \in V$ için

(N1) $\nu_p = \varepsilon_0 \iff p = \theta$ (θ , V uzayının sıfır vektörüdür),

(N2) $\nu_{-p} = \nu_p$ dir,

(N3) $\nu_{p+q} \geq \tau(\nu_p, \nu_q)$ dir,

(N4) $\forall \alpha \in [0, 1] \quad \nu_p \leq \tau^*(\nu_{\alpha p}, \nu_{(1-\alpha)p})$ dir

koşulları sağlıyorsa (V, ν, τ, τ^*) dörtlüsüne "olasılıksal normlu uzay" denir (Alsina vd., 1993; Lafuerza-Guillén vd., 1999).

Tanım 3.2.2 T sürekli bir t-norm ve T^* ise bunun t-conormu olmak üzere $\tau = \tau_T$ ve $\tau^* = \tau_{T^*}$ alınması durumunda (V, ν, τ, τ^*) dörtlüsüne T altında bir "Menger olasılıksal normlu uzayı" denir. Bu uzay kısaca (V, ν, T) ile gösterilir (Alsina vd., 1993).

Tanım 3.2.3 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere her $p \in V$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(t) &= \{q \in V : \nu_{p-q}(t) > 1 - t\} \\ &= \{q \in V : d_L(\nu_{p-q}, \varepsilon_0) < t\} \end{aligned}$$

kümesine p nin "kuvvetli t -komşuluğu" denir (Schweizer ve Sklar, 2005).

τ sürekli ise $\{\mathcal{N}_p(t) : p \in V \text{ ve } t > 0\}$ komşuluklar sistemi V için bir Hausdorff topolojisi belirler ve bu topoloji V üzerinde birinci sayılabilir bir topolojidir. Bu topolojiye V için "kuvvetli topoloji" denir. Ayrıca, $t_1 \leq t_2$ ise $\mathcal{N}_p(t_1) \subseteq \mathcal{N}_p(t_2)$ dir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.2.4 (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayının boş olmayan bir A alt kümesi için A nın "kuvvetli kapanışı", $\bar{A}$ ile gösterilir ve

$$\bar{A} = \{p \in V : \forall t > 0 \exists q \in A \ni \nu_{p-q}(t) > 1 - t\}$$

şeklinde tanımlanır (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.2.5 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere, V uzayında bir (p_k) dizisi ve bir $p \in V$ verilsin. Eğer herhangi bir $t > 0$ için $k \geq N$ olduğunda $p_k \in \mathcal{N}_p(t)$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa " (p_k) dizisi p noktasına kuvvetli yakınsaktır" denir ve $p_k \longrightarrow p$ şeklinde gösterilir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.2.6 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere V uzayının boş olmayan bir A alt kümesi verildiğinde herhangi bir $p \in V$ için $[-\infty, \infty]$ üzerinde,

$$F_{p,A}(x) = \sup\{\nu_{p-q}(x) : q \in A\}$$

şeklinde tanımlı uzaklık dağılım fonksiyonuna " p noktasının, A kümesine olan olasılıksal uzaklığı" denir (Schweizer ve Sklar, 2005).

Tanım 3.2.7 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere V uzayının boş olmayan bir A alt kümesi verildiğinde herhangi bir $t > 0$ için,

$$\mathcal{N}_A(t) = \{p \in V : F_{p,A}(t) > 1 - t\}$$

biçiminde tanımlanan açık kümeye " A kümesinin kuvvetli t -komşuluğu" denir (Constantin ve Istrătescu, 1989).

Tanım 3.2.8 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere V uzayının boş olmayan bir A alt kümesi verilsin. Bu durumda,

$$R_A(x) = \begin{cases} l^- \varphi_A(x), & x \in [0, \infty) \text{ ise} \\ 1, & x = \infty \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan R_A fonksiyonuna, A nın "olasılıksal yarıçapı" denir. Burada $\varphi_A(x) = \inf\{\nu_p(x) : p \in A\}$ şeklindedir ve l^- ifadesi soldan limit anlamındadır (Lafuerza-Guillén vd., 1999).

Tanım 3.2.9 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere V uzayının boş olmayan bir A alt kümesi verilsin. Bu durumda,

- (i) Bir $x_0 \in (0, \infty)$ için $R_A(x_0) = 1$ oluyorsa A kümesi "kesinlikle sınırlıdır",
- (ii) Her $x \in (0, \infty)$ için $R_A(x) < 1$ ve $l^-R_A(+\infty) = 1$ ise A kümesi "olası sınırlıdır",
- (iii) Bir $x_0 \in (0, \infty)$ için $R_A(x_0) > 0$ ve $l^-R_A(+\infty) \in (0, 1)$ ise A kümesi "olası sınırsızdır",
- (iv) $l^-R_A(+\infty) = 0$, yani $R_A = \varepsilon_\infty$ ise A kümesi "kesinlikle sınırsızdır" denir.

Eğer $R_A \in \mathcal{D}^+ = \{F \in \Delta^+ : l^-F(\infty) = 1\}$ ise yani R_A için (i) veya (ii) den biri sağlanıyorsa A kümesi " D -sınırlıdır" denir. Aksi takdirde, yani $R_A \in \Delta^+ \setminus \mathcal{D}^+$ olması durumunda A kümesi " D -sınırsızdır" denir (Lafuerza-Guillén vd., 1999).

Örnek 3.2.10 Aşağıda sırasıyla "kesinlikle sınırlı", "olası sınırlı" ve "olası sınırsız" kümelerine ait olasılıksal yarıçap fonksiyonlarına örnekler verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 (a) R_A(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ ise} \\ 2x, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ 1, & x > \frac{1}{2} \text{ ise} \end{cases} \\
 (b) R_A(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ ise} \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \text{ ise} \end{cases} \\
 (c) R_A(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{3}, & 0 < x < \infty \text{ ise} \\ 1, & x = \infty \text{ ise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tanım 3.2.11 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere A kümesi, V uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. A kümesindeki herhangi bir (p_k) dizisinin, A kümesinde yakınsak bir (p_{k_j}) alt dizisi varsa A kümesi " D -kompakttır" denir (Saadati ve Amini, 2005).

Ancak, kuvvetli topoloji metriklenebilir olduğundan (Schweizer ve Sklar, 2005), olasılıksal normlu uzaylarda kompaktlık ile dizisel kompaktlık kavramları çakışır. Bu nedenle (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayındaki bir A kümesi kompakt olduğunda kastettiğimiz aynı zamanda D -kompaktlık olacaktır.

Klasik normlu uzaylardaki duruma benzer şekilde, olasılıksal normlu bir uzayın D -sınırlı ve kapalı bir alt kümesinin kompakt olması gerekmez. Hatta sonlu boyutlu bir olasılıksal normlu uzayda bile kompakt bir küme D -sınırlı

olmayabilir.

Öte yandan olasılıksal normlu uzayda bir kompakt küme daima kapalıdır çünkü kuvvetli topoloji Hausdorff ayırma aksiyomunu sağlar.

3.3. İstatistiksel Yakınsaklık ve İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramları hatırlatılacaktır.

Tanım 3.3.1 K , pozitif tamsayıların bir kümesi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \in K : k \leq n\}|$$

biçiminde tanımlanan limit mevcut ise bu limitin değerine, K nın "doğal yoğunluğu" denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. Burada $|\{k \in K : k \leq n\}|$ ifadesi; K nın, n yi geçmeyen elemanlarının sayısı anlamındadır (Niven vd., 1991).

Örneğin, $\mathbb{N}$ nin her sonlu K alt kümesi için $\delta(K) = 0$ ve

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : k \text{ tam kare değildir}\} = 1$$

dir. $\delta(K)$ mevcut ise $K^c = \mathbb{N} \setminus K$ olmak üzere $\delta(K^c) = 1 - \delta(K)$ dır (Niven vd., 1991).

Tanım 3.3.2 Bir $K \subset \mathbb{N}$ için,

$$\bar{\delta}(K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \in K : k \leq n\}|$$

ifadesine K nın "üst asimptotik yoğunluğu" denir (Kostyrko vd., 2000).

Doğal yoğunluk bir K kümesi için mevcut olmayabilir fakat K nın üst asimptotik yoğunluğu daima mevcuttur.

Bir (p_k) reel dizisi bir P koşulunu doğal yoğunluğu sıfır olan bir küme haricinde tüm k pozitif tamsayıları için sağlıyorsa, (p_k) dizisi P koşulunu "hemen hemen her k için sağlar" denir ve bu ifade kısaca "h.h.k" şeklinde gösterilir (Fridy, 1985).

Tanım 3.3.3 (p_k) reel bir dizi olsun ve $\xi \in \mathbb{R}$ verilsin. Her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : |p_k - \xi| \geq \varepsilon\} = 0$$

ise (p_k) dizisi ξ sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve bu durum,

$$stat - \lim p_k = \xi$$

biçiminde gösterilir (Fast, 1951; Steinhaus, 1951).

Tanım 3.3.4 (p_k) reel bir dizi olsun. Eğer

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : |p_k| > B\} = 0$$

olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı varsa (p_k) dizisi "istatistiksel sınırlıdır" denir (Fridy ve Orhan, 1997; Tripathy, 1997).

Tanım 3.3.5 $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer

(i) Her $A, B \in \mathcal{I}$ için $A \cup B \in \mathcal{I}$ dir,

(ii) Her bir $A \in \mathcal{I}$ ve her $B \subset A$ için $B \in \mathcal{I}$ dir

koşulları sağlamıyorsa $\mathcal{I}$ ailesine bir "ideal" denir (Kostyrko vd, 2000).

Örneğin; doğal yoğunluğu sıfır olan pozitif tamsayı kümelerinin oluşturduğu aile bir idealdir ve bu ideal genellikle $\mathcal{I}_d$ ile gösterilir (Kostyrko vd, 2000).

Tanım 3.3.6 $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ dir,

(ii) Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$ dir,

(iii) Her bir $A \in \mathcal{F}$ ve her $B \supset A$ için $B \in \mathcal{F}$ dir

koşulları sağlamıyorsa $\mathcal{F}$ ailesine X üzerinde bir "süzgeç" denir (Kostyrko vd, 2000).

Örneğin; doğal yoğunluğu 1 olan pozitif tamsayı kümelerinin oluşturduğu aile bir süzgeçtir. Bu süzgeç, $\mathcal{F}_d$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.3.7 $\mathcal{I} \neq \emptyset$ ve $X \notin \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ ideale "basit olmayan ideal" denir (Kostyrko vd, 2000).

$\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ olmak üzere $\mathcal{I}$ ailesinin basit olmayan bir ideal olması için gerek ve yeter koşul, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{X \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$ ailesinin X üzerinde bir süzgeç olmasıdır (Kostyrko vd, 2000).

Burada $K \notin \mathcal{I}$ olması $K \in \mathcal{F}$ olması anlamına gelmemektedir. Örneğin $K = \{k \in \mathbb{N} : k \text{ tektir}\}$ kümesini göz önüne alalım. $\delta(K) = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan $K \notin \mathcal{I}_d$ dir. Fakat aynı zamanda $\delta(K) = \frac{1}{2} \neq 1$ olduğundan $K \notin \mathcal{F}_d$ dir.

Tanım 3.3.8 Basit olmayan bir $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ ideali için $\mathcal{I} \supset \{\{x\} : x \in X\}$ koşulu sağlamıyorsa $\mathcal{I}$ idealine bir "uygun ideal" denir (Kostyrko vd, 2000).

Örneğin, $\mathcal{I}_d$ bir uygun idealdir (Kostyrko vd, 2000).

Tezin bundan sonraki kısımlarında bir $\mathcal{I}$ idealinden söz edildiğinde bunun, $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir uygun ideali olduğu varsayılacaktır.

Tanım 3.3.9 (X, ρ) bir metrik uzay olmak üzere (p_k) , X uzayında bir dizi ve $\xi \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : \rho(p_k, \xi) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa (p_k) dizisi ξ noktasına " $\mathcal{I}$ -yakınsaktır (ideal yakınsaktır)" denir ve bu durum, $\mathcal{I}\text{-}\lim p_k = \xi$ ile gösterilir (Kostyrko vd, 2000).

3.4. Olasılıksal Normlu Uzaylarda Kuvvetli İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda olasılıksal normlu uzaylarda kuvvetli istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli ideal yakınsaklık ve istatistiksel D -sınırlılık kavramlarına yer verilecektir.

Tanım 3.4.1 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere (p_k) , V uzayında bir dizi ve $p \in V$ olsun. Eğer her bir $t > 0$ için

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_p(t)\} = 0$$

oluyorsa, (p_k) dizisi p noktasına "kuvvetli istatistiksel yakınsaktır" denir ve bu durum $p_k \xrightarrow{s-stat} p$ ile gösterilir. p noktası (p_k) dizisinin "kuvvetli istatistiksel limiti" olarak adlandırılır (Şençimen ve Pehlivan, 2008).

(V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayında (p_k) dizisi için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $p_k \xrightarrow{s-stat} p$ dir.

ii) Her bir $t > 0$ için $\delta\{k \in \mathbb{N} : d_L(\nu_{p_k-p}, \varepsilon_0) \geq t\} = 0$ dir.

iii) $stat - \lim d_L(\nu_{p_k-p}, \varepsilon_0) = 0$ dir.

(Şençimen ve Pehlivan, 2008).

Tanım 3.4.2 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere (p_k) , V uzayında bir dizi ve $r \in V$ olsun. Her bir $t > 0$ için

$$\bar{\delta}\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_r(t)\} > 0$$

oluyorsa r noktası (p_k) dizisinin "kuvvetli istatistiksel yığılma noktasıdır" denir. (p_k) dizisinin tüm kuvvetli istatistiksel yığılma noktalarının kümesi $\Gamma_s(p_k)$ ile gösterilir (Şençimen ve Pehlivan, 2008).

Tanım 3.4.3 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere (p_k) , V uzayında bir dizi ve (p_{k_j}) , (p_k) dizisinin bir alt dizisi olsun. $K = \{k_j : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ olması durumunda (p_{k_j}) , (p_k) dizisinin "seyrek alt dizisidir" denir. $\delta(K) > 0$ ya da $\delta(K)$ nın mevcut olmaması durumunda, yani $\bar{\delta}(K) > 0$ olması durumunda (p_{k_j}) , (p_k) dizisinin "seyrek olmayan bir alt dizisidir" denir (Şençimen ve Pehlivan, 2008).

Tanım 3.4.4 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere (p_k) , V uzayında bir dizi olsun. Eğer $\delta(K) = 1$ ve $(p_{k_j}) = (p)_K$ alt dizisi D -sınırlı yani $A = \{p_{k_j} : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $R_A \in \mathcal{D}^+$ olacak şekilde bir

$$K = \{k_j : k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subset \mathbb{N}$$

kümesi varsa (p_k) dizisi "istatistiksel D -sınırlıdır" denir (Şençimen ve Pehlivan, 2009b).

D -sınırlı bir dizi daima istatistiksel D -sınırlı bir dizidir fakat istatistiksel D -sınırlı olduğu halde D -sınırlı olmayan diziler vardır (Şençimen ve Pehlivan, 2009b). Buna bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.4.5 $(\mathbb{R}, |\cdot|, G, M)$ biçiminde gösterilen basit Menger uzayını göz önüne alalım. Burada $|\cdot|$, $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer normudur. Ayrıca, $G \in \Delta^+$ ve $G \neq \varepsilon_0, \varepsilon_\infty$ olup $\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \Delta^+$ olasılıksal normu, $\nu_0 = \varepsilon_0$ olmak üzere $t > 0$ ve $p \neq 0$ için

$$\nu_p(t) = G\left(\frac{t}{|p|}\right)$$

biçiminde tanımlıdır. M ise $M(x, y) = \min\{x, y\}$ biçiminde tanımlı t-normdur (Lafuerza-Guillén vd., 1997). Özel olarak $l^+G(0) = 0$ olmak üzere $G(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in (0, \infty)$ bulunsun. Ayrıca, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir (p_k)

dizisi,

$$p_k = \begin{cases} k, & k \text{ asal ise} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $K = \{k \in \mathbb{N} : k \text{ asal sayı değildir}\}$ olmak üzere $\delta(K) = 1$ olup Lafuerza-Guillén vd. (1999)'nin çalışmasında yer alan Örnek 2.3 gereğince $(p)_K$ alt dizisi $(\mathbb{R}, |\cdot|, G, M)$ uzayında kesinlikle sınırlıdır, dolayısıyla D -sınırlıdır. Bundan dolayı (p_k) dizisi istatistiksel D -sınırlıdır. Fakat $L = \{k \in \mathbb{N} : k \text{ asal sayıdır}\}$ olmak üzere yine Lafuerza-Guillén vd. (1999)'nin çalışmasındaki Örnek 2.3 gereğince $(p)_L$ alt dizisi $(\mathbb{R}, |\cdot|, G, M)$ uzayında kesinlikle sınırsızdır. O halde (p_k) dizisi D -sınırlı değildir.

Tanım 3.4.6 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere (p_k) , V uzayında bir dizi ve $p \in V$ olsun. Her bir $t > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_p(t)\} \in \mathcal{I}$$

koşulu sağlanıyorsa (p_k) dizisi p noktasına "kuvvetli $\mathcal{I}$ -yakınsaktır" denir. Bu durum $p_k \xrightarrow{s-\mathcal{I}} p$ ile gösterilir ve p noktasına, (p_k) nın "kuvvetli $\mathcal{I}$ -limiti" denir (Şençimen ve Pehlivan, 2009a).

(V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayında (p_k) dizisi için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $p_k \xrightarrow{s-\mathcal{I}} p$ dir.

ii) Her bir $t > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : d_L(\nu_{p_k-p}, \varepsilon_0) \geq t\} \in \mathcal{I}$ dir.

iii) $\mathcal{I} - \lim d_L(\nu_{p_k-p}, \varepsilon_0) = 0$ dir.

(Şençimen ve Pehlivan, 2009a).

Tanım 3.4.7 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere (p_k) , V uzayında bir dizi ve $r \in V$ olsun. Her bir $t > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_r(t)\} \notin \mathcal{I}$$

koşulu sağlanıyorsa r noktası (p_k) dizisinin "kuvvetli $\mathcal{I}$ -yığılma noktasıdır" denir. (p_k) dizisinin kuvvetli $\mathcal{I}$ -yığılma noktalarının kümesi $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ ile gösterilir (Şençimen ve Pehlivan, 2009a).

Teorem 3.4.8 (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayındaki bir (p_k) dizisi için $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ kümesi kuvvetli topolojiye göre kapalıdır (Şençimen ve Pehlivan, 2009a).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Olasılıksal Normlu Uzaylarda Kuvvetli İdeal Yığılma Noktalarının Bazı Özellikleri ve Kuvvetli Γ -İdeal Yakınsaklık

Bu bölümde ilk olarak, ideal D -sınırlılık kavramı tanımlanacaktır. Daha sonra $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ kümesinin bazı özellikleri incelenecektir. Son olarak da, kuvvetli Γ -ideal yakınsaklık kavramı tanımlanarak bu kavrama ilişkin bazı sonuçlar elde edilecektir.

Bu bölüm boyunca (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere (p_k) , V uzayında bir diziyi temsil etmektedir. (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayı bazen kısaca V uzayı olarak adlandırılacaktır. Bu bölümdeki tanımlar ve sonuçlar, Şençimen ve Pehlivan (2014)'in çalışmasının bir genellemesi niteliğindedir.

Tanım 4.1.1 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olmak üzere (p_k) , V uzayında bir dizi olsun. Eğer $K \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $(p_{k_j}) = (p)_K$ alt dizisi D -sınırlı

$$A = \{p_{k_j} : j \in \mathbb{N}\}$$

olmak üzere $R_A \in \mathcal{D}^+$ olacak şekilde bir

$$K = \{k_j : k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subset \mathbb{N}$$

kümesi varsa (p_k) dizisi " $\mathcal{I}$ -ideal D -sınırlıdır ($\mathcal{I}$ - D -sınırlıdır)" denir.

Aşağıda ilk olarak, $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ kümesinin bazı özellikleri incelenecektir.

Örnek 4.1.2 $c, d > 0$ için $\tau(\varepsilon_c, \varepsilon_d) \leq \varepsilon_{c+d}$ olmak üzere τ üçgen fonksiyonu ve $\mathbf{M}$ maksimal üçgen fonksiyonu verilsin ve bu yolla tanımlanan $(\mathbb{R}, \nu, \tau, \mathbf{M})$ olasılıksal normlu uzayını göz önüne alalım. Burada sabit bir $a > 0$ ve $p \in \mathbb{R}$ için $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \Delta^+$ olasılıksal norm fonksiyonu $\nu_p = \varepsilon_{\frac{|p|}{a+|p|}}$ biçiminde tanımlanır (Lafuerza-Guillén, 2001). Özel olarak $a = 1$ alınsın ve $(\mathbb{R}, \nu, \tau, \mathbf{M})$ olasılıksal normlu uzayındaki bir (p_k) dizisi, her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = k^2$ olarak tanımlansın. Ayrıca $\mathcal{I} = \mathcal{I}_d$ alınsın.

O halde şunları söyleyebiliriz:

(i) $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi D -sınırlı olduğundan, $\mathcal{I}_d$ - D -sınırlıdır. Ancak bu küme Euclid normunun (mutlak değer) doğurduğu topolojiye göre $\mathcal{I}_d$ - D -sınırlı değildir.

(ii) $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi D -sınırlı ve kapalı olmasına rağmen kuvvetli topolojiye göre kompakt değildir.

(iii) Sınırlı bir reel dizinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi boş küme değildir (Fridy, 1993). Fakat bu örnekte (p_k) dizisi D -sınırlı olup aynı zamanda $\mathcal{I}_d(\Gamma_s(p_k)) = \emptyset$ dir.

(iv) Eğer (x_k) sınırlı bir reel dizi ise, $K = \{k_j : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{I}_d$ olmak üzere $\{x_k : k \in \mathbb{N} \setminus K\} \cup \Gamma(x_k)$ kümesi kompakt olacak şekilde, (x_k) dizisinin bir (x_{k_j}) alt dizisi vardır (Fridy, 1993). Fakat bu örnekteki D -sınırlı (p_k) dizisi için $K = \{k_j : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{I}_d$ olmak üzere $\{p_k : k \in \mathbb{N} \setminus K\} \cup \mathcal{I}_d(\Gamma_s(p_k))$ kümesi kompakt bir küme olacak şekilde (p_k) dizisi, (p_{k_j}) alt dizisine sahip değildir. Ashında $K = \{k_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ olmak üzere (p_k) nın herhangi bir (p_{k_j}) alt dizisi için $\{p_k : k \in \mathbb{N} \setminus K\} \cup \mathcal{I}_d(\Gamma_s(p_k))$ kümesi hiçbir zaman kompakt değildir.

(v) $\mathbb{R}^m$ sonlu boyutlu normlu uzayında (x_k) istatistiksel sınırlı bir dizi ise $\Gamma(x_k)$ kümesi boş olmayıp kompakttır (Pehlivan vd., 2004). Fakat bu örnekteki $\mathcal{I}_d - D$ -sınırlı (p_k) dizisi için $\mathcal{I}_d(\Gamma_s(p_k)) = \emptyset$ dir.

Öte yandan, D -sınırsız ya da $\mathcal{I} - D$ -sınırlı bir (p_k) dizisi için $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \neq \emptyset$ olabilir. Buna bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.1.3 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ ikilisi klasik Euclid normlu uzayı olmak üzere $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|, G, M)$ basit Menger uzayını göz önüne alalım. Burada özel olarak $l^-G(+\infty) = 1$ ve $l^+G(0) = 0$ olduğunu kabul edelim ve her $x \in (0, \infty)$ için $G(x) < 1$ olsun. Bu durumda $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|, G, M)$ uzayındaki kesin sınırlı tek küme $\{\theta = (0, 0)\}$ kümesidir ve $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ uzayının sınırsız kümeleri $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|, G, M)$ uzayında kesinlikle sınırsızdır (Lafuerza-Guillén vd., 1999). Şimdi $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|, G, M)$ uzayında bir (p_k) dizisi,

$$p_k = \begin{cases} (k, k), & k \text{ tam kare ise} \\ \theta, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda (p_k) dizisi kesinlikle sınırsız olup, dolayısıyla D -sınırsızdır. Öte yandan, bu dizi $\mathcal{I}_d - D$ -sınırlı olup $\mathcal{I}_d(\Gamma_s(p_k)) = \{\theta\}$ dir.

Teorem 4.1.4 (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayında $\mathcal{I} - D$ -sınırlı bir (p_k) dizisi için, $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ kümesi V uzayında D -sınırlıdır.

İspat. (p_k) dizisi $\mathcal{I} - D$ -sınırlı ise Tanım 4.1.1 gereğince,

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin B\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde V uzayının, D -sınırlı bir B alt kümesi vardır. Bu durumda $\overline{B}$ kümesi de D -sınırlıdır (Lafuerza-Guillén vd., 1999). O halde $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \subset \overline{B}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Tersine, $r \notin \overline{B}$ olacak şekilde bir $r \in \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ olduğunu varsayalım. Kuvvetli topoloji, Hausdorff düzgünlüğü tarafından doğurulduğundan (Schweizer ve Sklar, 2005) regülerdir. O halde $\overline{B} \cap \mathcal{N}_r(t) = \emptyset$ olacak şekilde bir $t > 0$ vardır. Buradan,

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_r(t)\} \subset \{k \in \mathbb{N} : p_k \notin B\}$$

yazılabilir. O halde $\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_r(t)\} \in \mathcal{I}$ olup bu ise çelişkidir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.4.8 gereğince, $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ kümesi kapalıdır. O halde yukarıdaki teoremin koşulları altında $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ kümesinin D -sınırlı ve V uzayında kapalı olduğu söylenebilir.

Teorem 4.1.5 (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayında bir (p_k) dizisi verilsin ve A kümesi, $A \cap \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) = \emptyset$ olacak şekilde, V nin boş olmayan kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in A\} \in \mathcal{I}$$

dır.

İspat. $\xi \in A$ olsun. $\xi \notin \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ olduğundan,

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_\xi(t)\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $t = t(\xi) > 0$ vardır. Şimdi

$$\mathcal{N}_\xi(t) = \{q \in V : \nu_{\xi-q}(t) > 1 - t\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu durumda $\xi \in A$ olmak üzere $\mathcal{N}_\xi(t)$ açık kümeleri A nın bir açık örtüsünü oluşturur. A kümesi kompakt olduğundan,

$$\{\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{\xi_i}(t_i) : i = 1, 2, 3, \dots, m\}$$

biçiminde, A nın sonlu bir alt örtüsü vardır. O halde $A \subset \bigcup_{i=1}^m \mathcal{N}_i$ olup her bir $i = 1, 2, \dots, m$ için $\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_{\xi_i}(t_i)\} \in \mathcal{I}$ dır. O halde ideal aksiyomlarından $\{k \in \mathbb{N} : p_k \in A\} \in \mathcal{I}$ olup, ispat tamamlanır. ■

Yardımcı Teorem 4.1.6 (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayında bir (p_k) dizisi verilsin. Eğer (p_k) dizisi, $\{p_{k_j} : j \in \mathbb{N}\}$ kümesi V uzayında kompakt bir kümede içerilecek şekilde ve $\{k_j : j \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{I}$ olacak biçimde bir (p_{k_j}) alt dizisine sahipse $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ kümesi, boş küme değildir.

İspat. (p_{k_j}) alt dizisi, (p_k) dizisinin, teoremin hipotezindeki koşulları sağlayan bir alt dizisi olsun. Bu durumda, $K = \{k_j : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $K \notin \mathcal{I}$ olup $\{p_{k_j} : j \in \mathbb{N}\} \subset A$ olacak şekilde V nin kompakt bir A alt kümesi vardır. Yani her bir $k \in K$ için $p_k \in A$ dır. Eğer $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) = \emptyset$ ise $A \cap \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) = \emptyset$ dir. O halde Teorem 4.1.5 gereğince $\{k \in \mathbb{N} : p_k \in A\} \in \mathcal{I}$ dır. Öte yandan

$$\{k \in \mathbb{N} : k \in K\} \subset \{k \in \mathbb{N} : p_k \in A\}$$

olup buradan $K \in \mathcal{I}$ elde edilir. Bu ise çelişki olup, ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1.4 ve Yardımcı Teorem 4.1.6'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.7 (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayında bir (p_k) dizisi verilsin. Eğer $\{k \in \mathbb{N} : p_k \in A\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olacak biçimde, V uzayında kompakt ve D -sınırlı bir A kümesi varsa $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ kümesi boş olmayıp kapalı ve D -sınırlıdır.

Örnek 4.1.3'de göz önüne alınan dizi Sonuç 4.1.7'ye bir örnektir.

Teorem 4.1.8 Sonuç 4.1.7'nin koşulları altında her bir $t > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_{\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))}(t)\} \in \mathcal{I} \quad (4.1.1)$$

dır.

İspat. B kümesi, V uzayında D -sınırlı, kompakt bir küme ve

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in B\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

olsun. O halde (p_k) dizisi $\mathcal{I} - D$ -sınırlı olup Sonuç 4.1.7 gereğince $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \neq \emptyset$ dir. O halde Teorem 4.1.4'ün ispatında olduğu gibi $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \subset B$ dir. Kabul edelim ki (4.1.1) bağıntısı sağlanmasın. O zaman

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_{\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))}(t)\} \notin \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $t > 0$ vardır. Şimdi

$$\mathcal{N}_{\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))}(t) = \{q \in V : F_{q, \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))}(t) > 1 - t\}$$

biçiminde tanımlansın ve $A = B \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))}(t)$ olsun. O halde A kümesi kompakttır ve (p_k) nın, $\{k_j : j \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{I}$ olacak biçimde bir (p_{k_j}) alt dizisini içerir. Bu durumda Teorem 4.1.5 gereğince $A \cap \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \neq \emptyset$ olup A kümesi, (p_k) nın bir kuvvetli $\mathcal{I}$ -yığılma noktasını içerir. Bu da çelişkidir. İspat tamamlanır. ■

Aşağıda, (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayı üzerinde kuvvetli $\Gamma - \mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramı tanımlanacaktır. Bunun için öncelikle, Pehlivan vd. (2004)'nin çalışmasında verilen bazı terimlerin olasılıksal karşılıkları inşa edilecektir.

Tanım 4.1.9 (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayında bir (p_k) dizisi verilsin ve her bir $t > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_C(t)\} \in \mathcal{I} \quad (4.1.2)$$

koşulunu sağlayan, boş olmayan ve kapalı bir $C \subset V$ verilsin. Eğer $C \setminus C_0 \neq \emptyset$ olmak üzere her bir kapalı $C_0 \subset C$ kümesi için

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_{C_0}(t_0)\} \notin \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $t_0 > 0$ varsa, C kümesine, (4.1.2) koşulunu sağlayan "minimal kapalı küme" denir.

Tanım 4.1.10 (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayında bir (p_k) dizisi ve bir C kümesi verilsin. Eğer C kümesi her bir $t > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_C(t)\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde boş olmayan minimal kapalı bir küme ise (p_k) dizisi C kümesine "kuvvetli $\Gamma - \mathcal{I}$ -yakınsaktır" denir. C kümesi, (p_k) nın kuvvetli $\Gamma - \mathcal{I}$ -limiti olarak adlandırılır.

Eğer (p_k) dizisi, $\{p\}$ tek nokta kümesine kuvvetli $\Gamma - \mathcal{I}$ -yakınsak ise $p_k \xrightarrow{s-\mathcal{I}} p$ dir.

Elbette ki bir (p_k) dizisinin kuvvetli $\Gamma - \mathcal{I}$ -yakınsak olması gerekmez. Örneğin; Örnek 4.1.2'deki (p_k) dizisini göz önüne alalım. N yeterince büyük, sabit ve tam kare bir doğal sayı olmak üzere $C = [N, \infty) \subset (\mathbb{R}, \nu, \tau, \mathbf{M})$ kümesini alalım. Bu durumda C kümesi ν olasılıksal normunun doğurduğu kuvvetli topolojiye göre kapalıdır. Ayrıca, her bir $t > 0$ için $C \subset \mathcal{N}_C(t)$ olup

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_C(t)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_d)$$

dir. N den daha büyük bir N_0 tam kare doğal sayısı için $C_0 = [N_0, \infty) \subset (\mathbb{R}, \nu, \tau, \mathbf{M})$ kümesi dikkate alınırsa $C_0 \subset C$ olup her bir $t > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_{C_0}(t)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_d)$$

dir. Bundan dolayı (4.1.2) koşulunu sağlayacak şekilde ve $C \subset (\mathbb{R}, \nu, \tau, \mathbf{M})$ olacak şekilde minimal ve kapalı bir C kümesi bulunamamaktadır. O halde (p_k) dizisi kuvvetli $\Gamma - \mathcal{I}_d$ -yakınsak olamaz.

Teorem 4.1.11 Sonuç 4.1.7'nin koşulları altında (p_k) dizisi, $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ kümesine kuvvetli $\Gamma - \mathcal{I}$ -yakınsaktır.

İspat. Sonuç 4.1.7 gereğince $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \neq \emptyset$ olup Teorem 4.1.8 gereğince $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ kümesi (4.1.2) koşulunu sağlar. $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ nın minimal olmadığı kabul edilirse, $C \subset \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ ve $[\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))] \setminus C \neq \emptyset$ olacak şekilde, (4.1.2) koşulunu sağlayan, boş olmayan kapalı bir C kümesi vardır. Bu durumda $r \notin C$ olacak şekilde bir $r \in \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ vardır. Kuvvetli topoloji regüler olduğundan $\mathcal{N}_r(t) \cap \mathcal{N}_C(t) = \emptyset$ olacak şekilde bir $t > 0$ vardır. $r \in \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ olduğundan

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_r(t)\} \notin \mathcal{I}$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_r(t)\} \subset \{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_C(t)\}$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_C(t)\} \notin \mathcal{I}$$

elde edilir. Bu da (4.1.2) koşulu ile çelişir ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki yardımcı teorem, Schweizer ve Sklar (2005)'in çalışmasındaki Teorem 12.1.5'in doğrudan bir sonucudur.

Yardımcı Teorem 4.1.12 (V, ν, τ, τ^*) bir olasılıksal normlu uzay olsun. Bu durumda herhangi bir $t > 0$ verildiğinde $p, q, r, s \in V$ olmak üzere, $p \in \mathcal{N}_q(\eta)$, $q \in \mathcal{N}_r(\eta)$ ve $r \in \mathcal{N}_s(\eta)$ olduğunda $p \in \mathcal{N}_s(t)$ olacak şekilde bir $\eta = \eta(t) > 0$ vardır.

Teorem 4.1.13 (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayında $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir (p_k) dizisi verilsin. Eğer (p_k) dizisi bir C kümesine kuvvetli $\Gamma - \mathcal{I}$ -yakınsak ise $C = \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ dir.

İspat. İlk olarak $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \subset C$ olduğunu gösterelim. Bunun için tersi kabul edilirse, $r \notin C$ olacak şekilde bir $r \in \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ vardır. C kapalı bir küme olduğundan ve kuvvetli topoloji regüler olduğu için, $\mathcal{N}_r(t) \cap \mathcal{N}_C(t) = \emptyset$ olacak şekilde bir $t > 0$ vardır. Bu durumda

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_r(t)\} \subset \{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_C(t)\}$$

dir. Buradan $\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_r(t)\} \in \mathcal{I}$ elde edilir. Fakat bu, $r \in \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ olması ile çelişir. O halde $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \subset C$ elde edilir. Şimdi $C \subset \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için tersi kabul edilirse $\xi \notin \mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))$ olacak şekilde bir $\xi \in C$ vardır. Tanım 3.4.7 yardımıyla her bir $t \in (0, t_0]$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_\xi(t)\} \in \mathcal{I} \tag{4.1.3}$$

olacak şekilde bir $t_0 > 0$ vardır. Şimdi aşağıdaki iki durumu inceleyebiliriz:

(i) ξ noktası, C kümesinin izole noktası olsun. Bu durumda $t \leq t_0$ ve

$$\mathcal{N}_\xi(t) \cap \mathcal{N}_{C \setminus \{\xi\}}(t) = \emptyset$$

olacak şekilde bir $t > 0$ vardır. O halde $\mathcal{N}_C(t) = \mathcal{N}_\xi(t) \cup \mathcal{N}_{C \setminus \{\xi\}}(t)$ olup,

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_{C \setminus \{\xi\}}(t)\} = \{k \in \mathbb{N} : p_k \in \mathcal{N}_\xi(t)\} \cup \{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_C(t)\}$$

yazılabilir. Kabul gereğince ve (4.1.3) bağıntısı yardımıyla, yeterince küçük her bir $t > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_{C \setminus \{\xi\}}(t)\} \in \mathcal{I}$$

elde edilir. Bu ise $C \setminus \{\xi\}$ kümesinin, (4.1.2) koşulunu sağlaması demektir, yani C kümesi minimal değildir. Bu da çelişkidir.

(ii) ξ noktası, C kümesinin bir limit noktası olsun, yani $i \neq j$ ise $\xi_i \neq \xi_j$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi$ olacak şekilde bir $(\xi_k) \subset C$ dizisi bulunsun. Şimdi $t > 0$ olsun ve Yardımcı Teorem 4.1.12'nin koşullarını sağlayacak şekilde bir $\eta = \eta(t) > 0$ seçelim. Ayrıca,

$$\lambda = \lambda(t) = \min \left\{ \eta(t), \frac{t}{4} \right\}$$

biçiminde tanımlansın. Şimdi $\xi_0 \in \mathcal{N}_\xi(\lambda)$ ve $\xi_0 \notin \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})$ olacak biçimde bir

$\xi_0 = \xi_k$ seçelim. Bu durumda

$$\mathcal{N}_C \left(\frac{\lambda}{2} \right) \subset \mathcal{N}_{C \setminus \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})}(t) \quad (4.1.4)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $q_0 \in \mathcal{N}_q(\frac{\lambda}{2})$ olacak ekilde $q \in \mathcal{N}_C(\frac{\lambda}{2})$ ve $q_0 \in C$ alınsın. O halde $q_0 \in \mathcal{N}_q(\lambda)$ dır. Ŗimdi iki durum sz konusudur:

(a) Eğer $q_0 \notin \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})$ ise $q_0 \in C \setminus \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})$ olup

$$q \in \mathcal{N}_{C \setminus \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \subset \mathcal{N}_{C \setminus \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})}(t)$$

dir.

(b) $q_0 \in \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})$ verilsin. O halde $q_0 \in \mathcal{N}_\xi(\lambda)$ dır. Bu durumda Yardımcı Teorem 4.1.12 yardımıyla $q \in \mathcal{N}_{\xi_0}(t)$ elde edilir. Fakat $\xi_0 \in \mathcal{N}_\xi(\lambda)$ ve $\xi_0 \notin \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})$ olduğundan $\xi_0 \in C \setminus \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})$ elde edilir. Bundan dolayı $q \in \mathcal{N}_{C \setminus \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})}(t)$ dir. Bylelikle (4.1.4) bağıntısı ispatlanmış olur. O halde (4.1.4) yardımıyla,

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_{C \setminus \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})}(t)\} \subseteq \left\{ k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_C \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right\}$$

ve buradan da

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_{C \setminus \mathcal{N}_\xi(\frac{\lambda}{2})}(t)\} \in \mathcal{I}$$

elde edilir. O halde C kümesi (4.1.2) koşulunu sağlayan bir minimal küme değildir.

Bu da çelişkidir ve ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.1.14 (V, ν, τ, τ^*) olasılıksal normlu uzayındaki bir (p_k) dizisi $\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k)) \neq \emptyset$ koşulunu sağlasın. Bu durumda (p_k) dizisinin kuvvetli Γ – $\mathcal{I}$ –yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, her bir $t > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : p_k \notin \mathcal{N}_{\mathcal{I}(\Gamma_s(p_k))}(t)\} \in \mathcal{I}$$

olmasıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, özgün olarak, olasılıksal normlu uzaylarda $\mathcal{I}-D$ -sınırlılık kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca, olasılıksal normlu uzaylarda alınan bir dizinin kuvvetli $\mathcal{I}$ -yığılma noktaları kümesinin bazı özellikleri incelenmiştir.

Daha sonra, Şençimen ve Pehlivan (2014)'ın çalışmasında bir dizinin kuvvetli istatistiksel yığılma noktaları için verilen sonuçlar, benzer bir dizinin kuvvetli $\mathcal{I}$ -yığılma noktaları kümesi için elde edilmiştir. Olasılıksal normlu bir uzayda $\mathcal{I}-D$ -sınırlı bir dizi için kuvvetli $\mathcal{I}$ -yığılma noktaları kümesinin boş kümeden farklı olması durumunda, kuvvetli $\mathcal{I}$ -yığılma noktaları kümesinin bu uzayda D -sınırlı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, olasılıksal normlu uzayda alınan kompakt bir A alt kümesi ile bu uzayda alınan bir dizinin kuvvetli $\mathcal{I}$ -yığılma noktaları kümesi arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir.

Son olarak, olasılıksal normlu uzaylarda kuvvetli $\Gamma - \mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Olasılıksal normlu uzayda alınan bir dizinin, bazı koşullar altında, kuvvetli $\mathcal{I}$ -yığılma noktaları kümesine kuvvetli $\Gamma - \mathcal{I}$ -yakınsak olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Alsina, C., Schweizer, B., Sklar, A., 1993. On the definition of a probabilistic normed space. *Aequationes Mathematicae*, 46, 91-98.
- Constantin, G., Istrăţescu, I., 1989. Elements of Probabilistic Analysis with Applications. Editura Academiei, 476 s., Bucharest.
- Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 241-244.
- Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence. *Analysis*, 5, 301-313.
- Fridy, J.A., 1993. Statistical limit points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 118 (4), 1187-1192.
- Fridy, J.A., Orhan, C., 1997. Statistical limir superior and limit inferior. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125, 3625-3631.
- Kostyrko, P., Šalát, T., Wilczyński, W., 2000. $\mathcal{I}$ -Convergence. *Real Analysis Exchange*, 26 (2), 669-685.
- Lafuerza-Guillén, B., Rodríguez-Lallena, J. A., Sempi, C., 1997. Some classes of probabilistic normed spaces. *Rendiconti di Matematica, Serie VII*, 17, 237-252.
- Lafuerza-Guillén, B., Rodríguez-Lallena, J. A., Sempi, C., 1999. A study of boundedness in probabilistic normed spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 232, 183-196.
- Lafuerza-Guillén, B., 2001. D -bounded sets in probabilistic normed spaces and in their products. *Rendiconti di Matematica*, 21, 17-28.
- Maio, G.D., Kočinac, Lj.D.R., 2008. Statistical convergence in topology. *Topology and Its Applications*, 156, 28-45.
- Menger, K., 1942. Statistical metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 28, 535-537.
- Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L., 1991. An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley&Sons, 529 s., New York.
- Saadati, S., Amini, M., 2005. D -boundedness and D -compactness in finite dimensional probabilistic normed spaces. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences (Mathematical Sciences)*, 115, 483-492.
- Sempi, C., 2006. A short and partial history of probabilistic normed spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 3, 283—300.

- Šerstnev, A. N., 1963. On the notion of a random normed space. Doklady Akademii Nauk SSSR, 149 (2), 280-283.
- Schweizer, B., Sklar, A., 1983. Probabilistic Metric Spaces. Elsevier North-Holland, 275 s., New York (1. baskı). (Reissued with an errata list, notes and supplemental bibliography by Dover Publications, 313 s., New York, 2005).
- Steinhaus, H., 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloquium Mathematicum, 2, 73-74.
- Şençimen, C., Pehlivan, S., 2008. Strong statistical convergence in probabilistic metric spaces. Stochastic Analysis and Applications, 26, 651-664.
- Şençimen, C., Pehlivan, S., 2009. Strong ideal convergece in probabilistic metric spaces. Proceedings of the Indian Academy of Sciences (Mathematical Sciences), 119, 401-410.
- Şençimen, C., Pehlivan, S., 2009. Statistically D -bounded sequences in probabilistic normed spaces. Applicable Analysis, 88, 1133-1142.
- Şençimen, C., Pehlivan, S., 2014. Strong Γ -statistical convergence in probabilistic normed spaces (yayına sunulmuştur).
- Pehlivan, S., Mamedov, M. A., 2000. Statistical cluster points and turnpike. Optimization, 48, 93-106.
- Pehlivan, S., Güncan, A., Mamedov, M. A., 2004. Statistical cluster points of sequences in finite dimensional spaces. Czechoslovak Mathematical Journal, 54 (129), 95-102.
- Tripathy, B.C., 1997. On statistically convergent and statistically bounded sequences. Bulletin of the Malaysian Mathematical Society (Second Series), 20, 31-33.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fulya ÖZTÜRK
Doğum Yeri ve Yılı : Isparta, 1990
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : fulyaozturkk@gmail.com



Eğitim Durumu

Lise : Isparta Gülkent Lisesi, 2008
Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, 2012