

T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$IR_1^3$  MINKOWSKI UZAYINDA GELİŞTİRİLMİŞ ROBOT UÇ HAREKETİ

DOKTORA TEZİ  
Gölnur ŞAFFAK ATALAY

Matematik Anabilim Dalı

ARALIK 2014  
SAMSUN





T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\mathbb{R}_1^3$  MINKOWSKI UZAYINDA GELİŞTİRİLMİŞ ROBOT UÇ HAREKETİ

DOKTORA TEZİ

Gölnur ŞAFFAK ATALAY  
(08210559)

Tezin Savuma Tarihi : 17 Aralık 2014

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Emin KASAP



**Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**Matematik Anabilim Dalında**  
**Gölnur Şaffak Atalay Tarafından Hazırlanan**  
 **$IR_1^3$  MINKOWSKI UZAYINDA GELİŞTİRİLMİŞ**  
**ROBOT UÇ HAREKETİ**

**başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 17/12/2014 tarihinde yapılan sınav ile**  
**DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.**

**Başkan :** **Prof. Dr. İsmail AYDEMİR**  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :** **Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL**  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Prof. Dr. Bünyamin KARABULUT**  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Prof. Dr. Emin KASAP**  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Doç. Dr. Keziban ORBAY**  
Amasya Üniversitesi

.../.../...

**Prof. Dr. Hüseyin DEMİR**

Enstitü Müdürü



*Aileme ve eşime*





## ÖNSÖZ

Yüksek lisans ve doktora eğitimi boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, öğrencisi olmaktan onur duyduğum , göstermiş olduğu hoşgörü ve sabır sayesinde tecrübelerinden yararlandığım, çok değerli hocam, Sayın Prof. Dr.Emin KASAP' a en derin saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Eğitim hayatım boyunca, maddi ve manevi açıdan her türlü desteklerini esirgemeyen ve destekleri ile bu tez çalışmasının başarıya ulaşmasını sağlayarak bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan, her zaman yanımda olan annem, babam, kardeşlerim ve de sevgili eşime fedakarlıkları için teşekkür etmek her ne kadar gücümü aşsada hepsine tüm kalbimle teşekkür ediyorum.

Aralık 2014

Gülnur ŞAFFAK ATALAY  
(Araştırma Görevlisi)



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ix
ÇİZELGELER LİSTESİ.....	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	xv
<b><math>IR_1^3</math> MINKOWSKI UZAYINDA GELİŞTİRİLMİŞ ROBOT UÇ</b>	
<b>HAREKETİ.....</b>	<b>xvii</b>
<b>ÖZET.....</b>	<b>xvii</b>
<b>DEVELOPED ROBOT END EFECTOR MOTION IN MINKOWSKI SPACE</b>	
<b><math>IR_1^3</math> .....</b>	<b>xix</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>xix</b>
<b>1. ROBOT İLE İLGİLİ ÖN BİLGİLER.....</b>	<b>1</b>
1.1 Robot Kavramı, Robotların İşlevleri ve Kullanım Alanları.....	1
1.2 Robot İle İlişkili Matematik .....	2
1.3 Eğrilik Teorisi Kullanılarak Robot Yörüngesi ve Uç Efektör Hareketinin Tanımlanması .....	5
1.4 Literatür Araştırması.....	6
1.5 Tezin Amacı.....	7
<b>2. GENEL BİLGİLER.....</b>	<b>9</b>
2.1 Lorentz Uzayı .....	9
2.2 $IR_1^3$ Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler .....	21
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM.....</b>	<b>25</b>
3.1 Striksiyon Eğrisi ve Üreteç Üçlüsü.....	25
3.2 t Merkez Normal Vektörünün Oluşturduğu Merkez Normal Yüzey ve Doğal Çatı.....	28
3.3 Yüzey Çatısı ve Araç Çatısı.....	30
3.4 $E^3$ Öklid Uzayındaki Geliştirilmiş Çatı.....	31
<b>4. BULGULAR.....</b>	<b>33</b>
4.1.Timelike Regle Yüzey İçin Geliştirilmiş Robot Uç Hareketi.....	33
4.1.1 Timelike doğrultmanlı timelike regle yüzey için geliştirilmiş robot uç hareketi.....	34
4.1.1.1 Geliştirilmiş çatının elde edilişi.....	37
4.1.1.2 $r_1$ merkez normal vektörünün oluşturduğu timelike merkez normal yüzey ve doğal çatı.....	41
4.1.1.3 Çatılar arasındaki ilişki.....	46
4.1.1.4 Araç çatının diferensiyel hareketi.....	50

4.1.2 Spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzey için geliştirilmiş robot uç hareketi.....	55
1. Durum.....	57
4.1.2.1. Geliştirilmiş çatının elde edilişi.....	58
4.1.2.2. $r_1$ merkez normal vektörünün oluşturduğu timelike merkez normal yüzey ve doğal çatı.....	61
4.1.2.3.i) Çatılar arasındaki ilişki.....	65
4.1.2.4.i) Araç çatının diferensiyel hareketi.....	68
4.1.2.3.ii) Çatılar arasındaki ilişki.....	75
4.1.2.4.ii) Araç çatının diferensiyel hareketi.....	78
2. Durum.....	81
4.1.2.1. Geliştirilmiş çatının elde edilişi.....	83
4.1.2.2. $r_1$ merkez normal vektörünün oluşturduğu timelike merkez normal yüzey ve doğal çatı.....	86
4.1.2.3.i) Çatılar arasındaki ilişki.....	90
4.1.2.4.i) Araç çatının diferensiyel hareketi.....	93
4.1.2.3.ii) Çatılar arasındaki ilişki.....	100
4.1.2.4.ii) Araç çatının diferensiyel hareketi.....	103
4.2. Spacelike Regle Yüzey İçin Geliştirilmiş Robot Uç Hareketi .....	107
4.2.1. Durum.....	109
4.2.1.1. Geliştirilmiş çatının elde edilişi.....	111
4.2.1.2. $r_1$ merkez normal vektörünün oluşturduğu spacelike merkez normal yüzey ve doğal çatı.....	114
4.2.1.3. i) Çatılar arasındaki ilişki.....	118
4.2.1.4. i) Araç çatının diferensiyel hareketi.....	122
4.2.1.3. ii) Çatılar arasındaki ilişki.....	128
4.2.1.4. ii) Araç çatının diferensiyel hareketi.....	132
4.2.2. Durum.....	136
4.2.2.1. Geliştirilmiş çatının elde edilişi.....	137
4.2.2.2. $r_1$ merkez normal vektörünün oluşturduğu spacelike merkez normal yüzey ve doğal çatı.....	140
4.2.2.3.i) Çatılar arasındaki ilişki.....	144
4.2.2.4.i) Araç çatının diferensiyel hareketi.....	147
4.2.2.3. ii) Çatılar arasındaki ilişki.....	154
4.2.2.4. ii) Araç çatının diferensiyel hareketi.....	157
<b>5. ÖRNEKLER.....</b>	<b>161</b>
<b>6. SONUÇ VE ÖNERİLER .....</b>	<b>173</b>
<b>KAYNAKLAR(Yazar soyadına göre gösterim) .....</b>	<b>175</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>179</b>

## ÇİZELGELER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 1.1. Robot kolu çerçeveleri.....	3



## ŞEKİLLER LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 1.1. {B} koordinat sisteminin {A} referans koordinat sistemine göre yönelimi.	2
Şekil 1.2. Robot kolu ve çevre birimleri.....	3
Şekil 1.3. Robot kolu uç noktasının hareketi .....	4
Şekil 2.1. Düzgün dairesel hareket .....	16
Şekil 2.2. Darboux vektörü .....	20
Şekil 2.3. Regle yüzey .....	22
Şekil 2.4. Regle yüzeyin striksiyon eğrisi.....	22
Şekil 3.1. Üreçer çatı .....	27
Şekil 4.1. Geliştirilmiş çatının elde edilişi .....	37
Şekil 4.2. Robot yörüngesi.....	47
Şekil 4.3. Regle yüzey kullanılarak robot yörüngesi .....	48
Şekil 4.4. Çatılar arasındaki ilişki .....	55
Şekil 4.5. Çatılar arasındaki ilişki .....	107
Şekil 4.6. Geliştirilmiş çatının elde edilişi .....	111
Şekil 4.7. Çatılar arasındaki ilişki .....	135
Şekil 4.8. Çatılar arasındaki ilişki .....	160
Şekil 5.1. Başlangıçtaki timelike regle yüzey .....	161
Şekil 5.2. Ortak yörünge eğrili robot yörünge yüzey ailesi .....	164
Şekil 5.3. Başlangıçtaki timelike regle yüzey .....	165
Şekil 5.4. Ortak yörünge eğrili robot yörünge yüzey ailesi .....	167
Şekil 5.5. Başlangıçtaki spacelike regle yüzey .....	168
Şekil 5.6. Ortak yörünge eğrili robot yörünge yüzey ailesi .....	171





## SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^3$	: 3 Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	: 3 Boyutlu Minkowski Uzayı
$\kappa$	: Eğrilik
$\tau$	: Burulma
$\lambda$	: Lancret Eğriliği
$\gamma$	: Geodezik Eğrilik
$U_r$	: Üreteç Çatının Darboux Vektörü
$U_{k_1}$	: $k_1, r_1, t_1$ geliştirilmiş çatısının Darboux Vektörü
$U_{t_1}$	: $t_1, r_1, k_1$ geliştirilmiş çatısının Darboux Vektörü
$U_{r_2}$	: Doğal Çatının Darboux Vektörü
$U_A$	: Araç Çatının Darboux Vektörü
$\Gamma, \Delta$	: Minkowski Uzayında Regle Yüzeyin Eğrilik Fonksiyonları
$\Gamma_{r_1}, \Delta_{r_1}$	: Minkowski Uzayında Merkez Normal Regle Yüzeyin Eğrilik Fonksiyonları
$X(s, v)$	: Minkowski Uzayında Regle Yüzey
$\varphi_{r_1}(s, v)$	: Minkowski Uzayında Merkez Normal Regle Yüzey
$\beta(s)$	: Minkowski Uzayındaki Regle Yüzeyin Striksiyon Eğrisi
$\beta_{r_1}(s)$	: Minkowski Uzayındaki Merkez Normal Regle Yüzeyin Striksiyon Eğrisi



# $IR_1^3$ MINKOWSKI UZAYINDA GELİŞTİRİLMİŞ ROBOT UÇ HAREKETİ

## ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde robotun tanımı, kısa tarihçesi, robotların işlevleri ve kullanım alanları, robot ile ilişki matematik, eğrilik teorisi ve literatür araştırmasından bahsedilmiştir. İkinci bölümde Minkowski uzayındaki temel kavramlar, teoremler ve regle yüzeylerden bahsedilmiştir.

Materyal ve yöntem bölümünde, çalışmamız için temel aldığımız Ryuh'un 1989 yılında yaptığı doktora tezinden kısaca bahsedilerek çalışmamızın yöntemi açıklanmıştır.

Bulgular bölümünde, ilk olarak Ryuh'un Öklid uzayında yaptığı çalışmadaki robot yörüngesini tanımlamada kullandığı üreteç çatısı 3-boyutlu Minkowski uzayında ifade edilerek, bu üreteç çatının Darboux açısı kadar döndürülmesiyle geliştirilmiş çatı tanımlandı ve bu çatının türev formülleri Darboux dönme açısına ve Lancret eğriliğine bağlı olarak hesaplandı. Daha sonra robotun hareketi için gerekli olan doğal çatı, araç çatı ve yüzey çatı tanımlanıp bu çatıların türev formülleri, Darboux vektörleri hesaplanarak çatılar arasındaki ilişki verildi. Ayrıca robotun yörünge eğrisinin türevi çatılar cinsinden hesaplandı. Böylece timelike (spacelike) doğrultmanlı bir timelike regle yüzey ile spacelike regle yüzeyi karakterize eden eğrilik fonksiyonları için bağıntılar elde edilerek robotun Minkowski uzayında farklı yörünge yüzeyi üzerindeki hareketi ve diferensiyel özellikleri incelendi. Son olarak, geliştirilmiş çatıyı tanımlamada kullandığımız Darboux açısının her farklı seçiminde, aynı yörünge eğrisine sahip robot yörünge yüzey ailesinin bir üyesinin elde edilebileceği örneklerle gösterildi.

**Anahtar Kelimeler:** Minkowski Uzayı, Geliştirilmiş Çatı, Striksiyon Eğrisi, Timelike Regle Yüzey, Spacelike Regle Yüzey, Darboux Vektörü, Robot Uç Hareketi.



# DEVELOPED ROBOT END-EFFECTOR MOTION IN MINKOWSKI SPACE

$$IR_1^3$$

## ABSTRACT

This thesis consists of six sections.

In the first section, the definition, short history, the function and usage area of robot; the connection between curvature theory and literature survey are mentioned. In the second section the basic notions theorems and ruled surfaces are mentioned.

The method of study is grounded on mentioning the master thesis of Ryuh which was written in 1989 in materials and methods section.

In findings section firstly generator frame is defined as developed frame by rotating Darboux angle and derivative formulas is calculated as connected Darboux rotating angle and Lancret curvature. Afterward, natural frame, tool frame and surface frame which is necessary for the movements of robot are defined derivative formulas of these frames are founded by calculating the Darboux vectors. Furthermore, the derivative of robot's trajectory curve is calculated as frames. Therefore, differential properties and movements on different surfaces of curve in Minkowski space is analyzed by getting the relations for curvature functions which are characterized a timelike ruled surface with the timelike (spacelike) directrix and spacelike ruled surface. Finally, to be able to get a member of trajectory surface family which has the same trajectory curve is shown with the examples in every different choice of the Darboux angle which is used to describe the developed frame.

**Key Words:** Minkowski Space; Developed Frame; Striction Curve; Timelike Ruled Surface; Spacelike Ruled Surface; Darboux Vector; Robot End-Effector Motion.



## 1. ROBOT İLE İLGİLİ ÖN BİLGİLER

### 1.1 Robot Kavramı, Robotların İşlevleri ve Kullanım Alanları

Robot kavramı uluslararası literatüre, ilk defa Çekoslovak yazar Kan Capek tarafından sahnelenen ‘Rossum’ un Evrensel Robotları’ adlı tiyatro eseri ile girmiştir. Bu eserde geçen ‘Robota’ sözcüğü, köle, işçi anlamlarına gelmektedir. Çağımızın ünlü bilim-kurgu yazarlarından Dr. Isaac Asimov, robot davranışlarını gerçekçi bir biçimde incelemiş, 1950’ li yıllarda yayınlanan eserlerinde, bu davranışları inceleyen bilim dalını ‘Robotik’ olarak adlandırmıştır. Dr Asimov robot-insan ilişkileriyle, robotları belli bir oranda tanımlayan üç kanun ortaya koymuştur. Bunlar;

1. Robot hiçbir zaman insana zarar verecek hareketler yapmamalı ve insanın zarar görebileceği hallerde hareketsiz kalmalıdır.
2. Birinci kanunu çiğnememek şartıyla robot, insana her zaman itaat etmelidir.
3. Birinci ve ikinci kanunu çiğnememek şartıyla robot kendini de korumalıdır (Özsoy, Ö. 2002).

O halde robot tanımını şu şekilde verebiliriz:

Bir robot, çeşitli işleri yerine getirmek üzere, malzeme, parça veya özel aletleri; değişken, programlanabilir hareketlerle taşımak üzere tasarlanmış, çok fonksiyonlu yeniden programlanabilir bir aygıttır.

Robot uygulamaları tıpta, haberleşmede, askeri uygulamalarda, başlıca elektronik, mekanik, otomotiv ve elektrik olmak üzere endüstrinin hemen her alanında görülebilmektedir. Robotlar döküm yolu ile biçimlendirme (özellikle baskı dökümde), kaynak (özellikle nokta kaynağı, MIG/MAG, TIG ve plazma), sıcak dövme, spreyle boyama, paletleme, takım tezgâhları yüklenmesi ve montaj hatlarında başarı ile kullanılmaktadırlar. Ayrıca, robotlar; insanlar için tehlikeli sayılabilecek yerlerde kullanılabilirler. Örneğin uzayda, maden ocaklarında, su altında çalışan robotlar bulunmaktadır. İnsan sağlığı için tehlike arz eden radyoaktif maddelerin, zehirli kimyasal bileşiklerin ve hastalık yapıcı bakterilerin bulunduğu alanlarda robotlar faydalı olabilirler.

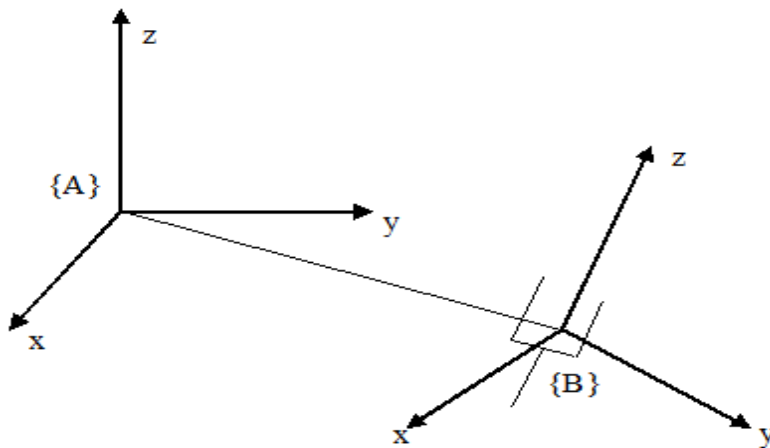
## 1.2 Robot İle İlişkili Matematik

Bu bölümde robot bilimi için temel matematiksel kavramlar (Bingül Z., Küçük S., 2005) den yararlanılarak verilmiştir.

Robotlar kendilerinin ve çevrelerindeki nesnelerin bulunduğu 3 boyutlu uzayda hareket ederler. Robotun ve çevresindeki nesnelerin konumlarını ve birbirlerine göre yönelimlerini belirlemek için robotun ve çevresindeki nesnelerin merkezlerine birer koordinat sistemi yerleştirilir. Tanımlanacak bütün konum ve yönelimler bu koordinat sistemlerine göre gerçekleştirilir. Robot sistemlerinin çalışma uzaylarında belirlenen noktalara gitmesini sağlamak için koordinat sistemleri ile ilişkilendirilmişlerdir.

**Konum:** 3-boyutlu uzayda bir nokta bu koordinat sisteminin merkezlerine göre tanımlanmış vektörlerle gösterilebilir .

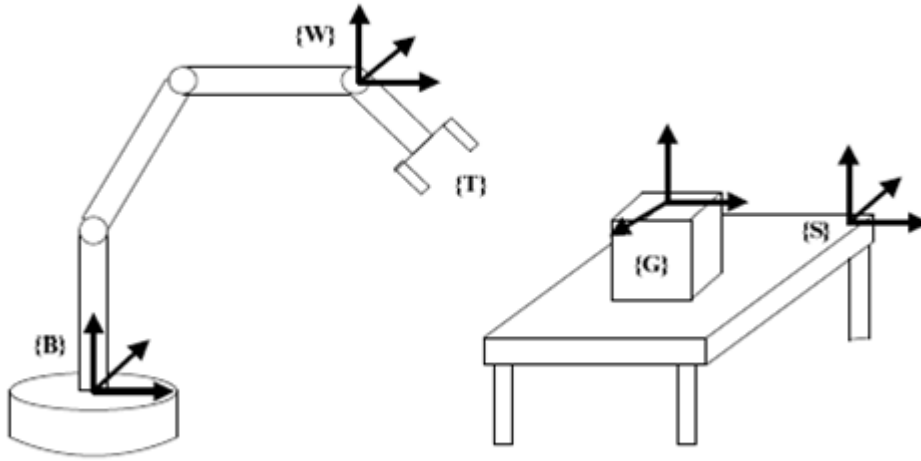
**Yönelim:** 3 boyutlu uzayda, bir noktanın herhangi bir koordinat sistemine göre konumunun yanında yönelimi de tanımlanır. Yönelim, bir koordinat sisteminin başka bir koordinat sistemine göre dönme miktarıdır. Bir katı cismin yönelimini başka bir referans koordinat sistemine göre tanımlamak için katı cisme bir koordinat sistemi yerleştirilir. Aşağıdaki şekilde uç işlevcisine {B} koordinat sistemi yerleştirilerek {A} referans koordinat sistemine göre yönelimi tanımlanır.



**Şekil 1.1.** {B} koordinat sisteminin {A} referans koordinat sistemine göre yönelimi



Eğer robotun her bir eklemine bir koordinat sistemi yerleştirilirse komşu iki eklem arasındaki ilişki bir dönüşüm matrisi ile ifade edilir. İlk ekleme ait dönüşüm matrisi ilk ekleme ile ana çerçeve arasında bir ilişki tanımlarken son ekleme ait dönüşüm matrisi ise uç işlevci ile son eklem arasında bir ilişki tanımlar. Arka arkaya sıralanan bu eklem dönüşüm matrislerinden yararlanılarak ana çerçeveye araç çerçevesi arasında bir ilişki tanımlanır. Bu ilişki ile araç çerçevenin yönelimini ve konumunu ana çerçeveye göre ifade edebiliriz.



**Şekil 1. 2.** Robot kolu ve çevre birimleri

Robot kolunun ve çevresindeki birimlerin adları Çizelge 1.1 de açıklanmıştır.

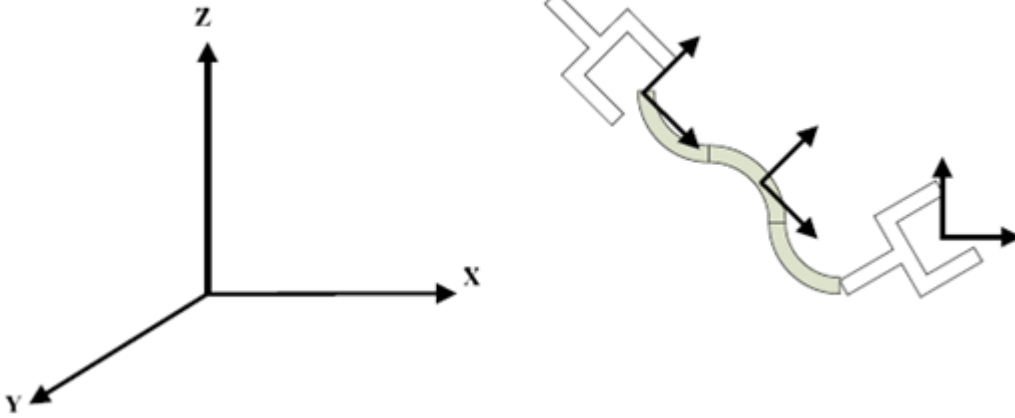
**Çizelge 1.1.** Robot kolu çerçeveleri

Ana Çerçeve {B} (Base Frame)	Robotun sabit, yani hareket etmeyen parçasıdır.
İstasyon Çerçeve {S} (Station Frame)	İstasyon çerçevesine evrensel çerçeve de denir. Robot bütün hareketlerini bu çerçevede yapar.
Bilek Çerçevesi {W} (Wrist Frame)	Bilek çerçevesi robotun son bağlantısına yerleştirilmiştir.
Araç Çerçevesi {T} (Tool Frame)	Bu çerçeveye robotun herhangi bir işlevi gerçekleştirmesi için eleman yerleştirilir.
Hedef Çerçevesi {G} (Goal Frame)	Robotun işlem yapacağı nesnenin üzerindeki çerçevedir.

## Yörünge Planlaması

Robotun uç işlevcisinin başlangıç pozisyonundan sonuç pozisyonuna kadar hareketi esnasında yer değiştirme ve dönme yollarını belirleyen noktaların kümesine **yörünge** denir. Bir uç işlevcinin başlangıç pozisyonu ve yönelimi ile hedef pozisyonu ve yönelimi verildiğinde uç işlevcinin başlangıçtan hedefe doğru sarsıntısız bir yörüngede hareket etmesini isteriz. Uç işlevci istenilen hareketi eklem hareketlerini kontrol ederek gerçekleştirdiği için yörünge hareketinde uygun eklem hareketlerini hesaplamak gerekir. Yörünge planlaması, robot bir başlangıç noktasından bir hedef noktaya giderken, hareketin zamana göre değişiminin planlaması olarak tanımlanmaktadır. Robotun uç noktasını bir noktadan başka bir noktaya taşıırken, her noktada eklem açılarının bilinmesi gerekmektedir. Bu ise istenilen uç işlemci hızını ve dolayısıyla eklem hızlarını hesaplayarak yapılabilir. Eklem açıları ve hızları verilen robotun çalışmasını sağlar.

Robot hareketinde temel problem, robot ucunu o anki başlangıç değerinden istenilen bir son değere taşımaktır. Bu harekette, robot kolunun hem yönü hem de pozisyonu değişmektedir. Yolun daha detaylı tanımlanması istendiğinde, uç nokta için, başlangıç ve sonuç noktaları arasında geçiş noktaları ya da ara noktalar tanımlanmalıdır. Bu geçiş noktalarının her biri, uç noktanın temele göre pozisyonunu ve yönünü belirleyen çerçevelerdir. Hareket üzerindeki bu uzaysal sınırların yanı sıra kullanıcı, hareketin geçici özelliklerini de belirleyebilir.



Şekil 1.3. Robot kolu uç noktasının hareketi

### **1.3 Eğrilik Teorisi Kullanılarak Robot Yörüngesi ve Uç Efektör Hareketinin Tanımlanması**

Bir robot uç efektör hareketi bir robot yörüngesi olarak tanımlanır ve robot yörünge bir regle yüzey ve dönme (spin) açısı ile belirlenebilir (Ryuh,1989). Robot yörünge; uç efektörün sabit bir noktada pozisyonlarının hızları ve ivmeleri ile uç efektörün bir dizi yönelimleri, açısal hızı ve açısal ivmesinden oluşur. Uç efektörde sabit nokta aracın merkez noktası olarak adlandırılır ve TCP ile gösterilir. Uç efektörün yönünü uç efektöre bağlı bir koordinat çatısı belirler. Bu koordinat çatısı araç çatı olarak adlandırılır ve merkez noktası araç çatısının orijini olarak seçilir. Araç çatısının her bir vektörü merkez noktası tarafından izlenen ortak bir doğrultmanı paylaşan üç tane regle yüzey oluşturur. Robot yörüngesini temsil için bunlardan bir tanesini kullanmak yeterlidir (Ryuh,1989).

Bir regle yüzeyin striksiyon eğrisi gibi eşsiz bir eğriye sahip olması diğer yüzeylerde olmayan önemli bir özelliğidir. Striksiyon eğrisi, komşu iki ana doğru arasındaki ortak bir dik çizgi yardımı ile en kısa mesafe olarak belirlenir. Robotik literatürde mevcut olan yörünge planlama yöntemleri ile robot uç efektörünün ilk ve son konumları arasında genellikle düz bir çizgi yolu kabul edilir. İlk ve son pozisyonları arasındaki dönme matrisleriyle yönelim geçişi sağlanır. İlk rotasyon gerekli yaklaşım yönünde efektör sonuna hizalamak için hizmet vermektedir. İkinci rotasyon ise uç efektörün yönünü hizalamak için hizmet vermektedir.

Eğrilik teorisi; bir katı cismin hareketini, düzlemleri, doğruları ve yörünge noktalarının içsel geometrik özelliklerini inceler. Ayrıca, hareketli katı cismin hız ve ivme dağılımı ile ilgilenir. Eğrilik teorisinden elde edilen sonuçlar; düzlemsel , küresel ve uzaysal mekanizmaların sentezine ve analizine uygulanır. Böylece eğrilik teorisi bir robot uç efektör hareketinin diferensiyel özelliklerini belirlemek için en iyi yoldur. Ryuh ve Pennock (1988), robotik aygıtların yoğun hareket özelliklerini çalışmak için regle yüzeyin eğrilik teorisini kullanmışlardır. Uç efektör hareketinin diferensiyel özellikleri eğrilik teorisinden elde edilmiştir. Bu hareket özellikleri, uç efektörün sabit noktasının hız ve ivmesini ve uç efektörün açısal hız ve ivmesini belirlemek için kullanılmıştır. Bu kinematik bilgi robot yörünge planlaması için önemlidir. Regle yüzeyin eğrilik teorisi yörünge planlaması için robot uç hareketinin diferensiyel özelliklerini belirler. Ryuh ve Pennock (1989), geometrik modelleme tekniğiyle regle yüzeyin eğrilik teorisini temel alarak robot yörünge planlamasının methodunu

vermişlerdir. Bu method, eğrinin geometrik modelleme tekniği kullanılarak regle yüzeyin nasıl üretileceğini göstermektedir. Robot yörünge planlaması için gerekli olan hareketin bağımsız zaman özellikleri, robot uç efektör hareketinin diferensiyel özellikleri ile ilişkilidir. Eğrilerin 1. dereceden türevleri konumsal değişimlerini verir. Buna pozisyonel varyasyonda denilebilir. Ayrıca striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı çatının Darboux vektörü regle yüzeyin açısız hareketini tanımlar. Böylece striksiyon eğrisinin konumsal değişimi çizgisel hız olarak kabul edilebilirken, Darboux vektörleride açısız hız olarak kabul edilebilir.

#### **1.4 Literatür Araştırması**

Minkowski Uzayı, Alman matematikçi Hermann Minkowski tarafından 1907 yılında ifade edilmiştir. Matematik ve fizikte Minkowski uzayı Einstein'ın izafiyet teorisini formüle etmek için en uygun yoldur. Minkowski uzayı spacetime'ı göstermek için uzayın genel 3 boyutu ile zamanın bir boyutunun birleştirilmesiyle elde edilen 4 boyutlu bir manifolddur. Albert Einstein'ın izafiyet teorisini açıkladıktan sonra Hermann Minkowski uzay ve zamanı aynı durumda ele almış ve iki tarafı tek çatı altında birleştirmiştir. Spacetime fiziksel olayların yer aldığı bir alandır. Örnek olarak, gezegenlerin güneş etrafındaki hareketi spacetime'in özel bir çeşidi olarak tanımlanabilir. Çoğunlukla zaman boyutu dikey bir boyut olarak ele alınır, uzayda Dünya'nın uydusu olan Ay'ın hareketi nerdeyse çember şeklindeki Minkowski uzayında bir helis şeklindedir.

Bir doğrunun bir eğriye dayanarak hareket etmesiyle bir regle yüzey oluşur. Minkowski uzayında regle yüzeyler ile ilgili birçok çalışmalar mevcuttur. Bir regle yüzeyin diferensiyel geometrisi vektör hesabının geleneksel teknikleri kullanılarak geliştirilir. McCarthy ve Roth (1981), uzay kinematikleri için çizgi yörüngelerinin skalar eğrilik teorisini elde etmek için bu yaklaşımı kullanmışlardır. McCarthy ve Roth' un yaklaşımı, Kruppa (1957) tarafından verilen bir regle yüzeyin analizine dayanmaktadır. Aynı zamanda McCarthy (1987), bir regle yüzeyin eğrilik teorisinin hem skalar hem de dual formüllerini elde etmiştir ve bu iki formül arasında bağıntılar vermiştir. Bu çalışma temel alınarak Ayyıldız ve Yücesan (2006), Minkowski uzayında null olmayan eğriler için çizgi yörüngelerinin eğrilik teorisinin skalar ve dual formüllerini elde etmişlerdir. Eğrilik yörüngesi üzerine yapılan çalışmalardan birisi de Ersoy ve Tosun (2008) tarafından, 3-boyutlu Minkowski uzayda Cartan çatılı bir

null eğri boyunca yönlendirilmiş bir null doğrunun hareketi ile sıkı sıkıya bağlı null scrolların yörüngesi üzerinedir. Bu çalışmada aynı zamanda null scrollun baz eğrisinin jeodezik eğriliği, jeodezik torsiyonu ve eğrilikleri arasında bazı ilişkiler elde etmişlerdir. Lorentz uzayında null eğriler ve yüzeyler üzerine yapılan çalışmalardan biriside Çöken ve Çiftçi (2007) ye aittir. Yazarlar bu çalışmalarında üç boyutlu Lorentz uzayında bir Cartan çatılı null eğrinin Frenet çatısı ile yüzeyin Darboux çatısını karşılaştırmışlardır. Eğrilik teorisi, uzay katı hareketini belirlemenin en şık ve en basit yoludur. Bu nedenle, eğrilik teorisi çeşitli alanlara ışık tutabilecek önemli bir analitik araçtır. Örneğin; Kirson (1975) doktora tezinde, uzay kinematığında eğrilik teorisini çalışmıştır. Ryuh ve Pennock (1989) bir robotik aracın ani hareket özelliklerini belirlemek için bir regle yüzeyin eğrilik teorisini kullanmışlardır. Bir robot kolunun aparatı olan uç-efektör hareketinin diferensiyel özellikleri eğrilik teorisinden elde edilmiştir. Hareket özellikleri uç-efektöre sabitlenmiş bir noktanın hızını ve ivmesini belirlemek için kullanılmıştır. Bu kinematik bilgi robot yörünge planlamasında oldukça önemlidir. Robot yörünge planlaması ile ilgili birçok çalışma vardır. Kaynaklarda belirttiğimiz Brady, M. ve diğerleri, Koren, Y. , Paul, R. P. , bunlardan sadece birkaçıdır. Ekici ve diğ. (2008 ) üç boyutlu Minkowski uzayda timelike doğrultmanlı bir timelike regle yüzeyin robot uç hareketini ve diferensiyel özelliklerini incelemişlerdir. Turhan (2010), üç boyutlu Minkowski uzayda lightlike doğrultmanlı bir Lorentz regle yüzeyin eğrilik teorisini çalışmıştır. Ayrıca Lorentz regle yüzeyin şeklini belirleyen eğrilik fonksiyonları için bağıntılar elde ederek bir Lorentz regle yüzeyin eğrilik teorisini, bir robot uç-efektör hareketinin yörünge planlaması için kullanmıştır. Bu metodla, bir eğrinin geometrik modeli kullanılarak bir regle yüzeyin nasıl üretilebileceğini göstermiştir

### **1.5 Tezin Amacı**

Robot manipülatörlerin uç işlevcilerinin, çalışma uzayı içindeki nesnelere çarpmadan kendisine verilen görevi yerine getirebilmesi için önceden planlanmış bir yörünge üzerinde hareket etmesi gerekmektedir. Yörünge izleme problemi, yörünge üzerinde merkez noktada çatılar belirlenerek, manipülatörün uç-işlevcisinin bu çatılar üzerinden hareketinin kontrol edilmesini içerir. İlk olarak uç işlevcinin başlangıç ve hedef noktalarının konumu ve yönelimi tanımlanan çatılar arasındaki dönme açıları

cinsinden hesaplanır. Daha sonra da bu çatılar arasındaki ilişki verilerek ,uç işlevcinin başlangıç noktasından hedef noktasına giden yörünge hareketi sağlanmış olur.

Bu tezde, ilk olarak Ryuh'un Öklid uzayında yaptığı çalışmadaki robot yörüngesini tanımlamada kullandığı üreteç çatısını Darboux açısı kadar döndürerek geliştirilmiş çatı tanımlanarak 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike (spacelike) doğrultmanlı bir timelike regle yüzey ile spacelike regle yüzeyi karakterize eden eğrilik fonksiyonları için bağıntılar elde edildi. Daha sonra robotun hareketi için gerekli olan çatılar tanımlanıp bu çatılar arasındaki ilişki verilerek, robotun Minkowski uzayında farklı yörünge yüzeyi üzerindeki hareketi ve diferensiyel özellikleri incelendi. Kısacası bu çalışmada, timelike (spacelike) regle yüzeyin eğrilik teorisinin; bir robot uç efektör hareketinin yörünge planlaması için nasıl kullanılacağı gösterildi. Ayrıca tanımladığımız geliştirilmiş çatı vasıtasıyla robota farklı yörünge yüzeyleri kazandırılarak robotun çalışma alanının genişletilmesi amaçlandı.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1 Lorentz Uzayı

**Tanım 2.1.1:**  $V$  bir reel vektör uzayı olsun. Bir

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  ve  $\forall u, v, w \in V$  için;

(i)  $g(u, v) = g(v, u)$ ,

(ii)  $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$ ,  $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özelliklerine sahip ise bu dönüşüme  $V$  vektör uzayı üzerinde bir **simetrik bilinear form** denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.1.2:**  $V$  reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form  $g$  olsun.

(i)  $\forall v \in V$  ve  $v \neq 0$  için  $g(v, v) > 0$  ise  $g$  simetrik bilinear formuna **pozitif tanımlı**,

(ii)  $\forall v \in V$  ve  $v \neq 0$  için  $g(v, v) < 0$  ise  $g$  simetrik bilinear formuna **negatif tanımlı**,

(iii)  $\forall v \in V$  ve  $v \neq 0$  için  $g(v, v) \geq 0$  ise  $g$  simetrik bilinear formuna **yarı-pozitif tanımlı**,

(iv)  $\forall v \in V$  ve  $v \neq 0$  için  $g(v, v) \leq 0$  ise  $g$  simetrik bilinear formuna **yarı-negatif tanımlı**,

(v)  $\forall v \in V$  için  $g(v, w) = 0$  iken  $w = 0$  ise  $g$  simetrik bilinear formuna **non-dejeneredir** denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.1.3:**  $V$  bir reel vektör uzayı  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü simetrik, bilinear ve non-dejenerere ise  $g$  ye  $V$  üzerinde bir **skalar çarpım**, bu durumda  $V$  vektör uzayına da **skalar çarpım uzayı** denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.1.4:**  $V$  bir reel vektör uzayı ve  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $V$  üzerinde bir simetrik bilinear form olsun.  $g_w : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu  $W$  altuzayının boyutuna  $g$  simetrik bilinear formunun **indeksi** denir ve  $v$  ile gösterilir.  $g$

skalar çarpımının indeksi  $\nu$  ise  $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$  dir. Ayrıca  $V$  skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı  $g$  skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır (O’neill, 1983).

**Tanım 2.1.5:**  $V$  bir skalar çarpım uzayı olsun.  $V$  nin indeksi  $\nu$  olmak üzere  $\nu = 1$  ve  $\text{boy}V \geq 2$  ise  $V$  skalar çarpım uzayına bir **Lorentz uzayı** denir (O’neill, 1983).

**Tanım 2.1.6:**  $\mathbb{R}^n$ ;  $n$ -boyutlu, standart reel vektör uzayı olsun.  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$  ve  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  olmak üzere,

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow g(X, Y) = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i$$

fonksiyonu bir skalar çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona  $\mathbb{R}^n$  üzerinde **Lorentz metriği** denir (O’neill, 1983).

**Tanım 2.1.7:**  $\mathbb{R}^n$  üzerinde tanımlı Lorentz metriği ile birlikte  $\{\mathbb{R}^n, g\}$  ikilisine  $n$ -boyutlu Lorentz uzayı veya kısaca **Lorentz uzayı** denir ve  $\mathbb{I}L^n$  ile gösterilir (O’neill, 1983).

**Tanım 2.1.8:**  $\mathbb{I}L^n$ ,  $n$ -boyutlu bir Lorentz uzayı olsun. Bir  $X \in \mathbb{I}L^n$  vektörü için;

- (i)  $g(X, X) > 0$  veya  $X = 0$  ise  $X$  e **uzaysı (spacelike)** vektör,
- (ii)  $g(X, X) < 0$  ise  $X$  e **zamansı (timelike)** vektör,
- (iii)  $g(X, X) = 0$  ve  $X \neq 0$   $X$  e **ışıkı (lightlike veya null)** vektör denir (O’neill, 1983).

**Tanım 2.1.9:** Bir  $X \in \mathbb{I}L^n$  vektörünün normu  $\|X\|_{\mathbb{I}L} = \sqrt{|g(X, X)|}$  ile tanımlanır (O’neill, 1983).

**Tanım 2.1.10:**  $X, Y \in \mathbb{I}L^n$  için  $X \neq 0$  ve  $Y \neq 0$  olmak üzere;  $g(X, Y) = 0$  ise,  $X$  ve  $Y$  vektörlerine ortogonal vektörler denir ve  $X \perp Y$  şeklinde gösterilir (O’neill, 1983).

**Teorem 2.1.11:**  $X, Y \in \mathbb{I}L^n$  için  $X \neq 0$  ve  $Y \neq 0$  olmak üzere;  $g(X, Y) = 0$  olsun. Eğer  $X$  timelike vektör ise, bu durumda  $Y$  spacelike vektördür (Ratcliffe, 1994).

**Teorem 2.1.12:**  $\mathbb{I}L^n$ ,  $n$ -boyutlu bir Lorentz uzayı ve  $X \in \mathbb{I}L^n$  olsun. Bu durumda,

- (i)  $\|X\|_{\mathbb{I}L} > 0$ ,
- (ii)  $\|X\|_{\mathbb{I}L} = 0 \Leftrightarrow X$  bir null vektördür,
- (iii)  $X$  bir timelike vektör ise  $\|X\|_{\mathbb{I}L}^2 = -g(X, X)$  dir,



(iv)  $X$  bir spacelike vektör ise  $\|X\|_{\mathbb{L}^n}^2 = g(X, X)$  dir (O’neill, 1983).

**Tanım 2.1.13:**  $\mathbb{L}^n$ ,  $n$ -boyutlu bir Lorentz uzayı,  $M \subset \mathbb{L}^n$  bir eğri olsun.  $M$  eğrisinin teğet vektör alanı  $T$  olmak üzere;

(i)  $g(T, T) > 0$  ise  $M$  eğrisine **uzaysı (spacelike) eğri**,

(ii)  $g(T, T) < 0$  ise  $M$  eğrisine **zamansı (timelike) eğri**,

(iii)  $g(T, T) = 0$  ise  $M$  eğrisine **ışıksı (lightlike veya null) eğri** denir (O’neill, 1983).

**Tanım 2.1.14:**  $\mathbb{L}^n$ ,  $n$ -boyutlu bir Lorentz uzayı,  $M \subset \mathbb{L}^n$ ,  $(I, \alpha)$  koordinat

komşuluğu ile verilen bir eğri olsun.  $a, b \in I$  olmak üzere  $M$  eğrisinin  $\alpha(a)$  ve  $\alpha(b)$  noktaları arasındaki yay-uzunluğu,

$$s_\alpha = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

dir (O’neill, 1983).

**Teorem 2.1.15:**

i)  $X, Y \in \mathbb{L}^n$  pozitif (negatif) timelike vektörler olsunlar. Bu durumda  $g(X, Y) \leq \|X\| \|Y\|$  eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart  $X$  ve  $Y$  nin lineer bağımlı olmasıdır.  $X$  ve  $Y$  pozitif (negatif) timelike vektörler ise  $g(X, Y) = \|X\| \|Y\| \cosh \varphi$ ,  $\varphi = \eta(X, Y)$  olacak şekilde bir tek  $\varphi > 0$  reel sayısı vardır. Bu  $\varphi$  açısına  $X$  ve  $Y$  vektörleri arasındaki **Lorentzian timelike açı** denir.

ii)  $X, Y \in \mathbb{L}^n$  spacelike vektörler olsunlar. Bu durumda  $|g(X, Y)| \leq \|X\| \|Y\|$  eşitsizliği vardır. Eğer  $X$  ve  $Y$  nin gerdiği düzlem spacelike ise  $g(X, Y) = \|X\| \|Y\| \cos \varphi$ ,  $\varphi = \eta(X, Y)$  olacak şekilde bir tek  $0 \leq \varphi \leq \pi$  sayısı vardır. Bu açıya  $X$  ve  $Y$  vektörleri arasındaki **Lorentzian spacelike açı** denir.

iii)  $X, Y \in \mathbb{L}^n$  spacelike vektörler olsunlar. Eğer  $X$  ve  $Y$  nin gerdiği düzlem timelike ise  $|g(X, Y)| > \|X\| \|Y\|$  eşitsizliği vardır. Bu durumda  $|g(X, Y)| = \|X\| \|Y\| \cosh \varphi$ ,  $\varphi = \eta(X, Y)$  olacak şekilde bir tek reel  $\varphi > 0$  sayısı vardır. Bu açıya  $X$  ve  $Y$  vektörleri arasındaki **Lorentzian timelike açı** denir.

iv)  $X \in \mathbb{L}^n$  spacelike ve  $Y \in \mathbb{L}^n$  pozitif timelike vektörler olsunlar. Bu durumda  $|g(X, Y)| = \|X\| \|Y\| \sinh \varphi$ ,  $\varphi = \eta(X, Y)$  olacak şekilde bir tek reel  $\varphi > 0$  sayısı vardır .

Bu  $\phi$  açısına  $X$  ve  $Y$  vektörleri arasındaki **Lorentzian timelike açı** denir (Ratcliffe, 1994).

**Tanım 2.1.16:**  $\mathbb{IL}^n$ ,  $n$ -boyutlu bir Lorentz uzayı,  $M \subset \mathbb{IL}^n$  de  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun.  $M$  eğrisinin birim teğet vektör alanı  $T$  ve  $U$  da sabit bir birim vektör olmak üzere,  $\forall s \in I$  için  $T$  ile  $U$  arasındaki açı sabit ise  $M \subset \mathbb{IL}^n$  eğrisine bir **eğilim çizgisi (helis)** denir (Ekmekçi, 1991).

**Tanım 2.1.17:**  $\mathbb{IL}^3$ , 3-boyutlu bir Lorentz uzayı ve  $M \subset \mathbb{IL}^3$  de  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun.  $M$  nin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğriliği ve burulması, sırasıyla,  $\kappa$  ve  $\tau$  olsun.

$$M \text{ bir eğilim çizgisidir} \Leftrightarrow \forall s \in I \text{ için } \frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

dir (Ekmekçi, 1991).

**Tanım 2.1.18:**  $\mathbb{IL}^3$ , 3-boyutlu bir Lorentz uzayında iki vektör  $X$  ve  $Y$  olsun.  $X = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $Y = (y_1, y_2, y_3)$  olmak üzere

$$(x_3y_2 - x_2y_3, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

vektörüne  $X$  ve  $Y$  nin **vektörel çarpımı (dış çarpımı)** denir ve  $X \times Y$  veya  $X \wedge Y$  şeklinde gösterilir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \text{ ve } e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$X \times Y = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Buna göre

$e_1 \times e_2 = e_3$ ,  $e_2 \times e_3 = -e_1$ ,  $e_3 \times e_1 = -e_2$  dir. Burada saat yönünün tersi pozitif yön olarak alınmıştır. Eğer saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilirse,

$e_1 \times e_2 = -e_3$ ,  $e_2 \times e_3 = e_1$ ,  $e_3 \times e_1 = e_2$  olur. Bu durumda

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

**Teorem 2.1.19:**  $\mathbb{L}^3$ , 3-boyutlu bir Lorentz uzayında üç vektör  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)$  ve  $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, z_3)$  olsun. Bu durumda

(i)  $g(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = -\det(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ ,

(ii)  $(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \times \mathbf{Z} = -g(\mathbf{X}, \mathbf{Z})\mathbf{Y} + g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\mathbf{X}$ ,

(iii)  $g(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X}) = 0$  ve  $g(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = 0$ ,

(iv)  $g(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = -g(\mathbf{X}, \mathbf{X})g(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) + (g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))^2$  dir (Turgut, 1995).

**Teorem 2.1.20:**  $\mathbb{L}^3$ , 3-boyutlu Lorentz uzayında iki vektör  $\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{Y}$  olsun. Bu taktirde

i)  $\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{Y}$  spacelike vektör ise  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  bir timelike vektördür.

ii)  $\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{Y}$  timelike vektör ise  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  bir spacelike vektördür.

iii)  $\mathbf{X}$  spacelike ve  $\mathbf{Y}$  timelike vektör ise  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  bir spacelike vektördür.

iv)  $\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{Y}$  null vektör ise  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  bir spacelike vektördür.

v)  $\mathbf{X}$  timelike ve  $\mathbf{Y}$  null vektör ise  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  bir spacelike vektördür.

vi)  $\mathbf{X}$  spacelike ve  $\mathbf{Y}$  null vektör olmak üzere  $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$  ise  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  bir null vektör, eğer  $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \neq 0$  ise  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  bir spacelike vektördür (Turgut, 1995).

**Tanım 2.1.21:**  $M \subset \mathbb{R}_1^3$  eğrisinin  $\{T, N, B\}$  3-ayaklısının her  $s$  anında bir helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin  $s$  parametresine karşılık gelen  $\alpha(s)$  noktasındaki Darboux (ani dönme) ekseni denir. Bu ekseni belirleyen vektör Darboux vektörü olarak adlandırılır (Ekmekçi, 1991).

Diferensiyel geometride, özellikle uzay eğrilerin teorisinde, Darboux vektörü bir uzay eğrisinin Frenet çatısının alansal hız vektörüdür. Darboux vektörü, ismini eğrileri kinematik açıdan inceleyen Jean Gaston Darboux (1887) dan almıştır. Ayrıca Darboux vektörü, açısız momentum vektörüyle doğru orantılı olduğu için açısız momentum olarak da adlandırılır. Birim hızlı bir eğri boyunca hareket eden bir katı cisim düşünüldüğünde bu cismin ani hareketi, eğrinin  $T$  teğet vektörü ve  $W$  Darboux vektörü (açısız hız vektörü) tarafından tanımlanmaktadır.

Bulgular kısmında verdiğimiz kavramların daha iyi anlaşılması için bazı fiziksel kavramlara gereksinim vardır. Şimdi bu kavramlara kısaca göz atalım:

**Tanım 2.1.22:** Hareketi doğuran sebeplerin göz ardı edildiği ve hareketin nasıl gerçekleştiğinin ele alındığı mekanik dalına **kinematik** denir. Kinematik, yunanca hareket anlamına gelen **kinema** sözcüğünden türetilmiştir.

Bu durumda hareketin ne olduğu sorusu akla gelir. En basit ifadeyle hareket cismin yer değiştirmesidir. Birim zamanda cismin aldığı yola **hız**, birim zamanda hızdaki değişim miktarına da **ivme** adı verilir (Blaschke, 1949).

**Tanım 2.1.23:** Dairesel bir yörüngede cismin hızının büyüklüğü (sürat) zamanla değişmiyor ise bu harekete **düzgün dairesel hareket**, aksi halde **düzgün olmayan dairesel hareket** denir (Blaschke, 1949).

Düzgün dairesel harekette bir tam dolanım için geçen süreye **periyot** denir, T ile gösterilir ve birimi saniyedir. Diğer yandan bir saniyede ki dolanım sayısına da frekans denir, **f** ile gösterilir ve birimi Hertz dir. Periyot ve frekans arasında,

$$f = \frac{1}{T}$$

bağıntısı vardır.

Düzgün dairesel harekette biri çizgisel, diğeri de açısal hız olmak üzere iki çeşit hız tanımlanır.

**Tanım 2.1.24 (Çizgisel Hız):** Düzgün dairesel hareket yapan bir cismin, daire yayı üzerinde birim zamanda aldığı yola **çizgisel hız** denir. **v** çizgisel hız vektörü daire yayına teğet olup, yarıçap vektörüne diktir (Blaschke, 1949).

O halde çizgisel hızın ifadesi

$$\begin{aligned} x = vT &\Rightarrow 2\pi r = vT \\ &\Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} \end{aligned}$$

veya  $f = \frac{1}{T}$  olduğundan

$$v = 2\pi r f$$

dir. Çizgisel hızın birim metre / saniye dir .

**Tanım 2.1.25 (Açısal Hız):** Cismi merkeze bağlayan yarıçap vektörünün, birim zamanda radyan cinsinden taradığı açıya **açısal hız** denir ve  $\omega$  ile gösterir.  $\omega$  nın birimi rad/sdr (Blaschke, 1949).

Dairesel hareket yapan bir cisim merkeze bağlayan yarıçap vektörü bir tam devir yaptığında,  $2\pi$  radyan açı tarar ve bu esnada bir periyotluk (T) zaman geçer. O halde açısal hız;

$$\begin{aligned}\theta = \omega T &\Rightarrow 2\pi = \omega T \\ &\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}\end{aligned}$$

$f = \frac{1}{T}$  olduğundan

$$\omega = 2\pi f$$

dır.

Çizgisel hız ile açısal hız arasındaki bağıntı ise;

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

olmak üzere

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow v = \omega r$$

şeklindedir.

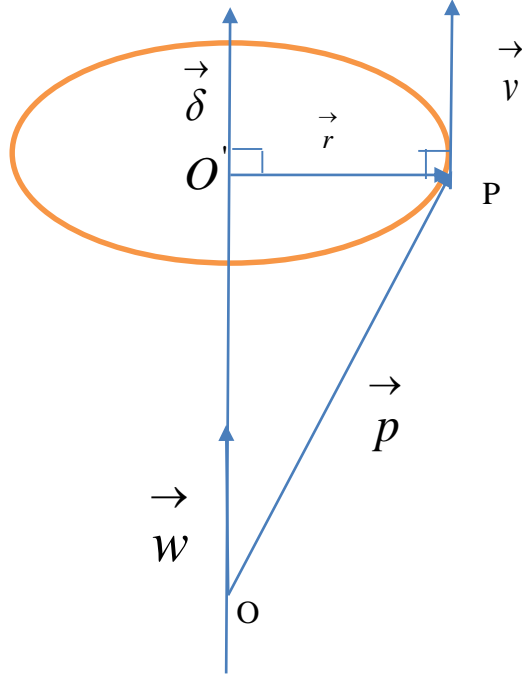
Şimdi de yukarıdaki kavramlardan yararlanarak bir cismin bir eksen etrafında döndürülmesi ile oluşan hareketi inceleyelim:

Bir P cismin bir  $\delta$  eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan hareket düzgün dairesel harekettir. Bu cismin açısal hızı ve çizgisel hızı arasında

$$v = \omega r$$

bağıntısının varlığını biliyoruz.

Koordinat sisteminin başlangıç noktası O olmak üzere P cisminin yer vektörünü  $\vec{p}$  ile  $\delta$  ekseninin doğrultman vektörünü de  $\vec{w}$  ile gösterelim ve  $\|\vec{w}\| = w$  olsun. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1. Düzgün dairesel hareket

$OO'P$  dik üçgeninden

$$\sin \theta = \frac{r}{\|\vec{p}\|}, r = \|\vec{r}\| \Rightarrow r = \|\vec{p}\| \sin \theta$$

yazılabilir. Diğer taraftan w ve p vektörleri arasındaki açı  $\theta$  olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{w}, \vec{p} \rangle}{\|\vec{w}\| \|\vec{p}\|} = \frac{\langle \vec{w}, \vec{p} \rangle}{w \|\vec{p}\|}$$

olup bu eşitlik  $\sin \theta = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$  ifadesinde yerine yazılırsa

$$\sin \theta = \left( 1 - \left[ \frac{\langle \vec{w}, \vec{p} \rangle}{w \|\vec{p}\|} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{w \|\vec{p}\|} \left( w^2 \|\vec{p}\|^2 - (\langle \vec{w}, \vec{p} \rangle)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$\|w \times p\|^2 = \langle w \times p, w \times p \rangle = w^2 \|\vec{p}\|^2 - (\langle w, p \rangle)^2$$

olduğundan

$$\sin \theta = \frac{1}{w \|\vec{p}\|} \|w \times p\|$$

$$\text{veya } \|\vec{p}\| \sin \theta = \frac{1}{w} \|w \times p\|$$

bulunur. Bu eşitlikte  $r = \|\vec{p}\| \sin \theta$  olduğu gözönü alınırsa

$$r = \frac{1}{w} \|w \times p\|$$

ve buradan

$$\|\vec{r}\| = \frac{1}{w} \|w \times p\| \Rightarrow w \|\vec{r}\| = \|w \times p\|$$

veya  $v = w \|\vec{r}\|$  olduğundan

$$v = \|w \times p\|$$

elde edilir. Ayrıca

$$\vec{v} = \vec{p} = \frac{dp}{dt}$$

olduğundan

$$\vec{p} = w \times p$$

olduğu görülür. Burada  $\vec{w}$  vektörüne hareketin **dönme vektörü** ve  $\delta$  doğrusuna da **dönme eksen** denir.

**Teorem 2.1.26:**  $M \subset \mathbb{R}_1^3$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $M$  eğrisinin,  $\{T, N, B\}$  Frenet çatısı bir  $W$  vektörü etrafında dönme hareketi yapar.

**Tanım 2.1.27:**  $\mathbb{R}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayı ve  $M \subset \mathbb{R}_1^3$  de  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilen diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki Frenet vektörleri  $\{T, N, B\}$  olmak üzere Frenet vektörleri ile türev vektörleri arasındaki ilişki ve Darboux vektörleri aşağıdaki gibidir:

**i)  $\alpha$ ,  $\mathbb{R}_1^3$  de bir timelike eğri olsun.**

Bu durumda  $\alpha$  nın Frenet vektör alanları;  $T$  timelike vektör alanı,  $N$  ve  $B$  spacelike vektör alanlarıdır. Bu vektör alanları için

$$T \times N = -B, \quad N \times B = T, \quad B \times T = -N$$

yazılabilir. Burada ‘ $\times$ ’ Lorentz anlamındaki vektörel çarpımdır. Buna göre Frenet denklemleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases}$$

şeklindedir (Woestijne,1990). Bu durumda Darboux vektörü de

$$W = \tau T + \kappa B = N \times N', \quad \|W\|_{IL} = \sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|}$$

dir. Burada  $\| \cdot \|_{IL} = \| \cdot \|$  gösterimi kullanılacaktır.

a) Eğer  $W$  spacelike ise ( $|\kappa| > |\tau|$  ise)  $-B$  ile  $W$  arasındaki Lorentzian timelike açı  $\theta$  olmak üzere Teorem 2.1.15 den

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cosh \theta \\ \tau = \|W\| \sinh \theta \end{cases}, \quad \|W\|^2 = g(W, W) = \kappa^2 - \tau^2$$

ve  $W$  yönündeki birim vektör

$$C = \sinh \theta T - \cosh \theta B$$

şeklindedir.



b) Eğer  $W$  timelike ise ( $|\kappa| < |\tau|$  ise)

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \sinh \theta \\ \tau = \|W\| \cosh \theta \end{cases}, \quad \|W\|^2 = -g(W, W) = -(\kappa^2 - \tau^2)$$

ve  $W$  yönündeki birim vektör

$$C = \cosh \theta T - \sinh \theta B$$

olur.

**ii)  $\alpha$ ,  $\mathbb{R}_1^3$  de spacelike binormalı bir spacelike eğri olsun.**

$\alpha$  eğrisinin vektör alanları;  $T$  spacelike vektör alanı,  $N$  timelike vektör alanı ve  $B$  de spacelike vektör alanıdır. Bu vektör alanları için

$$T \times N = -B, \quad N \times B = -T, \quad B \times T = N$$

yazılabilir. Buna göre Frenet denklemleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

şeklindedir (Woestijne, 1990). Bu durumda Darboux vektörü de

$$W = \tau T - \kappa B = N \times N, \quad \|W\| = \sqrt{|\kappa^2 + \tau^2|}$$

dir. Burada  $g(W, W) = \tau^2 + \kappa^2 > 0$  olduğundan  $W$  bir spacelike vektördür.  $B$  ile  $W$  arasındaki Lorentzian spacelike açı  $\theta$  olmak üzere Teorem 2.1.15 den

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cos \theta \\ \tau = \|W\| \sin \theta \end{cases}$$

olur.  $W$  vektörü yönündeki birim vektör ise

$$C = -\sin \theta T + \cos \theta B$$

şeklinde yazılabilir.

**iii)  $\alpha$ ,  $\mathbb{R}_1^3$  de timelike binormalı bir spacelike eğri olsun.**

$\alpha$  eğrisinin vektör alanları;  $T$  ve  $N$  spacelike vektör alanı,  $B$  de timelike vektör alanıdır. Bu vektör alanları için

$$T \times N = B, \quad N \times B = -T, \quad B \times T = -N$$

yazılabilir. Buna göre Frenet denklemleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

şeklindedir (Woestijne,1990). Bu durumda Darboux vektörü de

$$W = -\tau T + \kappa B = N \times N', \quad \|W\| = \sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|}$$

dir.

a) Eğer  $W$  spacelike ise ( $|\tau| > |\kappa|$  ise)

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \sinh \theta \\ \tau = \|W\| \cosh \theta \end{cases}, \quad \|W\|^2 = g(W, W) = \tau^2 - \kappa^2$$

ve  $W$  yönündeki birim vektör

$$C = \cosh \theta T - \sinh \theta B$$

şeklindedir.

b) Eğer  $W$  timelike ise ( $|\tau| < |\kappa|$  ise)

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cosh \theta \\ \tau = \|W\| \sinh \theta \end{cases}, \quad \|W\|^2 = -g(W, W) = -(\tau^2 - \kappa^2)$$

ve  $W$  yönündeki birim vektör

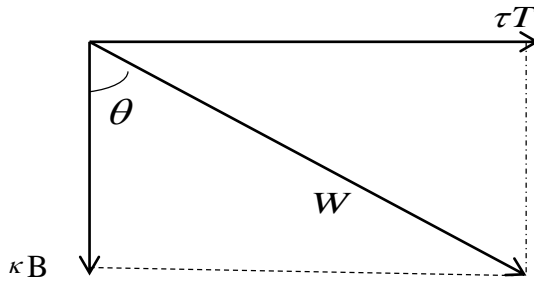
$$C = \sinh \theta T - \cosh \theta B$$

olur.

Ayrıca i), ii) ve iii) durumları için

$$\begin{cases} T' = T \times W \\ N' = N \times W \\ B' = B \times W \end{cases}$$

eşitliklerinin gerçekleştiği görülür.



Şekil 2.2. Darboux vektörü

Yukarıdaki eşitliklerden de görüleceği üzere Darboux vektörü, eğrilik ( $\kappa$ ) ve burulmayı ( $\tau$ ) geometrik olarak yorumlamaya bir yol sağlar. Eğrilik, binormal birim vektörü civarında Frenet çatısının dönmesinin ölçüsüyken ; burulma, teğet birim vektörü civarında Frenet çatısının dönmesinin bir ölçüsüdür.

**Tanım 2.1.28 ( Timelike Yüzey) :**  $IR_1^3$  3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey  $M$  olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise  $M$  ye  $IR_1^3$  de bir timelike yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

**Teorem 2.1.29:**  $IR_1^3$  3-boyutlu Minkowski uzayında bir  $M$  yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin bir spacelike vektör alanı, yani  $\langle N, N \rangle > 0$  olmasıdır. Burada  $N$ ,  $M$  yüzeyinin normal vektör alanıdır (Beem ve Ehrlich, 1981).

**Tanım 2.1.30 ( Spacelike Yüzey) :**  $IR_1^3$  3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey  $M$  olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise  $M$  ye  $IR_1^3$  de bir spacelike yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

**Teorem 2.1.31:**  $IR_1^3$  3-boyutlu Minkowski uzayında bir  $M$  yüzeyinin spacelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin bir timelike vektör alanı, yani  $\langle N, N \rangle < 0$  olmasıdır. Burada  $N$ ,  $M$  yüzeyinin normal vektör alanıdır (Beem ve Ehrlich, 1981).

## 2.2 $IR_1^3$ Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler

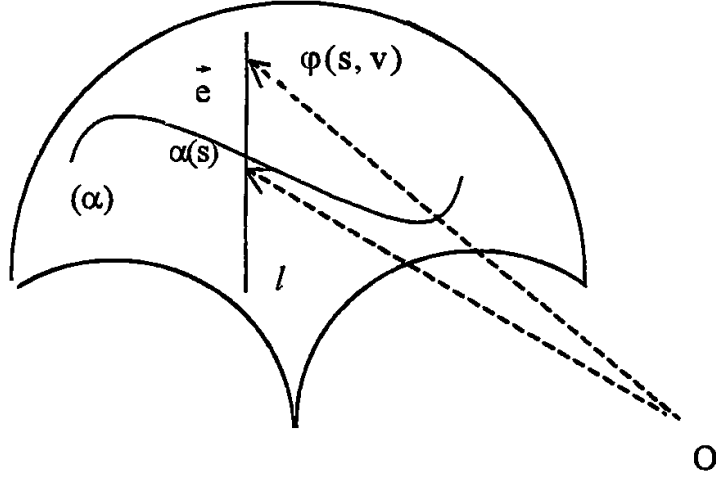
**Tanım 2.2.1:**  $M \subset IR_1^3$  yüzeyi verilsin,  $\forall P \in M$  noktasında,  $IR_1^3$  in  $M$  de kalan bir doğrusu var ise  $M$  ye bir **regle yüzey** ve  $P \in M$  noktasından geçen ve  $M$  de kalan bu doğruya da regle yüzeyin **doğrultmanı** veya **ana doğrusu** denir. Bir başka ifadeyle, bir regle yüzey; bir doğrunun bir eğriye dayanarak hareket etmesi sonucu meydana gelen yüzeydir. Bu regle yüzey  $\varphi$  ile gösterilirse,  $\varphi$  nin parametrik ifadesi,

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\rightarrow IR_1^3 \\ (s, v) &\rightarrow \varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dır. Burada;  $e$ , regle yüzeyin doğrultmanı doğrultusundaki birim vektör ve

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow IR_1^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)) \end{aligned}$$

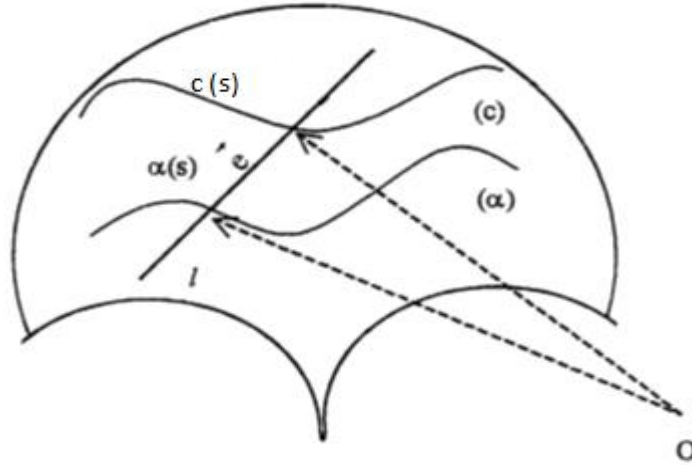
diferensiyellenebilir eğrisi de regle yüzeyin dayanak eğrisidir, (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. Regle Yüzey

**Tanım 2.2.2:** Bir regle yüzeyin komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına **striksiyon(merkez)noktaları** denir.

**Tanım 2.2.3:**  $\mathbb{R}^3$  deki bir  $\varphi$  regle yüzeyinin oluşumu sırasında meydana gelen hareket boyunca striksiyon noktalarının geometrik yerine **striksiyon çizgisi (striksiyon eğrisi)** denir ve ( c ) ile gösterilir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Regle yüzeyin striksiyon eğrisi

Ayrıca (2.1) yüzeyinin striksiyon eğrisinin yer vektörü,

$$c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha'(s), e'(s) \rangle}{\langle e'(s), e'(s) \rangle} e(s)$$

şeklindedir. Burada  $\mu(s) = \frac{\langle \alpha'(s), e'(s) \rangle}{\langle e'(s), e'(s) \rangle}$  olmak üzere , c striksiyon eğrisi ile  $\alpha$

dayanak eğrisi arasındaki uzaklıktır.

Eğer  $\langle \alpha', e' \rangle = 0$  ise  $\varphi$  regle yüzeyi için striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olur.  $IR_1^3$  de regle yüzeyler striksiyon çizgili ve striksiyon çizgisiz olmak üzere ikiye ayrılırlar. Striksiyon çizgisiz yüzeye **tangent yüzey** de denir.

**Tanım 2.2.4:**  $IR_1^3$  teki bir  $\varphi$  regle yüzeyinin bir ana doğrusunu kapsayan ve yüzey normaline dik olan düzleme **teğet düzlem** denir.

(2.1) denkleminde s ve v-parametre eğrilerine göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned}\varphi_s &= \alpha' + ve' , \\ \varphi_v &= e\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$N = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \quad (2.2)$$

ifadesi regle yüzeyin birim normalidir.

**Tanım 2.2.5:** Bir  $\varphi$  regle yüzeyinin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise  $\varphi$  regle yüzeyine **açılabilir regle yüzey** denir.

**Teorem 2.2.6:**  $IR_1^3$  Minkowski uzayında dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları (doğrultmanı) timelike doğrular olan açılabilir olmayan timelike regle yüzeyinin boğaz (striksiyon) eğrisi bir spacelike eğridir (Beem ve Ehrlich, 1981).

**Teorem 2.2.7:**  $IR_1^3$  Minkowski uzayında dayanak eğrisi timelike bir eğri, anadoğruları (doğrultmanı) spacelike doğrular olan açılabilir olmayan timelike regle yüzeyinin boğaz (striksiyon) eğrisi bir timelike eğridir (Beem ve Ehrlich, 1981).

**Teorem 2.2.8:**  $IR_1^3$  Minkowski uzayında dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları (doğrultmanı) spacelike doğrular olan açılabilir olmayan spacelike regle yüzeyinin boğaz (striksiyon) eğrisi bir spacelike eğridir (Beem ve Ehrlich, 1981).

**Tanım 2.2.9:** Açılabilir olmayan ve ana doğrusu  $e$  olan bir  $\varphi$  regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin parametrik denklemi  $z = z(s)$  olsun.  $\varphi$  nin  $e$  yönündeki birim vektörü  $e_1$  olmak üzere  $Z$  merkez noktasında bir ortonormal çatı  $\{e_1, e_2, e_3\}$  ile verilsin.  $\varphi$  regle yüzeyinin bir ana doğrusundan geçen ve  $e_3$  vektörüne dik olan düzleme **asimptotik düzlem** denir. Bir ana doğrudan geçen ve asimptotik düzleme dik olan düzleme ise **merkez düzlem** adı verilir.  $Z$  merkez noktasından geçen, asimptotik ve merkez düzleme dik olan doğrulara da, sırasıyla, **merkez teğet** ve **merkez normal** denir. Burada merkez normal  $e_2$  dir ve

$$e_2 = \frac{e_1'}{\|e_1'\|} \quad (2.3)$$

eşitliği ile verilir (Kirezci, 2002).

**Tanım 2.2.10:** Açılabilir olmayan ve ana doğrusu  $e$  olan bir  $\varphi$  regle yüzeyinin dayanak eğrisi olarak striksiyon eğrisini alalım.  $\varphi$  nin striksiyon eğrisini  $k$  ile gösterelim ve parametrik denklemi  $z = z(s)$  olsun.  $\varphi$  nin  $e$  yönündeki birim vektörü  $e_1$  olmak üzere  $Z$  merkez noktasında bir ortonormal çatı  $\{e_1, e_2, e_3\}$  olsun. Bu çatı vektörlerinin striksiyon eğrisinin yay parametresine göre türevleri ile kendileri arasındaki ilişki

$$\begin{cases} e_1' = \kappa e_2 \\ e_2' = -\kappa e_1 + \tau e_3 \\ e_3' = -\tau e_2 \end{cases}$$

şeklindedir ve  $\varphi$  için bir parametrizasyon  $\varphi(s, r) = z(s) + r e_1(s)$  şeklinde yazılabilir (Wunderlich, 1979).

**Tanım 2.2.11:**  $\kappa = \|e_1'\|$  ifadesine  $\varphi$  regle yüzeyinin **doğal eğriliği**,  $\tau = \langle e_2', e_3 \rangle$  ifadesine  $\varphi$  nin **doğal burulması** ve  $\lambda = \|e_2'\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$  ye de **Lancret (Total) eğriliği** adı verilir (Wunderlich, 1979).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Ryuh 1989 yılında 'Robot Trajectory Planning Using the Curvature Theory of Ruled Surfaces' adlı doktora tezinde, 3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyin eğrilik teorisini kullanarak robot yörünge planlamasını incelemiştir. Ryuh, bu çalışmasında robot yörüngesini oluşturacak araç çatının O yönlendirme vektörünü  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının üreteç vektörünü  $r$  alarak, robot uç effektörüne bağlı araç çatının yönlendirme vektörünün hareketiyle oluşan regle yüzeyin robot yörüngesini belirlemiş ve tüm diferensiyel özelliklerini regle yüzeyin eğrilik teorisini kullanarak ifade etmiştir. Çalışmamıza geçmeden önce , çalışmamız için temel aldığımız Ryuh un  $E^3$  Öklid uzayındaki robot uç hareketinden bahsedelim:

#### 3.1 Striksiyon Eğrisi ve Üreteç Üçlüsü

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen regle yüzey için bir parametrizasyon,

$$X(s, v) = \alpha(s) + v\bar{R}(s) \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\alpha(s)$  regle yüzeyin dayanak eğrisi,  $\bar{R}(s)$  doğrultman vektörü olup , doğrultman vektörü birim vektör olmak zorunda değildir ancak  $\langle \bar{R}', \bar{R} \rangle = 1$  dir.

$X(s, v) = \alpha(s) + v\bar{R}(s)$  yüzeyinin striksiyon eğrisi  $\beta(s)$  olmak üzere

$$\beta(s) = \alpha(s) - \mu(s)\bar{R}(s) \quad (3.2)$$

dir. Burada  $\mu$  reel değişkenli parametre olup striksiyon eğrisinden dayanak eğrisine olan uzaklıktır. (3.2) denkleminde  $s$  ye göre türev alınırsa,

$$\beta'(s) = \alpha'(s) - \mu'(s)\bar{R}(s) - \mu(s)\bar{R}'(s) \quad (3.3)$$

olur. Buradan striksiyon eğrisinin tanımından,  $\langle \beta'(s), \bar{R}'(s) \rangle = 0$  olması kullanılarak

$$\mu(s) = \langle \alpha'(s), \bar{R}'(s) \rangle \quad (3.4)$$

elde edilir.

$\beta$  striksiyon eğrisi üzerinde  $\{r, t, k\}$  ortonormal sistemi

$$\begin{cases} r(s) = \frac{\bar{R}(s)}{R(s)} \\ t(s) = \bar{R}'(s) \\ k(s) = r(s) \times t(s) \end{cases}, \quad R(s) = \|\bar{R}(s)\| \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanabilir.

**Tanım 3.1.1:**  $\{r, t, k\}$  ortonormal sisteminde  $r$  **üreteç vektörü**,  $t$  **merkez normal vektörü** ve  $k$  **merkez teğet vektörü**dür. Bu sisteme ise **üreteç üçlüsü** denir (Şekil 3.1).

$\beta$  striksiyon eğrisinin teğet vektörü

$$\beta'(s) = \Gamma(s)r(s) + \Delta(s)k(s) \quad (3.6)$$

dir. Burada  $\Gamma$  ve  $\Delta$  fonksiyonları

$$\begin{cases} \Gamma(s) = \frac{1}{R(s)} \langle \alpha'(s), \bar{R}(s) \rangle - \mu'(s)R(s) \\ \Delta(s) = \frac{1}{R(s)} \langle \alpha'(s), \bar{R}(s) \times \bar{R}'(s) \rangle \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup bu fonksiyonlara (3.1) yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsü için türev formülleri

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{R}t \\ t' = \frac{1}{R}(-r + \gamma k) \\ k' = -\frac{\gamma}{R}t \end{cases} \quad (3.7)$$



şeklinde olup burada  $\gamma = \langle \bar{R}'' , \bar{R} \times \bar{R}' \rangle$  ifadesi (3.1) yüzeyinin  $\bar{R}$  doğrultman vektörünün çizdiği eğrinin **geodezik eğriliğidir**.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünün Darboux vektörü U olmak üzere

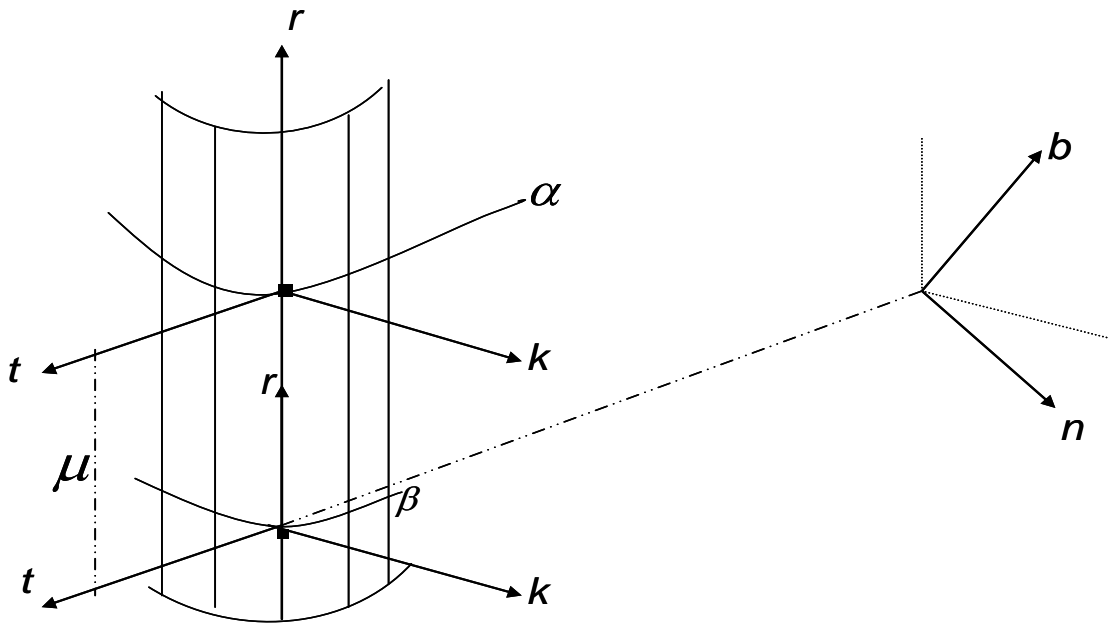
$$\begin{aligned} U &= t \times t' \\ &= \frac{1}{R} (\gamma r + k) \end{aligned}$$

dir.

**Tanım 3.1.2:**

$$\begin{cases} \Gamma(s) = \frac{1}{R(s)} \langle \alpha'(s), \bar{R}(s) \rangle - \mu'(s) R(s) \\ \Delta(s) = \frac{1}{R(s)} \langle \alpha'(s), \bar{R}(s) \times \bar{R}'(s) \rangle \\ \gamma(s) = \langle \bar{R}''(s), \bar{R}(s) \times \bar{R}'(s) \rangle \end{cases}$$

ifadelerine (3.1) yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir (Mccarthy ve Roth, 1981).



**Şekil 3.1.** Üreteç Çatı

### 3.2 t Merkez Normal Vektörünün Oluşturduğu Merkez Normal Yüzeyi ve Doğal Çatı

Striksiyon eğrisi üzerinde merkez normal vektörünün hareketiyle oluşan yüzeye **merkez normal yüzeyi** denir. Bu yüzey için bir parametrizasyon,

$$X_t(s, v) = \beta(s) + vt(s) \quad (3.8)$$

yazılabilir. Burada  $\beta(s)$ , (3.1) yüzeyinin striksiyon eğrisidir. Merkez normal yüzeyinin striksiyon eğrisi  $\beta_t(s)$  olmak üzere

$$\beta_t(s) = \beta(s) - \mu_t(s)t(s) \quad (3.9)$$

şeklindedir. Burada  $\mu_t(s)$  merkez normal vektörü boyunca iki striksiyon eğrisi arasındaki uzaklık olup

$$\mu_t = \frac{-R(\Gamma - \Delta\gamma)}{1 + \gamma^2}$$

dır. Böylece merkez normal yüzeyinin  $\beta_t$  striksiyon eğrisi üzerinde doğal çatı olan  $\{t, n, b\}$  ortonormal sistemi kurulabilir. Bu vektörlere sırasıyla **merkez normal vektörü**, **asal normal vektörü** ve **binormal vektörü** adı verilir. Bu vektörler

$$\begin{cases} t = \bar{R}' = Rr' \\ n = \frac{1}{\kappa}t' \\ b = t \times n \end{cases}, \quad \kappa = \|t'\| \quad (3.10)$$

şeklindedir. Burada  $\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünün merkez normal vektörü ile  $\{t, n, b\}$  doğal çatının merkez normal vektörü aynı olup merkez normal vektörünün dönme açısı  $\rho$  olmak üzere üreteç çatı ile doğal çatı arasında,

$$\begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\rho & \cos\rho \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\rho & \sin\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

ilişkisi vardır. Diğer taraftan,

$$\begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin\rho & 0 & \cos\rho \\ \cos\rho & 0 & \sin\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

yazılabilir.

**Sonuç 3.2.1:** Merkez normal yüzeyinin eğriliği,

$$\kappa = \frac{(1+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{R} \quad (3.13)$$

dir (Ryuh, 1989).

**Sonuç 3.2.2:**  $U=\kappa b$  dir. Yani  $\{r,t,k\}$  üreteç çatısının Darboux vektörü  $U$  ile  $\{t,n,b\}$  doğal çatısının binormal vektörü  $b$  aynı rolü oynar (Ryuh, 1989).

Merkez normal yüzeyinin  $\beta_t$  striksiyon eğrisinin teğet vektörü

$$\beta_t'(s) = \Gamma_t(s)t(s) + \Delta_t(s)b(s)$$

dir. Burada  $\Gamma_t = -\mu_t'$  ve  $\Delta_t = \frac{\gamma\Gamma + \Delta}{(1+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}$  olup bu fonksiyonlara (3.8) yüzeyinin

**eğrilik fonksiyonları** denir.

$\{t,n,b\}$  doğal çatısının türev formülleri

$$\begin{cases} t' = \kappa n \\ n' = -\kappa t + \tau b, \\ b' = -\tau n \end{cases} \quad (3.14)$$

olup burada  $\kappa, \tau$  (3.8) yüzeyinin **eğrilik ve burulma** fonksiyonlarıdır.

**Sonuç 3.2.3:** (3.8) yüzeyinin eğrilik ve burulmasının merkez normal vektörünün dönme açısına bağlı ifadeleri

$$\begin{cases} \kappa = \frac{1}{R} \cos ec\rho \\ \tau = -\rho' \end{cases} \quad (3.15)$$

şeklindedir (Ryuh, 1989).

### 3.3 Yüzey Çatısı ve Araç Çatısı

Robot yörünge olarak adlandırılan robot uç hareketi, bir regle yüzey ve regle yüzeyin striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı dört tane çatı ve bir dönme açısıyla belirlidir. Bu dört çatı sırasıyla, üreteç çatı, doğal çatı, yüzey çatı ve araç çatı olup ilk iki çatı 3.1 ve 3.2 bölümlerinde açıklandı.

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısını açıklayalım. Yüzeyin  $v=0$  noktasındaki yüzey çatısı  $\{O, S_n, S_b\}$  olup, burada  $O$  yönlendirme vektörü,  $S_n$ ,  $v=0$  da yüzey normali,  $S_b$  binormal vektörüdür.  $O$  yönlendirme vektörü,  $r$  üreteç vektörü yönündedir.

Yüzeyin  $v=0$  da yüzey normali,  $S_n = \frac{X_s \times X_v}{\|X_s \times X_v\|} \Big|_{v=0}$  ile tanımlı olup

$$S_n = \frac{-\Delta t + \mu k}{\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}} \quad (3.16)$$

dır. Yüzeyin  $v=0$  daki binormal vektörü  $S_b$  ve yönlendirme vektörü  $O$  olmak üzere,  $S_b = O \times S_n$  şeklindedir. Burada yönlendirme vektörü üreteç vektörü yönünde olduğundan  $O = r$  alınarak (3.16) denkleminde binormal vektörü,

$$S_b = \frac{-\mu t - \Delta k}{\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}} \quad (3.17)$$

bulunur. Böylece  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı elde edilir.

Araç çatısı  $\{O, A, N\}$  olup burada  $O$  yönlendirme vektörü,  $A$  yaklaşma (ilerleme) vektörü,  $N$  normal vektörü olarak adlandırılır.

Araç çatısı ile yüzey çatısı arasında dönme açısı  $\eta = \eta(s)$  olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & \sin \eta \\ 0 & -\sin \eta & \cos \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

ilişkisi vardır. Yüzey çatısı ile üreteç çatısı arasında dönme açısı  $\sigma = \sigma(s)$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sigma & \sin\sigma \\ 0 & -\sin\sigma & \cos\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

ilişkisi vardır.

(3.16) ve (3.17) eşitlikleri ve (3.19) kullanılırsa

$$\sin\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}}, \quad \cos\sigma = -\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}} \quad (3.20)$$

elde edilir.

(3.18) ve (3.19) eşitliklerinden, araç çatısı ile üreteç çatısı arasında,

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Sigma & \sin\Sigma \\ 0 & -\sin\Sigma & \cos\Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

ilişkisi verilebilir. Burada  $\Sigma = \eta + \sigma$  dır, (Ryuh, 1989).

Şimdi Ryuh' un bu çalışmasından yola çıkarak, çalışmamızın methodunu verelim:

### 3.4 $E^3$ Öklid Uzayındaki Geliştirilmiş Çatı

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen  $\{k_1, r_1, t_1\}$  çatısı geliştirilmiş çatı olarak tanımlanmaktadır. Burada geliştirilmiş çatının  $k_1$  üreteç vektörü  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının Darboux vektörüne karşılık gelmektedir (Güler ve Kasap 2011).

Öklid uzayında tanımlanan geliştirilmiş çatı tanımından yola çıkarak, bu tezde ilk olarak robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı Minkowski uzayında ifade edilip bu çatının  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı tanımlandı. Böylece bu geliştirilmiş çatı yardımıyla regle yüzeyin eğrilik teorisi kullanılarak, robot uç hareketi ve diferensiyel özellikleri incelendi.



## 4. BULGULAR

Bilindiği üzere üç boyutlu Minkowski uzayında Lorentz metriği pozitif tanımlı olmadığından bu uzayda regle yüzeyler, spacelike, timelike ve dejenere olabileceğinden Öklid uzayından daha karmaşık yapıya sahiptir. Bu yüzden tezimiz birçok irdelemeyi içermektedir. Bu tezin bulgular kısmında, üç boyutlu Minkowski uzayında verilen timelike ve spacelike regle yüzeyler için geliştirilmiş robot uç hareketi ve diferensiyel özellikleri incelenecektir. Bilindiği üzere bir timelike regle yüzey;

- i) Bir timelike doğrunun bir spacelike eğriye dayanmasıyla, veya
- ii) Bir spacelike doğrunun bir timelike eğriye dayanmasıyla oluşur.

Bir spacelike regle yüzey de, bir spacelike doğrunun bir spacelike eğriye dayanmasıyla oluşur.

### 4.1 Timelike Regle Yüzey İçin Geliştirilmiş Robot Uç Hareketi

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Bu alt bölümlerden birincisi timelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyi içermektedir. Burada timelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyin geliştirilmiş çatısı, doğal çatısı, yüzey çatısı ve araç çatısı tanımlanarak, timelike regle yüzeyi karakterize eden eğrilik fonksiyonları ve bu çatıların Darboux vektörleri elde edilerek, Darboux vektörleri arasındaki ilişkiler verilmiştir. Daha sonra timelike regle yüzeyin dayanak eğrisinin geliştirilmiş çatısı ile yüzeyin araç çatısı arasındaki bağıntılar elde edilerek robot uç hareketi ve diferensiyel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca araç çatının türev formüllerinin; yüzeyin Lancret eğriliğine ve çatılar arasındaki dönme açılarına bağlı olduğu görülmüştür. İkinci alt bölümde ise birinci alt bölümde yapılanlar bu kez spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzey için  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının vektörlerinin Minkowski uzayındaki

durumlarına göre iki alt bölümde incelenerek robot uç hareketi ve diferensiyel özellikleri incelenmiştir.

#### 4.1.1 Timelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyin geliştirilmiş robot uç hareketi

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen timelike regle yüzey için bir parametrizasyon,

$$X(s, v) = \alpha(s) + v\bar{R}(s) \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\alpha(s)$  regle yüzeyin dayanak eğrisi olup spacelike bir eğri,  $\bar{R}(s)$  doğrultman vektörü olup timelike vektör ve ayrıca  $\langle \bar{R}', \bar{R}' \rangle = 1$  dir.

$X(s, v) = \alpha(s) + v\bar{R}(s)$  timelike regle yüzeyinin striksiyon eğrisi  $\beta(s)$  olmak üzere

$$\beta(s) = \alpha(s) - \mu(s)\bar{R}(s) \quad (4.2)$$

dir. Burada  $\mu$  reel değişkenli parametre olup striksiyon eğrisinden dayanak eğrisine olan uzaklıktır. (4.2) denkleminde s ye göre türev alınırsa striksiyon eğrisinin birinci dereceden konumsal değişimi

$$\beta'(s) = \alpha'(s) - \mu'(s)\bar{R}(s) - \mu(s)\bar{R}'(s) \quad (4.3)$$

olup burada striksiyon eğrisinin tanımından  $\langle \beta'(s), \bar{R}'(s) \rangle = 0$  olması kullanılarak

$$\mu(s) = \langle \alpha'(s), \bar{R}'(s) \rangle \quad (4.4)$$

elde edilir.

$\beta$  striksiyon eğrisi üzerinde  $\{r, t, k\}$  ortonormal sistemi

$$\begin{cases} r = \frac{\bar{R}}{R} \\ t = \bar{R}' \\ k = t \times r \end{cases}, \quad R = \|\bar{R}\| \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Ayrıca  $\{r, t, k\}$  ortonormal sistemi için,  $r \times t = -k$ ,  $t \times k = r$ ,  $k \times r = -t$  dir.



**Tanım 4.1.1:**  $\{r, t, k\}$  ortonormal sisteminde  $r$  **üreteç vektörü** timelike,  $t$  **merkez normal vektörü** ve  $k$  **merkez teğet vektörü** spacelikettir. Bu sisteme ise **üreteç üçlüsü** denir.

$\beta$  striksiyon eğrisinin teğet vektörü

$$\beta'(s) = ar(s) + bt(s) + ck(s) \quad , \quad a, b, c \in IR \quad (4.6)$$

olmak üzere

$$a = -\langle \beta', r \rangle, \quad b = \langle \beta', t \rangle, \quad c = \langle \beta', k \rangle \quad (4.7)$$

dir. Bu katsayıların hesaplanması için (4.5) kullanılırsa, striksiyon eğrisinin birinci dereceden konumsal değişimi üreteç üçlüsü cinsinden

$$\beta'(s) = \Gamma(s)r(s) + \Delta(s)k(s) \quad (4.8)$$

olarak ifade edilir.

Burada

$$\begin{cases} \Gamma(s) = -\frac{1}{R} \langle \alpha'(s), \bar{R}(s) \rangle - \mu'(s)R(s) \\ \Delta(s) = \frac{1}{R} \langle \alpha'(s), \bar{R}'(s) \times \bar{R}(s) \rangle \end{cases} \quad (4.9)$$

fonksiyonlarına (4.1) timelike regle yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

Genel regle yüzeylerin eğrilik teorisi; üreteç üçlüsü ve striksiyon eğrisinin hareketi vasıtasıyla ifade edilebilir. Striksiyon eğrisi üzerindeki koordinat çatısı üreteç üçlüsü olarak adlandırılır. Striksiyon eğrisi ve üreteç üçlüsü, regle yüzeyin eğrilik teorisinde önemlidir. Üreteç üçlüsü regle yüzeyin açılal hızının en basit tanımlamasını verirken striksiyon eğrisi de regle yüzeyin pozisyonel varyasyonunun en basit tanımlamasını verir. Ayrıca striksiyon eğrisi ve üreteç üçlüsü dayanak eğrisinin seçimine bağlı olmamasıyla tektir.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünün birinci dereceden açılal hızını belirlemek için  $r, t, k$  birim vektörlerinin diferensiyeli alınmalıdır.

(4.5) den  $r = \frac{\bar{R}}{R}$  nin türevi alınırsa  $r' = \frac{\bar{R}'}{R}$  olup burada  $t = \bar{R}'$  olması kullanılarak

$r' = \frac{1}{R}t$  elde edilir.

$t'(s) = ar(s) + bt(s) + ck(s)$  ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  olmak üzere burada

$a = -\langle t', r \rangle$ ,  $b = \langle t', t \rangle$ ,  $c = \langle t', k \rangle$  dir.

$\langle t, r \rangle = 0$  olduğundan buradan türev alınırsa  $\langle t', r \rangle = -\langle t, r' \rangle$  olup,  $r' = \frac{1}{R}t$  ve

$\langle t, t \rangle = 1$  olması kullanılırsa  $a = -\langle t', r \rangle = \frac{1}{R}$  elde edilir.

$\langle t, t \rangle = 1$  den türev alınırsa  $b = \langle t', t \rangle = 0$  elde edilir.

$c = \langle t', k \rangle$  olup burada (4.5) kullanılırsa  $\langle t', k \rangle = \langle \bar{R}'', \bar{R}' \times \frac{\bar{R}}{R} \rangle = \frac{1}{R} \langle \bar{R}'', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle$  elde

edilip  $\langle \bar{R}'', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle = \gamma$  denilirse  $c = \langle t', k \rangle = \frac{\gamma}{R}$  dir. Böylece  $t' = \frac{1}{R}(r + \gamma k)$  dir.

$k = t \times r$  den türev alınıp  $r' = \frac{1}{R}t$  ve  $t' = \frac{1}{R}(r + \gamma k)$  olması kullanılarak  $k' = -\frac{\gamma}{R}t$

elde edilir. Böylece  $\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünün birinci dereceden açılmal varyasyonu

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{R}t \\ t' = \frac{1}{R}(r + \gamma k) \\ k' = -\frac{\gamma}{R}t \end{cases} \quad (4.10)$$

şeklindedir. Burada  $\gamma = \langle \bar{R}'', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle$  ifadesi (4.1) yüzeyinin  $(\bar{R})$  doğrultman vektörünün çizdiği eğrinin **geodezik eğriliğidir**.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünün Darboux vektörü  $U_r$  olmak üzere

$$U_r = t \times t' = \frac{1}{R}(\gamma r + k) \quad (4.11)$$

dir.

**Tanım 4.1.2:**

$$\begin{cases} \Gamma = -\frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R} \rangle - \mu' R \\ \Delta = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle \\ \gamma = \langle \bar{R}', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle \end{cases}$$

ifadelerine (4.1) timelike regle yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

Ayrıca (4.1) timelike regle yüzeyin Lancret eğriliği,

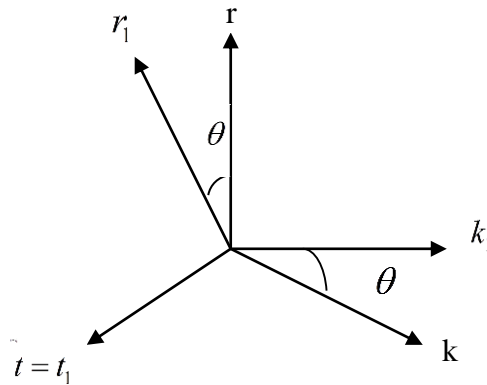
$$\lambda = \|t'\| = \sqrt{|\langle t', t' \rangle|} = \sqrt{\left| \frac{\gamma^2 - 1}{R^2} \right|} \quad (4.12)$$

dir.

#### 4.1.1.1 Geliştirilmiş çatının oluşturulması

Bu bölümde robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürülerek  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı tanımlanacaktır. Ayrıca bu çatının  $k_1$  üreteç vektörü  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının Darboux vektörüne karşılık gelmektedir yani  $k_1 = U_r$  dir.

$\{r, t, k\}$  üreteç çatısını  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürelim:



**Şekil 4.1.** Geliştirilmiş çatının elde edilişi

Dönme denklemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ t_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

dir. Bu matrisin ters formu da

$$\begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ t_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

şeklindedir.

$\beta$  striksiyon eğrisi üzerine kurulan  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı için elde edilen (4.10) türev formüllerinden, eğriliği  $\frac{1}{R}$ , burulması  $\frac{\gamma}{R}$  olan ve merkez noktasından geçen bir  $(\beta_1)$  eğrisi daima bulunabilir. Dolayısıyla Darboux vektörü yardımıyla  $k_1 = U_r$  olması kullanılarak,  $\tanh \theta = \gamma$  elde edilir. Total (Lancret) eğrilik tanımı gereğince

$$\lambda = \|t'\| = \sqrt{\left| \frac{\gamma^2 - 1}{R^2} \right|} \text{ olup } \gamma = \tanh \theta \text{ olması kullanılırsa } R^2 = \frac{1}{\lambda^2 \cosh^2 \theta} \text{ dir.}$$

Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir:

**Sonuç 4.1.3:**  $\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünü üzerinde bulunduran  $(\beta_1)$  striksiyon eğrisinin eğriliğinin Lancret eğriliğine bağlı ifadesi

$$\frac{1}{R} = \pm \lambda \cosh \theta \quad (4.15)$$

burulmasının Lancret eğriliğine bağlı ifadesi

$$\frac{\gamma}{R} = \pm \lambda \sinh \theta \quad (4.16)$$

dır.

Çalışmamız boyunca bu eğrilik ve burulmanın pozitif değerleri alınarak gerekli hesaplamalar yapıldı.

Şimdi  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı için türev formüllerini hesaplayalım:

(4.14) eşitliklerinin diferensiyeli alınır, (4.15) ve (4.16) eşitlikleri kullanılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  ortonormal sistemi için

$$\begin{cases} k_1' = \theta' r_1 \\ r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1 \\ t_1' = \lambda r_1 \end{cases} \quad (4.17)$$

türev formülleri elde edilir. Bu türev formülleri 4.1.1.2 de inceleyeceğimiz timelike merkez normal regle yüzeyin  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının açılmal hızını tanımlar. Burada  $k_1$  spacelike üreteç vektör (aynı zamanda  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının Darboux vektörü),  $r_1$  timelike merkez normal vektör,  $t_1$  spacelike merkez teğet vektör olarak adlandırılır. Ayrıca burada  $\theta'$  ve  $\lambda$  sırasıyla (4.1) timelike regle yüzeyinin eğriliği ve Lancret eğriliğidir.

Geliştirilmiş çatının herbir vektörü robot hareketi boyunca bir regle yüzey oluşturur.  $\{k_1, r_1, t_1\}$  çatısının  $k_1$  üreteç vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$$

yüzeyi alınırsa görüleceği üzere burada  $\alpha$  spacelike eğri,  $k_1$  spacelike vektör olduğundan bu yüzey spacelike regle yüzeydir. Böylece 4.1.1.3 de bahsedeceğimiz robotun yörünge yüzeyi spacelike regle yüzey olur. Sonuç olarak başlangıçta timelike yüzey olarak gerekli hesaplamalar yapıldığında görülür ki robotun hareket ettiği yüzey spacelike regle yüzeydir. Yani bu durum için robotun yörünge yüzeyi değişmiştir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $t_1$  vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s)$$

yüzeyi alınırsa görüleceği üzere burada  $\alpha$  spacelike eğri,  $t_1$  spacelike vektör olduğundan bu yüzey spacelike regle yüzeydir. Böylece 4.1.1.3 de bahsedeceğimiz robotun yörünge yüzeyi spacelike regle yüzey olur. Sonuç olarak başlangıçta timelike yüzey olarak gerekli hesaplamalar yapıldığında görülür ki robotun hareket ettiği yüzey spacelike regle yüzeydir. Yine bu durum için de robotun yörünge yüzeyi değişmiştir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  çatısının  $r_1$  timelike merkez normal vektörünün oluşturduğu yüzey timelike merkez normal regle yüzey olarak adlandırılıp 4.1.1.2 de ayrıca incelenecektir.

Böylece 4.1.1.3 de inceleyeceğimiz robotun yörünge yüzeyinin hareketini sağlayan  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O=k_1$  veya  $O=t_1$  alınarak robot yörünge yüzeyi incelenebilir. Bu nedenle bu kısımda  $k_1$  in oluşturduğu yüzeyi alarak işlemlerimize devam edeceğiz. Benzer şekilde  $t_1$  in oluşturduğu yüzey de alınarak benzer neticelerin elde edileceği görülebilir.

Şimdi  $\{k_1, r_1, t_1\}$  çatısının  $k_1$  üreteç vektörünün oluşturduğu  $\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$  spacelike regle yüzeyini alalım. Bu yüzeyin striksiyon eğrisi için bir parametrizasyon,

$$\beta_{k_1}(s) = \alpha(s) - \mu_{k_1}(s)k_1(s) \quad (4.18)$$

dır. Bu eşitiliğin diferensiyeli alınıp, (4.14),  $k_1' = \theta' r_1$  ve striksiyon eğrisinin tanımından  $\langle \beta_{k_1}', k_1' \rangle = 0$  olması kullanılarak,

$$\mu_{k_1}' = \frac{\Gamma \cosh \theta - \Delta \sinh \theta + \mu' R \cosh \theta}{\theta'} \quad (4.19)$$

elde edilir. Burada  $\Gamma$  ve  $\Delta$ , (4.9) da ifade edilen fonksiyonlardır.

(4.18) striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.18) in diferensiyeli alınıp, (4.8), (4.14),  $k_1' = \theta' r_1$  ve (4.19) un kullanılmasıyla striksiyon eğrisinin hareketi boyunca  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre pozisyonel değişimi

$$\beta_{k_1}'(s) = \Gamma_{k_1} k_1 + \mu t_1 \quad (4.20)$$

dır. Burada

$$\Gamma_{k_1} = -\Gamma \sinh \theta + \Delta \cosh \theta - \mu' R \sinh \theta - \mu_{k_1}'$$

olup  $\Gamma_{k_1}$  ve  $\mu$ ,  $k_1$  üreteç vektörünün oluşturduğu spacelike regle yüzeyi karakterize eden eğrilik fonksiyonlarıdır.

#### 4.1.1.2 $r_1$ merkez normal vektörünün oluşturduğu timelike merkez normal

##### yüzeyi ve doğal çatı

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı striksiyon eğrisi üzerinde hareket ederken,  $r_1$  merkez normal vektörü bir başka regle yüzey üretir.  $\beta_{k_1}$  striksiyon eğrisi üzerinde merkez normal vektörünün oluşturduğu

$$\varphi_{r_1}(s, v) = \beta_{k_1}(s) + v r_1(s) \quad (4.21)$$

yüzeyine timelike merkez normal regle yüzey denir. Bu timelike merkez normal regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\beta_{r_1}(s) = \beta_{k_1}(s) - \mu_{r_1}(s) r_1(s) \quad (4.22)$$

dır. Burada  $\mu_{r_1}$  merkez normal vektör boyunca striksiyon eğrileri arasındaki uzaklık olup (4.22) nin diferensiyellenmesi, striksiyon eğrisinin tanımından  $\langle \beta_{r_1}', r_1 \rangle = 0$  olması,  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$  ve (4.20) nin kullanılmasıyla

$$\mu_{r_1}(s) = \frac{\lambda \mu + \theta' \Gamma_{k_1}}{\theta'^2 + \lambda^2} \quad (4.23)$$

dır.

Böylece  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisi üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı kurulabilir:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{k_1'}{\theta'} \\ r_2 = \frac{r_1'}{\kappa}, \quad \kappa = \|r_1'\| \\ r_3 = r_2 \times r_1 \end{cases} \quad (4.24)$$

$\{r_1, r_2, r_3\}$  üçlüsü  $\varphi_{r_1}(s, v)$  timelike merkez normal regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin orjin (merkez) noktasındaki doğal çatısıdır. Bu doğal çatı regle yüzeyin yüksek mertebeden diferensiyel özelliklerinin incelenmesine olanak sağlar. Burada  $r_1$  timelike merkez normal vektör,  $r_2$  normal vektörü ve  $r_3$  binormal vektörü spacelike vektördür. Ayrıca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için  $r_1 \times r_2 = -r_3$ ,  $r_2 \times r_3 = r_1$ ,  $r_3 \times r_1 = -r_2$  dir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı ile  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının  $r_1$  merkez normal vektörleri ortaktır ve bu çatı vektörleri arasında merkez normal vektörünün dönme açısı  $\phi$  olmak üzere

$$\begin{cases} k_1 = \sin \phi r_2 + \cos \phi r_3 \\ t_1 = \cos \phi r_2 - \sin \phi r_3 \end{cases} \quad (4.25)$$

ilişkisi vardır. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \phi & \cos \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

dır. Bu matrisin ters formu

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

dır.

(4.24) den  $r_1' = \kappa r_2$  ve (4.27) den  $r_2 = \sin \phi k_1 + \cos \phi t_1$  olup  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$  olması kullanılarak

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{\lambda}{\kappa} \\ \sin \phi = \frac{\theta'}{\kappa} \end{cases} \quad (4.28)$$

elde edilir. Buradan  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$  olması kullanılarak timelike merkez normal regle yüzeyin eğriliği

$$\kappa^2 = \theta'^2 + \lambda^2 \quad (4.29)$$

dır.  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatının Darboux vektörü

$$\begin{aligned} U_{k_1} &= r_1 \times r_1' \\ &= r_1 \times (\theta' k_1 + \lambda t_1) \\ &= \theta' t_1 - \lambda k_1 \end{aligned} \quad (4.30)$$



dır. Ayrıca bu Darboux vektörü,  $k_1$  üreteç vektörünün oluşturduğu robot yörünge yüzeyinin geliştirilmiş çatıya göre açısal hızıdır.

Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü, doğal çatı cinsinden elde edilebilir:

(4.28) in (4.27) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \theta' & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -\theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

oluşan matrisel gösterimden

$$r_3 = \frac{1}{\kappa} (\lambda k_1 - \theta' t_1)$$

ifadesinin (4.30) da kullanılmasıyla

$$U_{k_1} = -\kappa r_3 \quad (4.32)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

**Sonuç 4.1.4:** Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü (yani robot yörünge yüzeyin açısal hızı) ile doğal çatının binormal vektörü ters doğrultudadır.

Timelike merkez normal regle yüzeyin striksiyon eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu, başlangıçtaki timelike regle yüzeyin striksiyon eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu ile aynı davranışı gösterecektir. Şimdi timelike merkez normal regle yüzeyinin  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.22) den türev alınıp, (4.23), (4.31) in ters formu ve  $\kappa = \|r_1\|$  olması kullanıldığında striksiyon eğrisinin hareketi boyunca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre pozisyonel değişimi aşağıdaki gibidir:

$$\beta_{r_1}' = \Gamma_{r_1} r_1 + \Delta_{r_1} r_3 \quad (4.33)$$

Burada

$$\begin{cases} \Gamma_{r_1} = -\mu_{r_1}' \\ \Delta_{r_1} = \frac{\lambda \Gamma_{k_1} - \mu \theta'}{\kappa} \end{cases} \quad (4.34)$$

dir.  $\Gamma_{r_1}$  ve  $\Delta_{r_1}$  fonksiyonları timelike merkez normal regle yüzeyin **eğrilik fonksiyonları** olup (4.9) da ifade edilen  $\Gamma$  ve  $\Delta$  eğrilik fonksiyonlarıyla aynı rolü oynar.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının türev formüllerini hesaplayalım:

(4.24) denkleminde

$$r_1' = \kappa r_2$$

dir.  $r_2$  normal vektörü için

$$r_2' = ar_1 + br_2 + cr_3, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

olmak üzere burada

$$a = -\langle r_2', r_1 \rangle, \quad b = \langle r_2', r_2 \rangle, \quad c = \langle r_2', r_3 \rangle$$

olup

$$a = -\langle r_2', r_1 \rangle = \langle r_1', r_2 \rangle = \kappa, \quad b = 0$$

elde edilir. Ayrıca  $c = \langle r_2', r_3 \rangle = -\langle r_3', r_2 \rangle = -\tau$  olarak alınır

$$r_2' = \kappa r_1 - \tau r_3$$

elde edilir.  $r_3$  binormal vektörünün türevi için,

$$r_3' = ar_1 + br_2 + cr_3, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

olmak üzere burada

$$a = \langle r_3', r_1 \rangle, \quad b = \langle r_3', r_2 \rangle, \quad c = \langle r_3', r_3 \rangle$$

olup  $a = 0, b = \tau, c = 0$  dir. Böylece  $r_3' = \tau r_2$  elde edilir.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının türev formülleri matris formunda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının birinci dereceden açısal değişimidir. Burada  $\kappa = \|r_1'\|$  ve  $\tau = \langle r_3', r_2 \rangle$  olup sırasıyla  $\varphi_{r_1}$  timelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasıdır.

Şimdi  $\varphi_{r_1}$  timelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasının açısıyla olan ilişkisini elde edelim:

(4.28) denkleminde  $\kappa = \theta' \operatorname{cosec} \phi$  olduğu kolayca görülür.

(4.27) den  $r_3 = \cos \phi k_1 - \sin \phi t_1$  olup türevi alınıp,  $r_2 = \sin \phi k_1 + \cos \phi t_1$  ve  $\tau = \langle r_3', r_2 \rangle$  olması kullanılarak  $\tau = -\phi'$  elde edilir.

**Sonuç 4.1.5:** Timelike merkez normal regle yüzeyin eğrilik ve burulmasının merkez normal vektörünün dönme açısına bağlı ifadeleri

$$\kappa = \theta' \operatorname{cosec} \phi, \quad \tau = -\phi' \quad (4.36)$$

dır. Buradan görüleceği üzere timelike merkez normal regle yüzeyin burulması, merkez normal vektörünün açısal hızıyla ters doğrultudadır.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının Darboux vektörü,

$$\begin{aligned} U_{r_2} &= r_2 \times r_2' \\ &= r_2 \times (\kappa r_1 - \tau r_3) \\ &= \kappa r_3 - \tau r_1 \end{aligned} \quad (4.37)$$

olup timelike merkez normal regle yüzeyinin doğal çatıya göre açısal hızıdır.

(4.30) denkleminde ifade edilen geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ve (4.37) ile ifade edilen doğal çatının Darboux vektörü, sırasıyla spacelike robot yörünge regle yüzeyin ve timelike merkez normal regle yüzeyin açısal hareketini tanımlar.

(4.37) de (4.32) kullanılırsa timelike merkez normal regle yüzeyinin açısal hızı ile robot yörünge yüzeyin açısal hızı arasında

$$U_{r_2} = -U_{k_1} - \tau r_1$$

ilişkisi vardır. Böylece doğal çatının geliştirilmiş çatıya göre açısız hareketi,  $r_2$  vektörü civarında dönmesidir. Ayrıca Darboux vektörleri açısız hız olarak düşünülebilirken, striksiyon eğrisinin pozisyonel varyasyonu lineer hız olarak düşünülebilir.

#### 4.1.1.3 Çatılar arasındaki ilişki

Bilindiği üzere bir robot hareketi merkez (orjin) noktasında tanımlı dört tane çatı ve bir dönme açısıyla belirlidir. Bu dört çatı sırasıyla geliştirilmiş çatı, doğal çatı, yüzey çatısı ve araç çatı olup ilk iki çatı 4.1.1.1 ve 4.1.1.2 bölümlerinde ifade edildi. Bu bölümde ilk olarak robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısı tanımlandı. Daha sonra da robotun yörüngesini yani izlediği yolu belirleyen  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Minkowski uzayındaki olası durumlarına göre çatılar arasındaki ilişkiler, iki alt başlık şeklinde incelendi.

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısı tanımlayalım. Yüzeyin  $v=0$  noktasındaki yüzey çatısı  $\{O, S_n, S_b\}$  olup, burada  $O$  yönlendirme vektörü spacelike vektör,  $S_n$ ,  $v=0$  da yüzey normali timelike vektör,  $S_b$  binormal vektörü spacelike vektördür. Ayrıca  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı için  $O \times S_n = -S_b$ ,  $S_n \times S_b = -O$ ,  $S_b \times O = S_n$  dir.

Daha önceki bölümlerde de ifade ettiğimiz üzere geliştirilmiş çatının herbir vektörü robot hareketi boyunca bir regle yüzey oluşturur. Bu yüzden bu kısımda  $O$  yönlendirme vektörünü  $k_1$  üreteç vektörü yönünde seçerek  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı üzerinde robot hareketini tanımlayalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s) \quad (4.38)$$

spacelike regle yüzeyi için  $O = k_1$ ,  $S_n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \Big|_{v=0}$ ,  $S_b = S_n \times O$  olmak üzere bu vektörleri hesaplayalım:

(4.38) eşitliğinden sırasıyla  $s$  ve  $v$  ye göre türev alınıp ayrıca (4.18) in  $s$  ye göre türevi alınıp (4.20) nin kullanılmasıyla

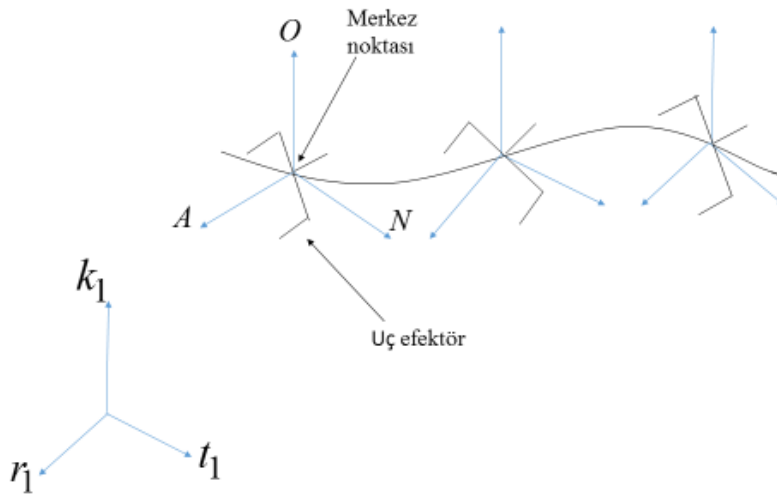
$$S_n = \frac{\mu r_1 + \mu_{k_1} \theta' t_1}{\sqrt{(\mu_{k_1} \theta')^2 - \mu^2}} \quad (4.39)$$

ve  $S_b = S_n \times O$  olması kullanılarak

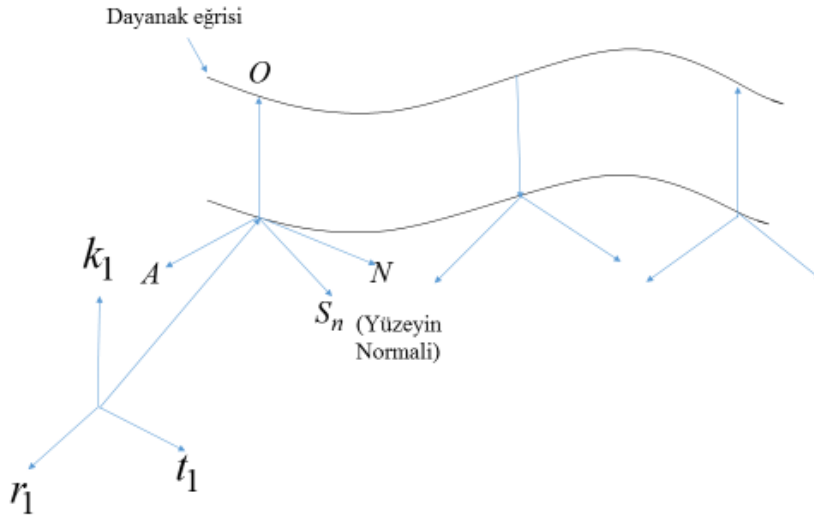
$$S_b = \frac{\mu t_1 + \mu_{k_1} \theta' r_1}{\sqrt{(\mu_{k_1} \theta')^2 - \mu^2}} \quad (4.40)$$

elde edilir. Böylece yüzeyin  $v=0$  daki yüzey çatısı  $\{O = k_1, S_n, S_b\}$  dir.

Robotun yörüngesini yani izlediği yolu  $\{O, A, N\}$  araç çatısı temsil etmektedir. Bir tipik robot yörüngesi şekilde gösterilmiştir (Şekil 4.2). Robot uç efektörün yeri ve yönü araç merkez noktası ve araç çatısı kullanılarak tamamen belirlenir. Araç çatısı;  $O$  yönlendirme vektörü,  $A$  yaklaşma (ilerleme) vektörü,  $N$  normal vektöründen oluşur. Araç merkez noktası araç çatının orjini olarak seçilebilir. Şekil 4.3 , Şekil 4.2 deki robot yörüngesinin bir regle yüzey kullanılarak nasıl temsil edilebileceğini gösterir. Üç regle yüzey araç merkez noktası ile çizilen ortak bir dayanak eğrisini paylaşırken araç çatının üç vektörünün herbiri bir regle yüzey meydana getirir. Robot yörüngesini temsil etmek için bunlardan bir tanesini kullanmak yeterlidir.



**Şekil 4.2.** Robot yörüngesi



**Şekil 4.3.** Regle yüzey kullanılarak robot yörüngesi

Şekil 4.3 de gösterildiği gibi  $O$  yönlendirme vektörü ile meydana gelen regle yüzey, yörüngeyi temsil eden yüzey olarak seçilebilir.

$\{O, A, N\}$  araç çatısı ,

i)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör

ii)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör

şeklinde iki türlü tanımlanabilir.

Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

**i)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması**

**durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = -N$  ,  $A \times N = -O$  ,  $N \times O = A$  dır.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

dır.  $S_b$  ile  $t_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

dır. (4.41) ve (4.43) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ile  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

şeklinde ve ters formuda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

şeklinde elde edilir.

**ii)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması**

**durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = N$ ,  $A \times N = -O$ ,  $N \times O = -A$  dır.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

dır.  $S_b$  ile  $t_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

dır. (4.47) nin (4.49) da yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

olup burada  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

eşitliğine ve ters formu olarak da

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

eşitliğine ulaşılır.

#### 4.1.1.4 Araç çatının diferensiyel hareketi

Birinci bölümde belirttiğimiz gibi robot uç hareketi, robot yörünge olarak ifade edilir. Robot yörünge, merkez noktasının lineer hareketi ve araç çatısının hareketi ile tanımlanır. Bu bölümde, merkez noktasının ve araç çatısının diferensiyel özellikleri; verilen timelike regle yüzeyin eğrilik teorisi ve 4.1.1.3. bölümdeki dört çatı arasındaki ilişkiler kullanılarak incelenmiştir. Ayrıca robotun yörüngesini belirleyen araç çatının türev formüllerinin, verilen timelike regle yüzeyin Lancret eğrilğine ve robotun



tanımlanması için gerekli olan dört tane referans çatının dönme açılarına bağlı olduğu görülmüştür.

Şimdi  $\{O, A, N\}$  araç çatısının diferensiyel hareketini 4.1.1.3 de belirttiğimiz i) ve ii) durumları için sırasıyla inceleyelim:

**i)  $O = k_1$  spacelike vektör, A timelike vektör, N spacelike vektör olması**

**durumu**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.2) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.53)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.8) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin (aynı zamanda bu  $\alpha$  eğrisi, merkez noktasının yeridir) birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.54)$$

olur. Burada  $\Gamma$  ve  $\Delta$  (4.9) da ifade edilen timelike regle yüzeyin eğrilik fonksiyonlarıdır. (4.54) ün  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu (4.14) kullanılarak

$$\alpha'(s) = (-(\Gamma + \mu' R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta) k_1 + ((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta) r_1 + \mu t_1 \quad (4.55)$$

şeklinde elde edilir. Burada (4.46) nin kullanılması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & (\Delta \cosh \theta - (\Gamma + \mu' R) \sinh \theta) O + ((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta \cosh \Sigma - \mu \sinh \Sigma - \Delta \sinh \theta \cosh \Sigma) A \\ & + (-(\Gamma + \mu' R) \cosh \theta \sinh \Sigma + \mu \cosh \Sigma + \Delta \sinh \theta \sinh \Sigma) N \end{aligned} \quad (4.56)$$

şeklinde olur.

Araç çatının birinci dereceden açılma varyasyonunu belirlemek için, (4.45) in diferensiyeli alınıp (4.17) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ \theta' \cosh \Sigma & \sinh \Sigma(\lambda + \Sigma') & \cosh \Sigma(\lambda + \Sigma') \\ \theta' \sinh \Sigma & \cosh \Sigma(\lambda + \Sigma') & \sinh \Sigma(\lambda + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

elde edilir. Burada (4.46) yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' \cosh \Sigma & -\theta' \sinh \Sigma \\ \theta' \cosh \Sigma & 0 & \lambda + \Sigma' \\ \theta' \sinh \Sigma & \lambda + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

matrisel formunda elde edilir.

Buna göre  $\{O, A, N\}$  araç çatısının birinci dereceden açısal varyasyonunun,  $\lambda$  Lancret eğriliğine ve çatılar arasındaki dönme açılara bağlı olduğu görülür. ( $\theta'$  :  $\theta$  dönme açısının açısal hızına,  $\Sigma = \psi + \sigma$  olduğundan  $\psi$  ve  $\sigma$  dönme açılara bağlıdır. )

Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere bu vektörü hesaplayalım:

$$U_A = aO + bA + cN, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (4.59)$$

olmak üzere Darboux vektörünün özelliğinden, sırasıyla  $O' = U_A \times O$ ,  $A' = U_A \times A$ ,

$N' = U_A \times N$  olması kullanılarak

$$\begin{aligned} \theta' \cosh \Sigma A - \theta' \sinh \Sigma N &= bN + cA \\ b &= -\theta' \sinh \Sigma, \quad c = \theta' \cosh \Sigma \end{aligned} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \theta' \cosh \Sigma O + (\lambda + \Sigma') N &= -aN + cO \\ a &= -(\lambda + \Sigma') \quad , \quad c = \theta' \cosh \Sigma \end{aligned} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \theta' \sinh \Sigma O + (\lambda + \Sigma') A &= -aA - bO \\ a &= -(\lambda + \Sigma') \quad , \quad b = -\theta' \sinh \Sigma \end{aligned}$$

elde edilip bu değerlerin (4.59) da yerine yazılmasıyla,

$$U_A = -(\lambda + \Sigma')O - \theta' \sinh \Sigma A + \theta' \cosh \Sigma N \quad (4.60)$$

ifadesine ulaşılır.  $U_A$  Darboux vektörü  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı cinsinden elde edilebilir. (4.58) de (4.51) yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılarak

$$U_A = -(\lambda + \Sigma')k_1 + \theta' t_1 \quad (4.61)$$

elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{k_1}$  Darboux vektörü cinsinden yazılabilir:

(4.61) de (4.30) kullanılırsa

$$U_A = U_{k_1} - \Sigma' k_1$$

elde edilmiş olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açılma hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

**ii)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması**

### **durumu**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.2) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.62)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.8) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.63)$$

olur. Burada  $\Gamma$  ve  $\Delta$  (4.9) da ifade edilen timelike regle yüzeyin eğrilik fonksiyonlarıdır. (4.63) ün  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu (4.14) kullanılarak

$$\alpha'(s) = (-(\Gamma + \mu' R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta)k_1 + ((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta)r_1 + \mu t_1 \quad (4.64)$$

şeklinde elde edilir ve (4.52) nin kullanılması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Delta \cosh \theta - (\Gamma + \mu' R) \sinh \theta)O + (-(\Gamma + \mu' R) \cosh \theta \sinh \Sigma + \mu \cosh \Sigma + \Delta \sinh \theta \sinh \Sigma)A + ((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta \cosh \Sigma - \mu \sinh \Sigma - \Delta \sinh \theta \cosh \Sigma)N \quad (4.65)$$

şeklinde olur.

Araç çatının birinci dereceden açısal varyasyonunu belirlemek için, (4.51) in diferensiyeli alınıp (4.17) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ \theta' \sinh \Sigma & \cosh \Sigma(\lambda + \Sigma') & \sinh \Sigma(\lambda + \Sigma') \\ \theta' \cosh \Sigma & \sinh \Sigma(\lambda + \Sigma') & \cosh \Sigma(\lambda + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

elde edilen matris formunda (4.52) den yararlanılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta' \sinh \Sigma & \theta' \cosh \Sigma \\ \theta' \sinh \Sigma & 0 & \lambda + \Sigma' \\ \theta' \cosh \Sigma & \lambda + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

şeklinde elde edilir.

i) durumundaki benzer işlemler yapılarak,  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü

$$U_A = (\lambda + \Sigma')O - \theta' \cosh \Sigma A + \theta' \sinh \Sigma N \quad (4.68)$$

ve  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = (\lambda + \Sigma')k_1 - \theta' t_1 \quad (4.69)$$

ifadesine ulaşılır. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{k_1}$  Darboux vektörü cinsinden yazılabilir:

(4.61) de (4.30) kullanılırsa

$$U_A = -U_{k_1} + \Sigma' k_1$$

olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açısal hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

(4.61) ve (4.69) denklemleri karşılaştırıldığında i) ve ii) durumlarının Darboux vektörlerinin işaret farkıyla eşit olduğu görülür. Yani Darboux vektörleri zıt yönlüdür (ters doğrultudadır).



dir. Burada  $\mu$  reel değişkenli parametre olup striksiyon eğrisinden dayanak eğrisine olan uzaklıktır.  $\beta$  striksiyon eğrisi üzerinde  $\{r, t, k\}$  ortonormal sistemi aşağıdaki gibi iki şekilde tanımlanabilir:

**1. Durum:**  $r$  üreteç vektörü **spacelike**,  $t$  merkez normal vektörü **timelike** ve  $k$  merkez teğet vektörü **spacelike** olabilir. Bu sisteme ise **üreteç üçlüsü** denir. Bu durumda  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı

$$\begin{cases} r = \frac{\bar{R}}{R} \\ t = \bar{R}' \\ k = t \times r \end{cases}, \quad R = \|\bar{R}\|$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca  $\{r, t, k\}$  ortonormal sistemi için  $r \times t = -k$ ,  $t \times k = -r$ ,  $k \times r = t$  dir.

**2. Durum:**  $r$  üreteç vektörü **spacelike**,  $t$  merkez normal vektörü **spacelike** ve  $k$  merkez teğet vektörü **timelike** olabilir. Bu sisteme ise **üreteç üçlüsü** denir. Bu durumda  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı

$$\begin{cases} r = \frac{\bar{R}}{R} \\ t = \bar{R}' \\ k = r \times t \end{cases}, \quad R = \|\bar{R}\|$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca  $\{r, t, k\}$  ortonormal sistemi için  $r \times t = k$ ,  $t \times k = -r$ ,  $k \times r = -t$  dir.

Şimdi sırasıyla bu durumlar için spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyin geliştirilmiş robot uç hareketini inceleyelim:

## 1. Durum

(4.71) denkleminde  $s$  ye göre türev alınır,

$$\beta'(s) = \alpha'(s) - \mu'(s)\bar{R}(s) - \mu(s)\bar{R}'(s) \quad (4.72)$$

olur. Burada  $\langle \beta'(s), \bar{R}'(s) \rangle = 0$  olması kullanılarak

$$\mu(s) = -\langle \alpha'(s), \bar{R}'(s) \rangle \quad (4.73)$$

elde edilir.

Bir önceki bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak  $\beta$  striksiyon eğrisinin teğet vektörü yani striksiyon eğrisinin, üreteç üçlüsü cinsinden birinci dereceden pozisyonel varyasyonunun

$$\beta'(s) = \Gamma(s)r(s) + \Delta(s)k(s) \quad (4.74)$$

ifadesine ulaşılır. Burada

$$\begin{cases} \Gamma(s) = \frac{1}{R(s)} \langle \alpha'(s), \bar{R}(s) \rangle - \mu'(s)R(s) \\ \Delta(s) = \frac{1}{R(s)} \langle \alpha'(s), \bar{R}'(s) \times \bar{R}(s) \rangle \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup bu fonksiyonlara (4.70) timelike regle yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

Yine bir önceki bölümde olduğu gibi benzer işlemler yapılarak  $\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünün türev formülleri yani birinci dereceden açılmalı varyasyonunun

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{R}t \\ t' = \frac{1}{R}(r - \gamma k) \\ k' = -\frac{\gamma}{R}t \end{cases} \quad (4.75)$$

şeklinde olduğu kolayca görülebilir. Burada  $\gamma = \langle \bar{R}'', \bar{R} \times \bar{R}' \rangle$  ifadesi (4.70) yüzeyinin

$(\bar{R})$  doğrultman vektörünün çizdiği eğrinin **geodezik eğriliğidir**.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünün Darboux vektörü  $U_r$  olmak üzere

$$U_r = t \times t' = \frac{1}{R}(\gamma r + k) \quad (4.76)$$

dir.

**Tanım 4.1.5:**

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R} \rangle - \mu' R \\ \Delta = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle \\ \gamma = \langle \bar{R}'', \bar{R} \times \bar{R}' \rangle \end{cases}$$

ifadelerine (4.70) timelike regle yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

Ayrıca (4.70) timelike regle yüzeyin Lancret eğriliği,

$$\lambda = \|t''\| = \sqrt{|\langle t'', t'' \rangle|} = \sqrt{\left| \frac{1 + \gamma^2}{R^2} \right|} \quad (4.77)$$

dir.

#### 4.1.2.1 Geliştirilmiş çatının oluşturulması

Bu bölümde robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürülerek  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı tanımlanacaktır. Ayrıca bu çatının  $k_1$  üreteç vektörü  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının Darboux vektörüne karşılık gelmektedir yani  $k_1 = U_r$  dir.

$\{r, t, k\}$  üreteç çatısı  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürülürse dönme denkleminin matrisel formu

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ t_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

olup bu matrisin ters formu da



$$\begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ t_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

dir.

$\beta$  striksiyon eğrisi üzerine kurulan  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı için elde edilen (4.75) türev formüllerinden eğriliği  $\frac{1}{R}$ , burulması  $\frac{\gamma}{R}$  olan ve merkez noktasından geçen bir  $(\beta_1)$  eğrisi daima bulunabilir. (4.76), (4.79) ve  $U_r = k_1$  olması kullanılarak

$$\cos \theta = \frac{1}{R} \quad , \quad \sin \theta = \frac{\gamma}{R}$$

elde edilir.

Total (Lancret) eğrilik tanımı gereğince  $\lambda = \|t'\| = \sqrt{\left|\frac{\gamma^2 + 1}{R^2}\right|}$  olup  $\gamma = \tan \theta$  olması

kullanılırsa aşağıdaki sonuç verilebilir:

**Sonuç 4.1.6:**  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısını üzerinde bulunduran  $(\beta_1)$  eğrisinin, eğriliğinin Lancret eğriliğine bağlı ifadesi

$$\frac{1}{R} = \lambda \cos \theta \quad (4.80)$$

ve burulmasının Lancret eğriliğine bağlı ifadesi

$$\frac{\gamma}{R} = \lambda \sin \theta \quad (4.81)$$

dır.

Şimdi  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı için türev formüllerini hesaplayalım:

(4.79) eşitliklerinin diferensiyeli alınır, (4.80) ve (4.81) eşitlikleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  ortonormal sistemi için

$$\begin{cases} k_1' = \theta' r_1 \\ r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1 \\ t_1' = \lambda r_1 \end{cases} \quad (4.82)$$

türev formülleri elde edilir. Bu türev formülleri 4.1.2.2 de inceleyeceğimiz timelike merkez normal regle yüzeyin  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının açısız hızını tanımlar. Burada  $k_1$  spacelike **üreteç** vektör (aynı zamanda  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının Darboux vektörü) ,  $r_1$  spacelike **merkez normal vektör**,  $t_1$  timelike **merkez teğet vektör** olarak adlandırılır. Ayrıca burada  $\theta'$  ve  $\lambda$  sırasıyla (4.70) timelike regle yüzeyinin eğriliği ve Lancret eğriliğidir.

Geliştirilmiş çatının herbir vektörü robot hareketi boyunca bir regle yüzey oluşturur.  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısında eğer  $k_1$  spacelike üreteç vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$$

yüzeyini alırsak görüleceği üzere burada  $\alpha$  timelike eğri olduğundan bu yüzey timelike regle yüzeydir. O halde 4.1.2.3 de bahsedeceğimiz robot yörünge yüzeyimizde timelike regle yüzey olur.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısında eğer  $t_1$  timelike merkez teğet vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s)$$

yüzeyini alırsak görüleceği üzere burada  $\alpha$  timelike eğri olduğundan böyle bir yüzey  $IR_1^3$  de tanımlanamaz. Dolayısıyla 4.1.2.3 de  $t_1$  in oluşturacağı yüzey için robot yörünge yüzeyinden bahsedilemez.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısında ,  $r_1$  spacelike merkez normal vektörünün oluşturduğu yüzey alınırsa bu yüzey timelike merkez normal regle yüzey olarak adlandırılır ve bu yüzey ve özellikleri 4.1.2.2 de ayrıca incelenecektir.

Şimdi elde ettiğimiz  $\{k_1, r_1, t_1\}$  çatısının  $k_1$  spacelike üreteç vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$$

timelike regle yüzeyini ele alalım. Bu yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\beta_{k_1}(s) = \alpha(s) - \mu_{k_1}(s)k_1(s) \quad (4.83)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve akabinde (4.79),  $k_1' = \theta' r_1$  ve  $\langle \beta_{k_1}', k_1' \rangle = 0$  eşitlikleri kullanılırsa,

$$\mu_{k_1} = \frac{\Gamma \cos \theta - \Delta \sin \theta + \mu' R \cos \theta}{\theta'} \quad (4.84)$$

elde edilir. Burada  $\Gamma$  ve  $\Delta$ , tanım 4.1.5 de ifade edilen (4.70) timelike regle yüzeyinin **eğrilik fonksiyonlarıdır.**

(4.83) striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.83) ün diferensiyeli alınıp, (4.73), (4.79),  $k_1' = \theta' r_1$  ve (4.84) ün kullanılmasıyla striksiyon eğrisinin hareketi boyunca  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre pozisyonel değişimi

$$\beta_{k_1}'(s) = \Gamma_{k_1} k_1 + \mu t_1 \quad (4.85)$$

bulunur. Burada

$$\Gamma_{k_1} = \Gamma \sin \theta + \Delta \cos \theta + \mu' R \sin \theta - \mu_{k_1}'$$

dır. Nasıl ki  $\Gamma$  ve  $\Delta$ , (4.70) timelike regle yüzeyini karakterize eden eğrilik fonksiyonları ise burada da  $\Gamma_{k_1}$  ve  $\mu$ ,  $k_1$  spacelike üreteç vektörünün oluşturduğu timelike regle yüzeyi karakterize eden eğrilik fonksiyonlarıdır.

#### 4.1.2.2 $r_1$ merkez normal vektörünün oluşturduğu timelike merkez normal

##### yüzeyi ve doğal çatı

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı striksiyon eğrisi üzerinde hareket ederken,  $r_1$  merkez normal vektörü bir başka regle yüzey üretir.  $\beta_{k_1}$  striksiyon eğrisi üzerinde merkez normal vektörünün oluşturduğu

$$\varphi_{r_1}(s, v) = \beta_{k_1}(s) + v r_1(s) \quad (4.86)$$

yüzeyine timelike merkez normal regle yüzey denir. Bu timelike merkez normal regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\beta_{r_1}(s) = \beta_{k_1}(s) - \mu_{r_1}(s) r_1(s) \quad (4.87)$$

dır. Burada  $\mu_{r_1}$ , merkez normal vektör boyunca striksiyon eğrileri arasındaki uzaklık olup (4.87) nin diferensiyellenmesi,  $\langle \beta_{r_1}', r_1' \rangle = 0$  olması,  $r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1$  ve (4.85) in kullanılmasıyla

$$\mu_{r_1}(s) = -\frac{(\lambda\mu + \theta'\Gamma_{k_1})}{\theta'^2 - \lambda^2} \quad (4.88)$$

dır.

Böylece  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisi üzerinde  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı kurulabilir.  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için iki durum söz konusudur. İlk olarak,  $r_2$  timelike vektör,  $r_1$  ve  $r_3$  spacelike vektör; daha sonra  $r_1$  ve  $r_2$  spacelike vektör,  $r_3$  timelike vektör olması durumu incelenecektir.

**i)  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için  $r_2$  timelike vektör,  $r_1$  ve  $r_3$  spacelike vektör olması hali**

Bu durumda  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{k_1'}{\theta'} \\ r_2 = \frac{r_1'}{\kappa}, \quad \kappa = \|r_1'\| \\ r_3 = r_2 \times r_1 \end{cases} \quad (4.89)$$

Ayrıca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısı için  $r_1 \times r_2 = -r_3$ ,  $r_2 \times r_3 = -r_1$ ,  $r_3 \times r_1 = r_2$  dir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı ile  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının  $r_1$  merkez normal vektörleri ortaktır ve bu çatı vektörleri arasında merkez normal vektörünün dönme açısı  $\phi$  olmak üzere

$$\begin{cases} k_1 = \sinh \phi r_2 + \cosh \phi r_3 \\ t_1 = \cosh \phi r_2 + \sinh \phi r_3 \end{cases} \quad (4.90)$$

ilişkisi vardır. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

dır. (4.91) in ters formu

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \phi & 0 & \cosh \phi \\ \cosh \phi & 0 & -\sinh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

dır. (4.89) dan  $r_1' = \kappa r_2$  ve (4.92) dan  $r_2 = -\sinh \phi k_1 + \cosh \phi t_1$  olup (4.82) den  $r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1$  olması kullanılarak

$$\begin{cases} \cosh \phi = \frac{\lambda}{\kappa} \\ \sinh \phi = \frac{\theta'}{\kappa} \end{cases} \quad (4.93)$$

elde edilir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatının Darboux vektörü

$$\begin{aligned} U_{k_1} &= r_1 \times r_1' \\ &= r_1 \times (-\theta' k_1 + \lambda t_1) \\ &= \theta' t_1 - \lambda k_1 \end{aligned} \quad (4.94)$$

olup timelike merkez normal regle yüzeyin geliştirilmiş çatıya göre açılma hızıdır.

Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü, doğal çatı cinsinden elde edilebilir:

(4.93) ün (4.91) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\theta' & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -\theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

elde edilip buradan

$$r_3 = \frac{1}{\kappa} (\lambda k_1 - \theta' t_1)$$

olup (4.94) ün kullanılmasıyla

$$U_{k_1} = -\kappa r_3 \quad (4.96)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.7:** Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ile doğal çatının binormal vektörü ters doğrultudadır.

Timelike merkez normal regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu, başlangıçtaki timelike regle yüzeyin striksiyon eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu ile aynı davranışı gösterecektir.

Timelike merkez normal regle yüzeyinin  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.87) nin diferensiyeli alınıp, (4.85), (4.88), (4.95) in ters formu,  $r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1$  ve  $\kappa = \|r_1'\|$  olması kullanılarak,  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının hareketi boyunca striksiyon eğrisinin pozisyonel değişimi aşağıdaki gibidir:

$$\beta_{r_1}' = \Gamma_{r_1} r_1 + \Delta_{r_1} r_3 \quad (4.97)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} \Gamma_{r_1} = -\mu_{r_1}' \\ \Delta_{r_1} = \frac{\mu\theta' + \lambda\Gamma_{k_1}}{\kappa} \end{cases} \quad (4.98)$$

dır.  $\Gamma_{r_1}$  ve  $\Delta_{r_1}$  fonksiyonlarına (4.86) timelike merkez normal regle yüzeyin **eğrilik fonksiyonları** denir.

Bir önceki bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak,  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının türev formülleri matris formunda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

şeklinde elde edilir. Bu ise  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının birinci dereceden açılal değişimidir. Burada  $\kappa = \|r_1'\|$  ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olup sırasıyla  $\varphi_{r_1}$  timelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasıdır.

Şimdi  $\varphi_{r_1}$  timelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasının açıyla olan ilişkisini elde edelim:

(4.93) den kolayca  $\kappa = \theta' \cos \phi$  olduğu görülür.

(4.92) den  $r_2 = -\sinh \phi k_1 + \cosh \phi t_1$  olup türevi alınıp,  $r_3 = \cosh \phi k_1 + \sinh \phi t_1$  ve

$\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olması kullanılarak  $\tau = -\phi'$  elde edilir.

**Sonuç 4.1.8:** Timelike merkez normal regle yüzeyin eğrilik ve burulmasının merkez normal vektörünün dönme açısına bağlı ifadeleri

$$\kappa = \theta' \cos e\phi, \quad \tau = -\phi' \quad (4.100)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca bu eşitliklerden görüleceği üzere timelike merkez normal yüzeyin burulması, merkez normal vektörünün dönme açısının açılal hızının ters doğrultusundadır.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının Darboux vektörü,

$$\begin{aligned} U_{r_2} &= r_2 \times r_2' \\ &= r_2 \times (\kappa r_1 + \tau r_3) \\ &= -\tau r_1 + \kappa r_3 \end{aligned} \quad (4.101)$$

olup timelike merkez normal regle yüzeyinin doğal çatıya göre açılal hızıdır.

(4.94) denklemlerle ifade edilen geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ve (4.101) ile ifade edilen doğal çatının Darboux vektörü, sırasıyla timelike regle yüzeyin ve timelike merkez normal regle yüzeyin açılal hareketini tanımlar. Ayrıca Darboux vektörleri açılal hız olarak düşünülebilirken, striksiyon eğrisinin pozisyonel varyasyonu lineer hız olarak düşünülebilir.

#### 4.1.2.3. i) Çatılar arasındaki ilişki

4.1.1.3 bölümünde yapılan açıklamalar bu bölüm için de geçerli olup, ilk olarak robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısı tanımlanıp, daha sonra  $\{O, A, N\}$  araç çatısının vektörlerinin Minkowski uzayındaki olası durumlarına göre çatılar arasındaki ilişki iki alt başlık halinde incelenecektir.

Yüzeyin  $v=0$  noktasındaki yüzey çatısı  $\{O, S_n, S_b\}$  olup, burada  $O$  yönlendirme vektörü spacelike,  $S_n$ ,  $v=0$  da yüzey normali spacelike,  $S_b$  binormal vektörü timelike vektördür.  $O$  yönlendirme vektörü  $k_1$  üreteç vektörü yönündedir. Ayrıca  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı için  $O \times S_n = S_b$ ,  $S_n \times S_b = -O$ ,  $S_b \times O = -S_n$  dir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı üzerinde robot hareketini tanımlayalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s) \quad (4.102)$$

timelike regle yüzeyi için  $O = k_1$  seçelim.  $S_n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \Big|_{v=0}$ ,  $S_b = O \times S_n$  olmak üzere bu vektörleri hesaplayalım:

(4.83) den  $\alpha(s) = \beta_{k_1}(s) + \mu_{k_1}(s)k_1(s)$  nin türevi alınıp (4.85) ve  $k_1' = \theta' r_1$  eşitliği

kullanılıp gerekli hesaplamalar yapılarak

$$S_n = \frac{-\mu r_1 - \mu_{k_1} \theta' t_1}{\sqrt{\mu^2 - (\mu_{k_1} \theta')^2}} \quad (4.103)$$

bulunur.  $S_b = O \times S_n$  olması kullanılarak

$$S_b = \frac{-\mu t_1 + \mu_{k_1} \theta' r_1}{\sqrt{\mu^2 - (\mu_{k_1} \theta')^2}} \quad (4.104)$$

elde edilir. Böylece yüzeyin  $v=0$  daki yüzey çatısı  $\{O = k_1, S_n, S_b\}$  dir.

Robotun izlediği yolu yani robotun yörüngesini belirleyen,  $\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Burada O yönlendirme vektörü, A ilerleme vektörü, N normal vektör olarak adlandırılır.  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ,

a)  $O = k_1$  spacelike vektör, A timelike vektör, N spacelike vektör

b)  $O = k_1$  spacelike vektör, A spacelike vektör, N timelike vektör şeklinde iki türlü tanımlanabilir.

Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

**a)  $O = k_1$  spacelike vektör, A timelike vektör, N spacelike vektör olması**

**durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = -N$  ,  $A \times N = -O$  ,  $N \times O = A$  dır.

$S_n$  ile A arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.105)$$



olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

dır.  $S_b$  ile  $t_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

dır. (4.105) ve (4.107) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

dır. Burada  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ile  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

şeklinde olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

şeklinde elde edilir.

**b)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması**

**durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = N$ ,  $A \times N = -O$ ,  $N \times O = -A$  dır.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

dır.  $S_b$  ile  $t_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

dır. (4.111) ve (4.113) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

elde edilir.

#### 4.1.2.4. i) Araç çatının diferensiyel hareketi

$\{O, A, N\}$  araç çatısının diferensiyel hareketini 4.1.1.3 de belirttiğimiz a ve b durumları için sırasıyla inceleyelim:

a)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması

durumunda araç çatının diferensiyel hareketi

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.2) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.117)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.75) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.118)$$

olur. Burada (4.79) kullanılarak  $\alpha$  nın  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = ((\Gamma + \mu' R) \sin \theta + \Delta \cos \theta)k_1 + ((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta)r_1 + \mu t_1 \quad (4.119)$$

elde edilip, (4.110) un kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\alpha$  nın  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Delta \cos \theta + (\Gamma + \mu' R) \sin \theta)O + ((-\Gamma + \mu' R) \cos \theta + \Delta \sinh \theta) \sinh \Sigma + \mu \cosh \Sigma A + (((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) \cosh \Sigma - \mu \sinh \Sigma)N \quad (4.120)$$

şeklinde elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden açısal varyasyonunu belirlemek için, (4.109) un diferensiyeli alınıp (4.82) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ -\theta' \sinh \Sigma & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') \\ -\theta' \cosh \Sigma & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

elde edilir. Burada (4.110) yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta' \sinh \Sigma & \theta' \cosh \Sigma \\ -\theta' \sinh \Sigma & 0 & \lambda + \Sigma' \\ -\theta' \cosh \Sigma & \lambda + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

şeklinde elde edilir.

Daha önceki durumdaki gibi benzer işlemler yapılarak,  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere,

$$U_A = -(\lambda + \Sigma')O - \theta' \sinh \Sigma A + \theta' \cosh \Sigma N \quad (4.123)$$

ve  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = -(\lambda + \Sigma')k_1 + \theta' t_1 \quad (4.124)$$

elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{k_1}$  Darboux vektörü cinsinden elde edilebilir:

(4.124) de (4.94) kullanılırsa

$$U_A = U_{k_1} - \Sigma' k_1$$

elde edilmiş olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açılma hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

**b)  $O = k_1$  spacelike vektör, A spacelike vektör, N timelike vektör olması**

**durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.2) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.125)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.75) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.126)$$

olup burada (4.79) kullanılarak  $\alpha$  nın  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = ((\Gamma + \mu' R) \sin \theta + \Delta \cos \theta)k_1 + ((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta)r_1 + \mu t_1 \quad (4.127)$$

elde edilir. Burada (4.116) nın kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\alpha$  nın  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & (\Delta \cos \theta + (\Gamma + \mu' R) \sin \theta)O + ((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) \cosh \Sigma - \mu \sinh \Sigma)A \\ & + ((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) \sinh \Sigma + \mu \cosh \Sigma)N \end{aligned} \quad (4.128)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden açısal varyasyonunu belirlemek için, (4.113) ün diferensiyeli alınıp (4.82) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ -\theta' \cosh \Sigma & \sinh \Sigma(\lambda + \Sigma') & \cosh \Sigma(\lambda + \Sigma') \\ -\theta' \sinh \Sigma & \cosh \Sigma(\lambda + \Sigma') & \sinh \Sigma(\lambda + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

elde edilir. Burada (4.116) yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' \cosh \Sigma & -\theta' \sinh \Sigma \\ -\theta' \cosh \Sigma & 0 & \lambda + \Sigma' \\ -\theta' \sinh \Sigma & \lambda + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

şeklinde elde edilir. Buradan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının birinci dereceden açısal varyasyonunun,  $\lambda$  Lancret eğriliğine ve çatılar arasındaki dönme açılarına bağlı olduğu görülür. ( $\theta$  dönme açısının açısal hızına,  $\Sigma = \psi + \sigma$  olduğundan  $\psi$  ve  $\sigma$  dönme açılarına bağlıdır.)

Daha önceki bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  için

$$U_A = (\lambda + \Sigma')O + \theta' \sinh \Sigma A - \theta' \cosh \Sigma N \quad (4.131)$$

ve  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = (\lambda + \Sigma')k_1 - \theta' t_1 \quad (4.132)$$

elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{k_1}$  Darboux vektörü cinsinden elde edilebilir:

(4.124) de (4.94) kullanılırsa

$$U_A = -U_{k_1} + \Sigma' k_1$$

elde edilmiş olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açısal hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

**ii)  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için  $r_1$  ve  $r_2$  spacelike vektör,  $r_3$  timelike vektör olması hali**

Bu durumda  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{k_1'}{\theta'} \\ r_2 = \frac{r_1'}{\kappa}, \quad \kappa = \|r_1'\| \\ r_3 = r_1 \times r_2 \end{cases} \quad (4.133)$$

Ayrıca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısı için  $r_1 \times r_2 = r_3$ ,  $r_2 \times r_3 = -r_1$ ,  $r_3 \times r_1 = -r_2$  dir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı ile  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının  $r_1$  merkez normal vektörleri ortaktır ve bu çatı vektörleri arasında merkez normal vektörünün dönme açısı  $\phi$  olmak üzere

$$\begin{cases} k_1 = \cosh \phi r_2 + \sinh \phi r_3 \\ t_1 = \sinh \phi r_2 + \cosh \phi r_3 \end{cases} \quad (4.134)$$

ilişkisi vardır. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

dir. (4.135) in ters formu

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh \phi & 0 & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & 0 & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

dir. (4.89) dan  $r_1' = \kappa r_2$  ve (4.136) dan  $r_2 = \cosh \phi k_1 - \sinh \phi t_1$  olup  $r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1$  olması kullanılarak

$$\begin{cases} \cosh \phi = -\frac{\theta'}{\kappa} \\ \sinh \phi = -\frac{\lambda}{\kappa} \end{cases} \quad (4.137)$$

elde edilir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatının Darboux vektörü

$$\begin{aligned} U_{k_1} &= r_1 \times r_1' \\ &= r_1 \times (-\theta' k_1 + \lambda t_1) \\ &= \theta' t_1 - \lambda k_1 \end{aligned} \quad (4.138)$$

dir. Bu da timelike regle yüzeyin  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre açısız hızıdır.

Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü, doğal çatı cinsinden elde edilebilir:

(4.137) nin (4.136) da yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\theta' & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -\theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

elde edilip buradan

$$r_3 = \frac{1}{\kappa} (\lambda k_1 - \theta' t_1)$$

olup (4.138) in kullanılmasıyla

$$U_{k_1} = -\kappa r_3 \quad (4.140)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.9:** Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ile doğal çatının binormal vektörü ters doğrultudadır.

Timelike merkez normal regle yüzeyinin  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.87) nin diferensiyeli alınıp, (4.85), (4.104), (4.139) un ters formu,  $r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1$  ve  $\kappa = \|r_1'\|$  olması kullanılarak  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının hareketi boyunca striksiyon eğrisinin pozisyonel değişimi aşağıdaki gibidir:

$$\beta_{r_1}' = \Gamma_{r_1} r_1 + \Delta_{r_1} r_3 \quad (4.141)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} \Gamma_{r_1} = -\mu_{r_1}' \\ \Delta_{r_1} = -\frac{\mu\theta' + \lambda\Gamma_{k_1}}{\kappa} \end{cases} \quad (4.142)$$

dır. Bu fonsiyonlara (4.86) timelike merkez normal regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

Daha önceki bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının türev formülleri matris formunda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\kappa = \|r_1'\|$  ve  $\tau = \langle r_2', r_3' \rangle$  olup sırasıyla  $\varphi_{r_1}$  timelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasıdır.

Şimdi  $\varphi_{r_1}$  timelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasının açısıyla olan ilişkisini elde edelim:

(4.90) dan  $\kappa = -\theta's \operatorname{ech}\phi$  elde edilir.

(4.92) den  $r_2 = -\sinh \phi t_1 + \cosh \phi k_1$  olup türevi alınıp,  $r_3 = \cosh \phi t_1 - \sinh \phi k_1$  ve

$\tau = \langle r_2', r_3' \rangle$  olması kullanılarak  $\tau = \phi'$  elde edilir.

**Sonuç 4.1.10:** Timelike merkez normal regle yüzeyin eğrilik ve burulmasının merkez normal vektörünün dönme açısına bağlı ifadeleri

$$\kappa = -\theta's \operatorname{ech}\phi, \quad \tau = \phi' \quad (4.144)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca bu eşitlikten görüleceği üzere merkez normal yüzeyin burulması, merkez normal vektörünün dönme açısının açısal hızıyla aynı doğrultudadır.



$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının Darboux vektörü,

$$\begin{aligned} U_{r_2} &= r_2 \times r_2' \\ &= r_2 \times (-\kappa r_1 - \tau r_3) \\ &= \tau r_1 + \kappa r_3 \end{aligned} \quad (4.145)$$

dır. Bu da timelike regle yüzeyin  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre açılmal hızıdır.

#### 4.1.2.3. ii) Çatılar arasındaki ilişki

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Yüzeyin  $v=0$  noktasındaki yüzey çatısı  $\{O, S_n, S_b\}$  olup, burada  $O$  yönlendirme vektörü spacelike,  $S_n$ ,  $v=0$  da yüzey normali spacelike,  $S_b$  binormal vektörü timelike vektördür.  $O$  yönlendirme vektörü  $k_1$  üreteç vektörü yönündedir. Ayrıca  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı için  $O \times S_n = S_b$ ,  $S_n \times S_b = -O$ ,  $S_b \times O = -S_n$  dir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı üzerinde robot hareketini tanımlayalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s) \quad (4.146)$$

timelike regle yüzeyi için  $O = k_1$  seçelim.  $S_n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \Big|_{v=0}$ ,  $S_b = O \times S_n$  olmak üzere bu vektörleri hesaplayalım:

(4.83) den  $\alpha(s) = \beta_{k_1}(s) + \mu_{k_1}(s)k_1(s)$  nin türevi alınıp (4.85) ve  $k_1' = \theta' r_1$

eşitliğinin kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla

$$S_n = \frac{-\mu r_1 - \mu_{k_1} \theta' t_1}{\sqrt{\mu^2 - (\mu_{k_1} \theta')^2}} \quad (4.147)$$

bulunur.  $S_b = O \times S_n$  olması kullanılarak

$$S_b = \frac{-\mu t_1 - \mu_{k_1} \theta' r_1}{\sqrt{\mu^2 - (\mu_{k_1} \theta')^2}} \quad (4.148)$$

elde edilir. Böylece yüzeyin  $v=0$  daki yüzey çatısı  $\{O = k_1, S_n, S_b\}$  dir.

$\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Burada  $O$  yönlendirme vektörü,  $A$  ilerleme vektörü,  $N$  normal vektör olarak adlandırılır.  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ,

a)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör

b)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör

şeklinde iki türlü tanımlanabilir.

Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

**a)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması**

**durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = -N$  ,  $A \times N = -O$  ,  $N \times O = A$  dır.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

dır.  $S_b$  ile  $t_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

dır. (4.149) ve (4.151) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

dır. Burada  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ile  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

şeklinde olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

şeklinde elde edilir.

**b)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması**

**durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatsısı için  $O \times A = N$ ,  $A \times N = -O$ ,  $N \times O = -A$  dır.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.156)$$

dır.

$S_b$  ile  $t_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.157)$$

dır. (4.155) ve (4.157) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.159)$$

olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

elde edilir.

#### 4.1.2.4. ii) Araç çatının diferensiyel hareketi

$\{O, A, N\}$  araç çatısının diferensiyel hareketini 4.1.2.3 de belirttiğimiz a) ve b) durumları için sırasıyla inceleyelim:

**a)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması**

##### **durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.2) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.161)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.75) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.162)$$

olur. Burada (4.79) kullanılarak  $\alpha$  nın  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = ((\Gamma + \mu' R) \sin \theta + \Delta \cos \theta)k_1 + ((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta)r_1 + \mu t_1 \quad (4.163)$$

elde edilip, (4.154) ün kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\alpha$  nın  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & (\Delta \cos \theta + (\Gamma + \mu' R) \sin \theta)O + ((-\Gamma + \mu' R) \cos \theta + \Delta \sin \theta) \sinh \Sigma + \mu \cosh \Sigma)A \\ & + (((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) \cosh \Sigma - \mu \sinh \Sigma)N \end{aligned} \quad (4.164)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden açısal varyasyonunu belirlemek için, (4.153) ün diferensiyeli alınıp (4.82) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ -\theta' \sinh \Sigma & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') \\ -\theta' \cosh \Sigma & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.165)$$

elde edilir. Burada (4.154) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta' \sinh \Sigma & \theta' \cosh \Sigma \\ -\theta' \sinh \Sigma & 0 & \lambda + \Sigma' \\ -\theta' \cosh \Sigma & \lambda + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.166)$$

şeklinde elde edilir.

Daha önceki durumdaki gibi benzer işlemler yapılarak,  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere,

$$U_A = -(\lambda + \Sigma')O + \theta' \cosh \Sigma A - \theta' \sinh \Sigma N \quad (4.167)$$

ve  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = -(\lambda + \Sigma')k_1 + \theta' t_1 \quad (4.168)$$

elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{k_1}$  Darboux vektörü cinsinden elde edilebilir:

(4.168) de (4.138) kullanılırsa

$$U_A = U_{k_1} - \Sigma' k_1$$

elde edilmiş olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açısal hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

b)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması

durumunda araç çatının diferensiyel hareketi

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.2) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.169)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.75) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.170)$$

olup burada (4.79) kullanılarak  $\alpha$  nın  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = ((\Gamma + \mu' R) \sin \theta + \Delta \cos \theta)k_1 + ((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta)r_1 + \mu t_1 \quad (4.171)$$

elde edilir. Burada (4.160) ın kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\alpha$  nın  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & (\Delta \cos \theta + (\Gamma + \mu' R) \sin \theta)O + ((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) \cosh \Sigma - \mu \sinh \Sigma)A \\ & + ((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) \sinh \Sigma + \mu \cosh \Sigma)N \end{aligned} \quad (4.172)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden açısal varyasyonunu belirlemek için, (4.159) un diferensiyeli alınıp (4.82) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ -\theta' \cosh \Sigma & \sinh \Sigma(\lambda + \Sigma') & \cosh \Sigma(\lambda + \Sigma') \\ -\theta' \sinh \Sigma & \cosh \Sigma(\lambda + \Sigma') & \sinh \Sigma(\lambda + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

elde edilir. Burada (4.160) ın yerine yazılıp gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' \cosh \Sigma & -\theta' \sinh \Sigma \\ -\theta' \cosh \Sigma & 0 & \lambda + \Sigma' \\ -\theta' \sinh \Sigma & \lambda + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.174)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere

$$U_A = (\lambda + \Sigma')O + \theta' \sinh \Sigma A - \theta' \cosh \Sigma N \quad (4.175)$$

ve  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = (\lambda + \Sigma')k_1 - \theta' t_1 \quad (4.176)$$

elde edilir. Bu denklem (4.136) nın ters işaretlisi olduğundan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörünün,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{k_1}$  Darboux vektörü cinsinden

$$U_A = -U_{k_1} + \Sigma' k_1$$

şeklinde olduğu kolayca görülür. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açılal hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

## 2. Durum

(4.71) denkleminde  $s$  ye göre türev alınırsa,

$$\beta'(s) = \alpha'(s) - \mu'(s)\bar{R}(s) - \mu(s)\bar{R}'(s) \quad (4.177)$$

olur. Burada  $\langle \beta'(s), \bar{R}'(s) \rangle = 0$  olması kullanılarak

$$\mu(s) = \langle \alpha'(s), \bar{R}'(s) \rangle \quad (4.178)$$

elde edilir.

$\beta$  striksiyon eğrisinin teğet vektörü

$$\beta'(s) = \Gamma(s)r(s) + \Delta(s)k(s) \quad (4.179)$$

dir. Burada

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R} \rangle - \mu' R \\ \Delta = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R} \times \bar{R}' \rangle \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup bu fonksiyonlara (4.70) timelike regle yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsü için türev formülleri

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{R} t \\ t' = \frac{1}{R} (-r + \gamma k) \\ k' = \frac{\gamma}{R} t \end{cases} \quad (4.180)$$

şeklinde olup burada  $\gamma = \langle \bar{R}', \bar{R} \times \bar{R}'' \rangle$  ifadesi (4.70) yüzeyinin  $\bar{R}$  doğrultman vektörünün çizdiği eğrinin **geodezik eğriliğidir**.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünün Darboux vektörü  $U_r$  olmak üzere

$$U_r = t \times t' = \frac{1}{R} (-\gamma r + k) \quad (4.181)$$

dir.

**Tanım 4.1.11:**

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R} \rangle - \mu' R \\ \Delta = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R} \times \bar{R}' \rangle \\ \gamma = \langle \bar{R}', \bar{R} \times \bar{R}'' \rangle \end{cases}$$

ifadelerine (4.70) yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.



Ayrıca (4.70) timelike regle yüzeyin Lancret eğriliği,

$$\lambda = \|t'\| = \sqrt{|\langle t', t' \rangle|} = \sqrt{\left| \frac{1-\gamma^2}{R^2} \right|} \quad (4.182)$$

dir.

#### 4.1.2.1 Geliştirilmiş çatının oluşturulması

Bu bölümde robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürülerek  $\{t, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı tanımlanacaktır. Ayrıca bu çatının  $k_1$  vektörü  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının Darboux vektörüne karşılık gelmektedir.

$\{r, t, k\}$  üreteç çatısını  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürelim. Dönme denklemi

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ t_t \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} \quad (4.183)$$

dir. Bu matrisin ters formu ise

$$\begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ t_t \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.184)$$

şeklindedir.

$\beta$  striksiyon eğrisi üzerine kurulan  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı için elde edilen (4.76) türev formüllerinden eğriliği  $\frac{1}{R}$ , burulması  $\frac{\gamma}{R}$  dir olan bir  $(\beta_1)$  eğrisi daima bulunabilir.

(4.77), (4.183) ve  $U=k_1$  olması kullanılarak

$$\cosh \theta = \frac{1}{R} \quad , \quad \sinh \theta = -\frac{\gamma}{R}$$

elde edilir.

Total ( Lancret ) eğrilik tanımı gereğince  $\lambda = \|t'\| = \sqrt{\left|\frac{1-\gamma^2}{R^2}\right|}$  olup  $\gamma = -\tanh \theta$

olması kullanılırsa aşağıdaki sonuç verilebilir:

**Sonuç 4.1.12:**  $\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünü üzerinde bulunduran  $(\beta_1)$  striksiyon eğrisinin eğriliğinin Lancret eğriliğine bağlı ifadesi

$$\frac{1}{R} = \lambda \cosh \theta \quad (4.185)$$

burulmasının Lancret eğriliğine bağlı ifadesi

$$\frac{\gamma}{R} = -\lambda \sinh \theta \quad (4.186)$$

dır.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı regle yüzeyin eğrilik teorisinde önemlidir. Geliştirilmiş çatının türev formülleri regle yüzeyin açısız hızını tanımlayarak regle yüzeyin değişiminin en basit tanımlamasını verir.

Şimdi  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı için türev formüllerini hesaplayalım:

(4.184) eşitliklerinin diferensiyeli alınır, (4.185) ve (4.186) eşitlikleri kullanılırsa  $\{t_1, r_1, k_1\}$  ortonormal sistemi için

$$\begin{cases} t_1' = -\lambda r_1 \\ r_1' = \theta k_1 + \lambda t_1 \\ k_1' = \theta r_1 \end{cases} \quad (4.187)$$

türev formülleri elde edilir. Burada  $t_1$  spacelike üreteç vektör,  $r_1$  spacelike merkez normal vektör,  $k_1$  timelike merkez teğet vektör olarak adlandırılır. Ayrıca burada  $\theta'$  ve  $\lambda$  sırasıyla (4.70) timelike regle yüzeyinin eğriliği ve Lancret eğriliğidir.

Geliştirilmiş çatının herbir vektörü robot hareketi boyunca bir regle yüzey oluşturur.  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısında eğer  $k_1$  timelike merkez teğet vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$$

yüzeyini alırsak görüleceği üzere burada  $\alpha$  timelike eğri olduğundan böyle bir yüzey  $IR_1^3$  de tanımlanamaz. Dolayısıyla 4.1.2.3 de  $k_1$  in oluşturacağı yüzey için robot yörünge yüzeyinden bahsedilemez.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısında eğer  $t_1$  spacelike üreteç vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s)$$

yüzeyini alırsak görüleceği üzere burada  $\alpha$  timelike eğri olduğundan bu yüzey timelike regle yüzeydir. O halde 4.1.2.3 de bahsedeceğimiz robot yörünge yüzeyimizde timelike regle yüzey olur.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısında,  $r_1$  spacelike merkez normal vektörünün oluşturduğu yüzey alınır bu yüzey timelike merkez normal regle yüzey olarak adlandırılır ve bu yüzey ve özellikleri 4.1.2.2 de ayrıca incelenecektir.

Şimdi elde ettiğimiz  $\{t_1, r_1, k_1\}$  çatısının  $t_1$  vektörünün oluşturduğu timelike regle yüzeyi alalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s) \quad (4.188)$$

olup bu yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\beta_{t_1}(s) = \alpha(s) - \mu_{t_1}(s)t_1(s) \quad (4.189)$$

dir. Buradan (4.189) un diferensiyeli alınarak, (4.184),  $t_1' = -\lambda r_1$  ve  $\langle \beta_{t_1}', t_1' \rangle = 0$  olması kullanılarak,

$$\mu_{t_1} = \frac{\Delta \sinh \theta - \Gamma \cosh \theta - \mu' R \cosh \theta}{\lambda} \quad (4.190)$$

elde edilir.

(4.189) striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.189) un diferensiyeli alınıp, (4.75), (4.184),  $t_1' = -\lambda r_1$  ve (4.190) in kullanılmasıyla striksiyon eğrisinin  $\{t_1, r_1, k_1\}$  çatısına göre açıl pozisyon ve varyasyonu

$$\beta_{t_1}'(s) = \Gamma_{t_1} k_1 + \Delta_{t_1} t_1 \quad (4.191)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\begin{cases} \Gamma_{t_1} = \Delta \cosh \theta - \Gamma \sinh \theta - \mu' R \sinh \theta \\ \Delta_{t_1} = \mu - \mu_{t_1}' \end{cases}$$

dır. Nasıl ki  $\Delta, \Gamma$  ve  $\gamma$  başlangıçtaki (4.70) yüzeyini karakterize eden eğrilik fonksiyonları ise  $\Gamma_{t_1}$  ve  $\Delta_{t_1}$  de (4.188) timelike regle yüzeyi karakterize eden eğrilik fonksiyonlarıdır.

#### 4.1.2.2. $r_1$ merkez normal vektörünün oluşturduğu timelike merkez normal

##### yüzeyi ve doğal çatı

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı striksiyon eğrisi üzerinde hareket ederken,  $r_1$  merkez normal vektörü bir başka regle yüzey üretir.  $\beta_{t_1}$  striksiyon eğrisi üzerinde merkez normal vektörünün oluşturduğu

$$\varphi_{r_1}(s, v) = \beta_{t_1}(s) + v r_1(s) \quad (4.192)$$

yüzeyine timelike merkez normal regle yüzey denir. Bu timelike merkez normal regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\beta_{r_1}(s) = \beta_{k_1}(s) - \mu_{r_1}(s) r_1(s) \quad (4.193)$$

dir. Striksiyon eğrisi, regle yüzeyin eğrilik teorisinde önemli olup regle yüzeyin pozisyonel varyasyonunun en basit tanımlamasını verir.

Burada  $\mu_{r_1}$  merkez normal vektör boyunca striksiyon eğrileri arasındaki uzaklık olup (4.193) ün diferensiyellenmesi  $\langle \beta_{r_1}', r_1' \rangle = 0$  olması,  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$  ve (4.190) ın kullanılmasıyla

$$\mu_{r_1}(s) = \frac{\lambda \Delta_{t_1} - \theta' \Gamma_{t_1}}{\lambda^2 - \theta'^2} \quad (4.194)$$

elde edilir.

Böylece  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisi üzerinde  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı kurulabilir.  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için iki durum söz konusudur. İlk olarak,  $r_2$

timelike vektör,  $r_1$  ve  $r_3$  spacelike vektör; daha sonra  $r_1$  ve  $r_2$  spacelike vektör,  $r_3$  timelike vektör olması durumu incelenecektir.

**i)  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için  $r_2$  timelike vektör,  $r_1$  ve  $r_3$  spacelike vektör olması hali**

Bu durumda  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{k_1'}{\theta'} \\ r_2 = \frac{r_1'}{\kappa}, \quad \kappa = \|r_1'\| \\ r_3 = r_2 \times r_1 \end{cases} \quad (4.195)$$

Ayrıca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısı için  $r_1 \times r_2 = -r_3$ ,  $r_2 \times r_3 = -r_1$ ,  $r_3 \times r_1 = r_2$  dir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı ile  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının  $r_1$  merkez normal vektörleri ortaktır ve bu çatı vektörleri arasında merkez normal vektörünün dönme açısı  $\phi$  olmak üzere

$$\begin{cases} k_1 = \cosh \phi r_2 + \sinh \phi r_3 \\ t_1 = \sinh \phi r_2 + \cosh \phi r_3 \end{cases} \quad (4.196)$$

ilişkisi vardır. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.197)$$

dır. (4.197) nin ters formu

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh \phi & 0 & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & 0 & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.198)$$

dır. (4.195) den  $r_1' = \kappa r_2$  ve (4.198) den  $r_2 = \cosh \phi k_1 - \sinh \phi t_1$  olup  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$  olması kullanılarak

$$\begin{cases} \cosh \phi = \frac{\theta'}{\kappa} \\ \sinh \phi = -\frac{\lambda}{\kappa} \end{cases} \quad (4.199)$$

elde edilir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatının Darboux vektörü

$$\begin{aligned} U_{t_1} &= r_1 \times r_1' \\ &= r_1 \times (\theta' k_1 + \lambda t_1) \\ &= \theta' t_1 + \lambda k_1 \end{aligned} \quad (4.200)$$

dir. Bu ise timelike regle yüzeyin  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre açısal hızıdır.

Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü, doğal çatı cinsinden elde edilebilir:

(4.199) un (4.198) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \theta' & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

elde edilip buradan

$$r_3 = \frac{1}{\kappa} (\lambda k_1 + \theta' t_1)$$

olup (4.200) ün kullanılmasıyla

$$U_{t_1} = \kappa r_3 \quad (4.202)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.13:** Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ile doğal çatının binormal vektörü aynı doğrultudadır.

Timelike merkez normal regle yüzeyinin  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.193) ün diferensiyeli alınıp, (4.190), (4.194), (4.201) in ters formu,  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$  ve  $\kappa = \|r_1'\|$  olması kullanılarak  $\{r_1, r_2, r_3\}$  çatısına göre merkez normal yüzeyin striksiyon eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu,

$$\beta_{r_1}' = -\mu_{r_1}' r_1 + \Delta_{r_1} r_3 \quad (4.203)$$

dır. Öte yandan striksiyon eğrisi timelike regle yüzeyin konumsal varyasyonunu tanımlamakta bilgi verir. Burada

$$\begin{cases} \Gamma_{r_1} = -\mu_{r_1}' \\ \Delta_{r_1} = \frac{\Delta_{t_1} \theta' - \lambda \Gamma_{t_1}}{\kappa} \end{cases} \quad (4.204)$$

dır.  $\Gamma_{r_1}$  ve  $\Delta_{r_1}$  fonksiyonları timelike merkez normal regle yüzeyi karakterize eden **eğrilik fonksiyonlarıdır.**

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının türev formüllerinin matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.205)$$

şeklinde olduğu kolayca hesaplanabilir. Burada  $\kappa = \|r_1'\|$  ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olup sırasıyla  $\varphi_{r_1}$  timelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasıdır.

Şimdi  $\varphi_{r_1}$  timelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasının açısıyla olan ilişkisini elde edelim:

(4.199) dan

$$\kappa = \theta' \operatorname{sch} \phi \quad (4.206)$$

elde edilir.

(4.198) den  $r_2 = \cosh \phi k_1 - \sinh \phi t_1$  olup türevi alınır ve  $r_3 = -\sinh \phi k_1 + \cosh \phi t_1$

ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olması kullanılarak

$$\tau = -\phi' \quad (4.207)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.14:** Timelike merkez normal regle yüzeyin eğrilik ve burulmasının merkez normal vektörünün dönme açısına bağlı ifadeleri

$$\kappa = \theta' \operatorname{sech} \phi, \quad \tau = -\phi' \quad (4.208)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan görüleceği üzere timelike merkez normal regle yüzeyin burulması, merkez normal vektörün dönme açısının açısal hızı ile ters doğrultudadır.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının Darboux vektörü,

$$\begin{aligned} U_{r_2} &= r_2 \times r_2' \\ &= r_2 \times (\kappa r_1 + \tau r_3) \\ &= -\tau r_1 + \kappa r_3 \end{aligned} \quad (4.209)$$

dır. Bu ise timelike regle yüzeyin  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre açısal hızıdır.

#### 4.1.2.3. i) Çatılar arasındaki ilişki

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Yüzeyin  $v=0$  noktasındaki yüzey çatısı  $\{O, S_n, S_b\}$  olup, burada  $O$  yönlendirme vektörü spacelike vektör,  $S_n$ ,  $v=0$  da yüzey normali spacelike vektör,  $S_b$  binormal vektörü timelike vektördür.  $O$  yönlendirme vektörü  $t_1$  üreteç vektörü yönündedir. Ayrıca  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı için  $O \times S_n = S_b$ ,  $S_n \times S_b = -O$ ,  $S_b \times O = -S_n$  dir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı üzerinde robot hareketini tanımlayalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s) \quad (4.210)$$

timelike regle yüzeyi için  $O = t_1$  seçelim.  $S_n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \Big|_{v=0}$ ,  $S_b = O \times S_n$  olmak üzere

bu vektörleri hesaplayalım:

(4.189) dan  $\alpha(s) = \beta_{t_1}(s) + \mu_{t_1}(s)t_1(s)$  nin türevi alınıp, (4.190),  $t_1' = -\lambda r_1$

eşitliğinin kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla,



$$S_n = \frac{\Gamma_{t_1} r_1 + \lambda \mu_{t_1} k_1}{\sqrt{\Gamma_{t_1}^2 - (\lambda \mu_{t_1})^2}} \quad (4.211)$$

elde edilir.  $S_b = O \times S_n$  olması kullanılarak

$$S_b = -\frac{\Gamma_{t_1} k_1 + \lambda \mu_{t_1} r_1}{\sqrt{\Gamma_{t_1}^2 - (\lambda \mu_{t_1})^2}} \quad (4.212)$$

elde edilir. Böylece yüzeyin  $v=0$  daki yüzey çâtısı  $\{O = t_1, S_n, S_b\}$  dir.

$\{O, A, N\}$  araç çâtısını tanımlayalım. Burada  $O$  yönlendirme vektörü,  $A$  ilerleme vektörü,  $N$  normal vektör olarak adlandırılır.  $\{O, A, N\}$  araç çâtısı ,

a)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör

b)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör

şeklinde iki türlü tanımlanabilir.

Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

**a)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması**

**durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çâtısı için  $O \times A = -N$  ,  $A \times N = -O$  ,  $N \times O = A$  dir.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.213)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.214)$$

dir.

$S_b$  ile  $k_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

dır. (4.213) ve (4.215) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.216)$$

dır. Burada  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ile  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.217)$$

şeklinde olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.218)$$

şeklinde elde edilir.

**b)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması**

**durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = N$ ,  $A \times N = -O$ ,  $N \times O = -A$  dır.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.219)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

dır.

$S_b$  ile  $k_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.221)$$

dır. (4.219) ve (4.221) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.222)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.223)$$

elde edilip ters formuda

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.224)$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.2.4. i) Araç çatının diferensiyel hareketi

$\{O, A, N\}$  araç çatısının diferensiyel hareketini 4.1.2.3 de belirttiğimiz a) ve b) durumları için sırasıyla inceleyelim:

a)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması

**durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.2) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s)\bar{R}(s) \quad (4.225)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.75) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu'R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.226)$$

olur. Burada (4.184) kullanılarak  $\alpha$  nın  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (-(\Gamma + \mu'R)\sinh\theta + \Delta\cosh\theta)k_1 + ((\Gamma + \mu'R)\cosh\theta - \Delta\sinh\theta)r_1 + \mu t_1 \quad (4.227)$$

elde edilip, (4.218) in kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\alpha$  nın  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & \mu O + ((-\Gamma + \mu'R)\cosh\theta + \Delta\sinh\theta)\sinh\Sigma + (-\Gamma + \mu'R)\sinh\theta + \Delta\cosh\theta)\cosh\Sigma)A \\ & + (((\Gamma + \mu'R)\cosh\theta - \Delta\sinh\theta)\cosh\Sigma + ((\Gamma + \mu'R)\sinh\theta + \Delta\cosh\theta)\sinh\Sigma)N \end{aligned} \quad (4.228)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden açısal varyasyonunu belirlemek için, (4.217) nin diferensiyeli alınıp (4.187) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda\sinh\Sigma & \cosh\Sigma(\theta'+\Sigma') & \sinh\Sigma(\theta'+\Sigma') \\ \lambda\cosh\Sigma & \sinh\Sigma(\theta'+\Sigma') & \cosh\Sigma(\theta'+\Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.229)$$

elde edilir. Burada (4.218) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \sinh \Sigma & -\lambda \cosh \Sigma \\ \lambda \sinh \Sigma & 0 & \theta' + \Sigma' \\ \lambda \cosh \Sigma & \theta' + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.230)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere

$$U_A = -(\theta' + \Sigma')O - \lambda \cosh \Sigma A + \lambda \sinh \Sigma N \quad (4.231)$$

ve  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı cinsinden

$$U_A = -(\theta' + \Sigma')t_1 - \lambda k_1 \quad (4.232)$$

elde edilir. Böylece araç çatının Darboux vektörünün Lancret eğriliği ve dönme açılarına bağlı olduğu görülür. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{t_1}$  Darboux vektörü cinsinden elde edilebilir:

(4.232) de (4.200) kullanılırsa

$$U_A = -U_{t_1} - \Sigma' t_1$$

elde edilmiş olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açılma hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

**b)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması**

**durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.2) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.233)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.75) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.234)$$

olup burada (4.184) kullanılarak  $\alpha$  nın  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = ((\Gamma + \mu' R) \sin \theta + \Delta \cos \theta)k_1 + ((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta)r_1 + \mu t_1 \quad (4.235)$$

elde edilir. Burada (4.224) ün kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\alpha$  nin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = \mu O + (((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta) \cosh \Sigma + ((\Gamma + \mu' R) \sinh \theta - \Delta \cosh \theta) \sinh \Sigma) A + ((-\Gamma + \mu' R) \cosh \theta + \Delta \sinh \theta) \sinh \Sigma + (-(\Gamma + \mu' R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta) \cosh \Sigma) N \quad (4.236)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden açısal varyasyonunu belirlemek için, (4.223) ün diferensiyeli alınıp (4.187) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda \cosh \Sigma & \sinh \Sigma(\theta' + \Sigma') & \cosh \Sigma(\theta' + \Sigma') \\ \lambda \sinh \Sigma & \cosh \Sigma(\theta' + \Sigma') & \sinh \Sigma(\theta' + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.237)$$

elde edilir. Burada (4.224) ün yerine yazılıp gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \cosh \Sigma & \lambda \sinh \Sigma \\ \lambda \cosh \Sigma & 0 & \theta' + \Sigma' \\ \lambda \sinh \Sigma & \theta' + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.238)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere

$$U_A = (\theta' + \Sigma')O - \lambda \sinh \Sigma A + \lambda \cosh \Sigma N \quad (4.239)$$

ve  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = (\theta' + \Sigma')t_1 + \lambda k_1 \quad (4.240)$$

elde edilir. Bu denklem (4.232) nin ters işaretlisi olduğundan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörünün,  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{t_1}$  Darboux vektörü cinsinden

$$U_A = U_{t_1} + \Sigma' t_1$$

şeklinde olduğu kolayca görülür. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açısız hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

ii)  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için  $r_3$  timelike vektör,  $r_1$  ve  $r_2$  spacelike vektör olması hali

Bu durumda  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{k_1'}{\theta'} \\ r_2 = \frac{r_1'}{\kappa}, \quad \kappa = \|r_1'\| \\ r_3 = r_1 \times r_2 \end{cases} \quad (4.241)$$

Ayrıca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısı için  $r_1 \times r_2 = r_3$ ,  $r_2 \times r_3 = -r_1$ ,  $r_3 \times r_1 = -r_2$  dir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı ile  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının  $r_1$  merkez normal vektörleri ortaktır ve bu çatı vektörleri arasında merkez normal vektörünün dönme açısı  $\phi$  olmak üzere

$$\begin{cases} k_1 = \sinh \phi r_2 + \cosh \phi r_3 \\ t_1 = \cosh \phi r_2 + \sinh \phi r_3 \end{cases} \quad (4.242)$$

ilişkisi vardır. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.243)$$

dır. (4.243) nin ters formu

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \phi & 0 & \cosh \phi \\ \cosh \phi & 0 & -\sinh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.244)$$

dır.

(4.241) den  $r_1' = \kappa r_2$  ve (4.244) dan  $r_2 = -\sinh \phi k_1 + \cosh \phi t_1$  olup  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$  olması kullanılarak

$$\begin{cases} \cosh \phi = \frac{\lambda}{\kappa} \\ \sinh \phi = -\frac{\theta'}{\kappa} \end{cases} \quad (4.245)$$

elde edilir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatının Darboux vektörü

$$\begin{aligned} U_{t_1} &= r_1 \times r_1' \\ &= r_1 \times (\theta' k_1 + \lambda t_1) \\ &= \theta' t_1 + \lambda k_1 \end{aligned} \quad (4.246)$$

dir. Bu ise timelike regle yüzeyin  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre açılma hızıdır.

Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü, doğal çatı cinsinden elde edilebilir:

(4.245) in (4.244) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \theta' & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.247)$$

elde edilip buradan

$$r_3 = \frac{1}{\kappa} (\lambda k_1 + \theta' t_1)$$

olup (4.246) un kullanılmasıyla

$$U_{t_1} = \kappa r_3 \quad (4.248)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.15:** Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ile doğal çatının binormal vektörü aynı doğrultudadır.

Timelike merkez normal regle yüzeyinin  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:



(4.193) ün diferensiyeli alınıp, (4.190), (4.194), (4.247) nin ters formu,  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$  ve  $\kappa = \|r_1'\|$  olması kullanılarak striksiyon eğrisinin hareketi boyunca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre pozisyonel değişimi aşağıdaki gibidir:

$$\beta_{r_1}' = \Gamma_{r_1} r_1 + \Delta_{r_1} r_3 \quad (4.249)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} \Gamma_{r_1} = -\mu_{r_1}' \\ \Delta_{r_1} = \frac{-\Delta_{t_1} \theta' + \lambda \Gamma_{t_1}}{\kappa} \end{cases} \quad (4.250)$$

dır.  $\Gamma_{r_1}$  ve  $\Delta_{r_1}$  fonksiyonlara timelike merkez normal regle yüzeyin **eğrilik fonksiyonları** denir.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının türev formülleri matris formunda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.251)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\kappa = \|r_1'\|$  ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olup sırasıyla  $\varphi_{r_1}$  timelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasıdır.

Şimdi  $\varphi_{r_1}$  timelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasının açıyla olan ilişkisini elde edelim:

(4.245) den

$$\kappa = -\theta' \operatorname{cosech} \phi \quad (4.252)$$

elde edilir.

(4.244) den  $r_2 = -\sinh \phi k_1 + \cosh \phi t_1$  olup türevi alınır ve  $r_3 = \cosh \phi k_1 - \sinh \phi t_1$

ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olması kullanılarak

$$\tau = \phi' \quad (4.253)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.16 :** Timelike merkez normal regle yüzeyin eğrilik ve burulmasının merkez normal vektörünün dönme açısına bağlı ifadeleri

$$\kappa = -\theta' \operatorname{cosech} \phi, \quad \tau = \phi' \quad (4.254)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikten görüleceği üzere timelike merkez normal regle yüzeyin burulması, merkez normal vektörün dönme açısının açısız hızına eşittir.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının Darboux vektörü,

$$\begin{aligned} U_{r_2} &= r_2 \times r_2' \\ &= r_2 \times (-\kappa r_1 - \tau r_3) \\ &= \tau r_1 + \kappa r_3 \end{aligned} \quad (4.255)$$

dır. Bu ise timelike regle yüzeyin  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre açısız hızıdır.

#### 4.1.2.3. ii ) Çatılar Arasındaki İlişki

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Yüzeyin  $v=0$  noktasındaki yüzey çatısı  $\{O, S_n, S_b\}$  olup, burada  $O$  yönlendirme vektörü spacelike,  $S_n$ ,  $v=0$  da yüzey normali spacelike,  $S_b$  binormal vektörü timelikedir.  $O$  yönlendirme vektörü  $t_1$  üreteç vektörü yönündedir. Ayrıca  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı için  $O \times S_n = S_b$ ,  $S_n \times S_b = -O$ ,  $S_b \times O = -S_n$  dir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı üzerinde robot hareketini tanımlayalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s) \quad (4.256)$$

timelike regle yüzeyi için  $O = t_1$  seçelim.  $S_n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \Big|_{v=0}$ ,  $S_b = O \times S_n$  olmak üzere

bu vektörleri hesaplayalım:

(4.189) dan  $\alpha(s) = \beta_{t_1}(s) + \mu_{t_1}(s)t_1(s)$  nin türevi alınıp (4.190),  $t_1' = -\lambda r_1$

eşitliğinin kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla,

$$S_n = \frac{\Gamma_{t_1} r_1 + \lambda \mu_{t_1} k_1}{\sqrt{\Gamma_{t_1}^2 - (\lambda \mu_{t_1})^2}} \quad (4.257)$$

bulunur.  $S_b = O \times S_n$  olması kullanılarak

$$S_n = -\frac{\Gamma_{t_1} k_1 + \lambda \mu_{t_1} r_1}{\sqrt{\Gamma_{t_1}^2 - (\lambda \mu_{t_1})^2}} \quad (4.258)$$

elde edilir. Böylece yüzeyin  $v=0$  daki yüzey çatısı  $\{O = t_1, S_n, S_b\}$  dir.

$\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Burada  $O$  yönlendirme vektörü,  $A$  ilerleme vektörü,  $N$  normal vektör olarak adlandırılır.  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ,

a)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör

b)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör

şeklinde iki türlü tanımlanabilir. Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

**a)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması**

**durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = -N$  ,  $A \times N = -O$  ,  $N \times O = A$  dir.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.259)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.260)$$

dir.  $S_b$  ile  $k_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.261)$$

dır. (4.259) ve (4.260) dan

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.262)$$

dır. Burada  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ile  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.263)$$

şeklinde olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.264)$$

şeklinde elde edilir.

**b)  $O = t_1$  spacelike vektör, A spacelike vektör, N timelike vektör olması**

**durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = N$ ,  $A \times N = -O$ ,  $N \times O = -A$  dır.

$S_n$  ile A arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.265)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.266)$$

dır.  $S_b$  ile  $k_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.267)$$

dır. (4.265) ve (4.267) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.268)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.269)$$

elde edilip ters formuda

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.270)$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.2.4.ii) Araç Çatının Diferensiyel Hareketi

$\{O, A, N\}$  araç çatısının diferensiyel hareketini 4.1.2.3 de belirttiğimiz a) ve b) durumları için sırasıyla inceleyelim:

**a)  $O = t_1$  spacelike vektör, A timelike vektör, N spacelike vektör olması**

**durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.2) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.271)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.75) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.272)$$

olur. Burada (4.184) kullanılarak  $\alpha$  nın  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (-(\Gamma + \mu'R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta)k_1 + ((\Gamma + \mu'R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta)r_1 + \mu t_1 \quad (4.273)$$

elde edilip, (4.264) ün kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\alpha$  nın  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = \mu O + ((-\Gamma + \mu'R) \cosh \theta + \Delta \sinh \theta) \sinh \Sigma + (-\Gamma + \mu'R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta \cosh \Sigma A + ((\Gamma + \mu'R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta) \cosh \Sigma + (\Gamma + \mu'R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta \sinh \Sigma N \quad (4.274)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden açısal varyasyonunu belirlemek için, (4.263) in diferensiyeli alınıp (4.187) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda \sinh \Sigma & \cosh \Sigma(\theta' + \Sigma') & \sinh \Sigma(\theta' + \Sigma') \\ \lambda \cosh \Sigma & \sinh \Sigma(\theta' + \Sigma') & \cosh \Sigma(\theta' + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.275)$$

elde edilir. Burada (4.264) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \sinh \Sigma & -\lambda \cosh \Sigma \\ \lambda \sinh \Sigma & 0 & \theta' + \Sigma' \\ \lambda \cosh \Sigma & \theta' + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.276)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere

$$U_A = -(\theta' + \Sigma')O - \lambda \cosh \Sigma A + \lambda \sinh \Sigma N \quad (4.277)$$

ve  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı cinsinden

$$U_A = -(\theta' + \Sigma')t_1 - \lambda k_1 \quad (4.278)$$

elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{t_1}$  Darboux vektörü cinsinden elde edilebilir:

(4.278) de (4.246) kullanılırsa

$$U_A = -U_{t_1} - \Sigma' t_1$$

elde edilmiş olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açılmal hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

**b)  $O = t_1$  spacelike vektör, A spacelike vektör, N timelike vektör olması durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.2) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.279)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.75) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.280)$$

olup burada (4.184) kullanılarak  $\alpha$  nın  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = ((\Gamma + \mu' R) \sin \theta + \Delta \cos \theta) k_1 + ((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) r_1 + \mu t_1 \quad (4.281)$$

elde edilir. Burada (4.270) in kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\alpha$  nın  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = \mu O + (((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta) \cosh \Sigma + ((\Gamma + \mu' R) \sinh \theta - \Delta \cosh \theta) \sinh \Sigma) A + ((-\Gamma + \mu' R) \cosh \theta + \Delta \sinh \theta) \sinh \Sigma + (-\Gamma + \mu' R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta) \cosh \Sigma) N \quad (4.282)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden açılmal varyasyonunu belirlemek için, (4.269) un diferensiyeli alınıp (4.187) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda \cosh \Sigma & \sinh \Sigma(\theta' + \Sigma') & \cosh \Sigma(\theta' + \Sigma') \\ \lambda \sinh \Sigma & \cosh \Sigma(\theta' + \Sigma') & \sinh \Sigma(\theta' + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.283)$$

elde edilir. Burada (4.270) in yerine yazılıp gerekli hesaplamaların yapılmasıyla  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \cosh \Sigma & \lambda \sinh \Sigma \\ \lambda \cosh \Sigma & 0 & \theta' + \Sigma' \\ \lambda \sinh \Sigma & \theta' + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.284)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere

$$U_A = (\theta' + \Sigma')O - \lambda \sinh \Sigma A + \lambda \cosh \Sigma N \quad (4.285)$$

ve  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı cinsinden

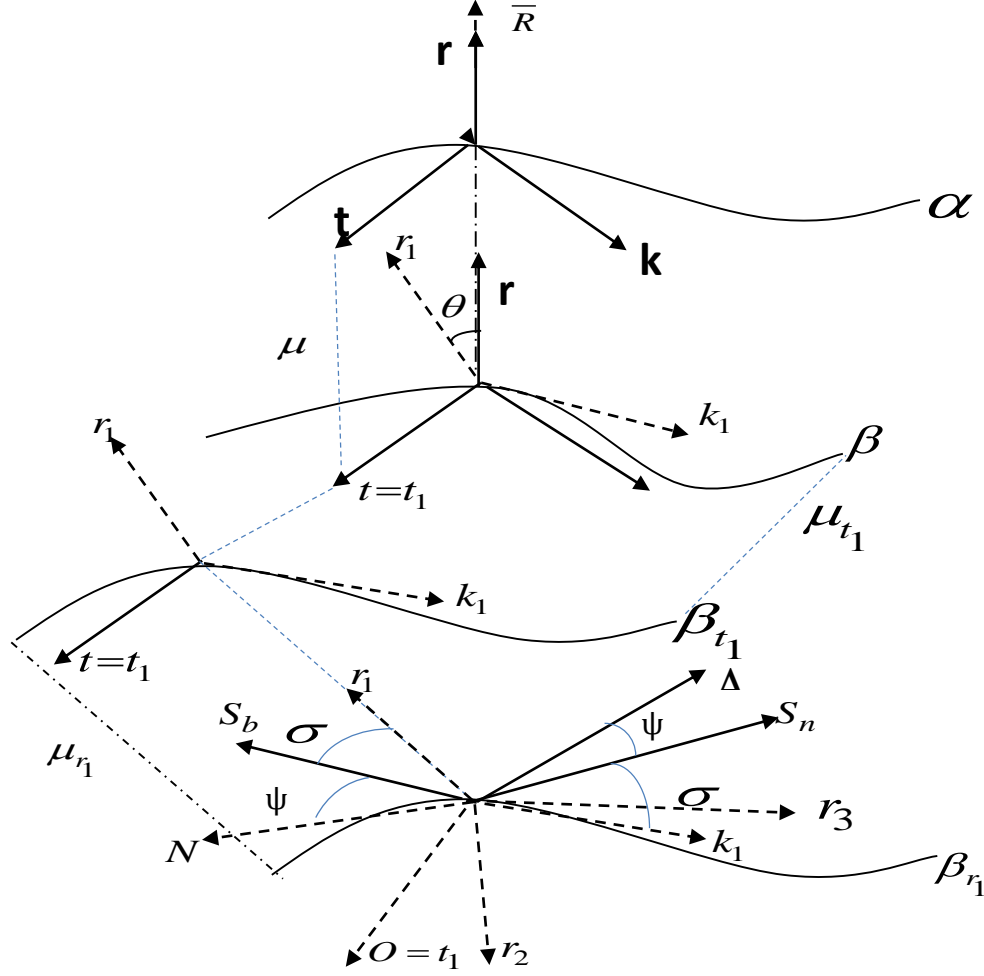
$$U_A = (\theta' + \Sigma')t_1 + \lambda k_1 \quad (4.286)$$

elde edilir. Bu denklem (4.278) in ters işaretlisi olduğundan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{t_1}$  Darboux vektörü cinsinden

$$U_A = U_{t_1} + \Sigma' t_1$$

şeklinde olduğu kolayca görülür. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açısız hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.





Şekil 4.5. Çatılar arasındaki ilişki.

#### 4.2 Spacelike Regle Yüzey İçin Geliştirilmiş Robot Uç Hareketi

Bu bölüm  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının vektörlerinin Minkowski uzayındaki durumlarına göre iki alt bölümden oluşmaktadır. Bu alt bölümlerde spacelike doğrultmanlı spacelike regle yüzeyin geliştirilmiş çatısı, doğal çatısı, yüzey çatısı ve araç çatısı tanımlanarak, spacelike regle yüzeyi karakterize eden eğrilik fonksiyonları ve Darboux vektörleri elde edilerek bu Darboux vektörleri arasındaki ilişkiler verilmiştir. Daha sonra spacelike regle yüzeyin dayanak eğrisinin geliştirilmiş çatısı ile yüzeyin araç çatısı arasındaki bağıntılar elde edilerek robot uç hareketi ve diferensiyel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca robotun yörüngesini belirleyen araç çatının türev formüllerinin spacelike regle yüzeyin Lancret eğriliğine, tanımladığımız geliştirilmiş

çatının Darboux açısının açısal hızına ve robot harekinde gerekli olan dört tane referans çatıların dönme açılarına bağlı olduğu görülmüştür.

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen spacelike regle yüzey için bir parametrizasyon,

$$X(s, v) = \alpha(s) + v\bar{R}(s) \quad (4.287)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\alpha(s)$  regle yüzeyin dayanak eğrisi olup spacelike bir eğri,  $\bar{R}(s)$  doğrultman vektörü spacelikedir ve ayrıca  $\langle \bar{R}', \bar{R}' \rangle = 1$  dir.

$X(s, v) = \alpha(s) + v\bar{R}(s)$  spacelike regle yüzeyinin striksiyon eğrisi  $\beta(s)$  olmak üzere

$$\beta(s) = \alpha(s) - \mu(s)\bar{R}(s) \quad (4.288)$$

dir. Burada  $\mu$  reel değişkenli parametre olup striksiyon eğrisinden dayanak eğrisine olan uzaklıktır.

$\beta$  striksiyon eğrisi üzerinde  $\{r, t, k\}$  ortonormal sistemi aşağıdaki gibi iki şekilde tanımlanabilir:

**1. Durum:**  $r$  üreteç vektörü spacelike,  $t$  merkez normal vektörü spacelike ve  $k$  merkez teğet vektörü timelike olabilir. Bu sisteme ise üreteç üçlüsü denir. Bu durumda  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı

$$\begin{cases} r = \frac{\bar{R}}{R} \\ t = \bar{R}' \\ k = r \times t \end{cases}, \quad R = \|\bar{R}\|$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca  $\{r, t, k\}$  ortonormal sistemi için,  $r \times t = k$ ,  $t \times k = -r$ ,  $k \times r = -t$  dir.

**2. Durum:**  $r$  üreteç vektörü spacelike,  $t$  merkez normal vektörü timelike ve  $k$  merkez teğet vektörü spacelike olabilir. Bu sisteme üreteç üçlüsü denir. Bu durumda  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı

$$\begin{cases} r = \frac{\bar{R}}{R} \\ t = \bar{R}' \\ k = t \times r \end{cases}, \quad R = \|\bar{R}\|$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca  $\{r, t, k\}$  ortonormal sistemi için,  $r \times t = -k$ ,  $t \times k = -r$ ,  $k \times r = t$  dir.

Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

**4.2.1. Durum:**  $r$  üreteç vektörü spacelike,  $t$  merkez normal vektörü spacelike ve  $k$  merkez teğet vektörü timelike olması durumunda spacelike regle yüzeyin geliştirilmiş robot uç hareketi

(4.288) denkleminde  $s$  ye göre türev alınırsa,

$$\beta'(s) = \alpha'(s) - \mu'(s)\bar{R}(s) - \mu(s)\bar{R}'(s) \quad (4.289)$$

olur. Burada  $\langle \beta'(s), \bar{R}'(s) \rangle = 0$  olması kullanılarak

$$\mu(s) = \langle \alpha'(s), \bar{R}'(s) \rangle \quad (4.290)$$

elde edilir.

$\beta$  striksiyon eğrisi üzerinde  $\{r, t, k\}$  ortonormal sistemi

$$\begin{cases} r = \frac{\bar{R}}{R} \\ t = \bar{R}' \\ k = r \times t \end{cases}, \quad R = \|\bar{R}\| \quad (4.291)$$

şeklinde tanımlanabilir.

$\beta$  striksiyon eğrisinin teğet vektörü 4.1. bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak

$$\beta'(s) = \Gamma(s)r(s) + \Delta(s)k(s) \quad (4.292)$$

şeklinde elde edilir. Bu ise striksiyon eğrisinin üreteç üçlüsüne göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonudur. Burada

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R} \rangle - \mu' R \\ \Delta = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup bu fonksiyonlara (4.287) spacelike regle yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsü için türev formülleri

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{R} t \\ t' = \frac{1}{R} (-r + \gamma k) \\ k' = \frac{\gamma}{R} t \end{cases} \quad (4.293)$$

şeklinde olup burada  $\gamma = \langle \bar{R}'', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle$  ifadesi (4.287) spacelike regle yüzeyinin  $\bar{R}$  doğrultman vektörünün çizdiği eğrinin **geodezik eğriliğidir**.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünün Darboux vektörü  $U_r$  olmak üzere

$$U_r = t \times t' = \frac{1}{R} (-\gamma r + k) \quad (4.294)$$

dir.

#### Tanım 4.2.1:

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R} \rangle - \mu' R \\ \Delta = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle \\ \gamma = \langle \bar{R}'', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle \end{cases}$$

ifadelerine (4.287) yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

Ayrıca (4.287) spacelike regle yüzeyin Lancret eğriliği,

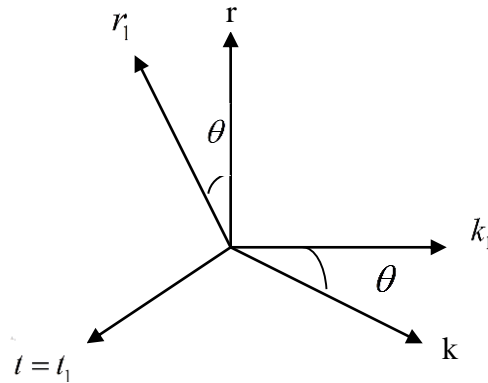
$$\lambda = \|t'\| = \sqrt{|\langle t', t' \rangle|} = \sqrt{\left| \frac{1-\gamma^2}{R^2} \right|} \quad (4.295)$$

dir.

#### 4.2.1.1 Geliştirilmiş çatının oluşturulması

Bu bölümde robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürülerek  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı tanımlanacaktır. Ayrıca bu çatının  $k_1$  vektörü  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının Darboux vektörüne karşılık gelmektedir.

$\{r, t, k\}$  üreteç çatısını  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürelim:



Şekil 4.6. Geliştirilmiş çatının elde edilişi

Dönme denklemi

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ t_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} \quad (4.296)$$

dir. Buradan ters formu

$$\begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ t_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.297)$$

yazılır.

$\beta$  striksiyon eğrisi üzerine kurulan  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı için elde edilen (4.293) türev formüllerinden eğriliği  $\frac{1}{R}$ , burulması  $\frac{\gamma}{R}$  olan bir  $(\beta_1)$  eğrisi daima bulunabilir.

(4.294), (4.296) ve  $U_r = k_1$  olması kullanılarak

$$\cosh \theta = \frac{1}{R} \quad , \quad \sinh \theta = -\frac{\gamma}{R}$$

elde edilir.

Total (Lancret) eğrilik tanımı gereğince  $\lambda = \|t'\| = \sqrt{\left|\frac{1-\gamma^2}{R^2}\right|}$  olup  $\gamma = -\tanh \theta$  olması

kullanılırsa  $R^2 = \frac{1}{\lambda^2 \cosh^2 \theta}$  dır.

Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir:

**Sonuç 4.2.2:**  $\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünü üzerinde bulunduran  $(\beta_1)$  striksiyon eğrisinin, eğriliğinin Lancret eğriliğine bağlı ifadesi

$$\frac{1}{R} = \lambda \cosh \theta \quad (4.298)$$

burulmasının Lancret eğriliğine bağlı ifadesi

$$\frac{\gamma}{R} = -\lambda \sinh \theta \quad (4.299)$$

dır.

Şimdi  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı için türev formüllerini hesaplayalım:

(4.296) eşitliklerinin diferensiyeli alınır, (4.298) ve (4.299) eşitlikleri kullanılırsa  $\{t_1, r_1, k_1\}$  ortonormal sistemi için

$$\begin{cases} t_1' = -\lambda r_1 \\ r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1 \\ k_1' = \theta' r_1 \end{cases} \quad (4.300)$$

türev formülleri elde edilir. Burada  $t_1$  spacelike üreteç vektör,  $r_1$  spacelike merkez normal vektör,  $k_1$  timelike merkez teğet vektör olarak adlandırılır. Ayrıca burada  $\theta'$  ve  $\lambda$  sırasıyla (4.287) spacelike regle yüzeyinin eğriliği ve Lancret eğriliğidir.

Geliştirilmiş çatının herbir vektörü robot hareketi boyunca regle yüzey oluşturur.  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısında eğer  $k_1$  timelike vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$$

yüzeyini alırsak görüleceği üzere burada  $\alpha$  spacelike eğri olduğundan bu yüzey timelike regle yüzeydir. Ancak  $O=k_1$  in oluşturduğu yüzeyi robot yörünge yüzeyi olarak alamayız. Çünkü  $O=k_1$  timelike vektör,  $S_n$  spacelike regle yüzeyin normal vektörü olup timelike vektör olduğundan bu durumda 4.2.1.3 de bahsedeceğimiz  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı  $IR_1^3$  de tanımlanamaz.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısında eğer  $t_1$  spacelike vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s)$$

yüzeyini alırsak görüleceği üzere burada  $\alpha$  spacelike eğri olduğundan bu yüzey spacelike regle yüzeydir. O halde 4.2.1.3 de bahsedeceğimiz robot yörünge yüzeyimizde spacelike regle yüzey olur.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısında,  $r_1$  spacelike vektörünün oluşturduğu yüzey alınırsa bu yüzey spacelike merkez normal regle yüzey olarak adlandırılır ve bu yüzey ve özellikleri 4.1.2.2 de ayrıca incelenecektir.

Şimdi elde ettiğimiz  $\{t_1, r_1, k_1\}$  çatısının  $t_1$  vektörünün oluşturduğu yüzeyi alalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s)$$

olup bu spacelike regle yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\beta_{t_1}(s) = \alpha(s) - \mu_{t_1}(s)t_1(s) \quad (4.301)$$

dır. Buradan diferensiyel alınarak, (4.297),  $t_1' = -\lambda r_1$  ve  $\langle \beta_{t_1}', t_1' \rangle = 0$  olması kullanılarak,

$$\mu_{t_1} = -\frac{\Gamma \cosh \theta - \Delta \sinh \theta + \mu' R \cosh \theta}{\lambda} \quad (4.302)$$

elde edilir. Burada  $\Gamma$  ve  $\Delta$ , Tanım 4.2.1 de ifade edilen spacelike regle yüzeyin eğrilik fonksiyonlarıdır.

(4.301) striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.301) in diferensiyeli alınıp, (4.292), (4.297) ,  $t_1' = -\lambda r_1$  ve (4.302) nin kullanılmasıyla striksiyon eğrisinin hareketi boyunca  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre pozisyonel değişimi

$$\beta_1'(s) = \Gamma_{t_1} k_1 + \Delta_{t_1} t_1 \quad (4.303)$$

dır. Burada

$$\begin{cases} \Gamma_{t_1} = \Delta \cosh \theta - \Gamma \sinh \theta - \mu' R \sinh \theta \\ \Delta_{t_1} = \mu - \mu_{t_1}' \end{cases}$$

olup  $t_1$  üreteç vektörünün oluşturduğu yüzeyi karakterize eden eğrilik fonksiyonlarıdır.

#### 4.2.1.2 $r_1$ merkez normal vektörünün oluşturduğu spacelike merkez normal

##### yüzeyi ve doğal çatı

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı striksiyon eğrisi üzerinde hareket ederken  $r_1$  merkez normal vektörü bir başka regle yüzey üretir.  $\beta_1$  striksiyon eğrisi üzerinde merkez normal vektörünün oluşturduğu

$$\varphi_{r_1}(s, v) = \beta_1(s) + v r_1(s) \quad (4.304)$$

yüzeyine spacelike merkez normal regle yüzey denir. Bu spacelike merkez normal regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\beta_{r_1}(s) = \beta_1(s) - \mu_{r_1}(s) r_1(s) \quad (4.305)$$

dır. Burada  $\mu_{r_1}$  merkez normal vektörü boyunca striksiyon eğrileri arasındaki uzaklık olup (4.305) in diferensiyellenmesi , striksiyon eğrisi tanımından  $\langle \beta_{r_1}', r_1' \rangle = 0$  olması ,  $r_1' = \theta k_1 + \lambda t_1$  ve (4.303) ün kullanılmasıyla

$$\mu_{r_1}(s) = \frac{\lambda \Delta_{t_1} - \theta' \Gamma_{t_1}}{\lambda^2 - \theta'^2} \quad (4.306)$$

elde edilir.



Böylece  $\beta_{k_1}$  striksiyon eğrisi üzerinde  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı kurulabilir.  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için iki durum söz konusudur. İlk olarak,  $r_2$  timelike vektör,  $r_1$  ve  $r_3$  spacelike vektör; daha sonra  $r_1$  ve  $r_2$  spacelike vektör,  $r_3$  timelike vektör olması durumu incelenecektir.

**i)  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için  $r_2$  timelike vektör,  $r_1$  ve  $r_3$  spacelike vektör olması hali**

Bu durumda  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\begin{cases} r_1 = -\frac{t_1'}{\lambda} \\ r_2 = \frac{r_1'}{\kappa}, \quad \kappa = \|r_1'\| \\ r_3 = r_2 \times r_1 \end{cases} \quad (4.307)$$

Ayrıca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısı için  $r_1 \times r_2 = -r_3$ ,  $r_2 \times r_3 = -r_1$ ,  $r_3 \times r_1 = r_2$  dir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı ile  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının  $r_1$  merkez normal vektörleri ortaktır ve bu çatı vektörleri arasında merkez normal vektörünün dönme açısı  $\phi$  olmak üzere

$$\begin{cases} k_1 = \cosh \phi r_2 + \sinh \phi r_3 \\ t_1 = \sinh \phi r_2 + \cosh \phi r_3 \end{cases} \quad (4.308)$$

ilişkisi vardır. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.309)$$

dır. Bu matrisin ters formu

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \phi & 0 & \cosh \phi \\ \cosh \phi & 0 & -\sinh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.310)$$

dır.

(4.307) den  $r_1' = \kappa r_2$  ve (4.310) dan  $r_2 = -\sinh \phi t_1 + \cosh \phi k_1$  olup  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$  olması kullanılarak

$$\begin{cases} \cosh \phi = \frac{\theta'}{\kappa} \\ \sinh \phi = -\frac{\lambda}{\kappa} \end{cases} \quad (4.311)$$

elde edilir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatının Darboux vektörü

$$\begin{aligned} U_{t_1} &= r_1 \times r_1' \\ &= r_1 \times (\theta' k_1 + \lambda t_1) \\ &= \theta' t_1 + \lambda k_1 \end{aligned} \quad (4.312)$$

olup spacelike regle yüzeyin  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre açısal hızıdır.

Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü doğal çatı cinsinden elde edilebilir:

(4.311) in (4.310) da yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \lambda & 0 & \theta' \\ \theta' & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.313)$$

elde edilip buradan

$$r_3 = \frac{1}{\kappa} (\lambda k_1 + \theta' t_1)$$

olup (4.312) nin kullanılmasıyla

$$U_{t_1} = \kappa r_3 \quad (4.314)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.2.3 :** Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü (yani spacelike regle yüzeyin açısal hızı) ile doğal çatının binormal vektörü aynı doğrultudadır.

Spacelike merkez normal regle yüzeyin striksiyon eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu, başlangıçtaki spacelike regle yüzeyin striksiyon eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu ile aynı davranışı gösterecektir. Şimdi

spacelike merkez normal regle yüzeyinin  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.305) den türev alınıp, (4.306), (4.310) un ters formu ve  $\kappa = \|r_1'\|$  olması kullanılarak striksiyon eğrisinin hareketi boyunca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre pozisyonel değişimi aşağıdaki gibidir:

$$\beta_{r_1}' = -\mu_{r_1}' r_1 + \Delta_{r_1} r_3 \quad (4.315)$$

dır. Burada

$$\Delta_{r_1} = \frac{\Delta_{t_1} \theta' - \lambda \Gamma_{t_1}}{\kappa} \quad (4.316)$$

dır.  $\mu_{r_1}'$  ve  $\Delta_{r_1}$  fonksiyonları spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik fonksiyonları olup Tanım 4.2.1 de ifade edilen  $\Gamma$  ve  $\Delta$  fonksiyonlarıyla aynı rolü oynar.

4.1. bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının türev formülleri matris formunda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.317)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\kappa = \|r_1'\|$  ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olup sırasıyla  $\varphi_{r_1}$  spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasıdır.

Şimdi  $\varphi_{r_1}$  spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasının açıyla olan ilişkisini elde edelim:

(4.311) den  $\kappa = \theta' \operatorname{sech} \phi$  dır. (4.310) dan  $r_2 = -\sinh \phi t_1 + \cosh \phi k_1$  olup türevi alınıp

$\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olması kullanılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa  $\tau = -\phi'$  elde edilir.

**Sonuç 4.2.4 :** Spacelike merkez normal regle yüzeyin eğrilik ve burulmasının merkez normal vektörünün dönme açısına bağlı ifadeleri

$$\kappa = \theta' \operatorname{sech} \phi, \quad \tau = -\phi' \quad (4.318)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan görüleceği üzere spacelike merkez normal regle yüzeyin burulması, merkez normal vektörünün açısal hızıyla ters doğrultudadır.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının Darboux vektörü,

$$\begin{aligned} U_{r_2} &= r_2 \times r_2' \\ &= r_2 \times (\kappa r_1 + \tau r_3) \\ &= -\tau r_1 + \kappa r_3 \end{aligned} \quad (4.319)$$

dır. Bu ise spacelike merkez normal regle yüzeyinin  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre açısal hızıdır.

(4.312) denklemi ile ifade edilen geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ve (4.319) ile ifade edilen doğal çatının Darboux vektörü, sırasıyla spacelike regle yüzeyin ve spacelike merkez normal regle yüzeyin açısal hareketini tanımlar.

(4.319) da (4.314) kullanılırsa spacelike merkez normal regle yüzeyinin açısal hızı ile spacelike regle yüzeyin açısal hızı arasında

$$U_{r_2} = -U_{k_1} - \tau r_1$$

ilişkisi vardır. Böylece doğal çatının geliştirilmiş çatıya göre açısal hareketi,  $r_2$  vektörü civarında dönmesidir.

#### 4.2.1.3. i) Çatılar arasındaki ilişki

Bilindiği üzere bir robot hareketi merkez (orjin) noktasında tanımlı dört tane çatı ve bir dönme açısıyla belirlidir. Bu dört çatı sırasıyla geliştirilmiş çatı, doğal çatı, yüzey çatısı ve araç çatı olup ilk iki çatı 4.2.1.1 ve 4.2.1.2 bölümlerinde ifade edildi. Bu bölümde ilk olarak robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısı tanımlandı. Daha sonra da robotun yörüngesini yani izlediği yolu belirleyen  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Minkowski uzayındaki olası durumlarına göre çatılar arasındaki ilişkiler, iki alt başlık şeklinde incelendi.

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısı tanımlayalım. Yüzeyin  $v = 0$  noktasındaki yüzey çatısı  $\{O, S_n, S_b\}$  olup, burada  $O$  yönlendirme vektörü spacelike vektör,  $S_n$ ,  $v = 0$  da yüzey

normali timelike vektör,  $S_b$  binormal vektörü spacelike vektördür. Ayrıca  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı için  $O \times S_n = -S_b, S_n \times S_b = -O, S_b \times O = S_n$  dir.

Daha önceki bölümlerde de ifade ettiğimiz üzere geliştirilmiş çatının herbir vektörü robot hareketi boyunca bir regle yüzey oluşturur. Bu yüzden bu kısımda  $O$  yönlendirme vektörünü  $t_1$  üreteç vektörü yönünde seçerek  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı üzerinde robot hareketini tanımlayalım:

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı üzerinde robot hareketini tanımlayalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s) \quad (4.320)$$

spacelike regle yüzeyi için  $O = t_1$  seçelim.  $S_n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \Big|_{v=0}$ ,  $S_b = S_n \times O$  olmak

üzere bu vektörleri hesaplayalım:

(4.301) den  $\alpha(s) = \beta_{t_1}(s) + \mu_{t_1}(s)t_1(s)$  nin türevi alınıp (4.303) ün ve  $t_1' = -\lambda r_1$

eşitliğinin kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla,

$$S_n = \frac{\Gamma_{t_1} r_1 - \lambda \mu_{t_1} k_1}{\sqrt{(\Gamma_{t_1})^2 - (\lambda \mu_{t_1})^2}} \quad (4.321)$$

$S_b = S_n \times O$  olması kullanılarak

$$S_b = \frac{\Gamma_{t_1} k_1 - \lambda \mu_{t_1} r_1}{\sqrt{(\Gamma_{t_1})^2 - (\lambda \mu_{t_1})^2}} \quad (4.322)$$

olup böylece yüzeyin  $v=0$  daki yüzey çatısı  $\{O = t_1, S_n, S_b\}$  dir.

$\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Burada  $O$  yönlendirme vektörü,  $A$  ilerleme vektörü,  $N$  normal vektör olarak adlandırılır.  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ,

a)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör

b)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör

şeklinde iki türlü tanımlanabilir.

Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

a)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması durumu

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = N$ ,  $A \times N = -O$ ,  $N \times O = -A$  dır.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.323)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.324)$$

dır.  $S_b$  ile  $k_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.325)$$

dır. (4.323) ve (4.325) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.326)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ile  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.327)$$

şeklinde olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.328)$$

şeklinde elde edilir.

**b)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatsısı için  $O \times A = -N$  ,  $A \times N = -O$  ,  $N \times O = A$  dır.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.329)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.330)$$

dır.  $S_b$  ile  $k_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.331)$$

dır. (4.329) ve (4.331) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.332)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.333)$$

dır. Bu matrisin ters formuda

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.334)$$

şeklindedir.

#### 4.2.1.4. i) Araç Çatının Diferensiyel Hareketi

Birinci bölümde belirttiğimiz gibi robot uç hareketi, robot yörünge olarak ifade edilir. Robot yörünge, merkez noktasının lineer hareketi ve araç çatısının hareketi ile tanımlanır. Bu bölümde, merkez noktasının ve araç çatısının diferensiyel özellikleri; verilen spacelike regle yüzeyin eğrilik teorisi ve 4.2.1.3. bölümdeki dört çatı arasındaki ilişkiler kullanılarak incelenmiştir. Ayrıca robotun yörüngesini belirleyen araç çatının türev formüllerinin, verilen spacelike regle yüzeyin Lancret eğriliğine ve robotun tanımlanması için gerekli olan dört tane referans çatının dönme açılarına bağlı olduğu görülmüştür.

Şimdi  $\{O, A, N\}$  araç çatısının diferensiyel hareketini 4.2.1.3 de belirttiğimiz

a) ve b) durumları için sırasıyla inceleyelim:

**a)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması**

**durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.288) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.335)$$

dir. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.292) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.336)$$

dir. Burada (4.297) kullanılarak (4.336) nın  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)(\cosh \theta r_1 - \sinh \theta k_1) + \mu t_1 + \Delta(-\sinh \theta r_1 + \cosh \theta k_1) \quad (4.337)$$

şeklinde elde edilir. Burada (4.328) in kullanılması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & \mu O + (((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta) \cosh \Sigma + (-\Gamma + \mu' R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta) \sinh \Sigma) A \\ & + (((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta) \sinh \Sigma + (-\Gamma + \mu' R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta) \cosh \Sigma) N \end{aligned} \quad (4.338)$$



şeklindedir.

Araç çatının birinci dereceden pozisyonel varyasyonunu belirlemek için, (4.327) nin diferensiyeli alınıp (4.300) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda \cosh \Sigma & \sinh \Sigma(\theta' + \Sigma') & \cosh \Sigma(\theta' + \Sigma') \\ \lambda \sinh \Sigma & \cosh \Sigma(\theta' + \Sigma') & \sinh \Sigma(\theta' + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.339)$$

elde edilir. Burada (4.328) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \cosh \Sigma & \lambda \sinh \Sigma \\ \lambda \cosh \Sigma & 0 & \theta' + \Sigma' \\ \lambda \sinh \Sigma & \theta' + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.340)$$

şeklinde elde edilir. Buradan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının birinci dereceden açışal varyasyonunun,  $\lambda$  Lancret eğriliğine ve çatılar arasındaki dönme açlarına bağlı olduğu görülür. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere, 4.1. bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak

$$U_A = (\theta' + \Sigma')O - \lambda \sinh \Sigma A + \lambda \cosh \Sigma N \quad (4.341)$$

ve  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = (\theta' + \Sigma')t_1 + \lambda k_1 \quad (4.342)$$

elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{t_1}$  Darboux vektörü cinsinden elde edilebilir:

(4.342) de (4.312) kullanılırsa

$$U_A = U_{t_1} + \Sigma' t_1$$

elde edilmiş olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açışal hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

b)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması

**durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.288) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.343)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.292) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.344)$$

olup burada (4.297) kullanılarak  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = ((\Gamma + \mu' R)(\cosh \theta r_1 - \sinh \theta k_1) + \mu t_1 + \Delta(-\sinh \theta r_1 + \cosh \theta k_1))N \quad (4.345)$$

elde edilir. Burada (4.334) ün kullanılmasıyla  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = \mu O + (-\Gamma + \mu' R) \sinh(\Sigma - \theta) + \Delta \cosh(\Sigma + \theta) A + ((\Gamma + \mu' R) \cosh(\Sigma + \theta) - \Delta \sinh(\Sigma + \theta)) N \quad (4.346)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden pozisyonel varyasyonunu belirlemek için (4.333) ün diferensiyeli alınıp, (4.300) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda \sinh \Sigma & \cosh \Sigma (\theta' + \Sigma') & \sinh \Sigma (\theta' + \Sigma') \\ \lambda \cosh \Sigma & \sinh \Sigma (\theta' + \Sigma') & \cosh \Sigma (\theta' + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.347)$$

elde edilir. Burada (4.334) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \sinh \Sigma & -\lambda \cosh \Sigma \\ \lambda \sinh \Sigma & 0 & \theta' + \Sigma' \\ \lambda \cosh \Sigma & \theta' + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.348)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere

$$U_A = -(\theta' + \Sigma')O - \lambda \cosh \Sigma A + \lambda \sinh \Sigma N \quad (4.349)$$

ve  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = -(\theta' + \Sigma')t_1 - \lambda k_1 \quad (4.350)$$

elde edilir. Bu denklem (4.342) nin ters işaretlisi olduğundan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörünün,  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{t_1}$  Darboux vektörü cinsinden

$$U_A = -U_{t_1} - \Sigma' t_1$$

şeklinde olduğu kolayca görülür. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açısız hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

**ii)  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için  $r_1$  ve  $r_2$  spacelike vektör,  $r_3$  timelike vektör olması hali**

Bu durumda  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\begin{cases} r_1 = -\frac{t_1'}{\lambda} \\ r_2 = \frac{r_1'}{\kappa}, \quad \kappa = \|r_1'\| \\ r_3 = r_1 \times r_2 \end{cases} \quad (4.351)$$

Ayrıca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısı için  $r_1 \times r_2 = r_3$ ,  $r_2 \times r_3 = -r_1$ ,  $r_3 \times r_1 = -r_2$  dir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı ile  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının  $r_1$  merkez normal vektörleri ortaktır ve bu çatı vektörleri arasında merkez normal vektörünün dönme açısı  $\phi$  olmak üzere

$$\begin{cases} t_1 = \cosh \phi r_2 + \sinh \phi r_3 \\ k_1 = \sinh \phi r_2 + \cosh \phi r_3 \end{cases} \quad (4.352)$$

ilişkisi vardır. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.353)$$

dır. Bu matrisin ters formu

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh \phi & 0 & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & 0 & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.354)$$

dır.

(4.351) den  $r_1' = \kappa r_2$  ve (4.354) den  $r_2 = -\sinh \phi k_1 + \cosh \phi t_1$  olup  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$  olması kullanılarak

$$\begin{cases} \cosh \phi = \frac{\lambda}{\kappa} \\ \sinh \phi = -\frac{\theta'}{\kappa} \end{cases} \quad (4.355)$$

elde edilir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatının Darboux vektörü

$$\begin{aligned} U_{t_1} &= r_1 \times r_1' \\ &= r_1 \times (\theta' k_1 + \lambda t_1) \\ &= \theta' t_1 + \lambda k_1 \end{aligned} \quad (4.356)$$

olup spacelike regle yüzeyin  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre açısal hızıdır.

Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü, doğal çatı cinsinden elde edilebilir:

(4.355) in (4.354) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \lambda & 0 & \theta' \\ \theta' & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.357)$$

elde edilip buradan

$$r_3 = \frac{1}{\kappa} (\lambda k_1 + \theta' t_1)$$

olup (4.356) nin kullanılmasıyla

$$U_{t_1} = \kappa r_3 \quad (4.358)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.2.5:** Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ile doğal çatının binormal vektörü aynı rolü oynar.

Spacelike merkez normal regle yüzeyin striksiyon eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu, başlangıçtaki spacelike regle yüzeyin striksiyon eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu ile aynı davranışı gösterecektir. Şimdi spacelike merkez normal regle yüzeyinin  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.305) in diferensiyeli alınıp, (4.303), (4.306), (4.357) nin ters formu,  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$  ve  $\kappa = \|r_1'\|$  olması kullanılarak striksiyon eğrisinin hareketi boyunca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre pozisyonel değişimi aşağıdaki gibidir:

$$\beta_{r_1}' = -\mu_{r_1}' r_1 + \Delta_{r_1} r_3 \quad (4.359)$$

elde edilir. Burada

$$\Delta_{r_1} = \frac{\lambda \Gamma_{t_1} - \Delta_{t_1} \theta'}{\kappa} \quad (4.360)$$

dır.  $\mu_{r_1}'$  ve  $\Delta_{r_1}$  fonksiyonları spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik fonksiyonları olup tanım 4.2.1 de ifade edilen  $\Gamma$  ve  $\Delta$  fonksiyonlarıyla aynı rolü oynar. 4.1. bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının türev formülleri matris formunda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.361)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\kappa = \|r_1'\|$  ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olup sırasıyla  $\varphi_{r_1}$  spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasıdır.

Şimdi  $\varphi_{r_1}$  spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasının açısıyla olan ilişkisini elde edelim:

(4.355) den  $\kappa = -\theta' \operatorname{cosech} \phi$  elde edilir.

(4.354) den  $r_2 = \cosh \phi t_1 - \sinh \phi k_1$  olup türevi alınıp,  $r_3 = -\sinh \phi t_1 + \cosh \phi k_1$  ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olması kullanılarak  $\tau = \phi'$  elde edilir.

**Sonuç 4.2.6 :** Spacelike merkez normal regle yüzeyin eğrilik ve burulmasının merkez normal vektörünün dönme açısına bağlı ifadeleri

$$\kappa = -\theta' \operatorname{cosech} \phi, \quad \tau = \phi' \quad (4.362)$$

şeklinde elde edilir. Buradan görüleceği üzere spacelike merkez normal regle yüzeyin burulması, merkez normal vektörünün açısal hızıyla aynı doğrultudadır.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının Darboux vektörü,

$$\begin{aligned} U_{r_2} &= r_2 \times r_2' \\ &= r_2 \times (-\kappa r_1 - \tau r_3) \\ &= \tau r_1 + \kappa r_3 \end{aligned} \quad (4.363)$$

dır. Bu ise spacelike merkez normal regle yüzeyinin  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre açısal hızıdır.

(4.356) denklemi ile ifade edilen geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ve (4.363) ile ifade edilen doğal çatının Darboux vektörü, sırasıyla spacelike regle yüzeyin ve spacelike merkez normal regle yüzeyin açısal hareketini tanımlar.

(4.363) de (4.358) kullanılırsa spacelike merkez normal regle yüzeyinin açısal hızı ile spacelike regle yüzeyin açısal hızı arasında

$$U_{r_2} = U_{t_1} + \tau r_1$$

ilişkisi vardır. Böylece doğal çatının geliştirilmiş çatıya göre açısal hareketi,  $r_2$  vektörü civarında dönmesidir.

#### 4.2.1.3. ii) Çatılar arasındaki ilişki

4.2.1.3.i) bölümünde yapılan açıklamalar bu bölüm için de geçerli olup, ilk olarak robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Yüzeyin  $v=0$  noktasındaki yüzey çatısı  $\{O, S_n, S_b\}$  olup, burada  $O$  yönlendirme vektörü spacelike,  $S_n$ ,  $v=0$  da yüzey normali timelike,  $S_b$  binormal vektörü spacelike vektördür.  $O$  yönlendirme vektörü  $t_1$

üreteç vektörü yönündedir. Ayrıca  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı için  $O \times S_n = -S_b$ ,  $S_n \times S_b = -O$ ,  $S_b \times O = S_n$  dir.

$\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı üzerinde robot hareketini tanımlayalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s) \quad (4.364)$$

spacelike regle yüzeyi için  $O = t_1$  seçelim.  $S_n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \Big|_{v=0}$ ,  $S_b = S_n \times O$  olmak

üzere bu vektörleri hesaplayalım:

(4.301) den  $\alpha(s) = \beta_{t_1}(s) + \mu_{t_1}(s)t_1(s)$  nin türevi alınıp (4.303) ve  $t_1' = -\lambda r_1$

eşitliğinin kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla,

$$S_n = \frac{-\lambda\mu_{t_1}k_1 + \Gamma_{t_1}r_1}{\sqrt{\Gamma_{t_1}^2 - (\lambda\mu_{t_1})^2}} \quad (4.365)$$

bulunur.  $S_b = S_n \times O$  olması kullanılarak

$$S_b = \frac{-\lambda\mu_{t_1}r_1 + \Gamma_{t_1}k_1}{\sqrt{\Gamma_{t_1}^2 - (\lambda\mu_{t_1})^2}} \quad (4.366)$$

elde edilir. Böylece yüzeyin  $v=0$  daki yüzey çatısı  $\{O = t_1, S_n, S_b\}$  dir.

$\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Burada  $O$  yönlendirme vektörü,  $A$  ilerleme vektörü,  $N$  normal vektör olarak adlandırılır.  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ,

a)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör

b)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör

şeklinde iki türlü tanımlanabilir.

Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

**a)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = -N$ ,  $A \times N = -O$ ,  $N \times O = A$  dir.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.367)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.368)$$

dır.  $S_b$  ile  $k_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.369)$$

dır. (4.367) ve (4.369) dan

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.370)$$

dır. Burada  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ile  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.371)$$

şeklinde olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.372)$$

şeklinde elde edilir.



**b)  $O = t_1$  spacelike vektör, A spacelike vektör, N timelike vektör olması durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = N$ ,  $A \times N = -O$ ,  $N \times O = -A$  dır.

$S_n$  ile A arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.373)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.374)$$

dır.  $S_b$  ile  $k_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.375)$$

dır. (4.373) ve (4.375) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.376)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.377)$$

olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.378)$$

elde edilir.

#### 4.2.1.4. ii) Araç çatının diferensiyel hareketi

Bu bölümde de 4.2.1.4.i) bölümünde yaptığımız açıklamalar geçerli olup,  $\{O, A, N\}$  araç çatısının diferensiyel hareketini 4.2.1.3 de belirttiğimiz a) ve b) durumları için sırasıyla inceleyelim:

**a)  $O = t_1$  spacelike vektör, A timelike vektör, N spacelike vektör olması durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.288) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.379)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.292) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.380)$$

olur. Burada (4.297) kullanılarak (4.380) in  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)(\cosh \theta r_1 - \sinh \theta k_1) + \mu t_1 + \Delta(-\sinh \theta r_1 + \cosh \theta k_1) \quad (4.381)$$

şeklinde elde edilir. Burada (4.372) nin kullanılması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = \mu O + ((-\Gamma + \mu' R) \cosh \theta + \Delta \sinh \theta) \sinh \Sigma + (-\Gamma + \mu' R) \cosh \theta + \Delta \sinh \theta \cosh \Sigma) A + (((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta) \cosh \Sigma + ((\Gamma + \mu' R) \sinh \theta - \Delta \cosh \theta) \sinh \Sigma) N \quad (4.382)$$

şeklinde elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden pozisyonel varyasyonunu belirlemek için, (4.371) in diferensiyeli alınıp (4.300) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda \sinh \Sigma & \cosh \Sigma(\theta' + \Sigma') & \sinh \Sigma(\theta' + \Sigma') \\ \lambda \cosh \Sigma & \sinh \Sigma(\theta' + \Sigma') & \cosh \Sigma(\theta' + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.383)$$

elde edilir. Burada (4.372) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \sinh \Sigma & -\lambda \cosh \Sigma \\ \lambda \sinh \Sigma & 0 & \theta' + \Sigma' \\ \lambda \cosh \Sigma & \theta' + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.384)$$

şeklinde elde edilir. Buradan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının birinci dereceden açılal varyasyonunun,  $\lambda$  Lancret eğriliğine ve çatılar arasındaki dönme açılarına bağlı olduğu görülür. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere, 4.1. bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak

$$U_A = -(\theta' + \Sigma')O - \lambda \cosh \Sigma A + \lambda \sinh \Sigma N \quad (4.385)$$

ve  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = -(\theta' + \Sigma')t_1 - \lambda k_1 \quad (4.386)$$

elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{t_1}$  Darboux vektörü cinsinden elde edilebilir:

(4.386) da (4.356) kullanılırsa

$$U_A = -U_{t_1} - \Sigma' t_1$$

elde edilmiş olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açılal hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

**b)  $O = t_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması**

### **durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.288) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.387)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.292) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.388)$$

olup burada (4.297) kullanılarak  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (-(\Gamma + \mu' R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta) k_1 + ((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta) r_1 + \mu t_1 \quad (4.389)$$

elde edilir. Burada (4.378) in kullanılmasıyla  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = \mu O + (((\Gamma + \mu' R) \cosh \theta - \Delta \sinh \theta) \cosh \Sigma + ((\Gamma + \mu' R) \sinh \theta - \Delta \cosh \theta) \sinh \Sigma) A + ((-\Gamma + \mu' R) \cosh \theta + \Delta \sinh \theta) \sinh \Sigma + (-\Gamma + \mu' R) \sinh \theta + \Delta \cosh \theta) \cosh \Sigma) N \quad (4.390)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden pozisyonel varyasyonunu belirlemek için (4.377) nin diferensiyeli alınıp, (4.300) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda \cosh \Sigma & \sinh \Sigma (\theta' + \Sigma') & \cosh \Sigma (\theta' + \Sigma') \\ \lambda \sinh \Sigma & \cosh \Sigma (\theta' + \Sigma') & \sinh \Sigma (\theta' + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ r_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.391)$$

elde edilir. Burada (4.378) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \cosh \Sigma & \lambda \sinh \Sigma \\ \lambda \cosh \Sigma & 0 & \theta' + \Sigma' \\ \lambda \sinh \Sigma & \theta' + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.392)$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere

$$U_A = (\theta' + \Sigma') O - \lambda \sinh \Sigma A + \lambda \cosh \Sigma N \quad (4.393)$$

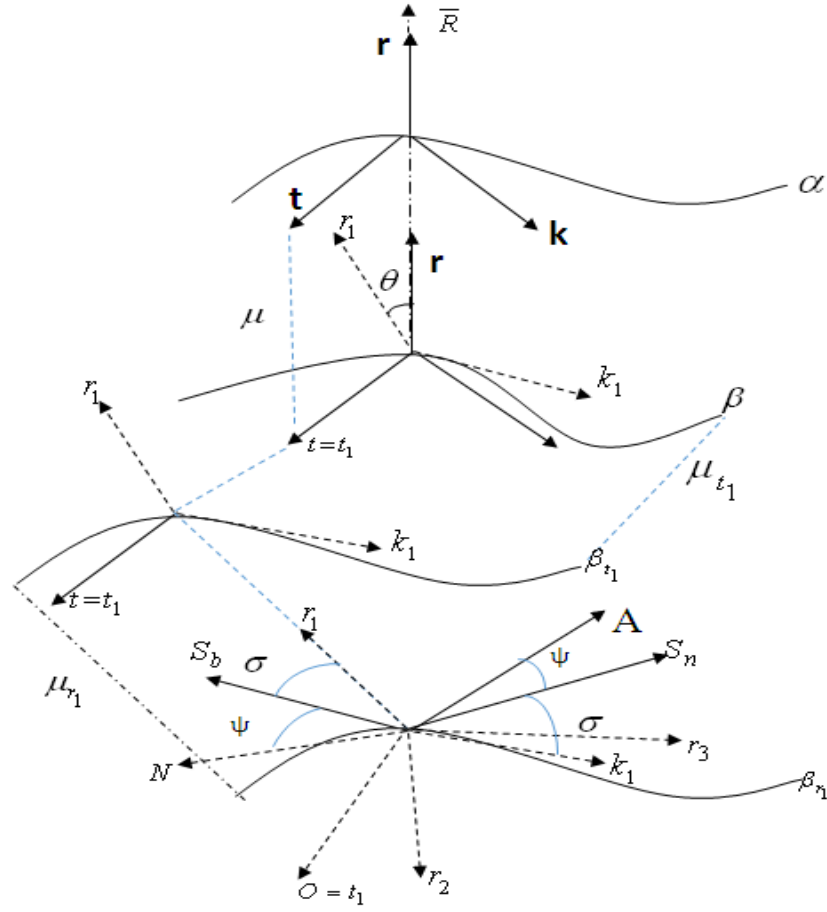
ve  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = (\theta' + \Sigma') t_1 + \lambda k_1 \quad (4.394)$$

elde edilir. Bu denklem (4.386) nın ters işaretlisi olduğundan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{t_1}$  Darboux vektörü cinsinden

$$U_A = U_{t_1} + \Sigma' t_1$$

şeklinde olduğu kolayca görülür. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açısal hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.



Şekil 4.7. Çatılar arasındaki ilişki

**4.2.2. Durum:  $r$  üreteç vektörü spacelike,  $t$  merkez normal vektörü timelike ve  $k$  merkez teğet vektörü spacelike olması durumunda spacelike regle yüzeyin geliştirilmiş robot uç hareketi**

(4.288) denkleminde  $s$  ye göre türev alınır,

$$\beta'(s) = \alpha'(s) - \mu'(s)\bar{R}(s) - \mu(s)\bar{R}'(s) \quad (4.395)$$

olur. Burada  $\langle \beta'(s), \bar{R}'(s) \rangle = 0$  olması kullanılarak

$$\mu(s) = -\langle \alpha'(s), \bar{R}'(s) \rangle \quad (4.396)$$

elde edilir.

$\beta$  striksiyon eğrisinin teğet vektörü 4.1. bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak

$$\beta'(s) = \Gamma(s)r(s) + \Delta(s)k(s) \quad (4.397)$$

dir. Bu ise striksiyon eğrisinin üreteç üçlüsüne göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonudur. Burada

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R} \rangle - \mu' R \\ \Delta = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup bu fonksiyonlara (4.287) spacelike regle yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsü için türev formülleri

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{R}t \\ t' = \frac{1}{R}(r + \gamma k) \\ k' = \frac{\gamma}{R}t \end{cases} \quad (4.398)$$

şeklinde olup burada  $\gamma = \langle \bar{R}'', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle$  ifadesi (4.287) spacelike regle yüzeyinin  $\bar{R}$  doğrultman vektörünün çizdiği eğrinin **geodezik eğriliğidir**.

$\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünün Darboux vektörü  $U_r$  olmak üzere

$$U_r = t \times t' = \frac{1}{R}(-\gamma r + k) \quad (4.399)$$

dir.

**Tanım 4.2.7:**

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R} \rangle - \mu' R \\ \Delta = \frac{1}{R} \langle \alpha', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle \\ \gamma = \langle \bar{R}', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle \end{cases}$$

ifadelerine (4.287) spacelike regle yüzeyinin **eğrilik fonksiyonları** denir.

Ayrıca (4.287) spacelike regle yüzeyin Lancret eğriliği,

$$\lambda = \|t'\| = \sqrt{|\langle t', t' \rangle|} = \sqrt{\left| \frac{1 + \gamma^2}{R^2} \right|} \quad (4.400)$$

dir.

#### 4.2.2.1 Geliştirilmiş çatının oluşturulması

Bu bölümde robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürülerek  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı tanımlanacaktır. Ayrıca bu çatının  $k_1$  üreteç vektörü  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısının Darboux vektörüne karşılık gelmektedir.

$\{r, t, k\}$  üreteç çatısını  $\{r, k\}$  düzleminde  $\theta = \theta(s)$  Darboux açısı kadar döndürelim:

Dönme denklemi

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ t_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} \quad (4.401)$$

dir. Buradan

$$\begin{bmatrix} r \\ t \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ t_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.402)$$

yazılır.

$\beta$  striksiyon eğrisi üzerine kurulan  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı için elde edilen (4.2.2.4) türev formüllerinden eğriliği  $\frac{1}{R}$ , burulması  $\frac{\gamma}{R}$  olan bir  $(\beta_1)$  eğrisi daima bulunabilir.

(4.399), (4.401) ve  $U=k_1$  olması kullanılarak

$$\cos \theta = \frac{1}{R}, \quad \sin \theta = -\frac{\gamma}{R}$$

elde edilir.

Total (Lancret) eğrilik tanımı gereğince  $\lambda = \|t\| = \sqrt{\frac{1+\gamma^2}{R^2}}$  olup  $\gamma = -\tan \theta$  olması

kullanılırsa  $R^2 = \frac{1}{\lambda^2 \cos^2 \theta}$  dır.

Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir:

**Sonuç 4.2.8:**  $\{r, t, k\}$  üreteç üçlüsünü üzerinde bulunduran  $(\beta_1)$  eğrisinin,

eğriliğinin Lancret eğriliğine bağlı ifadesi

$$\frac{1}{R} = \lambda \cos \theta \quad (4.403)$$

burulmasının Lancret eğriliğine bağlı ifadesi

$$\frac{\gamma}{R} = -\lambda \sin \theta \quad (4.404)$$

dır.

Şimdi  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı için türev formüllerini hesaplayalım:

(4.355) eşitliklerinin diferensiyeli alınır, (4.357) ve (4.358) kullanılırsa  $\{k_1, r_1, t_1\}$  ortonormal sistemi için



$$\begin{cases} k_1' = \theta' r_1 \\ r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1 \\ t_1' = \lambda r_1 \end{cases} \quad (4.405)$$

türev formülleri elde edilir. Burada  $k_1$  spacelike üreteç vektör,  $r_1$  spacelike merkez normal vektör,  $t_1$  timelike merkez teğet vektör olarak adlandırılır. Ayrıca burada  $\theta'$  ve  $\lambda$  sırasıyla (4.287) spacelike regle yüzeyinin eğriliği ve Lancret eğriliğidir.

Geliştirilmiş çatının herbir vektörü robot hareketi boyunca regle yüzey oluşturur.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısında eğer  $k_1$  spacelike üreteç vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$$

yüzeyini alırsak görüleceği üzere burada  $\alpha$  spacelike eğri olduğundan bu yüzey spacelike regle yüzeydir. O halde 4.1.2.3 de bahsedeceğimiz robot yörünge yüzeyimizde spacelike regle yüzey olur.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısında eğer  $t_1$  timelike merkez teğet vektörünün oluşturduğu

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vt_1(s)$$

yüzeyini alırsak görüleceği üzere burada  $\alpha$  spacelike eğri olduğundan bu yüzey timelike regle yüzeydir. Ancak  $O=t_1$  in oluşturduğu yüzeyi robot yörünge yüzeyi olarak alamayız. Çünkü  $O=t_1$  timelike vektör,  $S_n$  spacelike regle yüzeyin normal vektörü olup timelike vektör olduğundan bu durumda 4.1.2.3 de bahsedeceğimiz  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı  $IR_1^3$  de tanımlanamaz.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısında,  $r_1$  spacelike merkez normal vektörünün oluşturduğu yüzey alınırsa bu yüzey spacelike merkez normal regle yüzey olarak adlandırılır ve bu yüzey ve özellikleri 4.1.2.2 de ayrıca incelenecektir.

Şimdi elde ettiğimiz  $\{k_1, r_1, t_1\}$  çatısının  $k_1$  vektörünün oluşturduğu yüzeyi alalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$$

olup bu yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\beta_{k_1}(s) = \alpha(s) - \mu_{k_1}(s)k_1(s) \quad (4.406)$$

dır. Buradan diferensiyel alınıp, (4.356),  $k_1' = \theta' r_1$  ve  $\langle \beta_{k_1}', k_1' \rangle = 0$  olması kullanılarak,

$$\mu_{k_1} = \frac{\Gamma \cos \theta - \Delta \sin \theta + \mu' R \cos \theta}{\theta'} \quad (4.407)$$

elde edilir. Burada  $\Gamma$  ve  $\Delta$ , Tanım 4.2.1 de ifade edilen spacelike regle yüzeyin eğrilik fonksiyonlarıdır.

(4.406) striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.406) nın diferensiyeli alınıp, (4.397), (4.402),  $k_1' = \theta' r_1$  ve (4.407) in kullanılmasıyla, striksiyon eğrisinin hareketi boyunca  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre pozisyonel değişimi

$$\beta_{k_1}'(s) = \Gamma_{k_1} k_1 + \mu t_1 \quad (4.408)$$

elde edilir. Burada

$$\Gamma_{k_1} = \Gamma \sin \theta + \Delta \cos \theta + \mu' R \sin \theta - \mu_{k_1}'$$

olup  $t_1$  üreteç vektörünün oluşturduğu yüzeyi karakterize eden eğrilik fonksiyonudur.

#### 4.2.2.2 $r_1$ merkez normal vektörünün oluşturduğu spacelike merkez normal yüzeyi ve doğal çatı

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı striksiyon eğrisi üzerinde hareket ederken  $r_1$  merkez normal vektörü bir başka regle yüzey üretir.  $\beta_{k_1}$  striksiyon eğrisi üzerinde merkez normal vektörünün oluşturduğu

$$\varphi_{r_1}(s, v) = \beta_{k_1}(s) + v r_1(s) \quad (4.409)$$

yüzeyine spacelike merkez normal regle yüzey denir. Bu spacelike merkez normal regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\beta_{r_1}(s) = \beta_{k_1}(s) - \mu_{r_1}(s) r_1(s) \quad (4.410)$$

dır. Burada  $\mu_{r_1}$  merkez normal vektörü boyunca striksiyon eğrileri arasındaki uzaklık olup (4.410) un diferensiyellenmesi, striksiyon eğrisinin tanımından  $\langle \beta_{r_1}', r_1' \rangle = 0$  olması,  $r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1$  ve (4.408) in kullanılmasıyla

$$\mu_{r_1}(s) = -\frac{\lambda\mu + \theta'\Gamma_{k_1}}{\theta'^2 - \lambda^2} \quad (4.411)$$

elde edilir.

Böylece  $\beta_{k_1}$  striksiyon eğrisi üzerinde  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı kurulabilir.  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için iki durum söz konusudur. İlk olarak,  $r_2$  timelike vektör,  $r_1$  ve  $r_3$  spacelike vektör; daha sonra  $r_1$  ve  $r_2$  spacelike vektör,  $r_3$  timelike vektör olması durumu incelenecektir.

**i)  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için  $r_2$  timelike vektör,  $r_1$  ve  $r_3$  spacelike vektör olması hali**

Bu durumda  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{k_1'}{\theta}, & \kappa = \|r_1'\| \\ r_2 = \frac{r_1'}{\kappa} \\ r_3 = r_2 \times r_1 \end{cases} \quad (4.412)$$

Ayrıca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısı için  $r_1 \times r_2 = -r_3$ ,  $r_2 \times r_3 = -r_1$ ,  $r_3 \times r_1 = r_2$  dir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı ile  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının  $r_1$  merkez normal vektörleri ortaktır ve bu çatı vektörleri arasında merkez normal vektörünün dönme açısı  $\phi$  olmak üzere

$$\begin{cases} k_1 = \sinh \phi r_2 + \cosh \phi r_3 \\ t_1 = \cosh \phi r_2 + \sinh \phi r_3 \end{cases} \quad (4.413)$$

ilişkisi vardır. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.414)$$

dır. Bu matrisin ters formu

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \phi & 0 & \cosh \phi \\ \cosh \phi & 0 & -\sinh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.415)$$

dır.

(4.412) den  $r_1' = \kappa r_2$  ve (4.415) den  $r_2 = \cosh \phi t_1 - \sinh \phi k_1$  olup  $r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1$  olması kullanılarak

$$\begin{cases} \cosh \phi = \frac{\lambda}{\kappa} \\ \sinh \phi = \frac{\theta'}{\kappa} \end{cases} \quad (4.416)$$

elde edilir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatının Darboux vektörü

$$\begin{aligned} U_{k_1} &= r_1 \times r_1' \\ &= r_1 \times (-\theta' k_1 + \lambda t_1) \\ &= \theta' t_1 - \lambda k_1 \end{aligned} \quad (4.417)$$

olup spacelike regle yüzeyin  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre açılmal hızıdır.

Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü doğal çatı cinsinden elde edilebilir:

(4.416) nın (4.415) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\theta' & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -\theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.418)$$

elde edilip buradan

$$r_3 = \frac{1}{\kappa} (\lambda k_1 - \theta' t_1)$$

olup (4.417) nin kullanılmasıyla

$$U_{k_1} = -\kappa r_3 \quad (4.419)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.2.9 :** Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ile doğal çatının binormal vektörü ters doğrultudadır.

Spacelike merkez normal regle yüzeyinin  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.410) un diferensiyeli alınıp, (4.408), (4.411), (4.418) in ters formu,  $r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1$  ve  $\kappa = \|r_1'\|$  olması kullanılarak striksiyon eğrisinin hareketi boyunca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre pozisyonel değişimi aşağıdaki gibidir:

$$\beta_{r_1}' = -\mu_{r_1}' r_1 + \Delta_{r_1} r_3 \quad (4.420)$$

elde edilir. Burada

$$\Delta_{r_1} = \frac{\mu\theta' + \lambda\Gamma k_1}{\kappa} \quad (4.421)$$

dır.  $\mu_{r_1}'$  ve  $\Delta_{r_1}$  fonksiyonları spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik fonsiyonları olup Tanım 4.2.1 de ifade edilen  $\Gamma$  ve  $\Delta$  fonksiyonlarıyla aynı rolü oynar.

4.1. bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının türev formülleri matris formunda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.422)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\kappa = \|r_1'\|$  ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olup sırasıyla  $\varphi_{r_1}$  spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasıdır.

Şimdi  $\varphi_{r_1}$  spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasının açıyla olan ilişkisini elde edelim:

(4.416) dan  $\kappa = \theta' \operatorname{cosech} \phi$  dır.

(4.415) den  $r_2 = \cosh \phi t_1 - \sinh \phi k_1$  in türevi alınıp ,  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olması kullanılıp gerekli hesaplamalar yapılarak  $\tau = -\phi'$  elde edilir.

**Sonuç 4.2.10:** Spacelike merkez normal regle yüzeyin eğrilik ve burulmasının merkez normal vektörünün dönme açısına bağlı ifadeleri

$$\kappa = \theta' \operatorname{cosec} h\phi, \quad \tau = -\phi' \quad (4.423)$$

şeklinde yazılabilir.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının Darboux vektörü,

$$\begin{aligned} U_{r_2} &= r_2 \times r_2' \\ &= r_2 \times (\kappa r_1 + \tau r_3) \\ &= -\tau r_1 + \kappa r_3 \end{aligned} \quad (4.424)$$

dır. Bu ise spacelike merkez normal regle yüzeyinin  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre açısal hızıdır.

(4.417) denklemi ile ifade edilen geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ve (4.424) ile ifade edilen doğal çatının Darboux vektörü, sırasıyla spacelike regle yüzeyin ve spacelike merkez normal regle yüzeyin açısal hareketini tanımlar.

(4.424) de (4.419) kullanılırsa spacelike merkez normal regle yüzeyinin açısal hızı ile spacelike regle yüzeyin açısal hızı arasında

$$U_{r_2} = -U_{k_1} - \tau r_1$$

ilişkisi vardır. Böylece doğal çatının geliştirilmiş çatıya göre açısal hareketi,  $r_2$  vektörü civarında dönmesidir.

#### 4.2.2.3. i) Çatılar arasındaki ilişki

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Yüzeyin  $v=0$  noktasındaki yüzey çatısı  $\{O, S_n, S_b\}$  olup, burada  $O$  yönlendirme vektörü spacelike,  $S_n$ ,  $v=0$  da yüzey normali timelike vektör,  $S_b$  binormal vektörü spacelike vektördür. Yönlendirme vektörü  $k_1$  üreteç vektörü yönündedir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı üzerinde robot hareketini tanımlayalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s) \quad (4.425)$$

spacelike regle yüzeyi için  $O = k_1$  seçelim.  $S_n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \Big|_{v=0}$ ,  $S_b = S_n \times O$  olmak

üzere bu vektörleri hesaplayalım:

(4.425) in sırasıyla s ve v ye göre türevleri alınıp, burada (4.406) nın türevi , (4.408), (4.405) in kullanılması ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla,

$$S_n = -\frac{\mu r_1 + \mu_{k_1} \theta' t_1}{\sqrt{\mu^2 - (\mu_{k_1} \theta')^2}} \quad (4.426)$$

ve  $S_b = S_n \times O$  olması kullanılarak

$$S_b = \frac{\mu t_1 + \mu_{k_1} \theta' r_1}{\sqrt{\mu^2 - (\mu_{k_1} \theta')^2}} \quad (4.427)$$

elde edilir. Böylece yüzeyin  $v=0$  daki yüzey çatısı  $\{O = k_1, S_n, S_b\}$  dir.

$\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Burada O yönlendirme vektörü, A ilerleme vektörü, N normal vektör olarak adlandırılır.

$\{O, A, N\}$  araç çatısı ,

a)  $O = k_1$  spacelike vektör, A spacelike vektör, N timelike vektör

b)  $O = k_1$  spacelike vektör, A timelike vektör, N spacelike vektör

şeklinde iki türlü tanımlanabilir.

Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

**a)  $O = k_1$  spacelike vektör, A spacelike vektör, N timelike vektör olması durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = N$  ,  $A \times N = -O$  ,  $N \times O = -A$  dir.

$S_n$  ile A arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.428)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.429)$$

dır.  $S_b$  ile  $t_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.430)$$

dır. (4.428) ve (4.430) dan

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.431)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ile  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.432)$$

şeklinde olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.433)$$

şeklinde elde edilir.

**b)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = -N$ ,  $A \times N = -O$ ,  $N \times O = A$  dır.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.434)$$

olup ters formu



$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.435)$$

dır.  $S_b$  ile  $t_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.436)$$

dır. (4.434) ve (4.436) dan

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.437)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.438)$$

olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.439)$$

elde edilir.

#### 4.2.2.4. i) Araç çatının diferensiyel hareketi

$\{O, A, N\}$  araç çatısının diferensiyel hareketini 4.2.2.3 de belirttiğimiz a) ve b) durumları için sırasıyla inceleyelim:

a)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması

**durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.288) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.440)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.397) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu'R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.441)$$

olup burada (4.402) kullanılarak  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu'R)(\cos \theta r_1 + \sin \theta k_1) + \mu t_1 + \Delta(-\sin \theta r_1 + \cos \theta k_1) \quad (4.442)$$

şeklinde elde edilir. Burada (4.433) ün kullanılması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & ((\Gamma + \mu'R) \sin \theta + \Delta \cos \theta)O + ((\Gamma + \mu'R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) \cosh \Sigma - \mu \sinh \Sigma) A \\ & + ((-\Gamma + \mu'R) \cos \theta + \Delta \sin \theta) \sinh \Sigma + \mu \cosh \Sigma) N \end{aligned} \quad (4.443)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden pozisyonel varyasyonunu belirlemek için, (4.432) nin diferensiyeli alınıp (4.405) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ -\theta' \cosh \Sigma & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') \\ -\theta' \sinh \Sigma & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.444)$$

elde edilir. Burada (4.433) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' \cosh \Sigma & -\theta' \sinh \Sigma \\ -\theta' \cosh \Sigma & 0 & \lambda + \Sigma' \\ -\theta' \sinh \Sigma & \lambda + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.445)$$

şeklinde elde edilir. Buradan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının birinci dereceden açısal varyasyonunun,  $\lambda$  Lancret eğriliğine ve çatılar arasındaki dönme açılarına bağlı olduğu görülür. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere, 4.1. bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak

$$U_A = (\lambda + \Sigma')O + \theta' \sinh \Sigma A - \theta' \cosh \Sigma N \quad (4.446)$$

ve  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = (\lambda + \Sigma)k_1 - \theta' t_1 \quad (4.447)$$

dır. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{k_1}$  Darboux vektörü cinsinden elde edilebilir:

(4.447) de (4.417) kullanılırsa

$$U_A = -U_{k_1} + \Sigma' k_1$$

elde edilmiş olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açılma hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

**b)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması**

**durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.288) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.448)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.397) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.449)$$

olup burada (4.402) kullanılarak (4.449) un  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)(\cos \theta r_1 + \sin \theta k_1) + \mu t_1 + \Delta(-\sin \theta r_1 + \cos \theta k_1) \quad (4.450)$$

elde edilir. Burada (4.439) un kullanılmasıyla ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & ((\Gamma + \mu' R) \sin \theta + \Delta \cos \theta)O + ((-\Gamma + \mu' R) \cos \theta + \Delta \sin \theta) \sinh \Sigma + \mu \cosh \Sigma)A \\ & + (((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) \cosh \Sigma - \mu \sinh \Sigma)N \end{aligned} \quad (4.451)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden pozisyonel varyasyonunu belirlemek için, (4.438) in diferensiyeli alınıp (4.405) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ -\theta' \sinh \Sigma & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') \\ -\theta' \cosh \Sigma & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.452)$$

elde edilir. Burada (4.439) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta' \sinh \Sigma & \theta' \cosh \Sigma \\ -\theta' \sinh \Sigma & 0 & \lambda + \Sigma' \\ -\theta' \cosh \Sigma & \lambda + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.453)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere

$$U_A = -(\lambda + \Sigma')O + \theta' \cosh \Sigma A - \theta' \sinh \Sigma N \quad (4.454)$$

ve  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = -(\lambda + \Sigma')k_1 + \theta' t_1 \quad (4.455)$$

elde edilir. Bu denklem (4.447) nin ters işaretlisi olduğundan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{k_1}$  Darboux vektörü cinsinden

$$U_A = U_{k_1} - \Sigma' k_1$$

şeklinde olduğu kolayca görülür. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açılmal hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

ii)  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistemi için  $r_1$  ve  $r_2$  spacelike vektör,  $r_3$  timelike vektör olması hali

Bu durumda  $\{r_1, r_2, r_3\}$  ortonormal sistem doğal çatısı aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{k_1'}{\theta'} \\ r_2 = \frac{r_1'}{\kappa}, \quad \kappa = \|r_1'\| \\ r_3 = r_1 \times r_2 \end{cases} \quad (4.456)$$

Ayrıca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısı için  $r_1 \times r_2 = r_3$ ,  $r_2 \times r_3 = -r_1$ ,  $r_3 \times r_1 = -r_2$  dir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı ile  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının  $r_1$  merkez normal vektörleri ortaktır ve bu çatı vektörleri arasında merkez normal vektörünün dönme açısı  $\phi$  olmak üzere

$$\begin{cases} k_1 = \cosh \phi r_2 + \sinh \phi r_3 \\ t_1 = \sinh \phi r_2 + \cosh \phi r_3 \end{cases} \quad (4.457)$$

ilişkisi vardır. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.458)$$

dır. Bu matrisin ters formu

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh \phi & 0 & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & 0 & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.459)$$

dır.

(4.456) dan  $r_1' = \kappa r_2$  ve (4.459) dan  $r_2 = -\sinh \phi t_1 + \cosh \phi k_1$  olup  $r_1' = -\theta' k_1 + \lambda t_1$  olması kullanılarak

$$\begin{cases} \cosh \phi = -\frac{\theta'}{\kappa} \\ \sinh \phi = -\frac{\lambda}{\kappa} \end{cases} \quad (4.460)$$

elde edilir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatının Darboux vektörü

$$\begin{aligned} U_{k_1} &= r_1 \times r_1' \\ &= r_1 \times (-\theta' k_1 + \lambda t_1) \\ &= \theta' t_1 - \lambda k_1 \end{aligned} \quad (4.461)$$

olup spacelike regle yüzeyin  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre açılma hızıdır.

Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü, doğal çatı cinsinden elde edilebilir:

(4.460) ün (4.459) da yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\theta' & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -\theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.462)$$

elde edilip buradan

$$r_3 = \frac{1}{\kappa} (\lambda k_1 - \theta' t_1)$$

olup (4.461) in kullanılmasıyla

$$U_{k_1} = -\kappa r_3 \quad (4.463)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.2.11:** Geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ile doğal çatının binormal vektörü ters doğrultudadır.

Spacelike merkez normal regle yüzeyinin  $\beta_{r_1}$  striksiyon eğrisinin teğetini hesaplayalım:

(4.410) un diferensiyeli alınıp, (4.408), (4.427), (4.462) nin ters formu,  $r_1' = \theta' k_1 + \lambda t_1$

ve  $\kappa = \|r_1'\|$  olması kullanılarak striksiyon eğrisinin hareketi boyunca  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre pozisyonel değişimi aşağıdaki gibidir:

$$\beta_{r_1}' = -\mu_{r_1}' r_1 + \Delta_{r_1} r_3 \quad (4.464)$$

elde edilir. Burada

$$\Delta_{r_1} = -\frac{\lambda \Gamma_{t_1} + \Delta_{t_1} \theta'}{\kappa} \quad (4.465)$$

dır.  $\mu_{r_1}'$  ve  $\Delta_{r_1}$  fonksiyonları spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik fonksiyonları olup Tanım 4.2.1 de ifade edilen  $\Gamma$  ve  $\Delta$  fonksiyonlarıyla aynı rolü oynar.

4.1. bölümdeki gibi benzer işlemler yapılarak  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının türev formülleri matris formunda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.466)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\kappa = \|r_1'\|$  ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olup sırasıyla  $\varphi_{r_1}$  spacelike regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasıdır.

Şimdi  $\varphi_{r_1}$  spacelike merkez normal regle yüzeyinin eğrilik ve burulmasının açıyla olan ilişkisini elde edelim:

(4.460) dan  $\kappa = -\theta' \operatorname{sech} \phi$  elde edilir.

(4.459) dan  $r_2 = -\sinh \phi t_1 + \cosh \phi k_1$  olup türevi alınıp,  $r_3 = \cosh \phi t_1 - \sinh \phi k_1$  ve  $\tau = \langle r_2', r_3 \rangle$  olması kullanılarak  $\tau = \phi'$  elde edilir.

**Sonuç 4.2.12:** Spacelike merkez normal regle yüzeyin eğrilik ve burulmasının merkez normal vektörünün dönme açısına bağlı ifadeleri

$$\kappa = -\theta' \operatorname{sech} \phi, \quad \tau = \phi' \quad (4.467)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan görüleceği üzere spacelike merkez normal regle yüzeyin burulması, merkez normal vektörünün açısal hızıyla aynı doğrultudadır.

$\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısının Darboux vektörü,

$$\begin{aligned} U_{r_2} &= r_2 \times r_2' \\ &= r_2 \times (-\kappa r_1 - \tau r_3) \\ &= \tau r_1 + \kappa r_3 \end{aligned} \quad (4.468)$$

dır. Bu ise spacelike merkez normal regle yüzeyinin  $\{r_1, r_2, r_3\}$  doğal çatısına göre açısıl hızıdır.

(4.461) denklemi ile ifade edilen geliştirilmiş çatının Darboux vektörü ve (4.468) ile ifade edilen doğal çatının Darboux vektörü, sırasıyla spacelike regle yüzeyin ve spacelike merkez normal regle yüzeyin açısıl hareketini tanımlar.

(4.468) de (4.463) kullanılırsa spacelike merkez normal regle yüzeyinin açısıl hızı ile spacelike regle yüzeyin açısıl hızı arasında

$$U_{r_2} = -U_{k_1} + \tau r_1$$

ilişkisi vardır. Böylece doğal çatının geliştirilmiş çatıya göre açısıl hareketi,  $r_2$  vektörü civarında dönmesidir.

#### 4.2.2.3 ii) Çatılar arasındaki ilişki

4.2.1.3.i) bölümünde yapılan açıklamalar bu bölüm için de geçerli olup, ilk olarak robot hareketinin yörüngesini belirleyen yüzey üzerinde  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı ve  $\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Yüzeyin  $v=0$  noktasındaki yüzey çatısı  $\{O, S_n, S_b\}$  olup, burada  $O$  yönlendirme vektörü spacelike,  $S_n$ ,  $v=0$  da yüzey normali timelike,  $S_b$  binormal vektörü spacelike vektördür.  $O$  yönlendirme vektörü  $k_1$  üreteç vektörü yönündedir. Ayrıca  $\{O, S_n, S_b\}$  yüzey çatısı için  $O \times S_n = -S_b$ ,  $S_n \times S_b = -O$ ,  $S_b \times O = S_n$  dir.

$\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı üzerinde robot hareketini tanımlayalım:

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s) \quad (4.469)$$

spacelike regle yüzeyi için  $O = k_1$  seçelim.  $S_n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} \Big|_{v=0}$ ,  $S_b = S_n \times O$  olmak üzere bu vektörleri hesaplayalım:

(4.469) eşitliğinin sırasıyla  $s$  ve  $v$  ye göre türevi alınıp, burada (4.406) dan  $\alpha(s) = \beta_{k_1}(s) + \mu_{k_1}(s)k_1(s)$  nin türevi, (4.408),  $k_1' = \theta' r_1$  eşitliğinin kullanılması

ve gerekli hesaplamaların yapılmasıyla



$$S_n = \frac{-\mu r_1 - \theta' \mu_{k_1} t_1}{\sqrt{\mu^2 - (\theta' \mu_{k_1})^2}} \quad (4.470)$$

bulunur.  $S_b = S_n \times O$  olması kullanılarak

$$S_b = \frac{\mu t_1 + \theta' \mu_{k_1} r_1}{\sqrt{\mu^2 - (\theta' \mu_{k_1})^2}} \quad (4.471)$$

elde edilir. Böylece yüzeyin  $v=0$  daki yüzey çatısı  $\{O = k_1, S_n, S_b\}$  dir.

$\{O, A, N\}$  araç çatısını tanımlayalım. Burada  $O$  yönlendirme vektörü,  $A$  ilerleme vektörü,  $N$  normal vektör olarak adlandırılır.  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ,

a)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör

b)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör

şeklinde iki türlü tanımlanabilir.

Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

**a)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması durumu**

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = -N$  ,  $A \times N = -O$  ,  $N \times O = A$  dir.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.472)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.473)$$

dir.  $S_b$  ile  $t_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.474)$$

dır. (4.472) ve (4.474) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.475)$$

dır. Burada  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse  $\{O, A, N\}$  araç çatısı ile  $\{t_1, r_1, k_1\}$  geliştirilmiş çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.476)$$

şeklinde olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.477)$$

şeklinde elde edilir.

### b) $O = k_1$ spacelike vektör, $A$ spacelike vektör, $N$ timelike vektör olması durumu

Bu durumda  $\{O, A, N\}$  araç çatısı için  $O \times A = N$ ,  $A \times N = -O$ ,  $N \times O = -A$  dır.

$S_n$  ile  $A$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.478)$$

olup ters formu

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \\ 0 & \cosh \psi & -\sinh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.479)$$

dır.  $S_b$  ile  $t_1$  arasındaki açı  $\sigma$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.480)$$

dır. (4.478) ve (4.480) den

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\psi + \sigma) & \sinh(\psi + \sigma) \\ 0 & \sinh(\psi + \sigma) & \cosh(\psi + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.481)$$

olup  $\Sigma = \psi + \sigma$  denilirse

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & \sinh \Sigma \\ 0 & \sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.482)$$

olup ters formuda

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \Sigma & -\sinh \Sigma \\ 0 & -\sinh \Sigma & \cosh \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.483)$$

elde edilir.

#### 4.2.2.4. ii) Araç çatının diferensiyel hareketi

Bu bölümde de 4.2.1.4.i) bölümünde yaptığımız açıklamalar geçerli olup,  $\{O, A, N\}$  araç çatısının diferensiyel hareketini 4.2.2.3 de belirttiğimiz a) ve b) durumları için sırasıyla inceleyelim:

**a)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  timelike vektör,  $N$  spacelike vektör olması**

**durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.288) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.484)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınır ve (4.397) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.485)$$

olur. Burada (4.402) kullanılarak (4.485) in  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)(\cos \theta r_1 + \sin \theta k_1) + \mu t_1 + \Delta(-\sin \theta r_1 + \cos \theta k_1) \quad (4.486)$$

elde edilip, (4.477) nin kullanılması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Delta \cos \theta + (\Gamma + \mu' R) \sin \theta)O + ((-\Gamma + \mu' R) \cos \theta + \Delta \sin \theta) \sinh \Sigma + \mu \cosh \Sigma A + (((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) \cosh \Sigma - \mu \sinh \Sigma)N \quad (4.487)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden pozisyonel varyasyonunu belirlemek için, (4.476) in diferensiyeli alınıp (4.405) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ -\theta' \sinh \Sigma & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') \\ -\theta' \cosh \Sigma & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.488)$$

elde edilir. Burada (4.477) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta' \sinh \Sigma & \theta' \cosh \Sigma \\ -\theta' \sinh \Sigma & 0 & \lambda + \Sigma' \\ -\theta' \cosh \Sigma & \lambda + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.489)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere

$$U_A = -(\lambda + \Sigma')O + \theta' \cosh \Sigma A - \theta' \sinh \Sigma N \quad (4.490)$$

ve  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısı cinsinden

$$U_A = -(\lambda + \Sigma')k_1 + \theta' t_1 \quad (4.491)$$

elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{k_1}$  Darboux vektörü cinsinden elde edilebilir:

(4.491) de (4.461) kullanılırsa

$$U_A = U_{k_1} - \Sigma' k_1$$

elde edilmiş olur. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açısız hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmesidir.

b)  $O = k_1$  spacelike vektör,  $A$  spacelike vektör,  $N$  timelike vektör olması

**durumunda araç çatının diferensiyel hareketi**

Robot hareketinin yörüngesini belirleyen  $\alpha$  eğrisi için (4.288) den

$$\alpha(s) = \beta(s) + \mu(s) \bar{R}(s) \quad (4.492)$$

dır. Bu eşitliğin diferensiyeli alınıp, (4.397) kullanılırsa  $\alpha$  dayanak eğrisinin birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)r + \mu t + \Delta k \quad (4.493)$$

olup burada (4.402) kullanılarak  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\alpha'(s) = (\Gamma + \mu' R)(\cos \theta r_1 + \sin \theta k_1) + \mu t_1 + \Delta(-\sin \theta r_1 + \cos \theta k_1) \quad (4.494)$$

elde edilir. Burada (4.483) ün kullanılması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\{O, A, N\}$  araç çatısına göre birinci dereceden pozisyonel varyasyonu

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & (\Delta \cos \theta + (\Gamma + \mu' R) \sin \theta)O + (((\Gamma + \mu' R) \cos \theta - \Delta \sin \theta) \cosh \Sigma - \mu \sinh \Sigma)A \\ & + ((-\Gamma + \mu' R) \cos \theta + \Delta \sin \theta) \sinh \Sigma + \mu \cosh \Sigma)N \end{aligned} \quad (4.495)$$

elde edilir.

Araç çatının birinci dereceden pozisyonel varyasyonunu belirlemek için, (4.482) nin diferensiyeli alınıp (4.405) türev formüllerinin kullanılmasıyla

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' & 0 \\ -\theta' \cosh \Sigma & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') \\ -\theta' \sinh \Sigma & \cosh \Sigma (\lambda + \Sigma') & \sinh \Sigma (\lambda + \Sigma') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ r_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (4.496)$$

elde edilir. Burada (4.483) yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak  $\{O, A, N\}$  araç çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta' \cosh \Sigma & -\theta' \sinh \Sigma \\ -\theta' \cosh \Sigma & 0 & \lambda + \Sigma' \\ -\theta' \sinh \Sigma & \lambda + \Sigma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} \quad (4.497)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\{O, A, N\}$  araç çatısının Darboux vektörü  $U_A$  olmak üzere

$$U_A = (\lambda + \Sigma')O + \theta' \sinh \Sigma A - \theta' \cosh \Sigma N \quad (4.498)$$

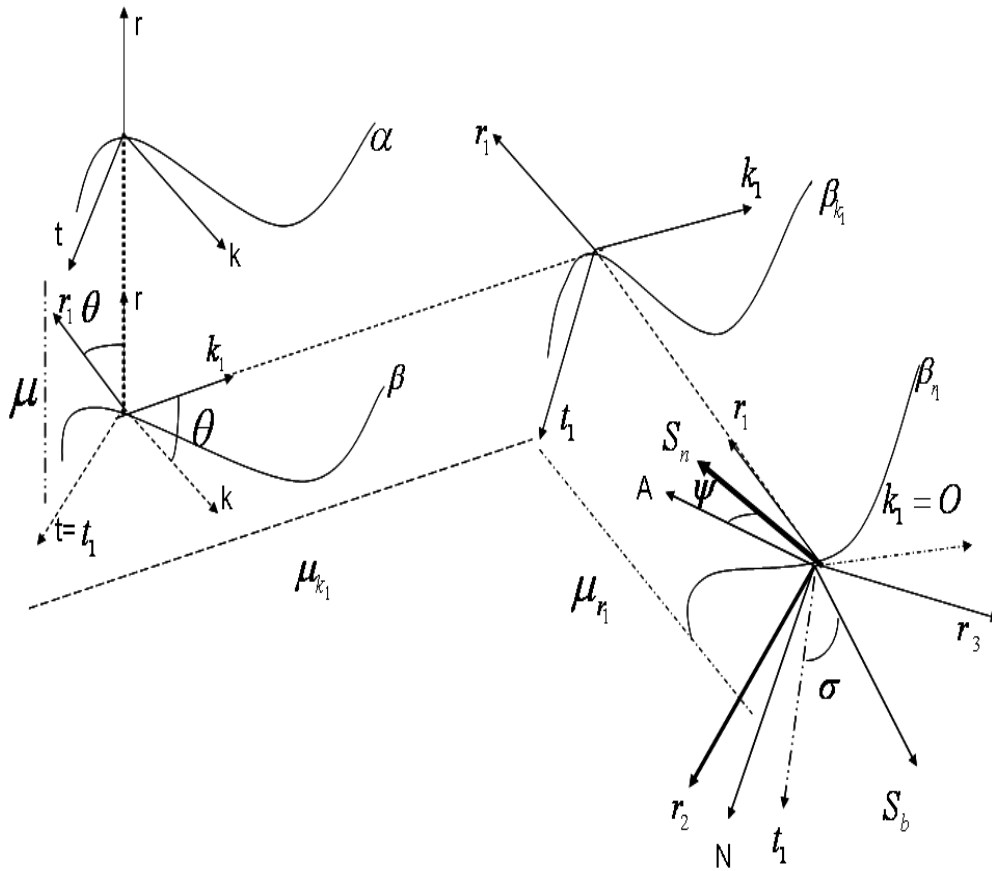
ve  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatı cinsinden

$$U_A = (\lambda + \Sigma')k_1 - \theta' t_1 \quad (4.499)$$

elde edilir. Bu denklem (4.491) in ters işaretlisi olduğundan  $\{O, A, N\}$  araç çatısının  $U_A$  Darboux vektörü,  $\{k_1, r_1, t_1\}$  geliştirilmiş çatısının  $U_{k_1}$  Darboux vektörü cinsinden

$$U_A = -U_{k_1} + \Sigma' k_1 \quad (4.500)$$

şeklinde olduğu kolayca görülür. Böylece araç çatının geliştirilmiş çatıya göre açılma hareketi,  $r_1$  vektörü civarında dönmeye benzerdir.



Şekil 4.8. Çatılar arasındaki ilişki

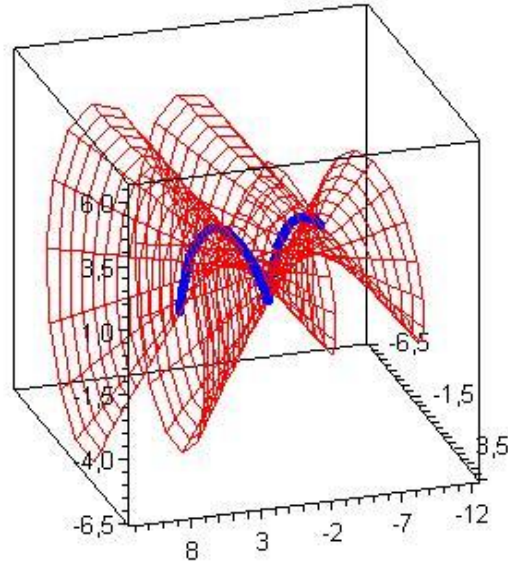
## 5. ÖRNEKLER

Bu bölümde timelike doğrultmanlı timelike regle yüzey ve ortak bir yörünge eğrisine sahip robot yörünge yüzeyi, spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzey ve ortak bir yörünge eğrisine sahip robot yörünge yüzeyi, spacelike regle yüzey ve ortak bir yörünge eğrisine sahip spacelike regle yüzeyin robot yörünge yüzey örnekleri Mapple 12 programı kullanılarak verilmiştir.

**Örnek 5.1:** Doğrultman vektörü  $\bar{R}(s) = (\sqrt{2}, \cos s, \sin s)$  (timelike) ve dayanak eğrisi  $\alpha(s) = (s, \sqrt{2} \cos s, \sqrt{2} \sin s)$  (spacelike) olan bir timelike regle yüzeyin parametrik denklemi

$$X(s, v) = (s + v\sqrt{2}, \cos s(\sqrt{2} + v), \sin s(\sqrt{2} + v))$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $-5 \leq s \leq 5$  ve  $-5 \leq v \leq 5$  alınarak bu yüzey aşağıdaki gibi çizilebilir:



Şekil 5.1. Başlangıçtaki timelike regle yüzey

Yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\beta(s) = \alpha(s) - \mu(s)\bar{R}(s), \mu = \langle \alpha', \bar{R} \rangle$$

olmak üzere, dayanak eğrisi ile striksiyon eğrisi arasındaki uzaklık

$\mu(s) = \sqrt{2}$  olarak bulunur.  $R = \|\bar{R}(s)\| = 1$  olmak üzere striksiyon eğrisi üzerinde

tanımlı olan  $r, t, k$  üreteç çatısı

$$\begin{cases} r = (\sqrt{2}, \cos s, \sin s) \\ t = (0, -\sin s, \cos s) \\ k = (-1, -\sqrt{2} \cos s, \sqrt{2} \sin s) \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Striksiyon eğrisinin teğet vektörü

$$\beta'(s) = \Gamma(s)r(s) + \Delta(s)k(s)$$

olmak üzere eğrilik fonksiyonları,

$$\Gamma(s) = \sqrt{2}, \Delta(s) = -1$$

olarak bulunur.

Doğrultman vektörünün ( $\bar{R}$ ) çizdiği eğrinin geodezik eğriliği hesaplanırsa

$$\gamma = \langle \bar{R}', \bar{R} \times \bar{R} \rangle = -\sqrt{2}$$

dır. Ayrıca üreteç çatının Darboux vektörü hesaplanırsa,

$$U_r = -1, -2\sqrt{2} \cos s, 0$$

şeklinde elde edilir. Geliştirilmiş çatı vektörleri hesaplanırsa,

$$k_1 = \sqrt{2} \sinh \theta(s) + \cosh \theta(s), \cos s(\sinh \theta(s) - \sqrt{2} \cosh \theta(s)), \sin s(\sinh \theta(s) + \sqrt{2} \cosh \theta(s))$$

$$r_1 = \sqrt{2} \cosh \theta(s) + \sinh \theta(s), \cos s(\cosh \theta(s) - \sqrt{2} \sinh \theta(s)), \sin s(\cosh \theta(s) + \sqrt{2} \sinh \theta(s))$$

$$t_1 = (0, -\sin s, \cos s)$$

dır.



Böylece robotun hareketini belirleyen spacelike yörünge regle yüzeyi için bir parametrizasyon

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$$

olmak üzere,

$$\varphi(s, v) = \left( \begin{array}{l} s + v(\sqrt{2} \sinh \theta(s) + \cosh \theta(s)), \cos s(\sqrt{2} + v(\sinh \theta(s) - \sqrt{2} \cosh \theta(s))), \\ \sin s(\sqrt{2} + v(\sinh \theta(s) + \sqrt{2} \cosh \theta(s))) \end{array} \right)$$

şeklinde elde edilir.

Burada  $\theta(s)$  sin her farklı seçilişinde aynı  $\alpha(s)$  yörünge eğrisine sahip ortak yörünge eğrili robot yörünge regle yüzey ailesinin bir üyesi elde edilir. Şimdi  $\theta(s)$  nin farklı seçimleri için robot yörünge yüzeyini çizelim:

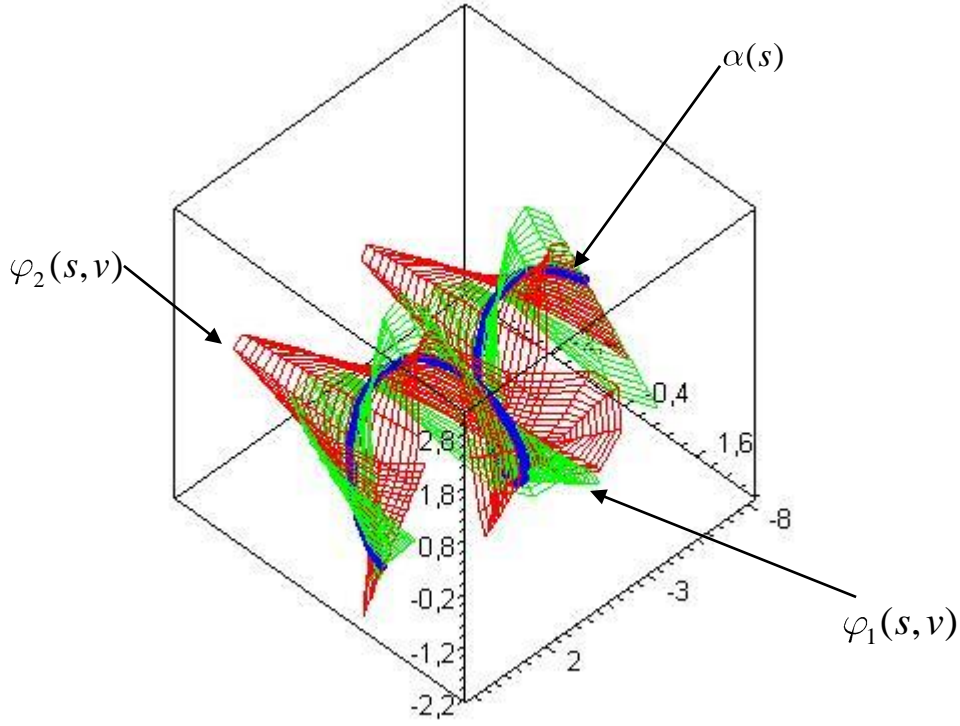
$\theta(s) = \sin s$  için robot yörünge ailesinin bir üyesi

$$\varphi_1(s, v) = \left( \begin{array}{l} s + v(\sqrt{2} \sinh(\sin s) + \cosh(\sin s)), \cos s(\sqrt{2} + v(\sinh(\sin s) - \sqrt{2} \cosh(\sin s))), \\ \sin s(\sqrt{2} + v(\sinh(\sin s) + \sqrt{2} \cosh(\sin s))) \end{array} \right)$$

ve  $\theta(s) = \cos s$  için robot yörünge ailesinin bir başka üyesi

$$\varphi_2(s, v) = \left( \begin{array}{l} s + v(\sqrt{2} \sinh(\cos s) + \cosh(\cos s)), \cos s(\sqrt{2} + v(\sinh(\cos s) - \sqrt{2} \cosh(\cos s))), \\ \sin s(\sqrt{2} + v(\sinh(\cos s) + \sqrt{2} \cosh(\cos s))) \end{array} \right)$$

şeklinde elde edilip böylece aynı  $\alpha(s)$  yörünge eğrisine sahip ortak yörünge eğrili robot yörünge yüzey ailesi ,  $-5 \leq s \leq 5$  ve  $-1 \leq v \leq 0.5$  alınarak aşağıdaki şekilde çizilir:

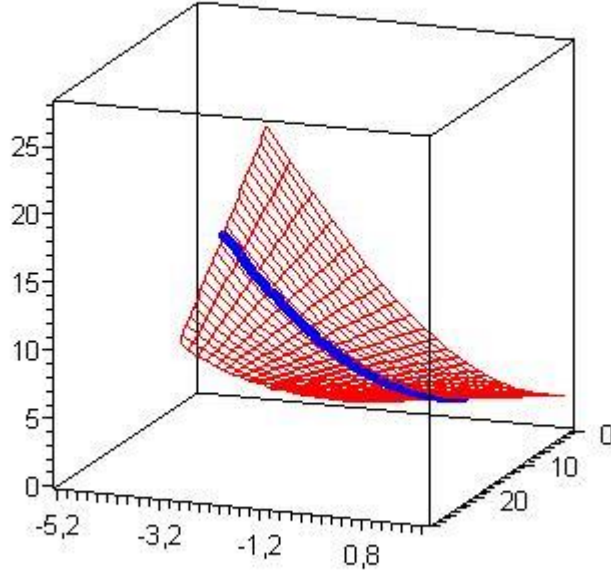


**Şekil 5.2.** Ortak yörünge eğrili robot yörünge yüzey ailesi

**Örnek 5.2:** Doğrultman vektörü  $\bar{R}(s) = (-\sinh s, 2, \cosh s)$  (spacelike) ve dayanak eğrisi  $\alpha(s) = (-\sqrt{2} \sinh s, s, \sqrt{2} \cosh s)$  (timelike) olan bir timelike regle yüzeyin parametrik denklemi

$$X(s, v) = (-\sinh s(\sqrt{2} + v), 2s + v, \cosh s(\sqrt{2} + v))$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $-\pi \leq s \leq 0$  ve  $-1 \leq v \leq 1$  alınarak bu yüzey aşağıdaki gibi çizilebilir:



**Şekil 5.3.** Başlangıçtaki timelike regle yüzey

Yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\beta(s) = \alpha(s) - \mu(s)\bar{R}(s), \quad \mu(s) = -\langle \alpha', \bar{R} \rangle$$

olmak üzere, dayanak eğrisi ile striksiyon eğrisi arasındaki uzaklık  $\mu(s) = \sqrt{2}$  olarak bulunur.  $R = \|\bar{R}(s)\| = \sqrt{5}$  olmak üzere striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı olan  $\{r, t, k\}$  üreteç çatısı

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sinh s, 2, \cosh s) \\ t &= (-\cosh s, 0, \sinh s) \\ k &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\sinh s, 1, -2\cosh s) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Striksiyon eğrisinin teğet vektörü

$$\beta'(s) = \Gamma(s)r(s) + \Delta(s)k(s)$$

olmak üzere eğrilik fonksiyonları,

$$\Gamma(s) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \Delta(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

dır.

Doğrultman vektörünün ( $\bar{R}$ ) çizdiği eğrinin geodezik eğriliği

$$\gamma = \langle \bar{R}''', \bar{R}' \times \bar{R} \rangle = 2$$

olarak bulunur. Ayrıca üreteç çatının Darboux vektörü hesaplanırsa,

$$U_r = (0, 1, 0)$$

şeklinde elde edilir. Geliştirilmiş çatı vektörleri hesaplanırsa,

$$k_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \sinh s (2 \cos \theta(s) - \sin \theta(s)), \frac{1}{\sqrt{5}} (2 \sin \theta(s) - \cos \theta(s)), \frac{1}{\sqrt{5}} \cosh s (\sin \theta(s) - 2 \cos \theta(s)) \right)$$

$$r_1 = \left( -\frac{1}{\sqrt{5}} \sinh s (\cos \theta(s) + 2 \sin \theta(s)), \frac{1}{\sqrt{5}} (2 \cos \theta(s) - \sin \theta(s)), \frac{1}{\sqrt{5}} \cosh s (\cos \theta(s) + 2 \sin \theta(s)) \right),$$

$$t_1 = (-\cosh s, 0, \sinh s)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece robot hareketini belirleyen yörünge yüzeyi için bir parametrisasyon

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$$

olmak üzere,

$$\varphi(s, v) = \left( \sinh s \left( -\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{5}} (2 \cos \theta(s) - \sin \theta(s)) \right), s + \frac{v}{\sqrt{5}} (2 \sin \theta(s) + \cos \theta(s)), \cosh s \left( \sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{5}} (\sin \theta(s) - 2 \cos \theta(s)) \right) \right)$$

elde edilir.

Burada  $\theta(s)$  sin her farklı seçilişinde aynı  $\alpha(s)$  yörünge eğrisine sahip ortak yörünge eğrili robot yörünge regle yüzey ailesinin bir üyesi elde edilir. Şimdi  $\theta(s)$  nin farklı seçimleri için robot yörünge yüzeyini çizelim:

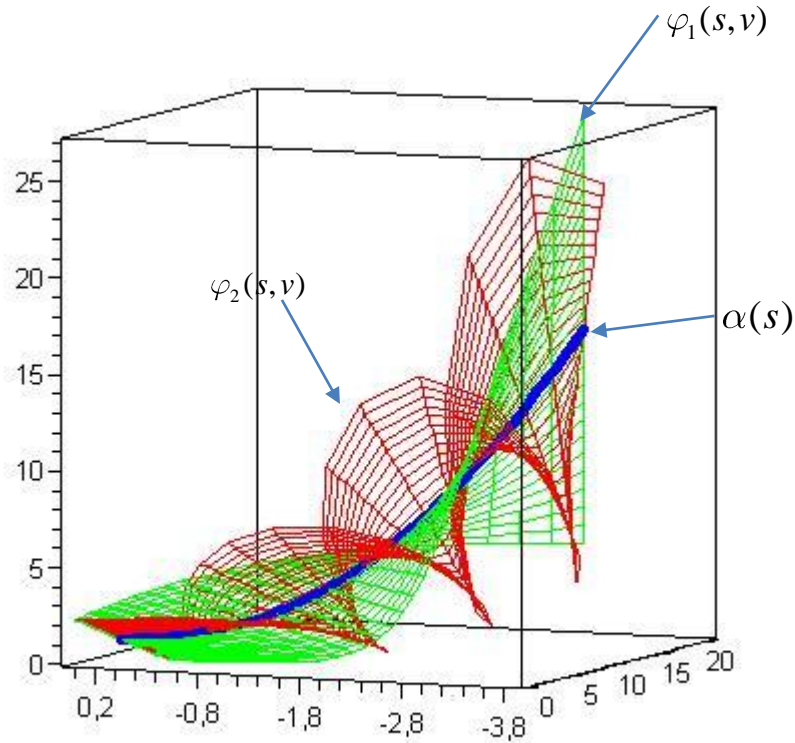
$\theta(s) = s$  için robot yörünge ailesinin bir üyesi

$$\varphi_1(s, v) = \begin{pmatrix} \sinh s(-\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{5}}(2 \cos s - \sin s)), s + \frac{v}{\sqrt{5}}(2 \sin s + \cos s), \\ \cosh s(\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{5}}(\sin s - 2 \cos s)) \end{pmatrix}$$

ve  $\theta(s) = s^2$  için robot yörünge ailesinin bir başka üyesi

$$\varphi_2(s, v) = \begin{pmatrix} \sinh s(-\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{5}}(2 \cos(s^2) - \sin(s^2))), s + \frac{v}{\sqrt{5}}(2 \sin(s^2) + \cos(s^2)), \\ \cosh s(\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{5}}(\sin(s^2) - 2 \cos(s^2))) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilip böylece aynı  $\alpha(s)$  yörünge eğrisine sahip ortak yörünge eğrili robot yörünge yüzey ailesi,  $-\pi \leq s \leq 0$  ve  $-1 \leq v \leq 1$  alınarak aşağıdaki şekilde çizilir:

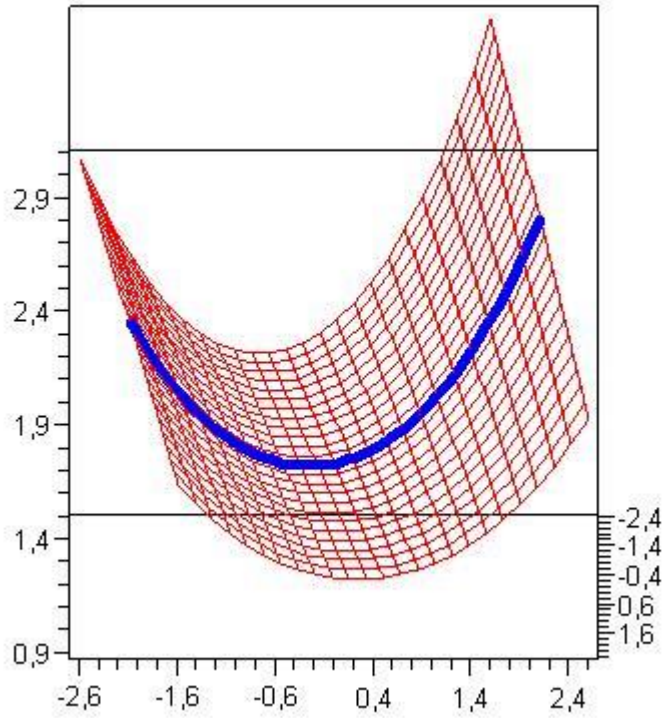


**Şekil 5.4.** Ortak yörünge eğrili robot yörünge yüzey ailesi

**Örnek 5.3:** Doğrultman vektörü  $\bar{R}(s) = (\sinh s, 1, -\cosh s)$  (spacelike) ve dayanak eğrisi  $\alpha(s) = (-\sqrt{2} \sinh s, 2s, \sqrt{2} \cosh s)$  (spacelike) olan bir spacelike regle yüzeyin parametrik denklemi

$$X(s, v) = (\sinh s(-\sqrt{2} + v), 2s + v, \cosh s(\sqrt{2} - v))$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $-\pi \leq s \leq 0$  ve  $-1 \leq v \leq 1$  alınarak bu yüzey aşağıdaki gibi çizilebilir:



**Şekil 5.5.** Başlangıçtaki spacelike regle yüzey

Yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\beta(s) = \alpha(s) - \mu(s)\bar{R}(s), \quad \mu(s) = -\langle \alpha', \bar{R} \rangle$$

olmak üzere, dayanak eğrisi ile striksiyon eğrisi arasındaki uzaklık  $\mu(s) = -\sqrt{2}$

olarak bulunur.  $R = \|\bar{R}(s)\| = \sqrt{2}$  olmak üzere striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı olan

$\{r, t, k\}$  üreteç çatısı

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh s, 1, -\cosh s)$$

$$t = (\cosh s, 0, -\sinh s)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sinh s, 1, \cosh s)$$

şeklinde elde edilir.

Striksiyon eğrisinin teğet vektörü

$$\beta'(s) = \Gamma(s)r(s) + \Delta(s)k(s)$$

olmak üzere eğrilik fonksiyonları,

$$\Gamma(s) = \Delta(s) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

dır.

Doğrultman vektörünün  $(\bar{R})$  çizdiği eğrinin geodezik eğriliği

$$\gamma = \langle \bar{R}', \bar{R} \times \bar{R} \rangle = -1$$

olarak bulunur. Ayrıca üreteç çatının Darboux vektörü hesaplanırsa,

$$U_r = (0, 1, 0)$$

şeklinde elde edilir. Geliştirilmiş çatı vektörleri hesaplanırsa,

$$k_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh s (\sin \theta(s) - \cos \theta(s)), \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \theta(s) + \cos \theta(s)), \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh s (\cos \theta(s) - \sin \theta(s)) \right)$$

$$r_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh s (\cos \theta(s) + \sin \theta(s)), \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta(s) - \sin \theta(s)), -\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh s (\cos \theta(s) + \sin \theta(s)) \right),$$

$$t_1 = (\cosh s, 0, -\sinh s)$$

şeklindedir.

Böylece robot hareketini belirleyen yörünge yüzeyi için bir parametrisasyon

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vk_1(s)$$

olmak üzere,

$$\varphi(s, v) = \left( \begin{array}{l} \sinh s(-\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{2}}(\sin \theta(s) - \cos \theta(s))), 2s + \frac{v}{\sqrt{2}}(\sin \theta(s) + \cos \theta(s)), \\ \cosh s(\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{2}}(\cos \theta(s) - \sin \theta(s))) \end{array} \right)$$

elde edilir.

Burada  $\theta(s)$  sin her farklı seçilişinde aynı  $\alpha(s)$  yörünge eğrisine sahip ortak yörünge eğrili robot yörünge regle yüzey ailesinin bir üyesi elde edilir. Şimdi  $\theta(s)$  nin farklı seçimleri için robot yörünge yüzeyini çizelim:

$\theta(s) = \cosh s$  için robot yörünge yüzeyi

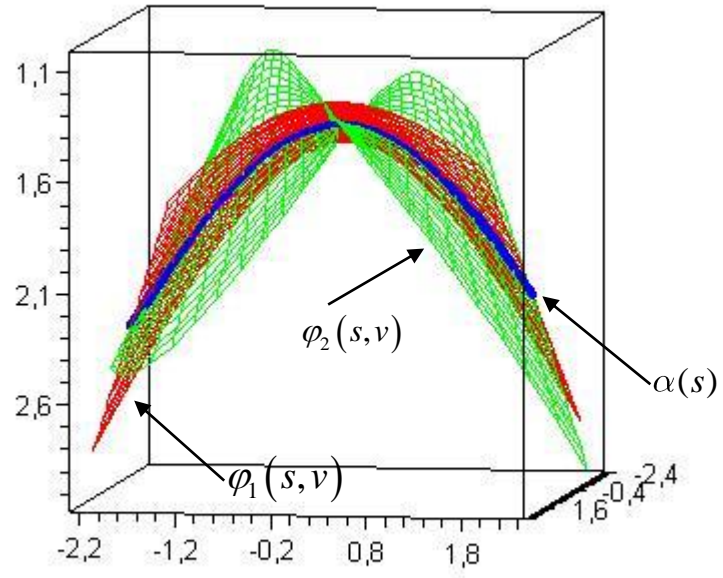
$$\varphi_1(s, v) = \left( \begin{array}{l} \sinh s(-\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{2}}(\sin(\cosh s) - \cos(\cosh s))), 2s + \frac{v}{\sqrt{2}}(\sin(\cosh s) + \cos(\cosh s)), \\ \cosh s(\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{2}}(\cos(\cosh s) - \sin(\cosh s))) \end{array} \right)$$

ve  $\theta(s) = \sin s + e^s$  için robot yörünge ailesinin bir başka üyesi

$$\varphi_2(s, v) = \left( \begin{array}{l} \sinh s(-\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{2}}(\sin(\sin s + e^s) - \cos(\sin s + e^s))), 2s + \frac{v}{\sqrt{2}}(\sin(\sin s + e^s) + \cos(\sin s + e^s)), \\ \cosh s(\sqrt{2} + \frac{v}{\sqrt{2}}(\cos(\sin s + e^s) - \sin(\sin s + e^s))) \end{array} \right)$$

şeklinde elde edilip böylece aynı  $\alpha(s)$  yörünge eğrisine sahip ortak yörünge eğrili robot yörünge yüzey ailesi  $-\pi/3 \leq s \leq \pi/3$  ve  $-0.5 \leq v \leq 0.5$  için aşağıdaki şekilde çizilir:





Şekil 5.6. Ortak yörünge eğrili robot yörünge yüzey ailesi



## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Robotun uç işlevcisinin başlangıç pozisyonundan sonuç pozisyonuna kadar hareketi esnasında yer değiştirme ve dönme yollarını belirleyen noktaların kümesine yörünge denir. Yörünge planlaması ise, robotun bir başlangıç noktasından bir hedef noktaya giderken hareketin zamana göre değişiminin planlaması olarak tanımlanmaktadır.

Bir robot uç hareketi, bir robot yörüngesi olarak tanımlanır ve robot yörünge, bir regle yüzey ve bu regle yüzeyin striksiyon eğrisinin merkez noktasında tanımlı dört tane çatı ve dönme açısı ile belirlenebilir. Robot yörünge planlaması için gerekli olan hareketin bağımsız zaman özellikleri, robot uç efektör hareketinin diferensiyel özellikleri ile ilişkilidir. Bir eğrinin birinci dereceden türevi konumsal değişimini verir buna pozisyonel varyasyonda denilebilir. Yani robot yörünge regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin konumsal değişimi, robotun birim zamanda aldığı yoldur. Böylece striksiyon eğrisinin konumsal değişimi çizgisel hız olarak düşünülebilir. Darboux vektörü de bir uzay eğrisinin Frenet çatısının alansal hız vektörü olup robotun bir eksen etrafında dönme veya dolanma hızı olarak yani açısal hız olarak düşünülebilir.

Eğrilik teorisi, bir katı cismin hareketini belirlemenin en şık ve en basit yoludur. Bu nedenle eğrilik teorisi bir robot uç efektör hareketinin diferensiyel özelliklerini belirlemek için en iyi yoldur. Ryuh 1989 yılında, regle yüzeyin eğrilik teorisini kullanarak robot yörünge planlamasını incelemiştir. Ryuh, bu çalışmasında robot yörüngesini oluşturacak araç çatının O yönlendirme vektörünü üreteç çatısının  $r$  üreteç vektörü olarak robot uç efektörüne bağlı araç çatının yönlendirme vektörünün hareketiyle oluşan regle yüzeyin robot yörüngesini belirlemiş ve tüm diferensiyel özelliklerini regle yüzeyin eğrilik teorisini kullanarak açıklamıştır.

Bu tezde regle yüzeyin eğrilik teorisi temel alınarak, ilk olarak Ryuh'un Öklid uzayında yaptığı çalışmadaki robot yörüngesini tanımlamada kullandığı üreteç çatısı 3-boyutlu Minkowski uzayında ifade edilerek, bu üreteç çatının Darboux açısı kadar döndürülmesiyle geliştirilmiş çatı tanımlandı ve 3-boyutlu Minkowski uzayında bir

regle yüzeyin timelike ve spacelike olması durumunda geliştirilmiş robot uç hareketi incelenerek diferensiyel özellikleri araştırıldı. Ayrıca 3-boyutlu Minkowski uzayında robot yörüngesini oluşturacak araç çatının yönlendirme vektörünü geliştirilmiş çatının üreteç vektörü olarak alarak robot uç effektörüne bağlı araç çatının yönlendirme vektörünün hareketiyle oluşan regle yüzeyin robot yörüngesi ve merkez normal vektörünün oluşturduğu merkez normal regle yüzeyin diferensiyel özellikleri regle yüzeyin eğrilik teorisini kullanarak incelendi. Timelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyin robot yörünge yüzeyinin spacelike regle yüzey, spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyin robot yörünge yüzeyinin timelike regle yüzey, spacelike regle yüzeyin robot yörünge yüzeyinin spacelike regle yüzey olduğu görüldü. Robotun yörüngesini tanımlamada kullanılan araç çatının türev formüllerinin de, verilen yüzeyin Lancret eğriliğine, Darboux açısının açıl hızına ve çatılar arasındaki dönme açılarına bağlı olduğu görüldü. Son olarak da geliştirilmiş çatıyı tanımlamada kullandığımız  $\theta(s)$  Darboux dönme açısının her farklı seçilişinde aynı  $\alpha(s)$  yörünge eğrisine sahip ortak yörünge eğrili robot yörünge regle yüzey ailesinin bir üyesinin elde edildiği örneklerle gösterildi.

Bir eğri üzerine kurulabilecek farklı çatılar için hem 3-boyutlu Öklid uzayında hem de 3-boyutlu Minkowski uzayında ya da yüksek boyutlu uzaylarda robot uç hareketi ve diferensiyel özellikleri araştırılabilir.

## KAYNAKLAR

- Akutagawa, K. , Nishikawa, S. 1990. The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space, *Tōhoko Math.* , 42, 67-82.
- Ayyıldız, N. , Yücesan, A. , 2006. On the scalar and dual formulations of the curvature theory of line trajectories in the Lorentzian space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 43, 1339- 1355.
- Bingül Z. , Küçük, S. , 2005. Robot Tekniği-I, *Birsen Yayınevi*, İstanbul , 1-17, 23- 59.
- Blaschke W., 1949 .“ Diferansiyel Geometri Dersleri”, (Çev. Erim K.), İstanbul Üniversitesi Yayını 433, İstanbul.
- Brady, M. , Hollerbach, J.M. , Johnson, T.L. , Lozano-Perez, T. , and Mason, M.T, 1982. Robot Motion: Planning and Control, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 585 pp.
- Çöken A. C. , Çiftçi, Ü. , 2007. On null curves on surfaces and null vectors in Lorentz space. *SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 2(1), 111-116.
- Ekici, C. , Ünlütürk, Y. , Dede, M. and Ryuh, B. S. , 2008. On motion of Robot End-Effector Using the Curvature Theory of Timelike Ruled Surfaces With Timelike Rulings. *Mathematical Problems in Engineering*, 19 pages.
- Ekmekçi, N. , 1991. Lorentz Manifold Üzerinde Eğilim Çizgileri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 53s.
- Ersoy, S., Tosun M., 2008. On the Trajectory Null Scrolls in 3-dimensional Minkowski Space-Time  $E_1^3$  . *Kyungpook Mathematical Journal*, 48, 81-92.
- Güler, F., Kasap E., 2011. Regle Yüzeyin Geliştirilmiş Robot Uç Effector Hareketi. *IX. Geometri Sempozyumu*, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 07-10 Haziran, Samsun.
- Kirezci, B. , 2002. Lorentziyen Uzay Kinematığında Timelike ve Spacelike Regle Yüzeyler, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniv. , Fen Bilimleri Enstitüsü.

- Kirson. Y. , 1975. Curvature Theory in Space Kinematics, Doctoral dissertation, University of California, Berkeley, 140 pp.
- Koren. Y. ,1985, Robotics For Engineers, McGraw-Hill Book Company, New York, 324 pp.
- Mccarthy, J. M. , Roth, B. ,1981. The Curvature Theory of Line Trajectories in Spatial Kinematics. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design* , Oct.,Vol.103, No.4,pp.718-724.
- McCarthy, J. M. ,1987. On the scalar and dual formulations of the curvature theory of line trajectories. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 109, 101- 106.
- O'Neill, B. , 1983. *Semi-Riemannian Geometry*, with applications to relativity. Academic Press, New York.
- Özsoy, Ö. 2002. Robot & Elektronik, “Yakın tarihte robotik biliminin gelişimi” Web Sitesi: <http://www.endtas.com/> (Ziyaret Tarihi: 28 Ekim 2012).
- Paul, R.P. , 1979. Manipulator Cartesian Path Control, IEEE Trans. System, Man., Cybernetics, Vol. SMC-9, No. 11, pp. 702-711.
- Ratcliffe, J. G. , 1994. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag New York, Inc. , New York, 736p.
- Ryuh, B.S. , 1989. Robot Trajectory Planning Using the Curvature Theory of Ruled Surfaces, Ph. D. Purdue University, 143 s.
- Ryuh, B.S., and Pennock, G.R., 1988. Accurate Motion of Robot End-Effector Using the Curvature Theory of a Ruled Surface, *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Trans. ASME*, Dec., Vol. 110, No. 4, pp. 383-388.
- Ryuh, B.S., and Pennock, G.R., 1989. Robot Trajectory Planning Using a Geometric Modeling Technique, submitted to the 1989 ASME Design, Automation Conference, September, Montreal, Canada.
- Turhan, T. , 2010. Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Lightlike Doğrultmanlı Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, 45s.

- Turgut, A. , 1995. 3-Boyutlu Minkoswki Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 96p.
- Woestijne, V.D.I. 1990. Minimal Surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. Proc.Congres “Geometrie differentielle et applications”Avignon (30 Mayıs 1988), Word Scientific Publishing. Singapore. 344-369.
- Wunderlich, W. , 1979. Ruled Surfaces with Osculating Striction Scroll, 31.Differential Geometry, Budapest (Hungary).





## **ÖZGEÇMİŞ**

**Adı Soyadı : Gülnur ŞAFFAK ATALAY**

**Doğum Yeri ve Tarihi : Tonya-1985**

**E-Posta : matgulnur85@hotmail.com**

**Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik(2006)**

**Yüksek Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,**

**Matematik (2009)**

**Mesleki Deneyim : Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi,**

**Araştırma Görevlisi (2007-2009)**

**Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Araştırma Görevlisi (2009-**

## **TEZDEN TÜRETİLEN SUNUMLAR**

▪ **Şaffak Atalay G.**, and Kasap E., 2013: Developed Motion of Robot End-Effector of Timelike Ruled Surfaces With Timelike Rulings. International Conference On Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2013). *Yıldız Technical University* , June 2-5, 2013 Istanbul, Turkey.