

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK KÜME TEORİSİ VE ESNEK GRUPLAR

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEMA ÖZĞAN

OCAK 2014

Esnek Küme Teorisi ve Esnek Grup

**Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN**

Sema ÖZĞAN

Ocak 2014

©2014 [Sema ÖZĞAN]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Esnek Küme Teorisi ve Esnek Gruplar

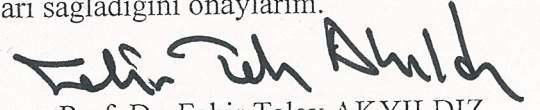
Öğrencinin, Adı Soyadı: Sema ÖZĞAN

Tez Savunma Tarihi: 27.01.2014

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı


Doç. Dr. Metin BEDİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.


Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

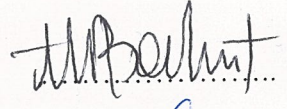
Jüri Üyeleri:

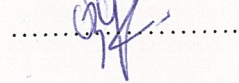
İmzası

Doç. Dr. Ali BOZKURT

Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN

Yrd. Doç. Dr. Özge ÖZTEKİN





İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Sema ÖZĞAN

ÖZ

ESNEK KÜME TEORİSİ VE ESNEK GRUPLAR

ÖZĞAN, Sema

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN

Ocak 2014, 44 sayfa

Bu tezde bulanık küme teorisi, yaklaşımlı küme teorisi, esnek küme teorisi, esnek gruplar ve esnek grubun bazı cebirsel yapıları üzerinde duruldu.

Birinci bölümde; bulanık küme teorisi, yaklaşımlı küme teorisi, esnek küme teorisi, esnek gruplar ile ilgili ön bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde; esnek küme teorisinin tanımı yapılarak, iki esnek kümenin eşitliği, esnek parametre kümesinin değili, esnek kümenin tümleyen esnek kümesi, boş esnek küme, mutlak esnek küme, iki esnek küme arasındaki “ve” operatörü, iki esnek küme arasında “veya” operatörü, iki esnek kümenin birleşimi, iki esnek kümenin kesişimi gibi kavramların tanımları yapılarak bu tanımlarla ilgili çeşitli örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; bulanık küme teorisinin tanımı yapılarak, bulanık alt grup, bulanık normal alt grup gibi tanımlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde; yaklaşımlı küme teorisinin tanımı yapılarak örneklere yer verilmiştir.

Son bölümde; esnek grubun tanımı yapılarak, esnek grubu birim elemanı, esnek alt grup, esnek grup homomorfizma, esnek grup izomorfizm, esnek normal alt grup esnek değişmeli grup, esnek grubun tersi, esnek devirli grup, esnek sağ koset, esnek faktör grubu, esnek grubun ürünü gibi kavramlar anlatılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Esnek Kümeler, Esnek Grupları, Bulanık Kümeler, Yaklaşımlı Kümeler, Esnek Homomorfizma

ABSTRACT

SOFT SETS THEORY AND SOFT GROUPS

ÖZĞAN, Sema

M.Sc. in Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Necati OLGUN

January 2014, 44 pages

In this thesis, fuzzy set theory, rough set theory, soft set theory, soft groups and some algebraic constructs of the soft groups are investigated.

In the first section of the thesis, preliminary information is given about fuzzy set theory, rough set theory, soft set theory and soft groups.

In the second section of the thesis, soft set theory is defined, and then definitions of the concepts of two soft set equation, soft set is not parameter, soft set of a complement, soft set of empty, soft set absolute, two soft set between the "and" operator, two soft set of "or" operator, two soft sets of combination and two soft sets of intersection are given, and some examples are presented about these concepts.

In the third section of the thesis, fuzzy set theory is defined, and definitions of some concepts like fuzzy sub-group are given.

In the fourth section of the thesis, rough set theory is defined, and some examples are presented.

In the final section of the thesis, soft group is defined, and some concepts such as unit element of soft group, soft sub-group, soft group homomorphism, soft group isomorphism, soft normal sub-group, soft commutative groups, soft groups and vice versa, soft cyclic group, soft right cosets and soft groups of factors are introduced.

Key Words: Soft Sets, Soft Groups, Fuzzy Sets, Rough Sets, Soft Homomorphism

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN' a, ayrıca hocalarım Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN' a Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN' e, değerli ailem ve eşime sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZ	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2	3
ESNEK KÜME TEORİSİ	3
2.1 Esnek Küme	3
2.2 İki Esnek Kümenin Eşitliği	6
2.3 Esnek Parametre Kümesinin Değili	6
2.4 Esnek Kümenin Tümlleyen Esnek Kümesi	7
2.5 Boş Esnek Küme	8
2.6 Mutlak Esnek Küme	9
2.7 İki Esnek Küme Arasındaki “ve” Operatörü	10
2.8 İki Esnek Küme Arasında “veya” Operatörü	11
2.9 İki Esnek Kümenin Birleşimi	14
2.10 İki Esnek Kümenin Kesişimi	15
BÖLÜM 3	20
BULANIK KÜME TEORİSİ	20
3.1 Bulanık Küme İle İlgili Ön Bilgi	20
3.2 α –Kesim ve Güçlü α –Kesim Kümeleri	24
BÖLÜM 4	26
YAKLAŞIMLI KÜME TEORİSİ	26
4.1 Verilen Bir Kümenin Alt Yaklaşımı	26
4.2 Yaklaşımlı Uzay ve Yaklaşımlı Küme	27
4.3 Bulanık Yaklaşımlı Küme	27
BÖLÜM 5	29
ESNEK GRUPLAR	29

5.1 Esnek Grubun Tanımı.....	29
5.2 Esnek Grubu Birim Elemanı.....	33
5.3 Esnek Alt Grup	34
5.4 Esnek Grup Homomorfizma.....	35
5.5 Esnek Normal Alt Grup	36
5.6 Esnek Değişmeli Grup	37
5.7 Esnek Grubun Tersİ	39
5.8 Esnek Devirli Grup	40
5.9 Esnek Sağ Koset	41
5.10 Esnek Faktör Grubu	42
SONUÇ	43
KAYNAKLAR	44

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Yaşadığımız dünyada birçok belirsizlik vardır. Bu belirsizlikler kişiden kişiye değişmektedir. Mesela; havanın 10 santigrad derece olması kutuptaki insanlara göre sıcak, yengeç dönencesindeki insanlara göre ise soğuktur. Anlaşılan o ki belirsizlikleri karşılamak için klasik matematik mantık yeterli olmamaktadır. Bunun için bir çok bilim adamı belirsizliklerden kaçsa da günlük yaşamda çoğu zaman bu belirsizliklerle karşılaşmaktadır. Daha doğrusu klasik mantık dünyayı iyi-kötü, soğuk-sıcak, güzel-çirkin, beyaz-siyah diye ayırırken bazı bilim adamları da beyaz ile siyah renkler arasında bile bir çok renk tonu olacağını düşünmüşlerdir. Bu da insanları belirsizlikler için farklı yöntemler bulmaya itmektedir. Belirsiz tipteki problemlerin çözümü için, aralık matematiği, olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, esnek kümeler teorisi gibi farklı teoriler geliştirilmiştir. Her bir teori kendine has problemleri çözüme kavuşturursa da bunlardan en önemlisi şüphesiz ki Zadeh (1965)'in bulanık kümeler teorisidir. Amerika'da yaşayan, Azeri kökenli Lotfi Zadeh (1965), daha sonra doğrusal fonksiyon kümesini $[0,1]$ reel sayılar aralığına genelleştirerek bulanık mantığı ve dolayısıyla bulanık kümeleri tanımladı. Matematik dünyasının bulanık mantık ile tanışması 1930'larda olmasına rağmen, ilk ticari bulanık mantık uygulamaları 1980'lerde ortaya çıktı. 1990'larda ise iyice hız kazanarak ticari amaçlı uygulamalarda önemli bir yere gelmiştir. Bulanık kümelerin çözümlerini bulmak için, kavramlar için üyelik fonksiyonu tanılamamız gereklidir. Bundan dolayı bulanık kümeler, uzman sistemlerde, karar verme mekanizmalarında, modellemede, sosyal bilimlerde v.b.gibi çok farklı alanlarda kullanılmaktadır. Bulanık kümeler teorisi hızla gelişmesine rağmen bazı yapısal zorluklara sahiptir. Bir bulanık küme üyelik fonksiyonu yardımı ile tanımlanır. Üyelik fonksiyonunun oluşturulmasının fazlasıyla bireysel olmasından dolayı, her bir durum için bir üyelik fonksiyonu inşa etme zorluğuyla karşılaşılır. Bu nedenle, Molodtsov (1999) üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir kümeler teorisine

ihtiyaç olduğunu görerek esnek küme kavramını ortaya atmıştır. O halde, esnek küme teorisi ile bulanık küme teorisini komşu sistemler sayabiliriz. Fakat esnek küme teorisi bulanık küme teorisinin aksine reel değerli bir fonksiyon yerine, küme değerli bir fonksiyonla belirsizliği ortadan kaldırmaya çalışmaktadır.[1,2,5]

Maji ve ark. (2002;2003), Pawlak (1982)'ın yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını sundu ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladı. H. Aktaş ve N. Çağman (2007) [1] esnek grubun tanımı ile ilgili bir çalışma yaptı. A. Aygünoğlu, H. Aygün (2009) bulanık esnek gruplar başlıklı bir çalışma yaptı.

Belirsizlik problemini çözmek için öne sürülen bir başka teorisi ise 1985'te Pawlak tarafından ortaya atılan yaklaşımlı küme teorisidir. Yaklaşımlı küme teorisi, klasik küme teorisinin bir genişlemesidir. Temel ögesi bir denklik bağıntısıdır. Alt ve üst yaklaşımlar denklik sınıfları ile inşa edilir. Yaklaşımlı küme teorisi pek çok alanda büyük ilgi görmüştür. Yaklaşımlı küme teorisi modelleme, veritabanı oluşturma ve bilgi almayı hızlandırma gibi yapay zekâ alanlarındaki uygulamaları ile dikkat çekmiş ve çağımızdaki birçok probleme çözüm bulduğundan dolayı son yıllarda birçok araştırmacı tarafından araştırılmaktadır. [14]

BÖLÜM 2

ESNEK KÜME TEORİSİ

Bu bölümde Molodtsov [6]'un çalışmalarından faydalanarak esnek kümenin temel tanımı ve özellikleri üzerinde durulmuştur.

2.1 Esnek Küme

Tanım 2.1.1 U ve E boştan farklı iki küme, E bütün parametrelerin kümesi, $A \subseteq E$ ve $P(U)$ da U 'nun kuvvet kümesi olsun.

$\forall x \notin A$ için $f_A(x) = \emptyset$ olmak üzere; $f_A: E \rightarrow P(U)$ fonksiyonuna U üzerinde bir Esnek Küme denir.

U üzerinde bir f_A esnek kümesi, sıralı ikililerin bir kümesi olarak aşağıdaki şekilde temsil edilebilir.

$$f_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E, f_A(x) \in P(U)\}$$

Örnek 2.1.2 U evlerin kümesi ve E kümesi de

$E = \{\text{pahalı, güzel, ahşap, ucuz, bahçeli, modern, iyi onarımlı, kötü onarımlı}\}$ olmak üzere parametreler kümesi olsun.

Bu durumda, esnek küme pahalı evler, güzel evler, vb şeklinde ifade edilebilir. (F, E) esnek kümesi, bay X' in satın alacağı evlerin çekiciliğini tanımlar. Biz sonraki tartışmalar için daha ayrıntılı olacak şekilde aynı örneği aşağıda düşünebiliriz.

U kümesinin altı evden oluştuğunu varsayalım.

$$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

ve

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

O halde;

e_1 , parametresi 'pahalı' anlamına gelir.

e_2 , Parametresi 'güzel' anlamına gelir.

e_3 , parametresi 'ahşap' anlamına gelir.

e_4 , parametresi 'ucuz' anlamına gelir.

e_5 , parametresi 'bahçeli' anlamına gelir.

Diyelim ki;

$$F(e_1) = \{h_2, h_4\}$$

$$F(e_2) = \{h_1, h_3\}$$

$$F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$$

$$F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$$

$$F(e_5) = \{h_1\}$$

(F, E) esnek kümesi, $\{F(e_i), i = 1, 2, 3, \dots, 8\}$ parametre kümesi U kümesinin alt kümesidir. Bu durumda bir nesnenin yaklaşık açıklamaları bir koleksiyon sağlamaktadır. F eşlemesini evler olarak düşünelim.

Bu nedenle bir parametre $e \in E$ olsun. $F(e_1)$ fonksiyonunun anlamı "pahalı evler" olup fonksiyonel değer kümesi $\{h_2, h_4\}$ şeklindedir.

Böylece, aşağıdaki gibi yaklaşımlar kullanılarak bir koleksiyon olarak gösterilebilir. (F, E) esnek kümesi olsun.

$(F, E) = \{\text{Pahalı evler} = \{h_2, h_4\}, \text{güzel evler} = \{h_1, h_3\}, \text{ahşap evler} = \{h_3, h_4, h_5\}, \text{ucuz evler} = \{h_1, h_3, h_5\}, \text{bahçeli evler} = \{h_1\}\}$

Bu nedenle, genelleştirilirse (F, E) esnek kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir.

p_1 evrensel küme, v_1 kuvvet kümesinin elemanı olmak üzere;

$$(F, E) = \{p_1 = v_1, p_2 = v_2, \dots, p_n = v_n\}$$

Tanım 2.1.3 (F, E) esnek kümesinin tüm değer kümelerinin sınıfına Esnek Değer Sınıfı denir. $C_{(F,E)}$ şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki örnekte, $C_{(F,E)} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dir. Açık bir şekilde $C_{(F,E)} \subseteq P(U)$ olur.

Tanım 2.1.4 (F, A) ve (G, B) U üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer (F, A) esnek kümesi (G, B) esnek kümesinin alt esnek kümesi ise aşağıdaki maddeleri sağlar.

(i) $A \subset B$

(ii) $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$ yaklaşık olarak eşittir.

Şartlarını sağlayan (F, A) esnek kümesine (G, B) esnek kümesinin alt esnek kümesi denir. $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ şeklinde yazılır.

(G, B) esnek kümesine (F, A) esnek kümesinin Süper Esnek Kümesi denir.

Eğer (F, A) esnek kümesi (G, B) esnek kümesinin alt kümesi ise $(G, B) \tilde{\supset} (F, A)$ şeklinde de gösterilebilir.

2.2 İki Esnek Kümenin Eşitliği

Tanım 2.2.1 U evrensel kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) iki esnek küme olsun.

Eğer; $(F, A) \tilde{=} (G, B)$ ve $(G, B) \tilde{=} (F, A)$ ise $(F, A) = (G, B)$ olur.

Örnek 2.2.2 $A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ edelim. $A \subset B$ olduğu aşıkardır.

(F, A) ve (G, B) aynı evrensel küme $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ üzerinde iki esnek küme olsun.

$$\begin{aligned} G(e_1) &= \{h_2, h_4\} \\ G(e_2) &= \{h_1, h_3\} \\ G(e_3) &= \{h_3, h_4, h_5\} \\ G(e_5) &= \{h_1\} \end{aligned},$$

ve

$$\begin{aligned} F(e_1) &= \{h_2, h_4\} \\ F(e_3) &= \{h_3, h_4, h_5\} \\ F(e_5) &= \{h_1\} \end{aligned}$$

alınırsa $(F, A) \tilde{=} (G, B)$ olduğu görülür.

2.3 Esnek Parametre Kümesinin Değili

Tanım 2.3.1 $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ kümesi parametrelerin bir kümesi olsun.

E 'nin değili $\neg E = \{\neg e_i, \dots, e_i \text{ 'nin değili} = \neg e_i \forall i \in I\}$ olarak tanımlanır.

Aşağıdaki sonuçlar açıktır.

Önerme 2.3.2

1. $\neg(\neg A) = A$
2. $\neg(A \cup B) = (\neg A \cap \neg B)$.
3. $\neg(A \cap B) = (\neg A \cup \neg B)$.

Örnek 2.3.3 Örnek 2.1.2 'de gösterildiği gibi örneği ele alalım.

Burada, $\neg E = \{\text{pahalı değil, güzel değil, ahşap değil, ucuz değil, bahçeli değil}\}$

2.4 Esnek Kümenin Tümleyen Esnek Kümesi

Tanım 2.4.1 (F, A) esnek kümesinin tümleyeni $(F, A)^c$ olsun. $(F, A)^c = (F^c, \neg A)$ şeklin de gösterilir.

O halde ;

$F^c: \neg A \rightarrow P(U)$ fonksiyonu $\forall \alpha \in \neg A$ için $F^c(\alpha) = U - F(\neg \alpha)$ şeklinde tanımlanır.

F esnek fonksiyonunun tümleyenine F^c denirse açık bir şekilde;

$$(F^c)^c = F$$

ve

$$((F, A)^c)^c = (F, A)$$

olduğu görülür.

Örnek 2.4.2 Örnek 2.1.2 örneği alınırsa;

Burada

$$\begin{aligned} (F, E)^c &= \{\text{Pahalı olmayan evler} = \{h_1, h_3, h_5, h_6\}, \text{Güzel olmayan evler} \\ &= \{h_2, h_4, h_5, h_6\} \text{Ahşap olmayan evler} = \{h_1, h_2, h_6\}, \text{Ucuz olmayan evler} \\ &= \{h_1, h_3, h_5, h_6\}, \text{bahçeli olmayan evler} = \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}\} \end{aligned}$$

Olur.

2.5 Boş Esnek Küme

Tanımı 2.5.1 U evrensel kümesi üzerinde (F, A) esnek küme olsun. Boş esnek kümeyi $\emptyset$ şeklinde tanımlayalım.

Eğer; $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = \emptyset$ şeklinde tanımlanırsa **Boş Esnek Küme** denir.

Örnek 2.5.2 U kümesi 5 evden oluşan ahşap evlerin kümesi; A kümesi de bir parametreler kümesi olsun.

Orada verilen U evrensel kümesi beş evde oluşuyor.

$$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$$

$$A = \{\text{tuğla, kerpiç, çelik, taş}\}.$$

(F, A) esnek kümesi “ev inşaatı” olarak tanımlanmaktadır. (F, A) esnek kümesi aşağıdaki gibidir.

$F(\text{tuğla})$, tuğladan evler inşa etmek anlamına gelir.

$F(\text{kerpiç})$, kerpiçten evler inşa etmek anlamına gelir.

$F(\text{çelik})$, çelikten evler inşa etmek anlamına gelir.

$F(\text{taş})$, taştan evler inşa etmek anlamına gelir.

(F, A) esnek kümesinin yaklaşım koleksiyonu aşağıdaki gibidir.

$(F, A) = \{\text{tuğladan yapılmış evlerin} = \emptyset, \text{kerpiçten yapılmış evlerin} = \emptyset, \text{çelikten yapılmış evlerin} = \emptyset, \text{taştan yapılmış evlerin} = \emptyset\}$

Burada, (F, A) boş esnek kümedir.

2.6 Mutlak Esnek Küme

Tanımı 2.6.1 (F, A) kümesi U üzerinde bir esnek küme olsun.

$\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = U$ ise (F, A) esnek kümesi mutlak esnek küme denir. $\tilde{A}$ ile gösterilir. Tanımdan dolayı $\tilde{A}^c = \emptyset$ ve $\emptyset^c = \tilde{A}$ olur.

Örnek 2.6.2 U kümesi ahşap evlerin kümesi ve B parametreler kümesi olsun.

$$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$$

$B = \{\text{tuğla inşa edilmeyen evler, kerpiçle inşa edilmeyen evler, çelikle inşa edilmeyen evler, taşla inşa edilmeyen evler}\}.$

(G, B) esnek kümesi "ev inşaatı" tanımlamaktadır (G, B) esnek kümesi aşağıdaki gibidir.

G (tuğla olmayan), tuğla ile inşa edilmeyen evler anlamına gelir.

G (kerpiçli olmayan), kerpiçle inşa edilmeyen evler anlamına gelir.

G (çelik olmayan), çelikle inşa edilmeyen evler anlamına gelir.

G (taş olmayan), taş ile inşa edilmeyen evler anlamına gelir.

(G, B) esnek kümesinin yaklaşım koleksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$(G, B) = \{ \text{tuğla olmayan evler} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}, \text{kerpiçli olmayan evler} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}, \text{Çelik olmayan evler} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}, \text{taş olmayan evler} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \}$$

O halde (G, B) esnek kümesi mutlak esnek kümedir.

2.7 İki Esnek Küme Arasındaki “ve” Operatörü

Tanım 2.7.1 (F, A) ve (G, B) iki esnek küme olsun. “ $(F, A) \vee (G, B)$ ” işlemi $(F, A) \wedge (G, B)$ şeklinde gösterilir. $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır.

Buradan; $\forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ için $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ olur.

Örnek 2.7.2 (F, A) esnek kümesi "evlerin maliyetini" ve (G, B) esnek kümesinde "Evlerin çekiciliğini" tanımlansın.

$$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\},$$

$$A = \{\text{çok pahalı, pahalı, ucuz}\}$$

ve

$$B = \{\text{güzel; bahçeli; ucuz}\} \quad \text{olsun.}$$

O halde;

$$F(\text{çok pahalı}) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\},$$

$$F(\text{pahalı}) = \{h_1, h_3, h_5\},$$

$$F(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\},$$

Ve

$$G(\text{güzel}) = \{h_2, h_3, h_7\},$$

$$G(\text{bahçeli}) = \{h_5, h_6, h_8\},$$

$$G(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\},$$

Esnek kümeleri tanımlasın.

$$O \text{ zaman; } (F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$$

O halde;

$$H(\text{çok pahalı, güzel}) = \{h_2, h_7\},$$

$$H(\text{çok pahalı, bahçeli}) = \{h_8\},$$

$$H(\text{çok pahalı, ucuz}) = \emptyset,$$

$$H(\text{pahalı, güzel}) = \{h_3\},$$

$$H(\text{pahalı, bahçeli}) = \{h_5\},$$

$$H(\text{pahalı, ucuz}) = \emptyset,$$

$$H(\text{ucuz, güzel}) = \emptyset,$$

$$H(\text{ucuz, bahçeli}) = \{h_6\}$$

$$H(\text{ucuz, ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$$

Olarak alınır.

2.8 İki Esnek Küme Arasında “veya” Operatörü

Tanım 2.8.1 (F, A) ve (G, B) iki esnek küme olsun. “ (F, A) VEYA (G, B) ” işlemi $(F, A) \vee (G, B)$ şeklindeki gibi gösterilir.

$$(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B) \text{ tanımlanır.}$$

O halde; $\forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $O(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ olur.

Örnek 2.8.2 Yukarıdaki Örnek 2.7.2’yi düşünelim. $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ olduğunu biliyoruz.

O halde;

$$O(\text{çok pahalı, güzel}) = \{h_2, h_3, h_4, h_7, h_8\},$$

$$O(\text{çok pahalı, bahçeli}) = \{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\},$$

$$O(\text{çok pahalı, ucuz}) = \{h_2, h_4, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\},$$

$$O(\text{pahalı, güzel}) = \{h_1, h_2, h_3, h_5, h_7\},$$

$$O(\text{pahalı, bahçeli}) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_8\},$$

$$O(\text{pahalı, ucuz}) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_9, h_{10}\},$$

$$O(\text{ucuz, güzel}) = \{h_2, h_3, h_6, h_7, h_9, h_{10}\},$$

$$O(\text{ucuz, bahçeli}) = \{h_5, h_6, h_8, h_9, h_{10}\},$$

$$O(\text{ucuz, ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$$

Aşağıdaki önerme esnek kümelerde “ve” ve “veya” işlemlerini De Morgan kurallarını sağladığını görebiliriz.

Önerme 2.8.3

$$(i) ((F.A) \vee (G.B))^c = (F.A)^c \wedge (G.B)^c$$

$$(ii) ((F.A) \wedge (G.B))^c = (F.A)^c \vee (G.B)^c$$

İspat:

(i) $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ olsun. O zaman

Bu nedenle, $((F, A) \vee (G, B))^c = (O, A \times B)^c = (O^c, \neg(A \times B))$

$(F, A)^c \wedge (G, B)^c = (F^c, \neg A) \wedge (G^c, \neg B)$ dir.

$(J(x, y) = (F^c(x) \cap G^c(y)))$ alınırsa

$(F^c, \neg A) \wedge (G^c, \neg B) = (J, \neg A \times \neg B)$

$= (J, \neg(A \times B))$ olur.

Şimdi de, $(\neg \alpha, \neg \beta) \in \neg(A \times B)$ alalım.

O zaman

$O^c(\neg \alpha, \neg \beta) = U - O(\alpha, \beta)$

$= U - [F(\alpha) \cup G(\beta)]$

$= [U - F(\alpha)] \cap [U - G(\beta)]$

$= F^c(\neg \alpha) \cap G^c(\neg \beta)$

$= J(\neg \alpha, \neg \beta)$ olur.

Dolayısıyla; $O^c = J$ olup ispat tamamlanır.

(ii) $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ olsun.

Bu nedenle,

$$((F, A) \wedge (G, B))^c = (H, A \times B)^c = (H^c, \neg(A \times B))$$

Şimdi, $(F, A)^c \vee (G, B)^c = (F^c, \neg A) \vee (G^c, \neg B)$ dir. $(K(x, y) = F^c(x) \cup G^c(y))$

alınırsa

$$(F^c, \neg A) \vee (G^c, \neg B) = (K, \neg A \times \neg B)$$

$$= (K, \neg(A \times B)) \quad \text{olur.}$$

Şimdi de, $(\neg \alpha, \neg \beta) \in \neg(A \times B)$ olsun.

Bu yüzden,

$$H^c(\neg \alpha, \neg \beta) = U - H(\alpha, \beta)$$

$$= U - [F(\alpha) \cap G(\beta)]$$

$$= [U - F(\alpha)] \cup [U - G(\beta)]$$

$$= F^c(\neg \alpha) \cup G^c(\neg \beta)$$

$$= K(\neg \alpha, \neg \beta)$$

Dolayısıyla; $H^c = K$ olup ispat tamamlanır.

2.9 İki Esnek Kümenin Birleşimi

Tanım 2.9.1 U üzerindeki (F, A) ve (G, B) kümelerin birleşimi (H, C) olsun.

O halde ; $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & , \quad \text{eğer } e \in A - B \\ G(e) & , \quad \text{eğer } e \in B - A \\ F(e) \cup G(e), & \text{eğer } e \in A \cap B \end{cases}$$

Olup $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.9.2 Yukarıdaki Örnek 2.7.2'yi düşünelim. $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ olduğu görülüyor ki,

$$H(\text{çok pahalı}) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\},$$

$$H(\text{pahalı}) = \{h_1, h_3, h_5\},$$

$$H(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\},$$

$$H(\text{güzel}) = \{h_2, h_3, h_7\}$$

$$H(\text{bahçeli}) = \{h_5, h_6, h_8\}$$

2.10 İki Esnek Kümenin Kesişimi

Tanım 2.10.1 U üzerindeki (F, A) ve (G, B) esnek kümelerin kesişimi (H, C) olsun. O halde ; $C = A \cap B$ ve $\forall e \in C$ için;

$$H(e) = F(e)$$

$$H(e) = G(e)$$

O halde; $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$

Örnek 2.10.2 Yukarıdaki Örnek 2.7.2'yi düşünelim (F, A) ve (G, B) esnek kümelerin kesişim (H, C) olsun.

O halde;

$$C = \{\text{Ucuz}\}$$

Ve

$$H(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$$

Aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

Önerme 2.10.3

(i) $(F, A) \widetilde{\cup} (F, A) = (F, A)$

(ii) $(F, A) \widetilde{\cap} (F, A) = (F, A)$

(iii) ϕ esnek boş küme olmak üzere $(F, A) \widetilde{\cup} \phi = \phi$ dir

(iv) $(F, A) \widetilde{\cap} \phi = \phi$

(v) $\widetilde{A}$ mutlak esnek küme olmak üzere $(F, A) \widetilde{\cup} \widetilde{A} = \widetilde{A}$ dir.

(vi) $(F, A) \widetilde{\cap} \widetilde{A} = (F, A)$

Önerme 2.10.4

(i) $((F, A) \widetilde{\cup} (G, B))^c = (F, A)^c \widetilde{\cup} (G, B)^c$

(ii) $((F, A) \widetilde{\cap} (G, B))^c = (F, A)^c \widetilde{\cap} (G, B)^c$

İspat:

(i) $(F, A) \widetilde{\cup} (G, B) = (H, A \cup B)$ olsun.

O halde;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & , \quad \text{eğer } \alpha \in A - B \\ G(\alpha) & , \quad \text{eğer } \alpha \in B - A \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \text{eğer } \alpha \in A \cap B \end{cases}$$

Bu yüzden;

$$\begin{aligned} ((F.A) \tilde{\cup} (G.B))^c &= (H, A \cup B)^c \\ &= (H^c, \neg A \cup \neg B) \end{aligned}$$

Şimdi, $(\neg \alpha, \neg \beta) \in \neg (A \times B)$ alalım. $H^c(\neg \alpha) = U - H(\alpha)$

O halde;

$$H^c(\neg \alpha) = \begin{cases} F^c(\neg \alpha) & , \quad \text{Eğer } \neg \alpha \in \neg A - \neg B \\ G^c(\neg \alpha) & , \quad \text{Eğer } \neg \alpha \in \neg B - \neg A \\ F^c(\neg \alpha) \cup G^c(\neg \beta) & , \quad \text{Eğer } \neg \alpha \in \neg A \cap \neg B \end{cases}$$

$$(F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c = (F^c, \neg A) \tilde{\cup} (G^c, \neg B)$$

$$= (K, \neg A \cup \neg B) \quad \text{olduğu görülür.}$$

O halde,

$$K(\neg \alpha) = \begin{cases} F^c(\neg \alpha) & , \quad \text{eğer } \neg \alpha \in \neg A - \neg B \\ G^c(\neg \alpha) & , \quad \text{eğer } \neg \alpha \in \neg B - \neg A \\ F^c(\neg \alpha) \cup G^c(\neg \beta) & , \quad \text{eğer } \neg \alpha \in \neg A \cap \neg B \end{cases}$$

Dolayısıyla; $H^c = K$ olur.

ii) $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, A \cap B)$ olsun.

Bu yüzden

$$((F, A) \tilde{\cap} (G, B))^c = (H^c, \neg A \cap \neg B)$$

Şimdi;

$$(F, A)^c \tilde{\cap} (G, B)^c = (F^c, \neg A) \tilde{\cap} (G^c, \neg B)$$

$$= (K, \neg A \cup \neg B) \quad \text{olduğu görülür.}$$

O halde; $\neg \alpha \in \neg A \cap \neg B$

$$K(\neg \alpha) = F^c(\neg \alpha) \quad \text{yada} \quad G^c(\neg \alpha)$$

$$= F(\alpha) \quad \text{yada} \quad G(\alpha) \quad (\alpha \in A \cap B)$$

$$= H(\alpha)$$

$$= H^c(\neg \alpha)$$

Dolayısıyla; $H^c = K$ olur.

Aşağıdaki önermelerde de ispata gerek yoktur. Aşıkardır.

Önerme 2.10.4 (F, A) , (G, B) ve (H, C) kümeleri U evrensel kümesi üzerinde esnek kümeler olsun. O halde;

$$(i) (F, A) \tilde{\cup} ((G, B) \tilde{\cup} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cup} (G, B)) \tilde{\cup} (H, C)$$

$$(ii) (F, A) \tilde{\cap} ((G, B) \tilde{\cap} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cap} (G, B)) \tilde{\cap} (H, C)$$

$$(iii) (F, A) \tilde{\cup} ((G, B) \tilde{\cap} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cup} (G, B)) \tilde{\cap} ((F, A) \tilde{\cup} (H, C))$$

$$(iv) (F, A) \tilde{\cap} ((G, B) \tilde{\cup} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cap} (G, B)) \tilde{\cup} ((F, A) \tilde{\cap} (H, C))$$

Önerme 2.10.5 (F, A) , (G, B) ve (H, C) kümeleri U evrensel kümesi üzerinde esnek kümeler olsun. O halde;

$$(i) (F, A) \vee ((G, B) \vee (H, C)) = ((F, A) \vee (G, B)) \vee (H, C)$$

$$(ii) (F, A) \wedge ((G, B) \wedge (H, C)) = ((F, A) \wedge (G, B)) \wedge (H, C)$$

$$(iii) (F, A) \vee ((G, B) \wedge (H, C)) = ((F, A) \vee (G, B)) \wedge ((F, A) \vee (H, C))$$

$$(iv) (F, A) \wedge ((G, B) \vee (H, C)) = ((F, A) \wedge (G, B)) \vee ((F, A) \wedge (H, C))$$

3.BÖLÜM

BULANIK KÜMELER

Bu bölümde belirsizliğin matematiksel olarak çözüme kavuşturan Aktaş, Çağman[2] ve Uluçay[12] kaynaklarından faydalanılarak bulanık kümeleri inceleyeceğiz.

3.1 Bulanık Küme İle İlgili Ön Bilgi

Tanım 3.1.1 U boş olmayan bir evrensel küme, U'daki bir bulanık A kümesi olsun.

$\forall x \in U$ için Fonksiyonu ile verilir. μ_A 'ya bulanık kümeye karşılık gelen Üyelik Fonksiyonu denir.

Bulanık A kümesi U' üzerindeki her elemanın üyelik derecesiyle birlikte oluşturduğu kümedir.

x 'in A'ya ait olma veya üyelik derecesi $\mu_A(x)$ olur.

Her üyelik fonksiyonu klasik evrensel kümenin elemanlarını $[0,1]$ aralığındaki bir sayıya karşılık getiren bir fonksiyondur. Bir küme, çalışma yapılan alana ait her bir elemana matematiksel olarak kümedeki üyelik derecesini temsil eden bir değer atayarak tanımlanır.

Tanım 3.1.2 X bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $R: X \times X \rightarrow [0,1]$ dönüşümüne benzerlik bağıntısı denir.

(i) **yansıma:** $\forall x \in X$ için $R(x, x) = 1$

(ii) **simetri:** $\forall x, y \in X$ için $R(x, y) = R(y, x)$

(iii) **geçişme:** $\forall x, y, z \in X$ için $R(x, z) \geq \min\{R(x, y), R(y, z)\}$

(X, R) ikilisine ise bulanık yaklaşımlı uzayı denir.

Tanım 3.1.3 $X = \{x: x \in X\}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ olmak üzere $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ kümesine X ' in A bulanık kümesi denir. μ_A fonksiyonuna A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu, $\mu_A(x)$ değerine x in üyelik derecesi (yada değeri) ve $\mu_A(x)$ kümesine de A bulanık kümesine ait elemanların üyelik derecelerinin kümesi denir. 0 ve 1 sayıları $[0,1]$ aralığının elemanları olduğundan her kümeyi bir bulanık küme olarak düşünebiliriz.

Tanım 3.1.4 Eğer her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise $A \subset B$ denir.

Tanım 3.1.5 Bulanık kümelerde birleşme işlemi $A \cup B$, " $\wedge$ " verilen bulanık kümelerin en büyük işlemi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

Tanım 3.1.6 Bulanık kümelerde kesişim işlemi $A \cap B$, " $\wedge$ " verilen bulanık kümelerin en küçük işlemi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

Benzer biçimde eğer $\{A_t: t \in T\}$ bulanık kümelerinin bir sınıfı ise $\cup_{t \in T} A_t$ ve $\cap_{t \in T} A_t$ bulanık kümeleri de aynı üyelik fonksiyonları kullanılarak;

$$\sup_{t \in T} \mu_{A_t}(x) \quad \text{ve} \quad \inf_{t \in T} \mu_{A_t}(x)$$

İle bulunur.

Bulanık küme teorisinde bulanık kümelerin tümleyen, birleşim, kesişim işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır. U evrensel küme olmak üzere;

$$\mu_{U-A(x)} = 1 - \mu_A(x) \quad , \quad x \in U$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad , \quad x \in U$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad , \quad x \in U$$

Teorem 3.1.7 Bulanık kümelerde birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir[4]

Tek kuvvet: $A \cup A = A$
 $A \cap A = A$

Değişme: $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$

Tümleme: $\overline{\overline{A}} = A$

Yutma: $A \cup (A \cap B) = A$
 $A \cap (A \cup B) = A$

Evrensel ve boş kümede yutma:

$$A \cup X = X$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Özdeşlik: $A \cap X = A$
 $A \cup \emptyset = A$

Birleşme : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

Dağılma : $B \cap (\cup_{t \in T} A_t) = \cup_{t \in T} (A_t \cap B)$

$$B \cup (\cap_{t \in T} A_t) = \cap_{t \in T} (A_t \cup B)$$

Klasik kümelerde farklı olarak;

$$\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq \mu_x(x)$$

$$\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq \mu_{\emptyset}(x)$$

Olabilir.

Örnek 3.1.8 $X = \{a, b\}$ ve A, B bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları için bulanık küme işlemleri aşağıdaki gibi olur;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0,3 & x = a \\ 0,8 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0,9 & x = a \\ 1 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 0,9 & x = a \\ 1 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0,3 & x = a \\ 0,8 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0,7 & x = a \\ 0,2 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{B}}(x) = \begin{cases} 1,0 & x = a \\ 0 & x = b \end{cases}$$

$$\mu_{A \cup \bar{A}}(x) = \begin{cases} 0,7 & x = a \\ 1 & x = b \end{cases}$$

$$\neq \mu_x(x)$$

$$\mu_{A \cap \bar{A}}(x) = \begin{cases} 0,3 & x = a \\ 0 & x = b \end{cases}$$

$$\neq \mu_{\emptyset}(x)$$

Tanım 3.1.9 $A \in V(x)$ olsun. $\{x: \mu_A(x) > 0\}$ klasik kümesi A'nın desteği olarak isimlendirilir ve **sup A** ile gösterilir.

3.2 α –Kesim ve Güçlü α –Kesim Kümeleri

Tanım 3.2.1 $A \in V(x)$ olsun. $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\{x: \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{ve} \quad \{x: \mu_A(x) > \alpha\}$$

Klasik kümelerine **α –kesim ve güçlü α –kesim kümeleri** denir. Sırasıyla A_α, A_{α^+} ile gösterilir [5].

Tanım 3.2.2 $X = (-\infty, \infty)$ olsun. Eğer $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ için $x_1 \leq x_2 \leq x_3$

$$\mu_A(x_2) = \mu_A(x_1) \wedge \mu_B(x_3)$$

İse $A \in V(x)$ bulanık kümesine **Konveks** denir [4].

Tanım 3.2.3 A,B bulanık sayıları olsun. Bu durumda $A + B, A - B, A \cdot B, A \setminus B$ aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{x+y=z} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$$

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{x-y=z} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$$

$$\mu_{A \cdot B}(z) = \sup_{x \cdot y = z} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$$

$$\mu_{A \setminus B}(z) = \sup_{\frac{x}{y} = z, y \neq 0} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$$

Teorem 3.2.4 Her bulanık küme bir esnek kümedir.

İspat: F bir bulanık küme, μ_F de F bulanık kümesini üyelik fonksiyonu

$\mu_F: U \rightarrow [0,1]$ tanımlı bir bulanık küme düşünelim. μ_F fonksiyonu $F(a)$ için $\alpha - seviye$ küme ailesi alınır ve F ailesi biliniyorsa, $\mu_F(x)$ bulanabilir. Böylece her bir bulanık F kümesi bir esnek küme sayılır.[1]

4.BÖLÜM

YAKLAŞIMLI KÜMELER

Yaklaşımli küme teorisi, klasik küme teorisinin bir genişlemesidir. Bu küme aynı zamanda evrensel küme teorisinin de bir genişlemesi olarak düşünülebilir. Aynı zamanda evrensel kümenin alt kümeleri olan alt ve üst yaklaşımları olarak adlandırılan sıralı ikili kümeler olarak tanımlanır.

Pawlak [14] tarafından ortaya konan yaklaşımli küme teorisine göre yaklaşımli kümelerin temel aracı bir denklik bağıntısıdır. Alt ve üst yaklaşımlar denklik sınıfları ile inşa edilir. Bu bölümde yaklaşımli kümeler ve temel özellikleri Aktaş ve Çağmanın[2] çalışmalarından yararlanılarak incelenmiştir.

4.1 Verilen Bir Kümenin Alt Yaklaşımı

Tanım 4.1.1 Kümenin alt kümesi olan alt yaklaşımlar, bütün denklik sınıflarının birleşimidir. Pawlak [14] tarafından yeni cebirsel yapıların tanımlanması geliştirilmiştir. U objelerin bir kümesi $X \subset U$ olsun. X kümesini U üzerinde tanımlanan bir R bağıntısına göre karakterize edelim. $R(x)$ bir x elemanının denklik sınıfını göstermek üzere yaklaşımların ve sınır bölgesinin tanımları aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$X \text{ için } R\text{- alt yaklaşımı} = R_*(x) = \bigcap_{x \in U} \{R(x) : R(x) \subseteq X\}$$

$$X \text{ için } R\text{- üst yaklaşımı} = R^*(x) = \bigcap_{x \in U} \{R(x) : R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

$$X \text{ için } R\text{- sınır bölgesi} = RN_R(x) = R^*(x) - R_*(x) \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Buna göre bir kümenin **Alt Yaklaşımı** tamamen küme tarafından kapsanan denklik sınıflarından, **Üst Yaklaşımı** ise kümeyle arakesitleri boştan farklı olan

denklik sınıflarının birleşiminden ve kümenin sınır bölgesinde üst ve alt yaklaşımların arasındaki farktan oluşmaktadır.[2,14]

4.2 Yaklaşımlı Uzay ve Yaklaşımlı Küme

Tanım 4.2.1 U evrensel küme, R bağıntısı U üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. (U, R) ikilisine **Yaklaşımlı Uzay** ve

$R(x) = (R_*(x), R^*(x))$ ikilisine de (U, R) ikilisinin **Yaklaşımlı Kümesi** denir.

4.3 Bulanık Yaklaşımlı Küme

Tanım 4.3.1 $(R_*(x), R^*(x))$ ikilisine de U üzerinde bir **Bulanık Yaklaşımlı Kümesi** denir.

Teorem 4.3.2 Her yaklaşımlı küme bir esnek küme olabilir.

İspat: $R(x)$ U evrensel kümesinin x elamanı için bir yaklaşımlı küme, R denklik bağıntısı olsun.

$R^*(x) = x$ 'in üst yaklaşımlı kümesi

$R_*(x) = x$ 'in alt yaklaşımlı kümesi

Ve R ile eşdeğerdir.

$p_1(x)$ tanımlarsak, $[X]_R \subseteq X$ için bulunur. $p_2(x)$, de $[X]_R \cap X \neq \emptyset$ şeklinde tanımlanır.

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ koşullarını parametre kümesinin elemanları için ele alabiliriz.

Bu ise $E = [p_1(x), p_2(x)]$ şeklinde tanımlanır. O halde fonksiyonu şöyle ifade edebiliriz.

$$F: E \rightarrow P(U) \quad F(p_i(x)) = \{x \in U: p_i(x) \text{ doğru } i = 1, 2, \dots\}$$

Öyleyse ;

$R(x)$ kümesinin her bir yaklaşımı X esnek kümesidir.

$(F, E) = \{(p_1(x), R_*(x)), (p_2(x), R^*(x))\}$ şeklinde ifade edilir. [14]

5. BÖLÜM

ESNEK GRUPLAR

Bu bölümde esnek küme kullanılarak inşa edilen cebirsel yapılardan esnek gruplar üzerinde durulacaktır. Bu bölümde temel terim ve sonuçlar için Aktaş, Çağman [1] ve Aslam, Qurashi [3] kaynakları kullanılmıştır. Bölüm boyunca G bir grup, $A \neq \emptyset$ bir küme olsun. R' de A 'nın bir elemanı ve G' nin bir elemanı arasında ikili işlem gösterebilir. $F: A \rightarrow P(G)$ tanımlanan küme değerli fonksiyon

$$F(x) = \{y \in G: (x, y) \in R, x \in A \text{ ve } y \in G\} \text{ olarak tanımlanır.}$$

Burada (F, A) ikilisine G üzerinde Esnek Küme denir. A dan G 'ye tanımlanan küme değerli fonksiyon $A \times G$ üzerinde bir R ikili işlemi tanımlar ve

$R = \{(x, y) \in A \times G: y \in F(x)\}$ ile gösterilir. (A, G, R) üçlüsü yaklaşımlı kümesi olarak bilinir.

5.1 Esnek Grubun Tanımı

Tanım 5.1.1 G bir grup ve (F, A) esnek kümesi G üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall x \in G$ için $F(x) \leq G$ oluyorsa; O zaman (F, A) ikilisine G üzerinde bir esnek grup denir.[1]

Örnek 5.1.2 $G = A = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ permütasyon grubu olsun.

$F: S_3 \rightarrow S_3$ fonksiyonunun değer kümesi $F(x) = \{y \in G: xRy \Leftrightarrow y = x^n, n \in N\}$ şeklinde tanımlansın. (F, A) esnek grubunun alt kümeleri $\{F(x): x \in A\}$ şeklinde parametrize edilen bir ailedir. Bu bize G nin alt gruplarının koleksiyonunu verir. Yukarıda tanımlanan özel F dönüşümü için $F(x)$ değeri G nin bir alt grubudur.

Bu durumda (F, A) esnek grubunu G nin alt gruplarının koleksiyonu olarak alabiliriz.

$$F(e) = \{e\}$$

$$F(12) = \{e, (12)\}$$

$$F(13) = \{e, (13)\}$$

$$F(23) = \{e, (23)\}$$

$$F(123) = F(132) = \{e, (123), (132)\}$$

Örnek 5.1.3 $G=A=Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ olsun. Ve dönüşümü de $F:Z_6 \rightarrow Z_6$ fonksiyonunun değer kümesi $F(x) = \{y \in G: x.y = 0\}$ şeklinde tanımlansın (F, A) esnek grubunun alt kümeleri $\{F(x): x \in A\}$ şeklinde parametrize edilen bir ailedir. Bu bize G nin alt gruplarının koleksiyonunu verir. Yukarıda tanımlanan özel F dönüşümü için $F(x)$ değeri G nin bir alt grubudur. Bu durumda (F, A) esnek grubunu G nin alt gruplarının koleksiyonu olarak alabiliriz.

$$F(0) = G$$

$$F(1) = \{0\}$$

$$F(2) = \{0,3\}$$

$$F(3) = \{0,2,4\}$$

$$F(4) = \{0,3\}$$

$$F(5) = \{0\}$$

Teorem 5.1.4 (F,A) ve (H,A) G grubu üzerinde esnek gruplar olsun.

O halde; $(F,A) \tilde{\cap} (H,A)$ 'da G üzerinde esnek gruptur.

İspat: Tanım 2.7.1 den $(F,A) \tilde{\cap} (H,A) = (U,C)$ yazabiliriz.

O zaman;

$$C = A \cap A = A \text{ ve } \forall x \in C \text{ için } U(x) = F(x) \text{ ve } U(x) = H(x)$$

olduğunu biliyoruz.

$$U:A \rightarrow P(G) \text{ tanımlı } \forall x \in A \text{ için } (U,A) \text{ esnek kümedir.}$$

Bu nedenle; (U,A) G üzerinde bir esnek küme , $\forall x \in A$ için

$$U(x)=F(x) < G$$

Ya da

$$U(x)=H(x) < G \text{ olduğundan}$$

$(F,A) \tilde{\cap} (H,A)$ esnek kümesi G üzerinde esnek gruptur.

Teorem 5.1.5 (F,A) ve (H,B) esnek kümeleri G üzerinde esnek grup olsun:

Eğer; $A \cap B = \emptyset$ ise $(F,A) \tilde{\cup} (H,B)$ 'te G üzerinde esnek gruptur.

İspat : Tanım 2.9.1' den yazabiliriz. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan aşağıdakilerini söyleyebiliriz. O halde $\forall x \in C$ olsun. $\forall x \in A - B$ yada $x \in B - A$ için

Eğer;

$$x \in A - B \text{ olduğunda } U(x) = F(x) < G$$

Ve

$$x \in B - A \text{ olduğunda } U(x) = F(x) < G$$

O halde; $(F,A) \tilde{\cup} (H,B)$ G üzerinde esnek gruptur.

Teorem 5.1.6 (F, A) ve (H, B) esnek kümeleri G üzerinde iki esnek grup olsun. Eğer; $(F, A) \tilde{\cup} (H, B)$ G üzerinde bir esnek grup ise ancak ve ancak $\forall x \in A \cap B$ için

$$F(x) \subset H(x) \quad \text{yada} \quad H(x) \subset F(x) \quad \text{olur.}$$

İspat : $(F, A) \tilde{\cup} (H, B) = (L, C)$ birleşimi esnek küme olsun. O halde $A \cap B = C$ ve L nin birleşiminin tanımından

$$\forall x \in C \quad \text{için} \quad L(x) = F(x) \cup H(x) \quad \text{olur.}$$

O halde ; (F, A) ve (H, B) esnek kümeleri G üzerin de iki esnek grup olduğundan

$$\forall x \in C \quad \text{için} \quad F(x) \subset H(x) \quad \text{yada} \quad H(x) \subset F(x) \quad \text{olur.}$$

Bu yüzden; $\forall x \in C$ için

$$F(x) \cup H(x) = H(x)$$

ya da

$$F(x) \cup H(x) = F(x) \quad \text{olacaktır.}$$

$\forall x \in C$ için $F(x)$ ve $H(x)$ G 'nin alt grubu olduğundan $\forall x \in C$ için $F(x) \cup H(x)$ G nin alt grubudur.

O halde $(L, C) = (F, A) \tilde{\cup} (H, B)$ G üzerinde esnek grubudur. Aksini olmadığını benzer şekilde ispat ederiz.

Teorem 5.1.7 (F, A) ve (H, B) G üzerinde iki esnek grup olsun.

O halde $(F, A) \wedge (H, B)$ G üzerinde esnek gruptur.

İspat: Tanım 2.7.1' den $(F,A) \triangleleft (H,B) = (U,A \times B)$ yazabiliriz.

$F(\alpha)$ ve $H(\beta)$ G için esnek alt gruplar ise $F(\alpha) \cap H(\beta)$ 'da G için iki esnek alt gruptur. Bu nedenle $U(\alpha, \beta)$ bütün için G nin alt grubudur.

Buradan $(F,A) \triangleleft (H,B)$ nin G üzerinde esnek grup olduğu anlaşılır.

5.2 Esnek Grubu Birim Elemanı

Tanım 5.2.1 (F,A) , G üzerinde esnek grup olsun.

O halde;

(i) $\forall x \in A$ için $F(x) = \{e\}$ ise (F,A) 'ya G üzerinde birim esnek grup denir.

(ii) $\forall x \in A$ için $F(x) = G$ ise (F,A) 'ya G üzerinde mutlak esnek grup denir.

Teorem 5.2.2

(i) (F,A) G üzerinde esnek grup, $f: G \rightarrow K$ bir homomorfizma olsun.

Eğer, $\forall x \in A$ için $F(x) = \{e\}$ ise $(f(F), A)$ K üzerinde esnek birim gruptur.

(ii) (F,A) G üzerinde mutlak esnek grup, $f: G \rightarrow K$ bir homomorfizma olsun.

Eğer, $\forall x \in A$ için $F(x) = G$ ise $(f(F), A)$ K üzerinde mutlak esnek gruptur.

İspat:

(i) e_K , K üzerinde birim eleman ise $x \in A$ için $f(F(x)) = e_K$ dır.

O halde; Tanım 5.2.1'den $(f(F), A)$ K üzerinde birim gruptur.

(ii) (F,A) G üzerinde mutlak esnek grup olduğu için

$\forall x \in A$ için $F(x) = G$

O halde $x \in A$ için $f(F(x)) = f(G) = K$

Buradan tanım 5.2.1'den K üzerinde $(f(F), A)$ mutlak esnek gruptur.

5.3 Esnek Alt Grup

Tanım 5.3.1 (F, A) ve (H, K) esnek alt gruplar olsun.

(i) $K \subset A$

(ii) Bütün $x \in K$ için $H(x) < F(x)$

Şartlarını sağlayan (H, K) ' ya (F, A) 'nın esnek alt grubu denir. $(H, K) \lesssim (F, A)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 5.3.2 $G = S_3$, $A = S_3$ ve $K = A_3$ olsun. Fonksiyonun tanımından

$F(x) = \{y \in S_3 : xRy \Leftrightarrow y = x^n, n \in N\}$ ve $H(x) = \{y \in A_3 : xRy \Leftrightarrow y \in \langle x \rangle\}$ olur. O halde $\forall x \in A_3$ için $A_3 < S_3$ ve $H(x) < F(x)$ olduğu için $(H, K) \lesssim (F, A)$ olur.

Teorem 5.3.3 (F, A) ve (H, K) G üzerinde iki esnek grup olsun.

(i) Eğer; $\forall x \in A$ için $F(x) \subseteq H(x)$ ise (F, A) esnek grubu (H, A) esnek grubunun esnek alt grubudur.

(ii) Eğer; $E = \{e\}$ ve $(U, E), (F, G)$ G üzerinde esnek gruplar ise, (U, E) esnek grubu (F, G) esnek grubunun esnek alt grubudur.

Sonuç 5.3.4 (F, G) G üzerinde esnek grup olsun. O halde (F, G) ve (F, E) her ikisi de (F, G) esnek grubunun alt grubudur.

İspat : Bu sonuca tanım 5.2.1' den kolayca ulaşabiliriz.

Teorem 5.3.5 (F, A) G üzerinde esnek grup olsun . I indeks kümesi olmak üzere; (F, A) 'nın esnek alt gruplarının ailesi $\{(H_i, K_i) : i \in I\}$ olsun.

O zaman;

- (i) $\bigcap_{i \in I} (H_i, K_i)$ kümesi (F, A) 'nın esnek alt grubudur.
- (ii) $\bigwedge_{i \in I} (H_i, K_i)$ kümesi (F, A) 'nın esnek alt grubudur.
- (iii) $i, j \in I$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ ise $\bigvee_{i \in I} (H_i, K_i)$ kümesi (F, A) 'nın esnek alt grubudur.

İspat : $\bigcap_{i \in I} K_i \subset A$ olduğu aşıkardır. $i \in I$ için $(H_i, K_i) \lesssim (F, A)$ ise $\bigcap_{i \in I} (H_i, K_i)$ küme ailesi (F, A) nın esnek alt grubudur.

Teorem 5.3.6 (F, A) ve (H, B) G üzerinde iki esnek grup olsun. (F, A) esnek kümesi (H, B) esnek kümesinin esnek alt grubu olsun.

Eğer $f: G \rightarrow K$ ya homomorfizm ise o halde $(f(F), A)$ ve $(f(H), B)$ her ikisi de K üzerinde esnek alt gruptur. $(f(F), A) \subset (f(H), B)$ şeklinde gösterilebilir.

İspat: $f: G \rightarrow K$ ya homomorfizm olduğundan $\forall x \in A$ ve $\forall y \in B$ için $f(F(x))$ ve $f(H(y))$ ise K 'nın alt kümeleridir. Bu nedenle; $(f(F), A)$ ve $(f(H), B)$ K üzerinde esnek alt gruptur.

Eğer; (F, A) esnek kümesi (H, B) esnek kümesinin alt grubu ise; tanım 2.1.4' ten $x \in A$ için $F(x)$ 'e $H(x)$ in alt grubu ve $f(F(x))$ 'de $f(H(x))$ in alt grubudur. $(f(F), A) \lesssim (f(H), B)$ elde ederiz.

5.4 Esnek Grup Homomorfizma

Tanım 5.4.1 (F, A) ve (H, B) esnek grupları sırasıyla G ve K üzerinde iki esnek grup ve $f: G \rightarrow K$ ile $g: A \rightarrow B$ iki fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan

$(f, g): (F, A) \rightarrow (H, B)$ 'ye Esnek Homomorfizma denir. $(F, A) \sim (H, B)$ şeklinde gösterilebilir.

- (i) $f: G \rightarrow K$ homomorfizmadır.
- (ii) $g: A \rightarrow B$ örtendir.

(iii) $\forall x \in A$ için $f(F(x)) = H(g(x))$ dır.

Bu tanımdan, $f: G \rightarrow K$ izomorfizm, $g: A \rightarrow B$ birebir ve örten fonksiyon ise $(f, g): (F, A) \rightarrow (H, B)$ Esnek Grup İzomorfizması ve $(F, A) \simeq (H, B)$ şeklinde gösterilir.

5.5 Esnek Normal Alt Grup

Tanım 5.5.1 (F, A) esnek kümesi G üzerinde , (H, B) esnek kümesi (F, A) esnek kümesi esnek alt kümesidir.

Eğer ; $\forall x \in B$ için $H(x) \triangleleft F(x)$ ise; (yani $H(x)$ esnek kümesi $F(x)$ esnek kümesinin Normal Alt Grubudur) (H, B) esnek kümesi (F, A) esnek kümesi normal esnek alt grubudur. Ve $H(x) \trianglelefteq F(x)$ şeklinde yazılır.

Teorem 5.5.2 (F, A) G üzerinde esnek grup, (H, B) esnek kümesi de (F, A) nın alt grubu ve (K, B) esnek kümesi (F, A) da normal esnek alt grup ise $(H, B) \cap (K, B)$ esnek grubu (H, B) de normal esnek alt gruptur.

İspat: $(F, A) \check{\cup} (H, B) = (L, C)$ olsun.

Eğer (H, B) esnek kümesi de (F, A) nın alt grubu ve (K, B) esnek kümesi (F, A) da normal esnek alt grup ise açıkca $(L, B) \cong (H, B)$ olduğu görülür. Bundan dolayı (L, B) esnek grubu (H, B) esnek grubunun esnek alt grubudur.

Şimdi $(L, B) \trianglelefteq (H, B)$ olduğunu gösterelim.

$\forall b \in B$ için $H(b) \cap K(b) \triangleleft H(b)$ olduğunu göstermeliyiz. $H(b) \cap K(b)$ 'nin $H(b)$ 'nin normal alt grubu olduğunu biliyoruz.

O halde $\forall b \in B$ için $(F, B) \check{\cup} (K, B) = (L, B)$ grubu (H, B) 'nin normal esnek alt grubudur.

Teorem 5.5.3 (F, A) esnek kümesi G üzerinde esnek gruptur. $\{(H_i, A_i) : i \in I\}$ ailesi (F, A) da normal esnek alt grubu ise birleşimin genelleştirilmiş hali $\bigcap_E (H_i, A_i)_{i \in I}$ (F, A) 'nın normal esnek alt grubudur.

İspat: Mademki $\{(H_i, A_i) : i \in I\}$ ailesi (F, A) da normal esnek alt grubu olsun. Birleşimin genelleştirilmiş hali olan

$$\bigcap_E (H_i, A_i)_{i \in I} \text{ tanımından } \bigcap_E (H_i, A_i)_{i \in I} = (H, C) \text{ olur.}$$

O zaman $C = \bigcup A_i$ ve $\forall i \in I$ için tanımdan dolayı

$$H(e) = \begin{cases} H_i(e) & \text{eğer } e \in A_i - A_j, \forall i, j \in I \\ \bigcap H_i(e) & \text{eğer } e \in \bigcap A_i, \forall i, j \in I \end{cases}$$

$\forall e \in A_i - A_j, \forall i, j \in I$ ve $i \neq j$ Her bir $H_i(e)$ $F(e)$ 'de normal alt grubudur.

$\forall e \in \bigcap A_i$ için $\bigcap H_i(e)$ $F(e)$ 'de normal alt grubudur.

$\forall x \in C$ için $H(e)$, $F(e)$ 'nin normal alt grubudur.

Böylece $(H, C) \lesssim (F, A)$ şeklinde gösterilir.

5.6 Esnek Değişmeli Grup

Tanım 5.6.1 (F, A) esnek kümesi G üzerinde esnek grup olsun. Ve G üzerinde değişmeli esnek grup olduğunu söylemek için

$\forall \alpha \in A$ için her bir $F(\alpha)$ nın G üzerinde değişmeli esnek grup olduğunu söylemek gerekir.

Örnek 5.6.2 $S_3 = \{e, x, y, y^2, xy, xy^2\}$ grubunu düşünelim.

x ve y iki elemanın bağıntıları

$$O(x) = 2$$

$$O(y) = 3$$

$$O(xy) = 2$$

$$xy = y^2x \quad \text{ve} \quad yx = xy^2$$

$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ parametre kümesini ve $F: A \rightarrow P(S_3)$ fonksiyonu düşünelim.

$$F(\delta) = \{e, x\}$$

$$F(\beta) = \{e, y, y^2\}$$

$$F(\gamma) = \{e, xy\}$$

$$F(\alpha) = \{e, x, y, y^2, xy, xy^2\}$$

O halde (F, A) esnek kümesi S_3 üzerinde esnek gruptur. (F, A) esnek alt grubu (H, B) nin elemanları

$$H(\alpha) = \{e, \}$$

$$H(\beta) = \{e, y, y^2\}$$

$$H(\gamma) = \{e, xy\}$$

$\forall \alpha \in B$ için her bir $H(\alpha)$ parametresi için $F(\alpha)$ nın değişmeli alt grubudur.

O halde (H, B) esnek grubu (F, A) nın değişmeli esnek grubudur.

Teorem 5.6.3 (H, B) esnek grubu (F, A) nın değişmeli esnek grubu ise (F, A) esnek grubu G üzerinde normal esnek gruptur.

İspat: $\forall \alpha \in A$ için her bir $F(\alpha)$ nın G üzerinde değişmeli esnek grup ve $\forall \alpha \in B$ için her bir $H(\alpha)$ $F(\alpha)$ 'nın değişmeli esnek gruptur. Her değişmeli grubun normal alt grup olduğundan

$$\forall \alpha \in B \text{ için } H(\alpha) \text{ } F(\alpha)\text{'nin normal alt grubudur.}$$

$$\text{Buradan da } (H, B) \approx (F, A) \text{ olur.}$$

5.7 Esnek Grubun Tersisi

Tanım 5.7.1 (F, A) esnek kümesi G üzerinde esnek grup olsun. O zaman (F, A) 'nın tersi $(F, A)^{-1}$ şeklinde gösterilir. Esnek grubun tersi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(F(a))^{-1} = \{x^{-1} : x \in F(a)\} \text{ olmak üzere; } (F, A)^{-1} = \{(F(\alpha))^{-1} : \alpha \in A\} \text{ dır.}$$

Teorem 5.7.2 (F, A) esnek kümesi G üzerinde esnek grup olsun.

O zaman $(F, A)^{-1} = (F, A)$ dır. Tersisi doğru değildir.

İspat: tanımdan $(F, A)^{-1} = \{(F(\alpha))^{-1} : \alpha \in A\}$ olduğunu biliyoruz. $F(\alpha)'$ nın her bir parametresi G nin alt grubudur. Bu da $\forall \alpha \in A$ için $(F(\alpha))^{-1} = F(\alpha)$ olduğunu gösterir. O halde $(F, A)^{-1} = (F, A)$ tersi doğru değildir. aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 5.7.3 $F: A \rightarrow P(G)$ fonksiyon, $G = \{1, -1, i, -i\}$ alt grup ve $A = \{x, y, z\}$ parametresini düşünelim.

$$F(x) = \{1\}$$

$$F(y) = \{-1\}$$

$$F(z) = \{-1\} \text{ dir.}$$

O halde $(F, A)^{-1} = (F, A)$ olduğu görülür.

5.8 Esnek Devirli Grup

Tanım 5.8.1 (F, A) esnek kümesi G üzerinde esnek grup olsun. $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha)$ 'nın devirli bir alt grubu ise (F, A) 'ya G 'nin devirli esnek alt grubu denir.

Örnek 5.8.2 $D_4 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ grubunu düşünelim.
a ve b elemanlarının bağıntıları

$$O(\alpha) = 4$$

$$O(b) = 2$$

$$ba = a^3b$$

$A = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ parametre kümesini, $F: A \rightarrow P(D_4)$ fonksiyonunu düşünelim.

$$F(t_1) = \{e, a^2\}$$

$$F(t_2) = \{e, b\}$$

$$F(t_3) = \{e, ab\}$$

$$F(t_4) = \{e, a^2b\}$$

$$F(t_5) = \{e, a^3b\}$$

$$F(t_6) = \{e, a, a^2, a^3\}$$

Öyleyse (F, A) esnek kümesi D_4 üzerinde devirli esnek gruptur.

$\forall \alpha \in A$ için her bir $F(\alpha)$ parametresi D_4 üzerinde devirli alt gruptur.

O halde (F, A) D_4 üzerinde devirli esnek gruptur.

5.9 Esnek Sağ Koset

Tanım 5.9.1 (F, A) esnek kümesi G üzerinde esnek grup, (H, B) esnek kümesi (F, A) kümesinin herhangi bir esnek alt grubu ve $\alpha \in \cap F(x)$ olsun.

Esnek kümenin tanımından üretilen $\forall b \in B$ için $(H_\alpha(b)) = (H(b))^\alpha$ olmak üzere (H_α, B) esnek kümesi olarak tanımlanır ve (H_α, B) 'ye (F, A) 'nın esnek sağ koseti denir. Benzer şekilde (aH, B) esnek kümesi esnek sol kosetidir.

Örnek 5.9.2 $D_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ grubunu düşünelim.

a ve b iki elemanın bağıntıları

$$O(\alpha) = 4$$

$$a^2 = b^2$$

$$ba = a^3b$$

$A = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ parametre kümesini, $F: A \rightarrow P(D_8)$ fonksiyonunu düşünelim.

$$F(t_1) = \{e, a^2\}$$

$$F(t_2) = \{e, a, a^2, a^3\}$$

$$F(t_3) = \{e, ab, a^2, a^3b\}$$

$$F(t_4) = \{e, b, a^2, a^2b\}$$

Her bir $F(t)$ parametresi D_8 in alt grubudur. Mademki (F, A) esnek kümesi D_8 üzerinde esnek grup ise $\forall t_i \in A$ için $\cap F(t_i) = \{e, a\}$ olur.

(H, B) esnek grubu $B = \{t_2, t_3, t_4\}$ parametre kümesi (F, A) esnek kümesinin alt grubudur.

$$F(t_2) = \{e, a^2\}$$

$$F(t_3) = \{e, ab, a^2, a^3b\}$$

$$F(t_4) = \{e, b, a^2, a^2b\}$$

Şimdi sol kosetlerini benzer şekilde bulabiliriz.

5.10 Esnek Faktör Grubu

Tanım 5.10.1 (F, A) G üzerinde esnek normal alt grup olsun. (H, B) esnek grubu (F, A) esnek grubunun esnek maksimal normal alt grubu olduğu söyleye biliriz.

Eğer (K, B) (F, A) nın gerçek olmayan normal esnek alt grubu ise (H, B) 'de (K, B) kapsar.

Böylece (F, A) nın alt grubu olan (H, B) esnek grubu esnek maksimal grup ise ancak ve ancak (K, B) 'de (F, A) 'nın **normal esnek alt grubudur**.

Böylece ; $(H, B) \cong (K, B) \cong (F, A)$ olur.

SONUÇ

Bu çalışmada klasik cebirsel yapılardan grup kavramının esnek küme üzerindeki yapıları incelenmiştir. Bulanık kümeler, yaklaşımlı kümeler ve esnek kümeler sosyal bilimlerden fen bilimlerine kadar bir çok bilim dalında yoğun olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle bu kavramların tanıtılması ve üzerinde bir takım çalışmaların yapılması önemlidir. Bu çalışmada öncelikli olarak bulanık kümeler, yaklaşımlı kümeler ve esnek kümeler ve bunların özellikleri hakkında bilgi verilerek özellikle bu çalışmada esnek küme üzerinde tanımlanan cebirsel yapılardan grup üzerinde durulmuş, bu yapının cebirsel özellikleri incelenmiştir ve bir takım örnekler verilmiştir. Esnek kümeler üzerinde diğer bir takım cebirsel yapılar da (halka, modül vb.) kurulmuştur. Halen esnek kümeler güncelliğini korumaktadır. Matematikçiler tarafından günümüzde de ilgi odağı olmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] H. Aktas and N. Cagman. (2007). Soft sets and soft group, *Inform. Sci.* 177 2726–2735.
- [2] H. Aktas and N. Cagman. (2005). Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler, *Journal of Arts and Sciences Sayı: 3*.
- [3] M. Aslam, S. M. Qurashi. (2012). Some contributions to soft groups, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* 177- 195.
- [4] A. Aygünoğlu, H. Aygün. (2009). Introduction to fuzzy soft groups , *Computers & Mathematics with Applications* 1279_1286.
- [5] Cheng-Fu Yang. (2003). A note on “Soft Set Theory” *Comput. Math. Appl.* 45 (4–5) 555–562.
- [6] J. Liu, R. Yan. (2008). Fuzzy soft sets and fuzzy soft groups, *Control and Decision Conference* .2626-2629.
- [7] D. Molodtsov. (1999). Soft set theory—First results, *Computers and Mathematics with Applications- Elsevier*. 19-31.
- [8] P.K. Maji. (2003). Soft set theory, *Comput. Math. Appl.* 45555–562.
- [9] P.K. Maji. (2002). An application of soft sets in a decision making problem, *Comput. Math. Appl.* 44 1007–1083.
- [10] A.Sezgin, A.O.Atagün. (2011). Soft groups and normalistic soft groups, *Computers & Mathematics with Applications, Elsevier*. 685-698
- [11] Won Keun Min, Similarity in soft set theory, *Applied Mathematics Letters* 25 (2012) 310–314
- [12] V. Uluçay. (2010). bulanık küme kavramı, Gaziantep üniversitesi yüksek lisans tezi.
- [14] Z. Pawlak. (1982). Rough sets, *Int. J. Inform. Computer Sci.* 11 341–356.
- [15] LA_Zadeh.(1965). Fuzzy_sets, *Information and control, Elsevier*.338-353.