

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ HEISENBERG GRUBUNDA YÜZEYLER

DOKTORA TEZİ

Güliden ALTAY

(08121201)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Essin TURHAN

2014

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LORENTZ HEISENBERG GRUBUNDA YÜZEYLER

**DOKTORA TEZİ
Gülden ALTAY
(08121201)**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Essin TURHAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 24.04.2014

2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ HEISENBERG GRUBUNDA YÜZEYLER

DOKTORA TEZİ
Gülden ALTAY
(08121201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 24.04.2014

Tezin Savunulduğu Tarih: 23.05.2014

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Essin TURHAN (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü)
Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ (İ.Ü)
Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Müge KARADAĞ (İ.Ü)

MAYIS - 2014

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarında bana her türlü gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam sayın Doç. Dr. Essin TURHAN 'a, ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT 'e ve her türlü yardımları için sayın Yrd. Doç. Dr. Talat KÖRPINAR 'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Güliden ALTAY

ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
SİMGELER LİSTESİ	VI
1. BÖLÜM	1
Giriş	1
2. BÖLÜM	3
Temel Tanım ve Teoremler	3
Lorentz Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler	26
3. BÖLÜM	31
3- Boyutlu Lorentz Heisenberg Grup Yapısı	31
4. BÖLÜM	39
3- Boyutlu Lorentz Heisenberg Grubunda Spacelike ve Timelike Yüzeyler ..	39
5. BÖLÜM	73
3- Boyutlu Heisenberg Grubunda Çift Değişkenli Fonksiyonlar Yardımıyla	
Tanımlanan Spacelike ve Timelike Yüzeyler	73
6. BÖLÜM	95
Sonuç	95

KAYNAKLAR.....	97
----------------	----

ÖZET

LORENTZ HEISENBERG GRUBUNDA YÜZEYLER

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm; çalışmanın giriş kısmı olup, Lie grupları, Heisenberg grup ve yüzeyler üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler incelendi.

İkinci bölümde; Lie grupları ve yüzeyler için kullanılan temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde; Lorentz Heisenberg grubun yapısı incelendi.

Dördüncü bölüm; çalışmanın orijinal kısımlarından biri olup, Lorentz Heisenberg grubunda alınan bir yüzeye ait bazı karakterizasyonlar gösterildi. Daha sonra bu yüzeylerin minimal (maksimal) yüzey olma şartları verilerek Gauss eğrilğine göre karakterizasyonları elde edildi.

Beşinci bölüm; çalışmanın diğer bir orijinal kısmı olup, Lorentz Heisenberg grubunda iki değişkenli fonksiyonlar yardımıyla elde edilen minimal (maksimal) yüzeylerin farklı karakterizasyonları yapılp, iki eğrinin Heisenberg grup çarpımıyla oluşan yüzeyler incelendi.

Altıncı bölüm ise çalışmanın sonuç kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: Lie grubu, Heisenberg grup, Lorentz Heisenberg grup, minimal yüzey, öteleme yüzeyi, minimal öteleme yüzeyi, Gauss eğrilği, ortalama eğrilik.

ABSTRACT

SURFACES IN LORENTZ HEISENBERG GROUP

This thesis consist of six chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter; fundamental definitions and theorems of Lorentz space and surfaces are given.

In the third chapter theorems of Lorentz Heisenberg group are given.

The fourth chapter contains original part of our study; some characterizations of surfaces in Lorentz Heisenberg group are given. Then, conditions for these surfaces of being minimal (maximal) surfaces are obtained.

The fifth chapter contains another original part of our study; Surfaces which are obtain with two variable functions are given and conditions for these surfaces of being minimal (maximal) surfaces are obtained. Also, generated by two curves has been constructed and some characterizations have been given.

The sixth chapter has been devoted to the conclusion.

Keywords: Lie group, Heisenberg group, Lorentz Heisenberg group, minimal surface, translation surfaces, minimal translation surface, Gauss curvature, mean curvature.

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{H}_3$	: 3-boyutlu Heisenberg Group
$\times$	: Vektörel çarpım
$[,]$	: Lie operatörü
$\mathbf{N}$	: Yüzeyin birim normal vektör alanı
∇	: Levi Civita koneksiyonu
$T_p(M)$	: p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi
$\chi(M)$	: Vektör alanlarının cümlesi
Sp	: Şekil operatörü
$K(p)$	: Gauss eğriliği
$H(p)$	: Ortalama eğriliği
$ $	: Norm
I	: Birinci temel form
II	: İkinci temel form

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Lie grupları, grup işlemi üzerinde diferensiyelenebilir manifoldlardır. Bu durumda Lie grubu aynı zamanda bir grup, bir topolojik uzay ve bir manifolddur, [6].

Lie grupları teorisi, matematiğin bir çok dalında önemli bir yere sahiptir. Bunların başında diferensiyel geometri, analiz, topoloji ve cebir gelmektedir. Lie grupları teorisi gerek matematiksel fizikte, gerekse mühendislikteki pek çok probleme başarı ile uygulanmıştır.

Herbir Lie grubuna eşlik eden sonlu boyutlu bir Lie cebiri vardır. Bu nedenle Lie grupları teorisi Lie cebirleri ile Lie grupları arasındaki ilişkiye önemli bir yer ayırır. Yani, Lie grubunun özellikleri bu gruba karşılık gelen Lie cebirine birer özellik olarak aksettirilir. Bu teoride, örneğin, irtibatlı, basit irtibatlı Lie grupları, birer izomorfizm altında kendilerine ait olan Lie cebirleri tarafından tamamen belirtilebilirler. Bunun için bu cins Lie gruplarını incelemek yerine onların Lie cebirlerini incelemek mümkün olur, [6].

Nilpotent Lie gruplar arasında en önemli yere sahip olanı iki adımda çözülebilenlerdir. Heisenberg grup, irtibatlı, iki adımda çözülebilen nilpotent bir Lie grup olup, topolojik olarak $\mathbb{R}^3$ e homeomorfik olan 3×3 tipindeki matrislerin grubudur, [18, 19].

Rahmani; Heisenberg grup üzerinde oluşturulan üç Lorentz metrik yardımıyla bu grubun izometri gruplarını tanımladı. Elde ettiği bu üç metriktan yalnızca birinin flat olduğunu gösterdi. Ayrıca bu metrikler için Jacobi vektör alanları ve geodezik eğriler için açık formüller elde etti, [19].

Piu; Riemann Heisenberg grubunda iki 1- parametrelili altgrubun çarpımıyla elde edilen minimal yüzeyleri incelemiştir. Ayrıca, harmonik Gauss dönüşümüyle verilen minimal yüzeyleri karakterize etmiştir, [17].

İnoguchi; 3– boyutlu Riemann Heisenberg Grubunun bazı temel özelliklerini inceledi. Özellikle eğrilikler, geodezikler ve holonomi gruplarını elde etti. Ayrıca, 3– boyutlu Riemann Heisenberg Grubunda minimal yüzeylerin bazı karakterizasyonlarını verdi, [8,9]. Daha sonra, iki eğrinin çarpımıyla elde edilen öteleme yüzeylerini inceleyerek, bu yüzeylerin minimal olma şartlarını incelemiştir, [10].

Bu çalışmada ise 3– boyutlu Lorentz Heisenberg Grubunda, çeşitli yüzeyler incelenerek, bu yüzeylerin bazı karakterizasyonları elde edildi. Ayrıca, bu yüzeylerin minimal (maksimal) yüzey olma şartları verildi. Daha sonra iki eğrinin grup çarpımıyla elde edilen yüzeylerin karakterizasyonları elde edildi.

2. BÖLÜM

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1.

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v \in V$ için

- i) $g(u, v) = g(v, u)$,
- ii) $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$,
- $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir, [15].

Tanım 2.1.2.

g , V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. Bu simetrik bilinear form üç değişik durum altında incelenebilir;

1) Definit Durum:

Eğer,

- i) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı,
- ii) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ ise g simetrik bilinear formuna negatif tanımlı

denir.

2) Semi-definit Durum:

Eğer,

- i) $\forall v \in V$ için $g(v, v) \geq 0$ ise g simetrik bilinear formuna pozitif yarı-tanımlı,

ii) $\forall v \in V$ için $g(v, v) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif yarı-tanımlı denir.

3) Non-dejenere Durum:

Eğer, $\forall w \in V$ için $g(v, w) = 0$ iken $v = 0$ ise g simetrik bilineer formuna non-dejenere simetrik form denir, [16].

Tanım 2.1.3.

Reel sayılar cismi üzerinde, r -tane vektör uzayı, $V_1, V_2, \dots, V_r$ olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $1 \leq i \leq r$, için $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_{i-1}, av_i + bu_i, v_{i+1}, \dots, v_r) &= af(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r) \\ &\quad + bf(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \dots, v_r) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ise f ye r -lineer fonksiyon denir, [6].

Tanım 2.1.4.

$V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün r -lineer fonksiyonların cümlesini

$$L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R})$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalarla çarpma işlemleri, sırasıyla, $\forall (u_1, u_2, \dots, u_r) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ için

$$(f_1 + f_2)(u_1, u_2, \dots, u_r) = f_1(u_1, u_2, \dots, u_r) + f_2(u_1, u_2, \dots, u_r)$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(\lambda f)(u_1, u_2, \dots, u_r) = \lambda f(u_1, u_2, \dots, u_r)$$

şeklinde tanımlanırsa, bu iki işleme göre $L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensör çarpımı denir ve

$$L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına r . dereceden bir tensör denir. Eğer

$$V_1 = V_2 = \dots = V_r = V$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına r . dereceden bir kovaryant tensör denir, $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir, [6].

Tanım 2.1.5.

$\forall \sigma \in S_r$ permütasyonu ve bir V vektör uzayı üzerindeki bir r -lineer f fonksiyonu için

$$\sigma f = f$$

yani

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(r)}) = f(u_1, u_2, \dots, u_r)$$

ise r -lineer f fonksiyonuna bir simetrik r -lineer fonksiyon veya r . mertebeden simetrik kovaryant tensör denir, [6].

Teorem 2.1.6.

V , n -boyutlu bir reel vektör uzayı ve V üzerinde rankı r olan simetrik, non dejenere, 2. dereceden kovaryant tensör alanı g olsun. Bu durumda V nin sıralı bir

bazı $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ve bu bazın dual bazıda $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n\}$ ise bu iki baz arasında, g dönüşümü yardımıyla,

$$g = \sum_{i=1}^r c_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i, \quad c_i = \pm 1 \text{ ve } r \leq n$$

eşitliği vardır, [6].

Tanım 2.1.7.

V bir reel vektör uzayı ve

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

simetrik bilineer form olsun. $W \subset V$ olmak üzere

$$g|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir, [16].

Tanım 2.1.8.

M, C^∞ manifold olmak üzere;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M; \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilineer, non-dejenere fonksiyona M üzerinde metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir, [16].

Tanım 2.1.9.

M, C^∞ manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere (M, g) çiftine bir Semi-Riemann manifold denir, [16].

Tanım 2.1.10.

$\dim M = n$ olmak üzere (M, g) çifti bir yarı- Riemann manifoldu olsun. v g simetrik bilinear formun indeksi olmak üzere eğer $v = 0$ ise (M, g) çiftine bir Riemann manifoldu denir. Ayrıca $n \geq 2$ ve $v = 1$ ise (M, g) çiftine bir Lorentz manifoldu denir, [16].

Tanım 2.1.11.

(M, g) bir Semi-Riemann manifold olsun. $\forall v \in M$ olmak üzere,

$g(v, v) > 0$ ise v ye space-like vektör,

$g(v, v) < 0$ ise v ye time-like vektör,

$g(v, v) = 0, v \neq 0$, ise v ye light-like veya null vektör denir, [16].

Tanım 2.1.12.

M bir Hausdorff uzay ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, M nin bir açık örtüsü olsun.

$$\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow D_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

homeomorfik dönüşümü için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere

$$f_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n,$$

$$f_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$$

fonksiyonlarının her ikisinde diffeomorfiktir.

Eğer M bu özelliklerle birlikte $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ dönüşümlerinin cümlesine ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ açık örtüsüne sahip ise o takdirde M ye n -boyutlu manifold ve $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ye de M nin bir koordinat komşuluk sistemi denir, [6].

Tanım 2.1.13.

$k \leq n$ olmak üzere M bir k -manifold ve $\bar{M}$ de bir n -manifold olsun. $\forall p \in M$ noktası için $\bar{M}$ de bir $\bar{U}$ ve M de bir U koordinat komşuluğu mevcut ve

$$U = \{m \in \bar{U} : \bar{x}_{k+1}(m) = \dots = \bar{x}_n(m) = 0\}$$

ise M ye $\bar{M}$ nin bir alt manifoldu denir. Burada

$$\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$$

koordinat sistemi $\bar{U}$ de ve

$$\{x_1 = \bar{x}_1|_U, \dots, x_k = \bar{x}_k|_U\}$$

da U daki koordinat sistemidir, [6].

Tanım 2.1.14.

M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü

i. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, R)$ için

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$$

ii. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, R)$ için

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üstünde bir afin koneksiyon ve ∇_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir, [6].

Tanım 2.1.15.

M bir manifold ve ∇ , M üstünde bir afin konneksiyon olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa ∇ koneksiyonuna M üzerinde bir Riemann koneksiyonu ve ∇_X e de X e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü adı verilir.

i. ∇ , C^∞ sınıfındandır,

ii. M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

dir,

iii. M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall p \in A$ için

$$X_p g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z)|_p + g(Y, \nabla_X Z)|_p$$

dir, [6].

Tanım 2.1.16.

M ve M' sırasıyla n ve m boyutlu C^∞ sınıfından manifoldlar ve $\varphi : M \rightarrow M'$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$p \in M$ ve f , M' de $\varphi(p)$ nin bir V komşuluğunda tanımlanan C^∞ sınıfından bir fonksiyon olsun. φ sürekli olmak üzere p nin $\varphi(U) \subset V$ olacak şekilde bir U komşuluğunu bulabiliriz. p nin bu U komşuluğunda bir $\varphi^* f$ fonksiyonu

$$(\varphi^* f)(q) = f(\varphi(q)), \quad q \in U$$

şeklinde tanımlanır. f ve φ nin her ikisinde sürekli olmak üzere φ^*f de sürekli bir fonksiyondur.

$\varphi(p)$ nin bir komşuluğunda keyfi bir C^∞ sınıfından f fonksiyonu için eğer φ^*f, p nin bir komşuluğunda C^∞ sınıfından oluyorsa o taktirde φ dönüşümü p noktasında diferensiyellenebilirdir denir.

Eğer M nin tüm noktalarında φ diferensiyellenebilir ise o taktirde φ ye M den M' ye diferensiyellenebilir bir dönüşüm adı verilir, [6].

Tanım 2.1.17.

M ve M' sırasıyla n ve m boyutlu C^∞ sınıfından manifoldlar olsun. Eğer $\varphi : M \rightarrow M'$ diferensiyellenebilir dönüşümü birebir, φ^{-1} dönüşümü mevcut ve diferensiyellenebilir ise o taktirde φ ye M den M' ye bir diffeomorfizm denir. M ve M' manifoldlarına da diffeomorfik manifoldlar denir, [6].

Tanım 2.1.18.

M, n -boyutlu bir manifold ve $p \in M$ olsun. $a(p)$ de p deki diferensiyellenebilir fonksiyonların bir sınıfı olsun.

$$v : a(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa v ye M nin p noktasındaki tanjant vektörü adı verilir, [6].

$f, g \in a(p)$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- i. $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g),$
- ii. $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$

Tanım 2.1.19.

M diferensiyellenebilir bir manifold ve $(G, \cdot)$ bir grup olsun. Eğer

i. M nin noktaları ile G nin elemanları eşlenebiliyor ve

ii.

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G \quad \text{ve} \quad \iota : G \rightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow ab \quad \quad a \longrightarrow a^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümlerinin her ikisinde diferensiyellenebilir ise o takdirde (M, G) ikilisine bir Lie grubu adı verilir. Burada M ye Lie grubunun temel manifoldu, G ye de temel grubu denir, [7].

Tanım 2.1.20.

G bir analitik grup olsun. $\rho \in G$ ise

$$\begin{aligned} L_\rho : G &\rightarrow G \\ g &\longrightarrow \rho g \end{aligned}$$

sol ötelemesi bir diffeomorfizmdir. G de bir Z vektör alanı, $\forall \rho \in G$ için

$$dL_\rho Z = Z$$

ise Z vektör alanına sol invaryant vektör alanı denir, [20].

Tanım 2.1.21.

M , $n + p$ -boyutlu M' manifoldunun n boyutlu bir alt manifoldu olmak üzere M nin $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$ normal vektör alanları için

$$\begin{aligned} \alpha : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \alpha(X, Y) = \sum_{i=1}^p h^i(X, Y) \zeta_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme M alt manifoldunun II . temel formu adı verilir (burada h^i ler $\chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ şeklindeki bir dönüşümün bileşenleridir.), [18].

Tanım 2.1.22.

$(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot)$ olmak üzere V cümlesi F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V vektör uzayı üzerinde $\otimes$ işlemi

$$\begin{aligned} \otimes : V \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, \beta) &\longrightarrow \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

olmak üzere

- (i) $\forall \alpha, \beta \in V$ ve $\forall a \in F$ için $(a \odot \alpha) \otimes \beta = a \odot (\alpha \otimes \beta)$
- (ii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $(\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma = (\alpha \otimes \gamma) \oplus (\beta \otimes \gamma)$
- (iii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$

özellikleri sağlamıyorsa $(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot, \otimes)$ matematiksel yapıya *cebiri* denir.

Eğer, burada $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için

a)

$$\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$$

sağlanıyorsa V ye *birleşimli cebir*,

b)

$$\gamma \otimes \beta = \beta \otimes \gamma$$

sağlanıyorsa V ye *değişimli cebir*,

c)

$$\gamma \otimes e = e \otimes \gamma = \gamma$$

sağlanıyorsa V ye *birimli cebir* denir, [23].

Tanım 2.1.23.

V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[\ , \] : V \times V \rightarrow V$$

dönüşümünde

- i. 2-lineer,
- ii. Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$),
- iii. Jakobi özdeşliğini sağlar. Yani $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

dir. $[\ , \]$ dönüşümüne, V üstünde bir *Lie operatörü* denir. (Bu takdirde V vektör uzayına bir *Lie cebiri* denir.) ,[7].

Tanım 2.1.24.

M , n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $X, Y \in T_M(p)$ olmak üzere

$$R : T_M(p) \times T_M(p) \times T_M(p) \times T_M(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p, Z_p, W_p) \longrightarrow R(X_p, Y_p, Z_p, W_p)$$

$$R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) = g(X_p, R(Z_p, W_p)Y_p)$$

şeklinde tanımlı 4. mertebeden kovaryant tensör alanına *Riemann eğrilik tensör alanı* ve bunun bir $p \in M$ noktasındaki değerine de *Riemann eğriliği* denir ve

$$K(p) = g(X, R(X, Y)Y)$$

biçiminde gösterilir, [23].

Tanım 2.1.25.

Eğer M nin tüm x noktaları ve $T_x(M)$ nin tüm P düzlemi için $K(P)$ kesit eğriliği sabit ise M ye sabit eğrilikli uzay veya bir uzay formu denir. Eğer bu sabit eğrilik her $K(P)$ için sıfır ise bu manifolda flat veya düzlemseldir denir, [23].

Tanım 2.1.26.

G bir topolojik grup olsun. Eğer $\forall a, x, y \in G$ için

$$g(ax, ay) = g(x, y)$$

oluyorsa G üzerinde tanımlı g metriğine sol invaryant metrik denir. Eğer $\forall a, x, y \in G$ için

$$g(xa, ya) = g(x, y)$$

oluyorsa G üzerinde tanımlı g metriğine sağ invaryant metrik denir. Eğer g hem sol hemde sağ invaryant metrik ise g ye bi-invaryant metrik denir, [20].

Tanım 2.1.27.

(x^i) lokal koordinat sistemine göre bir Γ lineer konneksiyonunun Christoffel sembolleri Γ_{jk}^i ile gösterilir ve

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_k \Gamma_{ji}^k X_k$$

ifadesiyle verilir, [6].

Tanım 2.1.28.

R_{ijk}^h , j ve k ya göre anti-simetrik olmak üzere Ω^j eğrilik formu

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{ikl}^j w^k \wedge w^l$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{w^i\}$ 1-formları, lokal $\{e_i\}$ bazının dual bazıdır, [23].

Tanım 2.1.29.

(M, ∇) ve $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ sırasıyla $\nabla, \tilde{\nabla}$ afin koneksiyonları ile verilen n ve $(n + p)$ boyutlu iki diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$x \rightarrow N_x \subset T_{f(x)}\tilde{M}$$

şeklinde tanımlı p boyutlu normal altuzay için

$$T_{f(x)}\tilde{M} = f_*(T_x M) + N_x$$

eşitliği mevcut ise $f : M \rightarrow \tilde{M}$ immersiyonuna afin immersiyon denir.

Her x noktasında $\alpha(X, Y) \in N_x$ ve $\nabla_X Y \in T_x M$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y = f_*\nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$

şeklinde tanımlı ise N_x e M nin x noktasındaki normal uzayı adı verilir, [7].

Tanım 2.1.30.

G bir topolojik grubun temel grubu olsun. Eğer $C^0 G = G$ ve $C^{n+1} G = (G, C^n G)$ olmak üzere

$$G = C^0 G \triangleleft C^1 G \triangleleft \dots \triangleleft C^p G = \{e\}$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı mevcut ise G grubuna Nilpotent grup adı verilir, [20].

Tanım 2.1.31.

$\mathbb{R}^n$, n - boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde her $X, Y \in \mathbb{R}^n$ için Lorentz iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \quad , \\ (X \quad , \quad Y) &\rightarrow \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

öyleki;

$$\langle X, Y \rangle_1 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

yada

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

$$(X \quad , \quad Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle$$

$$\langle X, Y \rangle_2 = -x_1 y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır, [16].

Tanım 2.1.32.

V Lorentz uzayı ve g de Lorentz metriği olmak üzere;

$$\begin{aligned} \|\cdot\| = V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \|v\| = |g(v, v)|^{1/2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona norm fonksiyonu denir. $\|v\|$ ya da v nin normu veya v nin boyu denir. Boyu 1 birim olan vektöre de birim vektör denir, [13].

Teorem 2.1.33.

$v \in V$ olmak üzere

- i) $\|v\| > 0$,
- ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v$ bir null vektördür,
- iii) v bir timelike vektör ise $\|v\|^2 = -g(v, v)$ dir,
- iv) v bir spacelike vektör ise $\|v\|^2 = g(v, v)$ dir, [16].

Teorem 2.1.34.

V Lorentz uzayı için ortonormal baz $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)$ olmak üzere $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir, [16].

Tanım 2.1.35.

Bir $v \in V$ vektörü için;

- i) $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise, bu durumda v vektörüne spacelike vektör,
- ii) $g(v, v) < 0$ ise, bu durumda v vektörüne timelike vektör,
- iii) $g(v, v) = 0$ ise lightlike (null) vektör denir, [16].

Tanım 2.1.36.

V Lorentz uzayı ve g de Lorentz metriği olmak üzere;

- i) $\Gamma_N = \{v \in V - \{0\} : g(v, v) = 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N cümlesine V nin lightlike konisi,
- ii) $\Gamma_S = \{v \in V : g(v, v) \geq 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_S cümlesine V nin spacelike konisi,
- iii) $\Gamma_T = \{v \in V - \{0\} : g(v, v) < 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_T cümlesine V nin timelike konisi denir, [16].

Teorem 2.1.37.

Lorentz uzayında timelike vektörler v, w olsun. Bu iki vektörün aynı time- konide olması için gerek ve yeter şart $g(v, w) < 0$ olmasıdır, [15].

Tanım 2.1.38.

$x, y \in V$ olsun. $g(x, y) = 0$ ise x ve y vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir, [15].

Teorem 2.1.39.

Lorentz uzayında x, y iki timelike vektör olsun. O zaman

- i) $|g(x, y)| \geq \|x\| \|y\|$ (Lorentz uzayında Schwartz eşitsizliği)
- ii) Eğer x, y vektörleri aynı time-konide ise

$$g(x, y) = -\|x\| \|y\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde hiperbolik açı diye adlandırılan bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır

Burada x, y vektörleri aynı time-konide değilseler o zaman

$$|g(x, y)| = \|x\| \|y\| \cosh \varphi$$

dir, [15].

Teorem 2.1.40.

Eğer x, y vektörleri V Lorentz uzayında spacelike vektörler iseler

$$\cos \theta = \frac{g(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı vardır. Bu sayıya x ve y spacelike vektörleri arasındaki açı denir ve x ve y spacelike vektörleri için

$$g(x, y) \leq \|x\| \|y\|$$

eşitsizliği vardır, [15].

Sonuç 2.1.41.

İki timelike vektör birbirine dik olamaz, [15].

Tanım 2.1.42.

V Lorentz uzayı ve W , V nin altuzayı olsun. Bu durumda

- i) $g \big|_W$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike altuzay,
- ii) $g \big|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya timelike altuzay,
- iii) $g \big|_W$ dejenere ise W ya lightlike altuzay denir, [16].

Teorem 2.1.43.

V Lorentz uzayı ve V nin altuzayı W ve $\dim W \geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktirler.

- i) W timelike altuzay ise W bir Lorentz vektör uzayıdır.
- ii) W uzayı iki tane lineer bağımsız null vektör içerir.
- iii) W uzayı bir tane timelike vektör içerir, [16].

Tanım 2.1.44.

n - boyutlu Lorentz uzayı V de bir açık cümle U olmak üzere,

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k - yıncı mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k - sınıfından diferensiyellenebilirdir denir ve

$$C^k(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ sınıfından}\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer f in her mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^∞ - sınıfından diferensiyellenebilirdir denir ve

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \in C^k(U, \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde gösterilir, [16].

Tanım 2.1.45.

M bir Lorentz manifoldu olsun. Eğer;

$$\begin{aligned}\vec{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \\ f &\longrightarrow \vec{v}_p[f]\end{aligned}$$

$\forall p \in M, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ operatörü, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

i) $\vec{v}_p[\lambda f + \mu g] = \lambda \vec{v}_p[f] + \mu \vec{v}_p[g]$

ii) $\vec{v}_p[f \cdot g] = g(p) \vec{v}_p[f] + f(p) \vec{v}_p[g]$

aksiyomlarını sağlıyorsa bu operatöre Lorentz manifoldunun $p \in M$ noktasında bir tanjant vektörü denir, [11].

Tanım 2.1.46.

$T_p(M) = \{\vec{v}_p \mid \vec{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}\}$ olmak üzere $\forall p \in M$ ve $\vec{v}_p \in T_p(M)$ tanjant vektörü için;

i) $g(\vec{v}_p, \vec{v}_p) > 0$ veya $v = 0$ ise, bu durumda v vektörüne spacelike tanjant vektör,

ii) $g(\vec{v}_p, \vec{v}_p) < 0$ ise, bu durumda v vektörüne timelike tanjant vektör,

iii) $g(\vec{v}_p, \vec{v}_p) = 0$ ise bu durumda $\vec{v}_p$ vektörüne, lightlike (null veya isotropik) tanjant vektör denir, [16].

Tanım 2.1.47.

$J : \bar{M} \longrightarrow M$ inclusion dönüşümü olmak üzere $J^*(g(,))$, $\bar{M}$ üzerinde metrik tensör ise $\bar{M}$ ye M nin Lorentz altmanifoldu denir, [16].

Tanım 2.1.48.

$\bar{M}$, M Lorentz manifoldunun alt manifoldu olsun. $\bar{M}$ alt manifoldu üzerinde tanımlanan metrik tensör Riemann metriği ise $\bar{M}$ alt manifolduna spacelike alt manifold denir.

$\bar{M}$ alt manifoldu üzerinde tanımlanan metrik tensör Lorentz metriği ise $\bar{M}$ alt manifolduna timelike alt manifold denir, [2].

Tanım 2.1.49.

n - boyutlu Lorentz manifoldu M , $\bar{M}$ de M nin Lorentz alt manifoldu olsun. Eğer $\dim \bar{M} = (n - 1)$ ise $\bar{M}$ ye M nin Lorentz hiperyüzeyi denir.

Burada $\bar{M}$ timelike alt manifold ise $\bar{M}$ ye timelike hiperyüzey, $\bar{M}$ spacelike alt manifold ise $\bar{M}$ ye spacelike hiperyüzey denir.

Ayrıca $\bar{M}$ timelike bir hiperyüzey ve $\mathbf{N}$ bu yüzeyin birim normali ise

$$g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 1$$

dir. Yani spacelike birim normal vektör alanıdır.

Benzer şekilde $\bar{M}$ spacelike bir hiperyüzey ve $\mathbf{N}$ bu yüzeyin birim normali ise

$$g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = -1$$

dir. Yani timelike birim normal vektör alanıdır, [4].

Tanım 2.1.50.

n - boyutlu Lorentz manifoldu M ve p noktasındaki tanjant uzay $T_p M$ olsun.

$$T_p M^* = \{f \mid f : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

uzayına $T_p M$ nin dual uzayı veya kotanjant uzayı denir, [16].

Tanım 2.1.51.

n - boyutlu Lorentz manifoldu M ve M manifoldunun kotanjant uzayı $T_p M^*$ olsun. $w(p) \in T_p M^*$ elemanına ko-vektör denir. Ayrıca

$$w : M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M^*$$

fonksiyonu için,

$$\pi \circ w = I : M \xrightarrow{\text{özdeşlik}} M$$

olacak şekilde

$$\pi : \bigcup_{p \in M} T_p M^* \longrightarrow M$$

fonksiyonu mevcut ise w ya M üzerinde bir 1- form denir, [16].

Tanım 2.1.52.

M bir Lorentz manifoldu olsun. Eğer M nin her bir noktasındaki tanjant uzaylarda yönlendirme aynı ise M manifolduna uygun yönlendirilmiş manifold, aksi halde M manifolduna uygun yönlendirilmemiş manifold denir, [1].

Üzerinde uygun bir yön seçilebilen bir M manifolduna yönlendirilebilir manifold denir. Böyle bir manifold üzerinde seçilmiş olan özel bir $\mathbf{N}$ yönüne M manifoldu üzerinde $\mathbf{N}$ yönü denir. $(M, \mathbf{N})$ ikilisine de yönlendirilmiş manifold denir.

Tanım 2.1.53.

M bir Lorentz manifold, M nin bir açık cümlesi U , U nun bir ortonormal bazı $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ve U daki Christoffel sembolleri, $1 \leq i, j \leq n$ için

$$\Gamma_{ij}^k : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$$

olmak üzere, $\mathbf{e}_i$ nin $\mathbf{e}_j$ yönündeki kovaryant türevi

$$\nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k$$

şeklinde tanımlanır, [2].

Tanım 2.1.54.

$\bar{M}$, M Lorentz manifoldunun alt manifoldu olsun. M üzerindeki Levi- Civita konneksiyonu ∇ olsun.

$$\bar{\nabla} : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \longrightarrow \chi(\bar{M})$$

indirgenmiş fonksiyona $\bar{M}$ Lorentz manifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon denir, [16].

Tanım 2.1.55.

M Lorentz manifoldunun bir hiperyüzeyi $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ nin birim normal vektör alanı $\mathbf{N}$ olsun. $\forall V, W \in \chi(\bar{M})$ için

$$g(S(V), W) = g(II(V, W), \mathbf{N})$$

şeklindeki

$$S : T_p(\bar{M}) \longrightarrow T_p(\bar{M})$$

lineer operatöre $\bar{M}$ nin $\mathbf{N}$ den elde edilen şekil operatörü denir, [16].

Teorem 2.1.56.

M Lorentz manifoldunun bir hiperyüzeyi $\bar{M}$ ve S , $\bar{M}$ nin normalı olan $\mathbf{N}$ den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $\forall V \in \chi(\bar{M})$ için

$$S(V) = -\nabla_V \mathbf{N}$$

dir ve ayrıca S şekil operatörü self adjointtir.

M nin bir hiperyüzeyi $\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ nin normalı olan $\mathbf{N}$ den elde edilen şekil operatörü S olsun. $\forall V, W \in \chi(\bar{M})$ için

$$II(V, W) = \varepsilon g(S(V), W) \mathbf{N}$$

dir. Burada $\varepsilon = g(\mathbf{N}, \mathbf{N})$ dir. Lorentz hiperyüzeyleri için Gauss denklemi, $\forall V, W \in \chi(\bar{M})$ için

$$\bar{\nabla}_V W = \nabla_V W + \varepsilon g(S(V), W) \mathbf{N}$$

şeklinde verilebilir, [16].

Tanım 2.1.57.

Lorentz uzayı V de iki vektör v ve w olsun. $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$(v_3 w_2 - v_2 w_3, v_1 w_3 - v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

vektörüne v ile w nın vektörel çarpımı denir. $v \times w$ şeklinde gösterilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$v \times w = -\det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$v \times w = \det \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Burada $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2$ dir. Saat yönünün tersi pozitif olarak alınmıştır.

Saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa o zaman $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ dir. Bu durumda

$$v \times w = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir, [16].

Teorem 2.1.58.

Lorentz uzayı V de iki vektör u ve v olsun.

- i) u ve v spacelike vektörler ise $u \times v$ bir timelike vektördür.
- ii) u spacelike ve v timelike ise $u \times v$ spacelike vektördür.
- iii) u spacelike ve v null vektör olmak üzere $g(u, v) = 0$ ise $u \times v$ null vektör, eğer $g(u, v) \neq 0$ ise $u \times v$ spacelike vektördür.
- iv) u ve v null vektörler ise $u \times v$ spacelike vektördür.
- v) u timelike ve v null vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür.
- vi) u ve v timelike vektörler ise $u \times v$ bir spacelike vektördür, [16].

2.2 Lorentz Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler

M Lorentz manifoldu olsun. $\bar{M}$ Lorentz yüzeyi olarak da (U, φ) haritası ile verilen

$$\begin{aligned}\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V, \\ (u, v) &\longrightarrow \varphi(u, v)\end{aligned}$$

$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$, $\varphi(U)$ yüzeyini alalım. $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ lineer bağımsız olmak üzere yüzeyin vektör alanlarının bir bazı $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ dir. Yüzeyin normal vektör alanı $\mathbf{N} = \varphi_u \times \varphi_v$ dir. Diğer taraftan I. temel formun katsayıları,

$$E = g(\varphi_u, \varphi_u), \quad F = g(\varphi_u, \varphi_v), \quad G = g(\varphi_v, \varphi_v) \quad (2.2.1)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) &= g(\varphi_u \times \varphi_v, \varphi_u \times \varphi_v) \\ &= g(\varphi_u, \varphi_v)^2 - g(\varphi_u, \varphi_u)g(\varphi_v, \varphi_v)\end{aligned}$$

yazılır. (2.1) den

$$g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = F^2 - EG \quad (2.2.2)$$

elde edilir. Ayrıca, $\varphi(u, v)$ nin tam diferensiyeli

$$d\varphi = \varphi_u du + \varphi_v dv \quad (2.2.3)$$

dir. Şimdi $\varphi(u, v)$ yüzeyinin I . temel formunu hesaplayalım:

$$\begin{aligned}I &= (ds)^2 = g(d\varphi, d\varphi) \\ &= g(\varphi_u, \varphi_u)(du)^2 + 2g(\varphi_u, \varphi_v)dudv + g(\varphi_v, \varphi_v)(dv)^2 \\ &= E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2} = E \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G$$

ve

$$\lambda = \frac{du}{dv}, \quad I' = \frac{(ds)^2}{(dv)^2}$$

olmak üzere

$$I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G \quad (2.2.4)$$

elde edilir.

Tanım 2.2.1.

V Lorentz uzayında bir yüzey $\bar{M}$ olsun. $\forall p \in \bar{M}$ ve $\forall w_p, v_p \in T_p M$ için

$$g(v_p, w_p) = 0 \implies v_p = 0$$

önermesi sağlanıyorsa $\bar{M}$ ye V uzayında bir nondejenere yüzey denir, [2].

$\bar{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

dir. $\bar{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin nondejenere olması için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0$$

olmasıdır, yani yüzeyin normalinin null vektör alanı olmamasıdır.

Tanım 2.2.2.

V Lorentz uzayında bir yüzey $\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\bar{M}$ ye V de bir spacelike yüzey denir, [2].

Teorem 2.2.3.

V Lorentz uzayında (U, φ) parametrizasyonu ile verilen

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V, \\ (u, v) &\longrightarrow \varphi(u, v) \end{aligned}$$

$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$ yüzeyinin spacelike olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin timelike bir vektör alanı, yani

$$g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) < 0$$

olmasıdır. Burada $\mathbf{N}$, $\bar{M}$ yüzeyinin normal vektör alanıdır, [16].

Tanım 2.2.4.

V Lorentz uzayında bir yüzey $\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\bar{M}$ ye V de bir timelike yüzey denir, [2].

Teorem 2.2.5. V Lorentz uzayında bir $\bar{M}$ yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alanı, yani

$$g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) > 0$$

olmasıdır, [16].

Tanım 2.2.7.

$x : M \longrightarrow V$, M yüzeyinin spacelike immersiyonu olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K : M &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ p &\longrightarrow K(p) \end{aligned}$$

$$K(p) = -\det S(p)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(p)$ değerine de M nin p noktasındaki Gauss eğriliği denir.

$x : M \longrightarrow V$, M yüzeyinin timelike immersiyonu olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$K : M \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

$$p \longrightarrow K(p)$$

$$K(p) = \det S(p)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(p)$ değerine de M nin p noktasındaki Gauss eğriliği denir, [2,14,16].

Tanım 2.2.8.

V Lorentz uzayında bir yüzey M ve $x : M \longrightarrow V$, M yüzeyinin spacelike immersiyonu olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

$$p \longrightarrow H(p)$$

$$H(p) = -\frac{1}{2}izS(p)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ değerine de M nin p noktasındaki ortalama eğriliği denir.

$x : M \longrightarrow V$, M yüzeyinin timelike immersiyonu olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

$$p \longrightarrow H(p)$$

$$H(p) = \frac{1}{2}izS(p)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ değerine de M nin p noktasındaki ortalama eğriligi denir, [2,14].

Teorem 2.2.9.

$x : M \longrightarrow V$, M yüzeyinin spacelike immersiyonu olsun. M nin Gauss ve ortalama eğriligi, sırasıyla,

$$K = -\frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{EG - F^2},$$

$$H = -\frac{1}{2} \frac{Gh_{11} - 2Fh_{12} + Eh_{22}}{EG - F^2}$$

dir. Immersiyonun timelike olması durumunda formüllerde sadece işaret değişir, [14,16].

Tanım 2.2.10.

$x : M \longrightarrow V$ spacelike (timelike) immersiyon olsun. M yüzeyinin her noktasındaki ortalama eğriligi sıfır ise M ye maksimal (minimal) yüzey denir, [22].

3. BÖLÜM

3.1. 3- Boyutlu Lorentz Heisenberg Grup Yapısı

Bu bölümde $\mathbb{H}_3$ 3- boyutlu Heisenberg grubunun temel yapısı incelenerek bu grubun 2-adım nilpotent olduğu gösterildi. Bu grup üzerinde sol invaryant Lorentz metrikler ve ortonormal baz sistemi oluşturuldu. Daha sonra Koshul formülü yardımıyla baz vektörlerinin birbirleri yönündeki kovaryant türevleri elde edildi.

$$\mathbb{H}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, t \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.1.1)$$

olmak üzere

$$\mathbb{H}_3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \{(z, t) : z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}$$

dir. $\mathbb{H}_3$ cümlesi üzerinde

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \circ (x, y, z) = \left(\tilde{x} + x, \tilde{y} + y, \tilde{z} + z + \frac{1}{2}\tilde{x}y - \frac{1}{2}\tilde{y}x \right) \quad (3.1.2)$$

”o” işlemi tanımlansın. O zaman $\mathbb{H}_3$ cümlesi bu işlemle birlikte bir grup olur.

Bu grubun birim elemanı $0 = (0, 0, 0)$ ve herhangi bir (x, y, z) elemanının tersi

$$(x, y, z)^{-1} = (-x, -y, -z) \quad (3.1.3)$$

dır.

Herhangi $A, B \in \mathbb{H}_3$ için $[A, B]$ komutatörü

$$[A, B] = A \circ B \circ A^{-1} \circ B^{-1} \quad (3.1.4)$$

şeklinde tanımlıdır.

Buna göre

$$A = (x, y, z), \quad B = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{H}_3$$

olmak üzere, (3.1.4) den

$$[A, B] = (x, y, z) \circ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \circ (x, y, z)^{-1} \circ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^{-1}.$$

olur. (3.1.3) den

$$[A, B] = (x, y, z) \circ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \circ (-x, -y, -z) \circ (-\tilde{x}, -\tilde{y}, -\tilde{z})$$

yazılabilir. (3.1.2) ifadesi burada göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} [A, B] &= (x + \tilde{x} - x - \tilde{x}, y + \tilde{y} - y - \tilde{y}, z + \tilde{z} - z - \tilde{z} + \alpha) \\ &= (0, 0, \alpha) \end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha = \frac{1}{2}(x\tilde{y} - \tilde{x}y)$ şeklinde elde edilir.

Ayrıca $[A, B] \neq 0$ dır. Dolayısıyla $\mathbb{H}_3$ grubu değişimli değildir.

Lemma 3.1.1.

$\mathbb{H}_3$ grubu, 2-adım nilpotent Lie gruptur, [20].

İspat. $A, B, C \in \mathbb{H}_3$ için

$$\begin{aligned} [[A, B], C] &= [(0, 0, \alpha)(x_3, y_3, t_3)] \\ &= (0, 0, \alpha)(x_3, y_3, t_3)(0, 0, -\alpha)(-x_3, -y_3, -t_3) \\ &= (x_3 - x_3, y_3 - y_3, \alpha + t_3 - \alpha - t_3) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

dır.

3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde

$$\begin{aligned} g_1 &= -dx^2 + dy^2 + (xdy + dz)^2, \\ g_2 &= dx^2 + dy^2 - (xdy + dz)^2, \\ g_3 &= dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

üç farklı şekilde ifade edilen Lorentz metrikleri sol invaryant metriklerdir, [20].

3.1.1. Heisenberg Grubunda g_1 metriği

Heisenberg grup $\mathbb{H}_3$ üzerinde g_1 Lorentz metriği;

$$g_1 = -dx^2 + dy^2 + (xdy + dz)^2 \quad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlanır.

$(\mathbb{H}_3, g_1)$ e karşılık gelen Lie cebiri için

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.1.7)$$

sol invaryant vektör alanları bir ortonormal bazdır, [19]. Burada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektör alanları için bracket operatörü

$$[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] = 0 \quad (3.1.8)$$

dir, [19]. Gerçekten

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] &= \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \\ &= (0, 1, -x)(1, 0, 0) - (1, 0, 0)(0, 1, -x) \\ &= \left(1, 1, -x + \frac{1}{2}\right) - \left(1, 1, -x - \frac{1}{2}\right) \\ &= (0, 0, 1) \\ &= \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

dir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilir. Burada

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= g_1(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -g_1(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1, \\ g_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= g_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = g_1(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

dir.

Önerme 3.1.2.

$g_1 = -dx^2 + dy^2 + (xdy + dz)^2$ metriği için Levi- Civita konneksiyonunun kovaryant türevlerine ait olan matris

$$\nabla = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1 & \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_2 & \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_3 \\ \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_1 & \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_2 & \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_3 \\ \nabla_{\mathbf{e}_3} \mathbf{e}_1 & \nabla_{\mathbf{e}_3} \mathbf{e}_2 & \nabla_{\mathbf{e}_3} \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 & 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.10)$$

dir. Burada matrisin (i, j) yinci elemanı $\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j$ ($1 \leq i, j \leq 3$) dir.

İspat. X, Y, Z vektör alanları için Koszul formülü

$$g_1(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{g_1([X, Y], Z) - g_1([Y, Z], X) + g_1([Z, X], Y)\}$$

biçimde tanımlanır. Burada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektör alanları kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) &= \frac{1}{2} \{g_1([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1], \mathbf{e}_3) - g_1([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3], \mathbf{e}_1) + g_1([\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], \mathbf{e}_1)\} \\ &= \frac{1}{2} \{g_1(0, \mathbf{e}_3) - g_1(0, \mathbf{e}_1) + g_1(0, \mathbf{e}_1)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{e}_3 \neq 0$ olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1 = 0$$

dır. Benzer hesaplamalarla,

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) &= \frac{1}{2} \{g_1([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \mathbf{e}_3) - g_1([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \mathbf{e}_1) + g_1([\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], \mathbf{e}_2)\} \\ &= \frac{1}{2} \{g_1(0, \mathbf{e}_3) - g_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + g_1(0, \mathbf{e}_1)\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_3$$

elde edilir. Diğer kovaryant türevlerin sonucu, (3.1.10) matrisi elde edilir.

3.1.2. Heisenberg Grubunda g_2 metriği

$\mathbb{H}_3$ üzerinde g_2 metriği

$$g_2 = dx^2 + dy^2 - (xdy + dz)^2 \quad (3.1.11)$$

şeklinde tanımlanır.

$(\mathbb{H}_3, g_2)$ e karşılık gelen Lie cebiri ve (3.1.6) denklemlerindeki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektör alanları için bracket operatörü (3.1.7) deki gibidir. Burada

$$\begin{aligned} -g_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= g_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = g_2(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1, \\ g_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= g_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = g_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

dir.

Önerme 3.1.3.

$g_2 = dx^2 + dy^2 - (xdy + dz)^2$ metriği için Levi- Civita konneksiyonunun kovaryant türevlerine ait olan matris

$$\nabla = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1 & \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_2 & \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_3 \\ \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_1 & \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_2 & \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_3 \\ \nabla_{\mathbf{e}_3} \mathbf{e}_1 & \nabla_{\mathbf{e}_3} \mathbf{e}_2 & \nabla_{\mathbf{e}_3} \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 & 0 & \mathbf{e}_1 \\ -\mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.13)$$

dir. Burada matrisin (i, j) yinci elemanı $\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j$ ($1 \leq i, j \leq 3$) dir.

İspat. Burada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektör alanları kullanılarak, Koszul formülü yardımıyla

$$\begin{aligned} g_2(\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) &= \frac{1}{2} \{g_2([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1], \mathbf{e}_3) - g_2([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3], \mathbf{e}_1) + g_2([\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], \mathbf{e}_1)\} \\ &= \frac{1}{2} \{g_2(0, \mathbf{e}_3) - g_2(0, \mathbf{e}_1) + g_2(0, \mathbf{e}_1)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{e}_3 \neq 0$ olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1 = 0$$

dır. Benzer olarak

$$\begin{aligned} g_2(\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) &= \frac{1}{2} \{g_2([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3], \mathbf{e}_2) - g_2([\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2], \mathbf{e}_1) + g_2([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1], \mathbf{e}_3)\} \\ &= \frac{1}{2} \{g_2(0, \mathbf{e}_2) - g_2(-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + g_2(0, \mathbf{e}_3)\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_3 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_2$$

elde edilir. Diğer kovaryant türevlerin sonucu, (3.2.13) matrisi elde edilir.

3.1.3. Heisenberg Grubunda g_3 metriği

$\mathbb{H}_3$ üzerinde g_3 metriği

$$g_3 = dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2 \quad (3.1.14)$$

şeklinde tanımlıdır.

$(\mathbb{H}_3, g_3)$ e karşılık gelen Lie cebiri için

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial y} + (1-x) \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.1.15)$$

sol invaryant vektör alanları bir ortonormal bazdır. Burada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektör alanları için bracket operatörü

$$[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = 0, \quad [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \quad (3.1.16)$$

dir. Burada,

$$g_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = g_3(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -g_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1, \quad (3.1.17)$$

$$g_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = g_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = g_3(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$$

dir, [19].

Önerme 3.1.4.

$g_3 = dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2$ metriği için Levi- Civita konneksiyonu

$$\nabla = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1 & \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_2 & \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_3 \\ \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_1 & \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_2 & \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_3 \\ \nabla_{\mathbf{e}_3} \mathbf{e}_1 & \nabla_{\mathbf{e}_3} \mathbf{e}_2 & \nabla_{\mathbf{e}_3} \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_1 \end{bmatrix} \quad (3.1.18)$$

dir.

İspat. Burada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektör alanları kullanılarak, Koszul formülü yardımıyla

$$\begin{aligned} g_3(\nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) &= \frac{1}{2} \{g_3([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2], \mathbf{e}_1) - g_3([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1], \mathbf{e}_2) + g_3([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \mathbf{e}_2)\} \\ &= \frac{1}{2} \{g_3(0, \mathbf{e}_2) - g_3(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + g_3(-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$$

elde edilir. Diğer kovaryant türevlerin sonucu, (3.1.18) matrisi elde edilir.

Teorem 3.1.5.

3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde tanımlanan

$$g_3 = dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2 \quad (3.1.19)$$

Lorentz metriği flattır, [19].

İspat. g_3 metriğinin flat olduğunu göstermek için

$$R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = R(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Eğrilik tensörü için

$$R(x, y) = \nabla_{[x, y]} - \nabla_x \nabla_y + \nabla_y \nabla_x$$

formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) &= \nabla_{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3]} - \nabla_{\mathbf{e}_1} \nabla_{\mathbf{e}_3} + \nabla_{\mathbf{e}_3} \nabla_{\mathbf{e}_1} \\ &= \nabla_{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2} - 0 + 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= \nabla_{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]} - \nabla_{\mathbf{e}_1} \nabla_{\mathbf{e}_2} + \nabla_{\mathbf{e}_2} \nabla_{\mathbf{e}_1} \\ &= \nabla_{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2} - 0 + 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) &= \nabla_{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]} - \nabla_{\mathbf{e}_2} \nabla_{\mathbf{e}_3} + \nabla_{\mathbf{e}_3} \nabla_{\mathbf{e}_2} \\ &= 0 - \nabla_{\mathbf{e}_2} \nabla_{\mathbf{e}_3} + \nabla_{\mathbf{e}_3} \nabla_{\mathbf{e}_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece g_3 metriği flattır.

4. BÖLÜM

Bu bölümde, 3- boyutlu Heisenberg grubu üzerinde bazı diferensiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla verilen yüzeylerde indirgenmiş metrikler elde edildi. Daha sonra bu yüzeylerin minimal ve maksimal olma şartları incelenerek Gauss eğriliklerinin çeşitli karakterizasyonları verildi. Ayrıca, bu yüzeylerin yönlendirilebilir olma şartları incelendi.

4.1. 3- Boyutlu Lorentz Heisenberg Grubunda Spacelike ve Timelike Yüzeyler

3- boyutlu Lorentz Heisenberg grubunda bir M yüzeyi $f(x)$, $g(y)$ ve $h(x, y)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\psi(x, y) = (f(x), g(y), h(x, y)) \quad (4.1.1)$$

parametrizasyonu ile verilen bir spacelike (timelike) yönlendirilebilir yüzey olsun. 3- boyutlu Lorentz Heisenberg grubunda bu yüzeyin minimalliğini (maksimalliğini) karakterize edelim.

Teorem 4.1.1.

$M, (\mathbb{H}_3, g_1)$ de bir spacelike minimal yönlendirilebilir bir yüzey ise

$$\psi(x, y) = (f(x), g(y), -f(x)g(y) + f(x)c_1 + c_2), \quad c_1 > g(y)$$

dır.

İspat. Kabul edelimki (4.1.1) de verilen M yüzeyi minimal olsun. $\psi(x, y)$ nin x ve y ye göre türevleri alınıp, (3.1.7) denklemlerine göre gerekli düzenlemeler yapılırsa, sırasıyla,

$$\psi_x(x, y) = h_x(x, y) \mathbf{e}_1 + f'(x) \mathbf{e}_3, \quad (4.1.2)$$

$$\psi_y(x, y) = (f(x) g'(y) + h_y(x, y)) \mathbf{e}_1 + g'(y) \mathbf{e}_2 \quad (4.1.3)$$

elde edilir. Burada kısalığın hatırı için $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$, $h_x(x, y)$, $h_y(x, y)$ yerine, sırasıyla, ψ_x , ψ_y , h_x , h_y ifadeleri kullanılacaktır. (4.1.2) ve (4.1.3) den I . temel formunun katsayıları

$$E = g_1(\psi_x, \psi_x) = h_x^2 - f'^2(x), \quad (4.1.4)$$

$$F = g_1(\psi_x, \psi_y) = h_x(f(x) g'(y) + h_y), \quad (4.1.5)$$

$$G = g_1(\psi_y, \psi_y) = g'^2(y) + (f(x) g'(y) + h_y)^2 \quad (4.1.6)$$

elde edilir. M yüzeyi spacelike bir yüzey olduğundan ψ_x ve ψ_y spacelike olup, (4.1.5) ve (4.1.6) dan

$$E > 0 \Rightarrow h_x^2 > f'^2(x), \quad (4.1.7)$$

$$G > 0 \Rightarrow g'^2(y) + (f(x) g'(y) + h_y)^2 > 0 \quad (4.1.8)$$

dır. $F = 0$ için, M yüzeyi üzerinde indirgenmiş metrik elde edilir. Buna göre (4.1.5) den,

$$h_x(f(x) g'(y) + h_y) = 0 \quad (4.1.9)$$

olmalıdır. (4.1.9) ifadesinin sağlanabilmesi için üç durum mevcuttur.

1. Durum $h_x = 0$ ve $(f(x) g'(y) + h_y) \neq 0$ ise; $h_x = 0$ olduğunda $E = -f'^2$ olur. Bu ise ψ_x vektör alanının spacelike olması ile çelişir.

2. Durum $h_x \neq 0$ ve $(f(x) g'(y) + h_y) = 0$ ise

$$h(x, y) = -f(x) g(y) + c(x) \quad (4.1.10)$$

elde edilir. Buna göre bu durumu açıklayalım:

(4.1.1) parametrizasyonu ile verilen, M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları

$$E = g_1(\psi_x, \psi_x) = h_x^2 - f'^2(x), \quad (4.1.11)$$

$$F = 0, \quad (4.1.12)$$

$$G = g'^2(y) \quad (4.1.13)$$

dir. (4.1.11), (4.1.12) ve (4.1.13) ifadelerinden M yüzeyine göre, indirgenmiş g_1 metriği

$$\tilde{g}_1 = (h_x^2 - f'^2(x)) dx^2 + g'^2(y) dy^2 \quad (4.1.14)$$

şeklinde bulunur. Buna göre M yüzeyinin lokal ortogonal baz sistemi, (4.1.2), (4.1.3) ve (4.1.11)- (4.1.13) den

$$\psi_x(x, y) = h_x \mathbf{e}_1 + f'(x) \mathbf{e}_3, \quad (4.1.15)$$

$$\psi_y(x, y) = g'(y) \mathbf{e}_2 \quad (4.1.16)$$

olup, (4.1.15) ve (4.1.16) dan

$$\begin{aligned} \psi_x \times \psi_y &= \det \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ h_x & 0 & f'(x) \\ 0 & g'(y) & 0 \end{bmatrix} \\ &= f'(x) g'(y) \mathbf{e}_1 + h_x g'(y) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|\psi_x \times \psi_y\| = g'(y) \sqrt{|f'^2(x) - h_x^2|}$$

olup, yüzeyin birim normal vektör alanı,

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{|f'^2(x) - h_x^2|}} (f'(x) \mathbf{e}_1 + h_x \mathbf{e}_3) \quad (4.1.17)$$

şeklinde elde edilir.

M yüzeyi üzerindeki lokal ortonormal baz sistemi, $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{\psi_x(x, y)}{\|\psi_x(x, y)\|_{\tilde{g}_1}} \\ &= \frac{h_x}{f'(x) \sqrt{h_x^2 - f'^2(x)}} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{h_x^2 - f'^2(x)}} \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\psi_y(x, y)}{\|\psi_y(x, y)\|_{\tilde{g}_1}} = \frac{1}{g'(y)} \mathbf{e}_2 \quad (4.1.19)$$

yazılır.

M yüzeyinin yönlendirilebilir olması için,

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{N}, \mathbf{e}_3) &= g_1 \left(\frac{1}{\sqrt{|f'^2(x) - h_x^2|}} (f'(x) \mathbf{e}_1 + h_x \mathbf{e}_3), \mathbf{e}_3 \right) \\ &= -\frac{h_x}{\sqrt{|f'^2(x) - h_x^2|}} < 0 \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

olmalıdır. O halde M yüzeyi yönlendirilebilir ise $h_x > 0$ olur.

M yüzeyinin $\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_1$, $\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2$, $\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_1$ ve $\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2$ konneksiyonları, (4.1.18), (4.1.19) ve (3.1.10) dan

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{f'^2(x) (h_x^2 - f'^2(x))^2} \{ (2f'^2(x) f''(x) h_x \\ &\quad - f''(x) h_x^3 - f'^3(x) h_{xx}) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + h_x f'(x) (h_x^2 - f'^2(x)) \mathbf{e}_2 + f'^2(x) (f'(x) f''(x) - h_x h_{xx}) \mathbf{e}_3 \}, \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2 = \frac{1}{2f'(x) g'(y) \sqrt{h_x^2 - f'^2(x)}} \{ -f'(x) \mathbf{e}_1 + h_x \mathbf{e}_3 \}, \quad (4.1.22)$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_1 = \frac{h_x^2 - 2h_{xy} f'(x) - f'^2(x)}{2f'(x) g'(y) (h_x^2 - f'^2(x))^{3/2}} \{ f'(x) \mathbf{e}_1 + h_x \mathbf{e}_3 \}, \quad (4.1.23)$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2 = -\frac{g''(y)}{g'^3(y)} \mathbf{e}_2 \quad (4.1.24)$$

dır. (4.1.17) ve (4.1.21)- (4.1.24) ifadelerinden, M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları,

$$\begin{aligned} h_{11} &= g_1(\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_1, \mathbf{N}) \\ &= \frac{1}{f'(x) (h_x^2 - f'^2(x))^{3/2}} (f'(x) h_{xx} - f''(x) h_x) \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

olup, benzer olarak

$$\begin{aligned}
h_{12} &= g_1 (\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2, \mathbf{N}) \\
&= -\frac{f'^2(x) + h_x^2}{2f'(x)g'(y)(h_x^2 - f'^2(x))},
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

$$\begin{aligned}
h_{21} &= g_1 (\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_1, \mathbf{N}) \\
&= \frac{f'^2(x) + 2h_{xy}f'(x) - h_x^2}{2f'(x)g'(y)(h_x^2 - f'^2(x))}
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

$$\begin{aligned}
h_{22} &= g_1 (\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2, \mathbf{N}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

bulunur. O halde M yüzeyinin ortalama eğriliği, (4.1.11)- (4.1.13) ve (4.1.26)- (4.1.28) denklemlerinden

$$H = \frac{1}{2} \frac{(f'(x) h_{xx} - f''(x) h_x)}{f'^3(x) (h_x^2 - f'^2(x))^{5/2}} \tag{4.1.29}$$

olur.

M yüzeyi minimal olduğundan

$$f'(x) h_{xx} - f''(x) h_x = 0 \tag{4.1.30}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (4.1.30) denkleminde, (4.1.10) göz önüne alınırsa

$$f'(x) c''(x) - f''(x) c'(x) = 0 \tag{4.1.31}$$

elde edilir. Burada

$$f'(x) = p(x)$$

ve

$$c' = u(x)$$

denirse

$$p(x) u'(x) - p'(x) u(x) = 0$$

olur. Böylece (4.1.30) denkleminde

$$c(x) = f(x) c_1 + c_2 \quad (4.1.32)$$

elde edilir. Burada c_1 ve c_2 integral sabitleridir. (4.1.30) ve (4.1.32) den

$$h(x, y) = -f(x) g(y) + f(x) c_1 + c_2 \quad (4.1.33)$$

bulunur. Yüzeyin yönlendirilebilir olması için (4.1.20) den $h_x > 0$, yani

$$h_x(x, y) = f'(x) (-g(y) + c_1) > 0 \quad (4.1.34)$$

olmalıdır. Yüzey spacelike olduğundan $h_x^2 > f'^2$ olup

$$c_1 > g(y) \quad (4.1.35)$$

elde edilir.

Böylece

$$\psi(x, y) = (f(x), g(y), -f(x) g(y) + f(x) c_1 + c_2) \quad (4.1.36)$$

yüzeyi, g_1 metriği ile verilen Lorentz 3- boyutlu Heisenberg grubu $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de bir spacelike yönlendirilebilir minimal yüzeydir.

3. Durum $h_x = 0$, $(f(x) g'(y) + h_y) = 0$ ise $h_x = 0$ olamayacağı 1. Durumda gösterildi.

Örnek 4.1.2.

3- boyutlu Lorentz Heisenberg grubu $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de

$$\psi(x, y) = \left(\sin x, \cos y, \sin x \left(\frac{5}{2} - \cos y \right) \right) \quad (4.1.37)$$

yüzeyi verilsin. Bu yüzey için indirgenmiş metrik

$$\tilde{g}_1 = \cos^2 x \left(\left(\frac{5}{2} - \cos y \right)^2 - 1 \right) dx^2 + \sin^2 y dy^2 \quad (4.1.38)$$

dir. M yüzeyi üzerindeki lokal ortonormal baz sistemi

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\frac{5}{2} - \cos y}{\cos x \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \cos y\right)^2 - 1}} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\cos x \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \cos y\right)^2 - 1}} \mathbf{e}_3, \quad E_2 = -\frac{1}{\sin y} \mathbf{e}_2 \quad (4.1.39)$$

elde edilir. (4.1.39) den M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 x \left(\left(\frac{5}{2} - \cos y \right)^2 - 1 \right), \\ F &= 0, \\ G &= \sin^2 y \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

olur. M yüzeyinin $\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_1$, $\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2$, $\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_1$ ve $\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2$ konneksiyonları

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \cos y\right)^2 - 1}} \left\{ \tan x \left(\frac{5}{2} - \cos y \right) \mathbf{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \sec x \left(\frac{5}{2} - \cos y \right) \mathbf{e}_2 + \tan x \mathbf{e}_3 \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.41)$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2 = -\frac{\cos x}{2 \cos^2 x \sin y \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \cos y\right)^2 - 1}} \left\{ -\mathbf{e}_1 + \left(\frac{5}{2} - \cos y \right) \mathbf{e}_3 \right\}, \quad (4.1.42)$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_1 = -\frac{\left(\frac{5}{2} - \cos y\right)^2 - 2 \sin y - 1}{2 \sin y \cos x \left(\frac{5}{2} - \cos y\right)^3} \left\{ \mathbf{e}_1 + \left(\frac{5}{2} - \cos y \right) \mathbf{e}_3 \right\}, \quad (4.1.43)$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2 = -\frac{\cos y}{\sin^3 y} \mathbf{e}_2 \quad (4.1.44)$$

dır. M yüzeyinin birim normal vektör alanı, (4.1.17) den

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{2} - \cos y\right)^2 - 1}} \left(\mathbf{e}_1 + \left(\frac{5}{2} - \cos y \right) \mathbf{e}_3 \right) \quad (4.1.45)$$

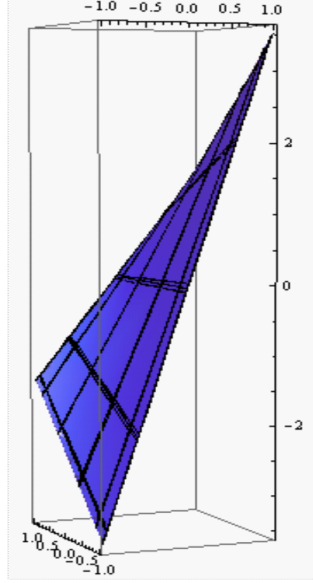
bulunur. M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} h_{11} &= 0, \\ h_{12} &= \frac{\cos^2 x \left(1 + \left(\frac{5}{2} - \cos y\right)^2\right)}{2 \sin y \left(\left(\frac{5}{2} - \cos y\right)^2 - 1\right)}, \\ h_{21} &= -\frac{\cos x (1 + 2 \sin y - \cos^2 x)}{2 \sin y \left(\left(\frac{5}{2} - \cos y\right)^2 - 1\right)}, \\ h_{22} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.46}$$

olur. (4.1.40) ve (4.1.46) denklemlerinden

$$H = 0$$

olduğu görülür. Böylece M yüzeyi minimaldir.



$(\mathbb{H}_3, g_1)$ de $\psi(x, y)$ parametrizasyonu

ile verilen minimal yüzey

M , $(\mathbb{H}_3, g_2)$ de bir spacelike minimal yönlendirilebilir bir yüzey ise g_2 metriği yardımıyla Teorem 4.1.1 e benzer şekilde aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir:

Sonuç 4.1.3.

$h_x = 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) \neq 0$ ise $h(y) = \vartheta(y)$ ve $g'(y) < 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& g''(y)(-f'^3(x)g'^4(y) + 2g'^3(y)\vartheta'(y) - 3f^2(x)g'^3(y)\vartheta'(y) - \vartheta'^3(y) \\
& + f(x)g'^2(y)(g'^2(y) + 3\vartheta'^2(y)) + (f(x)g'(y) \\
& + \vartheta'(y))(f^2(x)g'(y)(f(x)g'(y) + \vartheta'(y)) - f(x)g'^2(y)) \\
& + \vartheta''(y)(-g'^4(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))(g'^2(y)g''(y) \\
& + g'(y)(f(x)g'(y) + \vartheta'(y)))) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.47}$$

dir.

Sonuç 4.1.4.

$h_x \neq 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) = 0$ ise $f'(x) < 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& f'(x)h_{xx}(f'^2(x) - h_x^2) + h_x(-2f'(x)f''(x) \\
& + f''(x)h_x + f'^2(x)f''(x)) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.48}$$

dir.

Sonuç 4.1.5.

$h_x = 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) = 0$ ise

$$\psi(x, y) = (p, qy + t, -p(qy + t) + c_2) \tag{4.1.49}$$

dir. Burada p, q, t, c_2 sabit reel sayılardır.

Örnek 4.1.6.

$(\mathbb{H}_3, g_2)$ de M yüzeyi

$$\psi(x, y) = (3, 4y + 5, -3(4y + 5) + 8) \quad (4.1.50)$$

parametrizasyonu ile verilsin. g_2 metriğinin M yüzeyine göre indirgenmiş metriği

$$\tilde{g}_2 = 9dx^2 + 16dy^2 \quad (4.1.51)$$

yazılır. Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = -\mathbf{e}_1$$

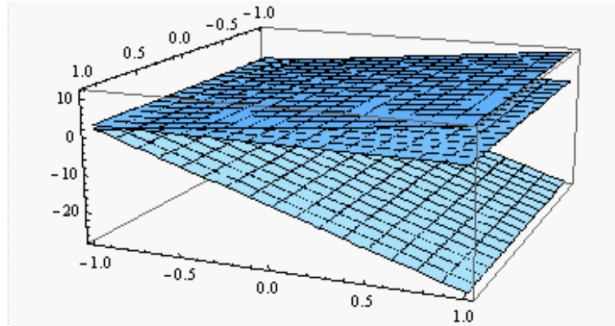
olur. M yüzeyi üzerindeki lokal ortonormal baz sistemi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{3}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{4}\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

dir. Burada

$$h_{11} = h_{12} = h_{21} = h_{22} = 0$$

olur ki, bu da M nin bir minimal yüzey olmasıdır.



$(\mathbb{H}_3, g_2)$ de $\psi(x, y)$ parametrizasyonu

ile verilen minimal yüzey

Sonuç 4.1.7.

$M, (\mathbb{H}_3, g_1)$ de bir spacelike yönlendirilebilir bir yüzey olsun. (4.1.11)- (4.1.13) ve (4.1.25)- (4.1.28) denklemlerinden yararlanarak $\forall p \in M$ noktasındaki M yüzeyinin $K(p)$ Gauss eğriliği

$$K(p) = \frac{(f'^2(x) + h_x^2)(f'^2(x) - h_x^2 + 2h_{xy}f'(x))}{2f'(x)g'^4(y)(h_x^2 - f'^2(x))^{5/2}} \quad (4.1.52)$$

dir.

$M, (\mathbb{H}_3, g_2)$ de bir spacelike yönlendirilebilir bir yüzey olsun. Sonuç 4.1.7.e benzer olarak, M yüzeyinin $\forall p \in M$ noktasındaki $K(p)$ Gauss eğriliği için aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir:

Sonuç 4.1.8.

$h_x = 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) \neq 0$ ise $g'(y) < 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K(p) = & \frac{1}{4f'^3(x)g'^3(y)\left(g'^2(y) - (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2\right)} \{2f'(x)g'^4(y) - g'^2(y)(g'^2(y) \\ & + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2) \\ & - (fg' + \vartheta')^2(g'^2 + (fg' + \vartheta')^2 - 2f'g'^2)\} \end{aligned}$$

dır.

Sonuç 4.1.9.

$h_x \neq 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) = 0$ ise $f'(x) < 0$ olmak üzere

$$K(p) = -\frac{f'^2(x) - h_x^2 - 2f'(x)h_{xy}}{2f'^2(x)g'^4(y)(h_x^2 - f'^2(x))^{3/2}} \quad (4.1.54)$$

dir.

Sonuç 4.1.10.

$h_x = 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) = 0$ ise

$$K(p) = 0 \quad (4.1.55)$$

dir.

Teorem 4.1.11.

$M, (\mathbb{H}_3, g_1)$ de bir timelike yönlendirilebilir bir yüzey olsun. M maksimal yönlendirilebilir bir yüzey ise

i) $g'(y) > 0$ ve $f(x)g'(y) + h_y > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &g''(y)(-f'^3(x)g'^3(y) - 2g'^2(y)\vartheta'(y) - 3f^2(x)g'^2(y)\vartheta'(y) \\ &- \vartheta'^3(y) - f(x)g'(y)(g'^2(y) + 3\vartheta'^2(y)) + g'^3(y)\vartheta''(y)) \\ &- g'(y)(f(x)g'(y) + \vartheta'(y))(2g'(y)g''(y) \\ &+ 2g'(y)(f(x)g'(y) + \vartheta'(y))(f(x)g''(y) + \vartheta''(y)) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.56)$$

olur.

ii) $f'(x) > 0$ olmak üzere

$$\psi(x, y) = \left(f(x), g(y), -f(x)g(y) + \frac{f(x)c_1}{c_2} \right) \quad (4.1.57)$$

dır.

iii)

$$\psi(x, y) = (p, qy + t, -p(qy + t) + c_2) \quad (4.1.58)$$

dır.

İspat. Kabul edelim ki (4.1.1) ile verilen yüzey maksimal olsun. $\psi(x, y)$ nin x ve y ye göre türevleri (4.1.2) ve (4.1.3) de verildiği gibi olur. M yüzeyi timelike bir yüzey olduğundan, (4.1.4)- (4.1.6) den

$$E < 0 \Rightarrow h_x^2 < f'^2(x), \quad (4.1.59)$$

$$G > 0 \Rightarrow g'^2(y) + (f(x)g'(y) + h_y)^2 > 0 \quad (4.1.60)$$

bulunur. $F = 0$ olduğunda, M yüzeyi üzerinde indirgenmiş metrik elde edilir. Böylece

$$F = 0 \Rightarrow h_x(f(x)g'(y) + h_y) = 0 \quad (4.1.61)$$

dir. Burada $h_x(f(x)g'(y) + h_y) = 0$ olması için üç durum mevcuttur.

1. Durum $h_x = 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) \neq 0$ ise $E = -f'^2$ ve $h(x, y) = \vartheta(y)$ olur. Böylece M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= g_1(\psi_x, \psi_x) = -f'^2(x), \\ F &= 0, \\ G &= g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2 \end{aligned} \quad (4.1.62)$$

olur. (4.1.62) denklemlerinden, g_1 metriğinin M yüzeyine göre indirgenmiş metriği

$$\tilde{g}_1 = -f'^2(x) dx^2 + \left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2\right) dy^2 \quad (4.1.63)$$

olarak elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \psi_x(x, y) &= f'(x) \mathbf{e}_3, \\ \psi_y(x, y) &= (f(x)g'(y) + \vartheta'(y)) \mathbf{e}_1 + g'(y) \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (4.1.64)$$

M yüzeyi için lokal ortogonal vektör alanlarıdır. M yüzeyinin birim normal vektör alanı, (4.1.64) ifadelerinden

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2}} (g'(y)\mathbf{e}_1 + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))\mathbf{e}_2) \quad (4.1.65)$$

bulunur.

M yüzeyi üzerindeki lokal ortonormal baz sistemi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{f'}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{f(x)g'(y) + \vartheta'(y)}{g'(y)\sqrt{g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2}}\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (4.1.66)$$

dir.

Yüzeyin yönlendirilebilir olması için $g_1(\mathbf{N}, \mathbf{e}_1) > 0$ ve $g_1(\mathbf{N}, \mathbf{e}_2) > 0$ olmalıdır.

Bu nedenle

$$g_1\left(\frac{g'(y)}{\sqrt{g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2}}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\right) = \frac{g'(y)}{\sqrt{g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2}} \quad (4.1.67)$$

olup $g'(y) > 0$ ve

$$g_1\left(\frac{f(x)g'(y) + \vartheta'(y)}{\sqrt{g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2}}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\right) = \frac{f(x)g'(y) + \vartheta'(y)}{\sqrt{g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2}} \quad (4.1.68)$$

$f(x)g'(y) + h_y > 0$ olması yüzeyin yönlendirilebilir olma şartlarıdır.

M yüzeyinin $\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_1$, $\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_2$, $\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_1$ ve $\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_2$ konneksiyonları, (3.1.10) dan

yararlanırsa

$$\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_1 = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)} \mathbf{e}_3, \quad (4.1.69)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{2f'(x)g'(y) \left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2 \right)^{3/2}} \{ (2f'(x)g'^3(y) \\ &\quad - g'(y) \left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2 \right) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2 \right) (f(x)g'(y) + \vartheta'(y)) \\ &\quad - 2f'(x)g'^2(y)(f(x)g'(y) + \vartheta'(y)) \mathbf{e}_2 \}, \end{aligned} \quad (4.1.70)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{2f'(x)g'(y) \sqrt{g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2}} \{ g'(y) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y)) \mathbf{e}_2 \}, \end{aligned} \quad (4.1.71)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{g'^3(y) \left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2 \right)^2} \{ (-f'^3(x)g'^3(y)g''(y) \\ &\quad - 2g'^2(y)\vartheta'(y)g''(y) \\ &\quad - 3f^2(x)g'^2(y)\vartheta'(y)g''(y) - \vartheta'^3(y)g''(y) \\ &\quad - f(x)g'(y)(g'^2(y) + 3\vartheta'^2(y))g''(y) + g'^3(y)\vartheta''(y)) \mathbf{e}_1 \\ &\quad - (g'^2(y)g''(y) + g'(y)(f(x)g'(y) + \vartheta'(y))(f(x)g''(y) + \vartheta''(y))) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (g'^2(y) \left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2 \right) (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))) \mathbf{e}_3 \} \end{aligned} \quad (4.1.72)$$

elde edilir. Böylece, M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları, (4.1.65) ve (4.1.69)-(4.1.72) denklemlerinden, sırasıyla,

$$h_{11} = 0, \quad (4.1.73)$$

$$\begin{aligned} h_{12} = & \frac{1}{2f'(x)g'(y)\left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2\right)^2} \{ (2f'(x)g'^3(y) \\ & - g'(y)\left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2\right) \\ & + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2\left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2 - 2f'(x)g'^2(y)\right) \}, \end{aligned} \quad (4.1.74)$$

$$h_{21} = \frac{1}{2f'(x)\left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2\right)} \{g''(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2\} \quad (4.1.75)$$

$$\begin{aligned} h_{22} = & \frac{1}{g'(y)\left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2\right)^{5/2}} \{g''(y)(-f'^3(x)g'^3(y) \\ & - 2g'^2(y)\vartheta'(y) - 3f^2(x)g'^2(y)\vartheta'(y) \\ & - \vartheta'^3(y) - f(x)g'(y)(g'^2(y) + 3\vartheta'^2(y)) + g'^3(y)\vartheta''(y)) \\ & - g'(y)(f(x)g'(y) + \vartheta'(y))(g'(y)g''(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))(f(x)g''(y) + \vartheta''(y))) \} \end{aligned} \quad (4.1.76)$$

olur. Bu durumda, (4.1.62) ve (4.1.73)- (4.1.76) denklemlerinden, M yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} H = & -\frac{1}{2f'^2g'\left(g'^2 + (fg' + \vartheta')^2\right)^{5/2}} \{g''(y)(-f'^3(x)g'^3(y) \\ & - 2g'^2(y)\vartheta'(y) - 3f^2(x)g'^2(y)\vartheta'(y) \\ & - \vartheta'^3(y) - f(x)g'(y)(g'^2(y) + 3\vartheta'^2(y)) + g'^3(y)\vartheta''(y)) \\ & - g'(y)(f(x)g'(y) + \vartheta'(y))(g'(y)g''(y) \\ & + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))(f(x)g''(y) + \vartheta''(y))) \} \end{aligned} \quad (4.1.77)$$

şeklinde bulunur.

Yüzey maksimal ise (4.1.77) den

$$\begin{aligned}
& g''(y) (-f'^3(x) g'^3(y) - 2g'^2(y) \vartheta'(y) - 3f^2(x) g'^2(y) \vartheta'(y) - \vartheta'^3(y) \\
& - f(x) g'(y) (g'^2(y) + 3\vartheta'^2(y)) + g'^3(y) \vartheta''(y)) \\
& - g'(y) (f(x) g'(y) + \vartheta'(y)) (2g'(y) g''(y) \\
& + 2(f(x) g'(y) + \vartheta'(y))(f(x) g''(y) + \vartheta''(y)) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.78}$$

dir.

2. Durum $h_x \neq 0$ ve $(f(x) g'(y) + h_y) = 0$ ise $h(x, y) = -f(x) g(y) + k(x)$ olur. (4.1.1) parametrizasyonu ile verilen yüzeyinin I . temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
E &= h_x^2 - f'^2(x), \\
F &= 0, \\
G &= g'^2(y)
\end{aligned} \tag{4.1.79}$$

şeklinde bulunur. (4.1.79) denklemlerinden g_1 in M yüzeyine göre indirgenmiş metriği

$$\tilde{g}_1 = (h_x^2 - f'^2(x)) dx^2 + g'^2(y) dy^2 \tag{4.1.80}$$

elde edilir. Burada ψ_x timelike vektör alanı olduğundan

$$h_x^2 < f'^2(x)$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\psi_x(x, y) &= h_x(x, y) \mathbf{e}_1 + f'(x) \mathbf{e}_3, \\
\psi_y(x, y) &= g'(y) \mathbf{e}_2
\end{aligned} \tag{4.1.81}$$

olur. Yüzeyin birim normal vektör alanı (4.1.81) denklemlerinden

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{|f'^2(x) - h_x^2|}} (f'(x) \mathbf{e}_1 + h_x \mathbf{e}_3) \tag{4.1.81}$$

yazılır.

M yüzeyi üzerindeki lokal ortonormal baz sistemi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \frac{h_x}{f'(x) \sqrt{h_x^2 - f'^2(x)}} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{h_x^2 - f'^2(x)}} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{g'(y)} \mathbf{e}_2\end{aligned}\tag{4.1.82}$$

şeklindedir.

Yüzeyin yönlendirilebilir olması için $g_1(\mathbf{N}, \mathbf{e}_1) > 0$ olmalıdır.

$$g_1(\mathbf{N}, \mathbf{e}_1) = g_1\left(\frac{1}{\sqrt{|f'^2(x) - h_x^2|}} (f'(x) \mathbf{e}_1 + h_x \mathbf{e}_3), \mathbf{e}_1\right) = \frac{f'(x)}{\sqrt{|f'^2(x) - h_x^2|}}$$

olup

$$f'(x) > 0,$$

yüzeyin yönlendirilebilir olma şartıdır.

Yüzeyin $\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_1$, $\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2$, $\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_1$ ve $\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2$ konneksiyonları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{f'^2(x) (f'^2(x) - h_x^2)^2} \{ (2f'(x) f''(x) h_x - f''(x) h_x^2 - f'^3(x) h_{xx}) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + h_x f'(x) (h_x^2 - f'^2(x)) \mathbf{e}_2 + f'^2(x) (f'(x) f''(x) - h_x h_{xx}) \mathbf{e}_3 \},\end{aligned}$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2 = \frac{1}{2f'(x) g'(y) \sqrt{f'^2(x) - h_x^2}} \{ -f'(x) \mathbf{e}_1 + h_x \mathbf{e}_3 \},$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_1 = \frac{h_x^2 - 2h_{xy} f'(x) - f'^2(x)}{2f'(x) g'(y) (f'^2(x) - h_x^2)^{3/2}} \{ f'(x) \mathbf{e}_1 + h_x \mathbf{e}_3 \},$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2 = -\frac{g''(y)}{g'^2(y)} \mathbf{e}_2$$

şeklinde elde edilir. Böylece, M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları, sırasıyla,

aşağıdaki şekilde

$$h_{11} = \frac{1}{f'(x)(f'^2(x) - h_x^2)^{3/2}} (f'(x)h_{xx} - f''(x)h_x), \quad (4.1.83)$$

$$h_{12} = -\frac{(f'^2(x) + h_x^2)}{2g'(y)(f'^2(x) - h_x^2)}, \quad (4.1.84)$$

$$h_{21} = \frac{f'^2(x) + 2h_{xy}f'(x) - h_x^2}{2f'(x)g'(y)(f'^2(x) - h_x^2)}, \quad (4.1.85)$$

$$h_{22} = 0 \quad (4.1.86)$$

bulunur. *I.* ve *II.* temel formun katsayılarından, M yüzeyinin ortalama eğriligi

$$H = \frac{1}{2} \frac{f'(x)h_{xx} - f''(x)h_x}{f'(x)(f'^2(x) - h_x^2)^{5/2}} \quad (4.1.87)$$

dır. Yüzey maksimal olduğundan, (4.1.87) ifadesinden

$$f'(x)h_{xx} - f''(x)h_x = 0$$

elde edilir. Böylece

$$f'(x) > 0$$

olmak üzere,

$$\psi(x, y) = \left(f(x), g(y), -f(x)g(y) + \frac{f(x)c_1}{c_2} \right) \quad (4.1.88)$$

$(\mathbb{H}_3, g_1)$ de bir yönlendirilebilir maksimal yüzeydir.

3. Durum $h_x = 0$ ve $f(x)g'(y) + h_y = 0$ olmak üzere M yüzeyinin, *I.* temel formunun katsayıları sırasıyla, aşağıdaki gibidir;

$$E = -f'^2(x),$$

$$F = 0,$$

$$G = g'^2(y).$$

Burada

$$f(x) g'(y) + h_y = 0$$

ise

$$h(x, y) = -f(x) g(y) + c_2(x)$$

dir. Böylece

$$h_x = -f'(x) g(y) + c_2'(x)$$

bulunur. $h_x = 0$ olduğundan, p sabit bir reel sayı olmak üzere

$$f(x) = p \text{ ve } c_2(x) = sbt$$

elde edilir. O halde

$$\vartheta(y) = -pg(y) + c_2$$

dir. Burada $h(x, y) = \vartheta(y)$ dir. Böylece g_1 metriğinin $\psi(x, y)$ yüzeyine göre indirgenmiş metriği

$$\tilde{g}_1 = -p^2 dx^2 + g'^2 dy^2 \quad (4.1.89)$$

olur. Buna göre

$$\psi_x(x, y) = pe_3,$$

$$\psi_y(x, y) = g'(y) e_2$$

elde edilir. M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$$

bulunur.

M yüzeyi üzerindeki lokal ortonormal baz sistemi

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{p} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{g'(y)} \mathbf{e}_2$$

olur.

Yüzey yönlendirilebilir ise

$$g_1(\mathbf{N}, \mathbf{e}_1) = g_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$$

yazılır. M yüzeyinin $\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_1$, $\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_2$, $\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_1$ ve $\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_2$ konneksiyonları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_1 &= 0, \\ \nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_2 &= -\frac{1}{2pg'(y)}\mathbf{e}_1, \\ \nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_1 &= \frac{1}{2pg'(y)}\mathbf{e}_1, \\ \nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_2 &= -\frac{g''(y)}{g'^2(y)}\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

dir. M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}h_{11} &= 0, \\ h_{12} &= 0, \\ h_{21} &= 0, \\ h_{22} &= -\frac{g''(y)}{g'^3(y)}\end{aligned}\tag{4.1.90}$$

olarak elde edilir. Böylece, M yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{g''(y)}{2f'^2(x)g'^3(y)}\tag{4.1.91}$$

bulunur. O halde $H = 0$ ise (4.1.91) den

$$g(y) = qy + t$$

olur.

Böylece

$$\psi(x, y) = (p, qy + t, -p(qy + t) + c_2)\tag{4.1.92}$$

yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de yönlendirilebilir maksimal bir yüzeydir.

M , $(\mathbb{H}_3, g_2)$ de bir timelike yönlendirilebilir yüzey olsun. M nin maksimal yönlendirilebilir bir yüzey ise Teorem 4.1.11 e benzer şekilde aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir:

Sonuç 4.1.12.

$h_x = 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) \neq 0$ ise

$$f(x)g'(y) + \vartheta'(y) > 0, \quad g'^2(y) < (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & g''(y)(-f'^3(x)g'^4(y) + 2g'^3(y)\vartheta'(y) - 3f^2(x)g'^3(y)\vartheta'(y) - \vartheta'^3(y)g'(y) \\ & + f(x)g'^2(y)(g'^2(y) + 3\vartheta'^2(y)) \\ & + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))(f^2(x)g'(y)(f(x)g'(y) + \vartheta'(y)) \\ & - f(x)g'^2(y)) + \vartheta''(y)(-g'^4(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))(g'^2(y)g''(y) \\ & + g'(y)(f(x)g'(y) + \vartheta'(y)))) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.93)$$

dır.

Sonuç 4.1.13.

$h_x \neq 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) = 0$ ise $h_x > 0$ olmak üzere

$$f'(x)h_{xx}(f'^2(x) - h_x^2) + h_x(-2f'(x)f''(x) + f''(x)h_x + f'^2(x)f''(x)) = 0 \quad (4.1.94)$$

dır.

$M, (\mathbb{H}_3, g_1)$ da bir timelike yönlendirilebilir yüzey olsun. (4.1.62) ve (4.1.73)-(4.1.76) denklemlerinden yararlanarak $\forall p \in M$ noktasındaki M yüzeyinin $K(p)$ Gauss eğriliği için aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir:

Sonuç 4.1.14.

$h_x = 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) \neq 0$ ise

$$f(x)g'(y) + \vartheta' > 0, \quad g'(y) > 0$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} K(p) = & -\frac{g'(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2}{2f'^4g' \left(g'^2 + (fg' + \vartheta')^2 \right)^4} ((2f'(x)g'^3(y) \\ & + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2 (g'^2(y) \\ & - 2f(x)g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2) \\ & - g'(y) \left(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2 \right)) \end{aligned} \quad (4.1.95)$$

dir.

Sonuç 4.1.15.

$h_x \neq 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) = 0$ ise $h_x^2 < f'^2(x)$ olmak üzere

$$K(p) = -\frac{(f^2(x) + h_x^2)(f'^2(x) + 2h_{xy}f'(x) - h_x^2)}{4f'(x)g'^4(y)(h_x^2 - f'^2(x))^2} \quad (4.1.96)$$

dir.

Sonuç 4.1.16.

$$h_x = 0 \text{ ve } (f(x)g'(y) + h_y) = 0$$

$$K(p) = 0 \quad (4.1.97)$$

dir.

$M, (\mathbb{H}_3, g_2)$ da bir timelike yönlendirilebilir yüzey olsun. $\forall p \in M$ noktasındaki $K(p)$ Gauss eğriliği için aşağıdaki sonuçlar yazılabilir:

Sonuç 4.1.17.

$$h_x = 0 \text{ ve } (f(x)g'(y) + h_y) \neq 0 \text{ ise}$$

$$g'^2(y) > (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2, \quad f(x)g'(y) + \vartheta'(y) > 0$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} K(p) = & -\frac{1}{2f'^4(x)g'(y)\left(g'^2(y) - (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2\right)^4} (g'(y)(2f'(x)g'^3(y) \\ & - g'(y)(g'^2(y) - (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2) \\ & + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2 + 2f'(x)g'^2(y))) \\ & + (g'(y)(g'^2(y) + (f(x)g'(y) + \vartheta'(y))^2))) \end{aligned} \quad (4.1.98)$$

dır.

Sonuç 4.1.18.

$$h_x \neq 0 \text{ ve } (f(x)g'(y) + h_y) = 0 \text{ ise } h_x^2 < f'^2(x) \text{ olmak üzere}$$

$$K(p) = -\frac{f'^2(x) - h_x^2 - 2f'h_{xy}}{2f'^2(x)g'^4(y)(h_x^2 - f'^2(x))^{3/2}} \quad (4.1.99)$$

dir.

Sonuç 4.1.19.

$h_x = 0$ ve $(f(x)g'(y) + h_y) = 0$ ise o zaman

$$K(p) = 0 \quad (4.1.100)$$

dir.

Teorem 4.1.20.

$M, (\mathbb{H}_3, g_3)$ da bir spacelike yönlendirilebilir yüzey olsun ve (4.1.1) parametrizasyonu ile verilsin. M minimal yönlendirilebilir bir yüzey ve

$$g'(y) < 0 \text{ ve } \eta' < g'(y) \left(\frac{1}{2} - f(x) \right)$$

olmak üzere

$$\lambda(\eta'(y) - g'(y)(1 - f(x))) - \pi(f(x)g'(y) + \eta'(y)) = 0 \quad (4.1.101)$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} \lambda = & g''(y)(-2f^2(x)g'^2(y) - 3\eta'^2(y) + 2g'(y)\eta'(y) - 5\eta'(y)f(x)g'(y) \\ & + f(x)g'^2(y)) + \eta''(y)(-g'^2(y) + g'(y)\eta'(y) + f(x)g'^2(y)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi = & g''(y)(3\eta'^2(y) + g'(y)\eta'(y)(-3 + 5f(x)) + g'^2(y)(1 - 3f(x) + 2f^2(x))) \\ & - \eta''(y)(g'(y)\eta'(y) + f(x)) \end{aligned}$$

ve

$$\eta(y) = h(y)$$

dir.

İspat. M yüzeyinin x ve y ye göre türevleri (3.1.15) den, sırasıyla,

$$\psi_x(x, y) = f'(x) \mathbf{e}_1 + h_x \mathbf{e}_2 - h_x \mathbf{e}_3, \quad (4.1.102)$$

ve

$$\psi_y(x, y) = (f(x)g'(y) + h_y(x, y)) \mathbf{e}_2 + (g'(y)(1 - f(x)) - h_y) \mathbf{e}_3 \quad (4.1.103)$$

olur. Böylece, (4.1.102) ve (4.1.103) denklemlerinden, M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} E &= f'^2(x), \\ F &= h_x g'(y), \\ G &= g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2h_y) \end{aligned} \quad (4.1.104)$$

dır. M yüzeyi spacelike bir yüzey olduğundan ψ_x ve ψ_y spacelike olup gerdikleri altuzay da spacelike olacaktır. Böylece

$$E = f'^2(x) > 0, \quad (4.1.105)$$

$$G > 0 \Rightarrow g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2h_y) > 0 \quad (4.1.106)$$

yazılır. $F = 0$ alınırsa ψ yüzeyi üzerinde indirgenmiş metrik elde edilir. Böylece

$$F = 0 \Rightarrow h_x g'(y) = 0 \quad (4.1.107)$$

bulunur. Burada (4.1.107) denkleminin sağlanması için üç durum mevcuttur:

1. Durum $h_x = 0$, $g'(y) \neq 0$, ise $E = f'^2(x)$ olur ki böylece $E > 0$ sağlanır. Burada $g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2h_y) > 0$ sağlanmalıdır. $h_x = 0$ olduğundan

$$h(x, y) = \eta(y)$$

olsun. M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} E &= f'^2(x), \\ F &= 0, \\ G &= g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y)) \end{aligned} \quad (4.1.108)$$

dir. Böylece (4.1.108) denklemlerinden, g_3 metriğinin M yüzeyine göre indirgenmiş

$$\tilde{g}_3 = f'^2(x) dx^2 + (g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y))) dy^2 \quad (4.1.109)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre, M yüzeyinin x ve y ye göre türevleri, sırasıyla,

$$\psi_x(x, y) = f'(x) \mathbf{e}_1, \quad (4.1.110)$$

$$\psi_y(x, y) = (f(x)g'(y) + \eta'(y)) \mathbf{e}_2 + (g'(y)(1 - f(x)) - \eta'(y)) \mathbf{e}_3$$

olur. (4.1.110) denklemlerinden yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = -\frac{(\eta'(y) - g'(y)(1 - f(x))) \mathbf{e}_2 + (f(x)g'(y) + \eta'(y)) \mathbf{e}_3}{\sqrt{|-g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y))|}} \quad (4.1.111)$$

bulunur.

M yüzeyi üzerindeki lokal ortonormal baz sistemi, sırasıyla,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{f'(x)} \mathbf{e}_1, \quad (4.1.112)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{g'(y) \sqrt{g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y))}} ((f(x)g'(y) + \eta'(y)) \mathbf{e}_2 + (g'(y)(1 - f(x)) - \eta'(y)) \mathbf{e}_3)$$

olur.

Yüzeyin yönlendirilebilir olması için, $g_3(\mathbf{N}, \mathbf{e}_3) < 0$ olmalıdır. O halde

$$\begin{aligned} g_3(\mathbf{N}, \mathbf{e}_3) &= g_3 \left(-\frac{((\eta'(y) - g'(y)(1 - f(x))) \mathbf{e}_2 + (f(x)g'(y) + \eta'(y)) \mathbf{e}_3)}{\sqrt{|-g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y))|}}, \mathbf{e}_3 \right) \\ &= \frac{f(x)g'(y) + \eta'(y)}{\sqrt{|-g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y))|}} \end{aligned} \quad (4.1.113)$$

olup

$$f(x)g'(y) + \eta'(y) < 0$$

ise yüzey yönlendirilebilirdir. (4.1.106) ve (4.1.113) birlikte düşünülürse

$$g'(y) < 0 \text{ ve } \eta'(y) < g'(y) \left(\frac{1}{2} - f(x) \right) \quad (4.1.114)$$

elde edilir.

Yüzeyin $\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_1$, $\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2$, $\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_1$ ve $\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2$ konneksiyonları, (3.1.18) den, sırasıyla,

$$\nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_1 = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)} \mathbf{e}_1,$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{((2f(x) - 1)g'(y) + 2\eta'(y))^{3/2}} \{((-1 + f(x))g'(y) + \eta'(y))\mathbf{e}_2 \\ &\quad - (f(x)g'(y) + \eta'(y))\mathbf{e}_3\}, \end{aligned}$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{f(x)(1 + f(x))f'^3(x)g'^2(y)\sqrt{g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y))}} \{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\},$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{(g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y)))^{3/2}} \{(-g'(y)(g'(y) - g'(y) \\ &\quad + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y)))\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 + \pi\mathbf{e}_3\} \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \lambda &= g''(-2f^2g'^2 - 3\eta'^2 + 2g'\eta' - 5\eta'fg' + fg'^2) + h''(-g'^2 + g'\eta' + fg'^2), \\ \pi &= g''(3\eta'^2 + g'\eta'(-3 + 5f) + g'^2(1 - 3f + 2f^2)) - h''(g'\eta' + f) \end{aligned}$$

dir. Böylece, II. temel formunun katsayıları da, sırasıyla,

$$h_{11} = 0, \tag{4.1.115}$$

$$\begin{aligned} h_{12} &= -\frac{1}{\sqrt{g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y))}^2} \{((-1 + f(x))g'(y) \\ &\quad + \eta'(y))(\eta'(y) - g'(y)(1 - f(x))) \\ &\quad + (f(x)g'(y) + \eta'(y))^2\}, \end{aligned} \tag{4.1.116}$$

$$h_{21} = -\frac{1}{f(x) f'^3(x) g'^2(y) (1 + f(x)) (g'(y) (-g'(y) + 2g'(y) f(x) + 2\eta'(y))) \{2\eta'(y) + 2f(x) g'(y) + g'(y)\}}, \quad (4.1.117)$$

$$h_{22} = \frac{1}{\sqrt[3]{g'(y)}(-g'(y) + 2g'(y) f(x) + 2\eta'(y))^2 \{\lambda(\eta'(y)) - g'(y) (1 - f(x)) - \pi(f(x) g'(y) + \eta'(y))\}} \quad (4.1.118)$$

şeklinde elde edilir. Yüzeyin I . ve II . temel formunun katsayılarından

$$H = \frac{1}{2\sqrt[3]{g'(y)}f'^2(x) (-g'(y) + 2g'(y) f(x) + 2\eta'(y))^2 \{\lambda(\eta'(y)) - g'(y) (1 - f(x)) - \pi(f(x) g'(y) + \eta'(y))\}} \quad (4.1.119)$$

dır. $H = 0$ ise (4.1.119) dan

$$\lambda(\eta'(y) - g'(y) (1 - f(x))) - \pi(f(x) g'(y) + \eta'(y)) = 0$$

bulunur.

2. Durum $h_x \neq 0$ ve $g'(y) = 0$ ise $G = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

3. Durum $h_x = 0$ ve $g'(y) = 0$ ise $G = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

Sonuç 4.1.21.

$M, (\mathbb{H}_3, g_3)$ de bir spacelike yönlendirilebilir yüzey olsun. (4.1.108) ve (4.1.115)-(4.1.118) denklemlerinden M yüzeyinin $\forall p \in M$ noktasındaki $K(p)$ Gauss eğriliği, $h_x = 0, g'(y) \neq 0$ ise

$$t < 0 \text{ ve } q < t \left(\frac{1}{2} - f(x) \right)$$

olmak üzere

$$K(p) = -\frac{1}{f(x) f'^5(x) g'^{9/2}(y) (1+f(x)) (-g'(y) + 2g'(y) f(x) + 2\eta'(y))^4} \\ ((f(x) g'(y) + \eta'(y))^2 \\ + (-1 + f(x)) g'(y) + \eta'(y))^2 ((1 + 2f(x)) g'(y) + 2\eta'(y))),$$

dir.

Teorem 4.1.22.

$M, (\mathbb{H}_3, g_3)$ de bir timelike yönlendirilebilir yüzey olsun. Burada

$$(\eta'(y) - g'(y) (1 - f(x))) > 0 \text{ ve } g'(y) (-g'(y) + 2g'(y) f(x) + 2\eta'(y)) < 0$$

olmak üzere, M yüzeyi maksimal yönlendirilebilir bir yüzey ise

$$\lambda(\eta'(y) - g'(y) (1 - f(x))) - \pi(f(x) g'(y) + \eta'(y)) = 0$$

dır. Burada $\eta(y) = h(y)$ dir.

İspat. M yüzeyinin x ve y ye göre türevleri, sırasıyla,

$$\psi_x(x, y) = f'(x) \mathbf{e}_1 + h_x \mathbf{e}_2 - h_x \mathbf{e}_3, \quad (4.1.120)$$

$$\psi_y(x, y) = (f(x) g'(y) + h_y(x, y)) \mathbf{e}_2 + (g'(y) (1 - f(x)) - h_y) \mathbf{e}_3 \quad (4.1.121)$$

olarak bulunur. (4.1.120) ve (4.1.121) denklemlerinden I . temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$E = f'^2(x), \\ F = h_x g'(y), \\ G = g'(y) (-g'(y) + 2g'(y) f(x) + 2h_y) \quad (4.1.122)$$

olur. M yüzeyi timelike bir yüzey olduğundan, ψ_x spacelike, ψ_y timelike olup gerdikleri altuzay timelike olacaktır. O halde (4.1.122) denklemlerinden

$$f'^2(x) > 0, \quad g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2h_y) < 0 \quad (4.1.123)$$

bulunur.

(4.1.122) denklemlerinde $F = 0$ olması için aşağıdaki durumlar mevcuttur.

1. Durum $h_x = 0$ ve $g' \neq 0$ sağlanırsa $E = f'^2$ olur ki böylece $E > 0$ sağlanır. Burada $g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2h_y) < 0$ sağlanmalıdır. $h_x = 0$ olduğundan $h(x, y) = \eta(y)$ elde edilir. M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları, (4.1.122) denklemlerinden, sırasıyla,

$$\begin{aligned} E &= g_1(\psi_x, \psi_x) = f'^2(x), \\ F &= 0, \\ G &= g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y)) \end{aligned} \quad (4.1.124)$$

olur. Böylece, g_3 metriğinin M yüzeyine göre indirgenmiş metriği

$$\tilde{g}_3 = f'^2(x) dx^2 + (g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y))) dy^2 \quad (4.1.125)$$

dir. Buna göre (4.1.120) ve (4.1.121) den

$$\psi_x(x, y) = f'(x) \mathbf{e}_1,$$

$$\psi_y(x, y) = (f(x)g'(y) + \eta'(y)) \mathbf{e}_2 + (g'(y)(1 - f(x)) - \eta'(y)) \mathbf{e}_3$$

elde edilir. M yüzeyinin birim normal vektör alanı $\psi_x(x, y)$ ve $\psi_y(x, y)$ den

$$\mathbf{N} = -\frac{(\eta'(y) - g'(y)(1 - f(x))) \mathbf{e}_2 + (f(x)g'(y) + \eta'(y)) \mathbf{e}_3}{\sqrt{|-g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y))|}} \quad (4.1.126)$$

bulunur.

M yüzeyi üzerindeki lokal ortonormal baz sistemi (4.1.120), (4.1.121) ve (4.1.125) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \frac{1}{f'(x)}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{g'(y)\sqrt{g'(y)(-g'(y)+2g'(y)f(x)+2\eta'(y))}}((f(x)g'(y)+\eta'(y))\mathbf{e}_2 \\ &\quad + (g'(y)(1-f(x))-\eta'(y))\mathbf{e}_3)\end{aligned}$$

yazılır.

M yüzeyi yönlendilebilir ise

$$g_3(\mathbf{N}, \mathbf{e}_2) = -\frac{(\eta'(y) - g'(y)(1 - f(x)))}{\sqrt{|-g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y))|}}$$

olur. Buradan

$$(\eta'(y) - g'(y)(1 - f(x))) > 0 \quad (4.1.127)$$

dır. (4.1.124) ve (4.1.127) denklemleri birlikte düşünülürse

$$(\eta'(y) - g'(y)(1 - f(x))) > 0 \text{ ve } g'(y)(-g'(y) + 2g'(y)f(x) + 2\eta'(y)) < 0$$

elde edilir.

Yüzeyin $\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_1$, $\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_2$, $\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_1$ ve $\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_2$ konneksiyonları, sırasıyla,

$$\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_1 = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)}\mathbf{e}_1,$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_2 &= \frac{1}{((2f(x)-1)g'(y)+2\eta'(y))^{3/2}}\{((-1+f(x))g'(y)+\eta'(y))\mathbf{e}_2 \\ &\quad - (f(x)g'(y)+\eta'(y))\mathbf{e}_3\},\end{aligned}$$

$$\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{f(x)(1+f(x))f'^3(x)g'^2(y)\sqrt{g'(y)(-g'(y)+2g'(y)f(x)+2\eta'(y))}}\{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\},$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_2 &= \frac{1}{(g'(y)(-g'(y)+2g'(y)f(x)+2\eta'(y)))^{3/2}}\{(-g'(y)(g'(y)-g'(y)) \\ &\quad + 2g'(y)f(x)+2\eta'(y)))\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 + \pi\mathbf{e}_3\}\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\lambda = & g''(y) (-2f^2(x) g'^2(y) - 3\eta'^2(y) + 2g'(y) \eta'(y) - 5\eta'(y) f(x) g'(y) \\ & + f(x) g'^2(y)) + \eta''(y) (-g'^2(y) + g'(y) \eta'(y) + f(x) g'^2(y))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\pi = & g''(y) (3\eta'^2(y) + g'(y) \eta'(y) (-3 + 5f(x)) \\ & + g'^2(y) (1 - 3f(x) + 2f^2(x))) - \eta''(y) (g'(y) \eta'(y) + f(x))\end{aligned}$$

olmak üzere, *II.* temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$h_{11} = 0,$$

$$\begin{aligned}h_{12} = & -\frac{1}{\sqrt{g'(y)}(-g'(y) + 2g'(y) f(x) + 2\eta'(y))^2} \{((-1 + f(x)) g'(y) \\ & + \eta'(y))(\eta'(y) - g'(y) (1 - f(x))) + (f(x) g'(y) + \eta'(y))^2\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_{21} = & -\frac{1}{f(x) f'^3(x) g'^2(y) (1 + f(x)) (g'(y) (-g'(y) + 2g'(y) f(x) + 2\eta'(y)))} \{2\eta'(y) \\ & + 2f(x) g'(y) + g'(y)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_{22} = & \frac{1}{\sqrt[3]{g'(y)}(-g'(y) + 2g'(y) f(x) + 2\eta'(y))^2} \{\lambda(\eta'(y) - g'(y) (1 - f(x))) \\ & - \pi(f(x) g'(y) + \eta'(y))\}\end{aligned}$$

dir. *I.* ve *II.* temel formun katsayılarından, yüzeyin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}H = & \frac{1}{2\sqrt[3]{g'(y)}f'^2(x) (-g'(y) + 2g'(y) f(x) + 2\eta'(y))^2} \{\lambda(\eta'(y) (4.1.128) \\ & - g'(y) (1 - f(x))) - \pi(f(x) g'(y) + \eta'(y))\}\end{aligned}$$

olur. $H = 0$ ise (4.1.128) den

$$\lambda(\eta'(y) - g'(y)(1 - f(x))) - \pi(f(x)g'(y) + \eta'(y)) = 0$$

dır.

2. Durum $h_x \neq 0$, $g'(y) = 0$ ise $G = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

3. Durum $h_x = 0$ ve $g'(y) = 0$ ise $G = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

Sonuç 4.1.23.

M yüzeyi $(\mathbb{H}_3, g_3)$ da bir timelike yönlendirilebilir yüzey olsun. M nin $K(p)$ Gauss eğriliği, $\forall p \in M$ noktasında

$$q - t(1 - f(x)) > 0 \text{ ve } t(-t + 2tf(x) + 2\eta') < 0$$

olmak üzere

$$K(p) = -\frac{1}{f(x)f'^5(x)g'^{9/2}(y)(1+f(x))(-g'(y)+2g'(y)f(x)+2\eta'(y))^4((f(x)g'(y)+\eta'(y))^2+(-1+f(x))g'(y)+\eta'(y))^2((1+2f(x))g'(y)+2\eta'(y)))},$$

dır.

5. BÖLÜM

Bu bölümde 3- boyutlu Heisenberg grubunda iki değişkenli fonksiyonlardan oluşan spacelike ve timelike yüzeyler incelendi. Daha sonra iki eğrinin grup çarpımıyla elde edilen yüzeyler araştırılıp bu yüzeylerin minimal ve maksimal olma şartları verilerek yüzeylerin çeşitli karakterizasyonları elde edildi.

5.1. 3- Boyutlu Heisenberg Grubunda Çift Değişkenli Fonksiyonlar Yardımıyla Tanımlanan Spacelike ve Timelike Yüzeyler

$M, \Xi(x, y), \Upsilon(x, y), \Theta(x, y)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\Gamma(x, y) = (\Xi(x, y), \Upsilon(x, y), \Theta(x, y)) \quad (5.1.1)$$

parametrizasyonu ile $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de verilen bir spacelike yüzey olsun. $\Gamma(x, y)$ nin x ve y ye göre türevleri, sırasıyla,

$$\Gamma_x(x, y) = (\Xi\Upsilon_x + \Theta_x)\mathbf{e}_1 + \Upsilon_x\mathbf{e}_2 + \Xi_x\mathbf{e}_3,$$

ve

$$\Gamma_y(x, y) = (\Xi\Upsilon_y + \Theta_y)\mathbf{e}_1 + \Upsilon_y\mathbf{e}_2 + \Xi_y\mathbf{e}_3$$

elde edilir. Burada

$$A(x, y) = (\Xi\Upsilon_x + \Theta_x), \quad B(x, y) = \Upsilon_x, \quad C(x, y) = \Xi_x \quad (5.1.2)$$

ve

$$P(x, y) = (\Xi\Upsilon_y + \Theta_y), \quad Q(x, y) = \Upsilon_y, \quad R(x, y) = \Xi_y \quad (5.1.3)$$

şeklinde gösterelim.

Bu durumda

$$A^2 + B^2 > C^2,$$

$$P^2 + Q^2 > R^2$$

ve

$$(QC - BR)^2 + (PC - AR)^2 < (AQ - BP)^2$$

yazılabilir. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.1.1.

M yüzeyi $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de $\Gamma(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir minimal yüzey ise

$$\begin{aligned} & (P^2 + Q^2 - R^2)[\mathbb{A}\mathbf{N}_1 + \mathbb{B}\mathbf{N}_2 - \mathbb{D}\mathbf{N}_3] \\ & + (AP + BQ - RC)[\mathbb{E}\mathbf{N}_1 + \mathbb{F}\mathbf{N}_2 + \mathbb{H}\mathbf{N}_1 + \mathbb{I}\mathbf{N}_2 - \mathbb{J}\mathbf{N}_3 - \mathbb{G}\mathbf{N}_3] \\ & + (A^2 + B^2 - C^2)[\mathbb{K}\mathbf{N}_1 + \mathbb{L}\mathbf{N}_2 - \mathbb{M}\mathbf{N}_3] = 0 \end{aligned}$$

dir.

İspat. (5.1.1) den, $\Gamma(x, y)$ nin, sırasıyla, x ve y ye göre türevleri alınır ve bu türevlerde (5.1.2) ve (5.1.3) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\Gamma_x(x, y) = A(x, y) \mathbf{e}_1 + B(x, y) \mathbf{e}_2 + C(x, y) \mathbf{e}_3, \quad (5.1.4)$$

ve

$$\Gamma_y(x, y) = P(x, y) \mathbf{e}_1 + Q(x, y) \mathbf{e}_2 + R(x, y) \mathbf{e}_3 \quad (5.1.5)$$

olur. (5.1.4) ve (5.1.5) den M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$E = A^2 + B^2 - C^2, \quad (5.1.6)$$

$$F = AP + BQ - RC, \quad (5.1.7)$$

$$G = P^2 + Q^2 - R^2 \quad (5.1.8)$$

şeklinde elde edilir. M yüzeyi spacelike bir yüzey olduğundan, Γ_x ve Γ_y spacelike vektör alanları olur. Dolayısıyla gerdikleri altuzay spacelike olup

$$A^2 + B^2 > C^2, \quad (5.1.9)$$

$$P^2 + Q^2 > R^2$$

dır.

(5.1.4) ve (5.1.5) den $\Gamma_x \times \Gamma_y$

$$\begin{aligned}\Gamma_x \times \Gamma_y &= \det \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A & B & C \\ P & Q & R \end{bmatrix} \\ &= (QC - BR)\mathbf{e}_1 + (PC - AR)\mathbf{e}_2 + (AQ - BP)\mathbf{e}_3,\end{aligned}\tag{5.1.11}$$

bulunur. Buradan norm alınırsa

$$\varpi = \|\Gamma_x \times \Gamma_y\| = \sqrt{(QC - BR)^2 + (PC - AR)^2 + (AQ - BP)^2}\tag{5.1.12}$$

olur. Böylece yüzeyin birim normal vektör alanı,

$$N_1 = QC - BR, \quad N_2 = PC - AR, \quad N_3 = AQ - BP\tag{5.1.13}$$

olmak üzere

$$\mathbf{N} = N_1\mathbf{e}_1 + N_2\mathbf{e}_2 + N_3\mathbf{e}_3\tag{5.1.14}$$

şeklinde elde edilir. M yüzeyi spacelike olduğundan, yüzeyin birim normal vektör alanı timelike olup, (5.1.13) den

$$(QC - BR)^2 + (PC - AR)^2 < (AQ - BP)^2$$

bulunur.

M yüzeyinin $\nabla_{\Gamma_x}\Gamma_x$, $\nabla_{\Gamma_x}\Gamma_y$, $\nabla_{\Gamma_y}\Gamma_x$ ve $\nabla_{\Gamma_y}\Gamma_y$ konneksiyonları, sırasıyla,

$$\mathbb{A} = BA_y + CA_x, \quad \mathbb{B} = AC + BB_y + CB_x, \quad \mathbb{D} = AB + BC_y + CC_x,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= B(P_y + \frac{1}{2}R) + C(P_x - \frac{1}{2}Q), \\ \mathbb{F} &= \frac{1}{2}(AR + CP) + BQ_y + CQ_x, \\ \mathbb{G} &= \frac{1}{2}(QA + PB) + BR_y + CR_x,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbb{H} &= Q(A_y + \frac{1}{2}C) + R(A_x - \frac{1}{2}B), \\ \mathbb{I} &= \frac{1}{2}(AQ + CP) + QB_y + RA_x, \\ \mathbb{J} &= \frac{1}{2}(QA + PB) + QC_y + RC_x,\end{aligned}$$

$$\mathbb{K} = QP_y + RP_x, \mathbb{L} = PR + QQ_y + RQ_x, \mathbb{M} = PQ + QR_y + RR_x$$

olmak üzere

$$\nabla_{\Gamma_x}\Gamma_x = \mathbb{A}\mathbf{e}_1 + \mathbb{B}\mathbf{e}_2 + \mathbb{D}\mathbf{e}_3, \quad (5.1.15)$$

$$\nabla_{\Gamma_x}\Gamma_y = \mathbb{E}\mathbf{e}_1 + \mathbb{F}\mathbf{e}_2 + \mathbb{G}\mathbf{e}_3, \quad (5.1.16)$$

$$\nabla_{\Gamma_y}\Gamma_x = \mathbb{H}\mathbf{e}_1 + \mathbb{I}\mathbf{e}_2 + \mathbb{J}\mathbf{e}_3, \quad (5.1.17)$$

$$\nabla_{\Gamma_y}\Gamma_y = \mathbb{K}\mathbf{e}_1 + \mathbb{L}\mathbf{e}_2 + \mathbb{M}\mathbf{e}_3 \quad (5.1.18)$$

elde edilir. (5.1.14) ve (5.1.15)-(5.1.18) denklemlerinden M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$h_{11} = \frac{1}{\varpi}[\mathbb{A}N_1 + \mathbb{B}N_2 - \mathbb{D}N_3], \quad (5.1.19)$$

$$h_{12} = \frac{1}{\varpi}[\mathbb{E}N_1 + \mathbb{F}N_2 - \mathbb{G}N_3], \quad (5.1.20)$$

$$h_{21} = \frac{1}{\varpi}[\mathbb{H}N_1 + \mathbb{I}N_2 - \mathbb{J}N_3], \quad (5.1.21)$$

$$h_{22} = \frac{1}{\varpi}[\mathbb{K}N_1 + \mathbb{L}N_2 - \mathbb{M}N_3] \quad (5.1.22)$$

yazılır. (5.1.6)-(5.1.8) ve (5.1.19)-(5.1.22) denklemlerinden M yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}H &= -\frac{1}{2\varpi^2}[(P^2 + Q^2 - R^2)[\mathbb{A}N_1 + \mathbb{B}N_2 - \mathbb{D}N_3] \\ &\quad + (AP + BQ - RC)[\mathbb{E}N_1 + \mathbb{F}N_2 + \mathbb{H}N_1 + \mathbb{I}N_2 - \mathbb{J}N_3 - \mathbb{G}N_3] \\ &\quad + (A^2 + B^2 - C^2)[\mathbb{K}N_1 + \mathbb{L}N_2 - \mathbb{M}N_3]]\end{aligned} \quad (5.1.23)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispat tamamlanır.

$$\Pi(x, y) = (u_1(x) + v_1(y), u_2(x) + v_2(y), u_3(x) + v_3(y) + \frac{1}{2}(u_1(x)v_2(y) - u_2(x)v_1(y))) \quad (5.1.24)$$

parametrizasyonu ile verilen $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de bir spacelike yüzey M olsun. $\Pi(x, y)$ nin x ve y ye göre türevleri, sırasıyla,

$$\Pi_x(x, y) = (u'_3 + u'_2u_1 + \frac{1}{2}(u'_2v_1 + u'_1v_2))\mathbf{e}_1 + u'_2\mathbf{e}_2 + u'_1\mathbf{e}_3,$$

ve

$$\Pi_y(x, y) = (v'_3 + v'_2v_1 + \frac{1}{2}(3v'_2u_1 - v'_1u_2))\mathbf{e}_1 + v'_2\mathbf{e}_2 + v'_1\mathbf{e}_3$$

olur. Burada,

$$U(x, y) = u'_3 + u'_2u_1 + \frac{1}{2}(u'_2v_1 + u'_1v_2) \quad (5.1.25)$$

ve

$$V(x, y) = v'_3 + v'_2v_1 + \frac{1}{2}(3v'_2u_1 - v'_1u_2) \quad (5.1.26)$$

olmak üzere

$$U^2 + u_2'^2 > u_1'^2,$$

$$V^2 + v_2'^2 > v_1'^2,$$

$$(v'_2u'_1 - u'_2v'_1)^2 + (u'_1V - v'_1U)^2 < (v'_2U - u'_2V)^2$$

yazılır. $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de α ve β , sırasıyla,

$$\alpha(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)), \quad \beta(y) = (v_1(y), v_2(y), v_3(y))$$

parametrizasyonları ile verilen iki spacelike eğri olsun. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.1.2.

M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilsin. M minimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} & (V^2 + v_2'^2 - v_1'^2)[\bar{N}_1\mathbb{N} + \bar{N}_2\mathbb{O} - \bar{N}_3\mathbb{P}] \\ & -(UV + u_2'v_2' - u_1'v_1')[\bar{N}_1(\mathbb{Q} + \mathbb{U}) + \bar{N}_2(\mathbb{S} + \mathbb{V}) - \bar{N}_3(\mathbb{T} + \mathbb{Y}) \\ & +(U^2 + u_2'^2 - u_1'^2)[\bar{N}_1\mathfrak{D} + \bar{N}_2\mathfrak{D} - \bar{N}_3\mathfrak{U}] = 0 \end{aligned}$$

dir.

İspat. (5.1.24) parametrizasyonu ile verilen $\Pi(x, y)$ nin x ve y ye göre türevleri alınır ve burada (5.1.25) ve (5.1.26) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\Pi_x(x, y) = U\mathbf{e}_1 + u_2'\mathbf{e}_2 + u_1'\mathbf{e}_3 \quad (5.1.27)$$

ve

$$\Pi_y(x, y) = V\mathbf{e}_1 + v_2'\mathbf{e}_2 + v_1'\mathbf{e}_3 \quad (5.1.28)$$

olur. (5.1.27) ve (5.1.28) den $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$E = U^2 + u_2'^2 - u_1'^2, \quad (5.1.29)$$

$$F = UV + u_2'v_2' - u_1'v_1', \quad (5.1.30)$$

$$G = V^2 + v_2'^2 - v_1'^2 \quad (5.1.31)$$

şeklinde elde edilir. M yüzeyi spacelike bir yüzey olduğundan, Γ_x ve Γ_y vektör alanları da spacelike olur. Dolayısıyla gerdikleri altuzay spacelike olup

$$U^2 + u_2'^2 > u_1'^2,$$

$$V^2 + v_2'^2 > v_1'^2$$

yazılır.

Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\bar{N}_1 = v'_2 u'_1 - u'_2 v'_1, \quad \bar{N}_2 = u'_1 V - v'_1 U, \quad \bar{N}_3 = v'_2 U - u'_2 V$$

ve

$$\varpi = \sqrt{(v'_2 u'_1 - u'_2 v'_1)^2 + (u'_1 V - v'_1 U)^2 - (v'_2 U - u'_2 V)^2}$$

olmak üzere

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\varpi} (\bar{N}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{N}_2 \mathbf{e}_2 + \bar{N}_3 \mathbf{e}_3) \quad (5.1.32)$$

olur. Burada

$$(v'_2 u'_1 - u'_2 v'_1)^2 + (u'_1 V - v'_1 U)^2 < (v'_2 U - u'_2 V)^2$$

dir. Yüzeyin $\nabla_{\Pi_x} \Pi_x$, $\nabla_{\Pi_x} \Pi_y$, $\nabla_{\Pi_y} \Pi_x$ ve $\nabla_{\Pi_y} \Pi_y$ konneksiyonları, sırasıyla,

$$\mathbb{N} = u'_2 U_y + u'_1 U_x, \quad \mathbb{O} = U u'_1 + u'_1 u''_2, \quad \mathbb{P} = U u'_2 + u'_1 u''_1,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= u'_2 (V_y + \frac{1}{2} v'_1) + u'_1 (V_x - \frac{1}{2} v'_2), \\ \mathbb{S} &= \frac{1}{2} (U v'_1 + V u'_1) + u'_2 v''_2, \\ \mathbb{T} &= \frac{1}{2} (U v'_2 + V u'_2) + u'_2 v''_1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= v'_2 (U_y + \frac{1}{2} u'_1) + v'_1 (U_x - \frac{1}{2} u'_2), \\ \mathbb{V} &= \frac{1}{2} (U v'_2 + V u'_1) + v'_1 U_x, \\ \mathbb{Y} &= \frac{1}{2} (v'_2 U + V u'_2) + v'_1 u''_1, \end{aligned}$$

$$\mathbb{D} = v'_2 V_y + v'_1 V_x, \quad \mathbb{D} = V v'_1 + v'_2 v''_2, \quad \mathbb{U} = V v'_2 + v'_2 v''_1,$$

olmak üzere

$$\nabla_{\Pi_x} \Pi_x = \mathbf{N}\mathbf{e}_1 + \mathbf{O}\mathbf{e}_2 + \mathbf{P}\mathbf{e}_3, \quad (5.1.33)$$

$$\nabla_{\Pi_x} \Pi_y = \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 + \mathbf{S}\mathbf{e}_2 + \mathbf{T}\mathbf{e}_3, \quad (5.1.34)$$

$$\nabla_{\Pi_y} \Pi_x = \mathbf{U}\mathbf{e}_1 + \mathbf{V}\mathbf{e}_2 + \mathbf{Y}\mathbf{e}_3, \quad (5.1.35)$$

$$\nabla_{\Pi_y} \Pi_y = \mathbf{\check{D}}\mathbf{e}_1 + \mathbf{\check{O}}\mathbf{e}_2 + \mathbf{\check{U}}\mathbf{e}_3, \quad (5.1.36)$$

elde edilir. (5.1.32) ve (5.1.33)-(5.1.36) denklemlerinden $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$h_{11} = \frac{1}{\varpi} [\bar{N}_1 \mathbf{N} + \bar{N}_2 \mathbf{O} - \bar{N}_3 \mathbf{P}], \quad (5.1.37)$$

$$h_{12} = \frac{1}{\varpi} [\bar{N}_1 \mathbf{Q} + \bar{N}_2 \mathbf{S} - \bar{N}_3 \mathbf{T}], \quad (5.1.38)$$

$$h_{21} = \frac{1}{\varpi} [\bar{N}_1 \mathbf{U} + \bar{N}_2 \mathbf{V} - \bar{N}_3 \mathbf{Y}], \quad (5.1.39)$$

$$h_{22} = \frac{1}{\varpi} [\bar{N}_1 \mathbf{\check{D}} + \bar{N}_2 \mathbf{\check{O}} - \bar{N}_3 \mathbf{\check{U}}] \quad (5.1.40)$$

şeklinde yazılır. (5.1.29)-(5.1.31) ve (5.1.37)-(5.1.40) denklemlerinden, M yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} H = & -\frac{1}{2\varpi^2} [(V^2 + v_2'^2 - v_1'^2) [\bar{N}_1 \mathbf{N} + \bar{N}_2 \mathbf{O} - \bar{N}_3 \mathbf{P}] \\ & - (UV + u_2'v_2' - u_1'v_1') [\bar{N}_1 (\mathbf{Q} + \mathbf{U}) + \bar{N}_2 (\mathbf{S} + \mathbf{V}) - \bar{N}_3 (\mathbf{T} + \mathbf{Y}) \\ & + (U^2 + u_2'^2 - u_1'^2) [\bar{N}_1 \mathbf{\check{D}} + \bar{N}_2 \mathbf{\check{O}} - \bar{N}_3 \mathbf{\check{U}}] \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_2)$ de $\Gamma(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir spacelike yüzey olsun. M minimal bir yüzey ve

$$A^2 + B^2 > C^2,$$

$$P^2 + Q^2 > R^2,$$

$$(AQ - BP)^2 + (PC - AR)^2 < (QC - BR)^2$$

olmak üzere Teorem 5.1.1 e benzer olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.1.3.

M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_2)$ de bir spacelike yüzey olsun. M minimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} & (-P^2 + Q^2 + R^2)[-AN_1 + BN_2 + DN_3] \\ & + (-AP + BQ + RC)[-N_1(\mathbb{E} + \mathbb{H}) + N_2(\mathbb{F} + \mathbb{I}) + N_3(\mathbb{J} + \mathbb{G})] \\ & + (A^2 + B^2 - C^2)[-KN_1 + LN_2 + MN_3] = 0 \end{aligned}$$

dir□

M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_2)$ de $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir spacelike yüzey olsun. $\Pi(x, y)$ minimal bir yüzey ve

$$\begin{aligned} u_2'^2 + u_1'^2 & > U^2, \\ v_2'^2 + v_1'^2 & > V^2, \end{aligned}$$

$$(v_2'U - u_2'V)^2 + (u_1'V - v_1'U)^2 < (v_2'u_1' - u_2'v_1')^2$$

olmak üzere, Sonuç 5.1.2 e benzer olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.1.4.

M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_2)$ de $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir spacelike yüzey olsun. M minimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} & (-V^2 + v_2'^2 + v_1'^2)[-N_1\mathbb{N} + N_2\mathbb{O} + N_3\mathbb{P}] \\ & - (-UV + u_2'v_2' + u_1'v_1')[-N_1(\mathbb{Q} + \mathbb{U}) + N_2(\mathbb{S} + \mathbb{V}) + N_3(\mathbb{T} + \mathbb{Y})] \\ & + (-U^2 + u_2'^2 + u_1'^2)[-N_1\mathbb{D} + N_2\mathbb{C} + N_3\mathbb{U}] = 0 \end{aligned}$$

dir□

M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de $\Gamma(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir timelike yüzey olsun. Bu durumda

$$(QC - BR)^2 + (PC - AR)^2 > (AQ - BP)^2$$

ve

i)

$$A^2 + B^2 < C^2,$$

$$P^2 + Q^2 > R^2$$

ii)

$$A^2 + B^2 > C^2,$$

$$P^2 + Q^2 < R^2$$

olmak üzere aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.1.5.

M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de $\Gamma(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir timelike yüzey olsun. M , maksimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} & (P^2 + Q^2 - R^2)[\mathbb{A}N_1 + \mathbb{B}N_2 - \mathbb{D}N_3] \\ & + (AP + BQ - RC)[N_1(\mathbb{E} + \mathbb{H}) + N_2(\mathbb{F} + \mathbb{I}) - N_3(\mathbb{J} + \mathbb{G})] \\ & + (A^2 + B^2 - C^2)[\mathbb{K}N_1 + \mathbb{L}N_2 - \mathbb{M}N_3] = 0 \end{aligned}$$

dır $\square$

$(\mathbb{H}_3, g_1)$ de α ve β eğrileri verilsin. M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir timelike yüzey ise

$$(v'_2 u'_1 - u'_2 v'_1)^2 + (u'_1 V - v'_1 U)^2 > (v'_2 U - u'_2 V)^2$$

ve

i) α spacelike eğri ve β timelike eğri ise

$$\begin{aligned} U^2 + u_2'^2 &> u_1'^2, \\ V^2 + v_2'^2 &< v_1'^2 \end{aligned}$$

ii) α timelike eğri ve β spacelike eğri ise

$$\begin{aligned} U^2 + u_2'^2 &> u_1'^2, \\ V^2 + v_2'^2 &< v_1'^2 \end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.1.6.

$(\mathbb{H}_3, g_1)$ de α ve β eğrileri verilsin. M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_1)$ de $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen maksimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} &(V^2 + v_2'^2 - v_1'^2)[\bar{N}_1\mathbb{N} + \bar{N}_2\mathbb{O} - \bar{N}_3\mathbb{P}] \\ &-(UV + u_2'v_2' - u_1'v_1')[\bar{N}_1(\mathbb{Q} + \mathbb{U}) + \bar{N}_2(\mathbb{S} + \mathbb{V}) - \bar{N}_3(\mathbb{T} + \mathbb{Y})] \\ &+(U^2 + u_2'^2 - u_1'^2)[\bar{N}_1\mathbb{D} + \bar{N}_2\mathbb{D} - \bar{N}_3\mathbb{U}] = 0 \end{aligned}$$

dir $\square$

M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_2)$ de $\Gamma(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir timelike yüzey olsun. Bu durumda

$$(AQ - BP)^2 + (PC - AR)^2 > (QC - BR)^2$$

ve

i)

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &< C^2, \\ P^2 + Q^2 &> R^2 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &> C^2, \\ P^2 + Q^2 &< R^2 \end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.1.7.

M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_2)$ de $\Gamma(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen timelike yüzey olsun. M maksimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} &(-P^2 + Q^2 + R^2)[-A N_1 + B N_2 + D N_3] \\ &+ (-AP + BQ + RC)[-N_1(E + H) + N_2(F + I) + N_3(J + G)] \\ &+ (A^2 + B^2 - C^2)[-K N_1 + L N_2 + M N_3] = 0 \end{aligned}$$

dır□

$(\mathbb{H}_3, g_2)$ de α ve β eğrileri verilsin. M yüzeyi, $(\mathbb{H}_3, g_2)$ de $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir timelike yüzey olsun. Bu durumda

$$(v'_2 U - u'_2 V)^2 + (u'_1 V - v'_1 U)^2 > (v'_2 u'_1 - u'_2 v'_1)^2$$

ve

i) α spacelike eğri ve β timelike eğri ise

$$\begin{aligned} u'^2_1 + u'^2_2 &> U^2, \\ v'^2_1 + v'^2_2 &< V^2 \end{aligned}$$

ii) α timelike eğri ve β spacelike eğri ise

$$\begin{aligned} u_1'^2 + u_2'^2 &< U^2, \\ v_1'^2 + v_2'^2 &> V^2 \end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.1.8.

$M, (\mathbb{H}_3, g_2)$ da $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir timelike yüzey olsun. M maksimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} &(-V^2 + v_2'^2 + v_1'^2)[- \bar{N}_1 \mathbb{N} + \bar{N}_2 \mathbb{O} + \bar{N}_3 \mathbb{P}] \\ &-(-UV + u_2'v_2' + u_1'v_1')[- \bar{N}_1(\mathbb{Q} + \mathbb{U}) + \bar{N}_2(\mathbb{S} + \mathbb{V}) + \bar{N}_3(\mathbb{T} + \mathbb{Y})] \\ &+(-U^2 + u_2'^2 + u_1'^2)[- \bar{N}_1 \mathbb{J} + \bar{N}_2 \mathbb{D} + \bar{N}_3 \mathbb{U}] = 0 \end{aligned}$$

dir $\square$

$M, (\mathbb{H}_3, g_3)$ de $\Gamma(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen spacelike yüzey olsun. $\Gamma(x, y)$ nin x ve y ye göre türevleri, sırasıyla,

$$L(x, y) = \Xi_x, \quad J(x, y) = \Xi \Upsilon_x + \Theta_x, \quad N(x, y) = \Upsilon_x(1 - \Xi) - \Theta_x, \quad (5.1.41)$$

ve

$$\mu(x, y) = \Xi_y, \quad Y(x, y) = \Xi \Upsilon_y + \Theta_y, \quad Z(x, y) = \Upsilon_y(1 - \Xi) - \Theta_y \quad (5.1.42)$$

olmak üzere

$$\Gamma_x(x, y) = L(x, y) \mathbf{e}_1 + J(x, y) \mathbf{e}_2 + N(x, y) \mathbf{e}_3, \quad (5.1.43)$$

ve

$$\Gamma_y(x, y) = \mu(x, y) \mathbf{e}_1 + Y(x, y) \mathbf{e}_2 + Z(x, y) \mathbf{e}_3 \quad (5.1.44)$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} L^2 + J^2 &> N^2, \\ \mu^2 + Y^2 &> Z^2 \end{aligned}$$

ve

$$(JZ - NY)^2 + (\mu N - LZ)^2 < (\mu J - LY)^2$$

olur. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.1.9

M , $(\mathbb{H}_3, g_3)$ da $\Gamma(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir spacelike yüzey olsun. Burada, M minimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} &(\mu^2 + Y^2 - Z^2)(\tilde{N}_1 \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{N}_2 \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{N}_3 \tilde{\mathbf{C}}) \\ &-(L\mu + JY - NZ)[\tilde{N}_1(\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{G}}) + \tilde{N}_2(\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{J}}) - \tilde{N}_3(\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{L}})] \\ &+(L^2 + J^2 - N^2)[\tilde{N}_1 \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{N}_2 \tilde{\mathbf{P}} - \tilde{N}_3 \tilde{\mathbf{R}}] = 0 \end{aligned}$$

dır.

İspat. (5.1.43) ve (5.1.44) denklemlerinden, M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları

$$E = L^2 + J^2 - N^2, \quad (5.1.45)$$

$$F = L\mu + JY - NZ, \quad (5.1.46)$$

$$G = \mu^2 + Y^2 - Z^2 \quad (5.1.47)$$

şeklinde elde edilir. M yüzeyi spacelike bir yüzey olduğundan Γ_x ve Γ_y vektör alanları spacelike olur. Dolayısıyla gerdikleri altuzay spacelike olacaktır. Böylece

$$L^2 + J^2 > N^2, \quad (5.1.48)$$

$$\mu^2 + Y^2 > Z^2 \quad (5.1.49)$$

yazılır.

$$\mathbf{N} = \frac{\Gamma_x \times \Gamma_y}{\|\Gamma_x \times \Gamma_y\|}$$

eşitliğinde (5.1.43) ve (5.1.44) göz önüne alınır ve gerekli işlemler yapılırsa yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\tilde{N}_1 = JZ - NY, \quad \tilde{N}_2 = \mu N - LZ, \quad \tilde{N}_3 = \mu J - LY \quad (5.1.50)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\varpi} \{ \tilde{N}_1 \mathbf{e}_1 + \tilde{N}_2 \mathbf{e}_2 + \tilde{N}_3 \mathbf{e}_3 \} \quad (5.1.51)$$

olur. Burada

$$\varpi = \|\Gamma_x \times \Gamma_y\|$$

bulunur. M yüzeyinin birim normal vektör alanı timelike olup (5.1.50) eşitliğinden

$$(JZ - NY)^2 + (\mu N - LZ)^2 < (\mu J - LY)^2$$

elde edilir.

M yüzeyinin $\nabla_{\Gamma_x} \Gamma_x$, $\nabla_{\Gamma_x} \Gamma_y$, $\nabla_{\Gamma_y} \Gamma_x$ ve $\nabla_{\Gamma_y} \Gamma_y$ konneksiyonları, sırasıyla,

$$\tilde{\mathbf{A}} = LL_x + (J + N)(L_y - J - N),$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = LJ_x + (J + N)(J_y + L),$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = LN_x + (J + N)(N_y - L),$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = L\mu_x + (J + N)(\mu_y - Y - Z),$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = LY_x + (J + N)(Y_y + \mu),$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = LZ_x + (J + N)(Z_y - \mu),$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mu L_x + (Y + Z)(L_y - J - N),$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mu J_x + (Y + Z)(J_y + L),$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mu N_x + (Y + Z)(N_y - L)$$

ve

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mu\mu_x + (Y + Z)(\mu_y - Y - Z),$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mu Y_x + (Y + Z)(Y_y + \mu)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mu Z_x + (Y + Z)(Z_y - \mu)$$

olmak üzere

$$\nabla_{\Gamma_x} \Gamma_x = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{e}_2 + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{e}_3, \quad (5.1.52)$$

$$\nabla_{\Gamma_x} \Gamma_y = \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{e}_2 + \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{e}_3, \quad (5.1.53)$$

$$\nabla_{\Gamma_y} \Gamma_x = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{J}}\mathbf{e}_2 + \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{e}_3, \quad (5.1.54)$$

$$\nabla_{\Gamma_y} \Gamma_y = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{e}_2 + \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}_3 \quad (5.1.55)$$

olur. (5.1.51) ve (5.1.52)-(5.1.55) denklemlerinden, M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları

$$h_{11} = \frac{1}{\varpi} [\tilde{\mathbf{N}}_1 \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{N}}_2 \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{N}}_3 \tilde{\mathbf{C}}], \quad (5.1.56)$$

$$h_{12} = \frac{1}{\varpi} [\tilde{\mathbf{N}}_1 \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{N}}_2 \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{N}}_3 \tilde{\mathbf{F}}], \quad (5.1.57)$$

$$h_{21} = \frac{1}{\varpi} [\tilde{\mathbf{N}}_1 \tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{N}}_2 \tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{N}}_3 \tilde{\mathbf{L}}] \quad (5.1.58)$$

$$h_{22} = \frac{1}{\varpi} [\tilde{\mathbf{N}}_1 \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{N}}_2 \tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{N}}_3 \tilde{\mathbf{R}}] \quad (5.1.59)$$

bulunur. (5.1.45)-(5.1.47) ve (5.1.56)-(5.1.59) denklemlerinden, M yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} H = & -\frac{1}{2\varpi} [(\mu^2 + Y^2 - Z^2)(\tilde{\mathbf{N}}_1 \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{N}}_2 \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{N}}_3 \tilde{\mathbf{C}}) \\ & -(L\mu + JY - NZ)[\tilde{\mathbf{N}}_1(\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{G}}) + \tilde{\mathbf{N}}_2(\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{J}}) - \tilde{\mathbf{N}}_3(\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{L}})] \\ & +(L^2 + J^2 - N^2)[\tilde{\mathbf{N}}_1 \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{N}}_2 \tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{N}}_3 \tilde{\mathbf{R}}]] \end{aligned}$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
& (\mu^2 + Y^2 - Z^2)(\tilde{\mathbf{N}}_1\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{N}}_2\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{N}}_3\tilde{\mathbf{C}}) \\
& -(L\mu + JY - NZ)[\tilde{\mathbf{N}}_1(\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{G}}) + \tilde{\mathbf{N}}_2(\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{J}}) - \tilde{\mathbf{N}}_3(\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{L}})] \\
& +(L^2 + J^2 - N^2)[\tilde{\mathbf{N}}_1\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{N}}_2\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{N}}_3\tilde{\mathbf{R}}] = 0
\end{aligned}$$

olduğunda yüzey minimal olduğundan ispat tamamlanır.

M , $(\mathbb{H}_3, g_3)$ de $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen bir spacelike yüzey olsun.

$\Pi(x, y)$ nin x ve y ye göre türevleri

$$\zeta(x, y) = u_1 u'_2 + u'_3 + \frac{1}{2}(u'_1 v_2 + u'_2 v_1)$$

ve

$$\eta(x, y) = v_1 v'_2 + v'_3 + \frac{1}{2}(3u_1 v'_2 - u_2 v'_1)$$

olmak üzere

$$\Pi_x(x, y) = u'_2 u_1 \mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2 + (u'_2 - \zeta) \mathbf{e}_3,$$

$$\Pi_y(x, y) = v'_2 v_1 \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + (v'_2 - \eta) \mathbf{e}_3$$

bulunur. Burada,

$$u_2'^2 u_1^2 + \zeta^2 > (u'_2 - \zeta)^2,$$

$$v_2'^2 v_1^2 + \eta^2 > (u'_2 - \eta)^2$$

$$(v'_2 - \eta u'_2)^2 + (v'_2 v_1 (u'_2 - \zeta) - u'_2 u_1 (v'_2 - \eta))^2 < (v'_2 u_1 \eta - \zeta v'_2 v_1)^2$$

olur. Buna göre, α ve β , sırasıyla, $(\mathbb{H}_3, g_3)$ de

$$\alpha(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)), \quad \beta(y) = (v_1(y), v_2(y), v_3(y))$$

parametrizasyonları ile verilen iki spacelike eğri olmak üzere aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.1.10.

M , $(\mathbb{H}_3, g_3)$ de $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen minimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} & (v_2'^2 v_1^2 + \eta^2 - (u_2' - \eta)^2)[\hat{N}_1 \hat{\mathbf{A}} + \hat{N}_2 \hat{\mathbf{B}} - \hat{N}_3 \hat{\mathbf{C}}] \\ & - (u_2' v_2' u_1 v_1 + \zeta \eta - (u_2' - \zeta)(v_2' - \eta))[\hat{N}_1(\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{G}}) + \hat{N}_2(\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}) - \hat{N}_3(\hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{L}})] \\ & + (u_2'^2 u_1^2 + \zeta^2 - (u_2' - \zeta)^2)[\hat{N}_1 \hat{\mathbf{M}} + \hat{N}_2 \hat{\mathbf{P}} - \hat{N}_3 \hat{\mathbf{R}}] = 0 \end{aligned}$$

dır.

İspat. $\Pi(x, y)$ nin x ve y ye göre kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\Pi_x(x, y) = u_2' u_1 \mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2 + (u_2' - \zeta) \mathbf{e}_3, \quad (5.1.60)$$

$$\Pi_y(x, y) = v_2' v_1 \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + (v_2' - \eta) \mathbf{e}_3 \quad (5.1.61)$$

olur. M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$E = u_2'^2 u_1^2 + \zeta^2 - (u_2' - \zeta)^2, \quad (5.1.62)$$

$$F = u_2' v_2' u_1 v_1 + \zeta \eta - (u_2' - \zeta)(v_2' - \eta), \quad (5.1.63)$$

$$G = v_2'^2 v_1^2 + \eta^2 - (v_2' - \eta)^2 \quad (5.1.64)$$

elde edilir. M spacelike bir yüzey olduğundan Π_x ve Π_y spacelike, gerdikleri altuzay da spacelike olup, (5.1.60) ve (5.1.61) eşitliklerinden

$$u_2'^2 u_1^2 + \zeta^2 > (u_2' - \zeta)^2,$$

$$u_2'^2 v_1^2 + \eta^2 > (v_2' - \eta)^2$$

yazılır.

M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\varpi = \sqrt{(v_2' - \eta u_2')^2 + (v_2' v_1 (u_2' - \zeta) - u_2' u_1 (v_2' - \eta))^2 - (u_2' u_1 \eta - \zeta v_2' v_1)^2}$$

ve

$$\hat{N}_1 = v'_2 - \eta u'_2, \quad \hat{N}_2 = v'_2 v_1 (u'_2 - \zeta) - u'_2 u_1 (v'_2 - \eta), \quad \hat{N}_3 = u'_2 u_1 \eta - \zeta v'_2 v_1 \quad (5.1.65)$$

olmak üzere

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\varpi} (\hat{N}_1 \mathbf{e}_1 + \hat{N}_2 \mathbf{e}_2 - \hat{N}_3 \mathbf{e}_3) \quad (5.1.66)$$

bulunur. Burada M yüzeyinin birim normal vektör alanı timelike olacağından, (5.1.65) eşitliklerinden

$$(v'_2 - \eta u'_2)^2 + (v'_2 v_1 (u'_2 - \zeta) - u'_2 u_1 (v'_2 - \eta))^2 < (v'_2 u_1 \eta - \zeta v'_2 v_1)^2$$

dir.

M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları olan h_{11} , h_{12} , h_{21} ve h_{22} , diğerlerine benzer şekilde hesaplanırsa, $\Gamma(x, y)$ yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\hat{\mathbf{A}} = u'_2 u_1 (u''_2 u_1 + u'_2 u'_1) - u'^2_2,$$

$$\hat{\mathbf{B}} = u'_2 u_1 \zeta_x + u'_2 (\zeta_y + u'_2 u_1),$$

$$\hat{\mathbf{C}} = u'_2 u_1 \zeta_x - u'_2 (\zeta_y + u'_2 u_1),$$

$$\hat{\mathbf{D}} = u'_2 (v''_2 v_1 + v'_2 v'_1 - v'_2),$$

$$\hat{\mathbf{E}} = u'_2 u_1 \eta_x + u'_2 (\eta_y + v'_2 v_1),$$

$$\hat{\mathbf{F}} = u'_2 u_1 \eta_x + u'_2 (\eta_y - v'_2 v_1),$$

$$\hat{\mathbf{G}} = v'_2 v_1 (u''_2 u_1 + u'_2 u'_1) - v'_2 u'_2,$$

$$\hat{\mathbf{J}} = u'_2 u_1 \zeta_x + u'_2 (\zeta_y + u'_2 u_1),$$

$$\hat{\mathbf{L}} = u'_2 u_1 (u''_2 - \zeta_x) - u'_2 (\zeta_y + u'_2 u_1)$$

ve

$$\hat{\mathbf{M}} = \eta (v''_2 v_1 + v'_2 v'_1 - v'_2),$$

$$\hat{\mathbf{P}} = v'_2 v_1 \eta_x + v'_2 (\eta_y + v'_2 v_1),$$

$$\hat{\mathbf{R}} = -v'_2 v_1 \eta_x + v'_2 (v''_2 - \eta_y - v'_2 v_1)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
H = & -\frac{1}{2\varpi}[(v_2'^2 v_1^2 + \eta^2 - (u_2' - \eta)^2)[\hat{N}_1 \hat{\mathbf{A}} + \hat{N}_2 \hat{\mathbf{B}} - \hat{N}_3 \hat{\mathbf{C}}] \\
& -(u_2' v_2' u_1 v_1 + \zeta \eta - (u_2' - \zeta)(v_2' - \eta))[\hat{N}_1(\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{G}}) \\
& + \hat{N}_2(\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}) - \hat{N}_3(\hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{L}})] \\
& +(u_2'^2 u_1^2 + \zeta^2 - (u_2' - \zeta)^2)[\hat{N}_1 \hat{\mathbf{M}} + \hat{N}_2 \hat{\mathbf{P}} - \hat{N}_3 \hat{\mathbf{R}}]
\end{aligned} \tag{5.1.67}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$(\mathbb{H}_3, g_3)$ de α ve β eğrileri verilsin. $(\mathbb{H}_3, g_3)$ de bir timelike yüzey olan M , $\Gamma(x, y)$ parametrizasyonu ile verilsin. Bu durumda

$$(JZ - NY)^2 + (\mu N - LZ)^2 > (\mu J - LY)^2$$

ve

i)

$$\begin{aligned}
L^2 + J^2 & > N^2, \\
P^2 + Q^2 & < R^2
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
L^2 + J^2 & < N^2, \\
\mu^2 + Y^2 & > Z^2
\end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.1.11

$M, (\mathbb{H}_3, g_3)$ de $\Gamma(x, y)$ denklemi ile verilen timelike yüzey olsun. M , maksimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} & (\mu^2 + Y^2 - Z^2)(\tilde{N}_1\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{N}_2\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{N}_3\tilde{\mathbf{C}}) \\ & -(L\mu + JY - NZ)[\tilde{N}_1(\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{G}}) + \tilde{N}_2(\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{J}}) - \tilde{N}_3(\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{L}})] \\ & +(L^2 + J^2 - N^2)[\tilde{N}_1\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{N}_2\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{N}_3\tilde{\mathbf{R}}] = 0 \end{aligned}$$

dir $\square$

α ve $\beta, (\mathbb{H}_3, g_3)$ de $\alpha(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)), \beta(y) = (v_1(y), v_2(y), v_3(y))$ parametrizasyonları ile verilsin. $(\mathbb{H}_3, g_3)$ de bir timelike yüzey olan $M, \Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilsin. Bu durumda,

$$(v'_2 - \eta u'_2)^2 + (v'_2 v_1(u'_2 - \zeta) - u'_2 u_1(v'_2 - \eta))^2 > (v'_2 u_1 \eta - \zeta v'_2 v_1)^2$$

ve

i) α spacelike eğri ve β timelike eğri ise

$$\begin{aligned} u'^2_2 u'^2_1 + \zeta^2 & > (u'_2 - \zeta)^2, \\ v'^2_2 v'^2_1 + \eta^2 & < (u'_2 - \eta)^2 \end{aligned}$$

ii) α timelike eğri ve β spacelike eğri ise

$$\begin{aligned} u'^2_2 u'^2_1 + \zeta^2 & < (u'_2 - \zeta)^2, \\ v'^2_2 v'^2_1 + \eta^2 & > (u'_2 - \eta)^2 \end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.1.12.

α spacelike eğri ve β timelike eğri olsun ve M yüzeyi $\Pi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilsin. M maksimal bir yüzey ise

$$\begin{aligned} & (v_2'^2 v_1^2 + \eta^2 - (u_2' - \eta)^2)[\hat{N}_1 \hat{\mathbf{A}} + \hat{N}_2 \hat{\mathbf{B}} - \hat{N}_3 \hat{\mathbf{C}}] \\ & - (u_2' v_2' u_1 v_1 + \zeta \eta - (u_2' - \zeta)(v_2' - \eta))[\hat{N}_1(\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{G}}) + \hat{N}_2(\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}) - \hat{N}_3(\hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{L}})] \\ & + (u_2'^2 u_1^2 + \zeta^2 - (u_2' - \zeta)^2)[\hat{N}_1 \hat{\mathbf{M}} + \hat{N}_2 \hat{\mathbf{P}} - \hat{N}_3 \hat{\mathbf{R}}] = 0 \end{aligned}$$

dır $\square$

6. BÖLÜM

SONUÇ

3- boyutlu Lorentz Heisenberg grubu 3×3 tipindeki matrislerden oluşan ve 2- adımda nilpotent olan bir Lie gruptur. 3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde

$$\begin{aligned} g_1 &= -dx^2 + dy^2 + (xdy + dz)^2, \\ g_2 &= dx^2 + dy^2 - (xdy + dz)^2, \\ g_3 &= dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2 \end{aligned}$$

olmak üzere üç farklı şekilde ifade edilen Lorentz metrikler mevcuttur.

Üçüncü Bölümde, 3- boyutlu Heisenberg grubu ve üzerinde tanımlanan Lorentz metriklerinin çeşitli özellikleri verildi. Ayrıca bu metrikler üzerinde tanımlanan Levi-Civita konneksiyonları elde edildi.

Dördüncü Bölümde, g_1 , g_2 ve g_3 metriklerine ait olan Levi- Civita konneksiyonlarından yararlanarak Lorentz Heisenberg grubunda, $f(x)$, $g(y)$ ve $h(x, y)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\psi(x, y) = (f(x), g(y), h(x, y))$$

parametrizasyonu ile verilen yüzeyin yönlendirilebilirlik şartları ve ortalama eğrilüğünün bazı karakterizasyonlarının sonuçları verildi. Bu karakterizasyonlara bağlı olarak $\psi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen yüzeyin minimal ve maksimal olma şartları verilerek, g_1 , g_2 ve g_3 metrikleri arasındaki ilişkiler elde edildi.

Beşinci Bölümde, $\Xi(x, y)$, $\Upsilon(x, y)$, $\Theta(x, y)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\Gamma(x, y) = (\Xi(x, y), \Upsilon(x, y), \Theta(x, y))$$

parametrizasyonu ile verilen yüzeyin ortalama eğriliğinin bazı karakterizasyonlarının sonuçları Levi- Civita konneksiyonları kullanılarak elde edildi. Bu karakterizasyonlara bağlı olarak $\psi(x, y)$ parametrizasyonu ile verilen yüzeyin minimal ve maksimal olma şartları elde edildi. Ayrıca, 3- boyutlu Lorentz Heisenberg grubunda iki eğrinin çarpımıyla elde edilen ve

$$\Pi(x, y) = (u_1(x) + v_1(y), u_2(x) + v_2(y), u_3(x) + v_3(y) + \frac{1}{2}(u_1(x)v_2(y) - u_2(x)v_1(y)))$$

parametrizasyonu ile verilen yüzeyin bazı özelliklerinin sonuçları verilerek, g_1 , g_2 ve g_3 metrikleri arasındaki ilişkiler elde edildi.

Bu çalışma 3-boyutlu Heisenberg grubunda bazı yüzeylerin karakterizasyonlarında önemli bir referans olacaktır. 3-boyutlu Lorentz Heisenberg grubunda nonparametrik öteleme yüzeyinin bir parametrizasyonu spacelike (timelike) iki eğrinin toplamı olarak elde edilebilir. g_1 , g_2 ve g_3 metriklerine ait olan Levi- Civita konneksiyonlarından yararlanılarak 3-boyutlu Lorentz Heisenberg grubunda öteleme yüzeylerinin minimal (maksimal) olma şartları incelenebilir. Ayrıca öteleme yüzeylerinin çeşitli geometrik özellikleri karakterize edilebilir.

Kaynaklar

- [1] **Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T.**, 1988, Manifolds Tensor Analysis and Applications,, Springer Verlag.
- [2] **Beem, J. K., Ehrlich, E. P.**, 1981, Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker. Inc., New York.
- [3] **Çetin, M., Tunçer, Y. and Ekmekçi, N.**, 2011, Translation Surfaces in Euclidean 3-Space, World Academy of Science, *Engineering and Technology*, 76, 864-868.
- [4] **Fernandez , A., Lucas, P.**,1992, Null 2- type Hypersurfaces in a Lorentz Space, *Canad. Math. Bull.*, 35, 354- 360.
- [5] **Gray, A., Abbena E., Salamon, S.**, 2006, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.
- [6] **Hacısalıhoğlu H. H.** , 1980, Yüksek Diferensiyel geometriye Giriş, İstanbul.
- [7] **Helgason, S.**, 1978, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. Academic Press.
- [8] **Inoguchi, J. I.**, 1999, Differential Geometry of Curves and surfaces in 3-Dimensional Homogeneous Spaces I, *Fukuoka Univ. Sci. Reports*, 29,155-182.
- [9] **Inoguchi, J. I.**, 2000, Differential Geometry of Curves and surfaces in 3-Dimensional Homogeneous Spaces II, *Fukuoka Univ. Sci. Reports*, 30,17-47.
- [10] **Inoguchi, J. I., Lopez, R., Munteanu, M. I.**, 2012, Minimal Translation Surfaces in the Heisenberg Group Nil_3 , *Geom. Dedicata*, 161, 221-231.
- [11] **Kamishima, Y.**,1993, Completeness of Lorentz Manifolds of Constant Curvature Admitting Killing Vector Fields, *J. Differential Geomtry*, 359- 601.
- [12] **Liu, H.**,1993, Translation surfaces with dependent Gaussian and mean curvature in 3-dimensional spaces, *J. Northeast Univ. Tech.*, 14, 88–93.
- [13] **Liu, H.** 1999, Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces, *J. Geom.* ,64, 141–149.

- [14] **Lopez, J. F.** , 2005, Global Geometry of Maximal Surfaces in the Lorentz-Minkowski space, Lecture notes.
- [15] **Nomizu, K.** 1966, Fundamentals of Linear Algebra, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [16] **O'Neill, B.**, 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York.
- [17] **Piu, P., Sanini, A.**, 1998, One Parameter Subgroups and Minimal Surfaces in the Heisenberg Group, *Note di Matematica*, 18, 143- 153.
- [18] **Rahmani N.**and **Rahmani S.**, 1994, Structures homogenes Lorentziennes sur le groupe de Heisenberg I, *J. Geom. Phys.* ,13, 254-258.
- [19] **Rahmani N.**and **Rahmani S.**, 2006, Lorentzian Geometry of the Heisenberg group, *Geom. Dedicata*, 118, 133–140.
- [20] **Sagle, A.A.** and **Walde, R.E.**, 1973. Introduction to Lie Groups and Lie Algebras, Academic Press, New York.
- [21] **Turhan, E.** and **Körpınar, T.**, 2009, Characterize on the Heisenberg Group with left invariant Lorentzian metric, *Demonstratio Mathematica*, 42, 423-428.
- [22] **Weinstein, T.** 1996. An introduction to Lorentz surfaces, de Gruyter, *Expositions in Mathematics* 22, Walter de Gruyter& Co., Berlin.
- [23] **Yano, K.**, 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, New York, Pergamon Press.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Elazığ 'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ 'da tamamladım. 2001 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2005 yılında aynı bölümden mezun oldum. Aynı yıl, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım. 2008 yılında yüksek lisansı tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora başladım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandım. Halen, aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.