

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

İÇ (INTERNAL) GRUPOİDLER VE ÖRTÜ MORFİZMLERİ

**Hazırlayan
Hürmet Fulya AKIZ**

**Danışman
Prof. Dr. Osman MUCUK**

Doktora Tezi

**Şubat 2013
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

İÇ (INTERNAL) GRUPOİDLER VE ÖRTÜ MORFİZMLERİ

**Hazırlayan
Hürmet Fulya AKIZ**

**Danışman
Prof. Dr. Osman MUCUK**

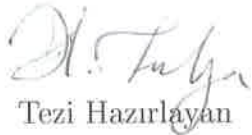
Doktora Tezi

**Şubat 2013
KAYSERİ**

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.


Hürmet Fulya AKIZ

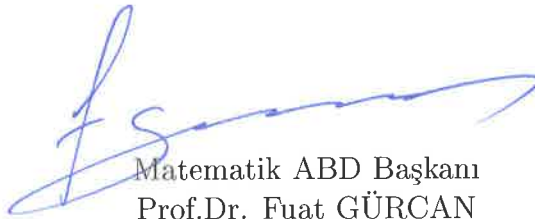
“İç (Internal) Grupoidler ve Örtü Morfizmleri” adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.



Tezi Hazırlayan
Hümet Fulya AKİZ



Danışman
Prof. Dr. Osman MUCUK



Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Prof. Dr. Osman MUCUK danışmanlığında **Hürmet Fulya AKIZ** tarafından hazırlanan “**İç (Internal) Grupoidler ve Örtü Morfizmleri**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

14/02/2013

JÜRİ :

Başkan : Prof. Dr. Mehmet BARAN
Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK
Üye : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN
Üye : Doç. Dr. Muammer KULA
Üye : Yrd. Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR



ONAY :

Bu tezin kabûlü Enstitü Yönetim Kurulunun 19/02/2013 tarih ve 2013/08-39 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

19 / 02 / 2013



Prof. Dr. Necmettin MARAŞLI
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

“İç Grupoidler ve Örtü Morfizmleri” isimli tez çalışmasının her aşamasında destek ve yardımını esirgemeyerek bana yol gösteren danışman hocam sayın Prof. Dr. Osman MUCUK’a, tez izleme komitesi üyeliğini kabul ederek beni yalnız bırakmayan hocalarım sayın Prof. Dr. Mehmet BARAN ve sayın Yrd. Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR’a sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Doktora çalışmalarım süresince beni hep anlayışla karşılayan bölüm başkanım ve hocam sayın Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN’e ve tezim için gerekli olan kaynaklara ulaşmada bana yardımda bulunan değerli meslektaşım sayın Öğr. Gör. Tuncar ŞAHAN’a teşekkür ederim.

Bütün öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleri ile her zaman yanımda olan anneme ve babama ve beni hiç yalnız bırakmayan eşim Metin AKIZ’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇ (INTERNAL) GRUPOİDLER VE ÖRTÜ MORFİZMLERİ

Hürmet Fulya AKIZ

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Doktora Tezi, Şubat 2013

Tez Danışman : Prof. Dr. Osman MUCUK

ÖZET

Örtü uzayı kavramı cebirsel topolojinin yanı sıra geometri ve cebir gibi matematiğin diğer bazı dalları için de önemlidir. Örtü uzayının topolojisi asıl uzayın topolojisinden daha basit olduğundan konunun önemini artırmaktadır. Grupoid tarihi çok eski olmamasına rağmen matematikte geniş uygulamalara sahiptir. Temel grupoidler, topolojik uzaylardan groupoidlere bir köprü görevi sağlamaktadır. Bu sayede bir X topolojik uzayının örtüleri ile $\pi_1 X$ temel grupoidinin örtülerinin denk olduğu elde edilir. Kategori denklikleri ile, bazı problemler denk olan kategorilerdeki daha basit problemlere dönüştürülebilir. Bu durum saha çalışanlarına bazı kolaylıklar sağlar. Topolojik grup örtüleri literatürde çeşitli kaynaklarda ele alınmış ve bu sahada aşağıdaki bazı sonuçlar önceden ispat edilmiştir.

X topolojik grup ise $\pi_1 X$ temel grupoidi bir grup-grupoid olup X in örtü gruplarının kategorisi ile $\pi_1 X$ in grup-grupoid örtülerinin kategorisi denktir. Bir G grup-grupoidi için G nin grup-grupoid örtülerinin kategorisi G nin gruplar üzerine etkimelerinin kategorisine denktir. X topolojik grubu için $t: (\pi_1 X)_e \rightarrow X$ bir crossed modul olup $\pi_1 X$ nin grup-grupoid örtülerinin kategorisi ve $(\pi_1 X)_e \rightarrow X$ crossed modülünün örtülerinin kategorisi denktir. Grup-grupoidlerin kategorisi ile crossed modüllerin kategorisi denktir. Bu kategori denkliği daha sonra çok işlemli gruplar ve internal kategori cinsinden genelleştirilmiştir.

Bu tezde bu genellemeden hareketle yukarıdaki diğer kategori denkliklerinin çok işlemli gruplar ve internal kategori cinsinden genelleştirilmesi yapılmıştır. Bunlara ilaveten G nin internal grupoid olması halinde bölüm grupoidinin de internal grupoid olduğu ispat edilmiştir. Son olarak bir topolojik internal grupoidin monodromy grupoidinin internal grupoid olduğu ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çok İşlemli Grup, Internal Grupoid, Crossed Modul.

INTERNAL GROUPOIDS AND COVERING MORPHISMS

Hürmet Fulya AKIZ

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Ph.D. Thesis, February 2013

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Osman MUCUK

ABSTRACT

The notion of covering space is not important only for algebraic topology but also for geometry and algebra. The construction of a covering space becomes more significant since the structure of the covering space is in a sense simpler than that of base space. Although the history of the groupoid is not very old, it has wide applications in some branches of Mathematics. The notion of the fundamental groupoid serves as a bridge from topological spaces to groupoids. This enables us that the category of coverings of a topological space X is equivalent to the category of covering groupoids of the fundamental groupoid $\pi_1 X$. By using the equivalence of the categories, some problems in a category can be converted to simpler problems in the equivalence category. So the equivalence of categories enables those working in the field. Covering groups of topological groups, in literature, have been discussed in some references. Some important results proved earlier, in this field, are below.

If X is a topological group, then the fundamental group $\pi_1 X$ is a group-groupoid and the categories of covering groups of X and of group-groupoid coverings of $\pi_1 X$ are equivalent. For a group-groupoid G , coverings of G is equivalent to the actions of G on groups. For the topological group X , the restriction map $(\pi_1 X)_e \rightarrow X$ is a crossed module; and group-groupoid coverings of $\pi_1 X$ and crossed module coverings of $(\pi_1 X)_e \rightarrow X$ are equivalent. Group groupoids and crossed modules are equivalent, which is generalised for groups with operations and internal groupoids.

Thus, in this thesis, the equivalences of other categories above are generalised for groups with operation and internal groupoids. In addition to these, it is shown that for an internal groupoid G and a normal subgroupoid N of G , the quotient groupoid G/N is an internal groupoid. Finally, it is proved that the monodromy groupoid of a topological internal groupoid is an internal groupoid.

Keywords: Group With Operations, Internal Groupoid, Crossed Module.

İÇİNDEKİLER

İÇ (INTERNAL) GRUPOİDLER VE ÖRTÜ MORFİZMLERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI	i
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI	ii
KABUL VE ONAY	iii
TEŞEKKÜR	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER	vii

GİRİŞ	1
-----------------	---

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

1.1. Temel Kavramlar	5
1.2. Örtü Uzayları	9
1.3. Kategori	10
1.4. Grupoid ve Grupoid Örtüleri	13
1.5. Etkime grupoidi ve crossed moduller	19

2. BÖLÜM

ÇOK İŞLEMLİ GRUPLAR KATEGORİSİNDE INTERNAL GRUPOİDLER VE CROSSED MODÜLLER

2.1. Çok İşlemli Gruplar	22
2.2. Çok İşlemli Gruplar Kategorisinde Internal Grupoidler	26
2.3. Çok İşlemli Gruplar Kategorisinde Crossed Moduller	41
2.4. Kategori Denklığı	46

3. BÖLÜM

BÖLÜM GRUPOİDİ VE MONODROMY GRUPOİDİ

3.1. Çok İşlemlı Gruplar Kategorisinde Bölüm Grupoidi	49
---	----

3.2. Çok İşlemlı Gruplar Kategorisinde Monodromy Grupoid . . .	55
--	----

4. BÖLÜM

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

4.1. Sonuç ve Değerlendirme	65
---------------------------------------	----

KAYNAKLAR	67
---------------------	----

ÖZGEÇMİŞ	71
--------------------	----

GİRİŞ

Fransız Matematikçi Jules Henri Poincaré, "Matematik, farklı şeylere aynı adı verme sanatıdır" demiştir. Gerçekten, tek bir tanım ya da kavram, pek çok problemi aydınlatmada bize yardımcı olmaktadır. Aslında Matematik, yalnızca kendi sınırları içerisinde kalmayıp, diğer bilim dallarından da yardımını esirgemez.

Bu çalışmada "örtü" kavramının, farklı kullanım alanlarından yola çıkarak, bazı cebirsel ve topolojik yapılara uyarlanması için çaba gösterildi. Gerek bir yapının temel uzayının örtüsünü tanımlamada, gerekse bu kavramın grupoidlere genişletilmesinde önemli yeri olan bir çok değerli kaynaktan faydalanıldı. Bu tezde yapılan çalışmalardan kısaca şöyle bahsedilebilir.

Örtü uzayı teorisinin, cebirsel topoloji alanında oldukça önemli bir yeri vardır. Bir X topolojik uzayından elde edilen temel grupoid ile X in örtü uzayından elde edilen temel grupoid arasındaki ilişki, grupoidlerin örtüsünü tanımlamada bize ışık tutar [1]. Bu kavram cebirsel topolojide sık kullanılmasının yanı sıra geometri ve cebir gibi matematiğin diğer dallarında da geniş uygulamalara sahiptir.

İrtibatlı bir X topolojik uzayının örtüsü, bir $\tilde{X}$ topolojik uzayı ile lokal homeomorfizm olan bir $p: \tilde{X} \rightarrow X$ sürekli fonksiyonundan oluşur [2]. Eğer $\tilde{X}$ uzayı basit irtibatlı ise, bu durumda $p: \tilde{X} \rightarrow X$ örtüsü *evrensel örtü* olarak adlandırılır. Evrensel örtü, bazı topolojik uzayların temel gruplarını hesaplamada oldukça kullanışlıdır. Örneğin bir X topolojik uzayının bir $x \in X$ noktasındaki temel grubu X in bu noktadaki evrensel örtüsünün çekirdeğidir [1], [3], [4].

Örtü uzaylarının önemli özelliklerinden biri X uzayındaki her bir eğrinin $\tilde{X}$ uzayına yükselebilir olmasıdır. Örtü uzaylarında genellikle uzaylar irtibatlı olarak kabul edilir. İrtibatsız olması hali Taylor [5] da ele alınmış, irtibatlı olmayan bir topolojik grubun da grup işleminin örtüye yükseltilmesi ile ilgili bir kriter verilmiştir. Daha sonra Mucuk [6] ve Brown ve Mucuk [7] da bu sonuç groupoid ile ilgili işlemler

kullanılarak genelleştirilmiştir.

Fark fonksiyonu sürekli olacak şekilde bir topolojiye sahip olan gruba bir *topolojik grup* denir. Örneğin her Lie grubu bir topolojik gruptur [8], [9], [10], [11]. X irtibatlı bir topolojik grup ve $p: \tilde{X} \rightarrow X$ topolojik uzayların bir örtü fonksiyonu olsun. Burada dikkat edelim ki $\tilde{X}$ yalnızca bir topolojik uzaydır. Fakat, $\tilde{X}$ nın basit irtibatlı olması halinde, $e \in X$ birim ve $p(\tilde{e}) = e$ ise $\tilde{e} \in \tilde{X}$ birim eleman olacak şekilde $\tilde{X}$ üzerinde bir grup yapısı vardır. Bu durumda $\tilde{X}$ bir topolojik grup ve $p: \tilde{X} \rightarrow X$ de sürekli bir grup homomorfizmidir [2].

Gruptan daha genel bir yapı olan *grupoid* yapısı, her bir morfizmi bir izomorfizm olan bir kategoridir. Grupoid tanımı ilk olarak 1926 da Brandt [12] tarafından yapılmıştır.

Bir X topolojik uzayında tanımlı tüm eğrilerin (uç noktalarına göre) homotopi sınıflarının cümlesi $\pi_1 X$, X üzerinde bir grupoiddir. Bu grupoid *temel grupoid* olarak adlandırılır ve $\pi_1: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ bir fonktor belirler. Bu fonktor, topolojik uzaylarda çözümü zor olan bazı problemlerin, cebirsel problemlere dönüşerek çözülmesinde fayda sağlar.

Bir G grupoidinde, grupoid yapısını oluşturan fonksiyonlar sürekli olacak şekilde, objelerin cümlesi O_G ve morfizmlerin cümlesi G üzerinde birer topoloji yapısı varsa bu grupoid *topolojik grupoid* olarak adlandırılır. İrtibatlı olan bir X topolojik uzayı basit irtibatlı bir örtüye sahip ise $\pi_1 X$ bir topolojik grupoid olur [13].

Cebirsel bir kategoride, *internal kategori* denilen yeni bir kategori elde etmek mümkündür. Yeni oluşturulan bu kategoride her bir morfizmin bir tersi olduğundan bir internal kategori aslında bir grupoid olup, buna *internal grupoid* denir. Örneğin gruplar kategorisinde bir internal grupoid bir *grup-grupoid* olarak adlandırılır [14], [15]. Bu konuda önemli örneklerden birisi de, X bir topolojik grup iken $\pi_1 X$ temel grupoidinin bir grup-grupoid olmasıdır [16]. X in bir topolojik halka olması durumunda ise $\pi_1 X$ bir *halka grupoididir* [17]. Grup-grupoidler, bazı kaynaklarda grupoidlerin kategorisindeki bir grup obje olarak alınır [16].

Çok işlemli grup fikri ilk olarak Higgins [8] ve Orzech [18] tarafından bilim dünyasına

sunulmuştur. Bu kaynaklarda, aynı tip çok işlemli grupların kategorisinden bahsedilmiştir. Bu tezde, Bölüm 3 de çok işlemli grup tanımı Porter [14] ve Datuashvili [15] daki gibi yapılmıştır. Çok işlemli gruplar, gruplardan daha geniş bir yapı olup, grup, halka ve R-modül gibi cebirsel yapıları da kapsar.

Çok işlemli grupların kategorisi olan $\mathbf{GpOp}$ de bir internal grupoid, hem objelerinin hem de morfizmlerinin cümlesi birer çok işlemli grup, grupoid yapısındaki fonksiyonlar ise birer çok işlemli grup morfizmi olan bir grupoiddir. X in bir çok işlemli grup morfizmi olması halinde $\pi_1 X$ in bir internal grupoiddir [19]. $p: \tilde{G} \rightarrow G$ bir internal grupoid örtü morfizmi, grupoidler üzerinde bir örtü morfizmidir.

Grupoid örtü morfizmleri grupoidlerin uygulamalarında önemli bir yere sahiptir [1], [8]. Grupoid örtü morfizmleri ile ilgili bilinen önemli iki sonuç vardır [28]:

Bunların birincisi olarak eğer X basit irtibatlı bir örtüye sahip olan irtibatlı bir topolojik uzay ise X in topolojik uzay örtülerinin kategorisi $\mathbf{TCov}/X$ ile $\pi_1 X$ temel grupoidinin grupoid örtü morfizmlerinin kategorisi $\mathbf{GdCov}/\pi_1 X$ nin denk olduğu Brown [13] referansında gösterilmiştir. X in bir topolojik grup olması halinde X in topolojik grup örtülerinin kategorisi $\mathbf{TGpCov}/X$ ile $\pi_1 X$ grup-grupoidinin, grup grupoid örtülerinin kategorisi $\mathbf{GpGdCov}/\pi_1 X$ in denk oldukları Brown ve Mucuk [7] da gösterilmiştir. X in bir çok işlemli topolojik grup olması durumunda ise X in çok işlemli topolojik grup örtülerinin kategorisi $\mathbf{TGpOpCov}/X$ ile $\pi_1 X$ internal grupoidinin, internal grupoid örtülerinin kategorisi $\mathbf{IntGdCov}/\pi_1 X$ denktir [19].

İkinci sonuç ise bir G grupoidinin bir X cümlesi üzerine etkimesinden elde edilen kategori denklikleridir. G nin örtü morfizmlerinin kategorisi $\mathbf{GdCov}/G$ ile etkimelerinin kategorisi $\mathbf{GdAct}/G$ nin denk oldukları Brown-Hardy [28] de verilmiştir. Buna ilaveten eğer G bir grup-grupoid ise G nin grup-grupoid örtülerinin kategorisi $\mathbf{GpGdCov}/G$ ile G nin grup-grupoid etkimelerinin kategorisi $\mathbf{GpGdAct}/G$ nin denk oldukları ise Brown-Mucuk [7] de verilmiştir.

Bu iki sonuçtan hareketle, Bölüm 3 de, ilk olarak, bir G internal grupoidinin bir X çok işlemli grubu üzerine etkimesinden bahsedilmiştir. Bu tanımla ilgili olarak, G internal grupoidinin örtülerinin kategorisi $\mathbf{IntGdCov}/G$ ile internal grupoid

etkimelerinin kategorisi $\mathbf{IntGdAct}/G$ nin denk olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 3 de ayrıca çok işlemli gruplar kategorisindeki bir crossed modul ele alınmıştır. Önce daha basit olarak gruplar kategorisindeki crossed modulden şöyle bahsedebiliriz: M ve P birer grup ve $\mu: M \rightarrow P$ grup morfizmi olmak üzere P nin M üzerine bir $P \times M \rightarrow M, (p, m) \mapsto m^p$ (sol) etkimesi ile oluşturulan ve belli şartları sağlayan bir (M, P, μ) üçlüsüne bir *crossed modul* denir. Gruplar kategorisinde bir crossed modulün bir grup-grupoide denk olduğu Brown ve Spencer [16] de verilmiştir. Bundan daha genel olarak $\mathbf{GpOp}$ kategorisinde bir crossed modulün bir internal grupoide denk olduğu ise Porter [14] da verilmiştir. Bu referanslardaki, bir internal grupoidden bir crossed modul elde etme tekniği, Bölüm 3 te göstermeyi hedeflediğimiz kategori denkliği için bize ışık tutmuştur. $\mathbf{GpOp}$ kategorisindeki bir internal grupoidin örtülerinin kategorisi $\mathbf{IntGdCov}/G$ ile G ye denk olan bir $A \rightarrow B$ crossed modulünün örtülerinin kategorisi $\mathbf{CModCov}/_{A \rightarrow B}$ nin denk olduğu Bölüm 3 te gösterilmiştir.

Bölüm grupoidinin tanımı [1] ve [8] de yapılmıştır. G bir grupoid ve N , G nin bir normal alt grupoidi olsun. G üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısına göre her bir $a \in G$ nin denklik sınıfı $[a]$ ile gösterilirse, G/N üzerindeki grupoid işlemi $[b] \circ [a]$ tanımlıdır ancak ve ancak $b_1 \circ a_1$, G de tanımlı olacak şekilde $a_1 \in [a]$ ve $b_1 \in [b]$ için $[b] \circ [a] = [b_1 \circ a_1]$ dir. G bir grup-grupoid iken G/N nin de bir grup-grupoid olduğu [20] de verilmiştir. Bölüm 4 te bu sonuç daha genelleştirilerek G , $\mathbf{GpOp}$ kategorisinde bir internal grupoid iken G/N bölüm grupoidinin bir internal grupoid olduğu verilmiştir.

Monodromy grupoid fikri 1981-1985 yıllarında J. Paradines tarafından sunulmuş fakat tanım olarak ilk defa Brown [1] de yapılmıştır. Fakat bu çalışmamızda Mackenzie [21] de verilen tanım üzerinden hareket edilmiştir. G , her bir G_x starı evrensel örtüye sahip olan bir topolojik grup-grupoid iken, MG monodromy grupoidinin bir grup-grupoid olduğu [22] de verilmiştir. Burada hareketle Bölüm 4 de, öncelikle topolojik internal grupoidin tanımı verilmiştir. Daha sonra G , $\mathbf{TGpOp}$ de her bir G_x starı evrensel örtüye sahip olan bir internal topolojik grupoid ise, MG monodromy grupoidinin bir internal grupoid olduğu gösterilmiştir.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde Brown [1], Rotman [2], Chevalley [23] ve MacLane [24] referansları esas alınarak, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve teoremlerden bahsedilmiştir. Buna ilaveten gruplar kategorisindeki internal grupoid, yani bir grup-grupoidin tanımı ve bununla ilgili bazı özellikler verilmiştir [14], [16].

1.1. Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1. X bir topolojik uzay ve $p \geq 0$ olmak üzere $\alpha(0) = x$, $\alpha(p) = y$ olacak şekilde sürekli bir $\alpha: [0, p] \rightarrow X$ fonksiyonuna x ten y ye bir *eğri* denir. Özel olarak $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu için $\alpha(0) = x$ ve $\alpha(1) = y$ ise α ya bir *birim eğri* denir. Eğer $\alpha(0) = \alpha(1)$ ise $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ ye *kapalı eğri* denir. $\square$

Bir X topolojik uzayında her bir $x, y \in X$ nokta çifti için X de x den y ye bir eğri varsa bu X uzayına *eğrisel irtibatlıdır* denir.

$\mathbb{R}^n$ nin konveks bir alt cümlesi eğrisel irtibatlı bir cümledir.

Tanım 1.1.2. X herhangi bir topolojik uzay olsun. Her bir $x \in X$ ve x in her U komşuluğu için $x \in V \subseteq U$ olacak şekilde eğrisel irtibatlı olan bir V açık komşuluğu varsa X uzayına *yerel eğrisel irtibatlı* denir. $\square$

O halde bir X topolojik uzayı yerel eğrisel irtibatlıdır ancak ve ancak her bir $x \in X$ noktası eğrisel irtibatlı cümlelerin bir yerel bazına sahiptir.

Tanım 1.1.3. G bir grup ve τ da G üzerinde bir topoloji olsun. $G \times G$ üzerindeki

topoloji çarpım topolojisi olmak üzere, eğer grup yapısını oluşturan

$$\begin{aligned} m: G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} n: G &\rightarrow G \\ a &\mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonları sürekli ise G ye bu topoloji ile birlikte bir *topolojik grup* denir. $\square$

Burada m ve n fonksiyonlarının sürekli olması fark fonksiyonu olarak adlandırılan

$$\begin{aligned} \delta: G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonunun sürekli olmasına denktir [39].

Örnek 1.1.1. U alışılmış topolojisine göre $(\mathbb{R}, +, \mathcal{U})$ bir topolojik gruptur.

Tanım 1.1.4. G ve H birer topolojik grup olsun. Eğer $f: G \rightarrow H$ dönüşümü sürekli ve her $a, b \in G$ için $f(ab) = f(a)f(b)$ ise f ye *topolojik grupların bir morfizmi* denir.

Bir grubun, başka bir grup üzerine etkimesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.1.5. G ve H birer grup olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde bir

$$\begin{aligned} H \times G &\rightarrow G \\ (h, g) &\mapsto h \cdot g \end{aligned}$$

dış işlemi varsa H, G üzerine *soldan etkir* denir.

1. Her $g \in G$ ve $h, h_1 \in H$ için,

$$h \cdot (h_1 \cdot g) = (hh_1) \cdot g$$

2. $g, g_1 \in G$ ve $h \in H$ için,

$$h \cdot (gg_1) = (h \cdot g)(h \cdot g_1)$$

3. Her $g \in G$ ve $e_H \in H$ birim elemanı için,

$$e_H \cdot g = g$$

dır.

Bir X topolojik uzayında eğrilerin homotopisi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.1.6. X bir topolojik uzay olmak üzere başlangıç noktaları x ve bitiş noktaları y olan α, β eğrileri verilsin. $s, t \in [0, 1]$ için

$$F(s, 0) = \alpha(s), F(0, t) = x, F(s, 1) = \beta(s), F(1, t) = y$$

olacak şekilde sürekli bir

$$F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

fonksiyonuna α dan β ya (uç noktalarına göre) bir *homotopi* denir. Eğer böyle bir homotopi varsa α ve β eğrileri (uç noktalarına göre) *homotopik* denir ve $\alpha \simeq \beta$ ile gösterilir [36]. $\square$

Bir X topolojik uzayında eğrilerin uç noktalarına göre homotopik olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre bir α eğrisinin denklik sınıfı $[\alpha]$ olarak yazılır ve α nın *homotopi sınıfı* olarak adlandırılır.

Önerme 1.1.1. Bir X topolojik uzayında homotopi bağıntısı ile ilgili olarak aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

i) Bir $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ eğrisi ile $p(0) = 0$ ve $p(1) = 1$ olacak şekilde sürekli bir $p: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu için $\alpha \circ p \simeq \alpha$ dır.

ii) $\alpha_0 = \alpha_1$ ve $\beta_0 = \beta_1$ ise $\beta_0 \alpha_0 \simeq \beta_1 \alpha_1$ dir.

iii) $(\gamma\beta)\alpha \neq \gamma(\beta\alpha)$ fakat $(\gamma\beta)\alpha \simeq \gamma(\beta\alpha)$ dır.

iv) $\alpha(0) = x$ ve $\alpha(1) = y$ olan bir $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ eğrisi için $\alpha 1_x \simeq \alpha \simeq 1_y \alpha$ dır.

Burada 1_x ve 1_y sırasıyla x ve y noktalarındaki birim eğrileri temsil etmektedir.

v) $\alpha_0 \simeq \alpha_1$ ise $\alpha_0^{-1} \simeq \alpha_1^{-1}$ dır.

vi) $\alpha(0) = x$ ve $\alpha(1) = y$ olan bir $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ eğrisi için $\alpha\alpha^{-1} \simeq 1_y$ ve $\alpha^{-1}\alpha \simeq 1_x$ dir [36].

Tanım 1.1.7. X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasındaki tüm kapalı eğrilerin homotopi sınıflarının cümlesi $\pi_1(X, x)$,

$$\pi_1(X, x) \times \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

$$([\beta], [\alpha]) \mapsto [\beta\alpha]$$

işlemine göre bir gruptur. Bu gruba x noktasındaki *temel grup* denir. $\square$

Burada bir X uzayında x noktasındaki $\pi_1(X, x)$ temel grubunun, x noktasına bağlı olduğuna dikkat edelim. Ancak X uzayının eğrisel irtibatlı olması halinde X in tüm temel grupları birbirine izomorftur.

Teorem 1.1.1. Eğrisel irtibatlı bir X topolojik uzayında $x_0, x_1 \in X$ olsun. O halde

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

olur [2].

Teorem 1.1.2. (X, x_0) ve (Y, y_0) noktalı uzaylar olmak üzere

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

olur [2].

Tanım 1.1.8. X bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ için $\pi_1(X, x)$ bir tek elemanlı ise veya buna denk olarak başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan tüm eğriler homotopik ise bu uzaya *basit irtibatlı uzay* denir [2].

$\mathbb{R}^n$ nin konveks bir alt cümlesi basit irtibatlıdır.

Örnek 1.1.2. Eğer X ve Y uzayları basit irtibatlı ise $X \times Y$ de basit irtibatlıdır.

Her bir $x \in G$ için $f(x) = e$ olan bir $f: G \rightarrow H$ grup dönüşümüne aşık dönüşüm denir [2].

Tanım 1.1.9. X bir topolojik uzay olsun. Eğer her bir $x \in X$ için $i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ aşık dönüşüm olacak şekilde bir U açık komşuluğuna sahip ise X uzayına bir *yarı lokal 1-irtibatlı uzay* denir (Burada $i: U \rightarrow X$ bir içine fonksiyon).

1.2. Örtü Uzayları

Bu kesimde topolojik uzayların örtü dönüşümleri ile bunların bazı özelliklerinden bahsedilmiştir [1], [2], [3].

Tanım 1.2.1. X ve $\tilde{X}$ birer topolojik uzay, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ sürekli bir fonksiyon ve U da X in eğrisel irtibatlı açık bir alt cümlesi olsun. Eğer $p^{-1}(U)$ ters görüntüsünün her bir eğrisel irtibatlı olan S_i bileşeni $\tilde{X}$ nın açık bir alt cümlesi ve her bir $p_{S_i}: S_i \rightarrow U$ kısıtlanmış fonksiyonu bir homeomorfizm ise $U \subseteq X$ alt cümlesine p tarafından örtülen bir komşuluk denir [1], [2], [3].

Tanım 1.2.2. [2], [3] X bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise p ye bir örtü fonksiyonu, $(\tilde{X}, p)$ ikilisine X topolojik uzayının bir *örtü uzayı* denir.

i) $\tilde{X}$ eğrisel irtibatlı bir topolojik uzaydır.

ii) $p: \tilde{X} \rightarrow X$ sürekli bir fonksiyondur.

iii) Her bir $x \in X$ noktası, p tarafından örtülen bir $U = U_x$ açık komşuluğuna sahiptir. $\square$

Bu tanımdan bir $p: \tilde{X} \rightarrow X$ örtü fonksiyonunun örten ve açık olduğu elde edilebilir.

Örnek 1.2.1. $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(t) = e^{2\pi it}$ sarma fonksiyonu bir örtü fonksiyonudur.

$(\tilde{X}, p)$ ikilisi X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. Bu durumda Tanım 1.2.2 den p nin örten ve açık olduğu elde edilir.

Tanım 1.2.3. $p: \tilde{X} \rightarrow X$ bir örtü fonksiyonu olsun. Eğer $p: \tilde{X} \rightarrow X$ örtü fonksiyonu X in her bir örtüsüne yükseliyor ise, yani her bir $q: \tilde{Y} \rightarrow X$ örtü fonksiyonu için $p = q\tilde{p}$ olacak şekilde bir tek $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ örtü dönüşümü varsa $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ye *evrensel örtü* denir.

Örnek 1.2.2. Bir $p: \tilde{X} \rightarrow X$ örtü dönüşümünde eğer $\tilde{X}$ basit irtibatlı ise $p: \tilde{X} \rightarrow X$ evrensel bir örtüdür.

Tanım 1.2.4. X bir topolojik uzay, $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ ve $q: (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (X, x_0)$ da X in bir örtü dönüşümü olsun. Eğer $qf = p$ olacak şekilde bir $f: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ homeomorfizmi varsa p ve q örtü dönüşümleri denktir denir.

Tanım 1.2.5. $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ bir örtü dönüşümü olsun. Temel gruplar üzerinde üretilen grup homomorfizmi $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ olmak üzere $\pi_1(X, x_0)$ nin $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ alt grubuna p nin *karakteristik grubu* denir.

Lemma 1.2.1. X lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ ve $q: (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (X, x_0)$ birer örtü dönüşümü olsun. Bu örtü dönüşümleri denktir ancak ve ancak p ve q nun karakteristik grupları $\pi_1(X, x_0)$ nin konjuge alt gruplarıdır.

1.3. Kategori

Bu kesimde kategori, fonktor, kategori denkliği gibi bazı temel tanımlar verilmiştir.

Kategori kavramı 1940 larda Eilenberg ve MacLane [25] tarafından tanıtılmıştır.

Tanım 1.3.1. Aşağıdaki özellikleri ihtiva eden $\mathbf{C} = (O_C, Mor(C), \circ, 1)$ sistemine bir *kategori* denir.

1. Kategorinin objeleri olarak adlandırılan bir sınıf O_C
2. Her bir $X, Y \in O_C$ için morfizmlerin sınıfı olarak adlandırılan $Mor(X, Y)$ (veya $\mathbf{C}(X, Y)$). Burada

$$Mor(\mathbf{C}) = \bigcup_{X, Y \in O_C} \mathbf{C}(X, Y)$$

3. Her $X, Y, Z \in O_C$ için

$$\circ: \mathbf{C}(Y, Z) \times \mathbf{C}(X, Y) \rightarrow \mathbf{C}(X, Z)$$

$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

morfizmlerin bileşkesi olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

a) Eğer $f \in \mathbf{C}(X, Y), g \in \mathbf{C}(Y, Z), h \in \mathbf{C}(Z, W)$ ise $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ dir.

b) Her bir $X \in O_C$ için $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ ve $g \in \mathbf{C}(Z, C)$ olmak üzere $f \circ 1_X = f$ ve $1_X \circ g = g$ olacak şekilde bir $1_X \in \mathbf{C}(X, X)$ birim morfizmi vardır.

Örnek 1.3.1. Tüm cümlelerin sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin objeleri cümleler ve morfizmleri ise cümleler arasındaki fonksiyonlardır. X, Y cümleleri için $\mathbf{C}(X, Y)$ sınıfı X den Y ye tüm fonksiyonların sınıfıdır. Burada kısmi işlem ise fonksiyonların bileşkesi olarak tanımlanır. Her bir X cümlesi için birim morfizm $1_X: X \rightarrow X$ birim fonksiyonudur. Bu kategoriye cümlelerin kategorisi denir ve **Set** ile gösterilir.

Örnek 1.3.2. Tüm topolojik uzayların sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin objeleri topolojik uzaylar, morfizmleri ise topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlardır. Bu kategori **Top** ile gösterilir. Objeleri noktalı topolojik uzaylar ve morfizmleri ise bu uzaylar arasındaki sürekli dönüşümler alınarak oluşturulan kategori noktalı topolojik uzayların kategorisidir ve **Top_{*}** ile gösterilir. Benzer şekilde grupların kategorisi **Grp** ve topolojik grupların kategorisi **TopGrp** elde edilir.

Tanım 1.3.2. $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ birer kategori olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $\mathbf{D}$ kategorisine $\mathbf{C}$ kategorisinin bir *alt kategorisi* denir.

- i) O_D sınıfı O_C sınıfının bir alt sınıfıdır.
- ii) Her bir $X, Y \in O_D$ için $\mathbf{D}(X, Y) \subseteq \mathbf{C}(X, Y)$ dır.
- iii) $\mathbf{D}$ kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi, $\mathbf{C}$ kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi ile aynıdır.
- iv) Her bir $X \in O_D$ için $\mathbf{D}$ deki 1_X birim morfizmi, $\mathbf{C}$ deki birim morfizm ile aynıdır.

$\mathbf{D}$ kategorisi $\mathbf{C}$ kategorisinin bir alt kategorisi olsun. Eğer $X, Y \in O_C$ çifti için $\mathbf{D}(X, Y) = \mathbf{C}(X, Y)$ ise $\mathbf{D}$ kategorisine *dolu (full) alt kategori*, eğer $O_D = O_C$ ise D ye *geniş alt kategori* denir.

Tanım 1.3.3. Bir $\mathbf{C}$ kategorisindeki bir $f: X \rightarrow Y$ morfizmi için eğer $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir $g: Y \rightarrow X$ morfizmi varsa f ye bir *izomorfizm* denir. Bu durumda X ve Y objeleri *izomorftur* denir ve $X \simeq Y$ şeklinde gösterilir.

Örneğin bir izomorfizm **Set** de birebir ve örten bir fonksiyon, **Grp** ta bir grup izomorfizmi, **Top** da bir homeomorfizmdir.

Tanım 1.3.4. $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ birer kategori olmak üzere $\mathbf{C}$ nin her bir X objesini $\mathbf{D}$ nin bir $F(X)$ objesine, $\mathbf{C}$ nin her bir $f: X \rightarrow Y$ morfizmini ise $\mathbf{D}$ nin bir $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir F dönüşümüne $\mathbf{C}$ den $\mathbf{D}$ ye bir *fanktor* denir ve $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ yazılır.

i) $\mathbf{C}$ kategorisinde $g \circ f$ bileşkesi tanımlı olacak şekilde f ve g morfizmleri için

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

dir.

ii) Her $X \in O_C$ için $F(1_X) = 1_{F(X)}$ dir.

Burada eğer $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ ve $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ fanktorlar ise $GF: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ birleşimi de bir fanktordur. Ayrıca $1_{\mathbf{C}}$ dönüşümü de bir fanktordur. O halde objeleri kategoriler, morfizmleri ise kategoriler arasındaki fanktorlar olan bir kategori oluşturulabilir ve bu kategori **Cat** ile gösterilir. Burada **Cat** de kendisinin bir objesi olarak düşünülebilir. Bu karışıklığı ortadan kaldırmak için **Cat** ın objeleri küçük kategoriler, yani objeleri cümleler veya cümleler üzerinde çeşitli yapılar bulunan objeler olan kategoriler almak yeterlidir.

Tanım 1.3.5. $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ birer kategori olmak üzere $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ iki fanktor olsun. Her $X \in O_C$ objesini $\mathbf{D}$ nin bir $\eta_X: F(X) \rightarrow G(X)$ morfizmine dönüştüren bir $\eta: O_C \rightarrow Mor(\mathbf{D})$ dönüşümü verilsin. Eğer $\mathbf{C}$ nin her bir $f: X \rightarrow Y$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise η ya bir *doğal dönüşüm* denir ve $\eta: F \rightarrow G$ olarak gösterilir.

Tanım 1.3.6. $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ fanktorları verilsin. Bir $\eta: F \rightarrow G$ doğal dönüşümüne her bir $X \in O_C$ için $\eta_X: F(X) \rightarrow G(X)$, $\mathbf{D}$ de bir izomorfizm ise η ya bir *doğal izomorfizm*, F ve G ye de *doğal olarak denktir* denir ve $F \simeq G$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.3.1. $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ fanktorları verilsin. $F \simeq G$ dir ancak ve ancak $\sigma\eta = 1_{\mathbf{D}}$ ve $\eta\sigma = 1_{\mathbf{C}}$ olacak şekilde $\eta: F \rightarrow G$ ve $\sigma: G \rightarrow F$ doğal dönüşümleri vardır.

Tanım 1.3.7. $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ fanktoru verilsin. Eğer $G \circ F \simeq 1_{\mathbf{C}}$ ve $F \circ G \simeq 1_{\mathbf{D}}$ olacak şekilde $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ fanktoru varsa bu kategorilere *doğal olarak denktir* denir ve $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$ ile gösterilir.

1.4. Grupoid ve Grupoid Örtüleri

Birimli bir yarı grup bir *monoiddir*. O halde kategori bir monoidin genelleştirilmesidir. Bir *grupoidde* ise her morfizmin tersi vardır. Bu durumda grupoid de bir grubun genelleştirilmesidir. Bununla ilgili olarak Brown [27] referansı verilebilir.

Tanım 1.4.1. Her bir morfizmi, bir izomorfizm olan bir kategoriye bir *grupoid* denir ve genelde G ile gösterilir. G nin morfizmlerine G nin *elemanları* denir. $\square$

Kategorinin tanımını dikkate alarak, grupoid yapısında aşağıdaki fonksiyonların varlığı kolayca görülebilir. İleriki bölümde vereceğimiz internal grupoid kavramını tanımlamak için grupoid yapısını oluşturan bu fonksiyonlara ihtiyacımız vardır.

O_G tüm objelerin sınıfı, G tüm morfizmlerin sınıfı ve $x, y \in O_G$ için x den y ye morfizmlerin sınıfı $G(x, y)$ olmak üzere,

1. Her bir $a \in G(x, y)$ için $s(a) = x$ ve $t(a) = y$ ile tanımlanan

$$s, t: G \rightarrow O_G$$

sırasıyla *başlangıç* ve *bitiş* fonksiyonları.

2. Her bir $x \in O_G$ için 1_x , x noktasındaki birim morfizm olmak üzere

$$\varepsilon: O_G \rightarrow G, x \mapsto \varepsilon(x) = 1_x \in G(x, x)$$

ile tanımlanan *birim morfizm* fonksiyonu.

3. Her bir $a \in G(x, y)$ için $a^{-1} \in G(y, x)$ olacak şekilde tanımlı olan

$$u: G \rightarrow G, a \mapsto u(a) = a^{-1}$$

ters eleman fonksiyonu.

4. $G_s \times_t G = \{(b, a) \in G \times G \mid s(b) = t(a)\}$ olmak üzere

$$\mu: G_s \times_t G \rightarrow G, (b, a) \mapsto ba$$

ile tanımlanan *grupoid parçalı işlemi*.

Bir G grupoidinde bu fonksiyonlar aşağıdaki şartları sağlar [21].

- i) Her $(b, a) \in G_s \times_t G$ için $s(ba) = s(a)$ ve $t(ba) = t(b)$ dir.
- ii) $s(c) = t(b), s(b) = t(a)$ olacak şekildeki $c, b, a \in G$ için $c(ba) = (cb)a$ dır.
- iii) Her bir $x \in O_G$ için 1_x , x noktasındaki birim morfizm olmak üzere $s(1_x) = t(1_x) = x$ dir.
- iv) Her $a \in G$ için $a1_{s(a)} = a$ ve $1_{t(a)}a = a$ dır.
- v) Her bir $a \in G$ nin $s(a^{-1}) = t(a)$, $t(a^{-1}) = s(a)$ olmak üzere $a^{-1}a = 1_{s(a)}$ ve $aa^{-1} = 1_{t(a)}$ dır.

Burada bir G grupoidinde her bir $x \in O_G$ objesi için x den x e tüm morfizmlerin sınıfı $G(x, x)$ bir gruptur ve bu gruba x noktasındaki *obje grubu* denir.

Örnek 1.4.1. X bir topolojik uzay olsun. X deki $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ birim uzunluğundaki eğrilerin $[\alpha]$ ile gösterilen uç noktalarına göre homotopi sınıflarının $\pi_1 X$ cümlesi X üzerinde bir grupoiddir. Bu grupoide *temel grupoid* denir.

Burada s başlangıç fonksiyonu ve t bitiş fonksiyonu bir $[\alpha] \in \pi_1 X$ için $s([\alpha]) = \alpha(0)$ ve $t([\alpha]) = \alpha(1)$ şeklinde tanımlıdır. Bir $x \in X$ için $1_x: [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto x$, x noktasındaki sabit eğri olmak üzere $[1_x]$ homotopi sınıfı x noktasındaki birim morfizmdir. Bir α eğrisinin bitiş noktasından devam eden bir β eğrisi için $\beta\alpha$ birleşimi $\beta\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ için

$$\beta\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere morfizmlerin birleşimi $[\beta][\alpha] = [\beta\alpha]$ şeklinde ve $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ olmak üzere $[\alpha^{-1}]$ homotopi sınıfı $[\alpha]$ nın grupoiddeki tersidir [24].

Not 1.4.1. Eğer X uzayı basit irtibatlı ise bu durumda her $x, y \in X$ için x den y ye morfizmlerin cümlesi $\pi_1 X(x, y)$ sınıfı bir tek elemanlıdır.

Tanım 1.4.2. G, O_G üzerinde bir grupoid olsun. Eğer Tanım 1.4.1 deki grupoid yapısını oluşturan $s, t: G \rightarrow O_G, \mu: G_s \times_t G \rightarrow G, \varepsilon: O_G \rightarrow G, u: G \rightarrow G$ fonksiyonları sürekli olacak şekilde G ve O_G üzerinde birer topoloji yapısı varsa G ye O_G üzerinde bir *topolojik grupoid* denir.

Önerme 1.4.1. X topolojik uzayı basit irtibatlı bir örtüye sahip ise $\pi_1 X$ temel grupoidi bir topolojik grupoiddir [13].

Tanım 1.4.3. G ve H birer grupoid olsun. Eğer $f: H \rightarrow G$ küçük kategoriler üzerinde bir fanktor ise yani $f: H \rightarrow G$ ve $O_f: O_H \rightarrow O_G$ fonksiyonları yapıları koruyor ise f ye bir *grupoid morfizmi* denir. $\square$

O halde objeleri tüm grupoidler ve morfizmleri ise grupoid morfizmleri olan bir kategori elde etmek mümkündür. Bu kategoriye grupoidlerin kategorisi denir ve **Gpd** ile gösterilir.

Örnek 1.4.2. Basit irtibatlı örtüye sahip olan topolojik uzayların kategorisi **STop** ile grupoidlerin kategorisi **Gpd** olmak üzere her bir X topolojik uzayını $\pi_1 X$ temel grupoidine dönüştüren $\pi_1: \mathbf{STop} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ bir fanktordur [1].

Eğer $f: X \rightarrow Y$ bir homomorfizm ise $\pi_1 f: \pi_1 X \rightarrow \pi_1 Y$ de **Gpd** kategorisinde bir izomorfizmdir. Ayrıca X ve Y topolojik uzayları için $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1 X \times \pi_1 Y$ izomorftur [1].

Tanım 1.4.4. G ve H birer grupoid olmak üzere eğer kategori olarak H, G nin bir alt kategorisi ve her bir $a \in H$ için $a^{-1} \in H$ ise H ye G nin bir *alt grupoidi* denir.

Örnek 1.4.3. Bir G grupoidinde $H = \{1_x | x \in O_G\}$ sınıfı G nin geniş bir alt grupoididir. Ayrıca her $x \in O_G$ için $G(x)$, x noktasındaki obje grubu olmak üzere

$$H = \bigcup_{x \in O_G} G(x)$$

de G nin geniş bir alt grupoididir.

Tanım 1.4.5. G bir grupoid ve N de G nin geniş bir alt grupoidi olsun. Eğer her $x, y \in O_G$ ve $a \in G(x, y)$ için $aN(x)a^{-1} \subseteq N(y)$ ise veya buna denk olarak $aN(x) = N(y)a$ ise N ye G nin bir *normal alt grupoidi* denir.

Örnek 1.4.4. Bir $f: H \rightarrow G$ grupoid morfizmi için

$$\text{Ker } f = \{a \in G | f(a) = 1_x, \exists x \in O_G\}$$

f nin çekirdeği, G nin normal alt grupoididir.

Tanım 1.4.6. Bir G grupoidinde her bir $x \in O_G$ için $G_x = \{a \in G | s(a) = x\}$ cümlesine G grupoidinin x noktasındaki *starı* denir. Benzer olarak $G^y = \{a \in G | t(a) = y\}$ cümlesine G grupoidinin y noktasındaki *costarı* denir.

Tanım 1.4.7. $p: \tilde{G} \rightarrow G$ bir grupoid morfizmi olsun. Eğer her bir $\tilde{x} \in O_{\tilde{G}}$ için $p|_{\tilde{x}}: \tilde{G}_{\tilde{x}} \rightarrow G_{p(\tilde{x})}$ kısıtlaması biyektif ise $p: \tilde{G} \rightarrow G$ ye bir *örtü morfizmi* denir. $\square$

Böyle bir örtü morfizminden aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} G_s \times_{O_p} O_{\tilde{G}} & \xrightarrow{S_p} & \tilde{G} \longrightarrow O_{\tilde{G}} \\ & \searrow & \downarrow \quad \downarrow O_p \\ & & G \xrightarrow{s} O_G \end{array}$$

Burada $G_s \times_{O_p} O_{\tilde{G}} = \{(a, x) | s(a) = O_p(x)\}$ dır. Bu ise $s: G \rightarrow O_G$ ve $O_p: O_{\tilde{G}} \rightarrow O_G$ nin pullbackidir. Dolayısıyla eğer $p: \tilde{G} \rightarrow G$ bir örtü morfizmi ise

$$S_p: G_s \times_{O_p} O_{\tilde{G}} \rightarrow \tilde{G}$$

biyektiftir. Burada S_p nin inversi $(p, s): \tilde{G} \rightarrow G_s \times_{O_p} O_{\tilde{G}}$ dır. O halde bir grupoid örtü morfizminin tanımı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. $p: \tilde{G} \rightarrow G$ bir örtü morfizmidir $\Leftrightarrow (p, s): \tilde{G} \rightarrow G_s \times_{O_p} O_{\tilde{G}}$ ve $S_p: G_s \times_{O_p} O_{\tilde{G}} \rightarrow \tilde{G}$ dönüşümleri biyektiftir.

Herhangi bir $p: \tilde{G} \rightarrow G$ grupoid morfizmi ve $\tilde{x} \in O_{\tilde{G}}$ için $G(p(\tilde{x}))$ nin $p(\tilde{G}(\tilde{x}))$ alt grubuna p nin $\tilde{x}$ noktasındaki *karakteristik grubu* denir.

Teorem 1.4.1. $p: (\tilde{G}, \tilde{x}) \rightarrow (G, x)$ bir örtü morfizmi ve H irtibatlı olacak şekilde $f: (H, z) \rightarrow (G, x)$ bir grupoid morfizmi olsun. Bu durumda f bir tek $\tilde{f}: (H, x) \rightarrow (\tilde{G}, \tilde{x})$ grupoid morfizmine yükselir ancak ve ancak f nin karakteristik grubu p nin karakteristik grubu tarafından kapsanır [2].

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.4.1. $p: (\tilde{G}, \tilde{x}) \rightarrow (G, x)$ ve $q: (\tilde{H}, \tilde{z}) \rightarrow (G, x)$ irtibatlı örtü morfizmleri ve C ve D de sırasıyla bunlara karşılık gelen karakteristik gruplar olsun. Eğer $C \subseteq D$ ise bu durumda $p = qr$ olacak şekilde bir tek $r: (\tilde{G}, \tilde{x}) \rightarrow (\tilde{H}, \tilde{z})$ örtü morfizmi vardır. Eğer $C = D$ ise r bir izomorfizmdir.

Teorem 1.4.2. $r: K \rightarrow H$ ve $q: H \rightarrow G$ birer grupoid morfizmi olsun. Eğer r ve q örtü morfizmleri ise qr de bir örtü morfizmidir. Eğer q ve qr örtü morfizmleri ise r de örtü morfizmidir. Eğer r ve qr örtü morfizmleri ve O_r örten ise q bir örtü morfizmidir [2].

Önerme 1.4.2. $p: \tilde{X} \rightarrow X$ topolojik uzayların bir örtü fonksiyonu ise p den üretilen $\pi_1 p: \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 X$ de bir grupoid örtü morfizmidir.

G bir grupoid olsun. Eğer her $x, y \in O_G$ için $G(x, y)$ boştan farklı ise G ye *irtibatlı* veya *geçişken* denir. Bir $p: \tilde{G} \rightarrow G$ örtü morfizmi için $\tilde{G}$ ve G grupoidleri geçişken ise p örtü morfizmine *geçişkendir* denir.

Cebirsel bir kategoride, *internal kategori* denilen yeni bir kategori oluşturmak mümkündür. Bununla ilgili ayrıntılı bilgi Bölüm 3'te verilecektir. **Grp** kategorisindeki bir internal kategori bir *grup-grupoid* olarak adlandırılır. Brown ve Spencer [16] referansında bir grup-grupoid, grupoidler kategorisindeki bir *grup obje* olarak tanımlanmıştır. Buna ilaveten grup-grupoidlerin kategorisinin gruplar kategorisindeki crossed modullerin kategorisine denk olduğu gösterilmiştir. Buradan hareketle daha genel olarak çok işlemli grupların kategorisinde internal grupoidlerin, yine aynı kategorideki crossed modullere denk olduğu Porter [14] da verilmiştir.

Bir grup-grupoid, gruplar kategorisindeki internal kategori olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 1.4.8. G, O_G üzerinde bir grupoid olsun. Eğer G ve O_G birer grup yapısına sahip ve grupoid yapısındaki $s, t: G \rightrightarrows O_G$ başlangıç ve bitiş fonksiyonları, $\epsilon: O_G \rightarrow G$ birim morfizm fonksiyonu ve $\circ: C_t \times_s C \rightarrow C, (b, a) \mapsto b \circ a$ bileşke işlemi birer grup homomorfizmi ise G ye O_G üzerinde bir *grup-grupoid* denir. $\square$

Burada karışıklığı ortadan kaldırmak için $a, b \in G$ için grup çarpımı ab ve grupoiddeki birleşim $b \circ a$ olarak yazılır.

Bu tanımda m bir fonktor olduğundan, G grupoidinde boa ve $d \circ c$ grupoid birleşimleri tanımlı olmak üzere $a, b, c, d \in G$ için *yerdeğiştirme kuralı* olarak bilinen

$$m((b, d) \circ (a, c)) = m(b, d) \circ m(a, c)$$

$$(b \circ a, d \circ c) = (bd) \circ (ac)$$

$$(b \circ a)(d \circ c) = (bd) \circ (ac)$$

kuralı elde edilir.

Önerme 1.4.3. Eğer X bir topolojik grup ise $\pi_1 X$ bir grup-grupoiddir [16].

Tanım 1.4.9. G ve H birer grup-grupoid ve $f: H \rightarrow G$ de bir grupoid morfizmi olsun. Eğer $f: H \rightarrow G$ grupoidler üzerindeki grup yapılarını koruyor ise f ye bir *grup-grupoid morfizmi* denir. $\square$

Grupoidler üzerinde örtü olan bir grup-grupoid morfizmi bir *grup-grupoid örtü morfizmi* olarak adlandırılır.

X , her bir eğrisel irtibatlı bileşeni basit irtibatlı bir örtüye sahip olan irtibatlı bir topolojik uzay olsun. X topolojik uzayının örtülerinin kategorisi $\mathbf{TCov}/X$ ve $\pi_1 X$ temel grupoidinin grupoid örtülerinin kategorisi $\mathbf{GdCov}/\pi_1 X$ denktir [1]. Buna ilaveten X in bir topolojik grup olması halinde X in topolojik grup örtülerinin kategorisi $\mathbf{TGpCov}/X$ ile $\pi_1 X$ nin grup-grupoid örtülerinin kategorisi $\mathbf{GpGdCov}/\pi_1 X$ in denk olduğu Brown ve Mucuk [7] de gösterilmiştir.

1.5. Etkime grupoidi ve crossed moduller

Bu kısımda bir G grupoidinin bir X cümlesi üzerine etkimesinden bahsedildi. Ayrıca gruplar kategorisindeki bir crossed modulün tanımı verilmiştir.

Tanım 1.5.1. G bir grupoid, X bir cümle ve $\theta: X \rightarrow O_G$ bir fonksiyon olsun.

$$X_\theta \times_s G = \{(x, a) \in G \times X \mid s(a) = \theta(x)\}$$

olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde bir $\varphi: X_\theta \times_s G \rightarrow X, (x, a) \mapsto xa$ fonksiyonu varsa G grupoidi X cümlesi üzerine θ ile *etkir* denir.

$$(i) \theta(xa) = t(a)$$

$$(ii) (xa)b = x(ab)$$

$$(iii) x1_{\theta(x)} = x \text{ dir.}$$

□

Bir G grupoidi bir X cümlesi üzerine etkir ise *etkime grupoidi* olarak adlandırılan bir $G \ltimes X$ grupoidi şu şekilde tanımlanır: X objelerin cümlesi ise $a \in G(\theta(x), \theta(y))$ ve $ax = y$ olacak şekildeki (a, x) ikililerin cümlesi olmak üzere grupoiddeki birleşim

$$(a, x) \circ (b, y) = (ab, x)$$

şeklindedir.

Örnek 1.5.1. $p: \tilde{G} \rightarrow G$ bir grupoid örtü morfizmi ise $X = O_{\tilde{G}}, \theta = O_p$ olacak şekilde X üzerinde G nin bir etkimesi vardır.

Teorem 1.5.1. Geçişken bir G grupoidinin bir x objesi ile x noktasındaki $G(x)$ obje grubunun bir C alt grubu verilsin. Bu durumda karakteristik grubu C olan bir $q: (\tilde{G}_C, \tilde{x}) \rightarrow (G, x)$ grupoid örtü morfizmi mevcuttur [1].

İspat: Tüm $C \circ a = \{c \circ a \mid c \in C\} (a \in G^x)$ kosetlerinin cümlesi X ve $\theta: X \rightarrow O_G$ de her bir $C \circ a$ kosetini a nın başlangıç noktasına eşleyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda G grupoidi X cümlesi üzerine

$$X_\theta \times_s G \rightarrow X, (g, C \circ a) \mapsto C \circ a \circ g$$

ile etkir. O halde $\tilde{G}_C$ grupoidi $G \ltimes X$ etkime grupoidi olarak alınabilir. $q: \tilde{G}_C \rightarrow G$ morfizmi objeler üzerinde $\theta: X \rightarrow O_G$ fonksiyonu ve morfizmler üzerinde ise $(g, C \circ a) \mapsto g$ şeklinde tanımlanırsa $q: \tilde{G}_C \rightarrow G$, karakteristik grubu C olan bir grupoid örtü morfizmi olur. Ayrıca gerekli olan $\tilde{x} \in \tilde{G}_C$ objesi C dir. ■

Bir G grup-grupoidinin bir X grubu üzerine etkimesi ise aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.5.2. G bir grup-grupoid ve X bir grup olsun. G nin grupoid yapısı X cümlesi üzerine Tanım 1.5.1 deki anlamda etkisin. Eğer $\theta: X \rightarrow O_G$ ve $X_\theta \times_s G \rightarrow X, (x, a) \mapsto xa$ fonksiyonları birer grup morfizmi ise G grup-grupoidi X grubu üzerine *etkir* denir. □

Burada $G \ltimes X$ etkime grupoidi bir grup-grupoiddir. Buna *etkime grup-grupoidi* denir.

Aşağıdaki teoremin ispatı Brown ve Mucuk [7] de verilmiştir.

Teorem 1.5.2. G bir grup-grupoid olsun. Bu durumda G nin grup-grupoid örtülerinin kategorisi $\mathbf{GpGdCov}/G$ ile G nin grup-grupoid etkimelerinin kategorisi $\mathbf{GpGdAct}/G$ denktir.

Gruplar kategorisinde bir crossed modül aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.5.3. M ve P grupları ile bir $\mu: M \rightarrow P$ grup morfizmi verilsin. P grubunun M grubu üzerine bir $P \times M \rightarrow M, (p, m) \mapsto m^p$ soldan etkimesi verilsin. Aşağıdaki şartların sağlanması halinde (M, P, μ) üçlüsüne bir *crossed modül* denir [44].

1. $m \in M$ ve $p \in P$ için $\mu(m^p) = p^{-1}(\mu m)p$
2. $m, n \in M$ için $n^{\mu(m)} = m^{-1}nm$

Örnek 1.5.2. Aşağıdaki verilen fonksiyonların crossed modül şartlarını sağladığı kolayca görülebilir.

(i) G bir grup ve N de normal bir alt grup olsun. $G \times N \rightarrow N, (g, n) \mapsto g^{-1}ng$ etkimesine göre G, N üzerine etkir. Bu etkimeye göre $N \rightarrow G$ içine fonksiyonu bir crossed modüldür.

(ii) M , bir P -modül olduğunda $M \rightarrow P$ sıfır morfizmi bir crossed modüldür.

(iii) Örtün ve merkezi çekirdek olan herhangi bir $M \rightarrow P$ grup homomorfizmi bir crossed modüldür.

(iv) Herhangi bir M grubu için $\chi_M: M \rightarrow \text{Aut}M$ bir crossed modüldür.

Burada $(M, P, \phi) \rightarrow (N, Q, \phi')$ bir crossed modül morfizmi $f_1(m^p) = f_1(m)^{f_2(p)}$ olacak şekildeki $f_1: M \rightarrow N$ ve $f_2: P \rightarrow Q$ ikilisinden oluşur.

Eğer $f_1: M \rightarrow N$ bir izomorfizm ise (f_1, f_2) ikilisine bir *crossed modül örtü morfizmi* denir.

Gruplar kategorisindeki crossed modüllerin kategorisi $\mathbf{CMod}$ ile grup-grupoidlerin kategorisi $\mathbf{GpGd}$ nin denk olduğu [16] da verilmiştir.

2. BÖLÜM

ÇOK İŞLEMLİ GRUPLAR KATEGORİSİNDE INTERNAL GRUPOİDLER VE CROSSED MODÜLLER

Bu bölümde, ilk olarak Higgins [8] ve Orzech [18] de tanıtilan çok işlemli grup yapısı, Porter [14] ve Datuashvili [15] referanslarındaki gibi yapılmıştır. Daha sonra aynı tip çok işlemli gruplar kategorisindeki internal groupoidlerin örtüleri ve etkimeleri tanıtilmıştır. [6] referansından yararlanarak internal grupoid etkimelerinin kategorisi ile internal grupoid örtülerinin kategorisinin denk olduğu gösterilmiştir. Aynı tip çok işlemli gruplar kategorisinde bir internal grupoid bir crossed module denktir [14]. Buradan hareketle bu bölümde, aynı tip çok işlemli gruplar kategorisindeki bir G internal grupoidinin örtülerinin kategorisi ile, G den elde edilen $A \rightarrow B$ crossed modulun örtülerinin kategorisinin denk olduğu ispatlanmıştır.

2.1. Çok İşlemli Gruplar

Tanım 2.1.1. X bir cümle, Ω ise X üzerinde tanımlanmış değişik mertebeden sonlu işlemlerin bir sınıfı, E de grup aksiyomlarını içeren birimlerin cümlesi olsun. Ω_i , Ω daki i -inci mertebeden işlemlerin cümlesi olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanırsa X e bir *çok işlemli grup* denir [14], [15].

1. $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$
2. Grup işlemleri sırasıyla birim, invers, çarpma $0, -, +$ olup sırasıyla Ω_0, Ω_1 ve Ω_2 nin elemanlarıdır.

$\Omega'_2 = \Omega_2 \setminus \{+\}$, $\Omega'_1 = \Omega_1 \setminus \{-\}$ olmak üzere $\star \in \Omega'_2$ için $a \star^\circ b = b \star a$ ile tanımlanan $\star^\circ$ da Ω'_2 nün bir elemanı olup $\Omega_0 = \{0\}$ olarak alınır.

3. Eğer her bir $\star \in \Omega'_2$ ise E cümlesinde $a \star (b + c) = (a \star b) + (a \star c)$ eşitliği vardır.

4. Eğer $w \in \Omega'_1$ ise E cümlesinde $w(a + b) = w(a) + w(b)$ olup $w, +$ için bir morfizmdir. $\star \in \Omega'_2$ için E de $w(a) \star b = w(a \star b)$ dir.

Örnek 2.1.1. Gruplar, halkalar, birleşimli komutatif, Lie, Leibniz, alternatif cebirler, R - modüller çok işlemli gruplara birer örnektir [15].

G grubu bir çok işlemli gruptur, çünkü Ω daki işlemler

$$+ : G \times G \longrightarrow G, (a, b) \mapsto a + b$$

$$- : G \rightarrow G, a \mapsto -a$$

ve

$$0 : \{*\} \longrightarrow G$$

olmak üzere $\Omega_0 = \{0\}, \Omega_1 = \{-\}, \Omega_2 = \{+\}$ dir.

Diğer yandan $(R, +, \cdot)$ halkası da bir çok işlemli gruptur. R deki $+, -, 0$ grup işlemlerine ilaveten

$$\cdot : R \times R, (a, b) \mapsto ab$$

çarpım işlemi mevcuttur. Burada $\Omega_0 = \{0\}, \Omega_1 = \{-\}, \Omega_2 = \{+, \cdot, \cdot^\circ\}$ şeklinde alındığında R halkası da bir çok işlemli grup olur.

Son olarak da bir R -modülün bir çok işlemli grup olduğu şu şekilde görülür. M bir R - modül ise R birimli bir halka ve $(M, +)$ bir Abel grubudur. M deki grup işlemlerine ilaveten

$$f : R \times M \longrightarrow M, (r, m) \mapsto rm$$

dış işlemi tanımlıdır. Burada $\forall r \in R$ için

$$f_r : M \longrightarrow M, m \mapsto rm$$

işlemi birinci mertebeden bir işlem olarak kabul edilirse $\Omega_0 = \{0\}, \Omega_1 = \{-\} \cup \{f_r | r \in R\}, \Omega_2 = \{+\}$ dir.

Ayrıca burada $m, n \in M$ ve $f_r \in \Omega'_1$ için $f_r(m + n) = r(m + n) = rm + rn = f_r(m) + f_r(n)$ olup $f_r, +$ işlemi için bir morfizmdir. O halde bir R -modül çok işlemli bir gruptur.

Önerme 2.1.1. X bir çok işlemli grup ve $0 \in X$ grubun birim elemanı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:

1. $a, b, c \in X$ ve $\star \in \Omega'_2$ için $(a + b) \star c = (a \star b) + (b \star c)$
2. $a \in X$ ve $\star \in \Omega'_2$ için $a \star 0 = 0 \star a = 0$
3. $a, b \in X$, $\star \in \Omega'_2$ ve $w \in \Omega_1$ için $w(a \star b) = w(a) \star b = a \star w(b)$
4. $x, y \in X$ ve $w \in \Omega_1$ için $w(w(a \star b)) = w(a) \star w(b) = w(w(a)) + b = a + w(b)$
5. $\star \in \Omega'_2$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m \in X$ için

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \star (b_1 + b_2 + \dots + b_m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i \star b_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (b_j \star a_i)$$

dir.

Örnek 2.1.2. Birimli birleşimli halkalar çok işlemli bir grup değildir. Çünkü Ω_0 cümlesi tek bir elemanı yani grubun birimini içermelidir.

Tanım 2.1.2. X bir çok işlemli grup ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A ya X in bir *çok işlemli alt grubu* denir ve $A \leq X$ ile gösterilir.

1. $a, b \in A$ ve $\star \in \Omega_2$ için $a \star b \in A$
2. $a \in A$ ve $w \in \Omega_1$ için $w(a) \in A$

dir.

Örnek 2.1.3. Eğer $f : X \rightarrow Y$ bir çok işlemli grup morfizmi ise $Imf = \{f(x) | x \in X\}$ cümlesi Y nin çok işlemli bir alt grubudur.

Gerçekten $\star \in \Omega_2$ ve $x, x' \in X$ için

$$f(x \star x') = f(x) \star f(x') \in Imf$$

ve $w \in \Omega_1$ için

$$w(f(x)) = f(w(x)) \in Imf$$

dir.

Tanım 2.1.3. X bir çok işlemli grup ve $I \leq X$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa I ya X in bir *çok işlemli normal alt grubu (ideali)* denir ve $I \triangleleft X$ ile gösterilir.

1. $(I, +), (X, +)$ nın bir normal alt grubu
2. $a \in I, x \in X$ ve $\star \in \Omega'_2$ için $x \star a \in I$

dır.

Örnek 2.1.4. Eğer $f : X \rightarrow Y$ bir çok işlemli grup morfizmi ise $Ker f = \{x \in X | f(x) = 0\}$ cümlesi X in çok işlemli bir normal alt grubudur.

Gerçekten $a \in Ker f, x \in X$ ve $\star \in \Omega'_2$ için

$$\begin{aligned} f(x \star a) &= f(x) \star f(a) \\ &= 0 \star f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Aynı tip çok işlemli gruplar bir kategori oluşturur. Bu kategorinin objeleri aynı tip çok işlemli gruplar ve morfizmleri ise bunlar arasında işlemlerle uyumlu olan fonksiyonlardır. Bu kategori **GpOp** ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. X , **GpOp** aynı tip çok işlemli grupların kategorisinde bir obje olsun. Eğer X , Ω daki bütün işlemler sürekli olacak şekilde bir topolojiye sahipse, bu taktirde X 'e bir *çok işlemli topolojik grup* denir.

Örnek 2.1.5. Örnek 2.1.1 den topolojik grup, topolojik halka ve topolojik R -modüller birer çok işlemli topolojik gruptur.

Aynı tip çok işlemli topolojik grupların bir $f : X \rightarrow Y$ morfizmi **GpOp** de bir morfizm olup aynı zamanda sürekliidir. O halde çok işlemli topolojik gruplar bir kategori oluşturur ve bu kategori **TGpOp** ile gösterilir.

2.2. Çok İşlemli Gruplar Kategorisinde Internal Grupoidler

Gruplar kategorisindeki bir internal kategorinin bir grup-grupoid olduğundan Bölüm 2 de bahsetmiştik. Şimdi Porter [14] referansına bağlı kalarak **GpOp** aynı tip çok işlemli gruplar kategorisinde bir internal grupoidi aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. Hem objelerinin hem de morfizmlerinin cümlesi birer çok işlemli grup, kategori yapısını oluşturan fonksiyonlar ise birer çok işlemli grup morfizmi olacak şekilde bir $\mathcal{C}$ kategorisine bir *internal kategori* denir. $\square$

Burada $\star \in \Omega'_2$, $a, b, c, d \in \mathcal{C}$ ve $b \circ a$, $d \circ c$ tanımlı olacak şekilde

$$(b \circ a) \star (c \circ d) = (b \star d) \circ (a \star c)$$

yer değişim kuralı sağlanır. Gerçekten $\mu: \mathcal{C}_s \times_t \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $(b, a) \mapsto b \circ a$ bileşke fonksiyonu $\mathcal{C}$ deki işlemleri koruyacağından

$$\mu(b, a) \star \mu(d, c) = \mu((b, a) \star (d, c))$$

$$(b \circ a) \star (c \circ d) = \mu((b \star d), (a \circ c))$$

$$(b \circ a) \star (c \circ d) = (b \star d) \circ (a \star c)$$

elde edilir. Bu şekilde oluşturulan $\mathcal{C}$ kategorisinin bir grupoid olduğu şu şekilde görülür:

Bunun için bir $a \in \mathcal{C}$ morfizminin tersinin olduğunu gösterelim. a nın gruptaki tersi $-a$ ve a nın grupoiddeki aranılan tersi a^{-1} olmak üzere $a^{-1} \circ a = 1_{s(a)}$ ve $a \circ a^{-1} = 1_{t(a)}$ olacağından

$$a \circ a^{-1} = 1_{t(a)}$$

$$\Leftrightarrow (a \circ a^{-1}) - a = 1_{t(a)} - a$$

$$\Leftrightarrow (a \circ a^{-1}) - a + 1_{s(a)} = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)}$$

$$\Leftrightarrow (a \circ a^{-1}) + (-a + 1_{s(a)} \circ 1_e) = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)}$$

$$\Leftrightarrow (a - a + 1_{s(a)}) \circ (a^{-1} + 1_e) = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)}$$

$$\Leftrightarrow 1_{s(a)} \circ a^{-1} = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)}$$

$$\Leftrightarrow a^{-1} = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)}$$

dır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& a^{-1} \circ a = 1_{s(a)} \\
\Leftrightarrow & -a + (a^{-1} \circ a) = -a + 1_{s(a)} \\
\Leftrightarrow & 1_{t(a)} - a + (a^{-1} \circ a) = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)} \\
\Leftrightarrow & (1_e \circ 1_{t(a)} - a) + (a^{-1} \circ a) = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)} \\
\Leftrightarrow & (1_e + a^{-1}) \circ (1_{t(a)} - a + a) = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)} \\
\Leftrightarrow & a^{-1} \circ 1_{t(a)} = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)} \\
\Leftrightarrow & a^{-1} = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)}
\end{aligned}$$

dir. O halde $a^{-1} = 1_{t(a)} - a + 1_{s(a)}$ tersi vardır. Bu durumda $\mathcal{C}$ bir internal grupoiddir.

Burada dikkat edelim ki eğer **GpOp** kategorisi grupların kategorisi olarak alınırsa **GpOp** deki bir internal grupoid bir grup-grupoiddir [16]. Eğer **GpOp** halkaların kategorisi olarak alınırsa bu kategorideki bir internal grupoid bir halka grupoididir [17].

Bundan sonra bir internal grupodi uyumlu olması açısından G ile göstereceğiz.

Önerme 2.2.1. G bir internal grupoid ise aşağıdaki özellikler vardır:

1. Eğer $a \in G(x, y)$ ve $b \in G(u, v)$ ise $\star \in \Omega_2$ için $a \star b \in G(x \star u, y \star v)$;
2. $a, b \in G$ ve $\star \in \Omega_2$ için $(a \star b)^{-1} = a^{-1} \star b^{-1}$;
3. $a, b \in G$ ve $\omega \in \Omega_1$ için $\omega(a \circ b) = (\omega(a)) \circ (\omega(b))$;
4. Eğer $a \in G(x, y)$ ise $\omega(a) \in G(\omega(x), \omega(y))$;
5. $x, y \in G_0$ ve $\star \in \Omega_2$ için $1_x \star 1_y = 1_{x \star y}$;
6. $a \in G$ and $\omega \in \Omega_1$ için $(\omega(a))^{-1} = \omega(a^{-1})$.

İspat: (1) G bir internal grupoid olduğundan G deki başlangıç ve bitiş fonksiyonları birer çok işlemli grup morfizmidir. Burada

$$s(a \star b) = s(a) \star s(b) = x \star u$$

ve

$$t(a \star b) = t(a) \star t(b) = y \star v$$

dır. Buradan da $a \star b \in G(x \star u, y \star v)$ dır.

(2) $u : G \longrightarrow G, a \mapsto a^{-1}$ dönüşümü bir çok işlemli grup morfizmi olduğundan

$$(a \star b)^{-1} = u(a \star b) = u(a) \star u(b) = a^{-1} \star b^{-1}$$

dır.

(3) $a, b \in G$ için $w : G \rightarrow G, a \mapsto w(a)$ bir çok işlemli grup morfizmi olduğundan $\mu : G_s \times_t G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a \circ b$ morfizmi için $w(a \circ b) = w(\mu(a, b)) = \mu(w(a, b)) = \mu(w(a), w(b)) = (w(a)) \circ (w(b))$ dir.

(4) $sa = x, ta = y$ ve $w : G \longrightarrow G$ dönüşümü bir çok işlemli grup morfizmi olduğundan $s(w(a)) = w(s(a)) = wx$ ve $t(w(a)) = w(t(a)) = wy$ dır.

(5) $x, y \in G_0$ için $\varepsilon : G_0 \rightarrow G, x \mapsto 1_x$ fonksiyon bir çok işlemli grup morfizmi olduğundan $1_{x \star y} = \varepsilon(x \star y) = \varepsilon(x) \star \varepsilon(y) = 1_x \star 1_y$ dir.

(6) $u : G \longrightarrow G, a \mapsto a^{-1}$ dönüşümü bir çok işlemli grup morfizmi olduğundan $(\omega(a))^{-1} = u(w(a)) = w(u(a)) = \omega(a^{-1})$ dir.

■

Örnek 2.2.1. X bir çok işlemli grup ise $G = X \times X$ grupoidi bir internal grupoiddir [19]. Bunun için X cümlesi üzerindeki işlemlerin cümlesi $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ olsun. $\star \in \Omega'_2$ ve $x, y, z, t \in X$ için

$$\star : G \times G \longrightarrow G, ((x, y), (z, t)) \mapsto (x, y) \star (z, t) = (x \star z, y \star t)$$

ve $w \in \Omega'_1$ için

$$w : G \rightarrow G, (x, y) \mapsto (w(x), w(y))$$

işlemleri tanımlansın. Bu işlemlere göre G nin bir çok işlemli grup olduğu kolayca görülebilir.

Burada $O_G = X$ iken x ten y ye bir morfizm (x, y) ile gösterilir. Grupoiddeki birleşim $(y, z) \circ (x, y) = (x, z)$ şeklinde tanımlı iken internal grupoiddeki yerdeğiştirme

kuralının varlığı ise şu şekilde görülür: $a = (x, y), b = (y, z), c = (u, v)$ ve $d = (v, w)$ ve $b \circ a$ ve $d \circ c$ tanımlı olmak üzere

$$(b \circ a) \star (d \circ c) = (x, z) \star (u, w) = (x \star u, z \star w)$$

dır. Diğer taraftan

$$(b \star d) \circ (a \star c) = (y \star v, z \star w) \circ (x \star u, y \star v) = (x \star u, z \star w)$$

dır. Buradan

$$(b \circ a) \star (d \circ c) = (b \star d) \circ (a \star c)$$

dır.

$a = (x, y)$ ve $b = (y, z)$ için $w(b \circ a) = (w(x), w(z))$ ve $w(b) \circ w(a) = (w(y), w(z)) \circ (w(x), w(y)) = (w(x), w(z))$ olduğundan $w(b \circ a) = w(b) \circ w(a)$ tır. $x \in Ob(G)$ için $w(1_x) = (w(x), w(x)) = 1_{w(x)}$ dır. Son olarak $e \in X$ birim olmak üzere $1_e = (e, e)$ G nin birimidir. O halde G bir internal grupoiddir.

Önerme 2.2.2. $X, \mathbf{TGP}Op$ aynı tip çok işlemli topolojik gruplar kategorisinde bir obje olsun. Bu durumda $\pi_1 X$ temel grupoidi bir internal grupoiddir [19].

İspat: X bir çok işlemli topolojik grup olsun. X in çok işlemli grup yapısını oluşturan

$$\star: X \times X \longrightarrow X, (x, y) \mapsto x \star y$$

ve

$$\omega: X \rightarrow X, x \mapsto \omega(x)$$

işlemler sürekli olduğundan bu işlemlerden, temel grupoid yapısı ile üretilen aşağıdaki işlemler iyi tanımlıdır.

$$\pi_1 \star: \pi_1 X \times \pi_1 X \cong \pi_1(X \times X) \longrightarrow \pi_1 X, ([a], [b]) \mapsto [(a, b)] \mapsto [a \star b]$$

dır. Burada $(a \star b)$ eğrisi,

$$a \star b: [0, 1] \rightarrow X, (a \star b)(t) = a(t) \star b(t)$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\pi_1\omega: \pi_1X \rightarrow \pi_1X, [a] \mapsto \omega(a) = [w(a)]$$

dır. Burada

$$\omega(a): [0, 1] \rightarrow X, (\omega(a))(t) = w(a(t))$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi π_1X in çok işlemli grup şartlarını sağladığını gösterelim.

1. Ω , G deki işlemlerin cümlesi olmak üzere π_1X deki işlemler Ω dan üretilen işlemlerdir. π_1X deki işlemlerin cümlesini $\tilde{\Omega}$ ile gösterelim. π_1X in bir grup-grupoid olduğu [22] de verilmiştir. Şimdi buna ek olarak π_1X çok işlemli bir grup olduğunu gösterelim.

2. $\tilde{\Omega}'_2 = \tilde{\Omega}_2 \setminus +, \tilde{\Omega}'_1 = \tilde{\Omega}_1 \setminus \{-\}$ olsun. $\tilde{\star} \in \tilde{\Omega}_2$ için

$$\begin{aligned} [a] \star [b] &= [a \star b] \\ &= [b \star^\circ a] \\ &= [b] \star^\circ [a] \end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{\star}^\circ \in \tilde{\Omega}_2$ dir.

3. $\tilde{\Omega}'_2 = \tilde{\Omega}_2 \setminus +, \tilde{\Omega}'_1 = \tilde{\Omega}_1 \setminus \{-\}$ olmak üzere $\star \in \tilde{\Omega}'_2$ ve $[a], [b], [c] \in \pi_1X$ için

$$\begin{aligned} [a] \star ([b] + [c]) &= [a] \star [b + c] \\ &= [a \star (b + c)] \\ &= [(a \star b) + (a \star c)] \\ &= [a \star b] + [a \star c] \\ &= ([a] \star [b]) + ([a] \star [c]) \end{aligned}$$

dır.

4. $\tilde{w} \in \tilde{\Omega}'_1$ birinci mertebeden işlemi ve $\tilde{\star} \in \tilde{\Omega}'_2$ için,

$$\begin{aligned} w([a]) \star [b] &= [w(a)] \star [b] \\ &= [w(a) \star b] \\ &= [w(a \star b)] \\ &= w([a \star b]) \\ &= w([a] \star [b]) \end{aligned}$$

dir. Şimdi $\tilde{w}$ nın $\tilde{+}$ işlemi için bir morfizm olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
 w([a] + [b]) &= w[a + b] \\
 &= [w(a + b)] \\
 &= [w(a) + w(b)] \\
 &= [w(a)] + [w(b)] \\
 &= w[a] + w[b]
 \end{aligned}$$

olur. Buna ilaveten aşağıdaki fonksiyonların bir çok işlemli grup morfizmi olması kolaylıkla görülür.

$$\begin{aligned}
 s: \pi_1 X &\rightarrow X, [a] \mapsto s[a] = a(0) \\
 t: \pi_1 X &\rightarrow X, [a] \mapsto t[a] = a(1) \\
 \varepsilon: X &\rightarrow \pi_1 X, x \mapsto [1_x] \\
 \mu: \pi_1 X_s \times_t \pi_1 X &\rightarrow \pi_1 X, ([b], [a]) \mapsto [b \circ a]
 \end{aligned}$$

dir. Son olarak yerdeğiştirme kuralının sağlandığı ise aşağıdaki şekilde görülür. $b \circ a$ ve $d \circ c$ tanımlı olmak üzere, $a, b, c, d \in \pi_1 X$ ve $\star \in \Omega'_2$ için,

$$\begin{aligned}
 ((b \star c) \circ (a \star d))(t) &= (b \star c)(t) \circ (a \star d)(t) \\
 &= (b(t) \star c(t)) \circ (a(t) \star d(t)) \\
 &= (b(t) \circ a(t)) \star (d(t) \circ c(t)) \\
 &= ((b \circ a)(t)) \star ((d \circ c)(t)) \\
 &= ((b \circ a) \star (d \circ c))(t)
 \end{aligned}$$

O halde bu işlemlerle birlikte $\pi_1 X$ bir internal grupoiddir. ■

Tanım 2.2.2. $\tilde{X}$ ve X , $\mathbf{TGpOp}$ de birer obje ve $p: \tilde{X} \rightarrow X$ de bu kategoride bir morfizm olsun. Eğer p morfizmi topolojik uzaylar üzerinde bir örtü dönüşümü ise p ye bir *çok işlemli topolojik grup örtü morfizmi* denir. □

X bir çok işlemli topolojik grup olsun. Objeleri $p: \tilde{X} \rightarrow X$ çok işlemli topolojik grup örtüleri ve $p: \tilde{X} \rightarrow X$ den $q: \tilde{Y} \rightarrow X$ ye bir morfizmi için $p = qf$ olacak şekilde

bir $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ dönüşümü olan bir kategori elde edilir. Bu kategori $\mathbf{TGpOpCov}/X$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. $\tilde{G}$ ve G iki internal grupoid ve $f: \tilde{G} \rightarrow G$ bir grupoid morfizmi olsun. Eğer $f: \tilde{G} \rightarrow G$ morfizmi çok işlemli grup yapılarını koruyor ise f e bir *internal grupoid morfizmi* denir. $\square$

O halde objeleri internal grupoidler ve morfizmleri ise yukarıda tanımlanan şekilde grupoid morfizmleri olan bir kategori oluşturulabilir. Bu kategori $\mathbf{IntGd}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. $\tilde{G}$ ve G , $\mathbf{GpOp}$ de birer internal grupoid ve $p: \tilde{G} \rightarrow G$ bu kategoride bir morfizm olsun. Eğer p aynı zamanda grupoidler üzerinde bir örtü dönüşümü ise p ye bir *internal grupoid örtü morfizmi* denir. $\square$

Bir X çok işlemli topolojik grubu için objeleri $\pi_1 X$ temel grupoidinin $p: \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$ örtü morfizmleri ve $p: \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$ den $q: H \rightarrow \pi_1 X$ ye bir morfizmi için $p = qf$ olacak şekilde bir $f: \tilde{G} \rightarrow H$ çok işlemli grup morfizmi olan bir kategori elde edilir. Bu kategori $\mathbf{IntGdCov}/\pi_1 X$ ile gösterilir.

X bir topolojik grup iken X in topolojik grup örtülerinin kategorisi $\mathbf{TGpCov}/X$ ile X den elde edilen $\pi_1 X$ grup-grupoidinin, grup-grupoid örtülerinin kategorisi $\mathbf{GpGdCov}/\pi_1 X$ in denk olduğu Brown ve Mucuk [7] da gösterilmiştir. X in bir çok işlemli topolojik grup olması halinde aşağıdaki kategori denkliği vardır.

Teorem 2.2.1. X , topolojisi basit irtibatlı bir örtüye sahip olan bir çok işlemli topolojik grup olsun. Bu durumda X in çok işlemli topolojik grup örtülerinin kategorisi $\mathbf{TGpOpCov}/X$ ile $\pi_1 X$ in internal grupoid örtülerinin kategorisi $\mathbf{IntGdCov}/\pi_1 X$ denktir.

İspat: Bir

$$\pi_1: \mathbf{TGpOpCov}/X \rightarrow \mathbf{IntGdCov}/\pi_1 X$$

fanktoru şu şekilde tanımlansın. Çok işlemli topolojik grupların bir $p: \tilde{X} \rightarrow X$ örtü morfizmi verilsin. p den üretilen $\pi_1(p): \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 X$, Önerme 1.4.2 den bir grupoid örtü morfizmidir. Ayrıca $\pi_1(p)$ aşağıdaki gibi çok işlemli grup yapısını koruduğundan

bir internal grupoid morfizmidir.

$$\begin{aligned}
\pi_1(p)[\tilde{a} \star \tilde{b}] &= [p(\tilde{a} \star \tilde{b})] \\
&= [p(\tilde{a}) \star p(\tilde{b})] \\
&= [p(\tilde{a})] \star [p(\tilde{b})] \\
&= \pi_1(p)[\tilde{a}] \star \pi_1(p)[\tilde{b}]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\pi_1(p)[w(\tilde{a})] &= [p(w\tilde{a})] \\
&= w[p(\tilde{a})] \\
&= w\pi_1(p)[\tilde{a}]
\end{aligned}$$

dır. Buradan $\pi_1(p): \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X)$ bir internal grupoid örtü morfizmidir.

Şimdi aşağıdaki şekilde bir

$$\eta: \text{IntGdCov}/\pi_1 X \rightarrow \text{TGpOpCov}/X$$

fanktoru tanımlayalım. $q: \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$ bir internal grupoid örtü morfizmi olsun. Buradan $p = O_q$ ve $\tilde{X} = O_{\tilde{G}}$ olan bir $p: \tilde{X} \rightarrow X$ örtü fonksiyonu elde edilir. Burada $\tilde{X}$ üzerindeki topoloji yükseltilmiş topolojidir [1]. Ayrıca p bir topolojik grupoid örtü morfizmidir [6]. Bunlara ilaveten şimdi $\tilde{X}$ üzerinde tanımlı $\tilde{\star} \in \tilde{\Omega}'_2$ ve $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}'_1$ işlemlerinin sürekli olduğunu gösterelim. X in her bir irtibatlı bileşeni basit irtibatlı bir örtüye sahip olduğundan X in basit irtibatlı alt cümlelerinden oluşan bir ϱ örtüsünü bulabiliriz. ϱ da basit irtibatlı bir U cümlesinin $\tilde{X}$ ya yükselmesine $\tilde{U}$ diyelim. $\tilde{U}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerindeki yükseltilmiş topoloji için bir bazdır. Burada $\tilde{0}$ nın açık bir komşuluğu $\tilde{U} \in \tilde{\varrho}$ olsun.

$$\star: X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x \star y$$

işlemi ile

$$\omega: X \rightarrow X, x \mapsto \omega(x)$$

işlemi sürekli olduğundan $(V \star V) \subseteq U$ ve $\omega(V) \subseteq U$ olacak şekilde X de 0 in bir V komşuluğu vardır. X üzerindeki topoloji yarı lokal 1- irtibatlı olduğundan

V yeterince küçük seçilerek V nin basit irtibatlı olduğu kabul edilebilir. V nin yükselmesi $\tilde{V}$ olmak üzere

$$p(\tilde{V} \star \tilde{V}) = (V \star V) \subseteq U$$

ve

$$(\tilde{V} \tilde{\times} \tilde{V}) \subseteq \tilde{U}$$

elde edilir. Bu da

$$\star: X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x \star y$$

işleminin sürekli olduğunu gösterir. Diğer yandan

$$p(\tilde{\omega}(\tilde{V})) = \omega(V) \subseteq U$$

ve

$$\tilde{\omega}(\tilde{V}) \subseteq \tilde{U}$$

elde edilir ki bu da

$$\omega: X \rightarrow X, x \mapsto \omega(x)$$

işleminin sürekli olduğunu gösterir. Topolojik grup örtülerinin kategorisi grup grupoid örtülerinin kategorisine denk olduğundan aşağıdaki diyagram teoremin ispatını tamamlar.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{TGpOpCov}/X & \longrightarrow & \mathbf{IntGdCov}/\pi_1 X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{TGpCov}/X & \longrightarrow & \mathbf{GpGdCov}/\pi_1 X \end{array}$$

■

Gruplar kategorisine benzer olarak aynı tip çok işlemli gruplar kategorisinde bir G internal grupoidini ele alalım. G internal grupoidinin bir X çok işlemli grubu üzerine etkimesi aşağıdaki şekildedir:

Tanım 2.2.5. G , $\mathbf{GpOp}$ çok işlemli gruplar kategorisinde bir internal grupoid ve X bu kategoride bir obje olsun. G nin grupoid yapısı X cümlesi üzerine Tanım 1.5.1 deki anlamda etkisin. Eğer grupoid etkimesindeki $\theta: X \rightarrow O_G$ ve $\varphi: X_\theta \times_s G \rightarrow$

$X, (x, a) \mapsto xa$ fonksiyonları bu kategoride birer morfizm ise G internal grupoidi X çok işlemli grubu üzerine θ ile etkir denir.

Böyle bir etkime (X, θ, φ) ile gösterilir.

Örnek 2.2.2. G ve $\tilde{G}$, **GpOp** çok işlemli gruplar kategorisinde birer internal grupoid ve $p: \tilde{G} \rightarrow G$ bir internal grupoid örtü morfizmi olsun. Bu durumda G internal grupoidi $X = O_{\tilde{G}}$ üzerine etkir. Burada Örnek 1.5.1 den G nin X cümlesi üzerine bir grupoid etkimesi vardır. Buna ilaveten $t, \tilde{G}$ deki bitiş fonksiyonu olmak üzere $t = \varphi: X_{\theta} \times_s G \rightarrow X, (x, a) \mapsto xa$ olarak seçildiğinden t nin **GpOp** de bir morfizm olmasından $x, y \in X$ ve $a, b \in G$ için

$$(x \star y)(a \star b) = (xa) \star (yb)$$

dir.

Teorem 2.2.2. G , **GpOp** de bir internal grupoid olsun. Ayrıca G geçişken ve $0 \in O_G$, G nin toplama işlemine ait birim elemanı olsun. $0 \in O_G$ noktasındaki obje grubu $G(0)$ ve $C, G(0)$ nin bir çok işlemli alt grubu olsun. $a \in G^0$ için $C \circ a = \{c \circ a \mid c \in C\}$ kosetlerin cümlesi X bir çok işlemli grup olur ve bu durumda G internal grupoidi X üzerine etkir.

İspat: X üzerinde $\tilde{\star} \in \Omega_2$ işlemi aşağıdaki şekilde tanımlansın: $C \circ a, C \circ b \in A$ için

$$(C \circ a) \tilde{\star} (C \circ b) = C \circ (a \star b)$$

. Şimdi bu ikili işlemlerin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $C \circ a, C \circ b \in X$ ise $a, b \in G^0, a \star b \in G^0$ ve buradan $C \circ (a \star b) \in X$ dır. Ayrıca $C \circ a = C \circ a'$ ve $C \circ b = C \circ b'$ ise, $a' \circ a^{-1}, b' \circ b^{-1} \in C$ dir ve yerdeğiştirme kuralından

$$(a' \star b') \circ (a \star b)^{-1} = (a' \star b') \circ (a^{-1} \star b^{-1}) = (a' \circ a^{-1}) \star (b' \circ b^{-1})$$

dır. C bir çok işlemli alt grup olduğundan $(a' \star b') \circ (a \star b)^{-1} \in C$ elde edilir. Buradan da $C \circ (a \star b) = C \circ (a' \star b')$ dır.

X cümlesi üzerindeki tekli işlem ise

$$\tilde{\omega}(C \circ a) = C \circ \omega(a)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $C \circ a = C \circ b$ ise $b \circ a^{-1} \in C$ ve buradan da

$$\omega(b \circ a^{-1}) = \omega(b) \circ \omega(a^{-1}) = \omega(b) \circ (\omega a)^{-1} \in C$$

dir. Sonuç olarak $C \circ \omega(a) = C \circ \omega(b)$ olur ve bu da $\tilde{\omega}$ işleminin iyi tanımlı olduğunu gösterir. G bir çok işlemli grup olduğundan, G nin grup aksiyomlarını içeren birimlerin bir E cümlesi vardır. O halde X cümlesi Tanım 2.1.1 deki çok işlemli grup şartlarını sağlamış olur. Teorem ?? den G grupoidi X cümlesi üzerine etkir. Buna ek olarak yer değiştirme kuralının sağlandığı ise şu şekilde görülür. $g, h \in G$ için

$$((C \circ a) \tilde{\star} (C \circ b))(g \star h) = ((C \circ a) \circ g) \tilde{\star} ((C \circ b) \circ h)$$

dır. ■

Teorem 2.2.3. G , $\mathbf{GpOp}$ bir internal grupoid ve X bu kategoride bir obje olsun. Ayrıca G internal grupoidi X çok işlemli grubu üzerine etkisin. Bu durumda $p: G \times X \rightarrow G$ izdüşümü bir internal grupoid morfizmi ve $G \times X$ etkime grupoidi $\mathbf{GpOp}$ kategorisinde bir internal grupoid olur.

İspat: Bu teoremin ispatı için öncelikle $\tilde{G} = G \times X$ etkime grupoidinin $\mathbf{GpOp}$ kategorisinde bir çok işlemli grup olduğunu gösterelim. Bunun için $G \times X$ üzerindeki işlemler $(a, x), (b, y) \in G \times X$ ve $\star \in \Omega'_2$ için

$$\star: G \times X \times G \times X \rightarrow G \times X, ((a, x), (b, y)) \mapsto (a \star b, x \star y)$$

ve $\omega \in \Omega'_1$ için

$$\omega: G \times X \rightarrow G \times X, (a, x) \mapsto \omega(a, x) = (\omega(a), \omega(x))$$

şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan işlemlerle $\tilde{G}$, Tanım 2.1.1 nin şartlarını sağladığından bir çok işlemli gruptur. Burada G ve X aynı tip çok işlemli gruplar olduğundan, grup aksiyomlarını içeren aynı tip birimlerin cümlesine sahiptir ve bu durumda $\tilde{G}$ aynı grup aksiyomlarını içeren aynı tip birimlerin cümlesine sahiptir.

$\tilde{G}$ nin grupoid yapısındaki fonksiyonların birer çok işlemli grup morfizmi olduğu şu şekilde görülür.

$s: \tilde{G} \rightarrow X, s(a, x) = x$ başlangıç morfizmi için

$$\begin{aligned} s(a, x) \star s(b, y) &= x \star y \\ &= s(a \star b, x \star y) \\ &= s((a, x) \star (b, y)) \end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} s(\omega(a, x)) &= s(\omega(a), \omega(x)) \\ &= \omega(x) \\ &= \omega(s(a, x)) \end{aligned}$$

dır. Burada $\varphi: G \ltimes X \rightarrow X, (a, x) \mapsto ax$ bu kategoride bir morfizm olduğundan

$$\varphi(a, x) \star \varphi(b, y) = (ax) \star (by)$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi((a, x) \star (b, y)) &= \varphi(a \star b, x \star y) \\ &= (a \star b)(x \star y) \end{aligned}$$

den

$$(a \star b)(x \star y) = (ax) \star (by)$$

eşitliği elde edilir. Bu da $t: G \ltimes X \rightarrow X, (a, x) \mapsto ax$ bitiş fonksiyonunun bir çok işlemli grup morfizmi olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \varepsilon: X &\rightarrow G \ltimes X, (a, x) \mapsto \varepsilon(a, x) = (1, x) \\ \mu: G \ltimes X \times \tilde{G} &\rightarrow \tilde{G}((b, y), (a, x)) \mapsto (ba, x) \end{aligned}$$

fonksiyonlarının da bir çok işlemli grup morfizmi olduğu kolayca görülür. ■

O halde bir G internal grupoidinin etkimelerinin kategorisi oluşturulabilir ve bu kategori $\text{IntGdAct}/G$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.6. $\tilde{G}$ bir grupoid, $G, \mathbf{GpOp}$ kategorisinde bir internal grupoid ve $0 \in G_0$ toplama işlemine ait birim olsun. $p: (\tilde{G}, \tilde{0}) \rightarrow (G, 0)$ grupoidlerin bir örtü morfizmi olsun. Bu durumda p bir internal grupoid morfizmi olacak şekilde $\tilde{G}$ üzerinde bir internal grupoid yapısı mevcut ise, G nin internal grupoid yapısı $\tilde{G}$ ya *yükselir* denir.

Teorem 2.2.4. $\tilde{G}$ bir grupoid, G , $\mathbf{GpOp}$ de grupoid yapısı geçişken olan bir internal grupoid ve $0 \in O_G$ toplama işlemine ait birim olsun. $p: \tilde{G} \rightarrow G$ grupoidlerin bir örtü morfizmi ve $p(\tilde{0}) = 0$ olacak şekilde $\tilde{0} \in O_{\tilde{G}}$ elemanı verilsin. Bu durumda G nin internal grupoid yapısı $\tilde{0}$ birim olacak şekilde $\tilde{G}$ ya yükselir [19].

İspat: $p: \tilde{G} \rightarrow G$ örtü morfizminin $\tilde{0}$ noktasındaki karakteristik grubu C olmak üzere $q: H \rightarrow \tilde{G}$ da Teorem 1.5.1 de olduğu gibi C ye karşılık gelen örtü morfizmi olsun. Sonuç 1.4.1 den p ve q denktir. Bundan dolayı sadece G nin çok işlemli grup yapısının $\tilde{G}$ ye yükseldiğini göstermek yeterlidir. G üzerindeki ikili işlem $a, b \in G$ ve $\star \in \Omega_2$ için

$$\star: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto g \star h$$

ve $\omega \in \Omega_1$ için

$$\omega: G \rightarrow G, g \mapsto \omega(g)$$

tekli işlem olsun.

Şimdi $X = O_{\tilde{G}}$ üzerindeki işlemleri

$$(C \circ a) \tilde{\star} (C \circ b) = C \circ (a \star b)$$

ile ve

$\tilde{G}$ üzerindeki işlemleri ise şu şekilde tanımlayalım: $\tilde{\star} \in \tilde{\Omega}_2$ için

$$\tilde{\star}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}, ((g, C \circ a), (h, C \circ b)) \mapsto (g, C \circ a) \tilde{\star} (h, C \circ b) = (g \star h, C \circ (a \star b))$$

ve $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}_1$

$$\tilde{\omega}: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}, (g, C \circ a) \mapsto \tilde{\omega}(g, C \circ a) = (\omega(g), C \circ \omega(a))$$

işlemleri tanımlansın. Burada $a, b \in Ob(G)$ olup $C \circ (a \star b)$ nin tanımlı olduğuna dikkat edelim. Bu işlemler ile $\tilde{G}$ gerçekten bir internal grupoid olur. Ω daki işlemler G deki işlemler olmak üzere $\tilde{G}$ daki işlemler Ω dan üretilen işlemlerdir. $\tilde{G}$ daki işlemlerin cümlesini $\tilde{\Omega}$ ile gösterelim.

1. $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_0 \cup \tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$ olsun.

2. $\tilde{\Omega}'_2 = \tilde{\Omega}_2 \setminus \{+\}, \tilde{\Omega}'_1 = \tilde{\Omega}_1 \setminus \{-\}$ olsun. $\tilde{*} \in \tilde{\Omega}_2$ için

$$\begin{aligned} (g, C \circ a) \tilde{*} (h, C \circ a) &= (g \star h, C \circ (a \star b)) \\ &= (h \star^\circ g, C \circ (b \star^\circ a)) \\ &= (h, C \circ b) \tilde{*}^\circ (g, C \circ a) \end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{*}^\circ \in \tilde{\Omega}_2$ dir.

3. $\tilde{\Omega}'_2 = \tilde{\Omega}_2 \setminus \{+\}, \tilde{\Omega}'_1 = \tilde{\Omega}_1 \setminus \{-\}$ olmak üzere $\tilde{*} \in \tilde{\Omega}_2$ ve $(C \circ a), (C \circ b), (C \circ c) \in \tilde{G}$ için

$$\begin{aligned} (g, C \circ a) \tilde{*} ((h, C \circ b) \tilde{+} (k, C \circ c)) &= (g, C \circ a) \tilde{*} ((h + k), C \circ (b + c)) \\ &= (g \star (h + k), C \circ (a \star (b + c))) \\ &= ((g \star h) + (g \star k), C \circ ((a \star b) + (a \star c))) \\ &= ((g \star h, C \circ (a \star b)) \tilde{+} ((g \star k, C \circ (a \star c))) \\ &= ((g, C \circ a) \tilde{*} (h, C \circ b)) \tilde{+} ((g, C \circ a) \tilde{*} (k, C \circ c)) \end{aligned}$$

dir.

4. $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}_1$ birinci mertebeden işlemi ve $\tilde{*} \in \tilde{\Omega}_2$ için,

$$\begin{aligned} \tilde{w}(g, C \circ a) \tilde{*} (h, C \circ b) &= (\omega(g), C \circ \omega(a)) \tilde{*} (h, C \circ b) \\ &= (\omega(g) \star h, C \circ (\omega(a) \star b)) \\ &= (\omega(g \star h), C \circ (\omega(a \star b))) \\ &= \tilde{\omega}(g \star h, C \circ (a \star b)) \\ &= \tilde{\omega}((g, C \circ a) \tilde{*} (h, C \circ b)) \end{aligned}$$

dir. Şimdi $\tilde{\omega}$ nın $\tilde{+}$ işlemi için bir morfizm olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}((g, C \circ a) \tilde{+} (h, C \circ b)) &= \tilde{\omega}(g + h, C \circ (a + b)) \\ &= (\omega(g + h), C \circ \omega(a + b)) \\ &= (\omega(g) + \omega(h), C \circ \omega(a) + \omega(b)) \\ &= (\omega(g), C \circ \omega(a)) \tilde{+} (\omega(h), C \circ \omega(b)) \\ &= \tilde{\omega}(g, C \circ a) \tilde{+} \tilde{\omega}(h, C \circ b) \end{aligned}$$

dir.

O halde $\tilde{G}$ çok işlemli grup şartlarını sağlar.

Şimdi yerdeğiştirme kuralının varlığını gösterelim.

$$\begin{aligned} ((g, C \circ a)(k, C \circ c)) \star ((h, C \circ b)(t, C \circ d)) &= (gk, C \circ a) \star (ht, C \circ b) \\ &= (gk \star ht, C \circ (a \star b)) \end{aligned}$$

dır. Diğer yandan

$$\begin{aligned} ((g, C \circ a) \star (h, C \circ b))((k, C \circ c) \star (t, C \circ d)) &= (g \star h, C \circ (a \star b)) \star (k \star t, C \circ (c \star d)) \\ &= ((g \star h)(k \star t), C \circ (a \star b)) \end{aligned}$$

dır. G bir internal grupoid olduğundan $gk \star ht = (g \star h)(k \star t)$ dir. Buradan

$$(g, C \circ a)(k, C \circ c) \star (h, C \circ b)(t, C \circ d) = ((g, C \circ a) \star (h, C \circ b))((k, C \circ c) \star (t, C \circ d))$$

elde edilir. ■

Bu teoremden aşağıdaki sonuç hemen elde edilir.

Sonuç 2.2.1. X basit irtibatlı bir örtüye sahip olan eğrisel irtibatlı bir çok işlemli topolojik grup ve $0 \in X$ birim eleman olsun. $p(\tilde{0}) = 0$ olacak şekilde herhangi bir $p: (\tilde{X}, \tilde{0}) \rightarrow (X, 0)$ örtü fonksiyonu için X in çok işlemli grup yapısı $\tilde{X}$ ya yükselir, yani $\tilde{X}$ bir çok işlemli topolojik grup, $\tilde{0} \in \tilde{X}$ birim eleman ve p bir topolojik grup morfizmi olacak şekilde $\tilde{X}$ üzerinde bir tek çok işlemli grup yapısı vardır.

İspat: X bir çok işlemli topolojik grup ise Önerme 2.2.2 den $\pi_1 X$ temel grupoidi bir internal grupoiddir. $p: \tilde{X} \rightarrow X$ bir örtü fonksiyonu ise Önerme 1.4.2 den p tarafından üretilen $\pi_1 p: \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \pi_1 X$ grupoid morfizmi bir örtü morfizmidir. Burada X eğrisel irtibatlı olduğundan $\pi_1 X$ grupoidi irtibatlıdır. O halde Teorem 2.2 den $\pi_1 X$ çok işlemli grup yapısı $\pi_1 \tilde{X}$ ya yükselir. Burada $\tilde{X}$ çok işlemli grup yapısına sahip olur. Şimdi bu grup yapısına göre $\tilde{X}$ nın bir çok işlemli topolojik grup olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\tilde{\star}: \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}, (\tilde{a}, \tilde{b}) \mapsto \tilde{a} \tilde{\star} \tilde{b}$$

ve

$$\tilde{\omega}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}, \tilde{a} \mapsto \tilde{\omega}(\tilde{a})$$

işlemlerinin sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. X yarı lokal basit irtibatlı olduğundan basit irtibatlı olan alt cümlelerinin bir ϱ örtüsüne sahiptir. ϱ da basit irtibatlı bir U cümlesinin $\tilde{X}$ ya yükselmesini gösterelim. $\tilde{X}$ üzerindeki topoloji yükseltilmiş topoloji olduğundan ϱ daki cümlelerin yükselmelerinden oluşan $\tilde{\varrho}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde yükseltilmiş topoloji için bir bazdır. $\tilde{0}$ in bir açık komşuluğu $\tilde{U} \in \tilde{\varrho}$ olsun. X bir çok işlemli topolojik grup olduğundan

$$\star: X \times X \rightarrow X, (a, b) \mapsto a \star b$$

ve

$$\omega: X \rightarrow X, a \mapsto \omega(a)$$

işlemler sürekli olup $V \star V \subseteq U$ olacak şekilde X de 0 in bir V açık komşuluğu vardır. X üzerindeki topoloji yarı lokal basit irtibatlı olduğundan V yeterince küçük seçilerek V nin basit irtibatlı olduğu kabul edilebilir. V nin yükselmesi $\tilde{V}$ olsun. $p(\tilde{V} \tilde{\star} \tilde{V}) = V \star V \subseteq U$ olup buradan da $\tilde{V} \tilde{\star} \tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ dir. Ayrıca $p(\tilde{\omega}(\tilde{V})) = \omega(V) \subseteq U$ olup $\tilde{\omega}(\tilde{V}) \subseteq \tilde{U}$ dir. Bu da $\tilde{\star} \in \tilde{\Omega}'_2$ ve $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}'_2$ işlemlerinin sürekli olduğunu gösterir.

■

2.3. Çok İşlemli Gruplar Kategorisinde Crossed Modüller

Gruplar kategorisindeki crossed modül kavramından Bölüm 2 de bahsedildi. Şimdi $\mathbf{GpOp}$ çok işlemli gruplar kategorisinde crossed modül tanımını verebilmek için öncelikle gerekli olan bazı yapılardan bahsedelim.

Tanım 2.3.1. $\mathbf{GpOp}$ aynı tip çok işlemli grupların kategorisi ve A ve B de bu kategoride birer obje olsun. B nin A tarafından bir genişlemesi

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

dir. Burada p örten ve $i(A)$ de p nin çekirdeğidir. Eğer $ps = id_B$ olacak şekilde bir $s: B \rightarrow E$ morfizmi mevcut ise bu genişlemeye bir *ayrılma(split)* denir. B nin A tarafından bir split genişlemesine A üzerinde bir B yapısı denir. $\square$

Bu genişlemeye gruplar kategorisinde aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.3.1. G bir grup, N bir normal alt grup ve G/N de bir bölüm grubu olmak üzere

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/N \longrightarrow 0$$

G nin N tarafından genişlemesini oluşturur.

Şimdi kabul edelim ki A üzerinde bir B -yapısı

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

şeklinde verilsin. Orzech [18] den $\mathbf{GpOp}$ kategorisindeki işlemlere karşılık gelen A üzerindeki B nin *üretilen etkimeleri* $b \in B, a \in A, \star \in \Omega'_2$ olmak üzere

$$b \cdot a = s(b) + a - s(b)$$

$$b \star a = s(b) \star a$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki önerme Orzech [18] de verilmiştir.

Önerme 2.3.1. $\mathbf{GpOp}$ de A ve B objeleri için B nin A üzerindeki etkimeleri üretilen etkimelerdir ancak ve ancak $B \ltimes A$ yarı direk çarpımı

$$(b', a') + (b, a) = (b' + b, a' + b' \cdot a)$$

$$(b', a') \star (b, a) = (b' \star b, a' \star a + a' \star b + b' \star a)$$

işlemine göre bu kategoride bir objedir.

$\mathbf{GpOp}$ kategorisindeki bu üretilen etkimeler ile ilgili aksiyomlar [15] de aşağıdaki şekilde formülleştirilmiştir.

Önerme 2.3.2. $\mathbf{GpOp}$ kategorisinde B nin A üzerindeki etkimelerinin cümlesi üretilen etkimelerin cümlesidir ancak ve ancak her $\forall \omega \in \Omega'_1, \forall \star \in \Omega'_2, \forall x, b_1, b_2 \in B, \forall a, a_1, a_2 \in A$ ve $x, y, z, t \in A \sqcup B$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

1. $0 \cdot a = a;$
2. $b \cdot (a_1 + a_2) = b \cdot a_1 + b \cdot a_2;$
3. $(b_1 + b_2) \cdot a = b_1 \cdot (b_2 \cdot a);$
4. $b \star (a_1 + a_2) = b \star a_1 + b \star a_2;$
5. $(b_1 + b_2) \star a = b_1 \star a + b_2 \star a,$
6. $(b_1 \star b_2) \cdot (a_1 \star a_2) = a_1 \star a_2;$
7. $(b_1 \star b_2) \cdot (a \star b) = a \star b;$
8. $a_1 \star (b \cdot a_2) = a_1 \star a_2;$
9. $b \star (b_1 \cdot a) = b \star a;$
10. $\omega(b \cdot a) = \omega(b) \cdot \omega(a);$
11. $\omega(a \star b) = \omega(a) \star b = a \star \omega(b);$
12. $x \star y + z \star t = z \star t + x \star y$

dır.

Örnek 2.3.2. B , $\mathbf{GpOp}$ de bir obje ve I da B nin bir ideali olsun. Bu durumda $b \in B$, $a \in I$ ve $\star \in \Omega'_2$ için aşağıdaki etkimeler vardır.

$$\begin{aligned} B \times I &\rightarrow I, & (b, a) &\mapsto b \cdot a = b + a - b \\ B \times I &\rightarrow I, & (b, a) &\mapsto b \star a = b \star a \end{aligned}$$

Önerme 2.3.2 nin şartlarının sağlandığı kolayca görülür.

$\mathbf{GpOp}$ kategorisinde bir crossed modul [14] referansında aşağıdaki şekilde karakterize edilmiştir.

Tanım 2.3.2. $\mathbf{GpOp}$ kategorisindeki A ve B objeleri için A üzerinde B nin üretilen etkimeleri verilsin. $\phi : A \rightarrow B$ bu kategoride bir morfizm olsun. Eğer ϕ için aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise (A, B, ϕ) üçlüsüne bir *crossed modül* denir: $b \in B$, $a, a' \in A$, ve $\star \in \Omega'_2$ için

$$(i) \phi(b \cdot a) = b + \phi(a) - b;$$

$$(ii) \phi(a) \cdot a' = a + a' - a;$$

$$(iii) \phi(a) \star a' = a \star a';$$

$$(iv) \phi(b \star a) = b \star \phi(a) \text{ ve } \phi(a \star b) = \phi(a) \star b \text{ dır.}$$

□

Burada $(A, B, \phi) \rightarrow (A', B', \phi')$ bir *crossed modül morfizmi* aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde $f_1: A \rightarrow A'$ ve $f_2: B \rightarrow B'$ ikilisinden oluşur: $x \in B$, $a \in A$ ve $\star \in \Omega'_2$ için

1. $f_2\phi(a) = \phi'f_1(a)$,
2. $f_1(b \cdot a) = f_2(x) \cdot f_1(a)$,
3. $f_1(b \star a) = f_2(x) \star f_1(a)$

dır.

Eğer $f_1: A \rightarrow A'$ bir izomorfizm ise (f_1, f_2) ikilisine bir *crossed modül örtü morfizmi* denir. O halde *crossed modül örtülerinin* kategorisi oluşturulabilir. Bu kategoriyi $\mathbf{CModCov}$ ile gösterelim.

Örnek 2.3.3. B , $\mathbf{GpOp}$ de bir obje ve I da B nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$\iota: I \rightarrow B, a \mapsto \iota(a) = a$$

içine fonksiyonu aşağıdaki üretilen etkimelerle birlikte bir *crossed modül* belirtir.

$b \in B$, $a \in I$ ve $\star \in \Omega'_2$ için

$$\begin{aligned} B \times I &\rightarrow I, & (b, a) &\mapsto b \cdot a = b + a - b \\ B \times I &\rightarrow I, & (b, a) &\mapsto b \star a = b \star a \end{aligned}$$

dır.

Bu etkime Tanım 2.3.2 in şartlarını sağlar.

Aşağıdaki teoremin ispatı [14] referansında verilmiştir. Fakat bu teoremin ispatından faydalananarak Teorem 2.4.2 deki kategori denkliğini vereceğimizden ispatı kısaca hatırlatalım.

Teorem 2.3.1. $\mathbf{GpOp}$ aynı tip çok işlemli grupların kategorisi olsun. Bu kategorideki crossed modullerin $\mathbf{CMod}$ kategorisi ile internal grupoidlerin kategorisi $\mathbf{IntGd}$ denktir.

İspat:

$$\Gamma: \mathbf{IntGd} \rightarrow \mathbf{CMod}$$

fanktoru tanımlansın. G , $\mathbf{IntGd}$ de bir obje olsun. Bu internal grupoidden $A = kers$, $B = O_G$ ve $t|_A = \phi: A \rightarrow B$ bitiş fonksiyonunun kısıtlaması olmak üzere (A, B, ϕ) crossed modülü elde edilir. Burada A ve B çok işlemli grup yapısına sahiptir ve buradan bir

$$0 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$$

B yapısı elde edilir. O halde burada etkiye

$$B \times A \rightarrow A, (b, a) = b \cdot a = \varepsilon(b) + a - \varepsilon(b)$$

$$B \times A \rightarrow A, (b, a) = b \star a = \varepsilon(b) \star a$$

şeklinde tanımlıdır ve bu etkiye Önerme 2.3.2 nin şartlarını sağlar. $\phi: A \rightarrow B$ bitiş fonksiyonu ise crossed modul şartlarını sağlar: $b \in B$, $a, a' \in A$, ve $\star \in \Omega'_2$ için

$$(i) \ t(b \cdot a) = t(\varepsilon(b) + a - \varepsilon(b)) = b + t(a) - b;$$

$$(ii) \ t(a) \cdot a' = \varepsilon(t(a)) + a' - \varepsilon(t(a)) = a + a' - a;$$

$$(iii) \ t(a) \star a' = \varepsilon(t(a)) \star a' = a \star a';$$

$$(iv) \ t(b \star a) = t(\varepsilon(b) \star a) = b \star t(a) \text{ ve } t(a \star b) = t(a \star \varepsilon(b)) = t(a) \star b \text{ dir.}$$

Tersine olarak

$$\Phi: \mathbf{CMod} \rightarrow \mathbf{IntGd}$$

fanktoru tanımlansın. $\phi: A \rightarrow B$, $\mathbf{GpOp}$ çok işlemli gruplar kategorisinde bir crossed modül olsun. Bu crossed modüle karşılık bir G internal grupoidi şu şekilde elde edilir. Burada $O_G = B$ ve $G = B \ltimes A$ yarı direk çarpımı $\mathbf{GpOp}$ de birer obje olup $\varepsilon(b) = (b, 0)$, $s(b, a) = b$ ve $t(b, a) = b + \phi(a)$ dir. Grupoid işlemi ise $c = b + \phi(a)$ olmak üzere

$$\circ: G \times G \rightarrow G$$

$$((b, a), (c, d)) \mapsto (b, a) \circ (c, d) = (b, a + d)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu şekilde tanımlanan Γ ve Φ fanktorları için $\Gamma\Phi \simeq 1$ ve $\Phi\Gamma \simeq 1$ olduğundan kategori denkliği sağlanır. ■

Örnek 2.3.4. X bir çok işlemli topolojik grup olsun. Bu durumda Teorem 2.3.1 deki yolla $\pi_1 X$ internal grupoidinden $(\pi_1 X)_e \rightarrow X$ crossed modülü elde edilir.

2.4. Kategori Denkliği

Ggruplar kategorisindeki bir G internal grupoidin yani bir grup-grupoidin örtülerinin kategorisi $\mathbf{GpGdCov}/G$ ve etkimelerinin kategorisi $\mathbf{GpGdAct}/G$ nin denk olduğu [6] referansında verilmiştir. Şimdi bu kategori denkliğini aynı tip çok işlemli gruplar kategorisindeki bir G internal grupoidi için genişletelim.

Teorem 2.4.1. G , $\mathbf{GpOp}$ kategorisinde bir internal grupoid olsun. Bu durumda $\mathbf{IntGdCov}/G$ ile $\mathbf{IntGdAct}/G$ kategorileri birbirine denktir.

İspat:

$$\Gamma: \mathbf{IntGdCov}/G \rightarrow \mathbf{IntGdAct}/G$$

fanktörü tanımlansın. $p: \tilde{G} \rightarrow G$ internal grupoidlerin bir örtü morfizmini göz önüne alalım. Örnek 2.2.2 den G internal grupoidi $O_{\tilde{G}}$ üzerine etkir. Böylece $G \ltimes O_{\tilde{G}}$ bir internal grupoid etkimesidir. Diğer taraf için

$$\Phi: \mathbf{IntGdAct}/G \rightarrow \mathbf{IntGdCov}/G$$

fanktörünü tanımlansın. Kabul edelim ki $G \ltimes X$ bir internal grupoid etkimesi olsun. Bu durumda $p: G \ltimes X \rightarrow G$ internal grupoid morfizmi grupoidler üzerinde bir örtü morfizmidir [1]. Şimdi $\mathbf{IntGdCov}/G$ ve $\mathbf{IntGdAct}/G$ kategorilerinin denk olduğunu göstermek için $\Phi\Gamma \simeq 1$ ve $\Gamma\Phi \simeq 1$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathbf{IntGdAct}/G$ nin bir objesi $G \ltimes X$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma\Phi)(G \ltimes X) & \longrightarrow & (G \ltimes X) \\ \downarrow \Gamma\Phi(f) & & \downarrow f \\ (\Gamma\Phi)(G \ltimes X') & \longrightarrow & (G \ltimes X') \end{array}$$

$(\Gamma\Phi)(G \ltimes X) \simeq G \ltimes X$ izomorf olup her $f: (G \ltimes X) \rightarrow (G \ltimes X')$ morfizmi için diyagram değişmelidir. Dolayısıyla $(\Gamma\Phi)(f) = f$ olup $\Gamma\Phi \simeq 1$ dir.

$\text{IntGdCov}/G$ nin bir objesi $p: \tilde{G} \rightarrow G$ olmak üzere, p bir internal grupoid örtü morfizmi olduğundan $S_p: O_{\tilde{G}o_p} \times_s G \rightarrow \tilde{G}$ bijektif dönüşümü mevcuttur. Buradan $O_f: O_{\tilde{G}} \rightarrow O_G$ den bir $O_{\tilde{G}o_p} \times_s G \rightarrow O_{\tilde{G}}$ etkimesi vardır. Bu etkiye ise $O_{\tilde{G}o_p} \times_s G \rightarrow G$ örtü dönüşümünü verir. Dolayısıyla aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde $O_{\tilde{G}o_p} \times_s G \rightarrow \tilde{G}$ izomorfizmi mevcuttur.

$$\begin{array}{ccc} O_{\tilde{G}o_p} \times_s G & \longrightarrow & \tilde{G} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ G & \xrightarrow{1_G} & G \end{array}$$

Buradan $\Phi\Gamma \simeq 1$ olup bu kategoriler birbirine denktir. ■

Şimdi Teorem 2.3.1 den faydalananarak crossed modül örtüleri ile ilgili olan aşağıdaki teoremi ispatlayalım:

Teorem 2.4.2. G bir internal grupoid ve G den elde edilen crossed modül $\phi: A \rightarrow B$ olsun. Bu durumda G nin internal grupoid örtülerinin kategorisi $\text{IntGdCov}/G$ ile $\phi: A \rightarrow B$ crossed modulünün crossed modül örtülerinin kategorisi $\text{CModCov}/_{A \rightarrow B}$ denktir.

İspat:

$$\Gamma: \text{IntGdCov}/G \rightarrow \text{CModCov}/_{A \rightarrow B}$$

funktoru tanımlansın. Kabul edelim ki $q: \tilde{G} \rightarrow G$ bir internal grupoid örtü morfizmi olsun. O halde sırasıyla $\tilde{G}$ ve G internal grupoidlerine karşılık gelen $t': A' \rightarrow B'$ ve $t: A \rightarrow B$ crossed modulleri vardır.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & B' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_1 & & & & \downarrow f_2 \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Bu durumda bir

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{t'} & B' \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ A & \xrightarrow{t} & B \end{array}$$

crossed modul morfizmi vardır. Burada $q: \tilde{G} \rightarrow G$ bir internal grupoid örtü morfizmi olduğundan f_1 bir izomorfizmdir. Çünkü $s': O_{\tilde{G}} \rightarrow \tilde{G}$ ve $s: O_G \rightarrow G$ sırasıyla $\tilde{G}$ ve G deki başlangıç fonksiyonları olmak üzere Teorem 2.3.1 den $A' = Kers'$ ve $A = Kers$ olup q bir grupoid örtü morfizmi olduğundan $f_1: Kers' \rightarrow Kers$ bir izomorfizmdir. O halde $f = (f_1, f_2)$ bir crossed modul örtü morfizmidir.

Tersine olarak

$$\Phi: \mathbf{CModCov}/_{A \rightarrow B} \longrightarrow \mathbf{IntGdCov}/_G$$

fanktoru tanımlansın. Kabul edelim ki $f = (f_1, f_2) : (N, Q, v) \rightarrow (A, B, \phi)$ bir crossed modul örtüsü olsun. Bu durumda f_1 bir izomorfizmdir. O halde (N, Q, v) crossed modulünden Teorem 2.3.1 deki yolla elde edilen internal grupoid H olmak üzere $q_x : H_x \rightarrow G_{p(x)}$ biyektiftir. Bu durumda $q: H \rightarrow G$ bir internal grupoid örtü morfizmidir. Buradan $\Phi\Gamma \simeq 1$ ve $\Gamma\Phi \simeq$ olduğundan kategori denkliği sağlanır. ■

Örnek 2.3.4 ile ilgili olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 2.4.1. X basit irtibatlı bir örtüye sahip olan bir çok işlemli topolojik grup olsun. Bu durumda $\mathbf{GpOp}$ de X in çok işlemli topolojik grup örtülerinin kategorisi $\mathbf{TGpOpCov}/_X$ ile $(\pi_1 X)_e \rightarrow X$ crossed modulünün crossed modul örtülerinin kategorisi $\mathbf{CModCov}/_{(\pi_1 X)_e \rightarrow X}$ denktir.

3. BÖLÜM

BÖLÜM GRUPOİDİ VE MONODROMY GRUPOİDİ

Bu bölümde ilk olarak Brown [1] ve Higgins [8] de tanıtılmış olan G/N bölüm grupoidi ele alınmıştır. [20] de grup-grupoidler için verilen sonuç, **GpOp** kategorisindeki bir internal grupoid için genelleştirilmiştir. G , aynı tip çok işlemli gruplar kategorisinde bir internal grupoid iken G/N bölüm grupoidinin de bu kategoride bir internal grupoid olduğu gösterilmiştir. Daha sonra **TGpOp** kategorisindeki internal grupoid, diğer bir deyişle topolojik internal grupoid tanıtılmıştır. Buna ilaveten [21] ve [38] de tanıtılmış olan MG monodromy grupoidinin, [22] referansından yararlanılarak, aynı tip çok işlemli gruplar kateorisinde bir internal grupoid olduğu gösterilmiştir.

3.1. Çok İşlemli Gruplar Kategorisinde Bölüm Grupoidi

Bölüm grupoidinin tanımı Brown [1] ve Higgins [8] de aşağıdaki şekilde yapılmıştır:

Tanım 3.1.1. G bir grupoid ve N , G nin bir normal alt grupoidi olsun. Her $x \in O_G$ için x ile arasında morfizm bulunan elemanların cümlesi $N(x)$ ile gösterilsin. Buradan $N(x)$ in $Ob(G)$ nin bir parçalanmasını oluşturduğu açıktır. Bu durumda x elemanını içeren sınıf $[x]$ ile gösterilsin ve $Ob(G/N)$ bu şekildeki sınıfların cümlesi olsun. G üzerinde bir denklik bağıntısı şu şekilde tanımlansın: $a, b \in G$ için $a \sim b$ ancak ve ancak $m, n \in N$ için $a = m \circ b \circ n$ dır. O halde bir denklik sınıfındaki elemanlar başlangıç noktaları aynı irtibatlı bileşende bulunan ve bitiş noktaları da yine aynı irtibatlı bileşende bulunan morfizmlerdir. Burada $p : G \longrightarrow G/N, a \mapsto [a], x \mapsto [x]$ örten fonksiyonu vardır.

G/N üzerindeki grupoid birleşimi ise şu şekilde tanımlanır:

G/N de $[b] \circ [a]$ tanımlıdır ancak ve ancak $b_1 \circ a_1$, G de tanımlı olacak şekilde $a_1 \in [a]$ ve $b_1 \in [b]$ için $[b] \circ [a] = [b_1 \circ a_1]$ dir. Bu bileşke iyi tanımlıdır. Eğer G/N de $[a] : [x] \longrightarrow [y]$ ve $[b] : [t] \longrightarrow [z]$ ise, $[b] \circ [a]$ tanımlıdır ancak ve ancak $n \in N$ için $b \circ n \circ a$ tanımlıdır. Yani $[y] = [t]$ dir ancak ve ancak $[b] \circ [a] = [b \circ n \circ a] : [x] \longrightarrow [z]$ dır. Burada $[1_x] : [x] \rightarrow [x]$ morfizmi $[x]$ teki birim morfizmdir. O halde $p : G \longrightarrow G/N$ dönüşümü bir fanktor olmak üzere G/N bir kategoridir. G bir grupoid ve p örten olduğundan G/N bir grupoiddir. Buna *bölüm grupoidi* ve p fonksiyonuna da *grupoidlerin bölüm fonksiyonu* denir.

Önerme 3.1.1. G bir grupoid ve N de G nin bir normal alt grupoidi ise $m, n \in N$ için $m \sim n$ dir [20].

Önerme 3.1.2. G bir grupoid, N de G nin bir normal alt grupoidi ve $c \circ b \circ a$ ve $c_1 \circ b_1 \circ a_1$ bileşkesi tanımlı olsun. Eğer $a \sim a_1$, $b \sim b_1$ ve $c \sim c_1$ ise $c \circ b \circ a \sim c_1 \circ b_1 \circ a_1$ dir [20].

G bir grup-grupoid ve N de G nin bir normal alt grupoidi iken G/N bölüm grupoidinin bir grup-grupoid olduğu [20] de verilmiştir. Şimdi bu sonucu, **GpOp** kategorisindeki bir G internal grupoidi için genelleştirelim.

Teorem 3.1.1. G , **GpOp** de bir internal grupoid ve N de G nin bir normal alt grupoidi olsun. Eğer N , aynı zamanda G nin çok işlemli bir alt grubu ise G/N bölüm grupoidi bir internal grupoiddir.

İspat: G , **GpOp** de bir internal grupoid olsun. G/N nin bir internal grupoid olduğunu göstermek için öncelikle $Ob(G/N)$ ve G/N nin birer çok işlemli grup yapısına sahip olduğunu gösterelim.

Ω , G deki işlemlerin cümlesi olmak üzere, G/N üzerinde Ω dan elde edilen sonlu mertebeden işlemlerin bir cümlesi $\tilde{\Omega}$ olsun. G/N in bir grup-grupoid olduğunu biliyoruz. Şimdi G/N üzerindeki diğer işlemleri aşağıdaki gibi tanımlayalım. $\tilde{\star} \in \tilde{\Omega}'_2$ ve $[a], [b] \in G/N$ için

$$\tilde{\star} : G/N \times G/N \longrightarrow G/N, ([a], [b]) \mapsto [a]\tilde{\star}[b] = [a \star b]$$

olarak tanımlansın. Bu işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $a_1 \in [a]$ ve $b_1 \in [b]$ ise $a_1 = m \circ a \circ n$ ve $b_1 = m_1 \circ b \circ n_1$ olacak şekilde $m, n, m_1, n_1 \in N$ morfizmleri vardır. G bir internal grupoid olduğundan yerdeğiştirme kuralı sağlanır.

$$\begin{aligned} a_1 \star b_1 &= (m \circ a \circ n) \star (m_1 \circ b \circ n_1) \\ &= (m \star m_1) \circ (a \star b) \circ (n \star n_1) \end{aligned}$$

dir ve buradan N, G nin bir çok işlemli bir alt grubu olduğundan $m \star m_1, n \star n_1 \in N$ olup $a \star b \sim a_1 \star b_1$ dir.

Benzer düşünce ile $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}'_1$ için,

$$\tilde{\omega}: G/N \longrightarrow G/N, [a] \mapsto \tilde{\omega}([a]) = [\omega(a)]$$

işlemi tanımlansın. $a \sim b$ ise $a = m \circ b \circ n$ olacak şekilde $m, n \in N$ vardır. Buradan ω bir çok işlemli grup morfizmi olduğundan

$$\begin{aligned} \omega(a) &= \omega(m \circ b \circ n) \\ &= \omega(m) \circ \omega(b) \circ \omega(n) \end{aligned}$$

ve böylece $\omega(a) \sim \omega(b)$ dir. O halde işlem iyi tanımlıdır.

1. $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_0 \cup \tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$ ve $\tilde{\Omega}_0 = \{0\}, \tilde{\Omega}_1 = \Omega_1, \tilde{\Omega}_2 = \Omega_2$ olsun.

2. $\tilde{\Omega}'_2 = \tilde{\Omega}_2 \setminus \{+\}, \tilde{\Omega}'_1 = \tilde{\Omega}_1 \setminus \{-\}$ olsun. $\tilde{\star} \in \tilde{\Omega}_2$ için

$$\begin{aligned} [a]\tilde{\star}[b] &= [a \star b] \\ &= [b \star^\circ a] \\ &= [b]\tilde{\star}^\circ[a] \end{aligned}$$

olduğundan $\star^\circ \in \tilde{\Omega}_2$ dir.

3. $\Omega'_2 = \Omega_2 \setminus \{+\}, \Omega'_1 = \Omega_1 \setminus \{-\}$ olmak üzere $\star \in \Omega'_2$ ve $[a], [b], [c] \in G/N$ için

$$\begin{aligned} [a]\tilde{\star}([b]\tilde{+}[c]) &= [a]\tilde{\star}[b+c] \\ &= [a \star (b+c)] \\ &= [(a \star b) + (a \star c)] \\ &= [a \star b]\tilde{+}[a \star c] \\ &= ([a]\tilde{\star}[b])\tilde{+}([a]\tilde{\star}[c]) \end{aligned}$$

dir.

4. $\omega \in \Omega'_1$ birinci mertebeden işlemi ve $\tilde{\star} \in \tilde{\Omega}'_2$ için,

$$\begin{aligned}\omega([a])\tilde{\star}[b] &= [\omega(a)]\tilde{\star}[b] \\ &= [\omega(a) \star b] \\ &= [\omega(a \star b)] \\ &= \omega([a \star b]) \\ &= \omega([a]\tilde{\star}[b])\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\omega([a]\tilde{+}[b]) &= \omega([a+b]) \\ &= [\omega(a+b)] \\ &= [\omega(a) + \omega(b)] \\ &= [\omega(a)]\tilde{+}[\omega(b)] \\ &= \tilde{\omega}([a])\tilde{+}\tilde{\omega}([b])\end{aligned}$$

olup $\tilde{\omega}$, $\tilde{+}$ işlemi için bir morfizmdir.

Şimdi de $Ob(G/N)$ üzerinde

$$Ob(G/N) \times Ob(G/N) \longrightarrow Ob(G/N), ([x], [y]) \mapsto [x]\tilde{\star}[y] = [x \star y]$$

ikili işlemi tanımlansın. Bu işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $x \sim x'$ ve $y \sim y'$ ise $m \in N(x, x')$ ve $n \in N(y, y')$ olacak şekilde $m, n \in N$ vardır. G bir çok işlemli grup ve N de bir çok işlemli alt grup olduğundan $m \star n \in N(x \star y, x' \star y')$ dir.

$\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}'_1$ işlemi ise,

$$Ob(G/N) \longrightarrow Ob(G/N), [x] \mapsto \tilde{\omega}([x]) = [\omega(x)]$$

olarak tanımlansın. Eğer $x \sim x'$ ise $m \in N(x, x')$ olacak şekilde $m \in N$ vardır. N de bir çok işlemli alt grup olduğundan $\omega(m) \in N(\omega(x), \omega(x'))$ olur ve buradan $\omega(x) \sim \omega(x')$ elde edilir. Bu da işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterir. $Ob(G/N)$ in bir çok işlemli grup olduğu, G/N e benzer şekilde gösterilebilir.

G/N nin bir internal grupoid olduğunu göstermek için, bu işlemlere ilaveten G/N nin grupoid yapısını oluşturan fonksiyonların birer çok işlemli grup olduğunu gösterelim.

$$s : G/N \longrightarrow Ob(G/N), [a] \mapsto s([a]) = s(a)$$

başlangıç fonksiyonu için, $\tilde{w} \in \tilde{\Omega}'_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} s\tilde{w}([a]) &= s[\omega(a)] \\ &= s(\omega(a)) \\ &= \omega s(a) \\ &= \tilde{\omega} s([a]) \end{aligned}$$

ve $\star \in \Omega'_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} s([a]\tilde{\star}[b]) &= s([a \star b]) \\ &= s(a \star b) \\ &= s(a) \star s(b) \\ &= s([a])\tilde{\star}s([b]) \end{aligned}$$

dir.

$$t : G/N \longrightarrow Ob(G/N), [a] \mapsto t([a]) = t(a)$$

bitiş fonksiyonu için, $\omega \in \Omega'_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} t\tilde{w}([a]) &= t[\omega(a)] \\ &= t(\omega(a)) \\ &= \omega t(a) \\ &= \tilde{\omega} t([a]) \end{aligned}$$

dir.

$$\varepsilon : Ob(G/N) \longrightarrow G/N, [x] \mapsto \varepsilon([x]) = [1_x]$$

tanımlı fonksiyonu için, $w \in \Omega'_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \tilde{\omega}([a]) &= \varepsilon(\tilde{\omega}([x])) \\
 &= \varepsilon[\omega(x)] \\
 &= 1_{[\omega(x)]} \\
 &= \tilde{\omega}([1_x]) \\
 &= \tilde{\omega}(\varepsilon([x]))
 \end{aligned}$$

ve $\tilde{*} \in \tilde{\Omega}'_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \varepsilon([a]\tilde{*}[b]) &= \varepsilon([a \star b]) \\
 &= 1_{[a \star b]} \\
 &= 1_{[a]\tilde{*}[b]} \\
 &= 1_{[a]}\tilde{*}1_{[b]} \\
 &= \varepsilon([a])\tilde{*}\varepsilon([b])
 \end{aligned}$$

dir.

Son olarak da

$$\mu : G/N_s \times_t G/N \longrightarrow G/N, ([b], [a]) \longrightarrow [b] \circ [a] = [b \circ a]$$

fonksiyonu için $\tilde{w} \in \tilde{\Omega}'_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \mu \tilde{\omega}([a], [b]) &= \mu([\omega(a)], [\omega(b)]) \\
 &= [\omega(a)] \circ [\omega(b)] \\
 &= [\omega(a) \circ \omega(b)] \\
 &= [\omega(a \circ b)] \\
 &= \tilde{\omega}([a \circ b]) \\
 &= \tilde{\omega}([a] \circ [b]) \\
 &= \tilde{\omega}([a], [b])
 \end{aligned}$$

ve $\tilde{*} \in \tilde{\Omega}'_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mu([b], [a])\tilde{*}([d], [c]) &= \mu([b]\tilde{*}[d], [a]\tilde{*}[c]) \\
&= ([b]\tilde{*}[d]) \circ ([a]\tilde{*}[c]) \\
&= ([b] \circ [a]) \star ([d] \circ [c]) \\
&= \mu([b], [a])\tilde{*}\mu([d], [c])
\end{aligned}$$

dir.

Şimdi G/N üzerinde yerdeğiştirme kuralının varlığını gösterelim. $[a], [b], [c], [d] \in G/N$ ve $m, n \in N$ için $[b] \circ [a]$ ve $[d] \circ [c]$ tanımlı olmak üzere

$$\begin{aligned}
([b] \circ [a]) \star ([d] \circ [c]) &= [b \circ n \circ a] \star [d \circ m \circ c] \\
&= [(b \circ n \circ a) \star (d \circ m \circ c)] \\
&= [(b \star d) \circ (n \star m) \circ (a \star c)]
\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan $m_1 \in N$ için

$$\begin{aligned}
([b]\tilde{*}[d]) \circ ([a]\tilde{*}[c]) &= [b \star d] \circ [a \star c] \\
&= [(b \star d) \circ m_1 \circ (a \star c)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n \star m \in N$ ve $m_1 \in N$ için başlangıç ve bitiş noktaları aynı olduğundan Önerme 3.1.1 den $[n \star m] = [m_1]$ dir. Önerme 3.1.2 den

$$[(b \star d) \circ (n \star m) \circ (a \star c)] = [(b \star d) \circ m_1 \circ (a \star c)]$$

olup

$$([b] \circ [a]) \star ([d] \circ [c]) = ([b] \star [d]) \circ ([a] \star [c])$$

elde edilir.

Buradan da G/N nin bir internal grupoid olduğu görülür. ■

3.2. Çok İşlemli Gruplar Kategorisinde Monodromy Grupoid

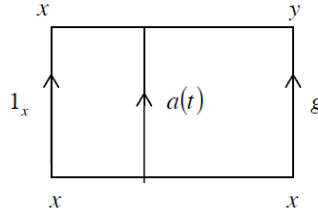
Terim olarak ‘Monodromy’, literatürde farklı alanlarda farklı bazı kavramlar için kullanılmıştır. Bu kesimde topolojik uzaylar ve örtü uzayları için önemli yeri

olan Monodromy grupoid kavramından bahsettik. Monodromy grupoid, hem bir topolojik uzayın temel grupoid yapısını hem de bir topolojik grubun evrensel örtüsünü genelleştiren bir yapı olması bakımından kullanışlıdır.

Bir G topolojik grupoidinin monodromy grupodini tanımlamadan önce, bir X topolojik uzayının $x \in X$ noktasındaki evrensel örtüsünü kısaca hatırlatalım: $x \in X$ noktasından başlayan eğrilerin (uç noktalarına göre) homotopi sınıflarının cümlesi $(\pi_1 X)_x$ ve $(\pi_1 X)_x$ deki her bir homotopi sınıfını o eğrinin bitiş noktasına eşleyen fonksiyon $p : (\pi_1 X)_x \rightarrow X$ olsun. X topolojik uzayının $x \in X$ noktasındaki evrensel örtüsü $((\pi_1 X)_x, p)$ çifti olarak bilinir.

Şimdi bir G topolojik grupoidinin monodromy grupodini G_x starlarının evrensel örtüsü kavramını kullanarak aşağıdaki şekilde açıklayalım [6], [21], [38].

Tanım 3.2.1. G bir topolojik grupoid ve her bir G_x starı basit irtibatlı bir örtüye sahip olsun. G_x uzayının 1_x noktasındaki evrensel örtüsü $(\pi_1 G_x)_{1_x}$ dir. $(\pi_1 G_x)_{1_x}$ in elemanları başlangıç noktası 1_x olan G_x deki eğrilerin homotopi sınıfıdır. Yani $a : [0, 1] \rightarrow G_x, a(0) = 1_x, a(1) = g$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için $s(a(t)) = x$ olacak şekildeki eğrilerin homotopi sınıfıdır.



Bir G grupoidinin monodromy grupoidi genelde MG ile gösterilir. $MG, (\pi_1 G_x)_{1_x}$ homotopi sınıflarının birleşimi olan cümle, yani

$$MG = \bigcup_{x \in X} (\pi_1 G_x)_{1_x}$$

dır.

MG monodromy grupoidi için $Ob(MG) = Ob(G)$ ve $\forall (x, y) \in Ob(G)$ için $MG(x, y)$ başlangıcı $a(0) = 1_x$ ve $t(a(1)) = y$ olacak şekilde $a : [0, 1] \rightarrow G_x$ eğrilerinin homotopi sınıfı olarak alınır. O halde a eğrisinin homotopi sınıfı MG de x den y ye

bir morfizmdir. MG , $(\pi_1 G_x)_{1_x}$ sınıflarının cümlesi olduğundan başlangıç fonksiyonu $s : MG \longrightarrow Ob(MG)$, tüm eğrileri x noktasına götürür. Bitiş fonksiyonu $t : MG \longrightarrow Ob(MG)$ ise

$$(\pi_1 G_x)_{1_x} \longrightarrow G_x \longrightarrow Ob(G)$$

iki bitiş fonksiyonunun bileşkesinden oluşur. MG üzerinde

$$MG(y, z) \times MG(x, y) \longrightarrow MG(x, z), ([b], [a]) \mapsto [b \bullet a] = ((b \circ a(1)) * a)(t)$$

tanımlı işlemi verilsin [21]. Burada

$$((b \circ a(1)) * a)(t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ b(2t - 1) \circ a(1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olup, $\star$ eğrilerin bileşkesidir. Ayrıca burada $a : [0, 1] \longrightarrow G_x$ eğrisinin tersi $a^{-1} = a(1 - t)g^{-1}$ olarak tanımlanır. Yani

$$a^{-1}(0) = gg^{-1} = 1_y$$

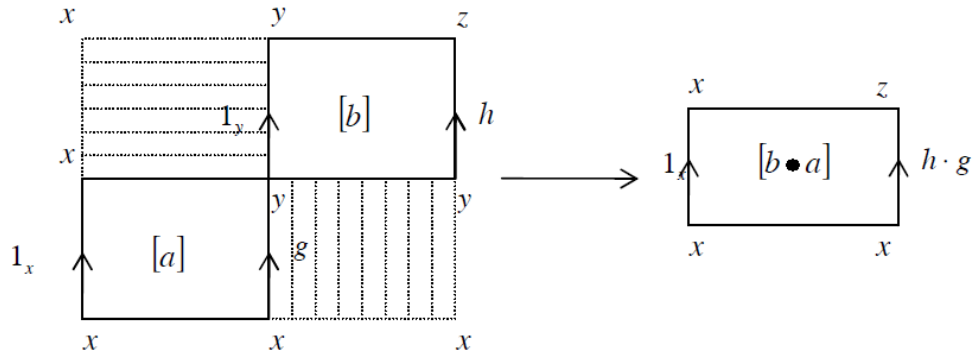
ve

$$a^{-1}(1) = a(0)g^{-1} = 1_x g^{-1} = g^{-1}$$

olup a^{-1} eğrisi başlangıcı 1_y ve bitiş noktası g^{-1} olan bir eğridir. O halde $MG, Ob(G)$ üzerinde bir grupoid olup bu grupoid G nin *monodromy grupoidi* olarak adlandırılır.

□

Bu grupoid işlemini aşağıdaki şekilde verebiliriz.



Teorem 3.2.1. G ve H , starları evrensel örtüye sahip iki topolojik grupoid ise $M(G \times H)$ ile $MG \times MH$ monodromy grupoidleri izomorfiktir [22].

Örnek 3.2.1. Eğer G bir topolojik grup ise bir tek objesi olan bir topolojik grupoid olacağından G nin monodromy grupoidi G nin evrensel örtüsü, yani $MG = (\pi_1 G)_e$ dir.

Örnek 3.2.2. X bir topolojik uzay olmak üzere G topolojik grupoidi $G = X \times X$ ise G nin monodromy grupoidi $MG = \pi_1 X$ temel grupoidi olur.

G topolojik grup-grupoid iken MG monodromy grupoidinin bir grup-grupoid olduğu [22] de verilmiştir. Şimdi bu sonucu, $\mathbf{TGpOp}$ kategorisindeki bir internal grupoid için genelleştirelim. Bunun için ön hazırlık olarak $\mathbf{TGpOp}$ aynı tip çok işlemli topolojik gruplar kategorisinde bir internal grupoidin tanımını verelim.

Tanım 3.2.2. G , $\mathbf{GpOp}$ de bir internal grupoid olsun. G nin çok işlemli grup yapısındaki işlemler ve grupoid yapısındaki fonksiyonlar sürekli olacak şekilde G ve O_G üzerinde birer topoloji yapısı varsa G ye bir *topolojik internal grupoid* denir.

Yani bir topolojik internal grupoid hem objelerinin cümlesi O_G , hem de morfizmlerinin cümlesi G birer aynı tip çok işlemli topolojik grup ve grupoid yapısındaki fonksiyonlar ise birer çok işlemli topolojik grup morfizmi olan bir grupoiddir. Özel olarak topolojik gruplar kategorisinde bir internal grupoid, bir topolojik grupoiddir. Tanımdan bir topolojik internal grupoidin bir topolojik grupoid olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 3.2.3. X bir çok işlemli grup ise $G = X \times X$ bir topolojik internal grupoiddir. $G = X \times X$ in bir internal grupoid olduğu Örnek 2.2.1 de gösterilmiştir. Buna ilaveten $\star \in \tilde{\Omega}'_2$ ve $x, y, z, t \in X$ için,

$$G \times G \longrightarrow G, ((x, y), (z, t)) \mapsto (x, y) \star (z, t) = (x \star z, y \star t)$$

ve $w \in \tilde{\Omega}'_1$ için

$$G \longrightarrow G, (x, y) \mapsto w(x, y) = (w(x), w(y))$$

şeklinde tanımlı işlemlerin sürekli olduğunu gösterelim.

$$(X \times X) \times (X \times X) \xrightarrow{(\pi_1 \times \pi_1)} X \times X \longrightarrow X$$

$$((x, y), (z, t)) \mapsto (x, z) \mapsto x \star z$$

dir. Burada X bir çok işlemli topolojik grup olduğundan $\star \in \Omega'_2$ süreklidir. Ayrıca izdüşüm fonksiyonları da sürekli olduğundan G deki bu işlem süreklidir. Diğer yandan

$$w : X \times X \longrightarrow X \times X, (x, y) \mapsto (w(x), w(y))$$

işlemi X bir çok işlemli topolojik grup olduğundan ve $x \mapsto w(x)$ işlemi sürekli olduğundan süreklidir. Dolayısıyla $X \times X$ bir topolojik internal grupoiddir.

Önerme 3.2.1. X bir çok işlemli topolojik grup ve topolojisi basit irtibatlı bir örtüye sahip ise $\pi_1 X$ temel grupoidi bir topolojik internal grupoiddir.

İspat: $\pi_1 X$ temel grupoidinin bir internal grupoid olduğu Önerme 2.2.2 de gösterilmiştir. Ayrıca [22] den $\pi_1 X$ bir topolojik grup-grupoiddir. Buna ilaveten $\tilde{\Omega}$ daki diğer işlemlerin sürekli olduğu şu şekilde görülür.

X bir çok işlemli topolojik grup olduğundan

$$\star : X \times X \longrightarrow X, (a, b) \mapsto a \star b$$

ve

$$w : X \longrightarrow X, a \mapsto w(a)$$

işlemleri süreklidir. Buradan Teorem 3.2.2 den $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1 X \times \pi_1 Y$ internal topolojik grupoid olarak denktir. Ayrıca [22, Önerme 1.5] den $\pi_1 X$ bir topolojik grupoiddir. [1] den

$$\pi_1 \star : \pi_1 X \times \pi_1 X \longrightarrow \pi_1 X, ([a], [b]) \mapsto [a \star b]$$

$$\pi_1 w : \pi_1 X \longrightarrow \pi_1 X, [a] \mapsto [w(a)]$$

işlemleri süreklidir. ■

Teorem 3.2.2. X ve Y lokal eğrisel irtibatlı ve lokal basit irtibatlı çok işlemli topolojik gruplar olsun. Bu durumda $\pi_1(X \times Y)$ ve $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ topolojik internal grupoid olarak denktir.

İspat: [22, Teorem 3.8] den $\pi_1(X \times Y)$ ve $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ topolojik grupoid olarak denktir. Geriye

$$f : \pi_1(X \times Y) \longrightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(Y), [a] \mapsto ([p_1 a], [p_2 a])$$

morfizminin bir internal grupoid morfizmi olduğunu, yani grup yapılarını koruduğunu göstermek kalır.

$$\begin{aligned}
 f([a \star b]) &= [(p_1(a \star b)), [p_2(a \star b)]] \\
 &= ([p_1(a) \star p_1(b)], [p_2(a) \star p_2(b)]) \\
 &= ([p_1(a)] \star [p_1(a)], [p_2(a)] \star [p_2(a)]) \\
 &= ([p_1(a)], [p_2(a)]) \star ([p_1(b)], [p_2(b)]) \\
 &= f([a]) \star f([b])
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \omega f([a]) &= \omega([p_1(a)], [\omega([p_2(a)])]) \\
 &= ([\omega p_1(a)], [\omega p_2(a)]) \\
 &= f(\omega[a])
 \end{aligned}$$

olduğundan f , üzerindeki işlemleri koruyan bir morfizmdir. ■

Şimdi [22] da verilen sonucun genelleştirmesi olarak aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.2.3. G , $\mathbf{TGpOp}$ de her bir G_x starı evrensel örtüye sahip olan bir topolojik internal grupoid ise, MG monodromy grupoidi bir internal grupoiddir.

İspat: G , $\mathbf{TGpOp}$ kategorisinde bir topolojik internal grupoid olsun. O halde hem $Ob(G)$ hem de G üzerinde birer çok işlemli topolojik grup yapısı vardır. Burada $Ob(MG) = Ob(G)$ dir.

G bir çok işlemli grup olduğundan $\star \in \Omega'_2$ için

$$\star: G \times G \longrightarrow G, (a, b) \mapsto a \star b$$

ikili işlemi ile

$w \in \Omega'_1$ için

$$\omega: G \longrightarrow G, a \mapsto w(a)$$

işlemleri tanımlıdır ve süreklidir.

1. Ω , G deki işlemlerin cümlesi olmak üzere MG deki işlemler Ω dan üretilen işlemlerdir. MG deki işlemlerin cümlesini $\tilde{\Omega}$ ile gösterelim. MG monodromy grupoidinin

$$\tilde{+} : MG \times MG \longrightarrow MG, ([a]\tilde{+}[b]) \mapsto [a + b]$$

$$\tilde{-} : MG \longrightarrow MG, [a] \mapsto [-a]$$

$$\tilde{0} : \{*\} \longrightarrow MG$$

işlemlerine göre bir grup-grupoid olduğu [22] de verilmiştir. Şimdi buna ek olarak çok işlemli bir grup olduğunu göstermek için aşağıdaki işlemleri tanımlayalım.

$$\tilde{\Omega}_0 = \{\tilde{0}\}, \tilde{\Omega}'_1 = \{\tilde{w} | w \in \Omega'_1\} \text{ ve } \tilde{\Omega}'_2 = \{\tilde{*} | * \in \Omega'_2\} \text{ olsun.}$$

Buna göre, $M(G \times G) \simeq M(G) \times M(G)$ olduğundan

$$\tilde{*} : MG \times MG \longrightarrow MG, ([a], [b]) \mapsto [a]\tilde{*}[b] = [a \star b]$$

işlemini tanımlayalım. Şimdi bu işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Homotopiden;

$a_1 \in [a]$ ise $F(s, 0) = a_1$ ve $F(s, 1) = a$ olacak şekilde $F : I \times I \longrightarrow G$ ($0 \leq t \leq 1$) sürekli fonksiyonu ve

$b_1 \in [b]$ ise $H(s, 0) = b_1$ ve $H(s, 1) = b$ olacak şekilde $H : I \times I \longrightarrow G$ ($0 \leq t \leq 1$) sürekli fonksiyonu vardır.

Burada G bir topolojik internal grupoid olduğundan $G \times G \longrightarrow G, (a, b) \mapsto a \star b$ işlemi sürekli olup $K = F \star H : I \times I \longrightarrow G$ fonksiyonu süreklidir. O halde

$$K(s, 0) = F(s, 0) \star H(s, 0) = a_1 \star b_1$$

$$K(s, 1) = F(s, 1) \star H(s, 1) = a \star b$$

olup $a_1 \star b_1$ ve $a \star b$ homotopiktir. Burada $a \star b$ her $t \in [0, 1]$ için $(a \star b)(t) = a(t) \star b(t)$ ile tanımlıdır. O halde işlem iyi tanımlıdır.

İkinci olarak

$$\tilde{w} : MG \longrightarrow MG, [a] \mapsto \tilde{w}([a]) = [w(a)]$$

işleminin tanımlayıp bunun iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$a_1 \in [a]$ ise $F(s, 0) = a_1$ ve $F(s, 1) = a$ olacak şekilde $F : I \times I \longrightarrow G$ ($0 \leq t \leq 1$) sürekli fonksiyonu vardır.

$w : G \longrightarrow G, a \mapsto w(a)$ işlemi süreklidir. O halde $H = w \circ F$ ile tanımlı $H : I \times I \longrightarrow G$ fonksiyonu süreklidir. Buradan

$$H(s, 0) = w(F(s, 0)) = w(a_1)$$

ve

$$H(s, 1) = w(F(s, 1)) = w(a)$$

olup $w(a_1) \simeq w(a)$ dır ve işlem iyi tanımlıdır.

Şimdi bu şekilde tanımlanan işlemlerin çok işlemli grup şartlarını sağladığını gösterelim.

2. $\tilde{\Omega}'_2 = \tilde{\Omega}_2 \setminus \{+\}, \tilde{\Omega}'_1 = \tilde{\Omega}_1 \setminus \{-\}$ olsun. $\tilde{\star} \in \tilde{\Omega}_2$ için

$$\begin{aligned} [a]\tilde{\star}[b] &= [a \star b] \\ &= [b \star^\circ a] \\ &= [b]\tilde{\star}^\circ[a] \end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{\star}^\circ \in \tilde{\Omega}_2$ dir.

3. $\tilde{\Omega}'_2 = \tilde{\Omega}_2 \setminus \{+\}, \tilde{\Omega}'_1 = \tilde{\Omega}_1 \setminus \{-\}$ olmak üzere $\star \in \tilde{\Omega}'_2$ ve $[a], [b], [c] \in MG$ için

$$\begin{aligned} [a]\tilde{\star}([b]\tilde{+}[c]) &= [a]\tilde{\star}[b+c] \\ &= [a \star (b+c)] \\ &= [(a \star b) + (a \star c)] \\ &= [a \star b]\tilde{+}[a \star c] \\ &= ([a]\tilde{\star}[b])\tilde{+}([a]\tilde{\star}[c]) \end{aligned}$$

dir.

4. $\tilde{w} \in \widetilde{\Omega'_1}$ birinci mertebeden işlemi ve $\tilde{\star} \in \widetilde{\Omega'_2}$ için,

$$\begin{aligned}\tilde{w}([a])\tilde{\star}[b] &= [w(a)]\tilde{\star}[b] \\ &= [w(a) \star b] \\ &= [w(a \star b)] \\ &= \tilde{w}([a \star b]) \\ &= \tilde{w}([a]\tilde{\star}[b])\end{aligned}$$

ve $\tilde{w}$ nın $\tilde{+}$ işlemi için bir morfizm olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}\tilde{w}([a]\tilde{+}[b]) &= \tilde{w}[a + b] \\ &= [w(a + b)] \\ &= [w(a) + w(b)] \\ &= [w(a)]\tilde{+}[w(b)] \\ &= \tilde{w}[a]\tilde{+}\tilde{w}[b]\end{aligned}$$

MG nin grupoid yapısındaki fonksiyonların birer çok işlemli grup morfizmi olduğu kolayca görülür.

Şimdi internal grupoiddeki interchange kuralının sağlandığını gösterelim. G bir internal grupoid olduğundan $\star \in \Omega'_2$ için $a, b, c, d \in G$ ve $c \bullet a, d \bullet b$ tanımlı olacak şekilde

$$(c \bullet a) \star (d \bullet b) = (c \star d) \bullet (a \star b)$$

eşitliği sağlanır.

$[a], [b], [c], [d] \in MG$ ve $[c] \bullet [a]$ ve $[d] \bullet [b]$ MG de tanımlı olmak üzere

$$\begin{aligned}(c \bullet a)(t) &= \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c(2t - 1) \circ a(1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ (d \bullet b)(t) &= \begin{cases} b(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ d(2t - 1) \circ b(1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$(c \bullet a) \star (d \bullet b)(t) = \begin{cases} (a \star b)(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (c(2t-1) \circ a(1)) \star (d(2t-1) \circ b(1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ve

$$((c \star d) \bullet (a \star b))(t) = \begin{cases} (a \star b)(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c \star d(2t-1) \circ (a \star b)(1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

dır. Burada

$$(c \bullet a) \star (d \bullet b) = ((c \circ a(1)) \star (d \circ b(1))) \star (a \star b)$$

ve

$$(c \star d) \bullet (a \star b) = ((c \star d) \circ (a \star b)(1)) \star (a \star b)$$

dır. Buradan

$$[c \bullet a] \star [d \bullet b] = [c \star d] \bullet [a \star b]$$

olduğu görülür. Şimdi $b \bullet a$ tanımlı iken $w(b \bullet a) = w(b) \bullet w(a)$ olduğunu gösterelim.

$$w(b \bullet a)(t) = \begin{cases} w(a(2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ w((b(2t-1) \circ a(1))), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ve

$$(w(b))(t) \bullet (w(a))(t) = \begin{cases} w(a(2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ w(b(2t-1)) \circ w(a(1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

dır. O halde MG monodromy grupoidi $\mathbf{GpOp}$ kategorisinde bir internal grupoiddir.

■

4. BÖLÜM

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

4.1. Sonuç ve Değerlendirme

Çok işlemli grup yapısı üzerinde çalışmak, grup, halka ve R -modül gibi bazı cebirsel yapılar üzerinde ayrı ayrı çalışma yükünü ortadan kaldırmaya yardımcı olmuştur. Bu tezde grup-grupoid ile ilgili bilinen bazı sonuçlar grup-grupoidleri de içine alan ve daha geniş bir yapı olan internal grupoidler için ispat edilmiştir. Dolayısıyla çeşitli kategorilerdeki internal grupoid kavramı, tek seferde ele alınmıştır. Bölüm 2 de verilen internal grupoid örtüleri, aynı tip çok işlemli topolojik grup örtüleri ile crossed modül örtüleri arasında bir köprü görevi görür. Böylece buna benzer kategori denklikleri ile bazı topolojik yapıların anlaşılmasında, problemi cebirsel yapılara taşımanın getireceği yararlar vurgulanmıştır.

Bölüm 3 de internal grupoidlerin topolojik durumları tanıtılmış ve bu kavram yeterince örneklendirilmeye çalışılmıştır. Böylece Bölüm 2 deki kategori denkliklerinin topolojik durumlarının incelenebileceği düşüncesi akla gelmiştir.

Bölüm 3 de, bölüm grupoidi kavramından bahsedilmiş ve bölüm grupoidinin bir internal grupoid olduğu gösterilmiştir. Bu durum internal grupoidler kategorisindeki bölüm objesinin var olabileceği fikini akla getirmiştir.

Bu tezde, gerekli referanslardan faydalanılarak Monodromy grupoid yapısının internal grupoid yapısı incelenmiştir. Fakat bazı referanslarda Monodromy grupoidi diğer bir yolla, *free grupoid* yardımıyla tanıtılmıştır. Bir free grupoidin bölüm grupoidi, G nin monodromy grupoididir. Bu yolla elde edilen MG monodromy grupoidi için herhangi bir lokal morfizm bir grupoid morfizmine genişler. Her iki yolla da elde edilen Monodromy grupoidlerinin denk olduğu bilinmektedir. Bu durumda

ilk yolla elde edilen monodromy grupoidinin, yalnızca starlarında değil, tamamında bir topoloji yapısının incelenebileceği düşüncesi uyanmıştır.

KAYNAKLAR

1. Brown, R., 2006. Topology and Groupoids, BookSurge LLC, North Carolina, 538 pp.
2. Rotman, J., J., 1988. An Introduction to Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York Inc.
3. Massey, W., S., 1990. Algebraic Topology: An Introduction, Springer-Verlag New York Inc.,
4. Gamelin, T. W., Jul 1999. Grene, E. R., Introduction to Topology , Dover Publications Inc., 2 Rev Ed edition.
5. Taylor, R., L., 1954. Coverings of non- onnected Topological Groups, **Proc. Amer. Math. Soc.** (5): 753-768.
6. Mucuk, O., 1993. Covering groups of non-connected topological groups and the monodromy groupoid of a topological groupoid, PhD Thesis, University of Wales,
7. Brown, R. and Mucuk, O., 1994. Covering Groups of Non-connected Topological Groups Revisited, **Math. Proc. Camb. Phill. Soc.**, **115**, 97-110,
8. Higgins, P.J., 1971. Categories and Groupoids, Van Nostrand Mathematical Studies, Volume 32., New York.
9. Pontrjagin, L., 1946. Topological Groups, Princeton University Press.
10. Bourbaki, N., 1966. Elements of Mathematics, General Topolgy I, Addison-Wesley , London.
11. Tkachenko, M., 1998. Introduction to Topological Groups, **Topology and Its Applications**, **86**, 179-231.
12. Brandt, H., 1926. Über eine Verallgemeinerungdes Gruppenbegriffes, **Math. Ann.**, **96**, 360- 366.

13. Brown R., and Danesh-Naruie, G., 1975. The Fundamental Groupoid as a Topological Groupoid, **Proc. Edinburgh Math. Soc.** **19** (2): 237-244.
14. Porter, T., 1987. Extensions, Crossed Modules and Internal Categories in Categories of Groups with Operations, **Proc. Edinb. Math. Soc.** **30**, 373-381.
15. Datuashvili, T., 2006. Categorical, Homological and Homotopical Properties of Algebraic Objects ,Dissertation, Georgian Academy of Sciences,Tbilisi.
16. Brown, R. and Spencer C. B., 1976. G-groupoids, Crossed Modules and The Fundamental Groupoid of A Topological Group, **Proc. Konn. Ned. Akad. v. Wet.** **79**, 296-302.
17. Mucuk, O., 1998. Coverings and Ring Groupoids, **Geor. Math. J.**, (5), 475-482.
18. Orzech, G., 1972. Obstruction Theory In Algebraic Categories I and II, **J. Pure. Appl. Algebra** (2): 287-314 and 315-340.
19. Mucuk, O., Akız, H. F., Alemdar, N. and Şahan, T., Coverings of Internal Groupoids and Crossed Modules In The Category of Groups with Operations, **Geor. Math. J.**, (incelemede).
20. Mucuk, O., Şahan, T., Alemdar, A., Quotient Group-Groupoids, (incelemede).
21. Mackenzie, K.C.H., 1987. Lie Groupoids and Lie Algebroids In Differential Geometry, London Math. Soc. Lecture Note Series 124, Cambridge University Press.
22. Mucuk, O., Kılıçarslan, B., Şahan, T. and Alemdar, N., 2011. Group-Groupoids and Monodromy Groupoids, **Topology and Its Applications**.
23. Chevalley, C., 1946. Theory of Lie Groups, Princeton University Press.
24. MacLane, S., 1971. Categories For The Working Mathematician, Springer-Verlag, Berlin.
25. Eilenberg, S., and MacLane, S., 1945. The General Theory of Natural Equivalences, **Trans. Amer Math. Soc.**, **58**, 232-294,

26. Brown, R., 1982. Holonomy and Monodromy Groupoids, U.C.N.W. Maths Preprint 82.02.
27. Brown, R., 1987. From Groups to Groupoids: A Brief Survey, **Bull. London Math. Soc.**, (19), 113-134.
28. Brown R. and Hardy J. P. L., 1976. Topological Groupoids I: Universal Constructions, **Math. Nachr.**, **71**, 273-286.
29. Brown R., Danesh-Naruie, G. and Hardy J. P. L., 1976. Topological groupoids II: Covering Morphisms and G-spaces, **Math. Nachr.** **74**, 143-156,
30. Brown, R. and İçen, İ., 2001. Lie Local Subgroupoids and Their Holonomy and Monodromy Lie Groupoids, **Top. and its Appl.** **115**, 125-138.
31. Brown, R., İçen, İ. and Mucuk, O., 2001. Holonomy and Monodromy Groupoids, in Lie Algebroids, Banach Center Publications Institute of Mathematics, **Polish Academy of Sciences, Warsaw**, **54**, 9-20.
32. Brown, R. and Mucuk, O., 1995. The Monodromy Groupoid of A Lie Groupoid, **Cah. Top. Géom. Diff. Cat.** **36**, 345-370.
33. Brown, R. and Mucuk, O., 1996. Foliations, Locally Lie Groupoids and Holonomy, **Cah. Top. Géom. Diff. Cat.** **37**, 61-71.
34. Danilov V.I., 2001. Monodromy, in Hazewinkel, M., Encyclopaedia of Mathematics, Springer.
35. Ehresmann, C., 1980-84. Structures feuilletées, Proc. 5th Conf. Canadian Math. Congress Montreal 1961, "**Oeuvres Complètes et Commentées**", **II-2**, 563-626.
36. Greene, R., E. and Gamelin, W., T., 1983. Introduction to Topology, University of California, Los Angeles.
37. Mackenzie, K.C.H., 1995. Lie Algebroids and Lie Pseudoalgebras., **Bull. London Math. Soc.** **27**, 97-147.

38. Douady, A., Lazard, M., 1966. Espaces fibrés en algébres de Lie et en groupes, **Invent. Math.** (1), 133-151.
39. Mucuk, O., 2011. Topoloji ve Kategori, Nobel Yayınları, Ankara.
40. Norrie, K., 1990. Actions and Automorphisms of Crossed Modules, **Bull. Soc. Math. France**, **118**, 129-146.
41. Plaut, C., Berestovskii, V., 2001. Covering Group Theory for Topological Groups, **Topology and Its Applications**, **114**, 141-186.
42. Pradines, J., 1966. Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables, Relation Entre Propriétés Locales et Globales, **Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér A**, **263**, 907-910.
43. Pradines, J., 1967. Théorie de Lie Pour Les Groupoïdes Différentiables, **Calcul Différentiel Dans la Catégorie des Groupoïdes Infinitesimaux**, *ibid*, **264**, 245-248.
44. Whitehead, J. H. C., 1946. Note on A Previous Paper Entitled "On Adding Relations To Homotopy Group", **Ann. of Math.**, **t. 47**, 806-810.
45. Whitehead, J. H. C., 1949. Combinatorial Homotopy II, **Bull. Amer. Math. Soc. t. 55**, 453-496.
46. Winkelnkemper, H. E., 1983. The Graph of A Foliation, **Ann. Global Anal. Géom.** **1**, 51-75.

ÖZGEÇMİŞ

Hürmet Fulya AKIZ 1983 yılında Kayseri’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2005 yılında mezun oldu. 2007 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans programını tamamladı ve aynı yıl doktora programına kabul edildi. 2009 yılında Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevini sürdürmektedir.

Adres : Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
66900 - YOZGAT
Telefon : 0 354 242 10 21 - 2576
e-posta : fulya.gencel@bozok.edu.tr