

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİLBERT UZAYLARINDA KENDİNE EŞ OPERATÖRLERİN
SPEKTRAL ANALİZİ**

TUĞÇE DUYGUN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. İNCİ ALBAYRAK**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYLARINDA KENDİNE EŞ OPERATÖRLERİN
SPEKTRAL ANALİZİ

Tuğçe DUYGUN tarafından hazırlanan tez çalışması 05.08.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. İnci ALBAYRAK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. İnci ALBAYRAK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet AHLATCIOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 2012-2013 dönemi yüksek lisans bitirme tezimde Hilbert Uzayları üzerinde kendine eş operatörler ve bu operatörlerin spektral özelliklerini inceledim.

Bu çalışmada, Hilbert uzayları üzerinde kendine eş operatörlerin spektral analizi yapılmış ve inceleme çeşitli uygulamalarla örneklendirilmiştir. İncelemede çeşitli kaynaklardan alınan tanımlara, terimlere ve örneklere yer verilerek özelliklerin anlaşılır olması amaçlanmıştır.

Bu tezin hazırlanması sürecinde hoşgörüsünü, bilgilerini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen ve bana daima yol gösteren çok değerli öğretmenimiz Doç. Dr. İNCİ ALBAYRAK' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca beni yetiştiren, daima yanımda olan ve bu tezimi hazırlarken her koşulda bana yardımcı olmaya çalışan aileme sonsuz teşekkürler...

Haziran, 2013

Tuğçe DUYGUN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT.....	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez.....	4
BÖLÜM 2	
ÖN BİLGİLER.....	5
BÖLÜM 3	
LİNEER OPERATÖRLER.....	10
3.1 Lineer Dönüşümler.....	10
3.2 Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntü Kümesi.....	12
3.3 Sınırlı Lineer Operatörler.....	16
3.4 Sınırlı Lineer Operatörler Uzayının Tamlığı.....	17
3.5 Terslenebilir Operatörler.....	18
3.6 Bir Operatörün Eşleniği.....	19
3.7 Normal Operatörler.....	23
3.8 Üniter Operatörler.....	23
3.9 Kendine Eş Operatörler.....	24

BÖLÜM 4

KENDİNE EŞ OPERATÖRLER.....	25
4.1 Kendine Eş Operatörlerin Genel Özellikleri.....	25

BÖLÜM 5

BİR OPERATÖRÜN SPEKTRUMU.....	30
5.1 Sonlu Boyutlu Normlu Uzaylarda Spektral Teori.....	30
5.2 Spektrum.....	32
5.2.1 Operatörün Nokta Spektrumu.....	40
5.2.2 Operatörün Sürekli Spektrumu.....	41
5.2.3 Operatörün Rezidü Spektrumu.....	41
5.3 Sınırlı Lineer Operatörlerin Spektral Özellikleri.....	43

BÖLÜM 6

HİLBERT UZAYLARINDA KENDİNE EŞ OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ANALİZİ.....	47
6.1 Spektral Ayrışım.....	57
6.2 Ana Eşitsizlik.....	58
6.3 Spektral Aile ve Kendine Eş Operatörlerin Spektrumu.....	59
6.4 Basit Spektrum.....	62

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER.....	67
KAYNAKLAR.....	68
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SİMGE LİSTESİ

$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
$A^\perp$	A kümesinin ortogonal bütünleyeni
$B_r(0)$	Birim yuvar
$B(X,Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı lineer ve sınırlı operatörlerin uzayı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
Codim	$\text{codim } L := \dim (X/L)$
d	$d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, metrik
$\dim$	Boyut
$f = F _A$	F nin A ya kısıtlanması
$H \oplus H$	H ile H nin direkt toplamı
$\text{Im } T$	T operatörünün görüntü kümesi
I_x	X üzerindeki birim operatör
$\text{Ker } (T)$	T operatörünün çekirdeği
$\text{Ker } (T - \lambda I)$	Öz uzay, $\{x \in V: Tx = \lambda x\}$
$L(X,Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı lineer operatörlerin uzayı
$B(X,Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı sürekli lineer dönüşümlerin kümesi
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	Limit
$n(T)$	$\dim(\text{Ker}(T))$, T nin sıfırlılığı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$r(T)$	$\dim(\text{Im}(T))$, T nin rankı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
Sup	Supremum
Inf	Infimum
T^*	T operatörünün eşleniği
T^{-1}	T operatörünün tersi

$\ T \ $	T ni operatör normu
$X \rightarrow Y$	X kümesinden Y kümesine
$\bar{\lambda}$	λ nın kompleks sayılar kümesindeki eşleniği
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük eşit
$\geq$	Büyük eşit
$\subset$	Alt küme
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman değil
$\emptyset$	Boş küme
$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
∞	Sonsuz
$\sigma(T)$	T operatörünün spektrum kümesi
$\rho(T)$	T operatörünün resolvant kümesi
$\sigma_p(T)$	T operatörünün nokta spektrum kümesi
$\sigma_c(T)$	T operatörünün sürekli spektrum kümesi
$\sigma_r(T)$	T operatörünün residüal spektrum kümesi
$\langle x, y \rangle$	x ve y nin iç çarpımı
$x \perp y$	x ile y vektörleri diktir. $\langle x, y \rangle = 0$
$X \setminus Y$	$\{x \in X: x \notin Y\}$
$X \times Y$	$\{(x, y), x \in X, y \in Y\}$ kartezyen çarpımı kümesi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1 Örnek 3.10 içinde verilen dönüşümün çekirdek ve görüntü kümesi.....	15

ÖZET

HİLBERT UZAYLARINDA KENDİNE EŞ OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ANALİZİ

Tuğçe DUYGUN

Matematik Mühendisliği

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç Dr. İnci ALBAYRAK

Hilbert uzayları üzerinde tanımlı kendine eş operatörler, teoremler ve örnekler ile incelenmiştir.

Bir operatörün spektrumunun bulunabilmesi için gerekli teoremler verilmiştir.

Hilbert uzaylarında kendine eş operatörlerin spektrumu incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kendine Eş Operatör, Spektrum, Spektral Yarıçap

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

SPECTRAL ANALYSIS OF SELF ADJOINT OPERATORS ON HILBERT SPACES

Tuğçe DUYGUN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. İnci ALBAYRAK

Self adjoint operators defined on Hilbert Spaces are investigated with theorems and examples.

The necessary theorems required to find the spectrum of an operator are given.

Spectrum of self adjoint operators that are defined on Hilbert Spaces are investigated.

Keywords: Self Adjoint Operators, Spectrum, Spectral Radius

**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Bu tez çalışmasında Hilbert uzayında kendine eş operatörlerin spektral özellikleri incelenmiştir. Bu çalışma giriş ve sonuç ile birlikte toplam yedi bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde genel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde lineer operatörlerin özellikleri, dördüncü bölümde kendine eş operatörler incelenmiştir. Beşinci bölümde spektrum tanımı verilerek spektrum türleri tanıtılmıştır. Altıncı bölümde Hilbert uzaylarında kendine eş operatörlerin spektral özellikleri araştırılmıştır. Son olarak yedinci bölümde ise sonuçlar değerlendirilmiştir.

Vektör uzayları, iç çarpım uzayları ve Hilbert uzayı adı verilen tam iç çarpım uzayları olarak genellenebilir. İç çarpım, nokta çarpımın $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde genellenmiş şeklidir. Nokta çarpım ve ortogonalite birçok uygulamanın hayata geçirilmesinde oldukça önemlidir. İç çarpım ve Hilbert uzaylarının teorileri Normlu ve Banach uzaylarından çok daha zengindir. Banach uzayı tam normlu vektör uzayı olduğundan her Hilbert uzayı bir Banach uzayıdır ancak tersi her zaman doğru değildir. Bir Banach uzayının Hilbert uzayı olması için Paralelkenar eşitliğini sağlaması gerekir.

Modern bakış açısında, fonksiyonel analiz, reel veya kompleks sayılar üzerindeki fonksiyonların uzaylarının çalışmaları olarak görülmektedir. Hilbert uzayları, fonksiyonel analizin uygulamalarında en çok yararlanılan uzaylardır. Hilbert uzayları Alman matematikçi David Hilbert tarafından 1912 de ortaya atılmıştır. Tam uzaylar, tam olmayan uzayların sahip olmadığı birçok özelliği içerdiğinden tamlik Hilbert

uzaylarının çok önemli bir özelliğidir. Hilbert uzayları kısmi diferansiyel denklemler, kuantum mekaniği ve sinyal işlemleri alanlarında da kullanılmaktadır.

Hilbert uzaylarında operatörler ve dönüşümler tanımlanmıştır. Özel olarak, Hilbert uzaylarında sınırlı lineer operatörler tanımlanmış, normlu ve iç çarpım uzaylarının özellikleri incelenmiştir. Bir uzaydan diğer uzaya dönüşüm ve operatör tanımlayabilmek için iki vektör uzayı ele alındığında lineer operatör tanımıyla; uzaylar normlu uzaylar olmak koşuluyla bu uzaylar üzerinde sınırlı lineer operatör teorisi ortaya atılmıştır. Özel bir uzaydan reel ya da kompleks sayılara dönüşüm yapan operatörler ise fonksiyoneller olarak adlandırılmıştır. Hilbert uzaylarında operatörler kendine eş, birimsel ve normal operatörler olarak tartışılmıştır. Hermitian (kendine eş) operatörlerin spektral analizi de fonksiyonel analizin önemli bir inceleme alanıdır.

Spektral teoremin incelenmesinde yine Hilbert uzayları üzerindeki operatörler oldukça önemlidir. Özellikle Hermitian ya da kendine eş operatörler uygulamalarda kullanılmaktadır.

Spektral teori ;

1. İntegral denklemler, Fredholm Teori, Kompakt Operatörler,
2. Sturm Liouville Teori, Hidrojen Atomu,
3. Isospektral Teori, Lax pairs,
4. Atiyah-Singer İndex Teoremi

üzerinde çalışmaktadır. Bunlar Spektral Teorinin gelecekte üzerinde çalışmaya değer, ilgi çekici alanları olabilir.

Spektral teori oldukça geniş olmakla birlikte bir kare matrisin özdeğer ve özvektör teorisine kadar uzanan uygulamalı fonksiyonel analizin önemli bir alanıdır. Bu isim, David Hilbert'in orijinal formülasyonu olan Hilbert uzayları teorisinden gelmektedir. Spektral teoremin kuantum mekaniğindeki atomik spektral özellikleri açıkladığı fark edilmiştir.

Son yıllarda matris yöntemleri üzerinde yapılan çalışmalar fizik, mekanik, yöneylem ve ekonomi gibi uygulamalı bilimlerde verimli bir ortam sağlamıştır. Bu nedenle matrislerin özdeğer ve özvektörlerinin önemi fark edilmiştir. Simetrik matrislerin

seçimi uygulamaların daha rahat ve kullanışlı olması açısından önem kazanmaktadır. Eigen terimini ilk olarak David Hilbert (1862-1943) kullanmıştır. Eigenfunktion ve eigenwert ifadeleri ilk olarak integral denklemlerle ilgili bildirilerinde kullanılmıştır. Hilbert'in çıkış noktası homojen olmayan integral denklemlerin bir λ parametresiyle matrissel karşılığının $(I - \lambda A)x = y$ olması olmuştur. Hilbert bu eşitliğin sıfırdan farklı homojen çözümü için A matrisinin karakteristik köklerine karşılık gelen λ değerlerine eigenwerte adını vermiştir. Özvektör kavramı ise ilk olarak Courant ve Hilbert tarafından sonlu boyut ifadesi açıklanırken kullanılmıştır.

John Von Neuman (1903-1957) bir eserinde $f \neq 0$ şartı altında $Rf = \lambda f$ ifadesindeki λ yı eigenwerte, f yi ise eigenfunktion olarak adlandırmıştır. Özdeğer ve özvektör kavramları bu şekilde yaygın bir kullanım haline gelmiş ve spektral teoreminin zeminini hazırlamıştır. 1946' da H.&B. Jeffreys' in "Methods of Mathematical Physics" adlı eserinde özdeğer kavramı karakteristik ve gizli kök kavramlarıyla eş anlamlı olarak ifade edilmiştir.

Sonsuz matrislerle tanımlanan operatörler 20. yüzyılın başından günümüze dek incelenmektedir. İlk olarak Hilbert simetrik integral denklemlerin çözümü problemini sonsuz matrislerle verilen operatörlerin spektral özelliklerinin incelenmesine indirgemıştır. (Hilbert 1924) Bu çalışma ile Hilbert uzayı ve Hilbert uzaylarında operatörler teorisinin temeli atılmıştır.

Hilbert uzayında tanımlı Kendine Eş Operatörler teorisi fonksiyonel analizin en önemli dallarından birisidir. Bu konu başta M.S. Birman ve M.Z. Solonyak' a ait olan 1987 yılına ait "Spectral Theory of Self Adjoint Operators" olmak üzere, birçok kitapta detaylı olarak işlenmiştir.

Sonsuz sayıda cebirsel denklemler sisteminin, çok sayıda kısmi türevli diferansiyel denklemler ve matematiksel fiziğin denklemleri için sınır değer probleminin incelenmesi, Hilbert uzayında dönüşüm yapan kompakt operatörlerin spektral incelenmesine indirgenir. Bundan dolayı kendine eş kompakt operatörlerin incelenmesi çok sayıda kitap ve makalede yer almıştır. Bu konuya ait Weidman (1980), Stackgold (1999), Edmunds ve Evans (1987), Gohberg ve Goldberg (1981), Kreyzig (1978) ' in kitaplarını gösterebiliriz.

Hilbert uzayında tanımlı kompakt operatörlerin spektral özelliklerinin incelenmesine ait olarak da Weidmann (1980), Debnath ve Minkusinski (1990), Kato (1980), Vulikh (1963), Gohberg ve Krein (1969), Lyanse ve Storoj (1983) kitaplarını gösterebiliriz.

Kendine eş matrislerin spektral teoremini Augustin Louis Cauchy (1829) ispatlamış, bir simetrik matrisin özdeğerlerinin reel olduğunu ilk kez o ortaya koymuştur. Bu operatör teorisinin en önemli sonucu olan spektral teoremini ise John Von Neumann (1903-1957) genelleştirmiştir. Operatörlerin spektral teorisi ve simetrik operatörlerin kendine eş genişletilmeleri teorisi kuantum mekaniğinde oldukça önemli uygulamalara sahiptir. Hilbert uzayındaki operatörler türünden kuantum mekaniğinin matematik formülleri Dirac (1930) ve Von Neumann (1932) tarafından geliştirilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu incelemede lineer operatör tanımı yapılmış ve kendine eşlik kriteri verilerek hem Banach uzayları hem de Hilbert uzayları üzerinde tanımlı operatörlerin kendine eşliği örnekler üzerinde araştırılmış ve tartışılmıştır.

Kendine eş operatörlerin spektral analizinin yapılabilmesi için spektrum çeşitlerinin tanımları verilerek kendine eş operatörlerin spektrumları incelenmiştir.

Çeşitli kaynaklardan alınan problemlerin kendine eşlikleri ve spektrumları araştırılmıştır.

1.3 Hipotez

Ele alınan problemlerin ve çözümlerinin araştırılması yapılmıştır.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 $\forall x, y, z \in X$ için, X kümesi üzerinde tanımlı bir $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- (a) $d(x, y) \geq 0$;
- (b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği).

koşullarını sağlıyorsa $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik denir. Eğer d, X üzerinde bir metrik ise o zaman (X, d) çifti bir metrik uzaydır.

Tanım 2.2 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$\forall x, y \in A$ için $d(x, y) < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa A kümesi üstten sınırlıdır denir.

Tanım 2.3 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesi bir açık yuvar içinde kalıyorsa A sınırlı bir kümedir denir.

Tanım 2.4 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$\forall x, y \in A$ için $d(x, y) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa A açık bir kümedir, aksi halde A kümesi kapalı bir kümedir denir.

Tanım 2.5 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

A kümesindeki her (x_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse A kümesine kompakt küme denir. (Şuhubi, [7])

Tanım 2.6 X ve Y normlu uzaylar ve $T \in L(X, Y)$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer X içindeki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için Y içindeki $\{Tx_n\}$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse, T ye kompakttır denir.

Tanım 2.7 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$\bar{A} = X$ ise A kümesi yoğundur. X kümesi sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahipse X kümesi ayrılabilir denir.

Tanım 2.8 X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ için,

$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı dönüşümü

$$N.1 \quad \|x\| \geq 0;$$

$$N.2 \quad \|x\| = 0 \text{ ancak ve ancak } x = 0;$$

$$N.3 \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$$

$$N.4 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir norm denir. Üzerinde $\| \cdot \|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına normlu vektör uzayı veya normlu uzay adı verilir ve $(X, \| \cdot \|)$ çifti ile gösterilir.

Önerme 2.9 X bir iç çarpım uzayı olsun.

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

ile tanımlı $\|x\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir normdur.

Tanım 2.10 X normlu uzayında $\|x\| = 1$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ vektörüne birim vektör denir.

Tanım 2.11 X normlu uzayı üzerinde tanımlı her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına Banach Uzayı adı verilir.

Tanım 2.12 X ve Y vektör uzayları ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun.

$T: X \rightarrow Y$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için,

$$\mathbf{N1.} \forall x, y \in X \text{ için } T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$\mathbf{N2.} \forall x \in X \text{ için } T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

koşullarını sağlıyorsa T operatörü lineer operatördür denir. Diğer bir deyişle,

$T: X \rightarrow Y$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için,

$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ sağlanıyorsa T operatörü lineer operatördür. (Soykan, [3])

Tanım 2.13 X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. $\forall x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa T operatörü sınırlıdır denir.

Tanım 2.14 X bir normlu uzay ve $D(T) \subseteq X$ olsun.

$T: D(T) \rightarrow X$ olmak üzere $\forall \{x_n\} \in D(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olsun.

$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x)$ sağlanıyorsa T operatörüne sürekli denir.

Tanım 2.15 X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. T operatörü sınırlı ise sürekli denir.

Tanım 2.16 X ve Y normlu uzaylar olsun.

$ST = I_X$ ve $TS = I_Y$ olacak şekilde $S \in B(Y, X)$ operatörü varsa $T \in B(X, Y)$ operatörü terslenebilirdir ve S operatörüne T 'nin tersi denir.

Tanım 2.17 X bir kompleks vektör uzay olsun.

$\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$(a) (x, x) \in \mathbb{R} \text{ ve } (x, x) \geq 0;$$

$$(b) (x, x) \Leftrightarrow 0 \text{ ancak ve ancak } x = 0;$$

$$(c) (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

$$(d) (x, y) = \overline{(y, x)}$$

koşullarını sağlayan $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna X üzerinde bir iç çarpımdır denir.

$(X, (\cdot, \cdot))$ ikilisine bir iç çarpım uzayı adı verilir.

Önerme 2.18 (Cauchy- Schwarz Eşitsizliği)

X bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun. O zaman;

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \text{ dir.}$$

Tanım 2.19 Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımla tanımlanan norma göre tam ise bu uzaya bir Hilbert uzayı adı verilir.

Başka bir ifadeyle, X iç çarpım uzayında tanımlı her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayı Hilbert uzayı olarak tanımlanır.

Tanım 2.20 $X, \mathbb{F}$ üzerinde bir normlu vektör uzay olsun. $B(X, \mathbb{F})$ uzayına X in dual uzayı adı verilir ve X' ile gösterilir.

Lemma 2.21 H bir Hilbert uzayı ve $Y \subset H$ olsun. Y lineer alt uzayının Hilbert uzayı olması için gerek ve yeter koşul Y 'nin kapalı olmasıdır. (Kreyszig [6])

Tanım 2.22 X bir iç çarpım uzayı ve (e_n) , X uzayının bir bazı olsun. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $(e_n, e_m) = 0$ ve $\|e_n\| = 1$ ise (e_n) , X uzayının ortonormal bazıdır denir.

Tanım 2.23 X bir iç çarpım uzayı ve $A \subset X$ olsun.

$A^\perp = \{x \in X: \forall a \in A \text{ için } (x, a) = 0\}$ kümesine A kümesinin ortogonal tümleyeni denir.

Tanım 2.24 X bir vektör uzay, $\mathbb{F}$ bir cisim ve $T: X \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun.

Eğer $T(x) = \lambda x$ olacak şekilde sıfır olmayan x vektörü varsa $\lambda \in \mathbb{F}$ skalerine T operatörünün özdeğeri denir. Bu bağıntıyı gerçekleyen her x vektörü de T 'nin λ özdeğerine karşı gelen özvektörü olarak tanımlanır. (Soykan, [3])

Tanım 2.25 X bir vektör uzayı ve $S \in L(X, X)$ olsun. $A \subset X$, $S(A) \subset A$ ifadesini sağlıyorsa A , S altında invaryanttır denir.

Lemma 2.26 K bir Hilbert uzayı ve $S \in B(K, K)$ kendine eş olsun. M , K 'nın kapalı bir alt uzayı ve S altında invaryant ise, o zaman, $M^\perp$ kümesi de S altında invaryanttır. (Rynne ve Youngson [1])

Teorem 2.27 (M, d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun. A kümesinin yoğun olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in M$ için $d(x, y) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in A$ noktasının var olmasıdır.

Teorem 2.28 X bir Banach uzayı olmak üzere $T \in B(X, X)$ ve $\|T\| \leq 1$ ise, $I - T$ terslenebilirdir. (Rynne ve Youngson [1])

Sonuç 2.29 X ve Y Banach uzayları olsun. $B(X, Y)$ deki terslenebilir operatörlerin kümesi açık bir kümedir.

Lemma 2.30 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H, H)$ terslenebilir ise o zaman T^* terslenebilirdir ve $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ dır.

Tanım. 2.31 E bir lineer uzay olsun. $P: E \rightarrow E$ lineer operatörüne ancak ve ancak $P^2 = P$ oluyorsa, bir izdüşüm operatörüdür denir.

BÖLÜM 3

LİNEER OPERATÖRLER

3.1 Lineer Dönüşümler (Lineer Operatörler)

Tanım 3.1 V ve W birer vektör uzay olsun. V uzayındaki her x vektörünü W uzayındaki bir y vektörü ile eşleyen T dönüşümüne bir lineer dönüşüm denir.

$T(x) = y$ veya $Tx = y$ şeklinde gösterilir.

V vektör uzayı T operatörünün tanım kümesi, W vektör uzayı ise görüntü kümesidir. Bu dönüşüm $T: V \rightarrow W$ ile gösterilir.

Vektör uzaylarında toplama ve skaler çarpma işlemleri ve özellikleri kullanılarak; $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ skalerleri ile lineer birleşimi elde edilir.

$$T(c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \dots + c_nT(v_n). \quad (\text{Goode, [4]})$$

Tanım 3.2 V ve W birer vektör uzayı olsun.

N1. V deki $\forall x, y$ vektörleri için $T(x + y) = T(x) + T(y)$,

N2. V deki $\forall x$ vektörü ve c skaleri için $T(cx) = cT(x)$

koşullarını sağlayan $T: V \rightarrow W$ dönüşümüne bir lineer operatör denir. [4]

Tanım 3.3 $\forall a_{ij} \in \mathbb{F}$ olmak üzere, $m \times n$ tipinde bir $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$ matrisi verilsin.

(a) $\mathbb{F}^n$ ve $\mathbb{F}^m$, $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ şeklinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ normuna sahip olsun.

Eğer $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, $T(x) = Ax$ ile tanımlı lineer ve sınırlı dönüşüm ise, o zaman A matrisinin $\|A\|_1$ normu, $\|A\|_1 = \|T\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Tx\|_1$ ile tanımlanır.

(b) $\mathbb{F}^n$ ve $\mathbb{F}^m$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2}$ şeklinde tanımlı $\|\cdot\|_2$ normuna sahip olsun.

Eğer $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, $T(x) = Ax$ ile tanımlı lineer ve sınırlı dönüşüm ise o zaman A matrisinin $\|A\|_2$ normu, $\|A\|_2 = \|T\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Tx\|_2$ ile tanımlanır.

(c) $\mathbb{F}^n$ ve $\mathbb{F}^m$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_j|: 1 \leq j \leq n\}$ şeklinde tanımlı $\|\cdot\|_\infty$ normuna sahip olsun.

Eğer $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, $T(x) = Ax$ ile tanımlı lineer ve sınırlı dönüşüm ise o zaman A matrisinin $\|A\|_\infty$ normu, $\|A\|_\infty = \|T\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Tx\|_\infty$ ile tanımlanır. [3]

Örnek 3.4 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ye $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ şeklinde tanımlansın. T operatörü lineer bir operatördür.

Çözüm 3.4 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ de tanımlı keyfi vektörler olsun.

O halde,

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] \\ &= T[(x_1 + y_1), (x_2 + y_2)] \\ &= ((x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) \\ &= ((x_1 - x_2) + (y_1 - y_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 - x_2, x_1 + x_2) + (y_1 - y_2, y_1 + y_2) \\ &= T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) = T(x) + T(y) \end{aligned}$$

Benzer şekilde, c keyfi bir reel sayı olsun.

$$\begin{aligned} T(cx) &= T[c(x_1, x_2)] = T(cx_1, cx_2) = (cx_1 - cx_2, cx_1 + cx_2) \\ &= c(x_1 - x_2, x_1 + x_2) = T(x_1, x_2) = cT(x). \end{aligned}$$

Böylece, T bir lineer operatördür.

Tanım 3.5 $T_1: V \rightarrow W$ ve $T_2: V \rightarrow W$ birer lineer operatör olsun.

$T_1 = T_2$ ancak ve ancak V deki $\forall v$ vektörü için $T_1(v) = T_2(v)$.

Teorem 3.6 T_1 ve T_2 lineer dönüşüm ise $T_1 + T_2$ ve cT_1 de birer lineer dönüşümdür.

İspat 3.6 $T_1 + T_2$ ve cT_1 in Tanım 3.2 deki koşulları sağladığı gösterilmelidir.

$T_1 + T_2$ ele alınsın. v_1 ve v_2 V üzerinde keyfi vektörler olsun.

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(v_1 + v_2) &= T_1(v_1 + v_2) + T_2(v_1 + v_2) \\&= T_1(v_1) + T_1(v_2) + T_2(v_1) + T_2(v_2) \\&= T_1(v_1) + T_2(v_1) + T_1(v_2) + T_2(v_2) \\&= (T_1 + T_2)(v_1) + (T_1 + T_2)(v_2)\end{aligned}$$

Böylece, Tanım 3.2 nin N1 özelliği sağlanmış olur. k keyfi skaleri için,

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(kv) &= T_1(kv) + T_2(kv) = kT_1(v) + kT_2(v) \\&= k[T_1(v) + T_2(v)] = k(T_1 + T_2)(v)\end{aligned}$$

Böylece, Tanım 3.2 nin N2 özelliği sağlanmış olur. O halde, $T_1 + T_2$ bir lineer dönüşümdür.

cT_1 nin de bir lineer dönüşüm olduğu benzer şekilde bulunur. [4]

3.2 Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntü Kümesi

Tanım 3.7 $T : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. $T(x) = 0$ koşulunu sağlayan tüm $x \in V$ vektörlerinin kümesine T operatörünün çekirdeği denir. T operatörünün çekirdeği $\text{Ker}(T)$ ile gösterilir. Buradan, $\text{Ker}(T) = \{x \in V : T(x) = 0\}$ şeklindedir.

$\text{Ker } T$ asla bir boş küme olamaz. Çünkü eğer $T : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm ise, o zaman 0_v , $\text{Ker } T$ nin elemanıdır. (Kolman ve Hill, [5])

Tanım 3.8 $T : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. V deki en az bir x vektörü için $T(x) = y$ olacak şekilde W içindeki tüm y vektörlerinin oluşturduğu kümeye T

operatörünün görüntüsü denir. T operatörünün görüntü kümesi $\text{Rng}(T)$ ile gösterilir. Buradan,

$\text{Rng}(T) = \{y \in W: T(x) = y, \text{ en az bir } x \in V \text{ vektörü için}\}$
şeklindedir. [4]

Eğer, $T(V) = W$ ise, T ye örtendir denir.

Ayrıca; $T(V)$, W vektörünün bir alt uzayıdır. [5]

Tanım 3.9 Eğer, $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ operatörü $T(x) = Ax$ şeklinde tanımlı ise,

$\text{Ker}(T) = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax = 0\}$ dır. Buradan, T operatörünün çekirdeğinin $Ax = 0$ homojen lineer sisteminin çözüm kümesi olduğu açıktır. [4]

$\text{Ker}(T)$ için bir baz bulunması problemi daima homojen sistemin bir çözüm uzayı için bir baz bulunması problemine indirgenir. [5]

Örnek.3.10 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $T(x) = Ax$ şeklinde tanımlı bir

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü ele alınsın. $\text{Ker}(T)$ ve $\text{Rng}(T)$ yi bulunuz ve her biri için geometrik yorumunu gösteriniz.

Çözüm.3.10 Bu durumda, homojen denklem sisteminin tüm çözümlerinin kümesi,

$\text{Ker}(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0,$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

şeklindedir.

Bu sistemin artırılmış matrisinin indirgenmiş satır eşalon formu,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

şeklindedir. Böylece, sistemin çözümü r bir serbest değişken olmak üzere,

$(-3r, r, 2r)$ şeklinde bulunabilir. Buradan, $\text{Ker}(T) = \{x \in \mathbb{R}^3: x = r(-3, 1, 2), r \in \mathbb{R}\}$ dir.

Geometrik olarak bu çözüm, $\mathbb{R}^3$ te bir doğru belirtir. $[\mathbb{R}^3$ ün $(-3, 1, 2)$ vektörü ile gerilmiş bir alt uzayıdır.]

Verilen dönüşüm için, $\text{Rng}(T) = \{y \in \mathbb{R}^3: Ax = y \text{ en az bir } x \in \mathbb{R} \text{ için}\}$,

yani, $\text{Rng}(T) = \{y \in \mathbb{R}^3: Ax = y \text{ tutarlıdır}\}$.

Bu nedenle,

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1,$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = y_2,$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = y_3,$$

lineer sisteminin hangi koşullarda tutarlı olduğu bulunmalıdır. Sistemin artırılmış matrisi indirgendiğinde, artırılmış matrisin satır eşalon formu,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 2 & 4 & 1 & y_2 \\ 4 & 2 & 5 & y_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 2y_1 - y_2/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -y_1 + y_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & -6y_1 + y_2 + y_3 \end{array} \right]$$

şeklindedir ve son satır ancak $-6y_1 + y_2 + y_3 = 0$ olduğunda sistemin tutarlı olduğunu gösterir. Bu nedenle,

$$\text{Rng}(T) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3: -6y_1 + y_2 + y_3 = 0\}.$$

Denklem 3 bilinmeyen içerir ve burada iki serbest değişken vardır.

$y_1 = s$, $y_2 = t$ olarak seçilirse,

$$y_3 = 6y_1 - y_2 = 6s - t$$

şeklinde elde edilir.

Bu nedenle, T nin görüntü kümesi,

$$\text{Rng}(T) = \{y \in \mathbb{R}^3: y = (s, t, (6s - t)) \in \mathbb{R}\}$$

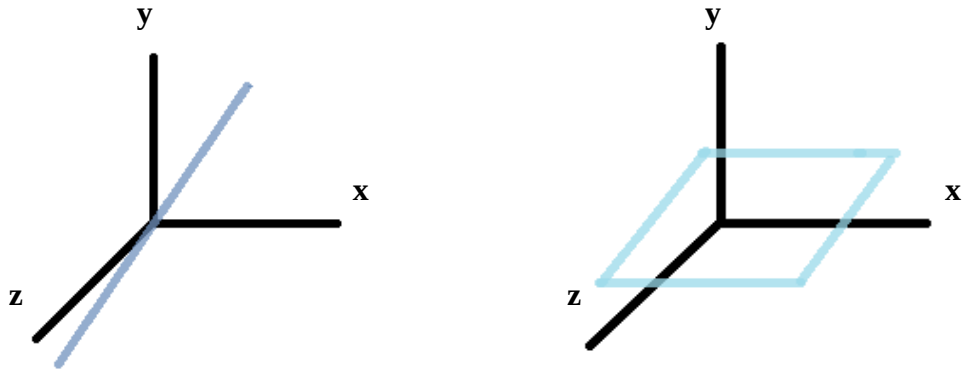
veya denk şekilde,

$$\text{Rng}(T) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = s(1, 0, 6) + t(0, 1, -1) \in \mathbb{R}^3\}$$

olarak bulunur.

Böylece, T nin görüntü kümesinin, $\mathbb{R}^3$ ün $(1, 0, 6)$ ve $(0, 1, -1)$ lineer bağımsız vektörleri tarafından gerilen bir alt uzayı olduğu görülür ve burada $\dim[\text{Rng}(T)] = 2$ dir.

Dolayısıyla, $\text{Rng}(T)$ geometrik olarak $\mathbb{R}^3$ te bir düzlem belirtmektedir.



$\text{Ker}(T)$ orijinden geçen bir doğrudur.
düzlemdir.

$\text{Rng}(T)$ orijinden geçen bir

Şekil. 3.1 Örnek 3.10 içinde verilen dönüşümün çekirdek ve görüntü kümesi

Tanım 3.11 Eğer T , bire-bir fonksiyon ise $T: V \rightarrow W$ lineer dönüşümüne bire-birdir denir. Yani, eğer $v_1 \neq v_2$ ise, $T(v_1) \neq T(v_2)$ dir. Eş değer bir ifade ile $T(v_1) = T(v_2)$ olması $v_1 = v_2$ olmasını gerektiriyorsa T bire-birdir.

Teorem 3.12 Eğer $T: V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm ise,

1. $\text{Ker}(T)$, V uzayının bir alt uzayıdır.
2. T nin bire-bir olması için gerek ve yeter şart $\dim \text{Ker}(T) = 0$ olmasıdır. [5]
3. $\text{Rng}(T)$, W uzayının bir alt uzayıdır.

Teorem 3.13 Eğer $T: V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm ve V sonlu boyutlu ise, $\dim(\text{Ker}[T]) + \dim(\text{Rng}[T]) = \dim[V]$ dir. [4]

Önerme 3.14 V, W vektör uzayları ve $T \in L(V, W)$ olsun.

$T \in L(V, W)$, ancak ve ancak birebir örten bir $S \in L(W, V)$ dönüşümü var ise birebir örtendir ve $S \circ T = I_V$, $T \circ S = I_W$ dir. Bu durumda, S ye T nin tersi denir ve $T^{-1} = S$ yazılır.

V , k boyutlu ise o zaman $n(T) + r(T) = k$ dır. W vektör uzayı da k boyutlu ise, o zaman T ancak ve ancak $n(T) = 0$ ise, birebir örtendir.

Teorem 3.15 $T: V \rightarrow W$ lineer dönüşümünün tersinin mevcut olması için gerek ve yeter şart T nin bire-bir ve örten olmasıdır. T^{-1} de lineer bir dönüşümdür ve $(T^{-1})^{-1} = T$ dir.

Tanım 3.16 $T: V \rightarrow W$ lineer operatörü bire-bir ve örten ise o zaman T bir izomorfizmadır.

Önerme 3.17 T , n boyutlu V vektör uzayından n boyutlu W vektör uzayına bir lineer dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

1. T ' nin tersi mevcuttur.
2. T bire-birdir.
3. T örtendir. [5]

3.3 Sınırlı Lineer Operatörler

X ve Y Banach uzayları ve X de tanımlı $T: X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ olacak şekilde bir M varsa T operatörüne sınırlıdır denir. [1]

Tanım 3.18 H bir kompleks Hilbert uzay ve $S \in B(H)$ olsun.

Eğer S kendine eş ve $\forall x \in H$ için

$$(Sx, x) \geq 0 \quad (3.1)$$

ise, S ' ye pozitif denir. Eğer S kendine eş ve $\forall 0 \neq x \in H$ için

$$(Sx, x) > 0 \quad (3.2)$$

ise, S ' ye kesin pozitif denir.

3.4 Sınırlı Lineer Operatörler Uzayının Tamlığı

Teorem 3.19 X normlu uzay ve Y tam normlu uzay olsun. O halde, $L(X \rightarrow Y)$ bir Banach uzayıdır (tam normlu uzayıdır).

İspat 3.19 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $L(X \rightarrow Y)$ içinde tanımlı bir Cauchy dizisi olsun, o halde $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq N$ olacak şekilde $\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $\forall x \in X$ ve $m, n \geq N$ için,

$$\begin{aligned} \|A_n(x) - A_m(x)\|_Y &= \|(A_n - A_m)(x)\|_Y \\ &\leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \\ &\leq \varepsilon \|x\| \end{aligned} \quad (3.3)$$

olduğu görülmektedir. Buradan, $\forall x \in X$ için $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi Y içinde bir Cauchy dizisidir. Y bir Banach uzayı olduğundan, bu dizinin $A(x) \in Y$ olacak şekilde bir limiti vardır ve bu limit $\forall x \in X$ için $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$ şeklinde tanımlanır.

$$\|A(x)\|_Y \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n(x)\| \leq \|x\|_X \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| \quad (3.4)$$

olduğundan A bir lineer operatördür ve ayrıca sınırlıdır. Böylece,

$$\|A\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| \quad (3.5)$$

dir.

Şimdi $A_n \rightarrow A$ olduğu gösterilmelidir. Gerçekten, $\{A_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için, $\forall m, n \geq N$ iken $\|A_m - A_n\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı vardır. Bu, böyle m, n sayıları ve $\forall x$ için $\|x\| \leq 1$ olacak şekilde $\|A_m x - A_n x\| \leq \varepsilon$ olması demektir. m sonsuza götürülerek $\|x\| \leq 1$ koşulunu sağlayan $\forall x$ için

$\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$ elde edilir. Böylece, $\forall n > N$ için $\|A - A_n\| \leq \varepsilon$ şeklindedir ve bu da, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0$ olduğunu gösterir.

NOT.

- (i) A operatörü ancak ve ancak sürekli ise sınırlıdır.
- (ii) Çek $A = \{x: Ax = 0\}$ kümesi kapalı bir altuzayıdır.

- (iii) Teorem 3.19 $\forall X$ normlu uzayı ve X^* dual uzayının tam olduğunu gösterir. Gerçekten de $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ kümesinden (X uzayı hangisinden seçilmişse) bir Y uzayı alınırsa $T(X \rightarrow Y) = X^*$ dir.
- (iv) X, Y ve Z birer Banach uzayı ve $A \in T(X \rightarrow Y), B \in T(Y \rightarrow Z)$ olsun. $BA \in T(X \rightarrow Z)$ ve $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$. (Eidelman vd., [2])

3.5 Terslenebilir Operatörler

Tanım 3.20 $A \in T(X)$ olsun. $B(= A^{-1})$ operatörüne ancak ve ancak $BA = I$ ve $AB = I$ ise, A operatörünün tersi denir. Sonlu boyutlu olması durumunda $BA = I$ eşitliği B nin A nin tersi olduğunu göstermek için yeterlidir. Çünkü, $\det A \neq 0$ olması durumunda $A^{-1} = B$ dir. A nin sonsuz boyutlu olması durumunda ise, bu koşul yeterli değildir.

Örneğin, l_2 de tanımlı $\forall x = \{x_i\}_1^\infty$ için birim sağa öteleme operatörü

$Tx = (0, x_1, x_2, \dots)$ olsun. $U: l_2 \rightarrow l_2$ üzerinde birim sola öteleme operatörü ise, $Ux = (x_2, x_3, \dots)$ ile gösterilsin. $UT = I$ ancak $TU \neq I$ olur ve $\text{Ker } TU \neq 0$ dir.

Özellikler 3.21

- (i) Eğer A ve B terslenebilir operatörler ise, AB de terslenebilirdir ve tersi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ şeklindedir.
- (ii) Eğer $\|A\| = q < 1$ ise, $(I - A)$ terslenebilirdir ve $(I - A)^{-1} = \sum_0^\infty A^k$ dır. Ayrıca, $\|(I - A)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|A\|)$ dır. Gerçekten, $k \rightarrow \infty$ iken, $\|A^k\| \leq \|A\|^k \leq q^k \rightarrow 0$. $S_n = \sum_0^n A^k$ dizisi bir Cauchy dizisidir ve bundan dolayı yakınsaktır. Ayrıca, $n \rightarrow \infty$ iken $(I - A)S_n = I - A^{n+1} \rightarrow I$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $S_n(I - A) \rightarrow I$ dır. Dolayısıyla, $\lim S_n, I - A$ operatörünün tersidir.
- (iii) A terslenebilir bir operatör ve $B, \|A - B\| \leq 1/\|A\|^{-1}$ koşulunu sağlayan bir operatör olsun. O halde, B de terslenebilirdir. Gerçekten, B operatörü $B = A(I - A^{-1}(A - B))$ şeklinde yazılabilir. A operatörü terslenebilirdir ve özellik (ii) den $I - A^{-1}(A - B)$ de terslenebilirdir. Böylece, özellik (i) den çarpımları da terslenebilirdir. [2]

Teorem 3.22 X, Y birer Banach uzayı ve $A: X \rightarrow Y$ sınırlı bir lineer bire-bir ve örten operatör olsun. O halde, $A^{-1}: Y \rightarrow X$ şeklinde tanımlı ters operatörü de sınırlıdır.

Örnek 3.23 $(w_j)_{j=1}^{\infty}$ kompleks sayıların dizisi olsun. $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ için

$D_w x = (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots)$ ile l_2 uzayında bir D_w operatörü tanımlayalım. Ancak ve ancak $(w_j)_{j=1}^{\infty}$ nin sınırlı olması durumunda D_w nin sınırlı olduğunu ve bu durumda

$\|D_w\| = \sup_j |w_j|$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 3.23 $M = \sup_j |w_j| < \infty$ olsun.

$$\|D_w x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |w_j|^2 |x_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} M^2 |x_j|^2} = M \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} = M \|x\|. \quad (3.6)$$

elde ederiz. Buradan D_w sınırlıdır ve $\|D_w\| \leq M$ dir.

i. koordinatı 1 olan $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ vektörünü ele alalım. $\|e_i\| = 1$ ve

$\|D_w e_i\| = |w_i|$ olduğu açıktır. D_w nin sınırlı olduğunu varsayalım. O halde, $\forall i$ için

$|w_i| = \|D_w e_i\| \leq \|D_w\|$ şeklindedir. Böylece, $(w_j)_{j=1}^{\infty}$ sınırlıdır ve

$$M = \sup_j |w_j| \leq \|D_w\| \quad (3.7)$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\|D_w\| = M$ elde edilir. [2]

3.6 Bir Operatörün Eşleniği (Adjointı)

Teorem 3.24 H ve K Hilbert uzayları olsun ve $T \in B(H, K)$ olsun. $\forall x \in H$ ve $\forall y \in K$ için

$(Tx, y) = (x, T^*y)$ olacak şekilde bir tek $T^* \in B(K, H)$ operatörü vardır. [1]

Tanım 3.25 H ve K Hilbert uzayları ise ve $T \in B(H, K)$ ise o zaman Teorem 3.24 içinde elde edilen T^* operatörüne T nin eşleniği (ya da eşlenik operatör) denir.

Eğer $\forall x$ ve y için $(Tx, y) = (x, Sy)$ denklemini sağlayacak şekilde bir S operatörü bulunabilirse, o zaman $S = T^*$ dir.

Örnek 3.26 $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, 3x_1, x_2, 3x_3, x_4, \dots)$ ile tanımlı $T: l^2 \rightarrow l^2$ lineer operatörünün eşleniği $T^*(y) = (3y_2, y_3, 3y_4, \dots)$ dir. [3]

Çözüm 3.26 $x_n \in l^2$ için $\|T(\{x_n\})\|_2^2 \leq 9 \| \{x_n\} \|_2^2$ ve buradan,

$\|T(\{x_n\})\|_2 \leq 3 \| \{x_n\} \|_2$ olduğundan, T sınırlıdır ve bu nedenle süreklidir.

$x = \{x_n\} \in l^2, y = \{y_n\} \in l^2$ ve $z = \{z_n\} \in T^*(\{y_n\})$ olsun. $(Tx, y) = (x, z)$ olduğundan,

$((0, 3x_1, x_2, 3x_3, x_4, \dots), (y_1, y_2, y_3, y_4, \dots)) = ((x_1, x_2, x_3, x_4, \dots), (z_1, z_2, z_3, z_4, \dots))$ dir.

O halde,

$3x_1\overline{y_2} + 3x_2\overline{y_3} + 3x_3\overline{y_4} + \dots = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} \dots$ dir. Bu eşitlik eğer,

$z_1 = 3y_2, z_2 = y_3, z_3 = 3y_4 \dots$ ise sağlanır. O halde, eşleniğin tekliğinden,

$T^*(y) = (3y_2, y_3, 3y_4, \dots)$ bulunur.

Örnek 3.27 C^3 ün $u = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ standart bazını göz önüne alalım ve $T \in B(C^3)$ olsun. Eğer, $M_{uu}(T) = [a_{ij}]$ ise, o zaman, $M_{uu}(T^*) = [\bar{a}_{ji}]$ dir.

Örnek 3.28 Herhangi bir $k \in C[0, 1]$ için $(T_k g)(t) = k(t)g(t)$, $g \in L^2[0, 1]$

ile bir $T_k \in B(L^2[0, 1])$ operatörünü tanımlayalım. Eğer, $f \in C[0, 1]$ ise, o zaman,

$(T_f)^* = T_{\bar{f}}$ dir.

Çözüm 3.28 $g, h \in L^2[0, 1]$ ve $u = (T_f)^* h$ olsun. O zaman eşleniğin tanımından,

$(T_f g, h) = (g, u)$ dır ve bu nedenle, $\int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)}dt = \int_0^1 g(t)\overline{u(t)}dt$ dir. Bu denklem eğer, $\overline{u(t)} = \overline{f(t)h(t)}$ ise, yani, $u(t) = \overline{f(t)h(t)}$ doğrudur. O halde, eşleniğin tekliğinden $(T_f)^* h = u = \overline{f}h = T_{\bar{f}}h$ ve böylece, $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$ elde edilir.

Örnek 3.29 $S \in B(l^2)$ birim öteleme operatörünün eşleniği

$S^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$ olmak üzere S^* dır.

Çözüm 3.29 l^2 üzerindeki standart iç çarpım $(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$

$(\{x_n\}, \{y_n\}) \in l^2$ ile verilsin. $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\} \in l^2$ ve $z = \{z_n\} = S^*(y)$ olsun. Eşleniğin tanımından,

$(Sx, y) = (x, S^*y)$ dır. Böylece,

$((0, x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)) = ((x_1, x_2, x_3, \dots)(z_1, z_2, z_3, \dots))$ dir. Buradan,

$$x_1 \overline{y_2} + x_2 \overline{y_3} + x_3 \overline{y_4} + \dots = x_1 \overline{z_1} + x_2 \overline{z_2} + x_3 \overline{z_3} + \dots$$

bulunur. Eğer, $z_1 = y_2, z_2 = y_3, z_3 = y_4, \dots$ ise, bu denklem $\forall x_1, x_2, x_3, \dots$ için doğrudur ve eşleniğin tekliğinden,

$S^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (z_1, z_2, z_3, \dots) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$ elde edilir.

Tanım 3.30 S birim ötelemesine sağa öteleme ve bu operatörün S^* eşlenik operatörüne sola öteleme adı verilir.

Örnek 3.31 H bir Hilbert uzay olsun. H üzerinde tanımlı I birim operatörü için $I^* = I$ dir.

Önerme 3.32 H, K ve L Hilbert uzayları ve $R, S \in B(H, K)$ ve $T \in B(K, L)$ olsun. $\lambda, \mu \in F$ olduğunu kabul edelim. O zaman,

(a) $(\mu R + \lambda S)^* = \bar{\mu} R^* + \bar{\lambda} S^*$

(b) $(TR)^* = R^* T^*$ dir. [1]

İspat 3.32

(a) $\forall x \in H$ ve $\forall y \in K$ için,

$$\begin{aligned} (x, (\mu R + \lambda S)^* y) &= ((\mu R + \lambda S)x, y) \\ &= (\mu Rx + \lambda Sx, y) \\ &= \mu(Rx, y) + \lambda(Sx, y) \\ &= \mu(x, R^* y) + \lambda(x, S^* y) \\ &= (x, \bar{\mu} R^* y) + (x, \bar{\lambda} S^* y) \end{aligned}$$

$$= (x, (\bar{\mu}R^* + \bar{\lambda}S^*)y)$$

bulunur ve bu nedenle eşleniğin tekliğinden, $(\mu R + \lambda S)^* = \bar{\mu}R^* + \bar{\lambda}S^*$ elde edilir.

(b) $\forall x \in H$ ve $\forall z \in L$ için,

$$(TRx, z) = (Rx, T^*z) = (x, R^*T^*z)$$

dir ve bu nedenle eşleniğin tekliğinden $(TR)^* = R^*T^*$ elde edilir.

Teorem 3.33 H ve K Hilbert uzaylar ve $T \in B(H, K)$ olsun. O zaman,

- (a) $(T^*)^* = T$;
- (b) $\|T^*\| = \|T\|$;
- (c) $F(R) = R^*$ ile tanımlı $f: B(H, K) \rightarrow B(K, H)$ fonksiyonu süreklidir;
- (d) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$;
- (e) $T^*T = 0 \Leftrightarrow T = 0$;
- (f) $x \in H$ olmak üzere, $T^*Tx = 0 \Leftrightarrow Tx = 0$. [1]

Önerme 3.34 H ve K Hilbert uzaylar ve $T \in B(H, K)$ olsun. O zaman,

- (a) $\text{Ker } T = (\text{Im } T^*)^\perp$;
- (b) $\text{Ker } T^* = (\text{Im } T)^\perp$;
- (c) $\text{Im } T$, ancak ve ancak K içinde yoğun ise, $\text{Ker } T^* = \{0\}$.

Sonuç 3.35 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (a) T terslenebilirdir;
- (b) $\text{Ker } T^* = \{0\}$ dır ve $\forall x \in H$ için $\|T(x)\| \geq \alpha \|x\|$ olacak şekilde $\alpha > 0$ vardır (yani T alttan sınırlıdır.) [1]

Önerme 3.36 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Eğer T terslenebilir ise o zaman T^* terslenebilirdir ve

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \text{ dir.}$$

3.7 Normal Operatörler

Tanım 3.37 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Eğer

$$TT^* = T^*T \quad (3.8)$$

İse, T ye normal operatördür denir. [3]

Önerme 3.38 H bir Hilbert uzayı, $T \in B(H)$ normal ve $\alpha > 0$ olsun. O zaman,

- (a) $\forall x \in H$ için $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ dir;
- (b) Eğer $\forall x \in H$ için $\|T(x)\| \geq \alpha \|x\|$ ise, o zaman $\text{Ker } T^* = \{0\}$ dir (yani T alttan sınırlı ise T^* bire-bir dir.)

Sonuç 3.39 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ normal olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (a) T terslenebilirdir;
- (b) $\forall x \in H$ için $\|T(x)\| \geq \alpha \|x\|$ olacak şekilde $\alpha > 0$ vardır.

3.8 Üniter Operatörler

Tanım 3.40 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Eğer

$$TT^* = T^*T = I \quad (3.9)$$

ise, T ye üniter operatördür denir. [3]

O halde, bir üniter operatör için eşlenik bu operatörün tersidir.

Teorem 3.41 H bir Hilbert uzayı ve $T, U \in B(H)$ olsun.

- (a) T ancak ve ancak bir izometri ise, $T^*T = I$ dır.
- (b) U ancak ve ancak H den H üzerine (örten) bir izometri ise, U üniterdir.
- (c) H sonlu boyutlu ise ve U bir izometri ise U üniterdir.

3.9 Kendine Eş Operatörler

Tanım 3.42 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Eğer,

$$T = T^* \quad (3.10)$$

ise, yani $\forall x, y \in H$ için $(Tx, y) = (x, Ty)$ ise, T ye kendine eştir denir. [3]

Kendine eş operatörler için bazen simetrik ya da hermityan operatör terimleri de kullanılır.

Örnek 3.43 H bir Hilbert uzay olsun. H üzerinde tanımlı I birim operatörü ve sıfır operatörü kendine eştir.

Çözüm 3.43 H Hilbert uzayında tanımlı I birim operatörü ve $\forall x, y \in H$ için

$(Ix, y) = (x, y) = (x, Iy)$ elde edilir. Bu nedenle ve eşleniğin tekliğinden $I^* = I$ dir ve I birim operatörü kendine eştir. $0: H \rightarrow H$ operatörü $\forall x \in H$ için $0(x) = 0$ ile tanımlıdır. $\forall x, y \in H$ için $0 = (0x, y) = (x, 0y)$ olduğundan $0^* = 0$ dir ve sıfır operatörü kendine eştir.

Örnek 3.44 Herhangi bir $k \in C[0,1]$ için $T_k \in B(L^2[0,1])$ operatörü

$(T_k, g)(t) = k(t)g(t)$; $g \in L^2[0,1]$ şeklinde tanımlansın. Eğer, $f \in C[0,1]$ reel değerli ise, T_f kendine eştir.

Çözüm 3.44 Örnek 3.28 den $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$ dir. f reel değerli olduğundan $\bar{f} = f$ dir. Bu nedenle, $(T_f)^* = T_{\bar{f}} = T_f$ bulunur. Bu nedenle, T_f kendine eştir.

Önerme 3.45 H bir Hilbert uzay olsun ve $B(H)$ içindeki tüm kendine eş operatörlerin kümesi S olsun.

(a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $T_1, T_2 \in S$ ise o zaman $\alpha T_1 + \beta T_2 \in S$ dir.

(b) $S, B(H)$ nin kapalı bir altkümesidir.

BÖLÜM 4

KENDİNE EŞ OPERATÖRLER

GİRİŞ

Bir H Hilbert uzayında H deki $\forall x, y$ için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ koşulu sağlanıyorsa,

$A: H \mapsto H$ sınırlı operatörü kendine eş veya simetriktir denir. [2]

4.1 Kendine Eş Operatörlerin Genel Özellikleri

Örnek 4.1 (a) H bir Hilbert uzayı ve T , H üzerinde kendine eş bir operatör olsun. $\forall x \in H$ için $(Tx, x) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $T = 0$ olduğunu ispatlayınız.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^2$ için $(Ax, x) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ matrisi bulunuz.(üzerindeki standart iç çarpımı göz önüne alınsın) Bu (a)'şikkı ile çelişir mi?

(c) (a)'yı kullanarak, eğer H bir reel Hilbert uzayı ise o zaman aşağıdakilerin denk olduğunu ispatlayınız.

(i) $\forall x \in H$ için $(Ux, x) = 0$ özelliğini sağlayan $U \in B(H)$ için $U = 0$ dır.

(ii) $\dim_{\mathbb{R}} H = 1$

Çözüm 4.1 (a) Eğer $T = 0$ ise, o zaman $x \in H$ için $(Tx, x) = (0, x) = 0$ olur. Yeter koşul iki metodla ispatlanabilir. $\forall y \in H$ için $(Ty, y) = 0$ olduğu kabul edilsin.

I. Metod

T kendine eş olduğundan, H bir kompleks Hilbert uzay ve $S \in B(H)$ kendine eş operatör iken, $\|S\| = \sup_{\|x\|=1} |(Sx, x)|$ olduğundan, $\|T\| = \sup_{\|y\|=1} |(Ty, y)|$ olur ve bu nedenle verilen hipotezden $\|T\| = 0$ olur ve sonuç olarak $T = 0$ bulunur.

II. Metod

Eğer, $y = x + Tx$ ise, o zaman $T(y) = T(x) + T^2(x)$ olur ve bu nedenle,

$$\begin{aligned} 0 &= (Ty, y) = (Tx + T^2(x), x + Tx) \\ &= (Tx, x) + (Tx, Tx) + (T^2(x), x) + (T^2(x), Tx) \end{aligned}$$

olur. Son satırdaki ilk terim sıfırdır. Ayrıca son terim de sıfırdır çünkü $z = Tx$ olduğunda bu (Tz, z) ye eşittir. T kendine eş olduğundan üçüncü terim (Tx, Tx) ye eşittir. O halde $\forall x \in H$ için,

$$0 = 2(Tx, Tx)$$

elde edilir. Böylece, $\forall x \in H$ için $Tx = 0$ olur. Yani, $T = 0$ dır. Bu istenileni ispatlar.

(b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})$ olsun. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart iç çarpımın tanımından

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ için,

$$(Ax, x) = \left(\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = ax_1^2 + (b+c)x_1x_2 + dx_2^2$$

bulunur. $a = d = 0, b = -c, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seçilirse, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ için $(Ax, x) = 0$ özelliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})$ matrisini elde ederiz. Bu (a) ile çelişmez çünkü A simetrik değildir; bu nedenle buna karşılık gelen $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ ye olan operatör

(yani $(x_1, x_2) \rightarrow ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2$ operatörü) kendine eş değildir.

(c) (i) $\Rightarrow$ (ii): $\dim_{\mathbb{R}} H \geq 2$ olduğunu kabul edelim. O zaman ortonormal bir

$\{e_1, e_2\} \subseteq H$ sistemi vardır. Bu durumda (ii) içinde olduğu gibi,

$U(x) = (x, e_1) e_2 - (x, e_2) e_1$ ile tanımlı $U: H \rightarrow H$ operatörünü göz önüne alalım. H bir reel Hilbert uzayı olduğundan $\forall x \in H$ için

$(Ux, x) = (x, e_1)(x, e_2) - (x, e_2)(x, e_1) = 0$ olur. Ayrıca; $U \neq 0$ dır ve bu (a) ile çelişir. Sonuç olarak, $\dim_{\mathbb{R}} H = 1$ olmak zorundadır.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\dim_{\mathbb{R}} H = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{e\} \subseteq H$ bir baz olacak şekilde $\|e\| = 1$ i sağlayan bir $e \in H$ vardır. $\forall x \in H$ için $(Ux, x) = 0$ olacak şekilde $U \in B(H)$ olsun. O zaman, $U(e) = \lambda e$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır.

$$0 = (Ue, e) = (\lambda e, e) = \lambda (e, e) = \lambda$$

olduğundan $\lambda = 0$ bulunur. Şimdi, eğer $x \in H$ ise, o zaman $x = \alpha e$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. Bu nedenle $U(x) = \alpha U(e) = 0$ dır. Yani $U = 0$ dır.

Örnek 4.2 H bir Hilbert uzay ve $A \in B(H)$ olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız.

(a) $T; \mathbb{F} = \mathbb{C}$ iken, ancak ve ancak $\forall x \in H$ için (Tx, x) reel ise, kendine eştir.

(b) $T; \mathbb{F} = \mathbb{R}$ iken, ancak ve ancak $\forall x, y \in H$ için $(Tx, y) = (Ty, x)$ ise, kendine eştir.

Çözüm 4.2

(a) Eğer T kendine eş ise, bu durumda $(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$ dir. Böylece $\forall x \in H$ için (Tx, x) reeldir.

Yeter koşulu göstermek için $\forall x \in H$ için (Tx, x) nin reel olduğunu varsayalım. Bu durumda $\forall x$ için, $(T^*x, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$ olur. Bu nedenle, $S = i(T^* - T)$ ise, $\forall x$ için, $(Sx, x) = i(T^*x - Tx, x) = 0$ dır.

$$(S^*) = -i(T - T^*) = S \text{ dir.}$$

Yani S kendine eştir. Bu nedenle, örnek 4.1 den S yerine T alınarak, $S = 0$ bulunur.

Böylece; $i(T^* - T) = 0$; yani, $T^* = T$ dir. T kendine eştir.

(b) Eğer T kendine eş ise, bu durumda $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ olduğundan, $\forall x, y \in H$ için

$$(Tx, y) = (x, Ty) = \overline{(Ty, x)} = (Ty, x)$$

olur.

Yeter koşulu göstermek için, verilen koşulun sağlandığını varsayalım. Bu durumda

$\forall x, y \in H$ için $(Tx, y) = (Ty, x) = (y, T^*x) = (T^*x, y)$ olur. Böylece;

$y = Tx - T^*x$ alınırsa;

$((Tx - T^*x, Tx - T^*x) = (Tx - T^*x, y) = 0)$ olduğu görülür.

Bu yüzden $\forall x$ için $Tx - T^*x = 0$ dır. Yani $T = T^*$ dir. Böylece T kendine eştir.

Örnek 4.3 H bir kompleks Hilbert uzay olsun ve $S, T \in B(H)$ olsun. S kendine eş ise, o zaman, T^*ST kendine eştir. Gösteriniz.

Çözüm 4.3 S kendine eş olduğundan, Önerme 3.32 ve Teorem 3.33

$$(T^*ST)^* = T^*S^*T^{**} = T^*ST$$

olduğunu gösterir. Bu nedenle, T^*ST kendine eştir.

Örnek 4.4 H bir kompleks Hilbert uzay olsun ve $S, T \in B(H)$ kendine eş olsun. ST ancak ve ancak $ST = TS$ ise kendine eştir.

Çözüm 4.4 S ve T kendine eş olduğundan, Önerme 3.32

$(ST)^* = T^*S^* = TS$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak; ancak ve ancak $ST = TS$ ise,

$ST = (ST)^*$ dır.

Önerme 4.5 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Eğer T sıfırdan farklı ve kendine eş operatör ise, T^n sıfırdan farklı ve kendine eştir. [3]

Örnek 4.6 H bir kompleks Hilbert uzay olsun ve $T \in B(H)$ terslenebilir ve kendine eş olsun.

O zaman T^{-1} kendine eştir.

Çözüm 4.6 Önerme 3.28 den T^* terslenebilirdir ve $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ dır. Ancak; T kendine eş operatör olduğundan $T^* = T$ dir ve bu nedenle; $T^{-1} = (T^{-1})^*$ bulunur. Sonuç olarak; T^{-1} kendine eştir.

Önerme 4.7 H bir kompleks Hilbert uzay olsun ve $T \in B(H)$ olsun.

(a) T^*T ve TT^* kendine eştir.

(b) R ve S kendine eş olmak üzere, $T = R + iS$ dir. R ve S operatörlerine T operatörünün reel ve imajiner kısmı adı verilir ve $\operatorname{Re}T = R$, $\operatorname{Im}T = S$ ile gösterilir. [1]

Örnek 4.8 H bir Hilbert uzay olsun. S ve T kendine eş operatörler olmak üzere, ST ancak ve ancak S nin görüntü kümesi T nin görüntü kümesine ortogonal ise, $ST = 0$ dir. [3]

Çözüm 4.8 S nin görüntü kümesi $R(S)$ ve T nin görüntü kümesi $R(T)$ olsun. Eğer $ST = 0$ ise, bu durumda $\forall x, y \in H$ için

$$(Sx, Ty) = (x, S^*Ty) = (x, STy) = 0$$

olur. Bu ise, $R(S)$ ve $R(T)$ nin ortogonal olduklarını gösterir.

Diğer taraftan; eğer $\forall x, y$ için $S(x) \perp T(y)$ ise,

$$0 = (Sx, Ty) = (x, S^*Ty) = (x, STy)$$

$$0 = ST$$

BÖLÜM 5

BİR OPERATÖRÜN SPEKTRUMU

Bir A kare matrisi verilsin.

$\mathcal{A} = \{\lambda \in F : A - \lambda I \text{ terslenemez}\}$ kümesi A nın özdeğerlerinin oluşturduğu kümedir. [1]

5.1 Sonlu Boyutlu Normlu Uzaylarda Spektral Teori

Teorem 5.1 Bir Operatörün Özdeğeri. Sonlu boyutlu bir X normlu uzayında X in farklı bazlarına göre $T: X \rightarrow X$ lineer operatörünü temsil eden tüm matrisler aynı öz değerlere sahiptir. [6]

İspat 5.1 X için bir bazdan diğer baza geçiş incelenmelidir. $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve

$\tilde{e} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n\}$ vektörleri X uzayı için iki baz olsun. Bazın tanımından $\forall e_j, \tilde{e}_k$ ların bir lineer birleşimidir. O halde, n satırlı tekil olmayan bir A kare matrisi için

$$\tilde{e} = eA \text{ veya } \tilde{e}^T = A^T e^T \quad (5.1)$$

şeklinde yazılabilir. İki bazın her birine göre $\forall x \in X$ için tek bir gösterim vardır.

$$x = ex_1 = \sum \xi_j e_j = \tilde{e}x_2 = \sum \tilde{\xi}_k \tilde{e}_k$$

Burada $x_1 = (\xi_i)$ ve $x_2 = (\tilde{\xi}_k)$ sütun vektörleridir. Buradan ve (5.1) den

$ex_1 = \tilde{e}x_2 = eAx_2$ dir. Böylece,

$$x_1 = Ax_2 \text{ dir.} \quad (5.2)$$

Benzer şekilde $Tx = y = ey_1 = \tilde{e}y_2$ için,

$$y_1 = Ay_2 \text{ dir.} \quad (5.3)$$

Sıklıkla T_1 ve T_2 T yi e ve $\tilde{e}$ ye göre temsil eden matrisler ise,

$y_1 = T_1x_1$ ve $y_2 = T_2x_2$ şeklinde elde edilir. Böylece (5.2) ve (5.3) ten,

$$AT_2x_2 = Ay_2 = y_1 = T_1x_1 = T_1Ax_2 \text{ bulunur.}$$

Eşitliğin her iki tarafı A^{-1} ile çarpıldığında,

$$T_2 = A^{-1}T_1A \quad (5.4)$$

dönüşüm kuralı elde edilir.

(5.1) deki bazdan elde edilen A , (5.4) ve $\det(A^{-1})\det A = 1$ eşitliği göz önüne alınarak T_1 ve T_2 nin karakteristik determinantlarının eşit olduğunu gösterilebilir.

$$\det(T_2 - \lambda I) = \det(A^{-1}T_1A - \lambda A^{-1}IA) \quad (5.5)$$

$$= \det(A^{-1}(T_1 - \lambda I)A)$$

$$= \det(A^{-1})\det(T_1 - \lambda I)\det(A)$$

$$= \det(T_1 - \lambda I)$$

Sonlu boyutlu bir X normlu uzayında X in farklı bazlarına göre, $T: X \rightarrow X$ lineer operatörünü temsil eden tüm matrisler aynı öz değerlere sahip olduğundan T_1 ve T_2 özdeğerleri eşittir.

Eğer (5.5) i sağlayan tekil olmayan bir A matrisi varsa $n \times n$ boyutlu bir T_1 matrisinin $n \times n$ boyutlu T_2 matrisine benzer olduğu söylenebilir. O halde,

- (i) Sonlu boyutlu X normlu uzayında bir lineer T operatörünü temsil eden herhangi iki matris birbirine benzerdir.
- (ii) Benzer matrisler aynı özdeğerlere sahiptir.

Varlık Teoremi 5.2 Sonlu boyutlu bir $X \neq \{0\}$ kompleks normlu uzayında tanımlı bir lineer operatörün en az bir öz değeri vardır.

5.2 Spektrum

$X \neq \{0\}$ kompleks normlu uzay ve $T: D(T) \rightarrow X$ tanım kümesi, $D(T) \subset X$ olan bir lineer operatör olsun. λ bir kompleks sayı ve $I, D(T)$ üzerinde birim operatör olmak üzere,

$$(1) T_\lambda = T - \lambda I$$

Eğer T_λ nin tersi varsa, bu tersi $R_\lambda(T)$ ile gösterilir.

(2) $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ şeklindedir. Buna T nin rezolvant operatörü ya da kısaca rezolvantı denir. $R_\lambda(T)$ yerine R_λ kullanılacaktır.

$T_\lambda x = y$ denklemini çözmek için R_λ dan yararlanılır. Böylece, R_λ mevcut ise;

$$x = T_\lambda^{-1} y = R_\lambda(T) y \text{ şeklinde elde edilir.}$$

Bir T operatörünü anlamamanın temeli R_λ nin özelliklerini araştırmaktan geçer. T_λ ve R_λ nin özellikleri λ ya bağlıdır. Spektral Teori bu özelliklerle ilgilidir. Örneğin, R_λ var ise, kompleks düzlemdeki tüm λ ların oluşturduğu küme incelenebilir. R_λ nin sınırlılığı da önemli bir özelliktir. [6]

Tanım 5.3 H bir Hilbert uzayı ve birim operatör $I \in B(H)$ olsun ve $T \in B(H)$ olsun.

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ terslenemez}\} \quad (5.6)$$

kümesine T nin spektrumu denir.

Örnek 5.4 H bir kompleks Hilbert uzayı ve H üzerindeki birim operatör I olsun. Eğer μ herhangi bir kompleks sayı ise, o zaman $\sigma(\mu I) = \{\mu\}$ dır. [1]

Çözüm 5.4 Eğer $\tau \in \mathbb{C}$ ise, o zaman $\tau = 0$ olmadıkça τI terslenebilirdir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} \sigma(\mu I) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu I - \lambda I \text{ terslenemez}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\mu - \lambda)I \text{ terslenemez}\} \\ &= \{\mu\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 5.5 $T \in B(l^2)$ operatörü $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$ ile tanımlı olsun.

- (a) 1 ve -1, T nin özdeğerleridir ve sırasıyla $(1,0,0,0,\dots)$ ve $(0,1,0,0,\dots)$ özvektörlerine sahiptir.
- (b) T^2 yi bulunuz.
- (c) $\sigma(T) = \{1, -1\}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 5.5

(a) $A(1,0,0,0,\dots) \in l^2$ ve $(0,1,0,0,\dots) \in l^2$ dir ve

$T(1,0,0,0,\dots) = (1,0,0,0,\dots) = 1 \cdot (1,0,0,0,\dots)$ dir. Bu nedenle; 1, T nin $(1,0,0,0,\dots)$ özvektörlü bir özdeğeridir. Ayrıca;

$T(0,1,0,0,\dots) = (0,-1,0,0,\dots) = (-1) \cdot (0,1,0,0,\dots)$ dir. Bu nedenle; -1, T nin $(0,1,0,0,\dots)$ özvektörlü bir özdeğeridir.

(b) $T^2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = T(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots) = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ olduğundan $T^2 = I$ dir.

(c) (b) den $\sigma(T^2) = \{1\}$ dir ve bu nedenle;

$$\sigma(T^2) = (\sigma(T))^2$$

olduğundan,

$$\sigma(T) \subseteq \{1, -1\}$$

olur. Ancak (a) dan 1 ve -1, T' nin özdeğerleridir bu nedenle,

$$\{1, -1\} \subseteq \sigma(T)$$

dir. Sonuç olarak; $\sigma(T) = \{1, -1\}$ bulunur.

Örnek 5.6 $T: l^2 \rightarrow l^2$ lineer operatörü $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, \dots)$ ile tanımlı olsun. $T \neq 0$, $\sigma(T) = 0$ ve $T \in B(l^2)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 5.6 T lineer bir dönüşümdür ve

$$\|T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)\|^2 = \|(0, x_1, 0, x_3, 0, \dots)\|^2 \leq \|(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)\|^2$$

olduğundan T sınırlıdır. Ayrıca; tanımdan T sıfırdan farklıdır ancak,

$$T^2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = T(0, x_1, 0, x_3, 0, \dots) = (0, 0, 0, 0, \dots)$$

dir. O halde; $T^2 = 0$ dir ve bu nedenle eğer $\lambda \in \sigma(T)$ ise, o zaman $\lambda^2 \in \sigma(T^2) = \{0\}$ bulunur. Diğer taraftan,

$$T(0,1,0,0, \dots) = (0,0,0,0, \dots) = 0 \cdot (0,1,0,0, \dots)$$

dir ve bu nedenle; 0, T için bir özdeğerdir ve buradan $0 \in \sigma(T)$ bulunur. Sonuç olarak; $\sigma(T) = \{0\}$ dir.

Sonuç 5.7 Bir operatör özdeğerlere sahip ise, o zaman bu özdeğerler bu spektrumun içindedir. [3]

Önerme 5.8 H bir kompleks Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Eğer λ , T nin bir özdeğeri ise, o zaman $\lambda \in \sigma(T)$ dir.

İspat 5.8 $Tx = \lambda x$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x \in H$ vektörü var olduğundan

$$(T - \lambda I)x = 0 \quad (5.7)$$

dir ve böylece $x \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ dir ve bu nedenle; önerme 3.14 ten $T - \lambda I$ dönüşümü terslenemezdir.

Eğer H bir sonlu boyutlu kompleks Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ ise, o zaman T nin spektrumu sadece T nin özdeğerlerinden oluşur. Aynı şeyin sonsuz boyutlu durumda da doğru olduğu düşünülebilir. Ancak, sonsuz boyutlu uzaylarda hiçbir özdeğere sahip olmayan operatörler de vardır.

Tanım 5.9 $S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ ile tanımlı $S: l^2 \rightarrow l^2$ izometrisine birim öteleme adı verilir.

Örnek 5.10 Tanım 5.9 ile verilen $S \in B(l^2)$ operatörü hiçbir özdeğere sahip değildir.

Çözüm 5.10 λ , S nin bir özdeğeri olsun ve bu özdeğere karşılık gelen sıfırdan farklı özvektör $x = \{x_n\}$ olsun (yani $Sx = \lambda x$ olsun). O zaman;

$$(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$$

dir. Eğer; $\lambda = 0$ ise o zaman, bu eşitliğin sağ tarafı sıfır vektörüdür ve bu nedenle;

$0 = x_1 = x_2 = x_3 = \dots = 0$ elde edilir ki; bu $x \neq 0$ olmasıyla çelişir. Eğer $\lambda \neq 0$ ise, o zaman $\lambda x_1 = 0$ olduğundan $x_1 = 0$ bulunur. Bu nedenle; $\lambda x_2 = x_1 = 0$ olduğundan $x_2 = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam ederek yine $0 = x_1 = x_2 = x_3 = \dots = 0$ elde edilir ki bu $x \neq 0$ olmasıyla çelişir.

Sonuç olarak; S operatörü hiçbir özdeğere sahip değildir.

Teorem 5.11 X bir Banach uzayı olsun. Bir $T \in B(X)$ operatörü $\|T\| < 1$ koşulunu sağlarsa o zaman;

(a) $I - T$ terslenebilirdir ve tersi

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \quad (5.8)$$

ile verilir.

$$(b) \| (I - T)^{-1} \| \leq \frac{1}{\|I - T\|} \quad (5.9)$$

eşitsizliği sağlanır. [3]

Teorem 5.12 H bir kompleks Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun.

(a) Eğer $|\lambda| > \|T\|$ ise; o zaman, $\lambda \notin \sigma(T)$ dir.

(b) $\sigma(T)$ kapalı bir kümedir. [1]

İspat 5.12

(a) Eğer $|\lambda| > \|T\|$ ise; o zaman, $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ dir. Ve

Teorem 5.11 den, $I - \lambda^{-1}T$ terslenebilirdir. Buradan; $\lambda \notin \sigma(T)$ elde edilir.

$$(b) F(\lambda) = \lambda I - T$$

ile tanımlı $F: \mathbb{C} \rightarrow B(H)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. O zaman;

$$\|F(\mu) - F(\lambda)\| = \|\mu I - T - (\lambda I - T)\| = |\mu - \lambda| \quad (5.10)$$

oldüğundan F sürekli. Bu nedenle;

X bir Banach uzayı ve G, B(X) in terslenebilir elemanlarının tamamının oluşturduğu küme iken,

G açıktır ve $\theta(S) = S^{-1}$ ile tanımlı $\theta: G \rightarrow G$ fonksiyonu süreklidir.

Bu nedenle, terslenemez elemanların C kümesi kapalıdır ve

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : F(\lambda) \in C\} \quad (5.11)$$

olduğundan $\sigma(T)$ kapalıdır.

Uyarı 5.13 Teorem 5.12 den bir T operatörünün spektrumu, $\mathbb{C}$ nin kapalı ve sınırlı (bu nedenle kompakt) altkümesidir ve merkezi orijinde olan $\|T\|$ yarıçaplı bir çember içindedir.

Önerme 5.14 H Hilbert uzayında $T \in B(H)$ terslenebilir ise, o zaman T^* terslenebilirdir ve $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ dir.

Önerme 5.15 H bir kompleks Hilbert uzay ve $T \in B(H)$ ise, o zaman;

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\} \text{ dir. [3]}$$

İspat 5.15 Eğer $\lambda \notin \sigma(T)$ ise, o zaman; $T - \lambda I$ terslenebilirdir ve bu nedenle;

5.14 eşitliğinden $(T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I$ terslenebilirdir. Böylece; $\bar{\lambda} \notin \sigma(T^*)$ dir. T yerine T^* alındığında benzer olarak eğer, $\bar{\lambda} \notin \sigma(T^*)$ ise, $\lambda \notin \sigma(T)$ elde edilir. Sonuç olarak; Tanım 5.3 elde edilir.

Hiçbir özdeğere sahip olmayan Örnek 5.10 içindeki birim öteleme operatörünün spektrumu aşağıdaki şekilde bulunur:

Örnek 5.16 $S: l^2 \rightarrow l^2$ operatörü

$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ şeklinde tanımlı birim öteleme operatörü olsun.

(a) $|\lambda| < 1$ olmak üzere $\lambda \in \mathbb{C}$ ise, o zaman; λ, S^* nin bir özdeğeridir.

(b) $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ [1]

Çözüm 5.16

(a) $|\lambda| < 1$ olmak üzere $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. $S^*({x_n}) = \lambda{x_n}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir ${x_n} \in l^2$ vektörünü bulmalıyız. $S \in B(l^2)$ birim öteleme operatörünün eşleniği $S^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$ olmak üzere S^*

$S^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ şeklindedir.

$$(x_2, x_3, x_4, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$$

olacak şekilde yani, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = \lambda x_n$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir ${x_n} \in l^2$ vektörü bulunmalıdır. Bu denklemler kümesinin bir çözümü sıfırdan farklı olan ${x_n} = \{\lambda^{n-1}\}$ dir. Ayrıca, $|\lambda| < 1$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{2n} < \infty \quad (5.12)$$

dır ve bu nedenle ${x_n} \in l^2$ dir. Böylece $S^*({x_n}) = \lambda{x_n}$ bulunur ve sonuç olarak λ , S^* nin bir özdeğeridir ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör ${x_n}$ dir.

(b) (a) dan ve H Hilbert uzayında $\lambda, T \in B(H)$ nin bir özdeğeri ise $\lambda \in \sigma(T)$ olduğundan $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S^*)$ olur. Bu nedenle,

$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$ dan, $\{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S)$ bulunur. Ayrıca,

$\{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle;

$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S)$ elde edilir. $\sigma(S)$ kapalı olduğundan

$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subseteq \sigma(S)$ bulunur. Diğer yandan, eğer $|\lambda| > 1$ ise, o zaman eğer, $|\lambda| > \|T\|$ ise, o zaman, $\lambda \notin \sigma(T)$ olduğundan ($\|S\| = 1$) $\lambda \notin \sigma(S)$ dir.

Sonuç olarak,

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \quad (5.13)$$

elde edilir.

Eğer, bir T operatörünün spektrumu biliniyorsa, o zaman T nin kuvvetlerinin ve (T terslenebilir ise) T nin tersinin spektrumunu bulmak mümkündür.

Tanım 5.17 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun.

- (i) $r_\sigma(T) = \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(T)\}$ 'ye T nin spektral yarıçapı adı verilir.
- (ii) $V(T) = \{(Tx, x): x \in H, \|x\| = 1\}$ 'ye T nin nümerik (veya sayısal) görüntüsü adı verilir. [1]

Aşağıdaki önermede normal operatörler için spektrum ve nümerik görüntü arasındaki ilişki verilmiştir.

Önerme 5.18 H bir kompleks Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ normal operatör olsun. O zaman $\sigma(T)$, $V(T)$ nin kapanışının bir alt kümesidir.

İspat 5.18 $\lambda \in \sigma(T)$ olsun. $T - \lambda I$ normal operatördür bu nedenle H Hilbert uzayında $T \in B(H)$ normal operatör olmak üzere,

(a) T terslenebilirdir,

(b) $\forall x \in H$ için $\|T(x)\| \geq \alpha \|x\|$ olacak şekilde $\alpha > 0$ vardır.

önergeleri denktir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - \lambda I)x_n\| = 0$ olacak şekilde H içinde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. Böylece, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - \lambda I)x_n, x_n\| = 0 \quad (5.14)$$

ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n, x_n) - \lambda(x_n, x_n)\| = 0 \quad (5.15)$$

elde edilir. Fakat $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, x_n) = 1$ dir, buradan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n, x_n\| = \lambda \quad (5.16)$$

bulunur. Sonuç olarak; $\lambda, V(T)$ nin kapanışı içindedir. Kendine eş operatörlerin spektrumu hakkında bilgi edinmek için bu önerme kullanılabilir.

Teorem 5.19 H bir kompleks Hilbert uzayı ve $S \in B(H)$ kendine eş olsun. O zaman;

- (a) $V(S) \subseteq \mathbb{R}$,
- (b) $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$,
- (c) $\|S\|$ veya $-\|S\|$ nin en az biri $\sigma(S)$ içindedir,
- (d) $r_\sigma(S) = \sup\{|\tau|: \tau \in V(S)\} = \|S\|$,

İspat 5.19

(a) S Kendine eş olduğundan, $\forall x \in H$ için $(Sx, x) = (x, Sx) = \overline{(Sx, x)}$ bulunur.

Bu nedenle; $\forall x \in H$ için $(Sx, x) \in \mathbb{R}$ dir ve böylece; $V(S) \subseteq \mathbb{R}$ elde edilir.

(b) Önerme 5.18 den $\sigma(S), V(S)$ nin kapanışının içindedir ve bu nedenle (a) dan $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$ elde edilir.

(c) $S = 0$ ise, $\|S\| = \|0\| = 0$ dir ve $\sigma(S)$ içindedir. Bu nedenle $S \neq 0$ olduğu kabul edilebilir. Eğer gerekli ise, $\frac{S}{\|S\|}$ ile çalışılarak $\|S\| = 1$ olduğu kabul edilebilir. S nin normundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sx_n\| = 1 \quad (5.17)$$

olacak şekilde H içinde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. Böylece;

$$\begin{aligned} \|(I - S^2)x_n\|^2 &= ((I - S^2)x_n, (I - S^2)x_n) \\ &= \|x_n\|^2 + \|S^2x_n\|^2 - 2(S^2x_n, x_n) \\ &\leq 2 - 2(Sx_n, Sx_n) \\ &= 2 - 2\|Sx_n\|^2 \end{aligned}$$

ve buradan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - S^2)x_n\|^2 = 0 \quad (5.18)$$

elde edilir, bu nedenle; ya 1 ya da -1, $\sigma(S)$ içindedir.

(d) (c), Önerme 5.18 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$\|S\| \leq r_\sigma(S) \leq \sup\{|\tau| : \tau \in V(S)\} \leq \|S\| \quad (5.19)$$

bulunur. Bu istenileni ispatlar.

Sonuç 5.20 H bir kompleks Hilbert uzayı ve $S \in B(H)$ kendine eş olsun. O zaman;

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} |(Sx, x)| \quad (5.20)$$

dir. [3]

Uyarı 5.21 H bir kompleks Hilbert uzay ve $S \in B(H)$ kendine eş ise o zaman Teorem 5.19 dan,

$$(a) \sigma(S) \subseteq [0, \infty)$$

$$(b) \forall x \in H \text{ için } (Sx, x) \geq 0$$

koşulları denktir.

Tanım 5.22 $X \neq \{0\}$ kompleks normlu uzay ve $T: D(T) \rightarrow X$ tanım kümesi $D(T) \subset X$ olan bir lineer operatör olsun. T nin λ regüler değeri verilen özellikleri sağlayan bir kompleks sayıdır:

(N1) $R_\lambda(T)$ vardır,

(N2) $R_\lambda(T)$ sınırlıdır,

(N3) $R_\lambda(T)$ X içinde yoğun bir küme üzerinde tanımlıdır. [6]

T nin rezolvant kümesi $\rho(T)$, T nin $\forall$ regüler λ değerlerinin kümesidir.

$\sigma(T) = C - \rho(T)$ şeklindeki C kompleks uzayındaki tümleyenine T nin spektrumu ve bir $\lambda \in \sigma(T)$ sayısına T nin spektral değeri denir. $\sigma(T)$ spektrumu üç farklı şekilde incelenir.

5.2.1 Operatörün Nokta Spektrumu

Nokta spektrumu veya **ayrık spektrum** $\sigma_p(T)$, $R_\lambda(T)$ nin var olmadığı kümedir, yani; $\sigma_p(A)$ nokta spektrumu A operatörünün özdeğerlerinin kümesidir. $Ax = \lambda x$ olacak şekilde $x \in X \setminus \{0\}$ varsa, $\lambda \in \sigma_p$ dir. $\lambda \in \sigma_p(T)$ bir özdeğer ve x , λ özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

$\text{Ker}(A - \lambda I) \neq 0$ olması durumuna denktir. $\text{Ker}(A - \lambda I)$ nın boyutu λ özdeğerinin katlılığıdır.

$\text{Ker}(A - \lambda I) = 0$ olsun. Bu; $A - \lambda I: X \rightarrow X$ nin X ile $\text{Im}(A - \lambda I)$ arasında birebir bir ilişki olduğunu gösterir.

Teorem 3.22 den eğer $\text{Im}(A - \lambda I) = X$ ise, $(A - \lambda I)^{-1}$ olacak şekilde sınırlı bir tersi vardır. Çünkü λ lar regülerdir.

Böylece, $\sigma(A)$ sınıflandırmasında eğer $\lambda \notin \sigma_p(A)$ ise, ancak; $\lambda \in \sigma(A)$ iken,

$\text{Im}(A - \lambda I) \neq X$ dır. [2]

5.2.2 Operatörün Sürekli Spektrumu

Sürekli Spektrum $\sigma_c(T)$, $R_\lambda(T)$ nin var olduğu ve (N3) koşulunu sağlayan ancak (N2) koşulunu sağlamayan yani; $R_\lambda(T)$ nin sınırlı olmadığı bir kümedir. [6] Başka deyişle,

$\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ ve $\text{Im}(A - \lambda I)$, X içinde yoğundur. [2]

5.2.3 Operatörün Rezidü Spektrumu

Rezidü spektrumu $\sigma_r(T)$, $R_\lambda(T)$ nin var olduğu (sınırlı olsun ya da olmasın) ancak (N3) koşulunu sağlamayan yani, $R_\lambda(T)$ nin tanım kümesinin X içinde yoğun olmadığı bir kümedir. [6] Başka deyişle, Bir operatörün rezidü spektrumu

$\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A))$ kümesidir. Böylece, $\lambda \in \sigma_r(A)$ için $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq X$ ve $\text{Ker}(A - \lambda I) = 0$ dır. [2]

Sağlanan Koşullar	Sağlanmayan Koşullar	λ nın Ait Olduğu Küme
(N1), (N2), (N3)		$\rho(T)$
(N1) (N3)	(N1) (N2)	$\sigma_p(T)$
(N1)	(N3)	$\sigma_c(T)$
		$\sigma_r(T)$

Tablodaki dört küme ayrıktır ve birleşimleri kompleks uzayı oluşturur:

$$C = \rho(T) \cup \sigma(T) = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \quad (5.21)$$

Eğer $R_\lambda(T)$ rezolvant kümesi varsa bu küme lineerdir.

$R_\lambda(T) = R(T_\lambda) \rightarrow D(T_\lambda)$ vardır; o halde $T_\lambda x = 0$ eşitliği ancak ve ancak $x = 0$ iken sağlanır. Yani T_λ nın boş uzayı $\{0\}$ dır, burada; $R(T_\lambda)$ T_λ nın görüntü kümesini gösterir.

Burada; bazı $x \neq 0$ değerleri için $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0$ ise, $\lambda \in \sigma_p(T)$ dir, tanımdan λ , T nin bir özdeğeridir. x vektörü de T nin λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. T nin λ özdeğerine karşılık gelen her özvektörünü ve 0 'ı kapsayan $D(T)$ alt uzayına λ özdeğerine karşılık gelen T nin özuzayı denir.

Sonlu boyutlu bir uzay üzerinde bir lineer operatörün spektrumu nokta spektrumudur, çünkü sürekli ve rezidü spektrumların hepsi boş küme olduğundan her spektral değer bir özdeğerdir.[6]

Örnek 5.23 (Özdeğeri olmayan spektral değerli bir operatör)

$X = l^2$ Hilbert uzayında $T: l^2 \rightarrow l^2$ lineer operatörü $x = (\xi_i) \in l^2$ iken

$$(\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow (0, \xi_1, \xi_2, \dots) \quad (5.22)$$

şeklinde tanımlansın. T operatörü sağ birim öteleme operatörüdür.

$\|T\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 = \|x\|^2$ olduğundan T sınırlıdır (ve $\|T\| = 1$)

$R_0(T) = T^{-1}: T(X) \rightarrow X$ operatörü vardır. Sola birim öteleme operatörü

$(\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow (\xi_2, \xi_3, \dots)$ şeklinde verilir.

Ama $R_0(T)$, $(N3)$ koşulunu sağlamadığından (5.22), $T(X)$ in X içinde yoğun olmadığını gösterir, bu nedenle; $T(X)$, Y nin $\eta_1 = 0$ olan tüm $y = (\eta_j)$ değerlerini kapsayan bir alt uzayıdır. Böylece, tanımdan, $\lambda = 0$, T nin bir spektral değeridir. Ayrıca $\lambda = 0$ bir özdeğer değildir.

(5.22) den $Tx = 0$ eşitliği $x = 0$ olduğunu gösterdiğinden ve sıfır vektörü bir özvektör olmadığından bu durum kolaylıkla görülür.

Eğer $T: X \rightarrow X$ sınırlı ve lineerse ve X tam bir uzaysa ve bazı λ lar için $R_\lambda(T)$ rezolvantı mevcutsa ve tüm X uzayında tanımlı ise, her λ için rezolvant da sınırlıdır.

Lemma 5.24 (R_λ nın tanım kümesi) X , bir kompleks Banach uzayı olsun. $T: X \rightarrow X$ bir lineer operatördür ve $\lambda \in \rho(T)$.

(a) T kapalı olsun.

(b) T sınırlı olsun.

O halde, $R_\lambda(T)$ tüm X uzayı üzerinde tanımlı ve sınırlıdır.

5.3 Sınırlı Lineer Operatörlerin Spektral Özellikleri

Bir operatörün spektrumunun genel özellikleri operatörün tanımlı olduğu uzaya bağlı olarak değişmektedir. Bu durum ortak spektral özelliklere sahip olan operatörlerin geniş sınıflarının birbirinden ayrı şekilde araştırılmasını gerektirir.

Bu bölümde X kompleks Banach uzayında tanımlı sınırlı lineer T operatörleri incelenmektedir. X bir tam uzay iken $T \in B(X, X)$ operatörleri ele alınmıştır. [6]

Teorem 5.25 X bir Banach uzayı iken, $T \in B(X, X)$ olsun. Eğer $\|T\| < 1$ ise, X uzayında sınırlı bir lineer $(I - T)^{-1}$ operatörü vardır ve

$$(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \dots \quad \text{dir.} \quad (5.23)$$

İspat 5.25 $\|T^j\| \leq \|T\|^j$ olduğundan ve $\sum \|T\|^j$ serisi $\|T\| < 1$ için yakınsadığından, (5.23) ile verilen seri $\|T\| < 1$ için mutlak yakınsaktır. X tam olduğundan, $B(X, X)$ de tamdır. Bu nedenle mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gösterir.

(5.23) teki seri toplamı S ile ifade edilirse, $S = (I - T)^{-1}$ olduğu gösterilmelidir. Bu amaçla,

$$\begin{aligned} & (I - T)(I + T + \dots + T^n) \\ &= (I + T + \dots + T^n)(I - T) \\ &= I - T^{n+1} \end{aligned} \quad (5.24)$$

elde edilir.

$n \rightarrow \infty$ iken, $\|T\| < 1$ olduğundan, $T^{n+1} \rightarrow 0$ dir. Böylece,

$$(I - T)S = S(I - T) = I \quad (5.25)$$

elde edilir.

Buradan, $S = (I - T)^{-1}$ olduğu görülür.

Bu teoremin ilk uygulaması olarak bir sınırlı lineer operatörün spektrumunun kompleks düzlemde kapalı bir küme olduğu ispatlansın.

Teorem 5.26 Bir X kompleks Banach uzayında T sınırlı operatörünün $\rho(T)$ resolvent kümesi açıktır; bu nedenle $\sigma(T)$ spektrumu kapalıdır.

İspat 5.26 Eğer $\rho(T) = \emptyset$ ise bu küme açıktır. $\rho(T) \neq \emptyset$ olsun. Sabit bir $\lambda_0 \in \rho(T)$ sayısı ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$T - \lambda I = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I = (T - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}]$$

elde edilir.

[...] içindeki operatör V ile gösterilirse,

$$V = I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0} \text{ iken, } T_\lambda = T_{\lambda_0} V \quad (5.26)$$

formunda yazılabilir.

$\lambda_0 \in \rho(T)$ ve T sınırlı olduğundan, X bir Banach uzayı, $T: X \rightarrow X$ bir lineer operatör ve $\lambda_0 \in \rho(T)$ iken, $R_{\lambda_0}(T)$ tüm X uzayı üzerinde tanımlı ve sınırlıdır. Yani,

$R_{\lambda_0} = T_{\lambda_0}^{-1} \in B(X, X)$ olduğunu gösterir. Ayrıca, Teorem 5.25 ten V nin $B(X, X)$ içinde $\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}\| < 1$ olacak şekilde $\forall \lambda$ için,

$$V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}]^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j \quad (5.27)$$

yani,

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} \quad (5.28)$$

olacak şekilde bir tersi vardır.

$T_{\lambda_0}^{-1} = R_{\lambda_0} \in B(X, X)$ eşitliğinden ve (5.26) dan, (5.27) yi sağlayan $\forall \lambda$ için, T_λ operatörünün

$$R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T_{\lambda_0} V)^{-1} = V^{-1} R_{\lambda_0} \quad (5.29)$$

şeklinde bir tersi vardır.

Burada, (5.27) T nin regüler λ değerlerini içeren bir λ_0 komşuluğunu gösterir.

$\lambda_0 \in \rho(T)$ keyfi olduğundan, λ_0 açıktır, böylece tümleyeni olan $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ kapalıdır.

Teorem 5.27 Teorem 5.26 daki X ve T ve $\forall \lambda_0 \in \rho(T)$ için R_λ resolvanı

$$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1} \quad (5.30)$$

gösterimine sahiptir.

Seri, kompleks düzlemde (5.28) ile verilen

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

açık diski içindeki $\forall \lambda$ için kesinlikle yakınsaktır. Bu disk $\rho(T)$ nin bir altkümesidir.

Bu teorem kompleks analizi spektral teoriye uygulamanın bir yolunu sağlayacaktır.

Teorem 5.28 Bir X kompleks Banach uzayında $T: X \rightarrow X$ sınırlı lineer operatörünün spektrumu kompakttır ve

$$|\lambda| \leq \|T\| \text{ ile verilen yuvar içindedir.} \quad (5.31)$$

Bu nedenle; T nin rezolvan kümesi $\rho(T)$ boş değildir.

İspat 5.28 $\lambda \neq 0$, $\kappa = 1/\lambda$ olsun. Teorem 5.26 dan;

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} (I - \kappa T)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} (\kappa T)^j = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T\right)^j \quad (5.32)$$

elde edilir.

$$\left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1 \text{ olacak şekilde } \forall \lambda \text{ için diziler yakınsar, böylece; } |\lambda| > \|T\|.$$

Bu teorem ile bu koşullar altındaki $\forall \lambda$ nın $\rho(T)$ içinde olduğu görülür.

Burada $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ spektrumu (5.31) diski içinde yer almalıdır, böylece; Teorem 5.26 dan $\sigma(T)$ kompakttır.

Teoremden kompleks Banach uzayı üzerinde tanımlı sınırlı bir T lineer operatörünün spektrumunun sınırlı olduğu görülür.

Tanım 5.29 Spectral Yarıçap. X kompleks Banach uzayında tanımlı bir $T \in B(X, X)$ operatörünün spektral yarıçapı $r_\sigma(T)$,

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

ile verilen, merkezi λ düzleminin orijininde olan ve $\sigma(T)$ yi kapsayan en küçük kapalı yuvarın yarıçapıdır.

(5.31) den kompleks Banach uzayı üzerindeki sınırlı bir lineer T operatörünün spektral bir yarıçapı için,

$$r_\sigma(T) \leq \|T\| \quad (5.33)$$

elde edilir.

Ayrıca,

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \quad (5.34)$$

şeklindedir.

KENDİNE EŞ OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ANALİZİ

Özellik 6.1 Bir kendine eş A operatörünün σ_p nokta spektrumu $\sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$ koşulunu sağlar.

İspat 6.1 $\lambda \in \sigma_p$ ve $Ax = \lambda x$ olsun. ($x \neq 0$). O halde,

$\lambda \|x\|^2 = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2$ dir. Bu da, $\lambda = \bar{\lambda}$ olduğunu gösterir.

Özellik 6.2 Eğer, λ_1 ve $\lambda_2 \in \sigma_p$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ ise o halde $x_1 \perp x_2$ dir.

İspat 6.2 $\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Ax_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Ax_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle x_1, x_2 \rangle$ olduğunu ve λ_i lerin ayrık reel sayılar olduğu ele alınsın, o halde, $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ dir.

H nin bir L alt uzayı A operatörüne göre ancak ve ancak $A(L) \subseteq L$ ise, invaryanttır denir.

Özellik 6.3 Eğer L , bir A simetrik operatörüne göre invaryant ise, $L^\perp$ de invaryanttır.

İspat 6.3 $y \in L^\perp$, $x \in L$ yi düşünelim. O halde, $Ax \in L$ ve $\langle Ax, y \rangle = 0$ elde edilir. Bu nedenle, $\forall x \in L$ için $\langle x, Ay \rangle = 0$ dir. Bu ise, $Ay \in L^\perp$ olduğunu gösterir.

Özellik 6.4 Eğer A ve B simetrik operatörler ve $AB = BA$ ise, AB de simetriktir.

Özellik 6.5 $C = \sup_{x \neq 0} | \langle Ax, x \rangle | / \|x\|^2$ olarak tanımlansın. A simetrik bir operatör ise, $C = \|A\|$ dir.

İspat 6.5 Cauchy Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$| \langle Ax, x \rangle | \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 ; \quad (6.1)$$

Buradan, $\forall x \neq 0$ için, $| \langle Ax, x \rangle | / \|x\|^2 \leq \|A\|$ ve sıklıkla $C \leq \|A\|$ dir.

Yeter koşulu göstermek için öncelikle,

$$\langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle = 2(\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle) \quad (6.2)$$

dir.

Üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$2| \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle | \leq | \langle A(x+y), x+y \rangle | + | \langle A(x-y), x-y \rangle | \quad (6.3)$$

elde edilir.

C nin tanımından ve Paralelkenar Kuralından,

$$| \langle Ax, y \rangle + \langle y, Ax \rangle | \leq \frac{1}{2} C (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = C (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

$x, \|x\| = 1$ olmak üzere bir vektör ve $y = Ax/\|Ax\|$ olsun. ($Ax \neq 0$). O halde, $\|y\| = 1$ dir ve $\|x\| = 1$ iken $\forall x \in H$ için,

$$\left| \frac{\langle Ax, Ax \rangle}{\|Ax\|} + \frac{\langle Ax, Ax \rangle}{\|Ax\|} \right| \leq 2C \Rightarrow \|Ax\| \leq C \quad (6.4)$$

Yani, $\|A\| \leq C$ dir.

Özellik 6.6 A operatörü, ancak ve ancak $\forall x \in H$ için, $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ ise simetriktir.

İspat 6.6 Yeter koşul aşıkardır. Gerek koşul için kuadratik formların bir bilineer formu ifade edilsin.

$$\begin{aligned} 4\langle Ax, y \rangle &= \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle + i\langle A(x+iy), x+iy \rangle \\ &\quad - i\langle A(x-iy), x-iy \rangle \end{aligned}$$

x ve y nin pozisyonları değiştirilerek ve kompleks eşlenik alınarak eşitliğin sağ tarafı değişmez. (Burada $\forall z \in H$ için $\langle Az, z \rangle$ reeldir.) Ancak eşitliğin sol tarafı

$4\langle x, Ay \rangle$ olur, bu da $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ olduğunu gösterir.

Özellik 6.7 A bir simetrik operatör ve $\|A\| = \mu = \sup \{ |\langle Ax, x \rangle| : \|x\| = 1 \}$ olsun. O halde, μ veya $-\mu$, $\sigma(A)$ nın bir elemanıdır. [2]

İspat 6.7 $\|x_n\| = 1$ olacak şekilde x_n alalım. $|\langle Ax_n, x_n \rangle| \rightarrow \mu$ olsun. (Özellik 6.5 ten bu mümkündür.) $\langle Ax_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$ olsun. $\lambda = \pm \mu$ dur.

$$0 \leq \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2\lambda \langle Ax_n, x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Ax_n, x_n \rangle$$

$n \rightarrow \infty$ iken sifıra yakınsar. O halde, $\lambda \in \sigma(A)$ dır.

Örnek 6.8 H bir Hilbert uzay ve $S \in B(H)$ kendine eş olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için S^n kendine eştir.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|S^n\| = \|S\|^n$ dir. [3]

Çözüm 6.8

(a) S kendine eş olduğundan $(S^n)^* = (S^*)^n = S^n$ olur. Bu nedenle S^n kendine eştir.

(b) (a) dan ve Teorem 5.19 dan,

$$\begin{aligned} \|S^n\| &= \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(S^n)\} \\ &= \sup\{|\lambda^n| : \lambda \in \sigma(S)\} \\ &= (\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(S)\})^n \\ &= \|S\|^n \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 6.9 H bir kompleks Hilbert uzayı ve $S \in B(H)$ kendine eş olsun. Eğer

$\sigma(S) = \{\lambda\}$ ise, yani $\sigma(S)$ yalnızca bir tane λ noktasından meydana gelirse o zaman

$S = \lambda I$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 6.9 $S - \lambda I$ kendine eşitir ve bu nedenle $\sigma(S - \lambda I) = 0$ olur. Teorem 5.19 dan,

$\|S - \lambda I\| = r_\sigma(S - \lambda I) = 0$ bulunur. O halde $S - \lambda I = 0$ dır ve sonuç olarak $S = \lambda I$ elde edilir.

Örnek 6.10 H bir Hilbert uzayı ve $A, L(H)$ de olsun. $H^{(2)} = H \oplus H$ üzerinde B operatörü

$B = \begin{pmatrix} 0 & iA \\ -iA^* & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlansın. B operatörünün kendine eş olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 6.10 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$ olmak üzere, $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ için,

$$\begin{aligned} \langle Bx, y \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & iA \\ -iA^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle iAx_2, y_1 \rangle + \langle -iA^*x_1, y_2 \rangle \\ &= \langle x_2, -iA^*y_1 \rangle + \langle x_1, iAy_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & iA \\ -iA^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle x, By \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca,

$\|Bx\|^2 = \|iAx_2\|^2 + \|-iA^*x_1\|^2 \leq (\max\{\|A\|, \|A^*\|\})^2 \|x\|^2 = \|A\|^2 + \|x\|^2$ ve buradan, $\|B\| \leq \|A\|$. Şimdi, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ alınsın ve

$$\|B\tilde{x}\| = \|Ax_2\| \leq \|B\| \|\tilde{x}\| = \|B\| \|x_2\|$$

dir. Böylece; $\|A\| \leq \|B\|$. Sonuçta; $\|A\| = \|B\|$ elde edilir.

Örnek 6.11 $K: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$ şeklinde tanımlı K operatörü, $0 \leq t, s \leq 1$ için,

$k(t, s) = \min\{t, s\}$ iken,

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s) ds$$

şeklinde verilsin.

- (a) K'nın kendine eş operatör olduğunu ispatlayınız.
- (b) K'nın spektrumunu bulunuz.
- (c) $\|K\|$ yı bulunuz.
- (d) K'nın pozitif olduğunu ispatlayınız ve özdeğerlerinin toplamını bulunuz. [2]

Çözüm 6.11 $k(t, s) = \overline{k(s, t)}$ ve $k(t, s)$ bir sürekli fonksiyon olduğundan, K operatörü kendine eş ve kompakttır. Bundan dolayı, K'nın spektrumu sıfır ve reel özdeğerlerini içerir. $\lambda y = Ky$ olduğunu varsayalım. Bu ise,

$$\lambda y(t) = \int_0^t s y(s) ds + t \int_t^1 y(s) ds \quad (6.5)$$

demektir.

İki kere türev alınırsa,

$$\lambda y'(t) = ty(t) + \int_t^1 y(s) ds - ty(t) = \int_t^1 y(s) ds, \quad (6.6)$$

$$\lambda y''(t) = -y(t).$$

elde edilir.

Açıkça, $\lambda \neq 0$ dır; aksi halde, $y = 0$, böylece; $\ker K = 0$. $y'(1) = y(0) = 0$ sınır koşullarıyla, $\lambda y'' + y = 0$ diferensiyel denklemi elde edilir, çünkü (6.11.1), $y(0) = 0$ ve (6.11.2), $y'(1) = 0$ olduğunu gösterir. K operatörünün pozitif olduğu anlamına gelen $\lambda > 0$ koşulu ispatlansın. Diferensiyel denklem $\bar{y}$ ile çarpılıp denklemin 0 dan 1 e kadar integrali alınırsa,

$$\lambda \int_0^1 y''(t) \bar{y}(t) dt + \|y\|^2 = 0 \quad (6.7)$$

elde edilir. Kısmi integrasyonla,

$$\lambda (y' \bar{y}|_0^1 - \int_0^1 |y'|^2 dt) + \|y\|^2 = 0 \quad (6.8)$$

elde edilir. Sınır koşulları,

$$-\lambda \int_0^1 |y'|^2 dt + \|y\|^2 = 0 \quad (6.9)$$

denklemini verir ve bundan dolayı, $\lambda > 0$ dır.

Diferansiyel denklemin çözümü;

$$y = C_1 \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} t + C_2 \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda}} t \quad \text{şeklindedir.} \quad (6.10)$$

Sınır koşullarından, $C_1 = 0$, $C_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$ bulunur. Buradan; $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{\pi}{2} + \pi k$ dir. Bu yüzden,

$\forall k = 0, 1, 2 \dots$ için, $\varphi_k(t) = \sin \frac{\pi(2k-1)}{2} t$ özvektörleri ile K operatörünün özdeğerleri;

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2} (2k - 1)^2 \quad (6.11)$$

şeklindedir.

K kendine eş olduğundan, $\|K\| = \max_k |\lambda_k| = |\lambda_1| = \frac{4}{\pi^2}$ elde edilir.

$K(s, t)$ sürekli ve K operatörüne bağlı olan λ_i özdeğerlerinin hiçbirinin negatif olmadığı varsayalım. ($\forall x$ için $\langle Kx, x \rangle \geq 0$) O halde, $K(s, t) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i e_i(s) \overline{e_i(t)}$ dir ve bu seri mutlak ve düzgün yakınsar. (Mercer Teoremi) K pozitif olduğundan, Mercer teoremine göre,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \int_0^1 k(t, t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \quad (6.12)$$

elde edilir.

Örnek 6.12 $K: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$ şeklinde tanımlı K operatörü, $0 \leq t, s \leq 1$ için,

$k(t, s) = \min\{t, s\}$ iken,

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s) ds$$

şeklinde verilsin.

$$k(t, s) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ 1 - s, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

olması durumunda,

(a) K nın kendine eş operatör olduğunu ispatlayınız.

(b) K nın spektrumunu bulunuz.

(c) $\|K\|$ yı bulunuz.

(d) K'nın pozitif olduğunu ispatlayınız ve özdeğerlerinin toplamını bulunuz.

Çözüm 6.12 $k(s, t) = \overline{k(t, s)}$ ve $k(t, s)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan, K operatörü kendine eş ve kompakttır. Buradan, K'nın spektrumu sıfır ve reel özdeğerleri içerir. $\lambda y = Ky$ olduğunu varsayalım. Bu ise;

$$\lambda y(t) = (1 - t) \int_0^t y(s) ds + \int_t^1 (1 - s) y(s) ds \quad (6.13)$$

demektir.

İki kez türev alınırsa,

$$\lambda y'(t) = - \int_0^t y(s) ds + (1 - t)y(t) - (1 - t)y(t) = - \int_0^t y(s) ds \quad (6.14)$$

elde edilir.

$$\lambda y''(t) = -y(t) .$$

Açıkça; $\lambda \neq 0$ dır, aksi takdirde $y = 0$ dır, bu da $\ker K = 0$ olması demektir.

$y'(0) = y(1) = 0$ sınır koşullarıyla $\lambda y'' + y = 0$ diferansiyel denklemi elde edilir. Çünkü (6.12.2), $y'(0) = 0$ ve (6.12.1), $y(1) = 0$ olduğunu gösterir. K operatörünün pozitif olduğunu gösteren $\lambda > 0$ olduğu ispatlansın. Diferansiyel denklem $\bar{y}$ ile çarpılarak ve 0 dan 1 e kadar integrali alınarak,

$$\lambda \int_0^1 y''(t) \bar{y}(t) dt + \|y\|^2 = 0 \quad (6.15)$$

elde edilir.

$$\text{Kısmi integrasyon ile, } \lambda \left(y' \bar{y} \Big|_0^1 - \int_0^1 |y'|^2 dt \right) + \|y\|^2 = 0 \quad (6.16)$$

elde edilir.

Sınır koşullarından, $-\lambda \int_0^1 |y'|^2 dt + \|y\|^2 = 0$ dır ve bu nedenle, $\lambda > 0$.

Diferansiyel denklemin çözümü;

$$y = C_1 \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} t + C_2 \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda}} t . \quad (6.17)$$

Sınır koşullarından, $C_2 = 0$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{\pi}{2} + \pi k$ şeklindedir. Bu nedenle; $\forall k = 1, 2, \dots$ için,
 $\varphi_k(t) = \cos \frac{\pi(2k-1)}{2} t$ özvektörleri ile K operatörünün özdeğerleri

$$\lambda_k = 4/\pi^2(2k-1)^2 \quad (6.18)$$

şeklindedir.

K kendine eş olduğundan,

$$\|K\| = \max_k |\lambda_k| = |\lambda_1| = \frac{4}{\pi^2} \quad (6.19)$$

elde edilir. K pozitif olduğundan, Mercer teoreminden;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \int_0^1 k(t, t) dt = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2} \quad (6.20)$$

elde edilir.

Örnek 6.13 $K: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$ şeklinde tanımlı K operatörü, $0 \leq t, s \leq 1$ için,

$$k(t, s) = \max\{t, s\} \text{ iken,}$$

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s)ds$$

şeklinde verilsin.

(a) K nın kendine eş kompakt operatör olduğunu ispatlayınız.

(b) K nın spektrumunu bulunuz.

(c) K bir pozitif operatör müdür?

Çözüm 6.13 $k(t, s) = \overline{k(s, t)}$ ve $k(t, s)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan, K operatörü kendine eş ve kompaktır. Bu nedenle, K nın spektrumu sıfır ve reel özdeğerleri içerir. $\lambda y = Ky$ olduğunu varsayalım. Bu ise,

$$\lambda y(t) = t \int_0^t y(s)ds + \int_t^1 sy(s)ds \quad (6.21)$$

demektir.

İki kez türev alınırsa,

$$\lambda y'(t) = ty(t) + \int_0^t y(s)ds - ty(t) = \int_0^t y(s)ds, \quad (6.22)$$

$\lambda y''(t) = y(t)$ elde edilir.

$\lambda \neq 0$ dır, aksi taktirde $y = 0$ dır, bu da $\ker K = 0$ olması demektir.

$y'(0) = 0$ ve $y(1) = y'(1)$ sınır koşullarıyla, $y'' = \frac{1}{\lambda}y$ diferensiyel denklemi elde edilir, çünkü, (6.22) $y'(0) = 0$ olduğunu gösterir ve (6.21) de $t = 0$ ve (6.22) de $t = 1$ için $y(1) = y'(1)$ elde edilir. $\frac{1}{\lambda} = \mu$ olsun. $\mu > 0$ için, diferensiyel denklemin çözümü;

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{\mu}t} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}t}.$$

Ayrıca;

$$y'(t) = \sqrt{\mu} (C_1 e^{\sqrt{\mu}t} - C_2 e^{-\sqrt{\mu}t})$$

dir ve $t = 0$ için, $C_1 - C_2 = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu nedenle;

$$y(t) = C \cosh(\sqrt{\mu}t) \text{ ve } y'(t) = C\sqrt{\mu} \sinh(\sqrt{\mu}t).$$

$$t = 1 \text{ için, } \cosh(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu} \sinh(\sqrt{\mu}) \text{ ya da } \coth(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$$

elde edilir. Bu denklem μ_0 tek çözümüne sahiptir. Bu nedenle, K nın tek pozitif özdeğeri $\lambda_0 = 1/\mu_0$ şeklindedir.

$\mu < 0$ veya $\mu = -\eta^2$ durumu için,

$$y(t) = C_1 \cos \eta t + C_2 \sin \eta t \text{ ve } y'(t) = \eta(-C_1 \sin \eta t + C_2 \cos \eta t)$$

elde edilir.

$$t = 0 \text{ için, } C_2 = 0 \text{ elde edilir ve } y(t) = C \cos \eta t, \quad y'(t) = -C\eta \sin \eta t$$

elde edilir.

$$t = 1 \text{ için, } \cos \eta = -\eta \sin \eta \text{ ya da } -\eta = \cot \eta$$

elde edilir. Son denklem,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\eta_1^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\eta_2^2}, \dots$$

şeklinde negatif çözümlere sahiptir.

K operatörü negatif özdeğerlere sahip olduğundan, pozitif operatör değildir.

Örnek 6.14 Herhangi kendine eş $A \in L(H)$ operatörü için rezidü spektrumunun boş küme olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 6.14 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $\text{Im}(A - \lambda I)^\perp = \ker(A^* - \bar{\lambda}I) = \ker(A - \bar{\lambda}I)$ elde edilir ve dolayısıyla, eğer $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq H$ ise; $\bar{\lambda}$, A nın bir özdeğeridir. A kendine eş olduğundan, λ reeldir ve buradan, $\lambda = \bar{\lambda}$, A nın bir özdeğeridir. Bu nedenle, λ , A nın rezidü spektrumuna ait değildir.

Örnek 6.15 $A \in L(H)$ bir kendine eş operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\lambda \neq 0$ olacak şekilde bir kompleks sayı olsun.

(a) $\forall x \in X$ için $\|Ax - \lambda x\| \geq |\text{Im}\lambda| \|x\|$ olduğunu ispatlayınız.

(b) λ nın A operatörünün bir regüler noktası olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 6.15 (a) $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere, $\lambda = \tau + i\mu$ olsun.

$$\begin{aligned} \|Ax - \lambda x\|^2 &= \|(A - \tau I)x\|^2 - \langle (A - \tau I)x, i\mu x \rangle - \langle i\mu x, (A - \tau I)x \rangle + \mu^2 \langle x, x \rangle \\ &= \|(A - \tau I)x\|^2 + \mu^2 \|x\|^2 \text{ dir ve bu eşitlik,} \end{aligned}$$

$\|Ax - \lambda x\| \geq |\mu| \|x\|$ olduğunu gösterir.

(b) λ nın A nın bir özdeğeri olmadığı açıktır. X bir Banach uzayı ve $A \in L(X, Y)$ iken $\forall x \in X$ için, $\|Ax\| \geq m \|x\|$ olacak şekilde $m > 0$ sayısı mevcut olduğunda, $\text{Im } A$, Y nin kapalı bir alt uzayıdır. Dolayısıyla,

$\text{Im}(A - \lambda I)$ kapalıdır ve bu yüzden λ sürekli spektrumun bir noktası değildir. Örnek 6.15 ten A nın rezidü spektrumu boştur. O halde, λ bir regüler noktadır.

Örnek 6.16 $mI \leq A \leq MI$ ve $\lambda \notin [m, M]$ olsun. λ nın A operatörünün bir regüler noktası olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 6.16 $m = -M$ olsun. $mI \leq A \leq MI$ durumunda, $\|A\| \leq M$ elde edilir. $\lambda \notin [m, M]$ koşulu, $|\lambda| > \|A\|$ olduğunu gösterir ve dolayısıyla; λ , A nın bir regüler noktasıdır.

$\alpha = (M + m)/2$ ile $A - \alpha I$ operatörü göz önüne alınsın.

$\beta = (M - m)/2$ iken, $-\beta I \leq A \leq \beta I$ dir.

$\lambda \notin [m, M]$ olduğundan, $\lambda - \alpha \notin [-\beta, \beta]$ dir. Dolayısıyla; $\lambda - \alpha$; $A - \alpha I$ operatörünün bir regüler noktasıdır ve bu nedenle; λ da A operatörünün bir regüler noktasıdır.

Örnek 6.17 A ; $A \geq \delta I$, $\delta \geq 0$ koşullarını sağlayan kendine eş sınırlı bir operatör olsun. A nın terslenebilir olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 6.17 Örnek 6.16 da, $m = \delta$ alınırsa, $\lambda = 0$ noktasının A nın bir regüler noktası olduğu sonucu elde edilir.

6.1 Spektral Ayırışım

H içindeki kendine eş sınırlı bir operatörün spektral ayırışımını oluşturmak için,

$$e_\lambda(t) = \begin{cases} 1, & t \leq \lambda \text{ için,} \\ 0, & t > \lambda \text{ için.} \end{cases} \quad (6.23)$$

fonksiyonunu ele alalım. Açıktır ki, $e_\lambda(t) \in K[a, b]$ dir. $E_\lambda = e_\lambda(A)$ şeklinde tanımlansın. O halde; $e_\lambda(t).e_\lambda(t) = e_\lambda(t)$ olduğundan, $E_\lambda^2 = E_\lambda$ ve E_λ simetriktir ($e_\lambda(t)$ reel değerli bir fonksiyon olduğundan). Böylece,

- (i) E_λ 'lar dik izdüşümlerdir. Ayrıca, $\alpha < \lambda < m$ için $E_\lambda = 0$ ve $\lambda \geq M$ için $E_\lambda = I$ dir.
- (ii) E_λ , λ ya göre güçlü şekilde sağdan süreklidir. Gerçekten de; $\varphi_n(t)$,
 $\varphi_n(t) \geq e_{\lambda+\frac{1}{n}}(t)$ ve $\varphi_n(t) \rightarrow e_\lambda(t)$ olacak şekilde sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. $\varphi_n(t)$, $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ olacak şekilde sürekli fonksiyonlar ise, o takdirde, $\varphi_n(A) \rightarrow \varphi(A)$ olduğundan,
 $1/n \geq \alpha_n \geq 0$ için, $\varphi_n(A) \geq E_{\lambda+\frac{1}{n}} \geq E_{\lambda+\alpha_n} \geq E_\lambda$ elde edilir. $n \rightarrow \infty$ iken, $\varphi_n(A) \rightarrow E_\lambda$. Böylece; $\alpha_n \rightarrow 0$ iken, $E_{\lambda+\alpha_n} \rightarrow E_\lambda$.
- (iii) $\forall \lambda < \mu$ için, $e_\lambda(t).e_\mu(t) = e_\lambda(t)$ den, $E_\lambda.E_\mu = E_\lambda$ dir. Bu özellik, $\forall \lambda < \mu$ için,

$E_\lambda < E_\mu$ şeklinde de yazılabilir. (i)-(iii) arasındaki özellikleri sağlayan bir $\{E_\lambda\}$ ailesine bir “spektral aile” denir.

- (iv) $E_\lambda A = A E_\lambda$ (E_λ , A nın polinomlarının güçlü bir limiti olduğundan) bu nedenle, $T: E \rightarrow E$ bir operatör ve $E_1 + E_2 = E$ ve P , E_2 ye paralel olan, E_1 üzerine bir izdüşüm iken; $E_1 = \text{Im } P$ ve $E_2 = \text{Ker } P$, ancak ve ancak T nin invaryant altuzayları ise; $PT = TP$ olduğundan, $\text{Im } E_\lambda = H_\lambda$, A nın bir invaryant alt uzayıdır. [2]

6.2 Ana Eşitsizlik

$\lambda_1 < \lambda_2$ olsun. O halde;

$$\lambda_1 (e_{\lambda_2}(t) - e_{\lambda_1}(t)) \leq t (e_{\lambda_2}(t) - e_{\lambda_1}(t)) \leq \lambda_2 (e_{\lambda_2}(t) - e_{\lambda_1}(t)) \quad (6.24)$$

t yerine A yazılarak ve fonksiyonlar ile operatörler arasındaki ilişkiden,

$$\lambda_1 (E_{\lambda_2}(t) - E_{\lambda_1}(t)) \leq A (E_{\lambda_2}(t) - E_{\lambda_1}(t)) \leq \lambda_2 (E_{\lambda_2}(t) - E_{\lambda_1}(t)) \quad (6.25)$$

şeklinde ana eşitsizlik elde edilir.

(6.15) in bazı özel durumları: $\lambda_1 < m$ ve $\lambda_2 = \lambda$ alınarak,

$$A E_\lambda < \lambda E_\lambda \quad (6.26)$$

ve $\lambda_1 = \lambda$ ve $\lambda_2 > M$ alınarak,

$$\lambda(I - E_\lambda) \leq A(I - E_\lambda) \quad (6.27)$$

elde edilir. Ya da;

$$(A - \lambda I)E_\lambda \leq A - \lambda I.$$

$E_{\lambda_1 \lambda_2} := E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$ nın bir dik izdüşüm olduğu görülür. O zaman, $E_{\lambda_1 \lambda_2}$, A ile yer değiştirilebilir olduğundan, $H_{\lambda_1 \lambda_2} = \text{Im } E_{\lambda_1 \lambda_2}$ alt uzayı, A nın bir invaryant altuzayıdır ve $x \in H_{\lambda_1 \lambda_2}$ için,

$$\lambda_1 I_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} \leq A|_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} \leq \lambda_2 I_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} .$$

Bu nedenle; $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ için, $\varepsilon = \lambda_2 - \lambda_1$ iken;

$$-\varepsilon I_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} \leq (A - \lambda I)|_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} \leq \varepsilon I_{H_{\lambda_1 \lambda_2}}$$

elde edilir.

$$\|A - \lambda I\|_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} \leq \varepsilon \quad (6.28)$$

elde edilir.

Bu demektir ki; operatör bu altuzayda bir sabit operatöre yaklaşır. Ancak; $H_{\lambda_1 \lambda_2}$ nin bir sıfır alt uzayı olduğu bilinmemektedir. Aksi takdirde, λ nın bir öz değeri ve sıfır olmayan $\forall H_{\lambda_1 \lambda_2}$ elemanının bir özvektör olduğu düşünülürdü. [2]

6.3 Spektral Aile ve Kendine Eş Operatörlerin Spektrumu

Teorem 6.20 A kendine eş sınırlı bir operatör olsun. λ_0 noktası ancak ve ancak λ_0 , E_λ nın güçlü şekilde bir süreksizlik noktası ise, A nın bir özdeğeridir. λ_0 noktasında E_λ nın süreksizliği,

$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} E_\lambda \neq E_{\lambda_0}$ demektir.

İspat 6.20 λ_0 noktası, E_λ nın bir süreksizlik noktası olsun. $\lambda < \lambda_0$ için,

$E_{\lambda \lambda_0} = E_{\lambda_0} - E_\lambda$ dik izdüşümlerini ve $H_{\lambda \lambda_0} = \text{Im} E_{\lambda \lambda_0}$ alt uzaylarını düşünelim. $\lambda \rightarrow \lambda_0$ iken, $E_{\lambda \lambda_0}$ monoton dizisinin güçlü bir P_0 limiti vardır. Dolayısıyla,

P_0 bir dik izdüşümdür. E_λ , λ_0 noktasında süreksiz olduğundan,

$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} E_{\lambda \lambda_0} x_0 = x_0 \neq 0$ olacak şekilde bir x_0 vektörü vardır. $\forall \mu < \lambda_0$ için, $x_0 \in H_{\mu \lambda_0}$ olduğu ispatlansın. Gerçekten; $\mu < \lambda < \lambda_0$ için,

$E_{\mu \lambda_0} E_{\lambda \lambda_0} = E_{\lambda \lambda_0}$ olduğundan,

$$E_{\mu \lambda_0} x_0 = E_{\mu \lambda_0} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} E_{\lambda \lambda_0} x_0 = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} E_{\mu \lambda_0} E_{\lambda \lambda_0} x_0 = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} E_{\lambda \lambda_0} x_0 = x_0$$

elde edilir. Buradan; $x_0 \in H_{\mu\lambda_0}$ bulunur. (6.28) den,

$$\|(A - \lambda_0 I)x_0\| \leq |\mu - \lambda_0| \|x_0\| \quad (6.29)$$

elde edilir.

μ, λ_0 a yaklařırken, $Ax_0 = \lambda_0 x_0$

elde edilir.

λ_0 , A nın bir özdeğeri olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. (6.27) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \text{ ile } (\lambda_0 + \varepsilon)(I - E_{\lambda_0 + \varepsilon}) \leq A(I - E_{\lambda_0 + \varepsilon}) \quad (6.30)$$

elde edilir.

$$(6.26) \text{ da } \lambda = \lambda_0 - \varepsilon \text{ alınırsa, } AE_{\lambda_0 - \varepsilon} \leq (\lambda_0 - \varepsilon)E_{\lambda_0 - \varepsilon} \quad (6.31)$$

elde edilir.

$x_0 \neq 0$, λ_0 özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olsun. O halde,

$$\begin{aligned} (\lambda_0 + \varepsilon)\langle (I - E_{\lambda_0 + \varepsilon})x_0, x_0 \rangle &\leq \lambda_0 \langle (I - E_{\lambda_0 + \varepsilon})x_0, x_0 \rangle, \\ \lambda_0 \langle E_{\lambda_0 - \varepsilon}x_0, x_0 \rangle &\leq (\lambda_0 - \varepsilon) \langle E_{\lambda_0 - \varepsilon}x_0, x_0 \rangle \end{aligned} \quad (6.32)$$

elde edilir.

$I - E_{\lambda_0 + \varepsilon} \geq 0$ ve $E_{\lambda_0 - \varepsilon} \geq 0$ olduğundan,

$$\varepsilon \langle (I - E_{\lambda_0 + \varepsilon})x_0, x_0 \rangle = 0 \text{ ve } \varepsilon \langle E_{\lambda_0 - \varepsilon}x_0, x_0 \rangle = 0 \quad (6.33)$$

sonucuna ulaşılır.

$\forall P$ dik izdüşümü için,

$$\langle Px, x \rangle = \langle P^2x, x \rangle = \langle Px, Px \rangle = \|Px\|^2 \text{ elde edilir. Böylece,}$$

$E_{\lambda_0 + \varepsilon}x_0 = x_0 \neq 0$ ve $E_{\lambda_0 - \varepsilon}x_0 = 0$. Buradan, λ_0 , E_λ nın bir süreksizlik noktasıdır.

Teorem 6.21 E_λ, λ_0 noktasında sürekli olsun. $\lambda_n < \lambda_0 < \mu_n$, $\mu_n - \lambda_n \rightarrow 0$ olacak şekilde λ_n azalmayan ve μ_n artmayan dizileri olsun. $P_n = E_{\mu_n} - E_{\lambda_n}$ izdüşümleri dejenere olmasın. Örneğin, $\forall n$ için, $P_n \neq 0$ olsun. λ_0 , A nın bir sürekli spektrum noktasıdır.

İspat 6.21 $H_n = \text{Im } P_n$ olsun. E_λ operatör fonksiyonu güçlü şekilde sürekli ve bu nedenle güçlü şekilde $P_n \rightarrow 0$. Ancak $\forall n$ için $H_n \neq 0$ olsun. (6.28) den $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|Ax_n - \lambda_0 x_n\| \leq \mu_n - \lambda_n \rightarrow 0 \text{ olacak şekilde } \|x_n\| = 1 \text{ ile } x_n \in H_n \text{ vardır.}$$

Böylece; λ_0 , A nın bir spektrum noktasıdır.

E_λ , λ_0 noktasında sürekli olduğundan, λ_0 sayısı bir öz değer değildir. Örnek 6.14 ten bir kendine eş operatörün rezidü spektrumu yoktur. Bu nedenle, λ_0 , A nın bir sürekli spektrum noktasıdır.

Teorem 6.22 E_λ , bir kendine eş A operatörünün spektral ailesi olsun ve $E_\mu - E_\lambda = 0$, $\mu > \lambda$ olsun. O halde, $\forall \lambda_0 \in (\lambda, \mu)$ A nın bir regüler noktasıdır.

İspat 6.22 (6.26) ve (6.27) den, $\mu(I - E_\mu) \leq A(I - E_\mu)$, $AE_\lambda \leq \lambda E_\lambda$ sonucuna ulaşılır.

$E_\lambda = E_\mu$ olduğundan,

$$\mu(I - E_\lambda) \leq A(I - E_\lambda), \quad AE_\lambda \leq \lambda E_\lambda \quad (6.34)$$

$H_1 = \text{Im } E_\lambda = \text{Im } E_\mu$, $H_2 = \text{Im}(I - E_\lambda)$ olsun. H_1, H_2 alt uzayları A -invariantlardır ve

$H_1 \oplus H_2 = H$. H_2 üzerinde (6.20) den, $A|_{H_2} \geq \mu I$ dır ve buradan,

$(A - \lambda_0 I)|_{H_2} \geq (\mu - \lambda_0)I$, $\mu - \lambda_0 > 0$. Benzer şekilde, H_1 üzerinde (6.20) den $A|_{H_1} \leq \lambda I$ dır ve buradan,

$(\lambda_0 I - A)|_{H_1} \geq (\lambda_0 - \lambda)I$, $\lambda_0 - \lambda > 0$. Örnek 6.17 den, $(A - \lambda_0 I)|_{H_2}$ ve $(A - \lambda_0 I)|_{H_1}$ terslenebilirdir. Buradan, $A - \lambda_0 I$ terslenebilirdir. Gerçekten,

$x = x_1 + x_2$, $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$ için,

$$(A - \lambda_0 I)^{-1}x = ((A - \lambda_0 I)|_{H_1})^{-1}x_1 + ((A - \lambda_0 I)|_{H_2})^{-1}x_2 \quad (6.35)$$

denklemini kurulabilir ve bu operatörün $A - \lambda_0 I$ nın bir tersi olduğu görülebilir.

6.4 Basit Spektrum

Eğer $\{\Delta E_{\lambda} x_0 \equiv (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x_0 : \forall \lambda_2 > \lambda_1 \text{ için}\}$ H içinde bir tam küme olacak şekilde, “generator” adı verilen $x_0 \in H$ varsa; A operatörünün bir basit spektrumu vardır denir. Bu, $\varphi(t)$, $[a,b]$ üzerindeki her sürekli fonksiyon ailesini kapsarken $\{\varphi(A)x_0\}$ kümesinin H içinde yoğun olmasına denktir.

Tanım 6.23 Eğer $\forall x, y \in H$ için, $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ ise; $U: H \rightarrow H$ operatörüne bir izometri denir. Eğer bir U operatörü bir izometri ve $\text{Im}U = H$ ise; U ya bir üniter operatör denir.

Eğer $A_1 = U^{-1}A_2U$ olacak şekilde bir üniter U operatörü varsa; A_1 ve A_2 operatörleri üniter denktir denir. [2]

Teorem 6.24 A , bir basit spektrumu ve x_0 “generator”ü olan kendine eş bir sınırlı operatör olsun. $\{E_{\lambda}\}$, A ile tanımlanmış dik izdüşümlerinin spektral ailesi iken, $\sigma(\lambda) = \langle E_{\lambda}x_0, x_0 \rangle$ olsun. O halde, A ; $T\varphi(\lambda) = \lambda \cdot \varphi(\lambda)$ iken, $T: L^2(\sigma(\lambda)) \rightarrow L^2(\sigma(\lambda))$ operatörüne üniter denktir.

İspat 6.24 Bir $\varphi(\lambda) \in C[a, b]$ sürekli fonksiyonunu ele alalım.

($\text{supp}\sigma(\lambda) \subset [a, b]$ iken).

$L^2(\sigma(\lambda))$ uzayı, $\|\psi\| = \sqrt{\int_a^b |\psi(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda)}$ normu içindeki bu fonksiyonların bir tamamlayıcısı olarak tanımlanır ve buradan, bu fonksiyonların her bir kümesi $L^2(\sigma(\lambda))$ içinde yoğundur.

$U: \varphi \rightarrow y_{\varphi} = \varphi(A)x_0 = \int \varphi(\lambda) dE_{\lambda}x_0$ gösterimini ele alalım. O halde,

$$\|y_{\varphi}\|^2 = \int_a^b \varphi^2 d\langle E_{\lambda}x_0, x_0 \rangle = \|\varphi\|_{L^2(\sigma(\lambda))}^2. \quad (6.36)$$

Spektrumun basitliği, $\{y_{\varphi}\}$ kümesinin H içinde yoğun olduğunu gösterir.

Bu nedenle, U lineer gösterimi sürekli fonksiyonların yoğun kümesinden $L^2(\sigma(\lambda))$ tamamlamasına genişletilebilir ve bir $U: L^2(\sigma(\lambda)) \rightarrow H$ izometrisi kurulabilir.

(Bir izometrinin görüntüsü bir tam uzay olduğundan üzerinedir.)

$U^{-1}AU_\varphi = \lambda\varphi(\lambda)$ olduğu gösterilmelidir.

$$A\varphi(A)x_0 = \int \lambda\varphi(\lambda)dE_\lambda x_0, \quad (6.37)$$

olduğundan,

$U^{-1}Ay_\varphi \rightarrow \lambda\varphi(\lambda)$ elde edilir.

Örnek 6.25 A, E_λ spektral ailesi olan bir kendine eş operatör ve $(\alpha, \beta) \cap \sigma(A) = \emptyset$ olsun.

$\forall [\lambda_0, \lambda_1] \subset (\alpha, \beta)$ için, $E_{\lambda_1} = E_{\lambda_0}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 6.25 E_λ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli; aksi taktirde Teorem 6.20 den bu aralıkta A nın bir özdeğeri vardır. $\forall \lambda^* \in [\lambda_0, \lambda_1]$ için, E_λ nın sabit olduğu bir $[\lambda^* - \varepsilon, \lambda^* + \varepsilon]$ aralığı vardır. Gerçekten de, eğer bu koşul sağlanmazsa, Teorem 6.21, λ^* nın A operatörünün bir sürekli spektrum noktası olduğunu gösterir. Bu nedenle, her açık aralıkta E_λ fonksiyonları sabit olacak şekilde $[\lambda_0, \lambda_1]$ aralığı kapanışa sahiptir. Sonuç olarak, E_λ , $[\lambda_0, \lambda_1]$ üzerinde sabittir.

Örnek 6.26 $x = (x_1, x_2, \dots)$ için $D_w x = (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots)$ şeklinde tanımlı l_2 üzerindeki D_w operatörünün spektrumunu bulunuz.

Çözüm 6.26 $(D_w - \lambda I)x = ((w_1 - \lambda)x_1, (w_2 - \lambda)x_2, \dots)$. Böyle bir operatör ancak ve ancak $\inf_j |\lambda - w_j| > 0$ yani $\lambda \notin \{\overline{w_j}\}$ ise, terslenebilir. Bu nedenle, $\sigma(A) = \{\overline{w_j}\}$ dir.

w_j sayılarının her biri e_j standart baz iken, $D_w e_j = w_j e_j$ olduğundan, D_w nin birer özdeğeri.

$w_0 \in \{\overline{w_j}\}$ ve $\forall k = 1, 2, 3, \dots$ için $w_0 \neq w_k$ olsun. O halde, w_0 , D_w nin bir özdeğeri değildir, çünkü eğer $(D_w - w_0 I)x = ((w_1 - w_0)x_1, (w_2 - w_0)x_2, \dots) = 0$, o halde,

$x_1 = x_2 = \dots = 0$ veya $x = 0$ dir. Ayrıca, $\forall e_j$ için,

$$e_j = \frac{1}{w_j - w_0} (w_j - w_0) e_j = \frac{1}{w_j - w_0} (D_w - w_0 I) e_j \in \text{Im}(D_w - w_0 I)$$

elde edilir. Bu nedenle, $\overline{\text{Im}(D_w - w_0 I)} \supseteq \overline{\text{span}\{e_j\}} = l_2$. Böylece, $w_0 \in \sigma_c(D_w)$.

Örnek 6.27 $a(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$ için, şeklinde tanımlansın.

$L_2[-1,1]$ içinde $(Af)(t) = a(t)f(t)$ ile verilen A operatörünün spektrumunu bulunuz.

Çözüm 6.27 Eğer $\lambda \notin [0,1]$ ise, $1/(a(t) - \lambda)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında sürekli. Buradan, $(Bg)(t) = g(t)/(a(t) - \lambda)$ ile verilen B operatörü $L_2[-1,1]$ üzerinde sınırlı bir lineer operatördür. Ayrıca, $B = (A - \lambda I)^{-1}$. Buradan, $\lambda \in \rho(A)$. $\lambda \in [0,1]$ olsun. Bu durumda, $f(t) \equiv 1 \notin \text{Im}(A - \lambda I)$; aksi takdirde $1/(a(t) - \lambda) \in L_2[-1,1]$ dir ve bu imkansızdır. Böylece, $\sigma(A) = [0,1]$. $\lambda \in (0,1]$ olsun. Bu durumda, eğer neredeyse her yerde $((A - \lambda I)f)(t) = (a(t) - \lambda)f(t) = 0$ ise, $\forall t \neq \lambda$ için ve neredeyse her yerde $f(t) = 0$ dir. Buradan, $\lambda \notin \sigma_p(A)$.

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} f(t), & t \notin (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon), \\ 0, & t \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon). \end{cases} \quad \text{oluşturalım.}$$

Eğer ε çok küçük ise keyfi bir δ için,

$$\|f - f_\varepsilon\| = \sqrt{\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} |f(t)|^2 dt} < \delta$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{a(t) - \lambda} f_\varepsilon(t), & t \notin (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon), \\ 0, & t \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon). \end{cases}$$

ve

$g_\varepsilon \in L_2[-1,1]$ iken $f_\varepsilon(t)$, $(a(t) - \lambda) \cdot g_\varepsilon(t)$ şeklinde gösterilebildiğinden,

$f_\varepsilon(t) \in \text{Im}(A - \lambda I)$ dir. Buradan, $\lambda \in \sigma_c(A)$ elde edilir. Eğer $\lambda = 0$ ise, $t \in [0,1]$ için sıfıra giden ancak sıfır olmayan bir $\phi(t) \in L_2[-1,1]$ fonksiyonu alınabilir ve $A\phi = 0$ elde edilir. Bu nedenle, $0 \in \sigma_p(A)$ dir.

Örnek 6.28 S_r ve S_l , sırasıyla sağ ve sol birim öteleme operatörü olsun.

$$S_r(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$S_l(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Bu operatörlerin spektrumunu bulunuz.

Çözüm 6.28 $\|S_r\| = \|S_l\| = 1$ olduğundan, $|\lambda| > 1$ koşulunu sağlayan $\forall \lambda$, S_r ve S_l operatörlerinin bir regüler noktasıdır. Bu operatörlerin özdeğerleri ele alınırsa, eğer $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ için $S_l x = \lambda x$ ise, $x_2 = \lambda x_1$, $x_3 = \lambda x_2$, $x_4 = \lambda x_3, \dots$ elde edilir, bu $x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$ olması demektir. Böyle bir vektör sıfır değildir ve ancak ve ancak $|\lambda| < 1$ ise, l_2 ye aittir. Bu nedenle, $\sigma_p(S_l) = \{\lambda: |\lambda| < 1\}$ ve $|\lambda| < 1$ olan $\forall \lambda$ için, $\dim \ker(S_l - \lambda I) = 1$ dir. Eğer $S_r x = \lambda x$ ise, $0 = \lambda x_1$, $x_1 = \lambda x_2$, $x_2 = \lambda x_3, \dots$ tür ve bu $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = 0$ demektir. Bu nedenle, $\sigma_p(S_r) = \emptyset$ dir.

Ayrıca, $S_l^* = S_r$ ve $S_r^* = S_l$ olduğundan,

$$\text{Im}(S_r - \lambda I)^\perp = \ker(S_l - \bar{\lambda} I) \quad (6.38)$$

$$\text{Im}(S_l - \lambda I)^\perp = \ker(S_r - \bar{\lambda} I) \quad (6.39)$$

elde edilir.

$|\lambda| < 1$ olacak şekilde λ için (6.38) bağıntısından,

$\text{codim Im}(S_r - \lambda I) = \dim \ker(S_l - \lambda I) = 1$ elde edilir. Böylece,

$\{\lambda: |\lambda| < 1\} \subset \sigma_r(S_r)$ dir.

Bir operatörün spektrumu kapalı bir küme olduğundan,

$\{\lambda: |\lambda| = 1\} \subset \sigma(S_l), \sigma(S_r)$ şeklindedir. Ayrıca, $|\lambda| = 1$ olacak şekilde λ için (6.38) ve (6.39) dan, $\overline{\text{Im}(S_r - \lambda I)} = \overline{\text{Im}(S_l - \lambda I)} = l_2$ dir.

$$\text{Böylece; } \sigma_c(S_r) = \sigma_c(S_l) = \{\lambda: |\lambda| = 1\} \text{ dir.} \quad (6.40)$$

$\sigma(S_r) = \sigma(S_l) = \{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$ elde edilir ve ayrıca,

$$\sigma_p(S_l) = \{\lambda: |\lambda| < 1\}, \sigma_r(S_l) = \emptyset,$$

$$\sigma_p(S_r) = \emptyset, \sigma_r(S_r) = \{\lambda: |\lambda| < 1\},$$

$$\sigma_c(S_r) = \{\lambda: |\lambda| = 1\}, \sigma_c(S_l) = \{\lambda: |\lambda| = 1\}.$$

Örnek 6.29 $K: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$ operatörü

$$k(t, s) = \begin{cases} 1, & s \leq t \\ 0, & s > t \end{cases} \quad \text{iken,}$$

$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s)ds$ şeklinde tanımlansın. K nın spektrumunu bulunuz.

Çözüm 6.29 K bir kompakt operatördür. Bu nedenle, $0 \in \sigma(K)$ ve sıfırdan farklı $\forall \lambda \in \sigma(K)$ bir özdeğerdir. $\lambda \neq 0$ iken $(Kf)(t) = \lambda f(t)$ olsun. Bu demektir ki;

$$\int_0^1 k(t, s)f(s) ds = \int_0^t f(s) ds = \lambda f(t).$$

Bu nedenle, f sürekli diferansiyellenebilirdir. $\lambda f' = f$ ve $f(0) = 0$ dır ve bu $f(t) = 0$ olduğunu gösterir. Buradan, $\sigma(K) = \{0\}$ elde edilir.

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Hilbert uzayları üzerinde kendine eş operatörlerin spektrumu incelendi. Kreyzig, Eidelman ve Soykan' dan alınan bazı problemlerde operatörlerin kendine eşlik ve spektrum araştırması yapıldı.

KAYNAKLAR

- [1] Rynee, B.P. ve Youngson, M.A., (2000). Linear Functional Analysis, Second Edition, Springer.
- [2] Eidelman Y., Milman V. ve Tzolomitis A., (2004). Functional Analysis An Introduction, American Mathematical Society Providence, Rhode Island.
- [3] Soykan, Y., (2008). Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [4] Goode, S. W., (1991). An Introduction to Differential Equations & Linear Algebra, Prentice Hall International, Inc., California State University, Fullerton.
- [5] Kolman B. ve Hill D. R., (2000). Uygulamalı Lineer Cebir, Prentice Hall, Palma Yayıncılık.
- [6] Kreyzig, E. (1989). Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, Canada, USA.
- [7] Şuhubi, E., (2001). Fonksiyonel Analiz, 1. Baskı, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.
- [8] Musayev, B. ve Alp M.,(2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.
- [9] Kayrak, A., (2011). Hilbert Uzayları Üzerinde Kompakt Operatörlerin Spektral Teorisi, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [10] Zeidler, E., (1991). Applied Functional Analysis Applications to Mathematical Physics, Springer, New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Tuğçe DUYGUN
Doğum Tarihi ve Yeri : 20.05.1983 / İSTANBUL
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : tugce.duygun@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/ Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	OFM Alan	Yıldız Teknik Üni.	2009
	Öğretmenliği	Fen Bilimleri Enstitüsü	
Lisans	İktisat	Anadolu Üni.	2009
		İktisadi Bilimler Fak.	
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üni.	2007
		Fen-Ed. Fakültesi	
Lise	Fen Bilimleri	Ö. Amerikan Robert	2003
		Lisesi	