

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN KESİRLİ  
DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU**

**Tuba TANYILDIZI**  
**(111121104)**

**Yüksek Lisans Tezi**  
**Ana Bilim Dalı: Matematik**  
**Program: Uygulamalı Matematik**  
**Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ**

**OCAK-2014**

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN KESİRLİ DİFERANSİYEL  
DÖNÜŞÜM METODU

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Tuba TANYILDIZI  
(111121104)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17. 01. 2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 10. 02. 2014

Tez Danışmanı : Y. Doç. Dr. Erdal BAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Etibar PENAHLI

: Doç. Dr. Mahmut IŞIK

OCAK-2014

## ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ'a üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Yanında çalışmaktan dolayı onur duyduğumu belirtmek ister, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu sabır ve hoşgöründen dolayı ise özellikle teşekkür ederim.

Ayrıca desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI hocamıza, Öğr. Gör. Hacı M. BAŞKONUŞ'a ve Arş. Gör. Ramazan ÖZARSLAN'a teşekkür ederim.

Bu zorlu süreçte beni yalnız bırakmayan ve desteklerini bir an olsun esirgemeyen aileme ve tüm dostlarıma teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tuba TANYILDIZI

ELAZIĞ-2014

## İÇİNDEKİLER

Sayfa No

|                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖNSÖZ.....                                                                                                                          | II  |
| İÇİNDEKİLER.....                                                                                                                    | III |
| ÖZET.....                                                                                                                           | IV  |
| SUMMARY.....                                                                                                                        | V   |
| ŞEKİLLER LİSTESİ.....                                                                                                               | VI  |
| SEMBOLLER LİSTESİ.....                                                                                                              | VII |
| 1. GİRİŞ.....                                                                                                                       | 1   |
| 2. GENEL KAVRAMLAR.....                                                                                                             | 5   |
| 2.1. Temel Tanım ve Teoremler.....                                                                                                  | 5   |
| 3. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ.....                                                                                                | 12  |
| 3.1. Tek Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....                                                                                  | 12  |
| 3.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....                                                                                  | 25  |
| 3.3. Üç Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....                                                                                   | 31  |
| 3.4. N Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....                                                                                    | 34  |
| 3.5. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemine İlişkin Uygulamalar.....                                                                        | 36  |
| 4. KESİRLİ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ VE STURM LIOU-<br>VILLE PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI.....                                     | 44  |
| 4.1. Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....                                                                                      | 44  |
| 4.2. Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi İle Kesirli Mertebeden<br>Sturm-Liouville Problemlerinin Özdeğerlerinin Hesaplanması..... | 47  |
| 5. ÇÖZÜMÜN VARLIK VE TEKLİĞİ.....                                                                                                   | 57  |
| 5.1. Kesirli Sturm-Liouville Sınır Değer Probleminin Çözümünün<br>Varlık Ve Tekliği.....                                            | 57  |
| 6. SONUÇ.....                                                                                                                       | 64  |
| KAYNAKLAR.....                                                                                                                      | 65  |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                                                                                       | 68  |

## ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kesirli hesaplamalar ve spektral teori ile ilgili genel bir tarihçe verilmiştir.

İkinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, diferansiyel dönüşüm yöntemi verilmiş ve bu yöntemle bazı diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemi incelenmiş ve bu yöntemle kesirli Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri hesaplanmıştır.

Son bölümde ise kesirli Sturm-Liouville sınır değer probleminin çözümünün varlık teklifi verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Sturm-Liouville, Özdeğer, Kesirli Hesap, Caputo, Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Riemann Liouville, Potansiyel.

## SUMMARY

### Fractional Differential Transformation Method for Sturm-Liouville Problem

This study consists of five chapters.

In the first chapter, general concepts of fractional calculus and spectral theory.

In the second chapter, some fundamental definitions and theorems are given.

In the third chapter, differential transformation method is introduced. Furthermore, this method is applied for some differential equations.

In the forth chapter, fractional differential transformation method is given and eigenvalues is obtained for fractional Sturm-Liouville problem.

The last chapter of this thesis, the existence and uniqueness of the solution for a fractional Sturm-Liouville boundary value problem is proved.

**Keywords:** Sturm-Liouville, Eigenvalues, Fractional Calculus, Caputo, Fractional Differential Transformation Method, Riemann Liouville, Potential.

## ŞEKİLLER LİSTESİ

|                                                                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Tablo 2.1.</b> Gamma fonksiyonunun bazı değerleri .....                                                                       | 7  |
| <b>Tablo 3.1.</b> $w(x)$ in bazı değerleri için elde edilen $W(k)$ değerleri .....                                               | 17 |
| <b>Tablo 3.2.</b> (3.5.3) Probleminin diferansiyel dönüşüm yöntemine göre bazı $x$ değerleri için çözümleri .....                | 40 |
| <b>Tablo 4.1.</b> (4.2.1) Sturm-Liouville probleminin kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemine göre bazı $\lambda$ değerleri ..... | 49 |
| <b>Tablo 4.2.</b> (4.2.2) Sturm-Liouville probleminin kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemine göre bazı $\lambda$ değerleri ..... | 51 |
| <b>Tablo 4.3.</b> (4.2.3) Sturm-Liouville probleminin kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemine göre bazı $\lambda$ değerleri ..... | 53 |
| <b>Tablo 4.4.</b> (4.2.4) Sturm-Liouville probleminin kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemine göre bazı $\lambda$ değerleri ..... | 56 |

## SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

|                      |                                       |
|----------------------|---------------------------------------|
| $\mathbb{R}$         | : Reel sayılar kümesi                 |
| $\mathbb{C}$         | : Kompleks sayılar kümesi             |
| $!$                  | : Faktöriyel                          |
| $\Gamma$             | : Gamma                               |
| $\lambda$            | : Özdeğer                             |
| $\eta$               | : Eta                                 |
| $\theta$             | : Teta                                |
| $\alpha$             | : Alfa                                |
| $\beta$              | : Beta                                |
| $\pi$                | : Pi                                  |
| $\sum$               | : Toplam sembolü                      |
| $\int$               | : İntegral                            |
| $D$                  | : Türev operatörü                     |
| ${}_0D_t^{-\alpha}$  | : $\alpha$ .kattan integral           |
| ${}_0D_t^{\alpha}$   | : $\alpha$ . mertebeden türev         |
| ${}_0^cD_t^{\alpha}$ | : $\alpha$ . mertebeden Caputo türevi |
| $q(x)$               | : Potansiyel fonksiyon                |

## 1. GİRİŞ

Fizik, sosyal bilimler, mühendislik gibi birçok bilim dalındaki problemlerin çözümü için bu problemlerin matematiksel ifadelerle formülize edilmesi gerekir. Matematikte bir büyüklüğün diğer büyüklüklere göre değişim hızı türev olarak ifade edilir. Bu nedenle her sürecin farklı değişim hızları, değişik türevler bulunduran bağıntılar olarak karşımıza çıkar. Bu bağıntıları karakterize eden fonksiyonların yanı sıra bu fonksiyonların birinci veya daha yüksek mertebeden türevlerini, hatta kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem veya kesirli diferansiyel denklem denir. Bu denklemlerin çözümü için kesirli türev ve integral hesaplamalarının iyi bilinmesi gerekir. Çünkü adından da anlaşılacağı gibi kesirli diferansiyel denklem türev ve integralin tam olmayan derecelere genişletilmesidir.

Bu süreç ilk olarak 1965 yılında L'Hospital'ın Leibniz'e  $n$  tamsayı olmak üzere  $\frac{d^n y}{dx^n}$  türev ifadesindeki  $n$  tamsayısının  $\frac{1}{2}$  alınması durumunda ne olacağı şeklinde bir soru yöneltmesiyle başlamıştır.

1730 yılında Euler bu konu hakkında çalışmış ve Gamma fonksiyonunu tanımlamıştır. 1772 yılında J. L. Lagrange  $\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y$  vermiş olduğu mertebesi tamsayı olan diferansiyel operatörler için üsler kuralı ile bu konuya dolaylı olarak katkı sağlamıştır. 1812'de P. S. Laplace kesirli türev ifadeleri tanımlamış ve 1819'da keyfi mertebeli türevden bahsetmiştir. Yine 1819'da S. C. Lacroix tümevarımdan faydalanarak  $y = x^m$   $m$  bir pozitif tamsayı olmak üzere,  $x^m$  in  $n$ . mertebeden türevini,

$$(m \geq n)$$

$$\frac{d^m y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

şeklinde vermiş ve  $m = 1$ ,  $n = \frac{1}{2}$  alarak

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\pi}$$

elde etmiştir. 1823 yılında kesirli işlemleri ilk kullanan bilim adamı N. H. Abel olmuştur. Abel,

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt$$

integral denkleminde kesirli hesabı kullanmıştır.

1844’de Boole sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için sembolik yöntemler geliştirmiş ve problemlerin çözümünde kesirli hesabı kullanmıştır. Bu alanda etkili çalışmalar kaydetmiştir. Bunların temeli kuvvet serileri ve diferansiyel denklemlerin çözümü olarak tanımlanan diferansiyel operatörün keyfi bir fonksiyonunun genel açılımına dayanır. 1892’de Heaviside, elektromanyetik teorisinin bazı problemlerini çözmek için kesirli hesabı kullanmıştır. Weyl (1917), Hardy (1917), Littlewood (1925), Kober (1940), Kutner (1953), Lebesgue ve Lipschitz’in geliştirdikleri fonksiyonların kesirli türev ve integral özelliklerini incelemişlerdir.

Kesirli hesaplamaların matematikteki uygulamaları 20. yy bitmeden ortaya çıkmış ancak mühendislik ve bilimdeki başarıları geçtiğimiz yüzyıl içerisinde gerçekleşmiştir. Kesirli hesaplamalar birçok denklemde hassasiyeti artırarak daha iyi sonuçlar elde etmemizi sağlamıştır. Ayrıca fiziksel denklemlerin yorumlanmasında da katkısı olmuştur. Son yıllarda kesirli türev hesaplamaları ve kesirli diferansiyel denklemler mekanik mühendisliği, biyoloji, kimya, fizik, sinyal işleme ve sistem tanımlama, finans gibi birçok alandaki problemleri çözmek için kullanılmıştır. Ayrıca beyin analizinde sinir hücrelerinin karmaşık yapıları anormal davranışlarının modellenmesi çalışmalarıyla tıp alanında, deprem fay hatlarının anormal hareketlerinin incelenmesi ile ilgili de pek çok alanda kesirli analiz kullanılmaktadır.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi yardımı ile karşılaştığımız karmaşık ve yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler (ısı iletim denklemi, dalga denklemi, poisson denklemi gibi) ve diğer mühendislik problemlerinin çözümünü elde etmemiz mümkündür. Bu yöntem, kullanım açısından elverişli ve sonuca çabuk götüren bir yöntemdir. Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi yöntemlerle karşılaştırdığımızda bu yöntem daha pratik olduğundan bize zaman kazandırır. Ayrıca bilgisayar programlamasına da uygundur. Bu yöntemle kısmi türevli diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürebilir ve elde ettiğimiz cebirsel denklemleri de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözebiliriz. Ayrıca integral yöntemlerini kullandığımızda karmaşık ifadelerin integrallerini almak zorunda kalabileceğimizden ve ters dönüşümlerin alınmasında da problemler yaşayabileceğimizden dolayı integral dönüşüm yöntemleriyle (Laplace ve Fourier) karşılaştırdığımızda bu yöntemin bizi sonuca çok daha kolay ulaştırdığını görürüz. Bu iki yöntemde de lineer olmayan problemlerin çözülmemesi ise ayrı bir sorun iken diferansiyel dönüşüm yönteminin lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünün yanı sıra, sürekli olmayan sınır

şartlarına sahip problemlerin çözümünde de çalıştığını görebiliriz.

1996 yılında diferansiyel dönüşümün tanımı verilmiş ve bu yöntem Sturm-Liouville problemine uygulanmıştır. Bu yöntem sayesinde bazı basit matematiksel işlemlerle  $i$ -yinci özdeğer ve özvektör hesaplanmıştır [1].

1999 da kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Öncelikle iki boyutlu diferansiyel dönüşüm teorisine giriş yapılmış, ikinci olarak, bir PDEs probleminin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü alınarak, fark denklemlerinin bir kümesi elde edilmiştir. Son olarak değişken katsayılı ve sabit katsayılı PDE problemleri sunulan bu metot ile çözülmüş ve hesaplanan sonuçlar diğer analitik veya yaklaşık metotlar ile karşılaştırılmıştır [2].

2003 yılında kısmi türevli diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözümü araştırılmıştır. Yeni teoremler eklenmiş ve bazı lineer ve lineer olmayan PDEs bu metot kullanılarak çözülmüştür. Bu çalışmada, ayrıca iki difüzyon probleminin analitik çözümleri elde edilmiş ve bu çözümlerin ayrıştırma metodu ile elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır [3].

2004 yılında lineer diferansiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümü, diferansiyel dönüşüm metodu ile ele alınmıştır [4].

Ayrıca üç boyutlu diferansiyel dönüşüm metoduna giriş yapılmış ve birinci adım için temel teoremler tanımlanmıştır. İki ve üç boyutlu diferansiyel dönüşümlerin bir uygulaması olarak lineer ve lineer olmayan PDE sistemlerinin kesin çözümleri incelenmiştir. Sunulan metodun sonuçları ayrıştırma metodu ile karşılaştırılmıştır. Bu yöntemin nümerik ve analitik çözümler için kullanışlı bir araç olduğu anlatılmıştır [5]. Ayrıca diferansiyel dönüşüm metodu ile özel bir denklem olan Burgers denkleminin çözümü araştırılmış ve başlangıç şartında verilerin değişmesiyle diferansiyel dönüşüm ile bulunan çözümler karşılaştırılmıştır [6]. Yüksek mertebeden başlangıç değer problemlerinin diferansiyel dönüşüm yöntemi ile uygulamasına ise yine aynı yılda yer verilmiştir. Ayrıca bulunan çözümler analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır [7].

2005 yılında ise kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için  $n$  boyutlu diferansiyel metodun genelleştirilmesi verilmiştir [8]. Verilen bu metodun diğerlerinden ayrı olarak özelliği özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmekte etkili olmasıdır. Bu metodu örneklerle açıklamak için bulunan sonuçlar birkaç başlangıç ve sınır değer problemlerine uygulanmıştır.

Ayrıca 2005 yılında adi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için de diferansiyel dönüşüm metodunun bir genellemesi verilmiştir [9].

Kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri çok kolay elde edilemediğinden dolayı, daha çok yaklaşık ve nümerik teknikler kullanılmaktadır. Biz bu çalışmamızda diferansiyel dönüşüm yöntemini kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere özellikle kesirli mertebeden Sturm-Liouville problemlerine uygulayarak, bu yöntem yardımıyla çözümler elde edeceğiz.

Kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemi ilk olarak Zhou tarafından 1986 yılında mühendislik alanında uygulanmıştır [10]. Bu yöntem polinom formunda oluşturulan Taylor seri açılımını temel alan bir yöntemdir. Bilinen yüksek mertebeden Taylor seri yöntemi sembolik hesaplamalar gerektirmektedir. Ancak, diferansiyel dönüşüm yöntemi, iteratif olarak elde edilebilen bir polinom seri çözümüdür. Son zamanlarda diferansiyel dönüşüm yöntemi, kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan denklemlerin yaklaşık çözümlerinde başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Ayrıca lineer olmayan denklemlerin çözümleri Adomian polinomlarına gerek kalmadan çözülebildiği için diferansiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrıştırma yöntemine göre daha avantajlıdır.

Ayrıca operatörlerin spektral teorisinden kısaca söz etmek gerekirse bu çalışmalarda genellikle Sturm-Liouville problemleri göz önüne alınır. Özdeğerler, özfonksiyonlar, normlaştırıcı sayılar, spektral fonksiyon gibi spektral veriler tanımlanır ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunur. Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlere regüler; tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak şekilde) diferansiyel operatörlere singüler denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Bu konularda çok sayıda çalışmalar yapılmıştır [11-12].

## 2. GENEL KAVRAMLAR

### 2.1. Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 2.1.1.** Bir veya daha çok bağımlı değişkenin bir veya daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir [13].

**Tanım 2.1.2.** Bir veya daha çok bağımlı değişkenin bir tek bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden adi türevlerini ihtiva eden bir denkleme adi diferansiyel denklem denir [13].

**Tanım 2.1.3.** Bir veya daha çok bağımlı değişkenin en az iki bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden kısmi türevlerini ihtiva eden denkleme kısmi diferansiyel denklem denir [13].

**Tanım 2.1.4.** Eğer katsayı fonksiyonlarından biri veya tümü  $x$  değişkeni ile birlikte veya tek başına bilinmeyen  $y$  fonksiyonunu içeriyorsa denkleme lineer olmayan, bu katsayılar  $y$  den bağımsız ise lineer diferansiyel denklem denir [13].

**Tanım 2.1.5.**  $a_1y^{(n)} + \dots + a_ny = f(x)$  ifadesinde  $f(x) = 0$  ise bu diferansiyel denkleme homojen diferansiyel denklem denir [13].

**Tanım 2.1.6.** Diferansiyel denklem çözüldüğünde elde edilen çözüm fonksiyonu denklemin mertebesi kadar keyfi sabit içermek zorundadır. Bu tür çözümlere genel çözüm denir. Genel çözümdeki keyfi sabitlere verilen bir değer sonucunda elde edilen çözüme özel çözüm denir. Genel çözümdeki keyfi sabitlere değer verilerek elde edilemeyen çözümlere ise tekil çözüm denir [13].

**Tanım 2.1.7.** Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine başlangıç değer problemi denir. Benzer olarak bilinmeyen fonksiyon ve bunun türevlerinin üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine sınır değer problemi denir [13].

**Tanım 2.1.8.** Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşüme operatör denir [14].

**Tanım 2.1.9.**  $A$  sınırlı lineer bir operatör ve  $x$  herhangi bir topolojik uzay olsun.  $Ax = \lambda x$  eşitliğinde  $x \neq 0$  çözümü için elde edilen  $\lambda$ 'ya  $A$ 'nın özdeğeri,  $x$ 'e ise  $A$ 'nın özfonksiyonu denir [14].

**Tanım 2.1.10.**  $L$  herhangi bir elemanlar cümlesi üzerinde tanımlanmış bir operatör olsun.  $y \neq 0$  olmak üzere  $Ly = \lambda y$  eşitliğini sağlayan  $y$ ,  $L$  operatörünün özfonksiyonu,  $\lambda$

ise özdeğeri olsun.

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad x \in [a, b]$$

şeklinde tamamlı operatöre Sturm-Liouville operatörü denir.

Burada  $q(x)$ ,  $[a, b]$  aralığında sürekli reel değerli fonksiyondur.

Ayrıca

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

denkleminde Sturm-Liouville denklemi denir. Bu denklemin spektral özellikleri bulunurken genelde 3 tür sınır şartlarıyla göz önüne alınır.

1. Ayrık sınır şartları

$$y(a, \lambda) \cos \alpha + y'(a, \lambda) \sin \alpha = 0$$

$$y(b, \lambda) \cos \beta + y'(b, \lambda) \sin \beta = 0$$

2. Periyodik sınır şartları

$$y(a, \lambda) = y(b, \lambda), \quad y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda)$$

$$y(a, \lambda) = -y(b, \lambda), \quad y'(a, \lambda) = -y'(b, \lambda)$$

3. Uçları sabitlenmiş sınır şartları

$$y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0$$

$$y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0$$

şeklindedir.

Sturm-Liouville denkleminde verilen sınır şartlarıyla birlikte Sturm-Liouville problemi denir [14].

**Tanım 2.1.11.** Gamma fonksiyonu faktöriyelın reel sayılara genişletilmiş halidir.

$\operatorname{Re} z > 0$  olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır [15].

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{N}$$

### Gamma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

1. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

eşitliğini sağlar.

2.  $Z = -n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) noktalarında basit kutba sahip olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

elde edilir.

3.  $1 < p < \infty$  ve eşleniği  $q$  ile Höldier eşitsizliğini  $\Gamma$  fonksiyonuna uygulayabiliriz.

$0 < x, y < \infty$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \int_0^\infty t^{x/p+y/q-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty (t^{x-1} e^{-t})^{1/p} (t^{y-1} e^{-t})^{1/q} dt \\
&\leq \int_0^\infty (t^{x-1} e^{-t})^{1/p} \int_0^\infty (t^{y-1} e^{-t})^{1/q} dt \\
&\leq \Gamma(x)^{1/p} \Gamma(y)^{1/q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &\leq \Gamma(x)^{1/p} \Gamma(y)^{1/q} \\
\ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \frac{1}{p} \Gamma(x) \frac{1}{q} \Gamma(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. Gamma fonksiyonu yardımıyla bazı değerler hesaplanmış olup aşağıdaki tabloda verilmiştir.

|                       |                         |
|-----------------------|-------------------------|
| $\Gamma(0)$           | <i>Tanımsız</i>         |
| $\Gamma(\frac{1}{2})$ | $\sqrt{\pi}$            |
| $\Gamma(1)$           | 1                       |
| $\Gamma(\frac{3}{2})$ | $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ |
| $\Gamma(2)$           | 1                       |
| $\Gamma(\frac{5}{2})$ | $\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$ |
| $\Gamma(3)$           | 2                       |
| $\Gamma(\infty)$      | $\infty$                |

**Tablo 2.1.**

**Tanım 2.1.12.**  $\text{erf}(x)$  ile gösterilen hata fonksiyonu

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

şeklinde tanımlanır [15].

Bu fonksiyona ilişkin aşağıdaki değerler ve eşitlikler mevcuttur.

1.  $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$
2.  $\text{erf}(0) = 0$
3.  $\text{erf}(\infty) = 1$

**Tanım 2.1.13.**

$$w(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona Wright fonksiyonu denir [15].

**Tanım 2.1.14.**

$$J_{\gamma}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \cos(\gamma\theta - z \sin \theta) d\theta$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Anger fonksiyonu denir [15].

**Tanım 2.1.15.** Riemann Liouville kesirli türevi,

$q > 0$ ,  $q \in \mathbb{R}$  ve  $n - 1 \leq q \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n - q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)}{(x - t)^{1-n+q}} dt$$

şeklindedir [15].

**Tanım 2.1.16.** Riemann Liouville kesirli integrali,

$q > 0$ ,  $q \in \mathbb{R}$  ve  $n - 1 \leq q \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere,

$$\frac{d^{-q} f(x)}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x - t)^{1-q}} dt$$

şeklindedir [15].

**Tanım 2.1.17.**  $e^z$  üstel fonksiyonun genelleştirilmesi olan ve 1903 yılında Mittag-Leffler tarafından bulunan bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

olarak ifade edilir. İki parametrelili fonksiyon tipi ise

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

seri açılımı şeklinde tanımlanmıştır [15].

**Tanım 2.1.18.**  $f(t)$  fonksiyonu alınırsa  $\alpha$  ve  $t$  noktaları limit noktaları değerleri üzere

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p, r) f(t - rh)$$

eşitliği sağlanır.

Burada  $m = p$  ise m. dereceden türevi,  $m = -p$  ise m-katlı integrali temsil eder. Ayrıca şunu da belirtelim ki  $\nu$  reel bir sayı olmak üzere  $f(t) = (t - a)^\nu$  şeklindeki fonksiyonların kesirli türevleri Grunwald-Letnikov tarafından tanımlanan

$${}_a D_t^p (t - a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - p + 1)} (t - a)^{\nu-p}$$

formülü ile hesaplanır [15].

**Tanım 2.1.19.**  $E_t(\nu, \alpha)$  ile gösterilen Mellin-Ross fonksiyonu  $e^{\alpha t}$  üstel fonksiyonunun kesirli integralini alırken kullanılır. Bu fonksiyonun özelliği hem Gamma fonksiyonu hem de Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden yazılmalıdır. Öyle ki

$$\begin{aligned} E_t(\nu, \alpha) &= t^\nu e^{\alpha t} \Gamma^*(\nu, \alpha t) \\ E_t(\nu, \alpha) &= t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)} \\ &= t^\nu E_{1, \nu+1}(\alpha t) \end{aligned}$$

şeklinde olup, burada

$$\Gamma^*(\nu, t) = \frac{1}{\Gamma(\nu) t^\nu} \int_0^t e^{-x} x^{\nu-1} dx, \quad \nu > 0$$

ifadesine de tamamlanmış Gamma fonksiyonu denir [15].

**Tanım 2.1.20.** Riemann Liouville yaklaşımı  $t = a$  da kesirli türevin limit değerleriyle verilen başlangıç şartlarını içermektedir. Örneğin;

$$\lim_{t \rightarrow a} D_t^{\alpha-1} f(t) = b_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow a} D_t^{\alpha-2} f(t) = b_2,$$

...

$$\lim_{t \rightarrow a} D_t^{\alpha-n} f(t) = b_n.$$

Burada  $b_k$ ,  $k=1,2,3,\dots,n$  dir. Böylece başlangıç koşullarından oluşan başlangıç değer problemi Riemann-Liouville yaklaşımı ile başarıyla çözülebilir. Bu çözümler pratikte kullanışsızdır. Çünkü böyle başlangıç şartlarının fiziksel karşılığı mevcut değildir. Bu durum M.Caputo tarafından geliştirilen,  $y'(a)$ ,  $y''(a)$ , ..., gibi tamsayı mertebeden türevlerin  $t = a$  noktasındaki limit değerlerini içeren kesirli türevlere sahip diferensiyel denklemler için verilen başlangıç-değer problemlerinin başlangıç şartlarını formülize eden Caputo yaklaşımı ile çözülmüştür. Caputo kesirli türev tanımı,  $f(t)$  fonksiyonu  $n$  defa sürekli diferansiyellenebilir olmak üzere  $n - 1 \leq q \leq n$  için

$${}^C D_t^p = D^{\alpha-n} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}$$

olarak Caputo tarafından tanımlanmıştır [15].

**Tanım 2.1.21.**  $X$  bir metrik uzay olsun. Eğer  $T$  operatörü aşağıda verilen koşulları sağlarsa bu operatöre "Daralma Dönüşümü" denir [16].

1.  $T : X \rightarrow X$
2.  $\forall x, y \in X$  için  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere

$$d(T[x], T[y]) \leq \alpha d(x, y)$$

dir.

**Tanım 2.1.22.**  $X$  ve  $Y$  Banach uzayları ve  $A : X \rightarrow Y$  lineer operatörü verilsin. Eğer  $A$  operatörü  $X$  uzayının her sınırlı kümesini,  $Y$  uzayının bir ön kompakt kümesine çeviriyorsa  $A$ 'ya kompakt lineer operatör veya tamamen sürekli lineer operatör denir [16].

**Tanım 2.1.23.**  $C[0, 1]$  uzayının bir  $F$  alt kümesini ve bir  $a \in [0, 1]$  ögesini alalım. Herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $x \in B_\delta(a)$  ve her  $f \in F$  için  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta > 0$  sayısı bulunabiliyorsa  $F$  ye  $a$  da eşsüreklidir denir [14].

**Teorem 2.1.1.**  $X$  Banach uzayı ve  $T : X \rightarrow X$  sürekli bir operatör olsun. Bu takdirde ya  $T$  sabit bir noktaya sahiptir yada  $\{x \in X \mid x = \lambda T_x, \lambda \in (0, 1)\}$  cümlesi sınırsızdır [16].

**Teorem 2.1.2.**  $A \in C(0, 1)$  için  $A$  kompakt ise gerek ve yeter koşul  $A$  kapalı, sınırlı ve eş süreklidir. Banach uzayındaki kompakt operatörler mutlak süreklidir [16].

**Teorem 2.1.3.**  $K$  Banach uzayı olsun.  $F : K \rightarrow K$  bir daralma dönüşümü olmak üzere bu takdirde  $F$  tek bir sabit noktaya sahiptir. Yani  $A \in K$  öyle ki  $F(A) = A$  dır [16].

**Teorem 2.1.4.**  $D \subset R^2$ ,  $R^2$  bir bölge olsun.  $\exists K > 0$  sayısı öyle ki  $\forall (x, y_1)$  ve  $(x, y_2)$  için

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \leq K | y_1 - y_2 |$$

şartı sağlanıyorsa  $f(x, y)$  fonksiyonu  $y$  değişkenine göre Lipschitz'dir denir [14].

### 3. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Diferansiyel dönüşüm yöntemi tek boyutlu, iki boyutlu, üç boyutlu ve n boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi olmak üzere 4 ayrı durumda incelenir. Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi adi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için, iki ve üç boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için, n boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi ise denklem sistemlerini ve bazı kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmekte kullanılır.

#### 3.1. Tek Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Bu yöntem tek değişken içerdiğinden adi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılır. Bu yönteme geçmeden önce diferansiyel operatörün özelliklerini inceleyelim.

1.  $\frac{d}{dx} (u(x) \pm \alpha v(x)) = \frac{d}{dx} u(x) \pm \alpha \frac{d}{dx} v(x) \quad (\alpha \text{ keyfi sabit})$
2.  $\frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} u(x) \right) = \frac{d^2}{dx^2} u(x)$
3.  $\frac{d^n}{dx^n} (u(x) v(x)) = v(x) \frac{d^n}{dx^n} u(x) + \binom{n}{1} \frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} u(x) + \dots$   
 $+ \binom{n}{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) + u(x) \frac{d^n}{dx^n} v(x)$

**Tanım 3.1.1.**  $w(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu  $W(k)$  olmak üzere,

$w(x)$ 'nin tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=0} \quad (3.1.1)$$

olarak tanımlanır [1].

**Tanım 3.1.2.**  $W(k)$  dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k) x^k \quad (3.1.2)$$

biçiminde tanımlanır. (3.1.1) ve (3.1.2) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (3.1.3) eşitliği elde edilir.

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=0} x^k \quad (3.1.3)$$

(3.1.1) ve (3.1.2) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımı ile tek boyutlu diferansiyel dönüşüm için aşağıdaki teoremleri verelim [1].

**Teorem 3.1.1.**  $w(x)$ ,  $u(x)$  ve  $v(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x) = u(x) \pm v(x)$$

ise sırasıyla  $W(k)$ ,  $U(k)$  ve  $V(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = U(k) \pm V(k)$$

eşitliği sağlanır [1].

**İspat.**

$$u(x) \rightarrow U(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$$

ve

$$v(x) \rightarrow V(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0}$$

olmak üzere

$$w(x) = u(x) \pm v(x)$$

ise

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} (u(x) \pm v(x)) \right]_{x=0}$$

diferansiyel operatörün 1. özelliğinden

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} u(x) \pm \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} = \underbrace{\frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}}_{U(k)} + \underbrace{\frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0}}_{V(k)}$$

$$W(k) = U(k) \pm V(k)$$

elde edilir.

**Teorem 3.1.2.**  $w(x)$  ve  $u(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere eğer

$$w(x) = cu(x)$$

ise sırasıyla  $W(k)$  ve  $U(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$W(k) = cU(k)$$

**İspat.**

$$u(x) \rightarrow U(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$$

olduğundan

$$w(x) = cu(x)$$

olmak üzere

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} cu(x) \right]_{x=0}$$

olur. Diferansiyel operatörün 1. özelliğinden

$$W(k) = c \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} = cU(k)$$

olarak bulunur.

**Teorem 3.1.3.**  $w(x)$  ve  $u(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x) = \frac{d}{dx} u(x)$$

ise sırasıyla  $W(k)$  ve  $U(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = (k+1)U(k+1)$$

eşitliği sağlanır [1].

**İspat.**

$$u(x) \rightarrow U(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$$

olduğunu biliyoruz.

$$w(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

olmak üzere

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} \left( \frac{d}{dx} u(x) \right) \right]_{x=0}$$

diferansiyel operatörün 2. özelliğinden

$$\begin{aligned}
W(k) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} u(x) \right]_{x=0} = (k+1) \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} \left[ \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} u(x) \right]_{x=0}}_{U(k+1)} \\
&= (k+1) U(k+1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 3.1.4.**  $w(x)$  ve  $u(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.  $r \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$w(x) = \frac{d^r u(x)}{dx^r}$$

ise sırasıyla  $W(k)$  ve  $U(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = (k+1)(k+2) \dots (k+r) U(k+r) = \frac{(k+r)!}{k!} U(k+r)$$

eşitliği sağlanır [1].

**Teorem 3.1.5.**  $w(x)$ ,  $u(x)$  ve  $v(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.  $r \in \mathbb{N}$  olmak üzere eğer

$$w(x) = u(x) v(x)$$

ise sırasıyla  $W(k)$ ,  $U(k)$  ve  $V(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r) V(k-r)$$

eşitliği sağlanır [1].

**İspat.**

$$u(x) \longrightarrow U(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} \text{ ve } v(x) \longrightarrow V(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0}$$

olmak üzere  $w(x) = u(x) v(x)$  ise  $W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} (u(x) v(x)) \right]_{x=0}$  olur.

Diferansiyel operatörünün 3. özelliğinden

$$\begin{aligned}
W(k) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} (u(x) v(x)) \right]_{x=0} \\
&= \frac{1}{k!} \left[ v(x) \frac{d^k}{dx^k} u(x) + \binom{k}{1} \frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} u(x) \right. \\
&\quad + \binom{k}{2} \frac{d^2}{dx^2} v(x) \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} u(x) + \dots \\
&\quad \left. + \binom{k}{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) + u(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \\
W(k) &= \frac{1}{k!} \left[ v(x) \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} + \frac{1}{k!} \left[ \binom{k}{1} \frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} u(x) \right]_{x=0} \\
&\quad + \frac{1}{k!} \left[ \binom{k}{2} \frac{d^2}{dx^2} v(x) \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} u(x) \right]_{x=0} \\
&\quad + \dots + \frac{1}{k!} \frac{k!}{(k-1)!} \left[ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) \right]_{x=0} \\
&\quad + \frac{1}{k!} \left[ u(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \\
W(k) &= \frac{1}{k!} \left[ \left( \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right) v(x) \right]_{x=0} + \frac{1}{k!} \frac{k!}{(k-1)!} \left[ \frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} u(x) \right]_{x=0} \\
&\quad + \dots + \frac{1}{k!} \frac{k!}{(k-1)!} \left[ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) \right]_{x=0} \\
&\quad + \frac{1}{k!} \left[ u(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0}
\end{aligned}$$

$$W(k) = U(k)V(k) + U(k-1)V(1) + \dots + U(1)V(k-1) + U(0)V(k)$$

$$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$$

olur.

**Teorem 3.1.6.**  $w(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.  $m \in \mathbb{N}$  olmak üzere eğer

$$w(x) = x^m$$

ise  $W(k)$  verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

**İspat.** İspata önce  $\left[ \frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0}$  ifadesinin eşitini araştıralım. Burada karşımıza 3 durum çıkmaktadır.

1. Durum:  $k < m$  durumu

$$\left[ \frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = [m(m-1) \dots (m-k+1) x^{m-k}]_{x=0} = 0$$

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

2. Durum:  $k = m$  durumu

$$\left[ \frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = [m(m-1) \dots (m-m+1) x^{m-m}]_{x=0} = m!$$

$$W(m) = \frac{1}{m!} \left[ \frac{d^m}{dx^m} x^m \right]_{x=0} = \frac{1}{m!} m! = 1$$

3. Durum:  $k > m$  durumu

$$\left[ \frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = [m(m-1) \dots (m-m+1) 0]_{x=0} = 0 \text{ olur.}$$

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

Bu 3 durum göz önüne alınarak  $w(x) = x^m$  olmak üzere

$$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olur.  $w(x)$  in bazı değerleri için elde edilen  $W(k)$  değerlerinin bazıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

| $w(x)$                    | $W(k)$                                             |
|---------------------------|----------------------------------------------------|
| $w(x) = a$                | $W(k) = a\delta(k)$                                |
| $w(x) = ax$               | $W(k) = a\delta(k-1)$                              |
| $w(x) = ax^2$             | $W(k) = a\delta(k-2)$                              |
| $w(x) = ax^5$             | $W(k) = a\delta(k-5)$                              |
| $w(x) = 6x^8 + 7x^3 - 13$ | $W(k) = 6\delta(k-8) + 7\delta(k-3) - 13\delta(k)$ |

**Tablo 3.1**

**Teorem 3.1.7.**  $w(x)$ ,  $u(x)$  ve  $v(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x) = u(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x)$$

ise sırasıyla  $W(k)$ ,  $U(k)$  ve  $V(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = \sum_{r=0}^k (k-r+2)(k-r+1)U(r)V(k-r+2)$$

eşitliği sağlanır [1].

**İspat.** Önce  $f(x) = \frac{d^2}{dx^2} v(x)$  'e karşılık gelen diferansiyel dönüşümü bulalım. Teorem 3.1.4 ten  $r = 2$  için  $F(k) = (k+1)(k+2)V(k+2)$  olur.

Teorem 3.1.5 ten iki fonksiyonun çarpımının diferansiyel dönüşüm fonksiyonuna göre

$$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r)F(k-r)$$

şeklinde olur. Buradan

$$F(k-r) = (k-r+1)(k-r+2)V(k-r+2)$$

elde edilir. Bu iki ifadeden de

$$W(k) = \sum_{r=0}^k (k-r+2)(k-r+1)U(r)V(k-r+2)$$

eşitliği bulunur.

**Teorem 3.1.8.**  $w(x)$ ,  $u(x)$  ve  $v(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x) = \frac{d}{dx} u(x) \frac{d}{dx} v(x)$$

ise sırasıyla  $W(k)$ ,  $U(k)$  ve  $V(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır [1].

$$W(k) = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$$

**İspat.**  $f(x) = \frac{d}{dx} u(x)$  ve  $g(x) = \frac{d}{dx} v(x)$  olsun. Buradan  $F(k) = (k+1)U(k+1)$  ve  $G(k) = (k+1)V(k+1)$  olur. Teorem 3.1.5 iki fonksiyonun çarpımının diferansiyel dönüşüm fonksiyonundan

$$W(k) = \sum_{r=0}^k F(r)G(k-r)$$

şeklindedir. Burada

$$F(r) = (k+1)U(k+1) \quad \text{ve} \quad G(k) = (k+1)V(k+1)$$

olur. Sonuç olarak

$$W(k) = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$$

bulunur.

**Teorem 3.1.9.**  $w(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$  ve  $s(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.

Eğer

$$w(x) = u(x)v(x)s(x)$$

ise sırasıyla  $W(k)$ ,  $U(k)$ ,  $V(k)$  ve  $S(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = U(k) \otimes V(k) \otimes S(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} U(r)V(t)S(k-r-t)$$

eşitliği sağlanır [1].

**İspat.**  $f(x) = v(x)s(x)$  olsun. Teorem 3.1.5 iki fonksiyonun çarpımının diferansiyel dönüşüm fonksiyonundan  $F(k) = \sum_{r=0}^k V(r)S(k-r)$  olur. Burada

$w(x) = u(x)f(x)$  olacaktır. Teorem 3.1.5 ten

$$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r)F(k-r)$$

yazabiliriz.

$$F(k-r) = \sum_{t=0}^{k-r} V(t)S(k-r-t)$$

denklemden yerine yazılırsa

$$W(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} U(r)V(t)S(k-r-t)$$

olup, ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 3.1.10.**  $w(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$  ve  $s(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.

Eğer

$$w(x) = u(x)v(x)\frac{d^2}{dx^2}s(x)$$

ise sırasıyla  $W(k)$ ,  $U(k)$ ,  $V(k)$  ve  $S(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} (k-r-t+1)(k-r-t+2) U(r) V(t) S(k-r-t+2)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.**  $g(x) = \frac{d^2}{dx^2} s(x)$  olsun. Buna karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $G(k) = (k+1)(k+2)S(k+2)$  buradan  $f(x) = v(x)g(x)$  olur.

Teorem 3.1.5 iki fonksiyonun çarpımının diferansiyel dönüşüm fonksiyonundan

$$F(r) = \sum_{t=0}^k V(r) G(k-r)$$

$$G(k-r) = (k-r+1)(k-r+2)S(k-r+2)$$

olur. Sonuç olarak  $w(x) = u(x)f(x)$  olacaktır. Teorem 3.1.5 ten

$$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r) F(k-r)$$

elde edilir.

$$F(k-r) = \sum_{t=0}^{k-r} V(t) G(k-r-t)$$

denklemden yerine yazılırsa

$$W(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} (k-r-t+1)(k-r-t+2) U(r) V(t) S(k-r-t+2)$$

olup böylece ispat sonuçlanır.

**Teorem 3.1.11.**  $w(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.  $\lambda \in \mathbb{R}$  olmak üzere eğer

$$w(x) = a^{\lambda x}$$

ise  $W(k)$  verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** (3.1.1) den

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} a^{\lambda x} \right]_{x=0}$$

olur. Şimdi  $k$  nın aldığı değerlere göre  $W(k)$  değerlerini hesaplırsak

$k = 0$  için

$$W(0) = \frac{1}{0!} [a^{\lambda x}]_{x=0} = \frac{1}{0!} = 1$$

$k = 1$  için

$$W(1) = \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{dx} a^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{1!} [\lambda \ln a a^{\lambda x}]_{x=0} = \frac{1}{1!} \lambda \ln a$$

$k = 2$  için

$$W(2) = \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{dx^2} a^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{2!} [\lambda^2 (\ln a)^2 a^{\lambda x}]_{x=0} = \frac{1}{2!} \lambda^2 (\ln a)^2$$

$k = 3$  için

$$W(3) = \frac{1}{3!} \left[ \frac{d^3}{dx^3} a^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{3!} [\lambda^3 (\ln a)^3 a^{\lambda x}]_{x=0} = \frac{1}{3!} \lambda^3 (\ln a)^3$$

bu değerlerden anlaşılabacağı gibi

$$W(k) = \frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır.

**Teorem 3.1.12.**  $w(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.  $\lambda \in \mathbb{R}$  olmak üzere eğer

$$w(x) = e^{\lambda x}$$

ise  $W(k)$  verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır [7].

**İspat.** Teorem 3.1.11 den  $a = e$  alınırsa

$$W(k) = \frac{\lambda^k (\ln e)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

olur.

**Teorem 3.1.13.**  $w(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.  $\lambda \in \mathbb{R}$  olmak üzere eğer

$$w(x) = e^{\lambda x + b}$$

ise  $W(k)$  verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^b$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.**  $w(x) = e^{\lambda x + b} = e^{\lambda x} e^b$  olmak üzere

teorem 3.1.2 den ve diferansiyel dönüşümün lineerlik özelliğinden  $u(x) = e^{\lambda x}$  ve  $e^b$  yi sabit olarak alırsak,  $W(k) = U(k) e^b$  olur. Teorem 3.1.12 den  $U(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$  olduğu biliniyor.

Sonuç olarak

$$W(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^b$$

bulunur.

**Teorem 3.1.14.**  $w(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer

$$w(x) = \sinh(\lambda x)$$

ise  $W(k)$  verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} & k \text{ tek ise} \\ 0 & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.**

$$w(x) = \sinh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} = \frac{e^{\lambda x}}{2} - \frac{e^{-\lambda x}}{2}$$

olur. Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 den

$$W(k) = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{(-\lambda)^k}{k!} \right)$$

olur.

$k$  tek ise

$$W(k) = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{(-\lambda)^k}{k!} \right) = \frac{\lambda^k}{k!},$$

$k$  çift ise

$$W(k) = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{(-\lambda)^k}{k!} \right) = 0$$

olur.

**Teorem 3.1.15.**  $w(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer

$$w(x) = \cosh(\lambda x)$$

ise  $W(k)$  verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \begin{cases} 0 & k \text{ tek ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!} & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

**Teorem 3.1.16.**  $w(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere eğer

$$w(x) = \sin(ax + b)$$

ise  $W(k)$  verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \frac{a^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$$

eşitliği sağlanır [7].

**İspat.**  $w(x) = \sin(ax + b)$  ise (3.1.1) den bu fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} \sin(ax + b) \right]_{x=0}$$

şimdi  $k$  nın aldığı değerlere göre  $W(k)$  değerlerini hesaplırsak

$k = 0$  için

$$W(0) = \frac{1}{0!} [\sin(ax + b)]_{x=0} = \frac{1}{0!} \sin(b) = \frac{1}{1!} a^0 \sin\left(\frac{0\pi}{2} + b\right)$$

$k = 1$  için

$$\begin{aligned} W(1) &= \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{dx} \sin(ax + b) \right]_{x=0} = \frac{1}{1!} [a \cos(ax + b)]_{x=0} \\ &= \frac{1}{1!} a \cos(b) = \frac{1}{1!} a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \end{aligned}$$

$k = 2$  için

$$\begin{aligned} W(2) &= \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{dx^2} \sin(ax + b) \right]_{x=0} = \frac{1}{2!} [-a^2 \sin(ax + b)]_{x=0} \\ &= -\frac{1}{2!} a^2 \sin(b) = -\frac{1}{2!} a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{2} + b\right) \end{aligned}$$

$k = 3$  için

$$\begin{aligned} W(3) &= \frac{1}{3!} \left[ \frac{d^3}{dx^3} \sin(ax + b) \right]_{x=0} = \frac{1}{3!} [-a^3 \cos(ax + b)]_{x=0} \\ &= -\frac{1}{3!} \cos a^3(b) = -\frac{1}{3!} a^3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + b\right) \end{aligned}$$

bu değerlerden anlaşılacağı gibi

$$W(k) = \frac{a^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$$

dır.

**Teorem 3.1.17.**  $w(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere eğer

$$w(x) = \cos(ax + b)$$

ise  $W(k)$  verilen fonksiyonun diferansiyel dtm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k) = \frac{a^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$$

eşitliği sağlanır [7].

**Teorem 3.1.18.**  $w(x)$  ve  $u(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.  $k \in \mathbb{R}$  olmak üzere eğer

$$w(x) = \int_{x_0}^x u(t) dt$$

ise  $W(k)$  ve  $U(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dtm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = \frac{U(k-1)}{k}$$

eşitliği sağlanır [17].

**İspat.** İspata geçmeden nce analizden iyi bilinen bir yardımcı teorem verelim.

**Lemma 3.1.19.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu integrallenebilir olsun.  $[a, b]$  zerinde

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

eşitliği ile tanımlı  $F$  fonksiyonu  $f$  nin srekli olduğu her noktada trevlidir ve

$$F'(x) = f(x)$$

dir. Bu teoremden hareketle

$$w'(x) = u(x)$$

olur. O halde aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned}(k+1) W(k+1) &= U(k) \\ W(k+1) &= \frac{U(k)}{(k+1)} \\ W(k+1) &= \frac{U(k-1)}{k}\end{aligned}$$

**Teorem 3.1.20.**  $w(x)$ ,  $u(x)$  ve  $v(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x) = v(x) \int_{x_0}^x u(t) dt$$

ise  $W(k)$ ,  $U(k)$  ve  $V(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = V(k) \otimes \frac{U(k-1)}{k}$$

eşitliği sağlanır [17].

**Teorem 3.1.21.**  $w(x)$ ,  $u(x)$  ve  $v(x)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x) = \int_{x_0}^x u(t) v(t) dt$$

ise  $W(k)$ ,  $U(k)$  ve  $V(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = \frac{U(k-1) \otimes V(k-1)}{k}$$

eşitliği sağlanır [17].

### 3.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

**Tanım 3.2.1.**  $w(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $W(k, h)$  olmak üzere,  $w(x, y)$ 'nin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (3.2.1)$$

olarak tanımlanır [10].

**Tanım 3.2.2.**  $W(k, h)$  dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \quad (3.2.2)$$

biçimde tanımlanır. (3.2.1) ve (3.2.2) eşitliklerini dikkate alarak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz.

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} x^k y^h \quad (3.2.3)$$

(3.2.1) ve (3.2.2) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımı ile iki boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir [10].

**Teorem 3.2.1.**  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve  $V(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$$

eşitliği sağlanır [10].

**İspat.**

$$u(x, y) \rightarrow U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$v(x, y) \rightarrow V(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

olmak üzere

$$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$$

ise

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} (u(x, y) \pm v(x, y)) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

diferansiyel fonksiyonun 1. özelliğinden

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \pm \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}}_{U(k, h)} \pm \underbrace{\frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}}_{V(k, h)} \end{aligned}$$

$$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$$

elde edilir.

**Teorem 3.2.2.**  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere eğer

$$w(x, y) = cu(x, y)$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$  ve  $U(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = cU(k, h)$$

eşitliği sağlanır [10].

**İspat.**

$$u(x, y) \rightarrow U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

olduğundan

$$w(x, y) = cu(x, y)$$

ise

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} cu(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

olur. Diferansiyel fonksiyonun 1. özelliğinden

$$W(k, h) = c \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} = cU(k, h)$$

olarak bulunur.

**Teorem 3.2.3.**  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$  ve  $U(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$$

eşitliği sağlanır [10].

**İspat.**  $u(x, y) \rightarrow U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{x=0, y=0}$  olduğunu biliyoruz.

$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$  ise

$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right) \right]_{x=0, y=0}$  dır. Diferansiyel fonksiyonun 2. özelliğinden

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k+1} \partial y^h} u(x, y) \right]_{x=0, y=0} \\ &= (k+1) \frac{1}{(k+1)!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k+1} \partial y^h} u(x, y) \right]_{x=0, y=0} \\ &= (k+1) U(k+1, h) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 3.2.4.**  $w(x, y)$  ve  $u(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$  ve  $U(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = (h+1) U(k, h+1)$$

eşitliği sağlanır [3].

**Teorem 3.2.5.**  $w(x, y)$  ve  $u(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.  $r, s \in \mathbb{N}$  olmak üzere eğer

$$w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$  ve  $U(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = (k+1)(k+2) \dots (k+r)(h+1)(h+2) \dots (h+s) U(k+r, h+s)$$

eşitliği sağlanır.

**Teorem 3.2.6.**  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y) = u(x, y) v(x, y)$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve  $V(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h V(r, h-s) U(k-r, s)$$

**İspat.**

$$u(x, y) \rightarrow U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$v(x, y) \rightarrow V(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

olmak üzere  $w(x, y) = u(x, y) v(x, y)$  ise

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} (u(x, y) v(x, y)) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left( \frac{\partial^k}{\partial y^k} \binom{k}{0} v(x, y) \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x, y) + \binom{k}{1} \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} u(x, y) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \binom{k}{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} v(x, y) \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + u(x, y) \frac{\partial^k}{\partial x^k} v(x, y) \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left( \binom{k}{0} \binom{h}{0} \frac{\partial^h}{\partial y^h} v(x, y) \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x, y) + \right. \\ &\quad \binom{k}{0} \binom{h}{1} \frac{\partial^{h-1}}{\partial y^{h-1}} v(x, y) \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^k \partial y} u(x, y) \\ &\quad + \dots + \binom{k}{0} \binom{h}{1} \frac{\partial^{h+1}}{\partial y^h \partial x} v(x, y) \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} u(x, y) \\ &\quad + \binom{k}{1} \binom{h}{1} \frac{\partial^h}{\partial y^{h-1} \partial x} v(x, y) \frac{\partial^k}{\partial x^{k-1} \partial y} u(x, y) \\ &\quad + \dots + \binom{k}{r} \binom{h}{s} \frac{\partial^{h-s+r}}{\partial y^{h-s} \partial x^r} v(x, y) \frac{\partial^{k-r+s}}{\partial x^{k-r} \partial y^s} u(x, y) \\ &\quad \left. + \dots + \binom{k}{k} \binom{h}{h} \frac{\partial^k}{\partial x^k} v(x, y) \frac{\partial^h}{\partial y^h} u(x, y) \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left[ \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \binom{k}{r} \binom{h}{s} \frac{\partial^{k-r+s}}{\partial x^{k-r} \partial y^s} u(x, y) \frac{\partial^{h-s+r}}{\partial x^r \partial y^{h-s}} v(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ &= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \frac{1}{(k-r)!s!(h-s)!r!} \left[ \binom{k}{r} \binom{h}{s} \frac{\partial^{k-r+s}}{\partial x^{k-r} \partial y^s} u(x, y) \frac{\partial^{h-s+r}}{\partial x^r \partial y^{h-s}} v(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ W(k, h) &= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h V(r, h-s) U(k-r, s) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 3.2.7.**  $w(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.  $m \in \mathbb{Z}$  olmak üzere eğer

$$w(x, y) = x^m y^n$$

ise  $W(k, h)$  verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k, h) = \delta(k - m, h - n) = \begin{cases} 1, & k = m \text{ ve } h = n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.[3].

**Teorem 3.2.8.**  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.

Eğer

$$w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2}$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve  $V(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k - r + 2)(k - r + 1) U(r, h - s) V(k - r + 2, s)$$

eşitliği sağlanır [3].

**Teorem 3.2.9**  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.

Eğer

$$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve  $V(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r + 1)(k - r + 1) U(r + 1, h - s) V(k - r + 1, s)$$

eşitliği sağlanır [3].

**Teorem 3.2.10.**  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.

Eğer

$$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve  $V(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s + 1)(h - s + 1) U(r, h - s + 1) V(k - r, s + 1)$$

**Teorem 3.2.11.**  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.

Eğer

$$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$  ve  $V(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1) U(k-r+1, s) V(r, h-s+1)$$

eşitliği sağlanır [3].

**Teorem 3.2.12.**  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  ve  $s(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y) = w(x, y) u(x, y) v(x, y) s(x, y)$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$ ,  $V(k, h)$  ve  $S(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p) V(t, s) S(k-r-t, p)$$

**Teorem 3.2.13.**  $w(x, y)$ ,  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  ve  $s(x, y)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y) = u(x, y) v(x, y) \frac{\partial^2 s(x, y)}{\partial x^2}$$

ise sırasıyla  $W(k, h)$ ,  $U(k, h)$ ,  $V(k, h)$  ve  $S(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+2) U(r, h-s-p) V(t, s) S(k-r-t+2, p)$$

eşitliği sağlanır [3].

### 3.3. Üç Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

**Tanım 3.3.1.**  $w(x, y, t)$  diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,  $w(x, y, t)$ 'nin üç boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[ \frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} w(x, y, t) \right]_{(0,0,0)} \quad (3.3.1)$$

olarak tanımlanır. Burada daha önce de olduğu gibi, dikkat edilecek olursa dönüşüm fonksiyonunu temsil etmek için büyük harfler, orijinal fonksiyonu ifade etmek için de küçük harfler kullanılmıştır [4].

**Tanım 3.3.2.**  $W(k, h, m)$  dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} W(k, h, m) x^k y^h t^m \quad (3.3.2)$$

olarak tanımlanır. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminde olduğu gibi (3.2.3) eşitliğine benzer şekilde (3.3.1), (3.3.2) denklemleri dikkate alınır,

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!m!} \left[ \frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} w(x, y, t) \right]_{(0,0,0)} x^k y^h t^m \quad (3.3.3)$$

yazabiliriz.

Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir [4].

**Teorem 3.3.1.**  $w(x, y, t)$ ,  $u(x, y, t)$  ve  $v(x, y, t)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y, t) = u(x, y, t) \pm v(x, y, t)$$

ise sırasıyla  $W(k, h, m)$ ,  $U(k, h, m)$  ve  $V(k, h, m)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h, m) = U(k, h, m) \pm V(k, h, m)$$

eşitliği sağlanır [4].

**Teorem 3.3.2.**  $w(x, y, t)$  ve  $u(x, y, t)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.

$c \in \mathbb{R}$  olmak üzere eğer

$$w(x, y, t) = cu(x, y, t)$$

ise sırasıyla  $W(k, h, m)$  ve  $U(k, h, m)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h, m) = cU(k, h, m)$$

eşitliği sağlanır [4].

**Teorem 3.3.3.**  $w(x, y, t)$  ve  $u(x, y, t)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}$$

ise sırasıyla  $W(k, h, m)$  ve  $U(k, h, m)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h, m) = (k+1)U(k+1, h, m)$$

eşitliği sağlanır [4].

**Teorem 3.3.4.**  $w(x, y, t)$  ve  $u(x, y, t)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}$$

ise sırasıyla  $W(k, h, m)$  ve  $U(k, h, m)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h, m) = (h+1)U(k, h+1, m)$$

eşitliği sağlanır [4].

**Teorem 3.3.5.**  $w(x, y, t)$  ve  $u(x, y, t)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y, t) = \frac{\partial u^{r+s+p}(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}$$

ise sırasıyla  $W(k, h, m)$  ve  $U(k, h, m)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h, m) = \frac{(k+r)!}{k!} \frac{(h+s)!}{s!} \frac{(m+p)!}{p!} U(k+r, h+s, m+p)$$

$$W(k, h, m) = (k+1)U(k+1, h, m)$$

eşitliği sağlanır [4].

**Teorem 3.3.6.**  $w(x, y, t)$ ,  $u(x, y, t)$  ve  $v(x, y, t)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} v(x, y, t)$$

ise sırasıyla  $W(k, h, m)$ ,  $U(k, h, m)$  ve  $V(k, h, m)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s, p)V(r, h-s+1, m-p)$$

eşitliği sağlanır [4].

### 3.4. N Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

**Tanım 3.4.1.**  $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere,

$w(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 'nin  $n$  boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{1}{k_1!k_2!\dots k_n!} \left[ \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} w(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \right]_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0 \\ \dots \\ x_n=0}} \quad (3.4.1)$$

olarak tanımlanır. Burada daha önce de olduğu gibi dikkat edilecek olursa dönüşüm fonksiyonunu temsil etmek için büyük harfler, orijinal fonksiyonu ifade etmek için de küçük harfler kullanılmıştır [8].

**Tanım 3.4.2.**  $W(k_1, k_2, \dots, k_n)$  dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} W(k_1, k_2, \dots, k_n) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (3.4.2)$$

olarak tanımlanır.

Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminde olduğu gibi (3.2.3) eşitliğine benzer şekilde (3.4.1), (3.4.2) denklemleri dikkate alınırsa,

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!k_2!\dots k_n!} \left[ \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} w(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \right]_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0 \\ \dots \\ x_n=0}} \times x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (3.4.3)$$

yazabiliriz.  $n$  boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir [8].

**Teorem 3.4.1.**  $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \pm v(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ise sırasıyla  $W(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ,  $U(k_1, k_2, \dots, k_n)$  ve  $V(k_1, k_2, \dots, k_n)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = U(k_1, k_2, \dots, k_n) \pm V(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

**Teorem 3.4.2.**  $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere eğer

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = cu(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ise sırasıyla  $W(k_1, k_2, \dots, k_n)$  ve  $U(k_1, k_2, \dots, k_n)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = cU(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

eşitliği sağlanır [8].

**Teorem 3.4.3.**  $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ise sırasıyla  $W(k_1, k_2, \dots, k_n)$  ve  $U(k_1, k_2, \dots, k_n)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = (k_1 + 1)U(k_1 + 1, k_2, \dots, k_n)$$

eşitliği sağlanır [8].

**Teorem 3.4.4.**  $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ise sırasıyla  $W(k_1, k_2, \dots, k_n)$  ve  $U(k_1, k_2, \dots, k_n)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1+r_1)!}{k_1!} \frac{(k_2+r_2)!}{k_2!} \dots \frac{(k_n+r_n)!}{k_n!} U(k_1+r_1, k_2+r_2, \dots, k_n+r_n)$$

eşitliği sağlanır [8].

### 3.5. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemine İlişkin Uygulamalar

**Uygulama 3.5.1.**  $y' - 5y = 0$ ,  $y(0) = 1$  probleminin çözümünü bulalım.

**Çözüm.** Diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = e^{5x}$  tir. Şimdi diferansiyel dönüşüm yöntemi ile problemi çözelim.

$y(x)$ 'e karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $Y(k)$  olmak üzere,  $y'(x)$ 'e karşılık gelen dönüşüm fonksiyonu  $(k+1)Y(k+1)$  dir.

Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$(k+1)Y(k+1) - 5Y(k) = 0$$

$$Y(k+1) = \frac{5}{k+1}Y(k)$$

olduğunu elde ederiz.

Başlangıç şartından

$$Y(0) = 1$$

dir.

$k = 0$  için

$$Y(1) = 5Y(0) = 5$$

$k = 1$  için

$$Y(2) = \frac{5}{2}Y(1) = \frac{5^2}{2!}$$

$k = 2$  için

$$Y(3) = \frac{5}{3}Y(2) = \frac{5^3}{3!}$$

$k = 3$  için

$$Y(4) = \frac{5}{4}Y(3) = \frac{5^4}{4!}$$

$$Y(k) = \frac{5^k}{k!},$$

bulunur. Aranan çözümün

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k$$

olduğunu biliyoruz. Bulduğumuz bu  $Y(k)$  değerlerini yerine yazarsak

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k = e^{5x}$$

buluruz. Bu da analitik çözüm ile aynıdır.

**Uygulama 3.5.2.**  $y' - xy = 0$ ,  $y(0) = 1$  probleminin çözümünü bulalım.

**Çözüm.**  $y(x)$ 'e karşılık gelen diferensiyel dönüşüm fonksiyonu  $Y(k)$  olmak üzere,  $y'(x)$ 'e karşılık gelen dönüşüm fonksiyonu  $(k+1)Y(k+1)$  dır. Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$(k+1)Y(k+1) - \delta(k-1) \otimes Y(k) = 0$$
$$(k+1)Y(k+1) - \sum_{r=0}^k \delta(r-1)Y(k-r) = 0$$

$$Y(k+1) = \frac{\sum_{r=0}^k \delta(r-1)Y(k-r)}{k+1}$$

elde ederiz.  $y(0) = 1$  ise  $y'(0) = 0$  dır. Buradan  $Y(1) = 0$  olduğunu yazabiliriz.

$Y(0) = 1$ ,  $Y(1) = 0$  başlangıç şartlarından,

$k = 0$  için

$$Y(1) = 0$$

$k = 1$  için

$$Y(2) = \frac{Y(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

$k = 2$  için

$$Y(3) = \frac{Y(1)}{3} = 0$$

$k = 3$  için

$$Y(4) = \frac{Y(2)}{4} = \frac{1}{8}$$

$k = 4$  için

$$Y(5) = \frac{Y(3)}{5} = 0$$

$k = 5$  için

$$Y(6) = \frac{Y(4)}{6} = \frac{1}{48}$$

$k = 6$  için

$$Y(7) = \frac{Y(5)}{7} = 0$$

$k = 7$  için

$$Y(8) = \frac{Y(6)}{8} = \frac{1}{384}$$

$k = 8$  için

$$Y(9) = \frac{Y(7)}{9} = 0,$$

buluruz. Aranan çözümün

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k$$

olduğunu biliyoruz. Bulduğumuz  $Y(k)$  değerlerini bu bağıntıda yerine yazarsak  $y(x)$  fonksiyonunu

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 \\ &\quad + Y(5)x^5 + Y(6)x^6 + Y(7)x^7 + Y(8)x^8 + Y(9)x^9 + \dots \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \frac{1}{384}x^8 + \dots \end{aligned}$$

olarak buluruz.

**Uygulama 3.5.3.**  $y''(x) - xy = \lambda y$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  Sturm Liouville probleminin çözümünü bulalım.

**Çözüm.**  $y(x)$ 'e karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $Y(k)$  olmak üzere,  $y'(x)$ 'e karşılık gelen dönüşüm fonksiyonu  $(k+1)Y(k+1)$  ve  $y''(x)$ 'e karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $(k+1)(k+2)Y(k+2)$  dir. Bu ifadeleri denklemden yerine yazarsak

$$\begin{aligned} (k+1)(k+2)Y(k+2) - \delta(k-1) \otimes Y(k) &= \lambda Y(k) \\ (k+1)(k+2)Y(k+2) - \sum_{r=0}^k \delta(k-1)Y(k-r) &= \lambda Y(k) \\ Y(k+2) &= \frac{\sum_{r=0}^k \delta(r-1)Y(k-r) + \lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

olur.

$Y(0) = 0$ ,  $Y(1) = 1$  başlangıç şartlarından,

$k = 0$  için

$$Y(2) = \frac{\lambda Y(0)}{2} = 0$$

$k = 1$  için

$$Y(3) = \frac{y(0) + \lambda Y(1)}{6} = \frac{\lambda}{6}$$

$k = 2$  için

$$Y(4) = \frac{y(1) + \lambda Y(2)}{12} = \frac{1}{12}$$

$k = 3$  için

$$Y(5) = \frac{y(2) + \lambda Y(3)}{20} = \frac{\lambda^2}{120}$$

$k = 4$  için

$$Y(6) = \frac{y(3) + \lambda Y(4)}{30} = \frac{\lambda}{120}$$

$k = 5$  için

$$Y(7) = \frac{y(4) + \lambda Y(5)}{42} = \frac{\lambda^3 + 10}{5040}$$

$k = 6$  için

$$Y(8) = \frac{y(5) + \lambda Y(6)}{56} = \frac{\lambda^2}{3360}$$

$k = 7$  için

$$Y(9) = \frac{y(6) + \lambda Y(7)}{72} = \frac{52\lambda + \lambda^4}{362880}$$

Aranan çözümün

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k$$

olduğunu biliyoruz. Bulduğumuz  $Y(k)$  değerlerini bu bağıntıda yerine yazarsak  $y(x)$  fonksiyonunu

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 \\ &\quad + Y(5)x^5 + Y(6)x^6 + Y(7)x^7 + Y(8)x^8 + Y(9)x^9 + \dots \\ &= x + \frac{\lambda}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{\lambda^2}{120}x^5 + \frac{\lambda}{120}x^6 + \\ &\quad \frac{\lambda^3 + 10}{5040}x^7 + \frac{\lambda^2}{3360}x^8 + \frac{52\lambda + \lambda^4}{362880}x^9 + \dots \end{aligned}$$

olarak buluruz.

$\lambda = 2$  alalım ve  $x$ 'in bazı değerleri için  $y(x)$  toplamını hesaplayalım.

| $x$ | $y(x) = \sum_{k=0}^9$ |
|-----|-----------------------|
| 0   | 0                     |
| 0.1 | 0.10034               |
| 0.2 | 0.20281               |
| 0.3 | 0.30976               |
| 0.4 | 0.42388               |
| 0.5 | 0.54821               |
| 0.6 | 0.68629               |
| 0.7 | 0.84228               |
| 0.8 | 1.02108               |
| 0.9 | 1.22856               |
| 1   | 1.27176               |

**Tablo 3.2.**

**Uygulama 3.5.4.**  $y' = xy^2 + (1 - 2x)y + x - 1$ , Riccati diferansiyel denkleminin  $y(0) = 2$  başlangıç şartına göre çözümünü bulalım.

**Çözüm.**  $y(x)$ 'e karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $Y(k)$  olmak üzere,  $y'(x)$ 'e karşılık gelen dönüşüm fonksiyonu  $(k+1)Y(k+1)$  dır. Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
(k+1)Y(k+1) &= \delta(k-1) \otimes Y(k) \otimes Y(k) + \delta(k) - \\
&\quad (\delta(k) - 2\delta(k-1)) \otimes Y(k) + \delta(k-1) - \delta(k) \\
(k+1)Y(k+1) &= \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \delta(r-1) Y(t) Y(k-r-t) + \\
&\quad \sum_{r=0}^k (\delta(r) - 2\delta(r-1)) Y(k-r) + \delta(k-1) - \delta(k) \\
Y(k+1) &= \frac{\sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \delta(r-1) Y(t) Y(k-r-t)}{k+1} \\
&\quad + \frac{\sum_{r=0}^k (\delta(r) - 2\delta(r-1)) Y(k-r) + \delta(k-1) - \delta(k)}{k+1}
\end{aligned}$$

olur.

$k = 0$  için

$$Y(1) = \frac{Y(0) - 1}{1} = 1$$

$k = 1$  için

$$Y(2) = \frac{Y(0) + Y(0) + Y(1) - 2Y(0) + 1}{2} = 1$$

$k = 2$  için

$$Y(3) = \frac{Y(0) + Y(1) + Y(1)Y(0) + Y(2) - 2Y(1)}{3} = 1$$

$k = 3$  için

$$Y(4) = \frac{Y(0) + Y(2) + Y(1)Y(1) + Y(2)Y(0) + Y(3) - 2Y(2)}{4} = 1$$

$k = 4$  için

$$Y(5) = \frac{Y(0) + Y(3) + Y(1)Y(2) + Y(2)Y(1) + Y(3)Y(0) + Y(4) - 2Y(3)}{5} = 1$$

bu şekilde devam edersek

$Y(0) = 2, \quad Y(k) = 1, \quad (k > 1)$  olur. Aranan  $y(x)$  fonksiyonunu

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + \\ &\quad Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + \dots \\ &= 2 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

olarak buluruz.

### Uygulama 3.5.5.

$(1 - \frac{x}{2}) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{2}(\frac{1}{x} - 1) \frac{dy}{dx} + (\frac{x}{2} - 1)y(x) = 5 - \frac{29}{2}x + \frac{13}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y(0) = 0,$   
 $y(1) = 0$  singüler problemini çözelim.

**Çözüm.**  $y(x)$ 'e karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $Y(k)$  olmak üzere,  $y'(x)$ 'e karşılık gelen dönüşüm fonksiyonu  $(k+1)Y(k+1)$  dır. Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &\delta(k-1) \otimes (k+1)(k+2)Y(k+2) - \frac{\delta(k-2)}{2} (k+1)(k+2)Y(k+2) + \\ &\frac{3}{2}(k+1)Y(k+1) - \frac{3}{2}\delta(k-1) \otimes (k+1)Y(k+1) + \\ &\frac{\delta(k-2)}{2} \otimes Y(k) - \delta(k-1) \otimes Y(k) \\ &= 5\delta(k-1) - \frac{29\delta(k-2)}{2} + \frac{13\delta(k-3)}{2} + \frac{3\delta(k-4)}{2} - \frac{\delta(k-5)}{2} \end{aligned}$$

olur. Buradan gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^k \delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) \\
& + \frac{3}{2}(k+1)Y(k+1) - \frac{3}{2} \sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^k \delta(r-2)Y(k-r) - \sum_{r=0}^k \delta(r-1)Y(k-r) \\
& = 5\delta(k-1) - \frac{29\delta(k-2)}{2} + \frac{13\delta(k-3) + 3\delta(k-4)}{2} - \frac{\delta(k-5)}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

$Y(0) = 0$  başlangıç şartından,

$k = 0$  için

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}Y(1) &= 0 \\
Y(1) &= 0
\end{aligned}$$

$k = 1$  için

$$\begin{aligned}
5Y(2) - \frac{3}{2}Y(1) - Y(0) &= 5 \\
5Y(2) &= 5 \\
Y(2) &= 1
\end{aligned}$$

$k = 2$  için

$$\begin{aligned}
\frac{21}{2}Y(3) - 4Y(2) + \frac{1}{2}Y(0) - Y(1) &= \frac{-29}{2} \\
\frac{21}{2}Y(3) &= \frac{21}{2} \\
Y(3) &= 1
\end{aligned}$$

$k = 3$  için

$$\begin{aligned}
18Y(4) - \frac{15}{2}Y(3) - \frac{1}{2}Y(1) - Y(2) &= \frac{13}{2} \\
18Y(4) &= 0 \\
Y(4) &= 0
\end{aligned}$$

$k = 4$  için

$$\begin{aligned}\frac{55}{2}Y(5) - \frac{13}{2}Y(2) - 6Y(4) - \frac{1}{2}Y(2) - Y(3) &= \frac{3}{2} \\ \frac{55}{2}Y(5) &= 6 \\ Y(5) &= \frac{12}{55}\end{aligned}$$

$k = 5$  için

$$\begin{aligned}39Y(6) - \frac{35}{2}Y(5) - Y(4) - \frac{1}{2}Y(3) &= \frac{-1}{2} \\ 39Y(6) &= \frac{31}{11} \\ Y(6) &= \frac{31}{429}\end{aligned}$$

olur. Aranan  $y(x)$  fonksiyonunu

$$\begin{aligned}y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 \\ &\quad + Y(5)x^5 + Y(6)x^6 + Y(7)x^7 + Y(8)x^8 + \dots \\ &= x^2 + x^3 + \frac{12}{55}x^5 + \frac{31}{429}x^6 + \dots\end{aligned}$$

olarak buluruz.

#### 4. KESİRLİ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ VE STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI

Bu çalışmada yarı analitik nümerik teknik olan kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemi, kesirli mertebeden Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerlerini hesaplamak için kullanılmıştır [18]. Çeşitli problemler çözülmüş ve hesaplanan sonuçlar literatürdeki bazı teknikler ile karşılaştırılmıştır. Böylece bu metodun bu tip problemlerin çözümünde alternatif bir rol olarak kullanılabileceği görülmüştür.

##### 4.1. Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Riemann-Liouville kesirli diferansiyeli,

$$D_{x_0}^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \frac{d^m}{dx^m} \left[ \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1+q-m}} dt \right] \quad (4.1.1)$$

$$(m-1 \leq q \leq m, m \in \mathbb{Z}^+, x > x_0)$$

şeklinde tanımlanır.

Analitik ve sürekli  $f(x)$  fonksiyonunun kesirli kuvvet seri açılımı aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x-x_0)^{k/\alpha} \quad (4.1.2)$$

Burada  $\alpha$  kesrin mertebesi ve  $F(k)$  ise  $f(x)$ 'e karşılık gelen kesirli diferansiyel dönüşüm fonksiyonudur.

Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevi arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$D_{*x_0}^q f(x) = D_{x_0}^q \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (x-x_0)^k f^{(k)}(x_0) \right] \quad (4.1.3)$$

$$(f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (x-x_0)^k f^{(k)}(x_0))$$

(4.1.2) ve (4.1.3) ten

$$D_{*x_0}^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ \int_{x_0}^x \frac{f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (t-x_0)^k f^{(k)}(x_0)}{(x-t)^{1+q-m}} dt \right\} \quad (4.1.4)$$

elde edilir.

Başlangıç koşulları sağlandığından dolayı, bu koşullarının dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(k) = \begin{cases} eğer & k/\alpha \in \mathbb{Z}^+ ise, & \frac{1}{(k/\alpha)!} \left[ \frac{d^{k/\alpha} f(x)}{dx^{k/\alpha}} \right] & k = 0, 1, 2, \dots, (n\alpha - 1) \text{ için} \\ eğer & k/\alpha \in \mathbb{Z}^+ ise, & 0 & \end{cases} \quad (4.1.5)$$

## ÖZELLİKLER

$F(k)$ ,  $G(k)$  ve  $H(k)$  nın sırasıyla,  $f(x)$ ,  $g(x)$  ve  $h(x)$ 'e karşılık gelen dönüşüm fonksiyonları olduğunu kabul edelim. Buna göre

**1.** Eğer  $f(x) = g(x) \pm h(x)$  ise  $F(k) = G(k) \pm H(k)$  dır.

**İspat.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x-x_0)^{k/\alpha} \pm \sum_{k=0}^{\infty} H(k)(x-x_0)^{k/\alpha} \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} [G(k) \pm H(k)] (x-x_0)^{k/\alpha} \end{aligned}$$

(4.1.2) den

$$F(k) = G(k) \pm H(k)$$

olduğunu elde ederiz.

**2.** Eğer  $f(x) = ag(x)$  ise  $F(k) = aG(k)$  dır. ( $a$  sabit)

**İspat.**  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x-x_0)^{k/\alpha}$  ve  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x-x_0)^{k/\alpha}$  yazabiliriz.

$f(x) = ag(x)$  te  $g(x)$  i yerine yazarsak

$$\begin{aligned} f(x) &= ag(x) \\ &= a \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x-x_0)^{k/\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{aG(k)}_{\alpha G(k)} (x-x_0)^{k/\alpha} = aG(k) \end{aligned}$$

elde ederiz.

**3.** Eğer  $f(x) = g(x)h(x)$  ise  $F(k) = \sum_{l=0}^k G(l)H(k-l)$  dir.

**İspat.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x-x_0)^{k/\alpha} \times \sum_{k=0}^{\infty} H(k)(x-x_0)^{k/\alpha} \\ &= [G(0) + G(1)(x-x_0)^{1/\alpha} + G(2)(x-x_0)^{2/\alpha} + \dots + G(n)(x-x_0)^{n/\alpha}] \times \\ &\quad [H(0) + H(1)(x-x_0)^{1/\alpha} + H(2)(x-x_0)^{2/\alpha} + \dots + H(n)(x-x_0)^{n/\alpha}] \\ &= [G(0)H(2) + G(1)H(1) + G(2)H(0)] (x-x_0)^{2/\alpha} + \dots \\ &\quad + [G(0)H(n) + G(1)H(n-1) + \dots + G(n-1)H(1) + G(n)H(0)] (x-x_0)^{n/\alpha} \end{aligned}$$

genel olarak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k G(l)H(k-l)(x-x_0)^{k/\alpha} \text{ yazarsak dönüşüm fonksiyonunu}$$

$$F(k) = \sum_{l=0}^k G(l)H(k-l) \text{ olarak elde ederiz.}$$

$$4. \text{ Eğer } f(x) = (x-x_0)^p \text{ ise } F(k) = \delta(k-\alpha p), \quad \delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \text{ ise,} \\ 0, & k \neq 0 \text{ ise,} \end{cases} \text{ dır.}$$

**İspat.** (4.1.2) den hareketle verilenleri yerine yazarsak,

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-\alpha p)(x-x_0)^{k/\alpha}$  olur. Dönüşüm tanımından  $F(k) = \delta(k-\alpha p)$  elde edilir.

$$5. \text{ Eğer } f(x) = D_{x_0}^q g(x) \text{ ise } F(k) = \frac{\Gamma(q+1+k/\alpha)}{\Gamma(1+k/\alpha)} G(k+\alpha q) \text{ dır.}$$

**İspat.** (4.1.3) denklemini kullanırsak  $g(x)$ 'in Caputo kesirli türevini aşağıdaki gibi yazarız:

$$D_{x_0}^q [g(x)] = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \frac{d^m}{dx^m} \left[ \int_{x_0}^x \frac{g(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (t-x_0)^k g^{(k)}(0)}{(x-t)^{1+q-m}} dt \right]$$

$$(m-1 \leq q < m)$$

(4.1.2) ve (4.1.5) ten hareketle

$$D_{x_0}^q [g(x)] = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \frac{d^m}{dx^m} \left[ \int_{x_0}^x \frac{\sum_{k=0}^{\infty} G(k)(t-x_0)^{k/\alpha} - \sum_{k=0}^{q\alpha-1} G(k)(t-x_0)^{k/\alpha}}{(x-t)^{1+q-m}} dt \right]$$

olur. Burada fonksiyon, polinom olduğundan Riemann Liouville kesirli türev denklemi yerine

$${}_a D_t^p (t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-p+1)} (t-a)^{\nu-p}$$

denklemini kullanabiliriz.

$\nu = k/\alpha$  olmak üzere

$$\begin{aligned} D_{x_0}^q [g(x)] &= \frac{1}{\Gamma(m-q)} \sum_{k=q\alpha}^{\infty} G(k) \frac{d^m}{dx^m} \left[ \int_{x_0}^x \frac{(t-x_0)^{k/\alpha}}{(x-t)^{1+q-m}} dt \right] \\ &= \sum_{k=q\alpha}^{\infty} G(k) \frac{\Gamma(1+k/\alpha)}{\Gamma(1+k/\alpha-q)} (x-x_0)^{k/\alpha-q} \end{aligned}$$

olur. Seriyi  $k=0$  dan başlatırsak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+q+k/\alpha)}{\Gamma(1+k/\alpha)} G(k+\alpha q) (x-x_0)^{k/\alpha}$$

elde ederiz.

Son olarak (4.1.2) denkleminde dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = \frac{\Gamma(q+1+k/\alpha)}{\Gamma(1+k/\alpha)} G(k+\alpha q)$$

şeklinde olur.

## 4.2. Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi İle Kesirli Mertebeden Sturm-Liouville Problemlerinin Özdeğerlerinin Hesaplanması

### 4.2.1. Kesirli Sturm-Liouville Problemi

$q(x) = 0$  olmak üzere

$$D^{1/2}y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (4.2.1)$$

kesirli Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini hesaplayalım.

**Çözüm.**  $\alpha = 2$  seçerek (4.2.1) problemine (4.1) de belirttiğimiz 1. 2. ve 5. özellikleri kullanarak kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemini uygulayalım:

Burada gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$D^{3/2}y(x) + \lambda y(x) = 0,$$

elde ederiz. 5. özellikten dönüşümümüz aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\Gamma(1+3/2+k/2)}{\Gamma(1+k/2)} Y(k+3) + \lambda Y(k) = 0$$

$$Y(k+3) = -\frac{\Gamma(1+k/2)}{\Gamma(1+3/2+k/2)} \lambda Y(k). \quad (4.2.2)$$

Problemde verilen sınır şartlarından hareketle

$x = 0$  için (4.1.5) i kullanarak  $Y(0) = c$ ,  $Y(1) = 0$ ,  $Y(2) = 0$  dönüşüm fonksiyonlarını yazabiliriz.

$x = 1$  için ilk üç dönüşüm fonksiyonu ise

$$Y(0) = y(1) = 0,$$

$$Y(1) = 0,$$

$$Y(2) = y'(1) = 0.25 \text{ dir.}$$

Şimdi (4.2.2) denkleminde  $k$  ya 0'dan 80'e kadar değerler vererek dönüşüm fonksiyonlarını hesaplayalım:

$k = 0$  için

$$Y(3) = -\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(5/2)}\lambda Y(0) = 0$$

$k = 1$  için

$$Y(4) = -\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}\lambda Y(1) = 0$$

$k = 2$  için

$$\begin{aligned} Y(5) &= -\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(7/2)}\lambda Y(2) \\ &\quad -\frac{\lambda}{\Gamma(7/2)}0.25 \end{aligned}$$

$k = 3$  için

$$Y(6) = -\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(4)}\lambda Y(3) = 0$$

$k = 4$  için

$$Y(7) = -\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(9/2)}\lambda Y(4) = 0$$

$k = 5$  için

$$\begin{aligned} Y(8) &= -\frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(5)}\lambda Y(5) \\ &= \frac{\lambda^2}{\Gamma(5)}0.25 \end{aligned}$$

$k = 6$  için

$$Y(9) = 0$$

$k = 7$  için

$$Y(10) = 0$$

$k = 8$  için

$$Y(11) = -\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(13/2)}\lambda Y(8) - \frac{\lambda^3}{\Gamma(13/2)}0.25,$$

bu şekilde devam edersek,

$k = 75$  için

$$Y(78) = 0$$

$k = 76$  için

$$Y(79) = 0$$

$k = 77$  için

$$Y(80) = \frac{\lambda^{26}}{\Gamma(41)}0.25,$$

değerlerini elde ederiz. Bulduğumuz  $Y(k)$  dönüşüm fonksiyonlarını

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^{k/\alpha} Y(k)$$

bağıntısında yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{80} Y(k) &= Y(0) + Y(1) + Y(2) + \\ &\quad + \dots + Y(78) + Y(79) + Y(80) \\ &= 0.25 \left( 1 - \frac{\lambda}{\Gamma(7/2)} + \frac{\lambda^2}{\Gamma(5)} - \frac{\lambda^3}{\Gamma(13/2)} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\lambda^{24}}{\Gamma(38)} - \frac{\lambda^{25}}{\Gamma(79/2)} + \frac{\lambda^{26}}{\Gamma(41)} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
|-------------|-------------|-------------|
| 2.11027708  | 13.76538177 | 24.24328615 |

**Tablo 4.1.**

#### 4.2.2. Kesirli Sturm-Liouville Problemi

$q(x) = 1$  olmak üzere

$$D^{1/2}y'(x) + (1 + \lambda)y(x) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (4.2.3)$$

kesirli Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini hesaplayalım.

**Çözüm.**  $\alpha = 2$  seçerek (4.2.3) problemine (4.1) de belirttiğimiz 1. 2. ve 5. özellikleri kullanarak kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemini uygulayalım:

Burada gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$D^{3/2}y(x) + (1 + \lambda)y(x) = 0,$$

olur. 5. özellikten dönüşümümüz aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1 + 3/2 + k/2)}{\Gamma(1 + k/2)} Y(k + 3) + (1 + \lambda)Y(k) &= 0, \\ Y(k + 3) &= -\frac{\Gamma(1 + k/2)}{\Gamma(1 + 3/2 + k/2)} (1 + \lambda)Y(k). \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Problemde verilen sınır şartlarından hareketle

$x = 0$  için (4.1.5) i kullanarak  $Y(0) = c$ ,  $Y(1) = 0$ ,  $Y(2) = 0$  dönüşüm fonksiyonlarını yazabiliriz.  $x = 1$  için ilk üç dönüşüm fonksiyonu ise

$$Y(0) = y(1) = 0,$$

$$Y(1) = 0,$$

$$Y(2) = y'(1) = 1 \text{ dir.}$$

Şimdi (4.2.4) denkleminde  $k$  ya 0'dan 80'e kadar değerler vererek dönüşüm fonksiyonlarını hesaplayalım:

$k = 0$  için

$$Y(3) = -\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(5/2)}(1 + \lambda)Y(0) = 0$$

$k = 1$  için

$$Y(4) = -\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}(1 + \lambda)Y(1) = 0$$

$k = 2$  için

$$\begin{aligned} Y(5) &= -\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(7/2)}(1+\lambda)Y(2) \\ &= -\frac{8(1+\lambda)}{15\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$k = 3$  için

$$Y(6) = -\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(4)}(1+\lambda)Y(3) = 0,$$

bu şekilde devam edersek

$k = 47$  için

$$Y(50) = 0$$

$k = 48$  için

$$Y(51) = 0$$

$k = 49$  için

$$Y(52) = \frac{(1+\lambda)^{16}}{15511210043330985984000000}$$

değerlerini elde ederiz. Bulduğumuz  $Y(k)$  dönüşüm fonksiyonlarını aşağıdaki bağıntıda yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^{k/\alpha} Y(k) \\ \sum_{k=0}^{52} Y(k) &= Y(0) + Y(1) + Y(2) + \\ &\quad + \dots + Y(48) + Y(49) + Y(50) \\ &= 1 + -\frac{8(1+\lambda)}{15\sqrt{\pi}} \\ &\quad + \dots + \frac{(1+\lambda)^{16}}{15511210043330985984000000} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
|-------------|-------------|-------------|
| 3.23183     | 53.1493     | 60.2052     |

**Tablo 4.2.**

### 4.2.3. Singüler Kesirli Sturm-Liouville Problemi

$q(x) = \frac{1}{x}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} D^{1/2}y'(x) + \left(\frac{1}{x} + \lambda\right)y(x) &= 0, \quad x \in (0, 1) \\ y(0) &= 0, \quad y'(1) = 0, \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

singüler kesirli Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini hesaplayalım.

**Çözüm.** Öncelikle eşitliğin her iki tarafını  $x$  ile çarpalım.

$$xD^{1/2}y'(x) + (1 + \lambda x)y(x) = 0.$$

Şimdi ise  $\alpha = 2$  seçerek (4.2.5) problemine (4.1) de belirttiğimiz 1. 2. ve 5. özellikleri kullanarak kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemini uygulayalım:

Burada gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$D^{3/2}y(x) + (1 + \lambda x)y(x) = 0,$$

olur. 5. özellikten dönüşümümüz aşağıdaki gibidir.

$$\delta(k-2) \otimes \frac{\Gamma(1+3/2+k/2)}{\Gamma(1+k/2)}Y(k+3) + Y(k) + \lambda\delta(k-2) \otimes Y(k) = 0$$

$$\sum_{r=0}^k \delta(r-2) \frac{\Gamma(1+3/2+(k-r)/2)}{\Gamma(1+(k-r)/2)}Y((k-r)+3) + Y(k) + \lambda \sum_{r=0}^k \delta(r-2)Y(k-r) = 0$$

$$\frac{\Gamma(1+3/2+(k-2)/2)}{\Gamma(1+(k-2)/2)}Y((k-2)+3) + Y(k) + \lambda Y(k-2) = 0$$

$$Y(k+1) = -\frac{\Gamma(1+(k-2)/2)}{\Gamma(1+3/2+(k-2)/2)}[Y(k) + \lambda Y(k-2)]. \tag{4.2.6}$$

Problemde verilen sınır şartlarından hareketle  $x = 0$  için (4.1.5) i kullanarak

$Y(0) = 0, Y(1) = 0, Y(2) = y'(0) = c$  dönüşüm fonksiyonlarını yazabiliriz.

$x = 1$  için ilk üç dönüşüm fonksiyonu ise

$$Y(0) = y(1) = 1,$$

$$Y(1) = 0,$$

$$Y(2) = y'(1) = 0 \text{ dir.}$$

Şimdi (4.2.6) denkleminde  $k$  ya 0'dan 80'e kadar değerler vererek dönüşüm fonksiyonlarını hesaplayalım:

$k = 2$  için

$$\begin{aligned} Y(3) &= -\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(5/2)}[Y(2) + \lambda Y(0)] \\ &= -\frac{4\lambda}{3\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$k = 3$  için

$$\begin{aligned} Y(4) &= -\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}[Y(3) + \lambda Y(1)] \\ &= \frac{\lambda}{3} \end{aligned}$$

$k = 4$  için

$$\begin{aligned} Y(5) &= -\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(7/2)}[Y(4) + \lambda Y(2)] \\ &= -\frac{8\lambda}{45\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Bu şekilde devam eder ve bulduğumuz  $Y(k)$  dönüşüm fonksiyonlarını

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^{k/\alpha} Y(k)$$

bağıntısında yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^{80} \frac{k}{\alpha} Y(k) = 0$$

olur.

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
|-------------|-------------|-------------|
| 1.66091840  | 13.55041774 | 20.51445527 |

**Tablo 4.3**

#### 4.2.4. Bessel Denklemi İçin Singüler Sturm-Liouville Problemi

$$D^\alpha y'(x) + \left(\lambda - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right)y(x) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

Bessel denkleminde  $\nu = 1$  ,  $\alpha = \frac{1}{2}$  alalım.

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = H$$

$H = 1$  ve  $q(x) = \frac{3}{4x^2}$  alarak,

$$D^{1/2}y'(x) + \left(\lambda - \frac{3}{4x^2}\right)y(x) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 1, \tag{4.2.7}$$

Bessel probleminin dönüşüm fonksiyonlarını ve özdeğerlerini hesaplayalım.

**Çözüm.** Öncelikle eşitliğin her iki tarafını  $x$  ile çarpalım.

$$x^2 D^{1/2}y'(x) + \left(\lambda x^2 - \frac{3}{4}\right)y(x) = 0,$$

$\alpha = 2$  seçerek (4.2.7) problemine (4.1) de belirttiğimiz 1. 2. ve 5. özellikleri kullanarak kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemini uygulayalım:

Burada gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$D^{3/2}y(x) + \left(\lambda x^2 - \frac{3}{4}\right)y(x) = 0,$$

olur. 5. özellikten dönüşümümüz aşağıdaki gibi olur.

$$\delta(k-4) \otimes \frac{\Gamma(1+3/2+k/2)}{\Gamma(1+k/2)} Y(k+3) + \lambda \delta(k-4) \otimes Y(k) - \frac{3}{4} Y(k) = 0$$

$$\sum_{r=0}^k \delta(r-4) \frac{\Gamma(1+3/2+(k-r)/2)}{\Gamma(1+(k-r)/2)} Y((k-r)+3) +$$

$$+ \lambda \sum_{r=0}^k \delta(r-4) Y(k-r) - \frac{3}{4} Y(k) = 0$$

$$\frac{\Gamma(1 + 3/2 + (k - 4)/2)}{\Gamma(1 + (k - 4)/2)} Y((k - 4) + 3) + \lambda Y(k - 4) - \frac{3}{4} Y(k) = 0$$

$$Y(k) = \frac{4}{3} \left( \frac{\Gamma(1 + 3/2 + (k - 4)/2)}{\Gamma(1 + (k - 4)/2)} Y(k - 1) + \lambda Y(k - 4) \right). \quad (4.2.9)$$

Problemde verilen sınır şartlarından hareketle  $x = 0$  için (4.1.5) i kullanarak  $Y(0) = 0$ ,  $Y(1) = 0$ ,  $Y(2) = c$  dönüştürme fonksiyonlarını yazabiliriz.

$x = 1$  için ilk üç dönüştürme fonksiyonu ise

$$Y(0) = y(1) = 1,$$

$$Y(1) = 0,$$

$$Y(2) = y'(1) = 1$$

$$Y(3) = 0 \text{ dır.}$$

Şimdi (4.2.9) denkleminde  $k$  nın bazı değerleri için dönüştürme fonksiyonlarını hesaplayalım:

$k = 4$  için

$$\begin{aligned} Y(4) &= \frac{4}{3} \left( \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1)} Y(3) + \lambda Y(0) \right) \\ &= \frac{4\lambda}{3} \end{aligned}$$

$k = 5$  için

$$\begin{aligned} Y(5) &= \frac{4}{3} \left( \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3/2)} Y(4) + \lambda Y(1) \right) \\ &= \frac{64\lambda}{9\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$k = 6$  için

$$\begin{aligned} Y(6) &= \frac{4}{3} \left( \frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(2)} Y(5) + \lambda Y(2) \right) \\ &= \frac{172\lambda}{9} \end{aligned}$$

$k = 7$  için

$$\begin{aligned} Y(7) &= \frac{4}{3} \left( \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(5/2)} Y(6) + \lambda Y(3) \right) \\ &= \frac{5504}{27\sqrt{\pi}} \lambda \end{aligned}$$

$k = 8$  için

$$\begin{aligned} Y(8) &= \frac{4}{3} \left( \frac{\Gamma(9/2)}{\Gamma(3)} Y(7) + \lambda Y(4) \right) \\ &= \frac{4}{3} \left( \frac{6020\lambda}{9} + \frac{4\lambda^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Bu şekilde devam eder ve bulduğumuz  $Y(k)$  dönüşüm fonksiyonlarını

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^{k/\alpha} Y(k)$$

bağıntısında yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^{13} Y(k) = 0$$

elde ederiz.

| $\lambda_1$       | $\lambda_2$       | $\lambda_3$        |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| $-117517.10^{-1}$ | $-332704.10^{-3}$ | $-4.68935.10^{-9}$ |

**Tablo 4.4.**

## 5. ÇÖZÜMÜN VARLIK VE TEKLİĞİ

### 5.1. Kesirli Sturm-Liouville Sınır Değer Probleminin Çözümünün Varlık ve Tekliği

$$D^\alpha(p(t)y'(t)) + q(t)y(t) + f(t, y(t)) = 0 \quad (5.1.1)$$

$$ay(0) - by'(0) = 0 \quad (5.1.2)$$

$$cy(\beta) + dy'(\beta) = 0.$$

Kesirli sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada  $0 < \alpha < 1$  ve  $t \in J = [0, \beta]$ ,  $y \in C(J, R)$  dir. Ayrıca  $\|y\|_\infty = \sup \{|y(t)| : t \in J\}$  ve  $p : J \rightarrow R$ ,  $q : J \rightarrow R$ ,  $h : J \rightarrow R$  sürekli fonksiyonlar,  $p(t) > 0$  ve  $a, b, c, d$  sabitlerdir [34].

**Lemma 5.1.1.**  $0 < n - 1 < \alpha < n$  olsun. Eğer  $y \in C^n(0, \beta)$  ise bu takdirde  ${}^cD^\alpha y(t) = 0$  kesirli diferansiyel denklemi

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(t)}{n!}t^n$$

şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

**Lemma 5.1.2.**  $0 < \alpha < 1$  ve  $p : J \rightarrow R$ ,  $q : J \rightarrow R$ ,  $h : J \rightarrow R$  sürekli fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca tüm  $t \in J$  ler için  $p(t) > 0$  ve  $a, b, c, d$  sabitlerdir. Burada  $y$

$$D^\alpha(p(t)y'(t)) + q(t)y(t) + h(t) = 0,$$

$$ay(0) - by'(0) = 0,$$

$$cy(\beta) + dy'(\beta) = 0,$$

kesirli Sturm-Liouville probleminin bir çözümü olsun.  $y$  fonksiyonu çözüm olduğundan dolayı aşağıdaki integral denklemini sağlar:

$$\begin{aligned} y(t) = & y(0)[1 + \frac{a}{b} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds] \\ & - \int_0^t \frac{1}{p(s)} [\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) \\ & + h(r)dr) ds, \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

burada

$$y(0) = \frac{c \int_0^\beta \frac{1}{p(s)} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) + h(r)) dr \right] ds}{c + \frac{a}{b} \left[ c \int_0^\beta \frac{p(0)}{p(s)} ds + d \frac{p(0)}{p(\beta)} \right]} + \frac{d \frac{1}{p(\beta)} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\beta (\beta-s)^{\alpha-1} (q(s)y(s) + h(s)) ds \right]}{c + \frac{a}{b} \left[ c \int_0^\beta \frac{p(0)}{p(s)} ds + d \frac{p(0)}{p(\beta)} \right]}$$

şeklindedir.

**İspat.** Farzedelim ki  $y$  (5.1.1) ve (5.1.2) problemini sağlasın. Bu takdirde Lemma 5.1 den

$$p(t)y'(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (q(s)y(s) + h(s)) ds = c_1$$

$$y'(t) = \frac{c_1}{p(t)} - \frac{1}{p(t)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (q(s)y(s) + h(s)) ds$$

elde edilir.  $t = 0$  ve  $y'(0) = \frac{c_1}{p(0)} \implies c_1 = y'(0)p(0)$  olmak üzere

$$y'(t) = \frac{y'(0)p(0)}{p(t)} - \frac{1}{p(t)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (q(s)y(s) + h(s)) ds \quad (5.1.4)$$

elde edilir. İntegral alınıp gerekli işlemler yapıldığında

$$y(t) = y(0) + y'(0) \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds - \int_0^t \left( \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) + h(r)) dr \right) ds$$

bulunur. Şartlar göz önüne alındığında,  $ay(0) - by'(0) = 0 \implies y'(0) = \frac{a}{b}y(0)$  dır. Bu takdirde

$$y'(t) = y(0) \frac{a}{b} \frac{p(0)}{p(t)} - \frac{1}{p(t)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (q(s)y(s) + h(s)) ds$$

ve

$$y(t) = y(0) + y(0) \frac{a}{b} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds - \int_0^t \left( \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) + h(r)) dr \right) ds$$

$$y(t) = y(0) \left( 1 + \frac{a}{b} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right) - \int_0^t \left( \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) + h(r)) dr \right) ds, \quad (5.1.5)$$

bulunur.  $cy(\beta) + dy'(\beta) = 0$  şartına göre

$$\begin{aligned}
& c \left[ y(0) + y(0) \frac{a}{b} \int_0^\beta \frac{p(0)}{p(s)} ds \right. \\
& \quad \left. - \int_0^\beta \left( \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) + h(r)) dr \right) ds \right] \\
& + d \left[ y(0) \frac{a}{b} \frac{p(0)}{p(\beta)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{p(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_0^\beta (\beta-s)^{\alpha-1} (q(s)y(s) + h(s)) ds \right] \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(0) = & \frac{c \int_0^\beta \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) + h(r)) dr ds}{c + \frac{a}{b} \left( c \int_0^\beta \frac{p(0)}{p(s)} ds + d \frac{p(0)}{p(\beta)} \right)} \\
& + \frac{\frac{d}{p(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_0^\beta (\beta-s)^{\alpha-1} (q(s)y(s) + h(s)) ds}{c + \frac{a}{b} \left( c \int_0^\beta \frac{p(0)}{p(s)} ds + d \frac{p(0)}{p(\beta)} \right)}.
\end{aligned}$$

Şimdi (5.1.1) ve (5.1.2) probleminin çözümünün var ve tek olduğunu gösterelim.

**Teorem 5.1.** Farzedelim ki:

**I.**  $K > 0$  sabiti için her  $t \in J$  ve her  $u, v \in R$  için

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K |u - v|$$

dir.

**II.** Her  $t \in J$  için

$$q(t) \leq Q$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $Q$  pozitif tamsayısı vardır.

Eğer

$$\theta = (Q + K) \int_0^\beta \frac{1}{p(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} ds \quad (5.1.6)$$

ise bu takdirde (5.1.1) ve (5.1.2) problemi  $J$  üzerinde tek bir çözüme sahiptir.

**İspat.** (5.1.1) ve (5.1.2) problemini sabit nokta teoremine dönüştürelim.  $F$  operatörü,

$F : C(J, R) \rightarrow C(J, R)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
F(y)(t) = & y(0) \left[ 1 + \frac{a}{b} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right] \\
& - \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) \right. \\
& \quad \left. + f(r, y(r))) dr \right] ds
\end{aligned} \quad (5.1.7)$$

şeklinde tamamlanır.  $F$  operatörünün her bir sabit noktasının (5.1.1) ve (5.1.2) probleminin bir çözümü olduğu açıktır. İspat için Banach daralma dönüşüm problemini kullanalım.  $x, y \in C(J, R)$  olsun. Bu takdirde her bir  $t \in J$  için

$$\begin{aligned}
|Fy(t) - Fx(t)| &\leq \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} [|q(r)| |y(r) - x(r)| \right. \\
&\quad \left. + |f(r, y(r)) - f(r, x(r))|] dr \right] ds \\
&\leq \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} [Q |y(r) - x(r)| \right. \\
&\quad \left. + K |y(r) - x(r)|] dr \right] ds \\
&\leq \int_0^t \frac{1}{p(s)} (Q + K) \|y - x\|_\infty \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} dr \right] ds \\
&\leq (Q + K) \int_0^t \frac{1}{p(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} ds \|y - x\|_\infty \\
&= \theta \|y - x\|_\infty
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\|F(y) - F(x)\|_\infty \leq \theta \|y - x\|$$

elde edilir. Sonuç olarak  $F$  bir daralma dönüşümüdür. Banach sabit nokta teoreminin sonucuna göre  $F$  tek bir sabit noktaya sahiptir. O da (5.1.1) ve (5.1.2) probleminin bir çözümüdür.

#### Uygulama 5.1.1.

$$D^\alpha ((2 - t^2) y'(t)) + \sin(2\pi t)y(t) + \frac{|y(t)|}{|y(t)| + 1} = 0 \quad (5.1.8)$$

$$y(0) - y'(0) = 0 \quad (5.1.9)$$

$$y(1) + y'(1) = 0$$

Burada her  $t \in [0, 1]$  ve  $a = b = c = d = 1$  için  $p(t) = 2 - t^2$ ,  $q(t) = \sin(2\pi t)$ ,  $f(t, y) = \frac{|y|}{|y|+1}$  dir.

$$|q(t)| = |\sin(2\pi t)| \leq 1 = Q$$

$$\left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| = \frac{1}{y^2 + 1} \leq 1 = K$$

$$|f(y, t_1) - f(y, t_2)| \leq |y_1 - y_2|$$

$$\begin{aligned}
\theta &= (Q + K) \int_0^1 \frac{1}{p(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} ds = (1 + 1) \int_0^1 \frac{1}{2 - s^2} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} ds \\
&\leq 2 \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} < 1
\end{aligned}$$

elde ederiz. (I) ve (II)  $Q = 1$  ve  $\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} < 1$  ile sağlanır. Teorem 5.1 den (5.1.8)-(5.1.9) kesirli sınır değer problemi  $[0,1]$  üzerinde tek bir çözüme sahiptir.

**Teorem 5.1.2.** Farzedelim ki:

**III.**  $f : J \times R \rightarrow R$  fonksiyonu süreklidir.

**IV.**  $M > 0$  ve  $N > 0$  sabiti vardır öyle ki, herbir  $t \in J$ ,  $u \in R$  ve  $\int_0^\beta \frac{1}{p(s)} ds \leq N$  için (5.1.1) ve (5.1.2) problemi  $J$  üzerinde en az tek bir çözüme sahiptir.

**İspat.** (5.1.7) ile tanımlanan ve tek bir sabit noktaya sahip olan  $F$ 'i ispatlamak için Schaefer'in sabit nokta teoremini kullanacağız. İspatı 4 adımda verelim.

**Adım 1.**  $F$  süreklidir.  $\{y_n\}$  bir dizi olsun. Öyle ki  $C(J, R)$  de  $y_n \rightarrow y$  tır. O zaman herbir  $t \in J$  için

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} [|q(r)| |y_n(r) - y(r)| \right. \\
&\quad \left. + |f(r, y_n(r)) - f(r, y(r))|] dr \right) ds \\
&\leq \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} [Q |y_n(r) - y(r)| \right. \\
&\quad \left. + \sup_{r \in J} |f(r, y_n(r)) - f(r, y(r))|] dr \right) ds \\
&\leq (Q \|y_n - y\|_\infty + \|f(r, y_n(r)) - f(r, y(r))\|_\infty) \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} dr \right) ds \\
&\leq Q \|y_n - y\|_\infty + \|f(r, y_n(r)) - f(r, y(r))\|_\infty \\
&\quad \times \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left( \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) ds \\
&\leq (Q \|y_n - y\|_\infty + \|f(r, y_n(r)) - f(r, y(r))\|_\infty) \\
&\quad \times \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\beta \frac{1}{p(s)} ds \\
&\leq (Q \|y_n - y\|_\infty + \|f(r, y_n(r)) - f(r, y(r))\|_\infty) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} N
\end{aligned}$$

$f$  sürekli bir fonksiyon ve  $y \in C(J, R)$  olduğundan  $y_n \rightarrow y$  tır.

$$\begin{aligned}
&\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \leq \\
&(Q \|y_n - y\|_\infty + \|f(r, y_n(r)) - f(r, y(r))\|_\infty) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} N \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ iken})
\end{aligned}$$

**Adım 2.**  $F$  dönüşümü  $C(J, R)$  de sınırlı kümelerdir. Gerçekten herhangi  $\eta > 0$  için pozitif bir  $l$  sabitinin olduğunu göstermek yeterlidir.

Öyle ki her bir  $y \in B_\eta = \{y \in C(J, R) : \|y\|_\infty < \eta\}$ ;  $\|F(y)\|_\infty < l$  elde ederiz. Her bir  $t \in J$  için (III)'ten

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq y(0) \left(1 + \left|\frac{a}{b}\right| \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds\right) \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} [|q(r)| |y(r)| + |f(r, y(r))|] dr\right) ds \\
&\leq y(0) \left(1 + \left|\frac{a}{b}\right| \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds\right) \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} [Q_\eta + M] dr\right) ds \\
&\leq y(0) \left(1 + \left|\frac{a}{b}\right| \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds\right) \\
&\quad + (Q_\eta + M) \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} dr\right) ds \\
&= y(0) \left(1 + \left|\frac{a}{b}\right| \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds\right) + (Q_\eta + M) \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left(\frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) ds \\
&\leq y(0) \left(1 + \left|\frac{a}{b}\right| \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds\right) + (Q_\eta + M) \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \int_0^\beta \frac{1}{p(s)} ds \\
&\leq y(0) \left(1 + \left|\frac{a}{b}\right| p(0)N\right) + (Q_\eta + M) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} N
\end{aligned}$$

böylece

$$\|F(y)\|_\infty \leq y(0) \left(1 + \left|\frac{a}{b}\right| p(0)N\right) + (Q_\eta + M) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} N = l$$

olur.

**Adım 3.**  $F$  dönüşümü  $C(J, R)$  nin eş sürekli kümeleri içinde sınırlı kümelerdir.  $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2$ .  $B_\eta$  Adım 2 deki gibi  $C(J, R)$  nin sınırlı bir kümesi ve  $y \in B_\eta$  olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_1) - F(y)(t_2)| &= \left| y(0) \frac{a}{b} \int_0^{t_1} \frac{p(0)}{p(s)} ds \right. \\
&\quad - \int_0^{t_1} \left( \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) + f(r, y(r))) dr \right) ds \\
&\quad - y(0) \frac{a}{b} \int_0^{t_2} \frac{p(0)}{p(s)} ds + \\
&\quad \left. \int_0^{t_2} \left( \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) + f(r, y(r))) dr \right) ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| y(0) \frac{a}{b} \right| \left( \int_{t_1}^{t_2} \frac{p(0)}{p(s)} ds \right) + \\
&\quad \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_o^s (s-r)^{\alpha-1} [|q(r)| |y(r)| + |f(r, y(r))|] dr \right) ds \\
&\leq \left| y(0) \frac{a}{b} \right| \left( \int_{t_1}^{t_2} \frac{p(0)}{p(s)} ds \right) + \\
&\quad \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_o^s (s-r)^{\alpha-1} [Q_\eta + M] dr \right) ds \\
&= \left| y(0) \frac{a}{b} \right| \left( \int_{t_1}^{t_2} \frac{p(0)}{p(s)} ds \right) + (Q_\eta + M) \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{p(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) ds
\end{aligned}$$

$t_1 \rightarrow t_2$  iken yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşittir. Arzela-Ascoli teoremi ile birlikte Adım 3 ile 1 den şu sonucu çıkarabiliriz:  $F : C(J, R) \rightarrow C(J, R)$  süreklidir.

**Adım 4.** Şimdi şunu gösterelim:

$A = \{y \in C(J, R) : y = \lambda F(y) \text{ bazı } 0 < \lambda < 1 \text{ için} \}$  kümesi sınırlıdır.  $y \in A$  olsun.

Bu takdirde bazı  $0 < \lambda < 1$  için  $y = \lambda F(y)$  dir. Böylece her bir  $t \in J$  için

$$\begin{aligned}
y(t) &= \lambda \left| y(0) \left[ 1 + \frac{a}{b} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right] \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_o^s (s-r)^{\alpha-1} (q(r)y(r) + f(r, y(r))) dr \right] ds \right|
\end{aligned}$$

olur. (III) ten her bir  $t \in J$  için

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq |y(0)| \left[ 1 + \left| \frac{a}{b} \right| \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right] \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_o^s (s-r)^{\alpha-1} (|q(r)| |y(r)| + |f(r, y(r))|) dr \right] ds \\
&\leq |y(0)| \left[ 1 + \left| \frac{a}{b} \right| p(0)N \right] + (Q_\eta + M) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} N
\end{aligned}$$

olur.

Böylece her  $t \in J$  için

$$\| Fy(t) \|_\infty \leq |y(0)| \left[ 1 + \left| \frac{a}{b} \right| p(0)N \right] + (Q_\eta + M) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} N = l$$

elde ederiz. Bu da A kümesinin sınırlı olduğunu gösterir.

Schaefer sabit nokta teoreminin sonucu olarak  $F$  (5.1.1) ve (5.1.2) probleminin çözümü olan sabit bir noktaya sahiptir.

## 6. SONUÇ

Bu çalışmada diferansiyel dönüşüm yöntemi incelenmiş ve bununla ilgili bazı uygulamalar verilmiştir. Daha sonra kesirli Sturm-Liouville problemleri için kesirli mertebeden diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanmış ve bu problemlerin  $\lambda$  özdeğerleri hesaplanmış, tablolar halinde sunulmuştur. Ayrıca kesirli Sturm-Liouville problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği araştırılmış, bununla ilgili gerekli teorem ve ispatları verilmiştir. Lineer olmayan denklemlerin çözümleri Adomian polinomlarına gerek kalmadan çözülebildiği için diferansiyel dönüşüm yönteminin Adomian ayrıştırma yöntemine göre daha avantajlı olduğu anlaşılmıştır.

## KAYNAKLAR

1. **C. K. Chen, Ho, S. H.**, 1996. Application of Differential transformation to eigenvalue problems. Applied Mathematics and Computation; **79**, 173-188.
2. **C. K. Chen, Ho, S. H.**, 1999. Solving partial diferential equations by two-dimensional differential transform method. Applied Mathematics and Computation; **106**, 171-179.
3. **F. Ayaz**, 2003. On the Two-dimensional differential transform method. Applied Mathematics and Computation; **143**, 361-374.
4. **F. Ayaz**, 2004. Application of differential transform methods to differential-algebraic equations. Applied Mathematics and Computation; **152**, 649-657.
5. **F. Ayaz**, 2004. Solutions of the system of differential equations by differential transform method. Appl.Maths.Comput; **147**, 547-567.
6. **F. Ayaz, G. Oturanç**, 2004. An Approximate Solutions of burgers equation by Differential Transform Method. Selçuk Journal ofApplied Mathematics; **5-2**, 15-24.
7. **A. H. Hassan, I.H.**, 2004. Differential transformation technique for solving higer-orden initial value problems. Applied Mathematics and Computation; **154**, 299-311.
8. **A. Kurnaz, G. Oturanç, M.E. Kiriş**, 2005.  $n$  dimensional differential transformation method for solving PDEs. International journal of Computer Mathematics. Vol. **82,3**, 369-38.
9. **A. Kurnaz, G. Oturanç**, 2005. The differential transform approximation for the system of ordinary differential equation. International Journal of Computer Mathematics. Vol. **82,6**, 709-719.
10. **Zhou, J. K.**, 1986. Differential transformation and Its Applications for Electical Circuits. Huazhong University Press, Wuhan China.
11. **B. M. Levitan and I. S. Sargsjan**, 1975. Introduction to Spektral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators. Ame.Math. Soc. Providence, Rhode Island.

12. **E. Bas**, 2013. "Fundamental Spectral Theory of Fractional Singular Sturm-Liouville Operator" Journal of Func. Spaces and Appl. Article ID 915830, **7** pages.
13. **M. Aydın**, 1995. Diferansiyel denklemler ve uygulamaları. Barış yayınları, İzmir.
14. **Y. Cesur**, 2011. Diferansiyel Denklemler ve Mathematica, avcı yayınevi, İstanbul.
15. **I. Podlubny**, 1999. Fractional differential equations. New York: Academic Press.
16. **E. Şuhubi**, 2001. Fonksiyonel Analiz. İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.
17. **A. Arıkoğlu, İ. Özkol**, 2004. Solutions of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method. Applied Mathematics and Computation. 1145-1158.
18. **A. Arıkoğlu, İ. Özkol**, 2007. Solutions of fractional differential equations by using differential transform method. Chaos, Solitons & Fractals. **34**, 1473-1481.
19. **A. Arıkoğlu, İ. Özkol**, 2009. Solutions of fractional integro-differential equations by using fractional differential transform method. Chaos, Solitons & Fractals. **40**, 521-529.
20. **Q. M., Al-Mdallal**, 2009. An efficient method for solving fractional Sturm-Liouville problems. Chaos, Solitons & Fractals. **40**, 183-189.
21. **Q. M., Al-Mdallal**, 2010. On the numerical solution of fractional Sturm-Liouville problems. International Jour. of Computer Math. Vol. **87**, 2837-2845.
22. **Y. Keskin**, 2005. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi, Konya.
23. **V. S. Ertürk**, 2011. Computing Eigenelements Of Sturm-Liouville Problems Of Fractional Order VIA Fractional Differential Transform Method. Math. Comp. App. Vol. **16**, 712-720
24. **Jang, M. J., Chen, C. L., Y. C.**, 2001. Two Dimensional differential Transform for Partial Differential Equation, Appl. Maths. Comput. **106**, 171-179.

25. **A. H. Hassan, I.H.**, 2002. Different applications for the differential transformation in the differential aquation. Applied Mathematics and Computation; **129**,183-201.
26. **A. H. Hassan, I.H.**, 2002. On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation. Applied Mathematics and Computation; **127**, 1-22.
27. **F. Ayaz, G. Oturanç, A. Kurnaz, E. M. Kiriş**, 2003. Isı iletim denkleminin Dönüşüm Yöntemiyle Çözümü.14. Ulusal Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi, Isparta, 3-5 Eylül.
28. **K.S., Miller, Ross, B.**, 1993. An introduction to the fractional calculus and fractional differntial Equations. New York: Wiley
29. **K. Oldham, J. Spanier**, 1974. "The Fractional Calculus", Academic press, New York.
30. **S. G. Samko, Kilbas, AA., Marichev, OI.**, 1993. Farctional integrals and derivaties. Berlin: Gorden &Breach.
31. **E. Bas, E. S., Panakhov, R., Yilmazer**, 2013. " On the Well Posed Problem for Hydrogen Atom Equation" TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics Vol. **4(1)**, 20-29.
32. **E. Bas, F., Metin**, 2013. "Fractional Singular Sturm-Liouville Operator for Coulomb Potential" Advances in Differences Equations, doi: **10. 1186/1687-1847-300**.
33. **F. Mainardi**, 1997. Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. In: **A. Carpinteri, F. Mainardi**, editors. Fractals and fractional calculus in continuum mechanics. Wien: Springer; p. 291-348.
34. **R. M. Hani** , 2011. Existence and Uniqueness of the Solution for Fractional Sturm-Liouville Boundary Value Problem.College ofBasic Education Researchers Journal Vol. **11**, 698-710.

## ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2007 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik bölümüne girdim. 2011 yılında matematik bölümünden mezun olarak aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Halen Fırat Üniversitesi Matematik bölümünde yüksek lisans öğrencisiyim.