İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM TEOREMLERİ

Süleyman ÖĞREKÇİ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2014

ANKARA

Süleyman ÖĞREKÇİ tarafından hazırlanan İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM TEOREMLERİ adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Adil MISIR
Tez Danışmanı Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ağacık ZAFER
Matematik Anabilim Dalı, Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Adil MISIR
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Fatma AYAZ
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Meryem KAYA
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. A. Feza GÜVENİLİR
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 24/01/2014

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Süleyman ÖĞREKÇİ

İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM TEOREMLERİ

(Doktora Tezi)

Süleyman ÖĞREKÇİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2014

ÖZET

Bu tezde ikinci basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklemlerin salınımlılık teorisi incelenmiştir.
Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş niteliğinde olup bu bölümde salınımlılık probleminin ifadesi, temel tanım ve kavramlar ve literatür taraması sunulmuştur. İkinci bölümde zorlayıcı ve söndürücü terimlere sahip olan ve son zamanlarda bir çok araştırmanın konusu olan ikinci basamaktan lineer olmayan bir diferensiyel denklem sınıfı için aralık salınım kriterleri verilmiştir. Üçüncü bölümde karşılık gelen bir fonksiyonel denklem sınıfı için salınımlılık kriterleri elde edilmiştir. Elde edilen bu orijinal sonuçlarla son zamanlarda yayınlanan bazı çalışmalar geliştirilmiştir. Dördüncü bölümde bu alanda çalışan araştırmacılar için bazı yorum ve öneriler verilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler: Diferensiyel denklemler, Salınımlılık, Aralık kriteri
Sayfa Adedi : 66
Tez Yöneticis : Doç. Dr. Adil MISIR

OSCILLATION THEOREMS FOR SECOND ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

(Ph.D. Thesis)

Süleyman ÖĞREKÇİ

GAZI UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

JANUARY 2014

ABSTRACT

In this thesis oscillation theory of second order nonlinear differential equations studied.
This thesis consists of four chapters. Chapter 1 is introductory and provides statement of the problem, literature review, basic definitions and theorems. In chapter 2 some interval oscillation criteria presented for a class of differential equations with forcing an damping terms which is subjected to a number of recent papers. In chapter 3 oscillation criteria for a corresponding functional differential equations obtained. By the original result of this chapter, some recently published research papers have been improved. In chapter 4 some comments and suggestions are given for researchers in this area.

Science Code	**: 204.1.138**
Key Words	**: Differential equations, Oscillation, Interval criteria**
Page Number	**: 66**
Adviser	**: Assoc. Prof. Dr. Adil MISIR**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında yardımlarını ve anlayışını eksik etmeyen, akademik başarısı ve kişiliğiyle örnek alınacak çok değerli danışmanım Gazi Üniversitesi öğretim üyesi sayın Doç. Dr. Adil MISIR' a, tez izleme komitesinin diğer değerli üyeleri Orta Doğu Teknik Üniversitesi öğretim üyesi sayın Prof. Dr. Ağacık Zafer'e ve Gazi Üniversitesi öğretim üyesi sayın Doç. Dr. Fatma Ayaz'a, ayrıca tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen İzmir Üniversitesi öğretim üyesi sayın Prof. Dr. Aydın Tiryaki'ye derin saygılarımla sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

GİRİŞ

Bilindiği üzere diferensiyel denklemler geniş uygulama alanına sahiptir. Bu nedenle her denklemin çözümünün bilinmek istenmesi doğaldır. Ancak çok az sayıdaki denklem sınıfının çözümlerinin elemanter fonksiyonlar cinsinden elde edilebilmesi gerçeği araştırmacıları, denklemin çözümünü elde etmeksizin verilen denklemden hareketle çözümlerinin özelliklerini araştırmaya, başka bir deyişler denklem üzerinde kalitatif inceleme yapmaya yöneltmiştir. Bu anlamda çözümlerin sınırlılığı, sıfırlarının sayısı ve dağılımı, kararlılığı ve uzun zaman davranışı gibi kalitatif incelemeler literatürde yer alan pek çok çalışmanın konusu olmuştur. Çözümlerin sıfırlarının sayısı ile ilgili problemlerden olan salınımlılık ve salınımsızlık problemi ilk defa C. Sturm'un 1836 yılında yayınladığı klasik bir çalışmasıyla [1] gündeme gelmiştir. Bundan yaklaşık yarım yüzyıl sonra kalitatif incelemenin araştırmacıların dikkatini çekmeye başlamasıyla birlikte [2], özellikle son yıllarda bu probleme yoğun ilgi duyulmuş ve yapılan bilimsel yayınlarla oldukça geniş bir literatür meydana gelmiştir.

Biz bu tezde ikinci basamaktan diferensiyel denklemlerin çözümlerin salınımlılığına ilişkin bazı çalışmaları irdeleyeceğimizden konuya ilişkin temel kavram ve tanımları vermek için ikinci basamaktan genel

$$x'' = f(t, x, x') \tag{1.1}$$

formundaki diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin çözümlerinin $t_0 \geq 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığında mevcut olduğunu varsayalım.

1.1. Tanım:

Eş. 1.1 diferensiyel denkleminin bir $x(t)$ çözümü $[t_0, \infty)$ aralığında keyfi sayıda, yeterince büyük sıfırlara sahipse bu aralıkta salınımlıdır denir. Tersine, söz konusu çözüm $[t_0, \infty)$ aralığında sonlu sayıda sıfırlara sahipse bu aralıkta salınımsızdır denir [3].

Buna göre salınımlı bir çözüm için $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ olacak şekilde çözümün sıfırlarının bir $\{t_n\}$ dizisi mevcuttur. Çözüm salınımsız ise her $t \geq t_1 \geq t_0$ için çözüm ya pozitif ya da negatif kalacak şekilde bir t_1 sayısı mevcuttur.

1.2. Tanım:

Eş. 1.1 denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise denkleme salınımlı denklem denir.

1.1. Örnek:

λ reel bir sabit olmak üzere $x''(t) + \lambda x(t) = 0$ denklemini göz önüne alalım. $\lambda > 0$ olması durumunda lineer bağımsız çözümler $\cos\sqrt{\lambda t}$ ve $\sin\sqrt{\lambda t}$ olup denklem salınımlı olur. $\lambda \leq 0$ olması durumunda ise lineer bağımsız çözümler $e^{\sqrt{-\lambda t}}$ ve $e^{-\sqrt{-\lambda t}}$ olup denklem salınımsız olur.

1.2. Örnek:

$x'(t) + x(t) = 0$ denklemi salınımsızdır fakat bu denkleme karşılık gelen bir "gecikmeli denklem" olan $x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ denklemi salınımlı olan $\cos t$ ve $\sin t$ çözümlerine sahiptir.

1.3. Örnek:

Örnek 1.1 $x'(t) - x(t) = 0$ denkleminin salınımlı çözümü yoktur. Fakat bu denkleme karşılık gelen bir gecikmeli denklem olan $x'(t) + x(-t) = 0$ denklemi $x_1(t) = \sin t$ ve $x_2(t) = e^t + e^{-t}$ gibi sırasıyla salınımlı ve salınımsız çözümlere sahiptir.

Örnek 1.2 ve Örnek 1.3 de görüldüğü gibi fonksiyonel terimler denklemin salınımlılık davranışını etkileyebilmektedir. Birinci mertebeden adi diferensiyel denklemler salınımsız olduğu halde Myslus (1972), λ ve τ reel sabitler olmak üzere $\lambda\tau > \dfrac{1}{e}$ eşitsizliği sağlanırsa $x'(t) + \lambda x(t-\tau) = 0$ denkleminin salınımlı olacağını göstermiştir [4]. Aksine, bazı durumlarda denklemin salınımlılık davranışı fonksiyonel terimlerden etkilenmeyebilir. Örneğin Mahfoud (1979), μ reel bir sabit ve $t \geq t_0 > \tau > 0$ olmak üzere gecikmeli terim içeren $x''(t) + \dfrac{\mu}{t^2} x(t-\tau) = 0$ denklemi ile fonksiyonel terim içermeyen $x''(t) + \dfrac{\mu}{t^2} x(t) = 0$ denkleminin salınımlılık davranışının aynı olduğunu göstermiştir [5]. Bundan dolayı fonksiyonel denklemlerin salınımlılık problemleri ayrıca araştırılmalıdır.

Diferensiyel denklemlerin salınımlılık ve salınımsızlık teorisi özetle aşağıdaki problemlerle ilgilenir [6]:

1. Denklemin salınımlılığı veya salınımsızlığını garanti edecek kriterler elde etmek,
2. Denklemin salınımlı veya belirli uzun zaman davranışına sahip salınımsız çözümlerin varlığını garanti edecek kriterler elde etmek,
3. Çözümlerin genliği ve sıfırlarının dağılımı üzerine bilgi verecek sonuçlar elde etmek,
4. Yukarıdaki üç problemin çözümünü homojen olmayan denklemler için çözmek,
5. Denklemin salınımlılığı ile diğer kalitatif özellikler arasında ilişkiler kuran sonuçlar elde etmek.

Bu tez çalışmasında ikinci basamaktan lineer olmayan bir diferensiyel denklem sınıfının ve buna karşılık gelen bir fonksiyonel denklem sınıfının salınımlılık özellikleri incelenecektir. Orijinal sonuçlardan oluşan üçüncü bölümün altyapısını oluşturmak için ikinci bölümde, amaca yönelik temel kavramlar ve kullanacağımız ispat yöntemlerinin kullanıldığı bazı önemli sonuçlar kronolojik ve sistematik biçimde sunulacaktır.

2. İKİNCİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIK TEORİSİ

2.1. Lineer Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılık Teorisi

Diferensiyel denklemlerin salınımlılığı üzerine ilk önemli sonuçlar C. Sturm [1] tarafından lineer denklemler için verilmiştir. *Karşılaştırma* (veya mukayese) ve *ayırma* teoremleri olarak bilinen bu teoremleri ifade etmek için ikinci mertebeden lineer

$$x''(t)+q(t)x(t)=0 \tag{2.1}$$

$$x''(t)+Q(t)x(t)=0 \tag{2.2}$$

diferensiyel denklemlerini ele alalım. Burada q ve Q fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve pozitif kabul edilmiştir. Bu durumda Sturm'un söz konusu sonuçları aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

2.1. Teorem (Sturm Karşılaştırma Teoremi):

$a<t<b$ için $q(t)<Q(t)$ olsun. Eş. 2.1 denkleminin $x(a)=x(b)=0$ koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü var ise Eş. 2.2 denkleminin her reel çözümünün (a,b) aralığında en az bir sıfırı vardır [7].

2.2. Teorem (Sturm Ayırma Teoremi):

Eş. 2.1 denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin sıfırları birbirini ayırır [7].

Karşılaştırma ve ayırma teoremlerinin açık iki sonucu olarak

1. Eş. 2.1 denklemi ya salınımlıdır ya da salınımsız,

2. Eş. 2.1 denklemi

   $q(t) \geq q_0 > 0$ ise salınımlı,

   $q(t) \leq 0$ ise salınımsızdır,

olduğu söylenilebilir. Görüldüğü gibi Eş. 2.1 denklemi $q(t) > 0$ olduğu durumlarda da salınımsız olabilir. Örneğin

$$x''(t) + \frac{\delta}{t^2} x(t) = 0$$

Euler denkleminin $\delta > 1/4$ için salınımlı, $\delta \leq 1/4$ için salınımsız olduğu bilinmektedir. Sturm'un bu sonuçlarından sonra bu probleme yönelik ilk çalışma 1893'te Kneser tarafından yapılmıştır.

2.3. Teorem (Kneser, 1893):

$q(t) > 0$ olmak üzere ve $w = \lim_{t \to \infty} t^2 q(t)$ olarak tanımlansın. Eş. 2.1 denklemi $w > 1/4$ için salınımlı, $w < 1/4$ için salınımsızdır [8].

Eş. 2.1 denkleminin salınımlılığı için q fonksiyonunun integralini içeren ilk kriter Fite tarafından verilmiştir.

2.4. Teorem (Fite, 1918):

$q(t) > 0$ olsun. Ayrıca

$$\int_{t_0}^{\infty} q(t)dt = \infty \tag{2.3}$$

sağlansın. Bu durumda Eş. 2.1 denklemi salınımlıdır [9].

Wintner 1949’da yayınlanan klasik çalışmasında ilk defa “integral ortalama” tekniğini kullanmıştır. Bu metod salınımlılık teorisinde birçok önemli çalışmanın temelini oluşturmuştur [10].

2.5. Teorem (Wintner, 1949):

Eğer

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)duds = \infty \tag{2.4}$$

ise Eş. 2.1 denklemi salınımlıdır [11].

Wintner elde ettiği bu sonuçla aslında Fite’nin sonucunun (Teorem 2.4) keyfi işaretli q fonksiyonu için de geçerli olduğunu göstermiştir. Ayrıca bağımsız olarak 1950 yılında bu sonucu Leighton [12] da elde etmiştir. Bundan dolayı literatürde Teorem 2.4 ün keyfi işaretli q fonksiyonu için ifadesi *Fite-Wintner Teoremi* ya da *Fite-Wintner-Leighton Teoremi* olarak adlandırılmaktadır.

Hartman elde ettiği aşağıdaki sonuçla Wintner’in teoremini Eş. 2.4 yerine daha zayıf bir koşul altında ispatlayarak geliştirmiştir.

2.6. Teorem (Hartman, 1952):

Eğer

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)duds < \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)duds \le \infty \tag{2.5}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa Eş. 2.1 denklemi salınımlıdır [13].

Wintner'in sonucuna diğer önemli bir geliştirme de Kamanev tarafından yapılmıştır.

2.7. Teorem (Kamanev, 1978):

$n > 1$ sabiti için

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^n q(s)ds = \infty \tag{2.6}$$

sağlansın. Bu durumda Eş. 2.1 denklemi salınımlıdır [14].

Kamanev'in bu sonucu daha sonra Philos tarafından genelleştirilmiştir.

2.8. Teorem (Philos, 1989):

$D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\}$ kümesinde tanımlı, $t \geq t_0$ için $H(t,t) = 0$ ve her $t > s$ için $H(t,s) > 0$ koşullarını sağlayan bir H fonksiyonu,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,s)} \int_{t_0}^{t} \left[q(s)H(t,s) - \frac{1}{4} h^2(t,s) \right] ds = \infty \tag{2.7}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa bu durumda Eş. 2.1 denklemi salınımlıdır. Burada h fonksiyonu her $(t,s) \in D$ için $h(t,s) = -\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s} \dfrac{1}{\sqrt{H(t,s)}}$ olarak tanımlanmıştır [15].

Dikkat edilirse Teorem.2.8 de $H(t,s) = (t-s)^n$ seçilirse Kamanev'in sonucu (Teorem2.7) elde edilir.

2.2. Lineer Olmayan Denklemlerin Salınımlılık Teorisi

Bu bölümde ikinci mertebeden lineer olmayan

$$x'' + q(t)f(x) = 0 \tag{2.8}$$

denkleminin salınımlılığı hakkında literatürde yer alan bazı çalışmalar üzerinde durulacaktır. Eş. 2.8 denklemi $f(x) = x$ olması durumunda Eş. 2.1 lineer denklemine döner ve Sturm ayrıma teoreminden dolayı her iki lineer bağımsız çözümü de salınımlılık anlamında aynı davranıştadır. Fakat genel durumda Eş. 2.8 denklemi hem salınımlı hem de salınımsız çözümler üretebilir. Yani lineer olmayan terim denklemin salınımlılık davranışını etkilemektedir. Bundan dolayı Eş. 2.8 denkleminin f fonksiyonunun özelliklerine göre alt kategorilere ayrıldıktan sonra her kategorinin kalitatif incelemesinin ayrı olarak yapılması kolaylık sağlamaktadır.

2.1. Tanım:

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $0 < \int_{0^+}^{\varepsilon} \frac{du}{f(u)}$ ve $\int_{0^-}^{-\varepsilon} \frac{du}{f(u)} < \infty$ ise Eş. 2.8 denklemine "alt lineer" (sublineer), $0 < \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{du}{f(u)}$ ve $\int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty$ ise Eş. 2.8 denklemine "üst lineer" (superlineer) denklem denir [3].

Eş. 2.8 denkleminin salınımlılığı üzerine yapılan ilk araştırmalara Atkinson'un 1955 yılında yayınladığı bir çalışması ilham vermiştir. Atkinson bu çalışmasında Eş. 2.8 denkleminin salınımlılık özelliklerini $f(x) = x^{2n-1}$ özel durumunda incelemiştir. Bu özel durum literatürde genelleştirilmiş Emden-Fowler denklemi olarak adlandırılan ve fizikte birçok uygulaması olan önemli bir denklem sınıfındadır. Emden-Fowler denklemi, ρ, σ, γ reel sayılar ve $\gamma > 0$ olmak üzere

$$\left(t^{\rho}u'\right)' + t^{\sigma}u^{\gamma} = 0$$

denklemidir. Bu denklemin genelleştirilmiş bir hali olan

$$\left(r(t)u'\right)' + a(t)u^{\gamma} = 0$$

denklemine *genelleştirilmiş Emden-Fowler denklemi* denir ve bu denklem uygun dönüşümler kullanılarak

$$x'' + q(t)x^{\gamma} = 0$$

şeklinde ifade edilebilir [16]. Bu denklemde negatif x ve tamsayı olmayan γ değerleri için oluşan tanımsızlık durumlarını bertaraf etmek için x^{γ} terimi yerine $|x|^{\gamma}\operatorname{sgn} x$, veya buna denk olan $|x|^{\gamma-1}x$ terimi yazılarak

$$x'' + q(t)|x|^{\gamma}\operatorname{sgn} x = 0 \tag{2.9}$$

veya

$$x'' + q(t)|x|^{\gamma-1}x = 0 \tag{2.10}$$

denklemi elde edilir. Tanım 2.1 dikkate alındığında Eş. 2.9 (veya Eş. 2.10) denkleminin $0<\gamma<1$ için alt lineer, $\gamma>1$ için üst lineer ve $\gamma=1$ için lineer denklem olduğu görülür. Eş. 2.9 denkleminin üst lineer ve alt lineer olmaları durumları için salınımlılık teoremleri Atkinson ve Belohorec tarafından yayınlanmıştır.

2.9. Teorem (Atkinson, 1955):

$\gamma > 1$ olsun. Bu durumda Eş. 2.9 denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\int^{\infty} tq(t)dt = \infty \tag{2.11}$$

olmasıdır [17].

2.10. Teorem (Belohorec, 1961):

$0 < \gamma < 1$ olsun. Bu durumda Eş. 2.9 denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\int^{\infty} t^{\gamma} q(t)dt = \infty \tag{2.12}$$

olmasıdır [18].

$\gamma = 1$ olması durumunda Fite-Wintner teoreminden (Teorem 2.4) dolayı $\int^{\infty} q(s)ds = \infty$ koşulu sağlanırsa Eş. 2.9 lineer denkleminin salınımlı olacağını biliyoruz. Waltman [19] bu kriterin $\gamma > 1$ olması halinde de geçerli olduğunu göstermiştir (1965). Benzer şekilde, $\gamma > 1$ olması durumunda Wintner'in teoreminin (Teorem 2.5) Eş. 2.9 denklemi için geçerli olduğunu Butler [20] göstermiştir (1980). Fakat Kamanev, Wintner'in sonucunun alt lineer Emden-Fowler denklemi için daha zayıf koşullar altında geçerli olduğunu göstermiştir.

2.11. Teorem (Kamanev, 1971):

Kabul edelim ki

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}q(u)duds=\infty \tag{2.13}$$

koşulu sağlansın. Bu durumda $0<\gamma<1$ için Eş. 2.9 denklemi salınımlıdır [21].

Daha sonra Wong, Kamanev'in bu sonucunun ilave bir koşul ile birlikte üst lineer Emden-Fowler denklemi için de geçerli olduğunu göstermiştir.

2.12. Teorem (Wong, 1973):

Kabul edelim ki

$$\lim_{t\to\infty}\inf\int_{t_0}^{t}q(s)ds>-\infty \tag{2.14}$$

ve Eş. 2.13 koşulları sağlansın. Bu durumda $\gamma>1$ için Eş. 2.9 denklemi salınımlıdır [22].

Ayrıca Wong aynı ilave koşulla birlikte Kamanev'in lineer denklemlere ilişkin salınımlılık sonucunun (Teorem 2.7) hem alt lineer hem de üst lineer Emden-Fowler denklemi için de geçerli olduğunu göstermiştir.

2.13. Teorem (Wong, 1986):

$\gamma>0$ olsun. $n>1$ için Eş. 2.6 ve Eş. 2.14 koşulları sağlansın. Bu durumda Eş. 2.9 denklemi salınımlıdır [23].

Wong'un bu teoreminin $f'(x) \geq 0$ olması koşuluyla Eş. 2.8 denklemi için de geçerli olduğunu Philos [24] göstermiştir.

Philos'un 1989 yılında lineer denklemler için elde ettiği sonucun (Teorem 2.8) benzerini alt lineer ve üst lineer Eş. 2.8 denklemleri için 2000 yılında Wong elde etmiştir. Bu teoremlerde Wong, $D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\}$ kümesine tanımlı H fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığını varsaymıştır.

i. $t \geq t_0$ için $H(t,t) = 0$ ve her $t > s$ için $H(t,s) > 0$,

ii. $\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s} \leq 0$, $\left.\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}\right|_{s=t} \equiv 0$ ve $\dfrac{\partial^2 H(t,s)}{\partial s^2} \geq 0$,

iii. $-H^{-1}(t,t_0)\left.\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}\right|_{s=t_0} \leq M$,

iv. $0 < b \leq \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \leq B < \infty$,

v. her $\tau \geq t_0$ için $\lim\limits_{t\to\infty}\left\{-H^{-1}(t,\tau)\left.\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}\right|_{s=\tau}\right\} = 0$.

2.14. Teorem (Wong, 2000):

$q \in C(0,\infty)$, $f \in C^1(-\infty,\infty)$, $f' \geq 0$ ve $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ özelliklerine sahip alt lineer f fonksiyonu, her x ve bir pozitif c sabiti için $f'(x)\left(\displaystyle\int_0^x \frac{dv}{f(v)}\right) \geq c > 0$ koşulunu sağlasın. Ayrıca

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)q(s)\,ds = \infty \tag{2.15}$$

olacak şekilde (i)-(iii) koşullarını sağlayan bir $H(t,s)$ fonksiyonu var olsun. Bu durumda Eş. 2.8 denklemi salınımlıdır [25].

2.15. Teorem (Wong, 2000):

$q \in C(0,\infty)$, $f \in C^1(-\infty,\infty)$, $f' \geq 0$ ve $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ özelliklerine sahip üst lineer f fonksiyonu, her x ve bir pozitif l sabiti için $f'(x)\left(\int_x^\infty \frac{dv}{f(v)}\right) \geq l > 1$ koşulunu sağlasın. Ayrıca

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H_1(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H_1(t,s)q(s)ds = \infty \tag{2.15}$$

ve $L > 0$ için

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H_2(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H_2(t,s)q(s)ds = -L > -\infty \tag{2.16}$$

olmak üzere (i)-(v) koşullarını sağlayan $H_1(t,s)$ ve $H_2(t,s)$ fonksiyonları var olsun ve $l_1 < l$ olmak üzere

$$\left(\frac{\partial H_2(t,s)}{\partial s}\right)^2 \leq l_1 \frac{\partial^2 H_2(t,s)}{\partial s^2} H_2(t,s) \tag{2.17}$$

koşulunu sağlayan pozitif bir l_1 sabiti var olsun. Bu durumda Eş. 2.8 denklemi salınımlıdır [25].

Lineer olmayan denklemlerin salınımlılığı üzerine benzer diğer çalışmalara örnek olarak $a \in C^1([t_0,\infty), R^+)$, $q \in C([t_0,\infty), R)$ ve $\psi, f \in C^1(R,R)$ olmak üzere

$$\left(a(t)\psi(x)x'\right)' + q(t)f(x) = 0 \tag{2.18}$$

denklemi üzerine 2001 yılında Manojlovic' in yaptığı çalışma [26] ile $a \in C([t_0,\infty),R^+)$, $q \in C([t_0,\infty),R)$, $\psi \in C(R,R)$ ve $p>1$ bir sabit olmak üzere

$$\left(a(t)\psi(x)|x'|^{p-2}x'\right)' + q(t)|x|^{p-2}x = 0 \tag{2.19}$$

denklemi üzerine 2002 yılında Ayanlar ve Tiryaki'nin yaptığı çalışma [27] gösterilebilir. Ayrıca Wong 2001 yılında $p,q \in C([t_0,\infty),R)$ ve $f \in C^1(R,R)$ olmak üzere

$$x'' + p(t)x' + q(t)f(x) = 0 \tag{2.20}$$

denkleminin salınımlılığını araştırmıştır [28].

İkinci mertebeden lineer olmayan denklemlerin salınımlılık teorisinde araştırmalar son yıllarda, yukarıda verilen örneklerde görüldüğü gibi, çok genel denklem sınıfları üzerine değil, belirli yapıda katsayı fonksiyonlarına sahip denklem sınıfları ve bunların zorlayıcı (forcing) ve/veya söndürücü (damping) terime sahip benzer denklemler üzerine yoğunlaşmış bulunmaktadır. Bu çalışmalara, zorlayıcı terimli

$$\begin{aligned}
&(p(t)x'(t))' + q(t)f(x(t)) = e(t)\\
&\left[p(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{p-2}x'(t)\right]' + q(t)f(x(t)) = e(t)\\
&[p(t)\psi(x(t))\phi(x'(t))]' + q(t)f(x(t)) = e(t)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

denklemleri üzerine yapılan çalışmalar [29-42] ve söndürücü terimli

$$\begin{aligned}
&x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0\\
&(r(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0\\
&[r(t)\psi(x(t))x'(t)]' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0\\
&[r(t)k_1(x(t),x'(t))]' + p(t)k_2(x(t),x'(t))x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

denklemleri üzerine yapılan çalışmalar [28, 43-50] örnek olarak gösterilebilir.

2.3. Aralık Kriterleri

Bölüm 2.1 de verildiği üzere ikinci mertebeden lineer

$$x'' + q(t)x = 0$$

denkleminin salınmlılığını garantileyen en önemli birkaç koşul,

1. $\int_{t_0}^{\infty} q(t)dt = \infty$ (Fite-Wintner-Leighton),
2. $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)duds = \infty$ (Wintner),
3. $-\infty < \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)duds < \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)duds \leq \infty$ (Hartman),
4. $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t} (t-s)^n q(s)ds = \infty$ (Kamanev),

olarak sıralanabilir. Dikkat edilirse bu kriterlerin tamamı q fonksiyonunun $[t_0, \infty)$ yarı sonsuz ekseni üzerinden integralini içermektedir. Yani bu kriterlerin kullanılabilmesi için, q fonksiyonunun tüm pozitif yarı sonsuz eksende belirli bir özelliğe sahip olması gerekmektedir. Oysa Sturm'un ayırma teoremine göre salınımlılık özelliği bir aralık özelliğidir. Dolayısıyla tüm yarı eksen yerine bazı alt aralıklarında belirli özellkilere sahip q fonksiyonu için de salınımlılık kriterlerinin elde edilip edilemeyeceği sorusunun akla gelmesi doğaldır. Örneğin tüm eksen göz önüne alındığında $\int_{t_0}^{\infty} q(t)dt = -\infty$ özelliğine sahip bir q fonksiyonu için yukarıda sıralanan kriterlerin hiçbiri kullanılamaz. Fakat bu q fonksiyonu için $i = 1,2,..$ olmak üzere öyle $[a_i, b_i]$ alt aralıkları, bu aralıklarda denklemin salınımlı olması için yeterli özellikleri sağlanacak şekilde bulunabilir mi?

1982 yılında Kwong ve Zettl [51] bu fikri kısmen uygulayarak, "telescoping principle" ismini verdikleri metodla, belirli aralıklarda belirli özellikleri sağlayan q fonksiyonunu içeren salınımlılık kriterleri elde ettiler. Fakat bu çalışmalarında söz konusu aralıkların dışında kalan aralıklarda $\int_{a_i}^{b_i+1} q(s)ds \geq 0$ koşulunun sağlandığını varsayarak yine tüm yarı sonsuz eksende koşul koymuş oldular.

1993 yılında El-Sayed bir çalşmasında [32] ikinci basamaktan zorlayıcı terimli lineer

$$\left(p(t)x'(t)\right)' + q(t)x(t) = e(t) \tag{2.22}$$

diferensiyel denklemi için bir aralık kriteri elde etmiştir. Ancak El-sayed elde ettiği sonuçların ispatlarında sabit katsayılı denklemler içeren karşılaştırmalar içerdiği için elde ettiği bu sonuçlar çok kesin kabul edilmemektedir [5]. 1999 yılında Wong ikinci basamaktan denklemler için gerçek bir aralık kriteri elde eden ilk araştırmacı olmuştur.

2.16. Teorem (Wong, 1999):

Kabul edelim ki $t \in [s_1, t_1]$ için $e(t) \leq 0$ ve $t \in [s_2, t_2]$ için $e(t) \geq 0$ olacak şekilde $t_0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ noktalar var olsun. Eğer $i = 1,2$ olmak üzere $u(s_i) = u(t_i) = 0$ ve $t \in (s_i, t_i)$ için $u(t) \neq 0$ olan bir u fonksiyonu

$$Q_i(u) = \int_{s_i}^{t_i} \left[q(t)u^2(t) - p(t)(u'(t))^2 \right] dt > 0, \quad i = 1,2 \tag{2.23}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa bu durumda Eş. 2.22 denklemi salınımlıdır [52].

Elbette Wong'un bu metodunun Eş. 2.20 ve Eş. 2.21 ile verilen denklem sınıflarına uygulanıp çok sayıda aralık kriterinin elde edilmiş olması şaşırtıcı değildir. Bazı örnek çalışmalar [53-54] da görülebilir.

2.4. Zorlayıcı ve Söndürücü Terimli Denklemlerin Salınımlılığına İlişkin Bazı Sonuçlar

2000 yılında Tiryaki ve Zafer [46], 2004 yılında Mustafa, Rogovchenko ve Rogovchenko [47] tarafından yapılan çalışmalarda

$$\left(r(t)x'(t)\right)' + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{2.24}$$

denkleminin salınımlılığına ilişkin bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca daha genel bir denklem olan

$$\left[r(t)k_1\left(x(t), x'(t)\right)x'(t)\right]' + p(t)k_2\left(x(t), x'(t)\right)x'(t) + q(t)f\left(x(t)\right) = 0 \tag{2.25}$$

denklemi için bazı salınımlılık kriterleri 2000 yılında Ayanlar ve Tiryaki [48], 2003 yılında Rogovchenko ve Rogovchenko [55] tarafından verilmiştir. Daha genel

$$\left[r(t)k_1\left(x(t), x'(t)\right)\right]' + p(t)k_2\left(x(t), x'(t)\right)x'(t) + q(t)f\left(x(t)\right) = 0 \tag{2.26}$$

denkleminin salınımlılığına ilişkin ilk çalışma ise 2000 yılında Rogovchenko ve Rogovchenko [49] tarafından yapılmıştır. Daha sonra bu çalışmada elde edilen sonuçlar 2005 yılında Tiryaki ve Zafer [50] tarafından geliştirmiştir.

2006 yılında Zhao ve Meng [56], Riccati tekniği ve Philos tipi çekirdek fonksiyonlarını kullanarak Eş. 2.26 denkleminin salınımlılığı üzerine daha genel sonuçlar elde etmişlerdir. Zhao ve Meng bu çalışmalarında aşağıdaki koşulların sağlandığını varsaymışlardır:

(a_1) Her $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$,

(a_2) her $(u,v) \in R^2$ ve bazı $\alpha, \beta_1 > 0$ için $vk_1(u,v) \geq \beta_1 |k_1(u,v)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$,

(a_3) her $(u,v) \in R^2$ ve bazı $\beta_2 > 0$ için $vk_2(u,v) f^{\frac{1}{\alpha}}(u) \geq \beta_2 |k_1(u,v)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$,

(a_4) $f'(x)$ mevcut olsun, ayrıca $x \neq 0$ ve bazı $\beta_3 \geq 0$ için $\dfrac{f'(x)}{|f(x)|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \geq \beta_3$

(a_5) $t \geq t_0$ için $q(t) \geq 0$ ve bir $K \geq 0,\ \gamma \geq 1$ için $\dfrac{f(x)}{x} \geq K|x|^{\gamma-1}$,

(a_6) $u \in R,\ u \in R - \{0\}$ ve bazı $\beta_4 \geq 0$ için $vk_1(u,v) \geq \beta_1 |k_1(u,v)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$,

(a_7) her $(u,v) \in R^2$ ve bazı $\beta_5 > 0$ için $vu^{\frac{1}{\alpha}} k_2(u,v) \geq \beta_2 |k_1(u,v)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$.

2007 yılında Çakmak ve Tiryaki [57], Zhao ve Meng'in bu çalışmasındaki ispatların hatalı olduklarını göstermişlerdir. Çakmak ve Tiryaki teoremlerde kullanılan koşullardan (a_3), (a_6) ve (a_7) koşulları altında bu teoremlerin ispatlanamayacağını göstermişlerdir. Çakmak ve Tiryaki sözü geçen teoremlerin ispatlanabilmeleri için bu koşullar yerine

(b_3) her $(u,v) \in R^2$ ve bazı $\beta_2 > 0$ için $vk_2(u,v) |f(u)|^{\frac{1}{\alpha}} \geq \beta_2 |k_1(u,v)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$,

(b_6) $u \in R,\ u \in R - \{0\}$ ve bazı $\beta_4 \geq 0$ için $vk_1(u,v) \geq \beta_1 |k_1(u,v)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} |u|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$,

(b_7) her $(u,v) \in R^2$ ve bazı $\beta_5 > 0$ için $v|u|^{\frac{1}{\alpha}} k_2(u,v) \geq \beta_2 |k_1(u,v)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$.

koşullarının alınmasının uygun olacağını önermişlerdir.

2008 yılında Huang ve Meng [42], Çakmak ve Tiryakinin önerilerini de dikkate alarak Eş. 2.26 denkleminin salınımlılığına ilişkin bazı yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Yukarıdaki sürecin diğer sonuçları olarak Huang ve Meng tarafından 2009 ve 2011 yıllarında zorlayıcı ve söndürücü terimli

$$\left[r(t)k_1(x(t),x'(t))\right]' + p(t)k_2(x(t),x'(t))x'(t) + q(t)f(x(t)) = e(t) \tag{2.27}$$

denkleminin salınmlılığına ilişkin bazı yeni sonuçları bu revize koşullar altında elde etmişlerdir. Bu sonuçları şöyle sıralayabiliriz.

2.17. Teorem (Huang ve Meng, 2009):

Kabul edelim ki $(a_1 - a_2)$, (b_3) ve (a_4) koşulları sağlansın. Ayrıca $t \in [s_1, t_1]$ için $e(t) \le 0$, $t \in [s_2, t_2]$ için $e(t) \ge 0$ ve $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için $p(t) \ge 0$ olacak şekilde $t_0 \le s_1 < t_1 \le s_2 < t_2$ noktalar var olsun. $D = \{(t,s) : t \ge s \ge t_0\}$ kümesinde tanımlı, $t \ge t_0$ için $H(t,t) = 0$ ve her $t > s$ için $H(t,s) > 0$ koşullarını sağlayan bir H fonksiyonu, pozitif bir ρ fonksiyonu ve $i = 1,2$ için bir $\varepsilon_i \in (s_i, t_i)$ sayısı

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(\varepsilon_i, t_i)} \int_{s_i}^{\varepsilon_i} \left[H^{\alpha+1}(\tau, s_i) q(\tau)\rho(\tau) - \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{H_1^{\alpha+1}(\tau, s_i) r^{\alpha+1}(\tau)\rho(\tau)}{(\beta_2 p(\tau) + \beta_1\beta_3 r(\tau))^\alpha} \right] d\tau$$

$$+ \frac{1}{H^{\alpha+1}(s_i, \varepsilon_i)} \int_{\varepsilon_i}^{t_i} \left[H^{\alpha+1}(t_i, \tau) q(\tau)\rho(\tau) - \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{H_2^{\alpha+1}(t_i, \tau) r^{\alpha+1}(\tau)\rho(\tau)}{(\beta_2 p(\tau) + \beta_1\beta_3 r(\tau))^\alpha} \right] d\tau > 0$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa bu durumda Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır. Burada her $(t,s) \in D$ için $h_1(t,s) = \frac{\partial H(t,s)}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{H(t,s)}}$, $h_2(t,s) = -\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \frac{1}{\sqrt{H(t,s)}}$ ve

$$H_1(t,s)=\left|(\alpha+1)h_1(t,s)\sqrt{H(t,s)}+H(t,s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right|$$
$$H_2(t,s)=\left|(\alpha+1)h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}-H(t,s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\right|$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyonlardır [58].

2.18. Teorem (Huang ve Meng, 2009):

Kabul edelim ki (a_1), (a_5) ve (b_6-b_7) koşulları sağlansın. Ayrıca $t\in[s_1,t_1]$ için $e(t)\le 0$, $t\in[s_2,t_2]$ için $e(t)\ge 0$ ve $t\in[s_1,t_1]\cup[s_2,t_2]$ için $p(t),q(t)\ge 0$ olacak şekilde $t_0\le s_1<t_1\le s_2<t_2$ noktalar var olsun. $D=\{(t,s):t\ge s\ge t_0\}$ kümesinde tanımlı, $t\ge t_0$ için $H(t,t)=0$ ve her $t>s$ için $H(t,s)>0$ koşullarını sağlayan bir H fonksiyonu, pozitif bir ρ fonksiyonu ve $i=1,2$ için bir $\varepsilon_i\in(s_i,t_i)$ sayısı

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(\varepsilon_i,t_i)}\int_{s_i}^{\varepsilon_i}\left[H^{\alpha+1}(\tau,s_i)Q(\tau)\rho(\tau)-\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{H_1^{\alpha+1}(\tau,s_i)r^{\alpha+1}(\tau)\rho(\tau)}{(\beta_5p(\tau)+\beta_4r(\tau))^\alpha}\right]d\tau$$

$$+\frac{1}{H^{\alpha+1}(s_i,\varepsilon_i)}\int_{\varepsilon_i}^{t_i}\left[H^{\alpha+1}(t_i,\tau)Q(\tau)\rho(\tau)-\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{H_2^{\alpha+1}(t_i,\tau)r^{\alpha+1}(\tau)\rho(\tau)}{(\beta_5p(\tau)+\beta_4r(\tau))^\alpha}\right]d\tau>0$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa bu durumda Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır. Burada h_1, h_2, H_1, H_2 fonksiyonları Teorem 2.17 deki gibi ve $Q(t)=\gamma(\gamma-1)^{(1-\gamma)/\gamma}[Kq(t)]^{1/\gamma}|e(t)|^{(\gamma-1)/\gamma}$ olarak tanımlanmıştır [58].

Huang ve Meng tarafından verilen diğer birkaç sonucu ifade etmek için önce $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ ve $H\in D(s_i,t_i)=\{u\in C^1[s_i,t_i]:u(t)\ne 0,u(s_i)=u(t_i)=0\}$ ($i=1,2$) olmak üzere

$$A_{s_i}^{t_i}(h;t)=\int_{s_i}^{t_i} H^2(t)h(t)\rho(t)dt$$

fonksiyonelini tanımlayalım.

2.19. Teorem (Meng ve Huang, 2011):

Kabul edelim ki (a_1-a_2), (b_3) ve (a_4) koşulları sağlansın. Ayrıca $t\in[s_1,t_1]$ için $e(t)\le 0$, $t\in[s_2,t_2]$ için $e(t)\ge 0$ ve $t\in[s_1,t_1]\cup[s_2,t_2]$ için $p(t)\ge 0$ olacak şekilde $t_0\le s_1<t_1\le s_2<t_2$ noktalar var olsun. Eğer bir $H\in D(s_i,t_i)$ fonksiyonu ve pozitif bir $\rho\in C^1[t_0,\infty)$ fonksiyonu

$$A_{s_i}^{t_i}(q:t)>\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}A_{s_i}^{t_i}\left(\frac{r^{\alpha+1}}{(\beta_2 p+\beta_1\beta_3 r)^\alpha}\left|2\frac{H'}{H}+\frac{\rho'}{\rho}\right|^{\alpha+1};t\right),\quad i=1,2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa bu durumda Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır [59].

2.20. Teorem (Meng ve Huang, 2011):

Kabul edelim ki (a_1), (a_5) ve (b_6-b_7) koşulları sağlansın. Ayrıca $t\in[s_1,t_1]$ için $e(t)\le 0$, $t\in[s_2,t_2]$ için $e(t)\ge 0$ ve $t\in[s_1,t_1]\cup[s_2,t_2]$ için $p(t),q(t)\ge 0$ olacak şekilde $t_0\le s_1<t_1\le s_2<t_2$ noktalar var olsun. Eğer bir $H\in D(s_i,t_i)$ fonksiyonu ve pozitif bir $\rho\in C^1[t_0,\infty)$ fonksiyonu

$$A_{s_i}^{t_i}(Q:t)>\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}A_{s_i}^{t_i}\left(\frac{r^{\alpha+1}}{(\beta_5 p+\beta_4 r)^\alpha}\left|2\frac{H'}{H}+\frac{\rho'}{\rho}\right|^{\alpha+1};t\right),\quad i=1,2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa bu durumda Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır. Buarada $Q(t)=\gamma(\gamma-1)^{(1-\gamma)/\gamma}[Kq(t)]^{1/\gamma}|e(t)|^{(\gamma-1)/\gamma}$ olarak tanımlanmış fonksiyondur [59].

Fakat 2011 yılında Shang ve Qin[60], Huang ve Meng tarafından verilen bu sonuçlarda kullandıkları (a_3) , (a_6) ve (a_7) koşullarının (b_3) , (b_6) ve (b_7) koşullarıyla değiştirilmesine rağmen ispatların hala kesin olmadığını belirtmişlerdir. Bu çalışmasında Shang ve Qin (b_3) , (b_6) ve (b_7) koşullarının sağlanması durumunda Eş. 2.27 denkleminin sıfırdan geçen hiçbir çözümünün var olamayacağını, dolayısıyla bu koşulların sağlanması durumunda denklemin salınımlı çözümlere sahip olamayacağını göstermişlerdir. Shang ve Qin bu sonuçların bu teoremlerin ispatlarının tekrar gözden geçirilmesi gerektiklerini bildirerek bu problemi açık problem olarak bırakmışlardır. Bu tez çalışmasının 3. Bölümünde bu problem yeniden ele alınıp irdelenecektir.

2.5. Fonksiyonel Terimli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığına İlişkin Bazı Sonuçlar

Bu kesimde genel olarak fonksiyonel terimli denklemlerin salınımlılığına dair kapsamlı bilgi vermek yerine bu tez çalışmasında ele alınacak olan denklem modeli için elde edilmiş bazı sonuçları aktarmayı uygun buluyoruz.
Şimdi Tiryaki ve Başçı'nın ikinci mertebeden gecikmeli

$$\left[\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + F\left(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t))\right) = e(t) \tag{2.28}$$

$$\left[\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + p(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t) + F\left(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t))\right) = e(t) \tag{2.29}$$

denklemlerinin salınımlılığına ilişkin elde etmiş oldukları sonuçları vermek için kullanılacak koşulları verelim. Burada $\alpha > 0$ bir sabit, F, p, q, ψ ve e sürekli fonksiyonlar, $\tau : [t_0, \infty) \to (0, \infty)$, $\lim_{t\to\infty}(\tau(t)) = \infty$ olan bir fonksiyon ve r de sürekli pozitif tanımlı bir fonksiyondur.

(a_8) Herhangi bir $T \geq t_0$ için $t \in [s_1, t_1]$ için $e(t) \leq 0$, $t \in [s_2, t_2]$ için $e(t) \geq 0$ olacak şekilde $T \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ noktaları var,

(a_9) bazı $q_1 \in C[t_0, \infty)$, $\gamma \geq \alpha$ ve her $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$, $x \neq 0, u, v, w \in R$ için $F(t, x, u, v, w)/x \geq q_1(t)|x|^{\gamma-1}$,

(a_{10}) $0 < M_1 \leq \psi(x) \leq M_2$ olacak şekilde M_1, M_2 sabitleri var,

(a_{11}) her $t \in [t_0, \infty)$ için $\tau(t) \leq t$,

(a_{12}) her $x \in R$ için ψ türevlenebilir, $0 < \psi(x) \leq M$ ve $\psi'(x) \geq 0$ olacak şekilde bir M sabiti var,

(a_{13}) her $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$, $x \neq 0, u, v, w \in R$ için $xF(t, x, u, v, w) > 0$,

(a_{14}) bazı $q_1 \in C[t_0, \infty)$, $\gamma \geq \alpha$ ve her $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$, $x \neq 0, u, v, w \in R$ için $F(t, x, u, v, w)/u \geq q_1(t)|u|^{\gamma-1}$.

2.21. Teorem (Tiryaki ve Başçı, 2009):

Kabul edelim ki $(a_8 - a_{10})$ koşulları sağlansın. Ayrıca

(a_{15}) $\gamma > \alpha$ ise, $i = 1,2$ için

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{\gamma - a}\right)^{(\gamma-a)/\gamma} A_{s_i}^{t_i}\left(q^{\alpha/\gamma}|e|^{(\gamma-\alpha)7\gamma}; t\right) > \frac{M_2}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} A_{s_i}^{t_i}\left(r\left(2\left|\frac{H'}{H}\right| + \frac{|p|}{M_1 r}\right)^{\alpha+1}\right),$$

$\gamma = \alpha$ ise

$$A_{s_i}^{t_i}(q_1; t) > \frac{M_2}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} A_{s_i}^{t_i}\left(r\left(2\left|\frac{H'}{H}\right| + \frac{|p|}{M_1 r}\right)^{\alpha+1}\right)$$

koşulu sağlanacak şekilde bir $H \in D(s_i, t_i)$ fonksiyonu bulunsun. Bu durumda Eş. 2.29 denklemi salınımlıdır [61].

2.22. Teorem (Tiryaki ve Başçı, 2009):

Kabul edelim ki $(a_{11} - a_{14})$ koşulları sağlansın. Ayrıca

(a_{16}) $\gamma > \alpha$ ise, $i = 1,2$ için

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{\gamma - a}\right)^{(\gamma - a)/\gamma} A_{s_i}^{t_i}\left(q^{\alpha/\gamma}|e|^{(\gamma-\alpha)7\gamma}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha/k};t\right) > M\left(\frac{2}{(\alpha+1)}\right)^{\alpha+1} A_{s_i}^{t_i}\left(\left|\frac{H'}{H}\right|^{\alpha+1};t\right),$$

$\gamma = \alpha$ ise

$$A_{s_i}^{t_i}\left(q_2\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha/k};t\right) > M\left(\frac{2}{(\alpha+1)}\right)^{\alpha+1} A_{s_i}^{t_i}\left(\left|\frac{H'}{H}\right|^{\alpha+1};t\right)$$

koşulu sağlanacak şekilde bir $H \in D(s_i, t_i)$ fonksiyonu ve $k \in (0,1)$ bulunsun. Bu durumda Eş. 2.28 denklemi salınımlıdır [61].

3. İKİNCİ BASAMAKTAN ZORLAYICI VE SÖNDÜRÜCÜ TERİMLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

4.2 kesiminde belirtildiği gibi Huang ve Meng tarafından yayınlanan çalışmalarda ([58] ve [59]) verilen sonuçların (Teorem 2.17, Teorem 2.18, Teorem 2.19 ve Teorem 2.20) ispatlarının doğru olmadığı ve düzeltilmesi gerektiği Shang ve Qin [60] tarafından bildirilmiştir.

Ayrıca Wong [28], Teorem 2.19 ve Teorem 2.20 sonuçlarında Huang ve Meng'in kullandığı $A_{s_i}^{t_i}$ fonksiyonelinin, $H(s_i) = H(t_i) = 0$ olduğundan dolayı genelleştirilmiş bir integral içerdiğini bildirmiştir. Bu durum kriterlerin uygulanabilirliğini zayıflatmaktadır.

Diğer yandan Tiryaki ve Başçı [61] tarafından gecikmeli bir denklem sınıfının salınımlılığı üzerine verilen sonuçların (Teorem 2.21 ve Teorem 2.22), Huang ve Meng'in çalıştığı Eş. 2.27 denklemini de bir özel durum olarak içeren bir gecikmeli denklem sınıfına genişletilebilip genişletilemeyeceği sorusunun akla gelmesi de doğaldır.

Bu bölümde yukarıda özetlenen problemlere cevap veren orijinal sonuçlar sunulacaktır. Önce Huang ve Meng tarafından verilen sonuçlar yeniden gözden geçirilip Shang ve Qin'in bahsettiği aksaklıkları gideren "düzgün" koşullar altında yeni ispatlar ifade edilecektir. Ayrıca bu ispatlarda kullanılan fonksiyonelin tanımı ve özellikleri yardımıyla, genelleştirilmiş integraller için ortaya çıkan sıkıntıların bir kısmından kurtulmuş olacağız. Daha sonra Tiryaki ve Başçı'nın çalışmalarından [61] ilham alınarak Eş. 2.27 denklemini de içeren "gecikmeli" bir denklem sınıfının salınımlılığı üzerine yeni bazı sonuçlar verilecektir.

3.1. Ön Bilgiler

Bu kesimde, sonraki kesimlerde verilecek ispatlarda sıklıkla kullanılacak bazı notasyonlar ve lemmalar ifade edilecektir.

3.1. Tanım:

Önce $i = 1,2$ için

$$D(s_i, t_i) = \{e \in C^1[s_i, t_i] : u \neq 0, u(s_i) = u(t_i) = 0\}$$

kümesini tanımlayalım. Daha sonra $h \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$, $H \in D(s_i, t_i)$ ve $n \geq 0$ olmak üzere

$$A_{s_i}^{t_i}(h; n) = \int_{s_i}^{t_i} |H(t)|^n h(t) dt, \quad i = 1,2$$

fonksiyonelini tanımlayalım.

3.1. Lemma:

$A_{s_i}^{t_i}(h; n)$ fonksiyonelinin

1. $i = 1,2$ ve $k > 0$ için $A_{s_i}^{t_i}(h; n) = A_{s_i}^{t_i}(|H|^k h; n - k)$,
2. $i = 1,2$ için $A_{s_i}^{t_i}(h'; n) \geq -A_{s_i}^{t_i}(n|H'h|; n - 1)$,

özelliklerini sağladığı açıktır.

Dikkat edilirse [59] da verilen $A_{s_i}^{t_i}(h; t)$ fonksiyonelinde görülen singülerlikler Tanım 3.1 ile verilen $A_{s_i}^{t_i}(h; n)$ operatöründe $n \geq k$ olması halinde görülmemektedir.

Şimdi

$$D_1 = \{(t,s) : t_0 \le s \le t < \infty\} \subset R^2$$

kümesini tanımlayalım. $G(t,s) \in C(D_1, R)$ fonksiyonunun

1. $t > s$ için $G(t,s) > 0$ ve $G(t,t) = 0$,
2. $G(t,s)$ fonksiyonu her iki değişkenine göre kısmi türevlere sahip ve

   $$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = g_1(t,s)\sqrt{G(t,s)}, \qquad \frac{\partial G(t,s)}{\partial s} = -g_2(t,s)\sqrt{G(t,s)}$$

   olacak şekilde $g_1, g_2 \in L_{loc}(D_1,(0,\infty))$ fonksiyonları mevcut.

özelliklerine sahip olduğunu varsayalım.

Şimdi teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan iki adet lemmayı ifade edelim.

3.2. Lemma:

A, B negatif olmayan sabitler ve m, n de $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ özelliğine sahip reel sayılar olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{m}A + \frac{1}{n}B \ge A^{1/m}B^{1/n}$$

eşitsizliği sağlanır [62].

3.3. Lemma:

$\tau \in C([t_0,\infty),(0,\infty))$ fonksiyonu $t \ge t_0$ için $\tau(t) < t$ ve $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ özelliklerine sahip olsun. Ayrıca bazı $T > 0$ sayıları için $x \in C^2([T,\infty), R)$ olan x fonksiyonu $t \ge T$ için $x(t) > 0$ ve $x''(t) \le 0$ eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda her $k \in (0,1)$ sayısı için, $t > \tau(t) \ge T_k$ olmak üzere

$$\frac{x(\tau(t))}{x(t)} \geq \left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{1/k}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $T_k \geq T$ sayısı vardır [61].

3.2. İkinci Basamaktan Zorlayıcı ve Söndürücü Terimli Bir Diferensiyel Denklem Sınıfının Salınımlılığı İçin Aralık Kriterleri

Bu kesimde $t \geq t_0 > 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ üzerinde çözüme sahip olduğunu varsaydığımız, ikinci basamaktan zorlayıcı ve söndürücü terimli, lineer olmayan

$$\left[r(t)k_1(x(t), x'(t))\right]' + p(t)k_2(x(t), x'(t))x'(t) + q(t)f(x(t)) = e(t) \tag{2.27}$$

diferensiyel denklemine ilişkin bazı salınımlılık kriterleri verilecektir. Eş. 2.27 denkleminde görünen r, p, q, f, e, k_1 ve k_2 fonksiyonları

1. $r \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$,
2. $p, q \in C([t_0, \infty), R)$,
3. $f, e \in C(R, R)$,
4. $k_1 \in C^1(R^2, R)$,
5. $k_2 \in C(R^2, R)$,

özelliklerine sahip fonksiyonlardır. Bu kesimde sıklıkla kullanacağımız koşullar aşağıda sıralanmıştır.

(c_1) $t \in [s_1, t_1]$ için $e(t) \leq 0$, $t \in [s_2, t_2]$ için $e(t) \geq 0$ olacak şekilde her $T \geq t_0 > 0$ için $t_0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ noktalar var olsun.

(c_2) Her $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$,

(c_3) Bazı $\alpha, \beta_1 > 0$ ve her $(u,v) \in R^2$ için $vk_1(u,v) \geq \beta_1 |k_1(u,v)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$,

(c_4) Her $(u,v) \in R^2$ için $uvk_2(u,v) \geq 0$,

(c_5) Her $x \neq 0$ ve bazı $\beta_2 > 0$ için $f'(x)$ mevcut ve $f'(x) \geq \beta_2 |f(x)|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$,

(c_6) Bazı $K > 0$, $\gamma \geq 1$ ve her $x \neq 0$ için $\dfrac{f(x)}{x} \geq K|x|^{\gamma-1}$,

(c_7) Bazı $\alpha, \beta_1 > 0$ ve her $(u, v \neq 0) \in R^2$ için $vk_1(u,v) \geq \beta_3 |k_1(u,v)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} |u|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$,

Şimdi Eş. 2.27 denkleminin salınımlılığına ilişkin sonuçları ifade edebiliriz.

3.1. Teorem:

Kabul edelim ki $(c_1 - c_5)$ koşulları sağlansın. Ayrıca $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için $p(t) > 0$ olsun. Eğer $i = 1,2$ için bir $H \in D(s_i, t_i)$ fonksiyonu ve negatif olmayan bir n sayısı

$$A_{s_i}^{t_i}(q; n+\alpha+1) > A_{s_i}^{t_i}\left(\delta_1 r |H'|^{\alpha+1}; n\right) \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabilirse Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır. $\delta_1 = \left(\dfrac{\alpha}{\beta_1 \beta_2}\right)^{\alpha} \left(\dfrac{n+\alpha+1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}$ şeklinde tanımlı bir sabittir.

İspat:

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Farzedelim ki Eş. 2.27 denkleminin salınımsız bir $x(t)$ çözümü var olsun. Bu durumda yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ sayısı için $[T_0, \infty)$ aralığında $x(t)$ çözümü işaretini korur. Yani $t \in [T_0, \infty)$ için ya $x(t) > 0$, ya da $x(t) < 0$ olur. Şimdi $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için

$$w_1(t) = \frac{r(t)k_1(x(t), x'(t))}{f(x(t))} \tag{3.2}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 2.27 denklemini kullanarak $w_1(t)$ fonksiyonun türevini alarak

$$w_1'(t) = -q(t) - \frac{p(t)k_2(x(t), x'(t))f(x(t))x'(t)}{f^2(x(t))} - \frac{r(t)k_1(x(t), x'(t))x'(t)f'(x(t))}{f^2(x(t))} + \frac{e(t)}{f(x(t))}$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer bu eşitlike $(c_3 - c_5)$ koşullarını ve $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için $p(t) > 0$ olduğu kullanılırsa $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için

$$w_1'(t) \le -q(t) - \frac{\beta_1 \beta_2}{r^{1/\alpha}(t)} |w_1(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{e(t)}{f(x(t))} \tag{3.3}$$

eşitsizliğini elde edilir. Eş. 3.3 eşitsizliğinden, (c_1) ve (c_2) koşullarından dolayı $a(t) = \beta_1 \beta_2 r^{-1/\alpha}(t)$ olmak üzere $t \in [s_1, t_1]$ ve $t \in [s_2, t_2]$ için $w_1(t)$ fonksiyonu

$$w_1'(t) \le -q(t) - a(t)|w_1(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.4}$$

eşitsizliğini sağlar.

Şimdi $t \in [T_0, \infty)$ için $x(t) > 0$ olduğunu kabul edelim. Eş. 3.4 eşitsizliğinin her iki tarafını $|H(t)|^{n+\alpha+1}$ ile çarpıp sonra da $i = 1$ için s_i den t_i ye kadar integralini alırsak $t \in [s_1, t_1]$ için

$$\int_{s_i}^{t_i} |H(t)|^{n+\alpha+1} q(t)dt \le -\int_{s_i}^{t_i} |H(t)|^{n+\alpha+1} w_1'(t)dt - \int_{s_i}^{t_i} |H(t)|^{n+\alpha+1} a(t)|w_1(t)|^{n+\alpha+1} dt$$

eşitsizliğini elde ederiz. Tanım 3.1 yardımıyla bu eşitsizlik $t \in [s_1, t_1]$ için

$$A_{s_i}^{t_i}(q; n+\alpha+1) \le -A_{s_i}^{t_i}(w_1'; n+\alpha+1) - A_{s_i}^{t_i}\left(a|w_1'|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}; n+\alpha+1\right) \tag{3.5}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eş. 3.5 eşitsizliği ve Lemma 3.1 yardımıyla $t \in [s_1, t_1]$ için

$$A_{s_i}^{t_i}(q; n+\alpha+1) \le A_{s_i}^{t_i}\big((n+\alpha+1)|H'||w_1|; n+\alpha\big) - A_{s_i}^{t_i}\left(a|w_1'|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}; n+\alpha+1\right)$$

$$= A_{s_i}^{t_i}\big((n+\alpha+1)|H'||H|^{\alpha}|w_1|; n\big) - A_{s_i}^{t_i}\left(a|H|^{\alpha+1}|w_1'|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}; n\right)$$

$$\le A_{s_i}^{t_i}\left((n+\alpha+1)|H|^{\alpha}|H'||w_1| - a|H|^{\alpha+1}|w_1'|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}; n\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak $t \in [s_1, t_1]$ için

$$A_{s_i}^{t_i}(q; n+\alpha+1) \le A_{s_i}^{t_i}\left((n+\alpha+1)|H|^{\alpha}|H'||w_1| - a|H|^{\alpha+1}|w_1'|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}; n\right) \tag{3.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $v > 0$ olmak üzere

$$F(v) = (n+\alpha+1)|H|^{\alpha}|H'|v - a|H|^{\alpha+1}v^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.7}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $F(v)$ fonksiyonunun iki kez türevi alınırsa $F''(v) < 0$ olduğu görülür, dolayısıyla $F'(v^*) = 0$ koşulunu sağlayacak v^* noktasında $F(v)$ fonksiyonunu maksimum değerini alır. Bundan dolayı $F(v^*) = 0$ eşitliğini sağlayan v^* sayısını bulalım. $F(v^*) = 0$ olması için

$$(n+\alpha+1)|H|^{\alpha}|H'|-\frac{\alpha+1}{\alpha}a|H|^{\alpha+1}\left(v^{*}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=0$$

olmalıdır. Buradan $H \neq 0$ için

$$v^{*}=\left(\frac{\alpha(n+\alpha+1)}{\alpha+1}\frac{1}{a}\left|\frac{H'}{H}\right|\right)^{\alpha}$$

olarak bulunur. Böylece

$$F(v)\leq F_{\max}=F\left(v^{*}\right)=\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{n+\alpha+1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}|H'|^{\alpha+1} \tag{3.8}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $H=0$ için Eş. 3.8 eşitsizliği aşikar olarak sağlanır. Şimdi Eş. 3.8 ve Eş. 3.6 eşitsizliklerini birlikte kullanarak $t\in[s_1,t_1]$ için

$$A_{s_i}^{t_i}(q;n+\alpha+1)\leq A_{s_i}^{t_i}\left(\delta_1 r|H'|^{\alpha+1};n\right) \tag{3.9}$$

eşitsizliğine varılır. Bu ise hipotezlerimizden Eş. 3.1 eşitsizliği ile $i=1$ için çelişmektedir.

Şimdi $t\in[T_0,\infty)$ için $x(t)<0$ olduğunu kabul edelim. Eş. 3.4 eşitsizliğinin her iki tarafını $|H(t)|^{n+\alpha+1}$ ile çarpıp sonra da $i=2$ için s_i den t_i ye kadar integralini alırsak $t\in[s_2,t_2]$ için Eş. 3.5 eşitsizliğinin yine sağlandığı görülür. Dolayısıyla benzer şekilde Eş. 3.7 ile tanımlanan $F(v)$ fonksiyonu yardımıyla $t\in[s_2,t_2]$ için Eş. 3.9 eşitliğinin sağlandığı sonucuna ulaşırız. Bu sonuç ise hipotezlerimizden Eş. 3.1 eşitsizliği ile $i=2$ için çelişmektedir.

Sonuç olarak Eş. 2.30 ile çelişki elde etmiş olarak ispat tamamlanmıştır. Bu durumda Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır.

3.2. Teorem:

Kabul edelim ki (c_1) , (c_2) , (c_4) , (c_6) ve (c_7) koşulları sağlansın. Ayrıca $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için $p(t) > 0$ ve $q(t) \geq 0$ olsun. Eğer $i = 1,2$ için bir $H \in D(s_i, t_i)$ fonksiyonu ve negatif olmayan bir n sayısı

$$A_{s_i}^{t_i}(Q; n + \alpha + 1) > A_{s_i}^{t_i}\left(\delta_2 r |H'|^{\alpha+1}; n\right) \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabilirse Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır.

$$Q(t) = \begin{cases} Kq(t) & ,\gamma = 1 \\ \gamma(\gamma - 1)^{(1-\gamma)/\gamma}[Kq(t)]^{1/\gamma}|e(t)|^{(\gamma-1)/\gamma} & ,\gamma > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve $\delta_2 = \left(\dfrac{\alpha}{\beta_3}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{n + \alpha + 1}{\alpha + 1}\right)^{\alpha+1}$ şeklinde bir sabittir.

İspat:

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Farzedelim ki Eş. 2.27 denkleminin salınımsız bir $x(t)$ çözümü var olsun. Bu durumda yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ sayısı için $[T_0, \infty)$ aralığında $x(t)$ çözümü işaretini korur. Yani $t \in [T_0, \infty)$ için ya $x(t) > 0$, ya da $x(t) < 0$ olur. Şimdi kabul edelim ki $t \in [T_0, \infty)$ için $x(t) > 0$ olsun. $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için

$$w_2(t) = \frac{r(t)k_1(x(t), x'(t))}{x(t)} \tag{3.11}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 2.27 denklemini kullanarak $w_2(t)$ fonksiyonun türevini alarak

$$w_2'(t) = -\frac{q(t)f(x(t))}{x(t)} - \frac{p(t)k_2(x(t),x'(t))x(t)}{x^2(t)} - \frac{r(t)k_1(x(t),x'(t))x'(t)}{x^2(t)} + \frac{e(t)}{x(t)}$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer bu eşitlikte (c_2) , (c_4) , (c_6) , (c_7) koşulları ve $t \in [s_1,t_1] \cup [s_2,t_2]$ için $p(t) > 0$ ve $q(t) \geq 0$ olduğunu kullanılırsa $t \in [s_1,t_1] \cup [s_2,t_2]$ için

$$w_2'(t) \leq -q(t)K|x(t)|^{\gamma-1} - \frac{\beta_3}{r^{1/\alpha}(t)}|w_2(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{e(t)}{x(t)} \tag{3.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 3.12 eşitsizliği ve (c_1) koşulundan dolayı $t \in [s_1,t_1]$ için

$$q(t)K|x(t)|^{\gamma-1} + \left|\frac{e(t)}{x(t)}\right| \leq -w_2'(t) - \frac{\beta_3}{r^{1/\alpha}(t)}|w_2(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.13}$$

eşitsizliğinin sağlandığı sonucuna varılır.

Şimdi $\gamma > 1$ olduğunu kabul edelim. $m = \gamma$, $n = \dfrac{\gamma}{\gamma-1}$, $A = \gamma K q(t)|x(t)|^{\gamma-1}$ ve $B = \left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left|\dfrac{e(t)}{x(t)}\right|$ seçip Lemma 3.2 uygulanırsa

$$q(t)K|x(t)|^{\gamma-1} + \left|\frac{e(t)}{x(t)}\right| \geq Q(t) \tag{3.14}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bundan dolayı $t \in [s_1,t_1]$ için

$$w_2'(t) \leq -Q(t) - \frac{\beta_3}{r^{1/\alpha}(t)}|w_2(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.15}$$

eşitsizliğinin sağlandığı sonucu elde edilir. Dikkat edilirse $\gamma = 1$ olması durumunda Eş. 3.14 eşitsizliğinin sağlandığı, dolayısıyla Eş. 3.15 eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Sonuç olarak $t \in [s_1, t_1]$ için $b(t) = \dfrac{\beta_3}{r^{1/\alpha}(t)}$ olmak üzere

$$w_2'(t) \le -Q(t) - b(t)|w_2(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.16}$$

eşitsizliği elde edilmiştir. Teorem 3.1 sonucunun ispatında olduğu gibi Eş. 3.16 eşitsizliğinin her iki tarafını $|H(t)|^{n+\alpha+1}$ ile çarpıp sonra da $i = 1$ için s_i den t_i ye kadar integralini alırsak $t \in [s_1, t_1]$ için

$$\int_{s_i}^{t_i} |H(t)|^{n+\alpha+1} Q(t)dt \le -\int_{s_i}^{t_i} |H(t)|^{n+\alpha+1} w_2'(t)dt - \int_{s_i}^{t_i} |H(t)|^{n+\alpha+1} b(t)|w_2(t)|^{n+\alpha+1} dt$$

eşitsizliğini elde ederiz. Tanım 3.1 yardımıyla bu eşitsizliği $t \in [s_1, t_1]$ için

$$A_{s_i}^{t_i}(Q; n+\alpha+1) \le -A_{s_i}^{t_i}(w_2'; n+\alpha+1) - A_{s_i}^{t_i}\left(b|w_2'|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}; n+\alpha+1\right) \tag{3.17}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eş. 3.17 eşitsizliği ve Lemma 3.1 kullanılarak $t \in [s_1, t_1]$ için

$$A_{s_i}^{t_i}(Q; n+\alpha+1) \le A_{s_i}^{t_i}\left((n+\alpha+1)|H|^{\alpha}|H'||w_2| - b|H|^{\alpha+1}|w_2'|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}; n\right) \tag{3.18}$$

eşitsizliği sağlanır. Yine Teorem 3.1 ispatında olduğu gibi

$$F(v) = (n+\alpha+1)|H|^{\alpha}|H'|v - b|H|^{\alpha+1} v^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

fonksiyonu tanımlanırsa, benzer işlemlerle

$$F(v) \le F_{\max} = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\alpha} \left(\frac{n+\alpha+1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} |H'|^{\alpha+1} \tag{3.19}$$

eşitsizliğinin sağlandığı sonucu elde edilir. Eş. 3.18 ve Eş. 3.19 eşitsizlikleri beraber düşünüldüğünde

$$A_{s_i}^{t_i}(Q; n+\alpha+1) \le A_{s_i}^{t_i}\left(\delta_2 r |H'|^{\alpha+1}; n\right) \tag{3.20}$$

eşitsizliğine varılır. Bu ise hipotezlerimizden Eş. 3.10 eşitsizliğinin $i=1$ hali için çelişmektedir.

Şimdi $t \in [T_0, \infty)$ için $x(t) < 0$ olduğunu kabul edelim. Eş. 3.16 eşitsizliğinin her iki tarafını $|H(t)|^{n+\alpha+1}$ ile çarpıp sonra da $i=2$ için s_i den t_i ye kadar integralini alırsak $t \in [s_2, t_2]$ için Eş. 3.17 eşitsizliğinin yine sağlandığı görülür. Dolayısıyla benzer şekilde Eş. 3.7 ile tanımlanan $F(v)$ fonksiyonu yardımıyla $t \in [s_2, t_2]$ için Eş. 3.19 eşitliğinin sağlandığı sonucuna ulaşırız. Bu sonuç ise hipotezlerimizden Eş. 3.10 eşitsizliğinin $i=2$ hali için çelişmektedir.

Sonuç olarak Eş. 3.10 ile çelişki elde etmiş olarak ispat tamamlanmıştır. Bu durumda Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır.

3.3. Teorem:

Kabul edelim ki $(c_1 - c_5)$ koşulları sağlansın. Ayrıca $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için $p(t) > 0$ olsun. Eğer kesim 3.1 de belirtilen özellikleri sağlayan D_1 kümesinde tanımlı bir G fonksiyonu $i=1,2$ için bir $\varepsilon_i \in (s_i, t_i)$ sayısı

$$\frac{1}{G^{\alpha+1}(\varepsilon_i, s_i)}\int_{s_i}^{\varepsilon_i}\left[G^{\alpha+1}(\tau, s_i)q(\tau)-\delta_3 G_1^{\ \alpha+1}(\tau, s_i)r(\tau)\right]d\tau$$

$$+\frac{1}{G^{\alpha+1}(t_i, \varepsilon_i)}\int_{\varepsilon_i}^{t_i}\left[G^{\alpha+1}(t_i, \tau)q(\tau)-\delta_3 G_2^{\ \alpha+1}(t_i, \tau)r(\tau)\right]d\tau > 0 \tag{3.21}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır. Burada

$$\delta_3 = \frac{\alpha^\alpha}{\beta_1^{\ \alpha}\beta_2^{\ \alpha}(\alpha+1)^{\alpha+1}}$$

bir sabit ve

$$G_1(t,s) = \left|(\alpha+1)g_1(t,s)\sqrt{G(t,s)}\right|$$

$$G_2(t,s) = \left|(\alpha+1)g_2(t,s)\sqrt{G(t,s)}\right|$$

olarak tanımlanmış fonksiyonlardır.

İspat:

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Farzedelim ki Eş. 2.27 denkleminin salınımsız bir $x(t)$ çözümü var olsun. Bu durumda yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ sayısı için $[T_0, \infty)$ aralığında $x(t)$ çözümü işaretini korur. Yani $t \in [T_0, \infty)$ için ya $x(t) > 0$, ya da $x(t) < 0$ olur. Şimdi $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için

$$w_3(t) = \frac{r(t)k_1(x(t), x'(t))}{f(x(t))} \tag{3.22}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 2.27 denklemini kullanarak $w_3(t)$ fonksiyonun türevini alarak

$$w_3'(t) = \frac{e(t) - q(t)f(x(t)) - p(t)k_2(x(t), x'(t))x'(t)}{f(x(t))}$$
$$- \frac{r(t)k_1(x(t), x'(t))x'(t)f'(x(t))}{f^2(x(t))}$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer bu eşitlikte $(c_3 - c_5)$ koşulları ve $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için $p(t) > 0$ olduğu kullanılırsa $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için

$$w_3'(t) \le -q(t) - \frac{\beta_1 \beta_2}{r^{1/\alpha}(t)} |w_3(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{e(t)}{f(x(t))} \tag{3.23}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 3.23 eşitsizliğinden, (c_1) ve (c_2) koşullarından dolayı $t \in [s_1, t_1]$ ve $t \in [s_2, t_2]$ için $w_3(t)$ fonksiyonu

$$w_3'(t) \le -q(t) - \frac{\beta_1 \beta_2}{r^{1/\alpha}(t)} |w_3(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.24}$$

eşitsizliğini sağlar.

Eğer ilk önce Eş. 3.24 eşitliğinde t yerine s yazılıp, sonra $G^{\alpha+1}(t,s)$ ile çarpılarak $i = 1,2$ için ε_i den t ye kadar integrali alınırsa

$$\int_{\varepsilon_i}^{t} G^{\alpha+1}(t,s) q(s) ds \le -\int_{\varepsilon_i}^{t} G^{\alpha+1}(t,s) w_3'(s) ds$$
$$+ \int_{\varepsilon_i}^{t} G^{\alpha+1}(t,s) \left[-\frac{\beta_1 \beta_2}{r^{1/\alpha}(s)} |w_3(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \right] ds$$

eşitsizliğine varılır. $\int_{\varepsilon_i}^{t} G^{\alpha+1}(t,s)w_3'(s)ds$ integralinde $G^{\alpha+1}(t,s)=u$, $w_3'(s)ds=dv$ dönüşümleriyle kısmi integrasyon uygulanırsa $G(t,t)=0$ olduğu ve $g_2(t,s)$ fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\int_{\varepsilon_i}^{t} G^{\alpha+1}(t,s)q(s)ds \le w_3(\varepsilon_i)G^{\alpha+1}(t,\varepsilon_i) - \int_{\varepsilon_i}^{t} (\alpha+1)GH^{\alpha}(t,s)g_2(t,s)\sqrt{G(t,s)}w_3(s)ds$$

$$+\int_{\varepsilon_i}^{t} G^{\alpha+1}(t,s)\left[-\frac{\beta_1\beta_2}{r^{1/\alpha}(s)}|w_3(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right]ds$$

$$= w_3(\varepsilon_i)G^{\alpha+1}(t,\varepsilon_i) + \int_{\varepsilon_i}^{t} \left\{\left[-(\alpha+1)G^{\alpha}(t,s)g_2(t,s)\sqrt{G(t,s)}\right]w_3(s)\right.$$

$$\left. +\frac{\beta_1\beta_2}{r^{1/\alpha}(s)}G^{\alpha+1}(t,s)|w_3(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right\}ds$$

$$\le w_3(\varepsilon_i)G^{\alpha+1}(t,\varepsilon_i) + \int_{\varepsilon_i}^{t} \left\{\left[\left|-(\alpha+1)G^{\alpha}(t,s)g_2(t,s)\sqrt{G(t,s)}\right|\right]|w_3(s)|\right.$$

$$\left. +\frac{\beta_1\beta_2}{r^{1/\alpha}(s)}G^{\alpha+1}(t,s)|w_3(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right\}ds$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bu da, $G_2(t,s)$ fonksiyonunun tanımından dolayı

$$\int_{\varepsilon_i}^{t} G^{\alpha+1}(t,s)q(s)ds \le w_3(\varepsilon_i)G^{\alpha+1}(t,\varepsilon_i) + \int_{\varepsilon_i}^{t} \left[G^{\alpha}(t,s)G_2(t,s)\right]|w_3(s)|$$

$$-\frac{\beta_1\beta_2}{r^{1/\alpha}(s)}G^{\alpha+1}(t,s)|w_3(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}ds \qquad (3.25)$$

eşitsizliğinin sağlandığı anlamına gelir.

Şimdi $v>0$ için $F(v)=G^{\alpha}G_2 v-\beta_1\beta_2 r^{-1/\alpha}G^{\alpha+1}v^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Önceki teoremlerin ispatlarında yapılan benzer hesaplamalarla bu fonksiyon $v^*=\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{G_2}{\beta_1\beta_2 G r^{-1/\alpha}}\right)$ noktasında maksimum değerini alır. Bundan dolayı

$$F(v)\le F_{\max}=F(v^*)=\delta_3 G_2 r \tag{3.26}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 3.26 ile Eş. 3.25 eşitsizlikleri birlikte kullanılıp $t\to t_i^-$ için limit alınırsa

$$\int_{\varepsilon_i}^{t_i} G^{\alpha+1}(t_i,s)q(s)ds\le w_3(\varepsilon_i)G^{\alpha+1}(t_i,s_i)+\delta_3\int_{\varepsilon_i}^{t_i} G_2{}^{\alpha+1}(t_i,s)r(s)ds \tag{3.27}$$

eşitsizliğine varılır.

Benzer şekilde Eş. 3.24 eşitliğinde t yerine s yazıp, sonra $G^{\alpha+1}(s,t)$ ile çarparak $i=1,2$ için t den ε_i ye kadar integralini alıp yukarıdaki gibi gerekli düzenlemeleri yaptıktan sonra $t\to s_i^+$ için limit alınırsa

$$\int_{s_i}^{\varepsilon_i} G^{\alpha+1}(s,s_i)q(s)ds\le w_3(\varepsilon_i)G^{\alpha+1}(\varepsilon_i,s_i)+\delta_3\int_{s_i}^{\varepsilon_i} G_2{}^{\alpha+1}(s,s_i)r(s)ds \tag{3.28}$$

eşitsizliğine varılır.

Son olarak Eş. 3.27 ve Eş. 3.28 eşitsizlikleri sırasıyla $G^{\alpha+1}(t_i,\varepsilon_i)$ ve $G^{\alpha+1}(\varepsilon_i,s_i)$ ile bölünerek toplanırsa

$$\frac{1}{G^{\alpha+1}(\varepsilon_i,s_i)}\int_{s_i}^{\varepsilon_i}\left[G^{\alpha+1}(s,s_i)q(s)-\delta_3 G_1^{\alpha+1}(s,s_i)r(s)\right]ds$$

$$+\frac{1}{G^{\alpha+1}(t_i,\varepsilon_i)}\int_{\varepsilon_i}^{t_i}\left[G^{\alpha+1}(t_i,s)q(s)-\delta_3 G_2^{\alpha+1}(t_i,s)r(s)\right]ds\le 0$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da hipotezlerimizden Eş. 3.21 eşitsizliği ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır.

3.4. Teorem:

Kabul edelim ki (c_1) , (c_2) , (c_4) , (c_6) ve (c_7) koşulları sağlansın. Ayrıca $t\in[s_1,t_1]\cup[s_2,t_2]$ için $p(t)>0$ ve $q(t)\ge 0$ olsun. Eğer kesim 3.1 de belirtilen özellikleri sağlayan D_1 kümesinde tanımlı bir G fonksiyonu ve $i=1,2$ için bir $\varepsilon_i\in(s_i,t_i)$ sayısı

$$\frac{1}{G^{\alpha+1}(\varepsilon_i,s_i)}\int_{s_i}^{\varepsilon_i}\left[G^{\alpha+1}(\tau,s_i)Q(\tau)-\delta_4 G_1^{\alpha+1}(\tau,s_i)r(\tau)\right]d\tau$$
$$+\frac{1}{G^{\alpha+1}(t_i,\varepsilon_i)}\int_{\varepsilon_i}^{t_i}\left[G^{\alpha+1}(t_i,\tau)Q(\tau)-\delta_4 G_2^{\alpha+1}(t_i,\tau)r(\tau)\right]d\tau>0 \tag{3.29}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa Eş. 2.27 denklemi salınımlıdır. Burada G_1 , G_2 fonksiyonları Teorem 3.3 ifadesinde tanımlandığı gibi, Q fonksiyonu Teorem 3.2 ifadesinde olduğu gibi ve

$$\delta_4=\frac{\alpha^\alpha}{\beta_3^{\ \alpha}(\alpha+1)^{\alpha+1}}$$

şeklinde bir sabittir.

İspat:

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Farzedelim ki Eş. 2.27 denkleminin salınımsız bir $x(t)$ çözümü var olsun. Bu durumda yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ sayısı için $[T_0, \infty)$ aralığında $x(t)$ çözümü işaretini korur. Yani $t \in [T_0, \infty)$ için ya $x(t) > 0$, ya da $x(t) < 0$ olur. Şimdi kabul edelim ki $t \in [T_0, \infty)$ için $x(t) > 0$ olsun. $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için

$$w_4(t) = \frac{r(t)k_1(x(t), x'(t))}{x(t)} \tag{3.30}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 2.27 denklemini kullanarak $w_4(t)$ fonksiyonun türevini alarak

$$Kq(t)|x(t)|^{\gamma-1} + \left|\frac{e(t)}{x(t)}\right| \leq -w_4'(t) - \frac{\beta_3}{(t)r^{1/\alpha}(t)}|w_4(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.31}$$

eşitsizliğine varılır.

Şimdi $\gamma > 1$ olduğunu kabul edelim. $m = \gamma$, $n = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}$, $A = \gamma K q(t)|x(t)|^{\gamma-1}$ ve $B = \left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left|\dfrac{e(t)}{x(t)}\right|$ seçip Lemma 3.2 uygulanırsa $t \in [s_1, t_1]$ için

$$Q(t) \leq -w_4'(t) - \frac{\beta_3}{r^{1/\alpha}(t)}|w_4(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.32}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.3 ispatıyla benzerdir.

Şimdi $uk_3(u,v) \geq 0$ özelliğine sahip bir $k_3(u,v) \in C(R^2, R)$ fonksiyonu için

$$[r(t)k_1(x(t), x'(t))]' + p(t)[k_2(x(t), x'(t))x'(t) + k_3(x(t), x'(t))] + q(t)f(x(t)) = e(t) \quad (3.33)$$

denklemini ele alalım. Teorem 3.1, Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 ispatlarında Eş. 3.2, Eş. 3.11, Eş. 3.22 ve Eş. 3.30 tanımlamalarını Eş. 3.33 için tanımlarsak sırasıyla Eş. 3.3, Eş. 3.12, Eş. 3.23 ve Eş. 3.31 eşitsizliklerinin yine sağlandığı açıktır. Bundan dolayı aşağıdaki sonucun geçerliliği aşikardır.

3.1. Uyarı:

Teorem 3.1, Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 sonuçları Eş. 3.33 denklemi için de geçerlidir.

Şimdi

$(c_1 *)$ $t \in [s_1, t_1]$ için $e(t) \geq 0$, $t \in [s_2, t_2]$ için $e(t) \leq 0$ olacak şekilde $t_0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ noktaları var olsun.

koşulunu ele alalım. (c_1) yerine $(c_1 *)$ koşulunun kabulü halinde Eş. 3.3, Eş. 3.12, Eş. 3.23 ve Eş. 3.31 eşitsizliklerinin korunacağı açıktır. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.2. Uyarı:

(c_1) yerine $(c_1 *)$ koşulu kabul edilirse Teorem 3.1, Teorem 3.2, Teorem 3.3, Teorem 3.4 ve Uyarı 3.1 sonuçları geçerlidir.

3.3. İkinci Basamaktan Zorlayıcı ve Söndürücü Terimli Bir Gecikmeli Denklem Sınıfının Salınımlılığı İçin Aralık Kriterleri

Bu kesimde $t \geq t_0 > 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ üzerinde çözüme sahip olduğunu varsaydığımız, ikinci basamaktan zorlayıcı ve söndürücü terimli

$$[r(t)k_1(x(t), x'(t))]' + p(t)[k_2(x(t), x'(t))x'(t) + k_3(x(t), x'(t))]$$
$$+ F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t))) = e(t) \qquad (3.34)$$

gecikmeli diferensiyel denklemine ilişkin bazı salınımlılık kriterleri verilecektir. Eş. 3.34 denkleminde görülen $r, p, e, F, G, \tau, k_1, k_2$ ve k_3 fonksiyonları

1. $r \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$,
2. $p, e \in C([t_0, \infty), R)$,
3. $F \in C([t_0, \infty) \times R^4, R)$,
4. $\tau \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$, $\lim_{t \to \infty} \tau(t) = \infty$,
5. $k_1 \in C^1(R^2, R)$,
6. $k_2, k_3 \in C(R^2, R)$,

özelliklerine sahip fonksiyonlardır. Bu kesimde sıklıkla kullanacağımız koşullar aşağıda sıralanmıştır.

(c_1) $t \in [s_1, t_1]$ için $e(t) \leq 0$, $t \in [s_2, t_2]$ için $e(t) \geq 0$ olacak şekilde $t_0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ noktalar var olsun.

(c_4) Her $(u, v) \in R^2$ için $uvk_2(u, v) \geq 0$,

(c_7) Bazı $\alpha, \beta > 0$ ve her $(u, v \neq 0) \in R^2$ için $vk_1(u, v) \geq \beta |k_1(u, v)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} |u|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$,

(c_8) Her $(u, v) \in R^2$ için $uk_3(u, v) \geq 0$,

(c_9) Bazı $q_1 \in C[t_0,\infty)$, $\eta \geq 1$ ve her $t \in [s_1,t_1] \cup [s_2,t_2]$, $x \neq 0, u, v, w \in R$ için $F(t,x,u,v,w)/x \geq q_1(t)|x|^{\eta-1}$,

(c_{10}) Bazı $q_2 \in C[t_0,\infty)$, $\mu \geq 1$ ve her $t \in [s_1,t_1] \cup [s_2,t_2]$, $x \neq 0, u, v, w \in R$ için $F(t,x,u,v,w)/u \geq q_2(t)|x|^{\mu-1}$,

(c_{11}) Her $t \geq t_0$ ve $x \neq 0, u, v, w \in R$ için $xF(t,x,u,v,w) > 0$,

(c_{12}) Her $t \in [t_0,\infty)$ için $\tau(t) < t$.

Şimdi Eş. 3.34 denkleminin salınımlılığına ilişkin sonuçları ifade edebiliriz.

3.5. Teorem:

Kabul edelim ki (c_1), (c_4), $(c_7 - c_9)$ koşulları sağlansın. Ayrıca $t \in [s_1,t_1] \cup [s_2,t_2]$ için $p(t) \geq 0$ olsun. Eğer $i = 1,2$ için bir $H \in D(s_i,t_i)$ fonksiyonu ve negatif olmayan bir n sayısı

$$A_{s_i}^{t_i}(Q_1; n+\alpha+1) > A_{s_i}^{t_i}\left(\delta_5 r|H'|^{\alpha+1}; n\right) \tag{3.35}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabilirse Eş. 3.34 denklemi salınımlıdır. Burada

$$Q_1(t) = \begin{cases} q_1(t) & ,\eta = 1 \\ \eta(\eta-1)^{(1-\eta)/\eta}[q_1(t)]^{1/\eta}|e(t)|^{(\eta-1)/\eta} & ,\eta > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve $\delta_5 = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{n+\alpha+1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}$ şeklinde tanımlı bir sabittir.

İspat:

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Farzedelim ki Eş. 3.34 denkleminin salınımsız bir $x(t)$ çözümü var olsun. Bu durumda yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ sayısı için $[T_0, \infty)$ aralığında $x(t)$ çözümü işaretini korur. Yani $t \in [T_0, \infty)$ için ya $x(t) > 0$, ya da $x(t) < 0$ olur. $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için

$$w_2(t) = \frac{r(t) k_1(x(t), x'(t))}{x(t)} \tag{3.36}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 3.34 denklemini kullanarak $w_2(t)$ fonksiyonun türevini alarak

$$w_2'(t) = \frac{e(t)}{x(t)} - \frac{p(t) k_2(x(t), x'(t)) x'(t)}{x(t)} - \frac{p(t) k_3(x(t), x'(t))}{x(t)} - \frac{r(t) k_1(x(t), x'(t)) x'(t)}{x^2(t)}$$
$$- F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t)))$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer bu eşitlikte (c_4), (c_7), (c_8), (c_9) koşulları ve $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için ve $p(t) \geq 0$ olduğu kullanılırsa $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için

$$w_2'(t) \leq -q_1(t) |x(t)|^{\eta - 1} - \frac{\beta}{r^{1/\alpha}(t)} |w_2(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{e(t)}{x(t)} \tag{3.37}$$

Eşitsizliği elde edilir. Eş. 3.37 eşitsizliği ve (c_1) koşulundan dolayı $t \in [s_1, t_1]$ ve $t \in [s_2, t_2]$ için

$$q_1(t) |x(t)|^{\eta - 1} + \left| \frac{e(t)}{x(t)} \right| \leq -w_2'(t) - \frac{\beta}{r^{1/\alpha}(t)} |w_2(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.38}$$

eşitsizliğinin sağlandığı sonucuna varılır.

Şimdi $\eta > 1$ olduğunu kabul edelim. $m = \eta$, $n = \dfrac{\eta}{\eta - 1}$, $A = \eta q_1(t)|x(t)|^{\eta-1}$ ve $B = \left(\dfrac{\eta}{\eta-1}\right)\left|\dfrac{e(t)}{x(t)}\right|$ seçip Lemma 3.2 uygulanırsa

$$q_1(t)|x(t)|^{\eta-1} + \left|\frac{e(t)}{x(t)}\right| \geq Q_1(t) \tag{3.39}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bundan dolayı $t \in [s_1, t_1]$ için ve $t \in [s_2, t_2]$ için

$$Q_1(t) \leq -w_2'(t) - \frac{\beta}{r^{1/\alpha}(t)}|w_2(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.40}$$

eşitsizliğinin sağlandığı sonucu elde edilir. Dikkat edilirse $\eta = 1$ olması durumunda Eş. 3.39 eşitsizliğinin sağlandığı, dolayısıyla Eş. 3.40 eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Sonuç olarak $t \in [s_1, t_1]$ ve $t \in [s_2, t_2]$ için $c(t) = \dfrac{\beta}{r^{1/\alpha}(t)}$ olmak üzere

$$w_2'(t) \leq -Q(t) - c(t)|w_2(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.41}$$

eşitsizliği elde edilmiştir. Teorem 3.1 sonucunun ispatında olduğu gibi Eş. 3.41 eşitsizliğinin her iki tarafını $|H(t)|^{n+\alpha+1}$ ile çarpıp sonra da $i = 1,2$ için s_i den t_i ye kadar integralini alırsak

$$\int_{s_i}^{t_i} |H(t)|^{n+\alpha+1} Q_1(t)dt \leq -\int_{s_i}^{t_i} |H(t)|^{n+\alpha+1} w_2'(t)dt - \int_{s_i}^{t_i} |H(t)|^{n+\alpha+1} c(t)|w_2(t)|^{n+\alpha+1} dt$$

eşitsizliğini elde ederiz. Tanım. 3.1 yardımıyla bu eşitsizlik

$$A_{s_i}^{t_i}\left(Q_1;n+\alpha+1\right)\leq -A_{s_i}^{t_i}\left(w_2';n+\alpha+1\right)-A_{s_i}^{t_i}\left(c\left|w_2'\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}};n+\alpha+1\right) \tag{3.42}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eş. 3.42 eşitsizliği ve Lamma. 3.1 kullanılarak

$$A_{s_i}^{t_i}\left(Q_1;n+\alpha+1\right)\leq A_{s_i}^{t_i}\left((n+\alpha+1)|H|^{\alpha}|H'||w_2|-c|H|^{\alpha+1}\left|w_2'\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}};n\right) \tag{3.43}$$

eşitsizliği elde edilir. Yine Teorem 3.1 ispatında olduğu gibi

$$F(v)=(n+\alpha+1)|H|^{\alpha}|H'|v-c|H|^{\alpha+1}v^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

fonksiyonu tanımlanır ve benzer işlemler yapılırsa

$$F(v)\leq F_{\max}=\left(\frac{\alpha}{c}\right)^{\alpha}\left(\frac{n+\alpha+1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}|H'|^{\alpha+1} \tag{3.44}$$

eşitsizliğinin sağlandığı sonucu elde edilebilir. Eş. 3.43 ve Eş. 3.44 eşitsizlikleri beraber düşünüldüğünde

$$A_{s_i}^{t_i}\left(Q_1;n+\alpha+1\right)\leq A_{s_i}^{t_i}\left(\delta_5 r|H'|^{\alpha+1};n\right) \tag{3.45}$$

eşitsizliğine varılır. Bu ise hipotezlerimizden Eş. 3.35 eşitsizliği ile çelişmektedir. Bundan dolayı Eş. 3.34 denklemi salınımlıdır. Böylece ispat tamamlanır

3.6. Teorem:

Kabul edelim ki (c_1), (c_4), $(c_7 - c_9)$ koşulları sağlansın. Ayrıca $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için $p(t) \geq 0$ olsun. Eğer kesim 3.1 de belirtilen özellikleri sağlayan D_1 kümesinde tanımlı bir G fonksiyonu ve $i = 1,2$ için bir $\varepsilon_i \in (s_i, t_i)$ sayısı

$$\frac{1}{G^{\alpha+1}(\varepsilon_i, s_i)} \int_{s_i}^{\varepsilon_i} \left[G^{\alpha+1}(\tau, s_i) Q_1(\tau) - \delta_6 G_1^{\alpha+1}(\tau, s_i) r(\tau) \right] d\tau$$
$$+ \frac{1}{G^{\alpha+1}(t_i, \varepsilon_i)} \int_{\varepsilon_i}^{t_i} \left[G^{\alpha+1}(t_i, \tau) Q_1(\tau) - \delta_6 G_2^{\alpha+1}(t_i, \tau) r(\tau) \right] d\tau > 0 \tag{3.46}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa Eş. 3.34 denklemi salınımlıdır. Burada Q_1 fonksiyonu Teorem 3.5 ifadesinde tanımlandığı gibi, G_1, G_2 fonksiyonları Teorem 3.3 ifadesinde tanımlandığı gibi ve

$$\delta_6 = \frac{\alpha^\alpha}{\beta^\alpha (\alpha+1)^{\alpha+1}}$$

olarak tanımlanmış bir sabittir.

İspat:

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Farzedelim ki Eş. 2.27 denkleminin salınımsız bir $x(t)$ çözümü var olsun. Bu durumda yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ sayısı için $[T_0, \infty)$ aralığında $x(t)$ çözümü işaretini korur. Yani $t \in [T_0, \infty)$ için ya $x(t) > 0$, ya da $x(t) < 0$ olur. Şimdi $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için

$$w_3(t) = \frac{r(t) k_1(x(t), x'(t))}{f(x(t))} \tag{3.47}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 3.34 denklemini ve hipotezleri kullanarak $w_3(t)$ fonksiyonun türevini alırsak $t \in [s_1, t_1]$ ve $t \in [s_2, t_2]$ için

$$w_3'(t) \leq -q(t) - \frac{\beta_1 \beta_2}{r^{1/\alpha}(t)} |w_3(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.48}$$

eşitliğini elde ederiz.

İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.3 ispatı ile benzerdir. Önce Eş. 3.48 eşitsizliğinde t yerine s yazılıp sırayıyla $G^{\alpha+1}(t,s)$ sonra da $G^{\alpha+1}(s,t)$ ile çarpılarak $i = 1,2$ için sırasıyla ε_i den t ye ve t den ε_i ye kadar integrali alınıp daha sonra benzer elemanter işlemler tekrarlanırsa sırasıyla

$$\int_{\varepsilon_i}^{t_i} G^{\alpha+1}(t_i, s) Q_1(s) ds \leq w_3(\varepsilon_i) G^{\alpha+1}(t_i, s_i) + \delta_6 \int_{\varepsilon_i}^{t_i} G_2^{\alpha+1}(t_i, s) r(s) ds \tag{3.49}$$

ve

$$\int_{s_i}^{\varepsilon_i} G^{\alpha+1}(s, s_i) Q_1(s) ds \leq w_3(\varepsilon_i) G^{\alpha+1}(\varepsilon_i, s_i) + \delta_6 \int_{s_i}^{\varepsilon_i} G_2^{\alpha+1}(s, s_i) r(s) ds \tag{3.50}$$

eşitsizliklerine varılır.

Son olarak Eş. 3.49 ve Eş. 3.50 eşitsizlikleri sırasıyla $G^{\alpha+1}(t_i, \varepsilon_i)$ ve $G^{\alpha+1}(\varepsilon_i, s_i)$ ile bölünerek toplanırsa

$$\frac{1}{G^{\alpha+1}(\varepsilon_i, s_i)} \int_{s_i}^{\varepsilon_i} \left[G^{\alpha+1}(s, s_i) Q_1(s) - \delta_6 G_1^{\alpha+1}(s, s_i) r(s) \right] ds$$

$$+ \frac{1}{G^{\alpha+1}(t_i, \varepsilon_i)} \int_{\varepsilon_i}^{t_i} \left[G^{\alpha+1}(t_i, s) Q_1(s) - \delta_6 G_2^{\alpha+1}(t_i, s) r(s) \right] ds \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da hipotezlerimizden Eş. 3.46 eşitsizliği ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. Eş. 3.34 denklemi salınımlıdır.

3.3. Uyarı.

Eş. 3.34 denkleminde $k_3(u,v)=0$ ve $F(t,x,u,v,w)=q(t)x$ seçilirse Eş. 2.27 denklemi elde edilir. Bu durumda Teorem 3.5, Teorem 3.6, Teorem 3.7 ve Teorem 3.8 ifadeleri sırasıyla Teorem 3.1, Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 ifadeleriyle çakışır.

Şimdi Eş. 3.34 denkleminin özel bir hali olan

$$[\psi(x(t))k(x'(t))]' + F(t,x(t),x(\tau(t)),x'(t),x'(\tau(t))) = e(t) \tag{3.51}$$

denklemini ele alalım. Burada $\psi \in C^1(R,(0,\infty))$ fonksiyonu her $x \in R$ ve bazı $L \in R$ için $0 < \psi(x) \le L$ ve $\psi_x(x) \ge 0$ özelliklerine sahip bir fonksiyon, $\psi \in C^1(R,R)$ fonksiyonu da $vk(v) > 0$ ve $k_v(v) \ge 0$ özelliklerine sahip bir fonksiyondur. Ayrıca F ve e fonksiyonları da daha önce tanımlandıkları gibidir.

3.7. Teorem:

Farzedelim ki (c_1), $k_1(u,v)=\psi(u)k(v)$ için (c_7), $(c_{10}-c_{12})$ koşulları sağlansın. Eğer $i=1,2$ için bir $H \in D(s_i,t_i)$ fonksiyonu ve negatif olmayan bir n sayısı

$$A_{s_i}^{t_i}(Q_2;n+\alpha+1) > A_{s_i}^{t_i}\left(\delta_5 r|H'|^{\alpha+1};n\right) \tag{3.52}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabilirse Eş. 3.51 denklemi salınımlıdır. Burada

$$Q_2(t) = \begin{cases} q_2(t) & ,\mu = 1 \\ \mu(\mu-1)^{(1-\mu)/\mu}[q_2(t)]^{1/\mu}|e(t)|^{(\mu-1)/\mu} & ,\mu > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve δ_5 de Teorem 3.5 ifadesinde tanımlanan sabittir.

İspat:

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Farzedelim ki Eş. 3.51 denkleminin salınımsız bir $x(t)$ çözümü var olsun. Bu durumda yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ sayısı için $[T_0,\infty)$ aralığında $x(t)$ çözümü işaretini korur. Yani $t \in [T_0,\infty)$ için ya $x(t) > 0$, ya da $x(t) < 0$ olur. Önce $t \in [T_0,\infty)$ için $x(t) > 0$ olduğunu kabul edelim. $t \in [s_1,t_1] \cup [s_2,t_2]$ için

$$w_5(t) = \frac{\psi(x(t))k(x'(t))}{x(t)} \tag{3.53}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 3.51 denklemini ve hipotezleri kullanarak $w_5(t)$ fonksiyonun türevi alınırsa $t \in [s_1,t_1] \cup [s_2,t_2]$ için

$$w_5'(t) \leq -q_2(t)|x(\tau(t))|^{\mu-1}\frac{x(\tau(t))}{x(t)} - \beta|w_5(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{e(t)}{x(t)} \tag{3.54}$$

eşitsizliğine varılır. (c_1) koşulundan dolayı $t \in [s_1,t_1]$ için $e(t) \leq 0$ seçebiliriz. Bu durumda $t \in [s_1,t_1]$ için $[\psi(x(t))k(x'(t))]' \leq 0$ yani

$$\psi_x(x(t))k(x'(t))x'(t) + \psi(x(t))k_{x'}(x'(t))x''(t) \leq 0 \tag{3.55}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da $t \in [s_1,t_1]$ için $x''(t) \leq 0$ olmasını gerektirir. Lemma 3.2 den dolayı $t \in [s_1,t_1]$ ve $k \in (0,1)$ için

$$x(\tau(t)) \geq \left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\frac{1}{k}} x(t) \tag{3.56}$$

eşitsizliği sağlanır. Eş. 3.56 eşitsizliği Eş. 3.54 eşitsizliğinde kullanılırsa $q_3(t) = (\tau(t)/t)^{\mu/k} q_2(t)$ olmak üzere

$$q_3(t)|x(t)|^{\mu-1} + \left|\frac{e(t)}{x(t)}\right| \leq -w_5'(t) - \beta|w_5(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.57}$$

eşitsizliği elde edilir. Dikkat edilirse $x(t) < 0$ olması durumunda Eş. 3.55 dolayısıyla Eş. 3.57 eşitsizlikleri korunur. İspatın devamı Teorem 3.5 ispatı ile benzer olduğundan verilmeyecektir.

3.8. Teorem:

Farzedelim ki (c_1), $k_1(u,v) = \psi(u)k(v)$ için (c_7), $(c_{10} - c_{12})$ koşulları sağlansın. Eğer kesim 3.1 de belirtilen özellikleri sağlayan D_1 kümesinde tanımlı bir G fonksiyonu ve $i = 1,2$ için bir $\varepsilon_i \in (s_i, t_i)$ sayısı

$$\begin{aligned}&\frac{1}{G^{\alpha+1}(\varepsilon_i, s_i)} \int_{s_i}^{\varepsilon_i} \left[G^{\alpha+1}(\tau, s_i) Q_2(\tau) - \delta_6 G_1^{\ \alpha+1}(\tau, s_i) r(\tau)\right] d\tau \\ &+ \frac{1}{G^{\alpha+1}(t_i, \varepsilon_i)} \int_{\varepsilon_i}^{t_i} \left[G^{\alpha+1}(t_i, \tau) Q_2(\tau) - \delta_6 G_2^{\ \alpha+1}(t_i, \tau) r(\tau)\right] d\tau > 0\end{aligned} \tag{3.58}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa Eş. 3.51 denklemi salınımlıdır. Burada Q_2 fonksiyonu Teorem 3.7 ifadesinde tanımlandığı gibi, G_1, G_2 fonksiyonları Teorem 3.3 ifadesinde tanımlandığı gibi ve δ_6 de Teorem 3.6 ifadesinde tanımlanan bir sabittir.

İspat:

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Farzedelim ki Eş. 3.51 denkleminin salınımsız bir $x(t)$ çözümü var olsun. Bu durumda yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ sayısı için $[T_0,\infty)$ aralığında $x(t)$ çözümü işaretini korur. Yani $t \in [T_0,\infty)$ için ya $x(t) > 0$, ya da $x(t) < 0$ olur. $t \in [s_1,t_1] \cup [s_2,t_2]$ için

$$w_6(t) = \frac{\psi(x(t))k(x'(t))}{x(t)} \tag{3.59}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 3.51 denklemini ve hipotezleri kullanarak $t \in [s_1,t_1]$ ve $t \in [s_2,t_2]$ için

$$q_3(t)|x(t)|^{\mu-1} + \left|\frac{e(t)}{x(t)}\right| \leq -w_6'(t) - \beta|w_6(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.60}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra Lemma 3.1 kullanılarak

$$Q_2(t) \leq -w_6'(t) - \beta|w_6(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.61}$$

eşitsizliği elde edilir. İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.6 ispatıyla benzer olduğundan verilmeyecektir.

Şimdi Eş. 3.34 denkleminin özel bir hali olan

$$[\psi(x(t))k(x'(t))]' + q(t)|x(\tau(t))|^{\mu-1}x(\tau(t)) = e(t) \tag{3.62}$$

denklemini ele alalım. Burada $q \in C^1([t_0,\infty),R)$ ve diğer fonksiyonlar daha önce tanımlandıkları gibidir.

3.4. Uyarı:

$t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için $q(t) \geq 0$ olsun. Bu durumda Teorem 3.7 ve Teorem 3.8 ifadeleri Eş. 3.62 denklemi için de geçerlidir.

3.4. Örnekler

Bu kesimde, 3.2 ve 3.3 kesimlerinde verilen sonuçlar bazı örnek denklemler üzerinde uygulanacaktır.

3.1. Örnek:

$t \geq t_0 > 1$, $\lambda > 0$ için, $p(t) > 0$ ve $M > \dfrac{9}{10\pi}\left(6\pi^2 + \lambda^2 \ln 2\right)$ şeklinde bir sabit olmak üzere

$$\left(t^{3\lambda+1} x'(t)\right)' + p(t)x(t)\left(x'(t)\right)^2 + Mt^{3\lambda} x(t) = \sin t \tag{3.63}$$

denklemini ele alalım. Bu denklem Eş. 2.27 denklem sınıfındadır. $k_1(u,v) = u$, $k_2(u,v) = uv$ ve $f(u) = u$ fonksiyonlarının $\alpha = \beta_1 = \beta_2 = 1$ için $(c_2 - c_5)$ koşullarının sağlandığı açıktır. Ayrıca $s_1 = k\pi$, $t_1 = (k+1)\pi$, $s_2 = (k+1)\pi$ ve $t_2 = (k+2)\pi$ sayıları için (c_1) koşulu sağlanır.

Eğer $H(t) = t^{-\lambda} \sin^2 t$ ve $n = 1$ seçilirse $i = 1,2$ için

$$A_{s_i}^{t_i}(q; n + \alpha + 1) = A_{s_i}^{t_i}\left(Mt^{3\lambda}; 3\right) = M \int_{s_i}^{t_i} \sin^6 t dt = \frac{5M}{16}\pi \tag{3.64}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$A_{s_1}^{t_1}\left(\delta_1 r|H'|^{\alpha+1};n\right)=A_{s_2}^{t_2}\left(\delta_1 r|H'|^{\alpha+1};n\right)\leq \frac{9}{4}\int_{s_i}^{t_i}\left(\lambda^2 t^{-1}+4t-4\lambda\sin^5 t\cos t\right)dt$$

$$=\frac{27}{2}\pi^2+\frac{9}{4}\lambda^2\ln 2 \qquad (3.65)$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 3.64 ve Eş. 3.65 beraber düşünülürse

$$M>\frac{9}{10\pi}\left(6\pi^2+\lambda^2\ln 2\right) \qquad (3.66)$$

olması durumunda Eş. 3.1 eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Böylece Eş. 3.63 denklemi Teorem 3.1 den dolayı salınımlıdır.

3.2. Örnek:

$t\geq t_0>1$, $\lambda>0$ olmak üzere, $p(t)>0$ bir fonksiyon ve $N>\frac{9}{10\pi}\left(6\pi^2+\lambda^2\ln 2\right)$ şeklinde bir sabit olmak üzere

$$\left(t^{3\lambda+1}\frac{x'(t)}{1+[x'(t)]^2}\right)'+\frac{p(t)x(t)(x'(t))^2}{1+[x'(t)]^2}+Nt^{3\lambda}x(t)[\cos x(t)+2]=\sin t \qquad (3.67)$$

denklemini ele alalım. Bu denklem Eş. 2.27 denklem sınıfındadır. $k_1(u,v)=\frac{u}{1+v^2}$, $k_2(u,v)=\frac{uv}{1+v^2}$ ve $f(u)=u(\cos u+2)$ fonksiyonlarının $\alpha=\beta_3=K=\gamma=1$ için (c_2) , (c_4-c_6) koşullarının sağlandığı açıktır. $K=\gamma=1$ için $q(t)=Q(t)$ olacağından Örnek 3.1 de olduğu gibi $s_1=k\pi$, $t_1=(k+1)\pi$, $s_2=(k+1)\pi$, $t_2=(k+2)\pi$, $H(t)=t^{-\lambda}\sin^2 t$ ve $n=1$ seçilirse $N>\frac{9}{10\pi}\left(6\pi^2+\lambda^2\ln 2\right)$ olması durumunda Eş. 3.10 un sağlandığı, dolayısıyla Teorem 3.2 den dolayı Eş. 3.67 denkleminin salınımlı olacağı sonucu çıkar.

3.3. Örnek:

$t \geq t_0 > 1$, , $\lambda > 0$ $m > 1$, $b_k \geq 0$ olmak üzere, $p(t) > 0$ fonksiyonu ve $M_1 > \frac{9}{10\pi}\left(6\pi^2 + \lambda^2 \ln 2\right)$ sabiti için

$$\left(t^{3\lambda+1}\frac{x'(t)}{1+[x'(t)]^2}\right)' + p(t)\left[\frac{x(t)(x'(t))^2}{1+[x'(t)]^2} + \frac{x(t)(x'(t))^2}{1+[x(t)]^2}\right]$$

$$+ M_1 t^{3\lambda} x(t)\left[1+\sum_{k=1}^{m} b_k \left(x(\tau(t))^{2k} + x'(\tau(t))^{2k}\right)\right] = \sin t \qquad (3.68)$$

denklemini ele alalım. Bu denklem Eş. 3.34 denklem sınıfındadır. $k_1(u,v) = \frac{u}{1+v^2}$, $k_2(u,v) = \frac{uv}{1+v^2}$, $k_3(u,v) = \frac{uv}{1+u^2}$ ve $F(t,x,u,v,w) = q_1(t)x\left(1+\sum_{k=1}^{m} b_k\left(u^{2k}+w^{2k}\right)\right)$ fonksiyonlarının $\alpha = \beta_3 = \eta = 1$ ve $q_1(t) = M_1 t^{3\lambda}$ için Teorem 3.5 ifadesinde belirtilen koşulları sağlandığı açıktır. Örnek 3.1 de olduğu gibi $s_1 = k\pi$, $t_1 = (k+1)\pi$, $s_2 = (k+1)\pi$, $t_2 = (k+2)\pi$, $H(t) = t^{-\lambda}\sin^2 t$ ve $n = 1$ seçilirse $M_1 > \frac{9}{10\pi}\left(6\pi^2 + \lambda^2 \ln 2\right)$ olduğu kullanılırsa Eş. 3.35 un sağlandığı, dolayısıyla Teorem 3.5 den dolayı Eş. 3.68 denkleminin salınımlı olacağı sonucu çıkar.

3.4. Örnek:

$t \geq t_0 > 1$, $m > 1$ ve $b_k \geq 0$ olmak üzere

$$x''(t) + x(t)\left[1 + \sum_{k=1}^{m} b_k \left(x(\tau(t))^{2k} + x'(\tau(t))^{2k}\right)\right] = \sin t \tag{3.69}$$

denklemini ele alalım. $\alpha = \beta = \eta = 1$ ve $Q_1(t) = q_1(t) = 1$ için Teorem 3.6 nın koşullarının sağlandığı açıktır. Şimdi $s_1 = \pi$, $t_1 = 3\pi$, $s_2 = 3\pi$, $t_2 = 5\pi$, $\varepsilon_1 = 2\pi$, $\varepsilon_2 = 4\pi$ ve $G(t,s) = t - s$ seçilirse

$$g_1(t,s) = g_2(t,s) = \frac{1}{\sqrt{t-s}}$$

ve

$$G_1(t,s) = G_2(t,s) = \alpha + 1 = 2$$

oldukları görülür. Bazı elemanter işlemlerle Eş. 3.46 eşitsizliğinin sağlandığı görülebilir. Böylece Eş. 3.69 denklemi Teorem 3.6 dan dolayı salınımlıdır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ikinci basamaktan diferensiyel denklemlerin salınımlılık teorisi incelenmiştir. Giriş bölümünde teoriye ilişkin temel tanım ve kavramlar tanıtılıp birkaç örnek ile açıklanmıştır. İkinci bölümde salınımlılık teorisi üzerine yapılan literatür taraması özetlenmiştir. İkinci bölümün birinci kesiminde lineer diferensiyel denklemlerin, ikinci kesiminde de lineer olmayan diferensiyel denklemlerin salınımlılığı üzerine elde edilmiş olan bazı önemli sonuçlar kronolojik olarak sıralanmıştır. Bu bölümün üçüncü kesiminde, bizim de elde ettiğimiz sonuçlarda kullandığımız "aralık kriteri" tanıtılmıştır. Dördüncü ve beşinci kesimlerinde ise bu tez çalışmasında irdelediğimiz denklem modelleri üzerine kısa bir literatür taraması verilmiştir.

Kesim 2.4 te

$$\left[r(t)k_1\left(x(t),x'(t)\right)\right]' + p(t)k_2\left(x(t),x'(t)\right)x'(t) + q(t)f\left(x(t)\right) = e(t) \tag{4.1}$$

diferensiyel denkleminin salınımlılığına ilişkin Huang ve Meng tarafından 2009 ve 2011 yıllarında yapılan çalışmalar [58,59] neticesinde elde edilmiş dört sonuç verilmiştir (Teorem 2.17, Teorem 2.18, Teorem 2.19 ve Teorem 2.20). Kesim 2.4 te de belirtildiği gibi Qin tarafından 2011 yılında yayınlanan bir çalışma [60] ile Huang ve Meng'in bu sonuçların ispatlarının hatalı olduğu anlaşılmıştır. Qin bu çalışmasında sözü geçen sonuçların ispatlarının tekrar gözden geçirilerek düzeltilmesi gerektiğini vurgulayark bu problemi açık problem olarak bırakmıştır. Bu problem tezin üçüncü bölümünde irdelenmiştir.

Kesim 2.5 te ise Tiryaki ve Başçı tarafından[61], fonksiyonel terimler içeren

$$\left[\psi\left(x(t)\right)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + F\left(t,x(t),x(\tau(t)),x'(t),x'(\tau(t))\right) = e(t) \tag{4.2}$$

$$\left[\psi\left(x(t)\right)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + p(t)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t) + F\left(t,x(t),x(\tau(t)),x'(t),x'(\tau(t))\right) = e(t) \tag{4.3}$$

diferensiyel denklemlerinin salınımlılığı üzerine elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir (Teorem 2.21 ve Teorem 2.22).

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımlılığı üzerine elde ettiğimiz orijinal sonuçlar verilmiştir.
Bu bölümün ilk kesiminde bölüm boyunca sıkça kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir.

3.2 kesiminde Eş. 4.1 denkleminin salınımlılığına ilişkin elde edilen sonuçlar ispatlanmıştır. Bu teoremler Huang ve Meng'in teoremlerinden daha genel olup [58,59] da verilen teoremleri özel durumlar olarak içermektedir. Özel olarak teoremlerin koşullarında bulunan ve uygulanabilirliğini azaltan [28] genelleştirilmiş integral zayıflatılmıştır. Ayrıca verilen ispatlar Huang ve Meng tarafından verilen ispatlarda [58,59] görülen hataları içermediğinden Qin [60] tarafından verilen açık probleme cevap niteliğindedir (Teorem 3.1, Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4).
3.3 kesiminde ise fonksiyonel terimli

$$\begin{aligned}\left[r(t)k_1(x(t),x'(t))\right]' + p(t)\left[k_2(x(t),x'(t))x'(t) + k_3(x(t),x'(t))\right] \\ + F\left(t,x(t),x(\tau(t)),x'(t),x'(\tau(t))\right) = e(t)\end{aligned} \tag{4.4}$$

diferensiyel denkleminin salınımlılığı üzerine elde ettiğimiz sonuçlar verilmiştir (Teorem 3.5, Teorem 3.6, Teorem 3.7, ve Teorem 3.8). Dikkat edilirse bu denklem hem Huang ve Meng [58,59] tarafından irdelenen Eş. 4.1 denklemini, hem de Tiryaki ve Başçı [61] tarafından irdelenen Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 denklemlerini birer özel hal olarak içermektedir. Ayrıca bu sonuçların ispatlarında Qin tarafından belirtilen yanlışlıklar bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu sonuçlarla Tiryaki ve Başçı [61] tarafından elde edilen sonuçları ve 3.2 kesiminde verdiğimiz çalışmaları daha geniş bir denklem sınıfına genişletmektedir.

3.4 kesiminde ise 3.2 ve 3.3 kesimlerinde ifade ve ispatlarını verdiğimiz sonuçlara ilişkin örnekler verilmiştir (Örnek 3.1, Örnek 3.2, Örnek 3.3, ve Örnek 3.4). Bu kesimde verilen Örnek 3.1 ve Örnek 3.2 örnekleri Eş. 4.1 modelindeki denklemlerin salınımlılığına, Örnek 3.3 ve Örnek 3.4 örnekleri de Eş. 4.4 modelindeki denklemlerin salınımlılığına ilişkin Kesim 3.2 ve Kesim 3.3 te verilen teoremlerin birer uygulamasıdır. Dikkat edilirse [58,59] ve [60] çalışmalarında verilen teoremlerin hiçbiri bu örneklere uygulanamamaktadır.

Sürekli uzaylarda salınımlılığı irdelenen bu denklem sınıflarının ayrık uzaylardaki karşılıkları ve bu uzayda salınımlılığına ait kriterler konuya ilgi duyan araştırmacılar tarafından çalışılabilir.

KAYNAKLAR

1. Sturm, C., "Sur les equations differentielles lineaires du second ordre", ***J. Math. Pures Appl.***, 1, 106-186 (1836).

2. Amrein, W. O., Hinz, A.M., Pearson, D.B., "Sturm-Liouville theory: past and present", ***Birkhaeuser Verlag***, Basel, 1–27 (2005).

3. Çakmak, D., "İkinci basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı üzerine", Doktora Tezi, ***Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Ankara, 3-4 (2003).

4. Cunda, G., "Birinci mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımlılığı", Yüksek lisans Tezi, ***Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Afyon, 1-2 (2010).

5. Çavunt, N., "İkinci Basamaktan Diferensiyel Denklemler İçin Aralık Salınım Kriteri", Yüksek lisans Tezi, ***Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri enstitüsü***, Ankara, 6-7 (2012).

6. Ladde, G. S., Lakshmikantham, V., Zhang, B. G., "Oscillation theory of differential equations with deviating arguments", ***Marcel Dekker***, New York ve Basel, 8-9 (1987).

7. Swanson, C. A., "Comparison and oscillation theory of linear differential equations", ***Academic Press***, New York Ve Londra, 2-5 (1968).

8. Kneser, A., "Untersuchungen uber die reelen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen", ***Math. Ann.***, 42, 409-435 (1893); J. Reine Angew. Math. 116, 178-212 (1896).

9. Fite, W. B., "Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations", ***Trans. Amer. Math. Soc.***, 19, 341-352 (1918).

10. Dağdelen, Z., "On oscillation of solutions of second order nonlinear differential equations", Yüksek lisans Tezi, ***The Graduate School of Natural and Applied Science of the Abant İzzet Baysal University***, Bolu, 2-3 (2005).

11. Wintner, A., "A criteria of oscillatory stability", ***Quart. Appl. Math***, 7, 115-117 (1949).

12. Leighton, W., "The detection of the oscillation of the solutions of a second order linear differential equation", ***Duke Math. J.***, 17, 57-62 (1950).

13. Hartman, P., "On nonoscillatory linear differentiel equations of second order", ***Amer. J. Math.***, 74, 389-400 (1952).

14. Kamanev, I. V., "An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order", ***Mat. Zametki***, 23, 249-251 (1978).

15. Philos, C. G., "Oscillation theorems for linear differential equations of second order", ***Arch. Math.***, 53, 482-492 (1989).

16. Wong, J. S. W., "On the generalized Emden-Fowler equation", ***Siam Review***, 17 (2), 339-360 (1975).

17. Atkinson, F. V., "On second order nonlinear oscillations", ***Pacific J. Math.***, 5, 643-647 (1955).

18. Belohorec, S., "Oscillatory solutions of certain nonlinear differential equations of second order", ***Matematicky Casopis Slovenskej Akademie Vied***, 11, 250-255 (1961).

19. Waltman, P,. "An oscillation criterion for a nonlinear second order equation", ***J. Math. Anal. Appl.***, 10, 439-441 (1965).

20. Butler, G. J., "Integral averages and the oscillation of second order ordinary differential equations", ***Siam J. Math. Anal.***, 11, 190-200 (1980).

21. Kamanev, I. V., "Certain specifically nonlinear oscillation theorems", ***Mat. zametki***, 10, 129-134 (1971).

22. Wong, J. S. W., "A second order nonlinear oscillation theorem", ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 40, 487-491 (1973).

23. Wong, J. S. W., "An oscillation criterion for second order nonlinear differential equations", ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 98, 109-112 (1986).

24. Philos, C. G., "A second order superlinear oscillation criterion", ***Canad. Math. Bull.***, 27, 102-112 (1984).

25. Wong, J. S. W., "Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations involving general means", ***J. Math. Anal. Appl.***, 247, 489-505 (2000).

26. Manojlovic, J. V., "Integral averages and oscillation of second order nonlinear differential equations", ***Computers Math. Applic.***, 41, 1521-1534 (2001).

27. Ayanlar, B., Tiryaki, A., "Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations", ***Computers Math. Applic.***, 44, 529-538 (2002).

28. Wong, J. S. W., "On Kamanev-type oscillation theorems for second order differential equations with damping", ***J. Math. Anal. Appl.***, 258, 244-257 (2001).

29. Yang, Q., "Interval oscillation criteria for a forced second-order nonlinear ordinary differential equations with oscillatory potential", ***Appl. Math. Comput.***, 135, 49–64 (2003).

30. Çakmak, D., Tiryaki, A., "Oscillation criteria for certain forced second order nonlinear differential equations", ***Appl. Math. Lett.***, 17, 275–279 (2004).

31. Jiang, F., Meng, F., "New oscillation criteria for a class of second-order nonlinear forced differential equations", ***J. Math. Anal. Appl.***, 336, 1476–1485 (2007).

32. El-Sayed, M. A., "An oscillation criteria for a forced second-order linear differential equations", ***Proc. Am. Math. Soc.***, 118 (3), 813–817 (1993).

33. Wong, J. S. W., "Oscillation criteria for a forced second-order linear differential equations", ***J. Math. Anal. Appl.***, 231, 235–240 (1999).

34. Keener, M. S., "Solution of a certain linear nonhomogeneous second-order differential equation", ***Appl. Anal.***, 1, 57–63 (1971).

35. Wong, J. S. W., "Second-order nonlinear forced oscillations", ***SIAM J. Math. Anal.***, 19, 667–675 (1988).

36. Rainkin, S. M., "Oscillation theorems for second-order nonhomogeneous linear differential equation", ***J. Math. Anal. Appl.***, 53, 550–553 (1976).

37. Kong, Q., "Interval criteria for oscillation of second order linear ordinary differential equations", ***J. Math. Anal. Appl.***, 229, 258–270 (1999).

38. Li, W. T., "Interval criteria for oscillation of second order half-linear ordinary differential equations", ***Acta Math. Sinica***, 43 (3), 509–516 (2002).

39. Shi, W., "Interval oscillation criteria for a forced second-order differential equations with nonlinear damping", ***Math. Comput. Model.***, 43, 170–177 (2006).

40. Skidmore, A., Leighton, W., "On the equation y" + p(x)y = f(x)", ***J. Math. Anal. Appl.***, 43, 46–55 (1973).

41. Skidmore, A., Bowers, J. J., "Oscillation behavior of solutions of y" + p(x)y = f(x)", ***J. Math. Anal. Appl.***, 49, 317–323 (1975).

42. Huang, Y., Meng, F., "Oscillation of second-order nonlinear ODE with damping", ***Appl. Math. Comput.***, 199, 644–652 (2008).

43. Yang, X., "Oscillation criteria for nonlinear differential equations with damping", ***Applied Mathematics and Computation***, 136, 549-557 (2003).

45. Rogovchenko, Y. V., "Oscillation theorems for second order equations with damping", ***Nonlinear Anal.***, 41, 1005-1028 (2000).

46. Tiryaki, A., Zafer, A., "Oscillation criteria for second order nonlinear differential equation with damping", ***Turkish J. Math.***, 24, 185-196 (2000).

47. Mustafa, O. G., Rogovchenko, S. P., "Oscillation of nonlinear second order differential equations with damping term", ***J. Math. Anal. Appl.***, 298, 604-620 (2004).

48. Ayanlar, B., Tiryaki, A., "Oscillation theorems for nonlinear second order differential equation with damping", ***Acta Math. Hungar.***, 89, 1-13 (2000).

49. Rogovchenko, S. P., Rogovchenko, Y. V., "Oscillation theorems for differential equations with a nonlinear damping term", ***J. Math. Anal. Appl.***, 279, 139-152 (2003).

50. Tiryaki, A., Zafer, A., "Interval oscillation of a general class of second-order nonlinear differential equations with nonlinear damping", ***Nonlinear Anal.***, 60, 49-63 (2005).

51. Kwong, M. K., Zettl, A., "Integral inequalities and second linear oscillation.", ***J. Differential Equations***, 45, 16-33 (1982).

52. Wong, J. S. W., "Oscillation criteria for a forced second order linear differential equation", ***J.Math.Anal.Appl.***, 231, 235-240 (1999).

53. Agarwal, R. P., Grace, S. R., O'Regan, D., "Oscillation theory for second order linear, half-linear, superlinear and sublinear dynamic equations", ***Kluwer Academic Publishers***, Dordrecht, Boston ve Londra (2002).

54. Agarwal, R. P., Bohner, M., Li, W. T., "Nonoscillation and oscillation: theory for functional differential equations", ***Marcel Dekker***, New York (2004).

55. Rogovchenko, S. P., Rogovchenko, Y. V., "Oscillation theorems of second order differential equations with damping", ***Dynam. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A***, 10, 447-461 (2003).

56. Zhao, X., Meng, F., "Oscillation of second-order nonlinear ODE with damping", ***Applied Mathematics and Computation***, 182, 1861-1871 (2006).

57. Çakmak, D., Tiryaki, A., "Comment on the paper "Oscillation of second-order nonlinear ODE with damping"", ***Applied Mathematics and Computation***, 191, 298 (2007).

58. Huang, Y., Meng, F., "Oscillation criteria for forced second-order nonlinear differential equations with damping", ***Journal of Computational and Applied Mathematics***, 224, 339-345 (2009).

59. Meng, F., Huang, Y., "Interval oscillation criteria for a forced second-order nonlinear differential equations with damping", ***Applied Mathematics and Computation***, 218, 1857-1861 (2011).

60. Shang, N., Qin, H., "Comments on the paper"Oscillation of second-order nonlinear ODE with damping" [Applied Mathematics and Computation 199 (2008) 644-652]", ***Appl. Math. Comput.***, 218, 2979-2980 (2011).

61. Tiryaki, A., Başçı, Y., "Interval oscillation criteria for second-order quasi-linear functional differential equations", ***Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis***, 16, 233-252 (2009).

62. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Polya, G., "Inequalities, second ed.", ***Cambrisdge University Press***, Cambridge (1988).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: ÖĞREKÇİ, Süleyman
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 29.05.1985 Antalya
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 312 3402233
e-mail	: s.ogrekci@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2009
Lisans	Selçuk Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2007
Lise	Serik Anadolu Lisesi	2003

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Mısır, A., Öğrekçi, S., "Reducibility and Stability Results for Dynamic Systems on Time Scales", *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 5, (2), 191-203 (2010).

2. Mısır, A., Öğrekçi, S., "Asyptotic Iteration Technique for Second-Order Dynamic Equations on Time Scales", *J. Math. Phys.*, 52, 0403504 (2011).

Hobiler

Yüzme, Bilgisayar Teknolojileri, Kitap