T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİNSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ MEKANİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

Oğuzhan ÇELİK

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **31/01/2014**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

OĞUZHAN ÇELİK tarafından **PROF. DR. MEHMET TEKKOYUN** yönetiminde hazırlanan "**FİNSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ MEKANİK SİSTEMLERİN ANALİZİ**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN

Danışman

Prof. Dr. Yakup HACI

Jüri Üyesi

Doç. Dr. İbrahim TÜRKYILMAZ

Jüri Üyesi

Sıra No :

Tez Savunma Tarihi: 31/01/2014

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Oğuzhan ÇELİK

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN'a, çalışma sırasında bilimsel katkıları ile bana yardımcı olan saygı değer hocam Zeki KASAP'a, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Oğuzhan ÇELİK

SİMGELER VE KISALTMALAR

R	Reel sayılar kümesi
M	Diferansiyellenebilir manifold
R^n	n-boyutlu Öklid uzay
C	Kompleks uzay
C^n	n-boyutlu Kompleks uzay
U	Reel vektör uzayı
T_xM	x noktasındaki tanjant (teğet) uzay
$\chi(M)$	Vektör alanların kümesi
$C^\infty(M,R)$	Diferansiyellenebilir reel değerli fonksiyonlar kümesi
∇	Levi-Civita konneksiyonu
ϕ	Temel 2 form ya da Kähler form
F	Finsler operatör
$\alpha(t)$	İntegral eğrisi
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
L	Lagrange fonksiyonu
H	Hamilton fonksiyonu
$\wedge$	Dış çarpım
TM	Tanjant manifold
T^*M	Kotanjant manifold
ξ^i	Semispray
$V=F(\xi)$	Liouville vektör alanı
E_L	Enerji fonksiyonu
dE_L	Enerji fonksiyonunun diferansiyeli
$\Lambda^1(M)$	1- formların kümesi

ÖZET

FİNSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ MEKANİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

Oğuzhan ÇELİK
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman : Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN
31/01/2014, 43

Bu çalışmada, Finsler manifoldunun hemen hemen Kähler modeli üzerinde Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerinin yeni bir çözümünü sunulmuştur. Ayrıca, mekanik sistemlerle ve denklemlerle alakalı bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Finsler Manifoldu, Kähler Manifoldu, Kähler Einstein Manifoldu, Lagrange, Hamilton.

ABSTRACT

MECHANİCAL SYSTEMS ANALİSYS ON FİNSLER MANİFOLDS

Oğuzhan ÇELİK
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Master of Science Thesis in Animal Science
Advisor : Prof. Dr. Mehmet TEKKOYUN
31/01/2014, 43

In this study, we present a new analogue of Euler-Lagrange and Hamilton equations on an almost Kähler model of a Finsler manifold. Also, we give some corollories about the related mechanical systems and equations.

Keywords: Finsler Manifold, Kähler Manifold, Kähler Einstein Manifold, Lagrangians, Hamiltonians.

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

İnsan yaşantısında dün olduğu gibi bugün de mekanik biliminin yeri büyüktür. Suyun akışından tutun da, insanın yaşamını kolaylaştırmak için tasarlanan uçağın uçuşuna, makinelerin çalışmasına kadar tabiattaki bütün hareketler mekanik prensiplerine göre gerçekleşir.

Mekanik, kuvvetlerin etkisi altındaki cisimlerin hareketli ve durağan hâllerini inceleyen bilim dalıdır. Mekanik, fizik bilimlerinin en eskisidir. Kaldıraçları ve suyun kaldırma kuvvetini kapsayan tarihteki ilk yazılı mekanik prensipler Arşimet'e (MÖ 287-MÖ 212) aittir. Makara, eğik düzlem ve somun anahtarı ile ilgili çalışmalar da antik metinlere kaydedilmiştir. Bu dönemde mekanik bina inşaatı gereksinimlerini karşılamakla sınırlıydı. Arşimet'ten sonra gelen İbn-i Heysem, İbn-i Sina, İbn Bacce gibi müslüman bilim insanları ile Galileo, Kepler, Leonardo da Vinci, Varignon, d'Alembert, Stevinus, Newton, Lagrange gibi batılı bilim insanlarının çalışmaları sayesinde Mekanik bugünkü seviyesine gelmiştir

Mekanik gündelik hayatta karşılaştığımız boyutlardaki cisimlerin konumlarının zamanla değişmesi veya durum ve yapılarının bozulmadan kalabilmesi ile ilgili problemleri inceler. Bu tanımlamayla birlikte bütün fizik mekanik olarak görülebilir. Ancak klasik mekanik atomlarla karşılaştırıldığında günlük hayatta karşılaşılandan oldukça büyük cisimlerle ve ışık hızından çok daha yüksek hızlarla ilgilidir.

Klasik mekanik; cisimlerin hareketlerini, ancak cisimlerin boyutlarının ve süratlerinin belirli sınırlar içinde kalması durumunda deneysel ve gözlem sonuçlarıyla tam olarak uyuşan bir biçimde açıklayabilir. Bu sınırların dışına çıkıldığında bulunan sonuçlar deney ve gözlem sonuçlarıyla örtüşmez. Bu durum sonrasında klasik mekanik yerini daha sonra kurulan teorilere bırakır. Bunlar özel ve genel rölativite teorileri ile kuantum mekaniği ve kuantum alanları teorileridir.

Mekanik; kinematik, statik ve dinamik olmak üzere üçe ayrılır. Kinematik, cisimlerin konumlarının zamanla değişimini yani hareketlerini, statik cisimlerin dengede olabilmeleri için gerekli koşulları, dinamik ise cisimlerin konumlarının değişmesine yol açan sebepler bilindiğinde cisimlerin hareketlerinin özelliklerinin nasıl bulunacağını yani parçacığın hareketi ile buna etkiyen kuvvet arasındaki bağıntıları incelemektedir (Rızaoğlu ve Sünel, 2008).

Bilim adamları uzaydaki cisimlerin hareket mekanizmaları ile ilgili birçok çalışmada bulunmuşlardır. Newton (1717–1738) mekaniğin genel yasalarını ortaya koyan bilim adamıdır. 19. yüzyılda d’Alembert (1717–1783), Lagrange (1736–1813), Jacobi (1804–1851), Hamilton (1805–1865) olmak üzere pek çok araştırmacının katkıları ile Newton yasaları üzerine kurulan mekanik neredeyse kusursuz bir yapı oluşturmuştur.

19. yüzyılda geliştirilen sistematik yapı, bugün analitik mekanik veya analitik dinamik yapı olarak bilinirken, Newton yasaları üzerine kurulan yapı ise klasik mekanik veya Newton mekaniği olarak bilinmektedir. Newton’un denklemleri vektörel bir yapıdadır. Bu sebeple en büyük zorluğu toplam kuvvetin bilinmesinin gerekli olması oluşturur. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için, daha basit skaler büyüklüklerin kullanıldığı ve kuvvet vektörünün içinde doğrudan yer almadığı ilke ve yöntemlerin bulunmasına da çalışılmıştır. Bu çalışmalar sonucunda Analitik dinamik olarak bilinen bir yöntem ortaya çıkmıştır. Analitik dinamiğin verdiği sonuçlar Newton denklemlerinin verdiği sonuçlarla aynıdır. Lagrange ve Hamilton denklemleri analitik dinamiği oluşmaktadır.

Mekaniğin skaler büyüklükler kullanarak yeniden kurulması açısından Lagrange yöntemi önemlidir. Lagrange yöntemi mekanik problemlerinin çözümünde oldukça başarılıdır. Lagrange yöntemi sayesinde Hamiltonian yöntemlerinin çıkışına yol açmıştır. Bu yöntem ile birlikte mekanik sistemlerin dinamik hareket denklemlerini elde etmek sıradan bir hale gelmiştir. Ancak bu durum denklemlerin çözülmesinde sistematik bir yol göstermemektedir.

Hamilton yöntemi ile bulunan denklemler birinci mertebeden iken, Lagrange yöntemi ile elde edilen denklemler ise ikinci mertebedendir. Lagrange yöntemiyle elde edilen denklemlerle karşılaştırıldığında Hamilton yöntemi ile elde edilen denklemlerin doğrudan çözülebilmeleri daha basit şekildedir.

Finsler geometri Paul Finsler’in 1918’de yaptığı tez çalışmasının bir ürünüdür. Zaten Finslerin bu çalışmasına daha sonra çalışan bilim adamları Finsler uzayı adını vermişlerdir ve zamanla Finsler geometri diferansiyel geometrinin ayrı bir dalı haline gelmiştir. İlk başlarda klasik fiziğin Finsler geometrisinin diferansiyel formunu kullanması tesadüfi idi ancak son yıllarda bu durum değişti. Finsler geometrinin problemleri çözmede çeşitli uygulamaları kullanılmaktadır. Örneğin; istatistik ve dinamik, ekoloji ve biyolojik sistemlerin evrim teorisi, hadron iç simetrisini tarif ederken, uzay-zaman ve yerçekimi teorisinin yanı sıra birleşik ayar alan teorileri vb. alanlarda Finsler geometrinin uygulamaları vardır.

Finsler geometrisi Riemann geometrisi için bir analogtur. Karesel kısıtlama olmayan Riemann geometrisine Finsler geometrisi denir. Finsler geometrisinin kullandığı argümanların TM üzerinde olmasına karşılık Riemann geometrisinin kullandığı argümanların M üzerinde olmasıdır. Yani, Finsler geometrisinde eğrilik $TM-\{0\}$

üzerinde bir tensör iken Riemann geometrisinde M üzerinde bir tensördür. Finsler geometrisi Riemann geometrisinin genelleştirilmişi değil daha iyi bir şekilde karesel kısıtlama olmaksızın Riemann geometrisi olarak tanımlanmaktadır.

Bu tanımlamalardan yola çıkarak, bu tezin ilk amacı; matematiksel modelleme kullanılarak, uzaydaki dinamik cisimlerin (parçacıkların) zamana bağlı hareketi gösteren diferansiyel denklemlerini bulmaktır.

Çeşitli bilim adamları tarafından mekanik sistemler üzerinde çeşitli uzaylar için hareket denklemleri bulunmuştur. Bu uzaylardan bazıları Hermitian uzay, Kähler uzayı, Heisenberg uzayı ve Finsler uzaylarıdır. Bu çalışmada Finsler uzayı mekanik sistemlere aktarılmış ve hareket denklemleri elde edilmiştir.

BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Literatür Özeti

Isaac Newton (1642–1727) İngiliz fizikçi, matematikçi, astronom, mucit, filozof, ilahiyatçıdır. 1687'de yayınlanan kitabı "Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri" ile klasik mekaniğin temelini atılmıştır. Bu kitap tarihin en önemli bilimsel kitaplarından biri olmuştur. Newton kitabında evrensel kütle çekimini ve hareketin üç kanununu ortaya koymuş ve sonraki üç yüzyıl boyunca bu bakış açısı bilim dünyasına egemen olmuştur. Newton dünyadaki cisimlerin hareketleri ile gökyüzündeki cisimlerin aynı doğal yasalar ile yönetildiklerini, kendi kütle çekim kanunu ile Kepler'in gezegen hareketleri kanunu arasındaki tutarlılıklar ile göstermiştir. Newton ilk yansıtmalı teleskobu geliştirmiş ve beyaz ışığın bir prizmaya tutulduğunda farklı renklerden bir tayf yaratması gözlemi sonucu bir renk kuramı oluşturmuştur. Newton'ın matematiğe neredeyse her dalda katkıları olmuştur. Özellikle analitik geometride, eğrilerin teğetleri (diferansiyel) ve eğrilerin oluşturduğu alanları (integral) hesaplamada yöntemler geliştirmiştir. Bu iki işlemin birbirlerine ters olduğunu bulmuş, eğimler ile ilgili çözümler geliştirmiş ve bunlara akış (fluxion) metotları ismini vermiştir çünkü niceliklerin bir boyuttan diğerine aktığını hayal etmiştir. Newton'un bilime en büyük katkısı mekanik alanındadır. Merkezkaç kuvveti yasası ile Kepler yasalarını birlikte ele alarak kütle çekim yasasını ortaya koymuştur. Newton hareket yasaları olarak bilinen eylemsizlik ilkesi, kuvvetin kütle ile ivmenin çarpımına eşit olduğunu ifade eden yasa ve etki ile tepkinin eşitliği fiziğin en önemli yasalarındandır.

Pierre Louis Maupertuis (1698-1759) Fransız Aydınlanması yıllarında yaşamış olan ünlü düşünür. Sıkı bir bilimci olup, ilerleme fikrine yoğun bir bağlılık sergileyen Maupertius, Newton biliminin, özellikle de yerçekimi yasasının savunuculuğunu yapmıştır. Bilgi kuramı bakımından deneyci, hatta pozitivist bir görüşü benimseyen filozof, bizim fizik biliminde fenomenler alanında kaldığımızı söylemiştir. Ona göre, mekaniğin temel kavramları duyum yoluyla açıklanabilir. Nitekim, Maupertius, matematiksel ve mekanik ilkelerde söz konusu olan zorunlu bağlantının bile çağrışım ve alışkanlık aracılığıyla açıklanabileceğini öne sürmüştür.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) İtalyan Fransız matematikçi ve astronomdur. Analiz, sayılar kuramı, klasik mekanik ve gök mekaniği alanlarına önemli katkılarda bulunmuştur. 18. yüzyılın en önemli matematikçilerindendir. Berlin'de astronomi, güneş sistemi, mekanik, dinamik, akışkanlar mekaniği, olasılık ve genel matematiğin temelleri üzerine çalışmalar yaptı. En az 200 makale yayınlamıştır. Sayılar kuramında her pozitif tamsayının dört adet tam karenin toplamı olarak yazılabileceğini göstermiştir. Bu konuda analitik değişkenler hesabını bulmuş ve kuramını dinamik problemlerine uygulamıştır. 1788 yılında "Analitik Mekanik" isimli kitabını yayınladı. Bu kitapta mekanik alanında yapılmış olan bütün çalışmaları özetleniyordu. Mekaniği matematiksel analizin bir koluna dönüştürdü. Kitabında geometriden hiçbir şekilde yararlanmadı. Ayrıca Newton kuramının gezegenlerin devinimine uygulanabileceğini gösterdi. Newton hareket denklemlerini farklı bir yöntemle ifade etti. Kendi geliştirdiği bu yönteme Lagrange Mekaniği adı verildi. Lagrange mekaniğinde yapılan şey Newton mekaniğindeki ile aynıdır. Fakat koordinat sistemi değiştiği zaman denklemlerin formu değişmemektedir. Lagrange mekaniğinin uygulamalarıyla dalga yayılımı ve eğrilerin maximum ve minimum problemlerinin sonuçlarını tanıtmıştır

William Rowan Hamilton (1805–1865) İrlandalı matematikçi, fizikçi ve astronomdur. Optik ve dinamik üzerine son derece özgün çalışmalar yaptı. Hamilton hem optiği hem de dinamiği tek bir genel ilkeden çıkarmaya çalıştı. Bir diğer önemli katkısı fizik ve mekanik yasalarının bir integralin değişiminden türetilmesidir. Modern görecelik ve kuantum mekaniğinin altında yatan ilke Hamilton fonksiyonlarıdır. Hamilton prensibi klasik mekaniği için formüle edilmiş olsa da elektromanyetik ve yerçekimsel alanlar gibi klasik alanlarda geçerlidir ve hatta kuantum mekaniği, kuantum alan teorisi ve kritiklik teorileri kadar uzatılmıştır. Keşfettiği kuaterniyon belki de onun en bilinen çalışmasıdır.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) analiz ve diferansiyel geometri dalında çok önemli katkıları olan Alman matematikçidir. Söz konusu katkılar daha sonra izafiyet teorisinin geliştirilmesinde önemli rol oynamıştır. Bu matematikçinin ismi aynı zamanda zeta fonksiyonu, Riemann hipotezi, Riemann manifoldları ve Riemann yüzeyleri ile de bağlantılıdır. Ayrıca belirli integral için çok önemli bir yaklaşım getirmiştir.

Elie Cartan (1869-1951) Fransız matematikçidir. Lie grupları, diferansiyel denklemler sistemleri ve diferansiyel geometri konularındaki çalışmalarıyla, 20. yy matematiğinin gelişiminde belirleyici bir etkisi olmuştur. Cartan'ın üzerinde çalıştığı ilk konu Lie grupları oldu. Bu gruplar ilk kez Sophus Lie tarafından, bir analitik katmanlı uzayın, sonlu sayıda parametreye bağlı bir analitik dönüşümler sistemi olarak düşünülmüştü, 1888′de W. Killing bu grupları başka katmanlı uzaylarda bağımsız olarak incelemeye başlamış ve "yerel" bir kuramın temellerini atmıştı. Killing tüm basit karmaşık Lie cebirlerini belirleyebilmişti, ancak kanıtları eksik ve yanlışlar taşıyordu. Cartan bu eksik ve yanlışları giderirken basit gerçek Lie cebirlerini sınıflandırmayı ve bunlara ilişkin doğrusal gösterimlerin tümünü bulmayı başararak "yerel" kuramı sağlam temellere oturttu. 1913′de, uzay metriğini koruyan koordinat dönüşümlerinin oluşturduğu ortogonal grupların doğrusal gösterimleri üzerinde çalışırken spinör kavramına ulaştı. Uç boyuttaki dönüşümlerin iki boyutta gösterimini sağlayan karmaşık vektörler olan spinörler sonraları kuantum mekaniğinin gelişmesinde önemli bir rol oynadı. 1925′ten sonra topoloji problemlerine yönelen Cartan, Lie gruplarının "global" özelliklerini incelemekte Weyl'in tıkız gruplara ilişkin buluşlarından yararlanarak, bağlantılı Lie grubunun bir Öklid uzayı ile bir tıkız grubun çarpımı olduğunu kanıtladı. Cartan, Lie grupları, diferansiyel sistemler ve diferansiyel geometriyi birlikte ve içi içe kullanarak türetik katmanlı uzaylarda çözümleme düşüncesini geliştirirken, günümüzün matematiğini biçimlendiren birçok kavramın yaratıcısı olmuştur.

Albert Einstein (1879–1955) özel görelilik ve genel görelilik kuramları ile iki yüzyıldır Newton mekaniğinin hakim olduğu uzay anlayışında bir devrim yaratmıştır. Sadece matematik hesaplamalar ve denklemler ile oluşturduğu kuramları sonradan deneysel olarak defalarca doğrulanmıştır. $E = mc^2$ denklemi ile formüle ettiği kütle-enerji eşdeğerliği yıldızların nasıl enerji oluşturduğuna açıklama getirmiş ve nükleer teknolojinin önünü açmıştır. Fotoelektrik etki ve Brown hareketine getirdiği matematiksel açıklamalar, modern fiziğe diğer katkıları arasındadır. Ömrünün büyük bir kısmını bütün kuramları birleştiren bir birleşik alan kuramı yaratmaya çalışarak geçirmiş ama bu çabaları sonuçsuz kalmıştır. Einstein kuantum mekaniğinin bazı sonuçlarına, özellikle belirsizlik ilkesine oldukça şüpheci yaklaşmış fakat bu yaklaşımlar ileride geniş kabul görmüştür.

Paul Finsler (1894-1970) diferansiyel geometri üzerine çalışmıştır. Paul Finsler yaptığı doktora tezi Caratheodory danışmanlığında yürütülmüştür ve 1934'de Elie Cartan tarafından Finsler Uzayı adı verilmiştir. Bulduğu Finsler geometri Riemann geometrisinin genelleştirilmişi değil daha iyi bir şekilde karesel kısıtlama olmaksızın Riemann geometrisi olarak tanımlanmaktadır.

John Lighton Synge (1897-1995) İrlandalı matematikçidir. Synge klasik mekanik üzerine çalışmıştır. Bu çalışmalar geometrik optik, gaz dinamiği, hidrodinamik, elastikiyet, elektrik ağları, matematiksel modelleme, diferansiyel geometri ve Einstein rölativite üzerine çalışmıştır. En ünlü çalışması geometrik metotları kullanarak yaptığı genel rölativitedir, kara delik çalışmasını ciddi anlamda yapan ilk fizikçidir.

Klein (1962, 1968a, 1968b) Lagrange mekanik sistemi için bir bakış açısı geliştirmiştir. Lagrange formalizmini (dinamik denklem),

$$i_{\xi}\phi_L = dE_L \tag{2.1}$$

formunda ifade etmiştir. Klein'in Lagrange formalizmi hemen hemen tanjant geometrinin gelişimine ve özel dış türev hesaplarına katkı sağlamıştır. Bu bakış açısı yüksek dereceden tanjant demetlerine genişletilmiştir. Ayrıca Hamilton mekanik sistemi için kotanjant demeti kullanılmış ve Hamilton formalizmini (dinamik denklem),

$$i_X \phi = dH \tag{2.2}$$

şeklinde ortaya koymuştur.

Crampin (1981) Euler-Lagrange denklemlerinin diferansiyel geometrisi ve Lagrange dinamiğinin ters problemi üzerine bir çalışma yapmıştır.

De Leon ve Rodrigues (1986) hemen hemen tanjant geometri ve yüksek dereceden mekanik sistemler üzerine çalışmışlardır. Hemen hemen tanjant geometride yüksek dereceden mekanik sistemlerin bazı sonuçlarını ortaya koydular.

De Leon ve Rodrigues (1987) ikinci mertebeden diferansiyel denklemler ve korunumsuz Lagrange mekaniği çalışmasında Lagrange teorisinin geometrik formülüzasyonunu incelemiştir.

De Leon ve Lacomba (1989) Lagrange alt manifoldları ve yüksek mertebeden mekanik sistemler üzerine çalışmışlardır. Ayrıca yüksek mertebeden Lagrange ve Hamilton sistemlerinin (zamana bağlı ve bağımsız) simplektik yüksek mertebeden tanjant demetlerinin Lagrange alt manifoldları üzerinde durmuşlardır.

De Andres, De Leon ve Rodrigues (1990, 1991) düzenli Lagrangian ile ilgili yüksek mertebeden tanjant demetlerinde konneksiyonları ve yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için Lagrange dinamiğinin ters problemi üzerine bir çalışma yapmışlardır. fiber manifoldlar ve bağlantılarının terimleri üzerinde sol mertebeden alan teorisinin geometrik formülünü kurmuştur. Bu formülasyon ile tek alan teorisininim algoritmasını inşa edip geliştirmişlerdir. Bu algoritmayı mekanik sistemlere genişletmişlerdir.

De Leon, Mello ve Rodrigues (1991a. 1991b) zamana bağlı dejenere Lagrangian'ların kısıtlanma çalışmasını yapmışlardır. Yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için Lagrange dinamiğinin ters problemine geometrik bir yaklaşım sunmuştur.

Özer (1994) bağlantılı integral edilebilir Hamilton sistemlerini incelemiştir.

Civelek (1996) vektör demetlerinde Lagrange ve Hamilton denklemlerini incelemiştir.

Shiriaev, Pogromsky, Ludvigsen ve Egeland (2000) ters sarkacın pasifliği tabanlı kontrolün küresel özellikleri incelemiştir. Çalışmalarında Lagrange ve Hamilton sistemlerinin belli bir hedef pozisyonunun istikrar problemini ele almışlardır.

Tekkoyun (2002) genelleştirilmiş Kähler manifoldları üzerinde Euler-Lagrange ve

Hamilton denklemlerinin yüksek mertebeden liftlerini incelemiştir

Aycan (2003) $J^k\pi$ jet demeti üzerinde hemen hemen tanjant yapı verilerek Euler-Lagrangian ve Hamilton denklemlerini elde etmiştir. Daha sonra Euler-Lagrange Hamilton denklemlerini lift teorisini kullanılarak genişletilmiş jet demetlerine genelleştirmiştir. Zamana bağlı Euler-Lagrange denklemleri oluşturulmuş ve benzer şekilde bu denklemler zamana bağlı genişletilmiş jet demetleri üzerinde ifade edilmiştir.

Tekkoyun (2005) para-Kähler manifoldları üzerinde para-kompleks Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerini elde etmiştir. Ayrıca mekanik sistemin geometrik ve fiziksel bazı sonuçlarını vermiştir.

Tekkoyun (2006a) Para-Kählerian manifoldlarda Poisson parantezli para-kompleks Hamilton hareket denklemlerini hesaplamıştır.

Tekkoyun (2006b) kısıtlanmış reel Hamilton denklemlerini kompleks versiyonuna genellemiştir. Kısıtlı Kähler manifoldlarda kompleks Hamilton hareket denklemlerini bulmuştur.

Tekkoyun ve Görgülü (2006) yüksek mertebeden tam ve dikey kompleks liftlerin Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerini Kähler manifoldlarda ortaya koymuşlardır.

Tekkoyun (2009a) Kähler manifoldları üzerinde kompleks Hamilton mekanik sistemlerinin liftlerini incelemiş, k. mertebeden dikey liftlerin zamana bağlı kompleks Hamilton denklemlerini bulmuştur.

Tekkoyun (2009b) sabit J-eğriliğin para-Kähler manifoldlarda bir modeli için R_n^{2n} üzerinde Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerini ortaya koymuştur.

Tekkoyun (2009c) mekanik sistemlerin modellenmesinde Lagrangian ve Hamilton sistemlerinin tanjant ve kotanjant demetlerindeki dikey ve tam durumlarını incelemiştir. Bunu yaparken, Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerini bulmuş geometrik ve fiziksel sonuçlarını ortaya koymuştur.

Tekkoyun ve Sarı (2010) kompleks ve parakompleks manifoldlar üzerindeki polinom yapıları kullanılarak tanjant demetlerinin geometrileri üzerinde mekanik sistemlerde çalışmışlardır.

Kasap ve Tekkoyun (2013) Weyl manifoldları üzerinde hareketi ve hareket denklemleri incelemişler ve bulmuşlardır. Aynı zamanda bu hareket esnasında meydana gelen mekanik ve fiziksel olayların zaman boyutu dikkate alınarak Weyl-matematiksel modellenmesi yapmışlardır. Matematiksel modelleme sonucunda üretilen genelleştirilmiş Euler-Lagrange ve Hamilton hareket denklemlerinin fiziksel ve geometrik bulgularının yorumu yapmışlardır.

2.2. Tanımlar

Vektör alanı: E^n n-boyutlu Öklid uzayı ve E^n in $p \in E^n$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{E^n}(p)$ olsun. Buna göre bir $X : E^n \to \bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}(p)$ fonksiyonu için $\pi o X : E^n \to E^n$ olacak şekilde bir $\pi : \bigcup_{p \in E^n} E^n \to E^n$ fonksiyonu mevcutsa X e E^n üzerinde bir vektör alanı adı verilir. Yani, bir manifoldun bir alt kümesinde tanımlanmış ve bu kümenin her bir noktasına, bu noktada bir teğet vektör karşılık getiren bir fonksiyondur. Yada, bir manifoldun her noktasına bir tanjant vektörü eşleyen dönüşüme bir vektör alanı denir.

İntegral eğrisi: E^{n+1}, (n+1) boyutlu Öklid uzayı ve E^{n+1} de parametrik bir eğri $\alpha : I \to E^{n+1}$ olsun. Yani $t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t),...,\alpha_{n+1}(t))$ dir. E^{n+1} üzerinde bir vektör alanı ξ olmak üzere $\forall t \in I$ için $\frac{d\alpha}{dt} = \xi(\alpha(t))$ ise α eğrisine ξ vektör alanının integral eğrisi denir.

1-form: E^n n-boyutlu Öklid uzayı ve E^n'in $P \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T^*_{E^n(P)}$ olsun. Buna göre bir $\omega : E^n \to \bigcup_{P \in E^n} T^*_{E^n}(P)$ fonksiyonu için $\pi o \omega : E^n \xrightarrow{\text{özdeşlik}} E^n$ olacak şekilde bir $\pi : \bigcup_{P \in E^n} T^*_{E^n}(P) \to E^n$ fonksiyonu mevcut ise ω ye E^n üstünde 1-form denir.

Harita: M bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. O zaman topolojik manifold tanımı gereğince U bir ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt cümlesine eşlenebilir. $\psi : U \subset E^n \to W \subset M$ olmak üzere (ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir.

Atlas (Koordinat komşuluğu sistemi): M bir n-boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılır. E^n, n-boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, E^n de U_α ya ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, U_α) haritalarının $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir.

Tensör alanı: M bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere, M nin her x noktasında $K(x) \in T^r_s(T \times M)$ şeklinde belli bir tensör karşılık getiren K dönüşümüne M manifoldu üzerinde (r, s) tipinden bir tensör alanı adı verilir.

Lineer dönüşüm: V ve U bir F cismi üzerinde birer vektör uzayı ve $f:V\to U$ bir fonksiyon olsun. $\forall v_1,v_2\in V\,\forall$ ve $\forall a\in F$ için,

(1) $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$

(2) $f(av_1)=af(v_1)$

şartları sağlanırsa f ye V den U ya lineer dönüşüm (doğrusal dönüşüm, vektör uzayı homomorfizması yada lineer transformasyon) denir.

Grup homomorfizmi: $(G,.)$, $(H,*)$ iki grup olsun. $f:G\to H$ fonksiyonu $\forall a,b\in G$ için

$f(ab)=f(a)*f(b)$

oluyorsa f ye bir grup homomorfizmi denir.

İzomorfizm: Eğer f grup homomorfizmi $1:1$ ve örten ise izomorfizm adını alır.

Endomorfizm: Eğer f grup homomorfizminde $G=H$ ise f endomorfizm adını alır.

Diffeomorfizm: E^n, n-boyutlu bir Öklid uzayı olmak üzere, E^n in iki açık alt cümlesi U ve V olsun. Bir $\psi:U\to V$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler doğruysa ψ ye C^k sınıfından bir diffeomorfizm ve U ile V ye de k. dereceden diffeomorfiktirler denir

(D1) $\psi\in C^k(U;V)$

(D2) $\psi^{-1}:V\to U$ var ve $\psi^{-1}\in C^k(V;U)$.

Baz: V bir vektör uzayı olmak üzere, $\forall v\in V$ vektörü bir $S=(u_1,u_2,...,u_n)$ vektör kümesindeki vektörlerin tek bir lineer bileşimi olarak yazılabiliyorsa S kümesi V nin bir bazıdır. Eğer V nin n-elemanlı bir bazı varsa V ye sonlu n-boyutlu veya n-boyutludur denir.

Ortogonal: V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $<u,v>=0$ ise u, v ye ortogonaldir (dikdir) ve $u,v\in V$ vektörlerine de ortogonal vektörler denir.

Türev dönüşümü: M ve N, C^∞ manifoldlar, $\varphi:M\to N$, C^∞ dönüşüm $m,p\in M$ ve $v_p\in T_pM$ tanjant vektörüne p noktasında teğet olan bir eğri $\alpha:I\subset R\to M$ olsun. $(\varphi_*)_p:T_pM\to T_{\varphi(p)}M$ ile tanımlanan dönüşüme φ nin $p\in M$ noktasındaki türev dönüşümü denir.

Regülerlik: E^n ve E^m, m ve n -boyutlu birer Öklid uzayı olmak üzere, bir $F:E^n\to E^m$ dönüşümünün $\forall p\in E^n$ noktasındaki $(F_*)p$ türev dönüşümü 1:1 ise bu

$(F_*)\,p$ türev dönüşümüne regülerdir denir.

Bilineer form: V bir reel vektör uzayı olsun. $<,>: V\times V \to R$ dönüşümü $\forall a,b\in R$, $\forall u,v,w \in V$ için,

(1) $<au+bv,w>=a<u,w>+b<v,w>$

(2) $<u,av+bw>=a<u,v>+b<u,w>$ oluyorsa <,> dönüşümüne bir V vektör uzayı üzerinde bir bilineer form denir.

Dejenerelik ve nondejenerelik: V bir m-boyutlu reel vektör uzayı ve $g: V\times V \to R$ bir simetrik bilineer dönüşüm olsun. Eğer bir $w\neq 0$ vektörü için , $g(w,v)=0$ ise g ye dejenere denir. Eğer $\forall v\in V$ için $g(w,v)=0$ olması $w=0$ olmasını gerektiriyor ise g ye nondejenere denir.

Lineer fonksiyonel (Dönüşüm): V bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\forall u,v\in V$ ve $\forall a,b\in K$ için

$$L(au+bv)=aL(u)+bL(v)$$

oluyorsa $L: V\to K$ dönüşümüne bir lineer fonksiyonel denir.

Dual uzay: V bir vektör uzayı olsun. Bir V vektör uzayından K cismine tanımlanan lineer fonksiyonellerin kümesi L_1 ve L_2, V de lineer fonksiyoneller ve $\forall u\in V$, $\forall k\in K$ olmak üzere

(1) $(L_1+L_2)(u)=L_1(u)+L_2(u)$

(2) $(kL_1)(v)=kL_1(v)$

şeklinde tanımlanan toplama ve skaler çarpım özellikleriyle K üzerinde yine bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya V nin dual uzayı denir ve V^* ile gösterilir.

Dual baz: V bir vektör uzayı ve K bir cisim olmak üzere, $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ kümesi V nin bir bazı olsun. $\phi_1,\phi_2,...,\phi_n\in V^*$, $\phi_i(v_j)=\delta_{ij}=\begin{cases} i=j & ,1 \\ i\neq j & ,0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan lineer fonksiyoneller olsunlar. Bu durumda $\{\phi_1,\phi_2,...,\phi_n\}$ kümesi, V^* ın bir bazıdır. Bu $\{\phi_i\}$ bazı $\{v_j\}$ ye dual olan baz veya dual baz olarak adlandırılır.

Topoloji: X boş olmayan bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. Bu koleksiyon aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır.

(T1) $X,\varnothing\in\tau$

(T2) $\forall A_1,A_2\in\tau \Rightarrow A_1\cap A_2\in\tau$

(T3) $A_i \in \tau,\ i \in I,\ \bigcup A_i \in \tau$

burada I bir indeks cümlesidir.

Topolojik uzay: Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X,τ) ikilisine bir topolojik uzay denir.

Homeomorfizim (Topolojik dönüşüm): X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir $f: X \to Y$ fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizim (topolojik dönüşüm) denir.

Hausdorff uzayı: X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için X de sırası ile P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \phi$ $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff Uzayı denir.

Topolojik manifold: M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğruysa M ye bir topolojik n-manifold denir.

(M1) M bir Hausdorff uzayıdır,

(M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur,

(M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Diferansiyellenebilir yapı: Bir topolojik n-manfold M ve M nin bir atlası $S=\{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha \bigcap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall \alpha,\beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonlar C^k-sınıfından diferansiyellenebilir iseler S ye C^k-sınıfından *diferansiyellenebilirdir* denir. S atlası M üzerinde C^k-sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k-sınıfından diferansiyellenebilir yapı adı verilir.

Diferansiyellenebilir manifold: M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k-sınıfından diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k- sınıfından bir diferansiyellenebilir manifold denir.

Tanjant manifold: M bir manifold olmak üzere, $TM = \bigcup_{p\in M} T_p(M)$ C^∞-manifolduna M nin bir tanjant manifoldu denir.

Tanjant demet: M bir manifold ve TM tanjant manifold olsun. $\pi_M : TM \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere (TM, π_M, M) ye M manifoldunun bir tanjant demeti denir.

Kotanjant demet: M bir manifold olsun. $\pi_M : T^*M \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere $\left(T^{*}M,\pi_{M},M\right)$' ye M manifoldunun kotanjant demeti denir.

Bir matrisin rankı: Bir A matrisi verilsin. A matrisinin basamak biçime dönüştürülmüşü olan matrisin, sıfırdan farklı satırları sayısına A matrisinin rankı denir ve r(A) ile gösterilir.

Kovaryant tensör alanı: Diferansiyellenebilir bir M^{n} manifoldu için $s.$ mertebeden bir kovaryant tensör alanı (kısaca bir $\left(0,s\right)$-tensör alanı) $D:\chi\left(M^{n}\right)\times\chi\left(M^{n}\right)\times...\times\chi\left(M^{n}\right)\rightarrow C^{\infty}\left(M^{n},R\right)$ şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşümdür.

2-form: M bir manifold olmak üzere α, M üzerinde $k.$ dereceden bir diferansiyellenebilir form olsun. α yı $\left(0,k\right)$ tipinden anti-simetrik bir tensör alanı olarak düşünebiliriz.

$$\alpha=\sum_{i_1\leq...\leq i_k}a_{i_1,...,i_k}dx^{i_1}\Lambda...\Lambda dx^{i_k}=\frac{1}{k!}a_{i_1,...,i_k}dx^{i_1}\Lambda...\Lambda dx^{i_k}$$

burada α, $k.$- formdur. Eğer $k=2$ alınırsa 2-form elde edilmiş olur.

Hemen hemen tanjant yapı: n-reel boyutlu bir manifold M ve M nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerinde $J^{2}=0$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ=n$ ile verilen TM üzerindeki $\left(1,1\right)$ tipinden bir J tensör alanına bir hemen hemen tanjant yapı denir.

Riemann manifoldu: M bir C^{∞}-manifold ve reel değerli C^{∞}- fonksiyonların halkası $C^{\infty}\left(M,R\right)$ olmak üzere $g:\chi\left(M\right)\times\chi\left(M\right)\rightarrow C^{\infty}\left(M,R\right)$ şeklinde bir iç çarpım tanımlıysa M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada g, M üzerinde bir iç çarpımdır. Metrik tensör, Riemann metriği veya diferansiyellenebilir metrik olarak da adlandırılır.

Semi-Riemann manifoldu: M bir C^{∞}- manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi\left(M\right)$ ve reel değerli C^{∞}-fonksiyonların halkası da $C^{\infty}\left(M,R\right)$ olmak üzere $<.,.>:\chi\left(M\right)\times\chi\left(M\right)\rightarrow C^{\infty}\left(M,R\right)$

(1) 2-Lineer

(2) Simetrik

(3) $\forall X\in\chi\left(M\right)$ için $<X,Y>=0\Leftrightarrow Y=0\in\chi\left(M\right)$

şartları sağlanıyorsa $<.,.>$ fonksiyonu semi-Riemann metriği ve M ye de semi-Riemann manifoldu olarak adlandırılır.

Levi-Civita konneksiyonu: Bir M yarı(semi)-Riemann manifoldu üzerinde

$\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

(i) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

(ii) $X_g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

olacak şekilde bir tek ∇ konneksiyonu vardır. ∇ ya M nin Levi-Civita konneksiyonu denir.

Riemann eğrilik tensörü: Bir n-boyutlu Riemann manifoldu M ve Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,Y,Z) \to R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1,3)$ tensördür. $R(X,Y)Z$ veya $R(X,Y,Z)$ ile gösterilen bu tensöre M nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Riemann-Christoffel eğrilik tensörü: M bir semi-Riemann manifoldu olsun.

$$K : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\hbar}(M,R)$$

$$(X,Y,ZW) \to K(X,Y,Z,W) = < X, R(Z,W)Y >$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre, M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir.

Konfigürasyon manifoldu: Klasik mekanikte, dış sınırlamalar yardımıyla fiziksel bir sisteme uygun durumların gerçekleşebildiği uzaya bir konfigürasyon uzayı denir. Tipik bir sistemin konfigürasyon uzayı bir manifold yapısına sahiptir, bundan dolayı konfigürasyon manifoldu olarak adlandırılır.

Hız faz uzayı: M bir konfigürasyon manifoldu olsun. $\pi_M : TM \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere (TM, π_M, M) ye M manifoldunun tanjant demeti denir. Bir $p \in M$ için $\pi_M^{-1}(p)$ lifi $T_p^* M$ tanjant uzayıdır. TM tanjant uzayı hız faz uzayıdır.

Momentum faz uzayı: M bir konfigürasyon manifoldu olsun. $\pi_M : T^* M \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere $(T^* M, \pi_M, M)$ye M manifoldunun kotanjant demeti denir. Bir $p \in M$ için $\pi_M^{-1}(p)$ lifi $T_p^* M$ kotanjant uzayıdır. $T^* M$ kotanjant uzayı momentum faz uzayıdır.

Hemen hemen simplektik manifold: $2m$ reel boyutlu bir M manifoldunun herhangi bir p noktasında φ anti simetrik 2-formu regüler yani $boyM = rank\varphi$ ise φ 2-formuna bir hemen hemen simplektik yapı denir. (M,φ) ikilisine bir hemen hemen simplektik manifold denir.

Simplektik manifold: $2n$ reel boyutlu bir M manifoldunun üzerinde φ hemen hemen simplektik yapı kapalı yani $d\varphi = 0$ ise φ 2-formuna simplektik yapı denir. (M,φ) ikilisine bir simplektik manifold denir.

Hemen hemen kompleks yapı: n-reel boyutlu bir manifold M ve M nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerinde $J^2 = -I$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ = m$ ile verilen TM üzerindeki bir $(1,1)$ tipinden J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı denir.

Hemen hemen kompleks manifold: Üzerinde hemen hemen kompleks yapı tanımlanan manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir.

Holomorfik fonksiyon: D, C^n nin bir açık alt kümesi olsun. f, D üzerinde kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere D nin her bir $p = z_0$ noktasında $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{f\left(z_0^\alpha + \Delta z^\alpha\right) - f\left(z_0^\alpha\right)}{\Delta z^\alpha}$ $\left(\Delta z^\alpha = \Delta x^\alpha + i\Delta y^\alpha\right)$ her $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$ için limit var ve bu limit $\Delta z^\alpha \to 0$ a yaklaştığında $\dfrac{\Delta y^\alpha}{\Delta x^\alpha}$ yönüne bağlı değilse, f fonksiyonu p noktasında holomorfiktir. Her $p \in D$ için bu şart sağlanıyorsa f fonksiyonuna holomorfiktir denir.

Holomorfik dönüşüm: M ve M iki kompleks manifold, $\varphi : M \to M$ sürekli bir dönüşüm ve $p \in M$ olmak üzere $\varphi(p)$ nin bir V komşuluğu üzerinde tanımlanan holomorfik fonksiyon f olsun. Bu durumda $p \to \varphi(p)$ ile tanımlanan φ sürekli dönüşümünün φ^* dual dönüşümü 1-formları 1-formlara dönüştürüyorsa φ diferansiyellenebilir dönüşümüne bir holomorfik dönüşüm denir.

Kompleks manifold: M, $2n$-boyutlu Hausdorff uzayının bir $\{U_\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ açık örtüsü için $\varphi_M \xrightarrow{\text{hom}} D\mu \subset C^n$ ve $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ olmak üzere $\varphi_\lambda\left(U_\lambda \cap U_\mu\right)$ nin her bir p noktasında $f_{\mu\alpha} = \varphi_\mu\left(\varphi_\lambda^{-1}(p)\right)$ fonksiyonları holomorfikse bu durumda M ye bir kompleks manifold denir.

Hermit metriği: Bir J hemen hemen kompleks yapısıyla bir hemen hemen kompleks manifold M ve g, M üzerinde tanımlı Riemann metriği olsun. Bu durumda $g(Z,W) = g(JZ,JW)$, $\forall Z,W \in \chi(M)$ olmak üzere g Riemann metriğine M üzerinde Hermit metriği denir.

Hermit manifoldu: Bir Hermit metriğiyle bir M hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir.

Kähler form: Bir J hemen hemen kompleks yapıyla bir hemen hemen Hermit manifoldu M olsun. M üzerinde tanımlı herhangi bir g Hermit metriğiyle φ 2-form arasında $\forall X,Y\in\chi(M)$ için $\varphi(X,Y)=\varphi(X,JY)$ şeklinde bir bağıntı varsa bu durumda φ ye M üzerinde bir Kähler form adı verilir.

Kähler metriği: M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde φ Kähler formu kapalı yani $d\varphi=0$ ise M üzerinde tanımlanan bir Hermit metriğine Kähler metriği denir.

Hemen hemen kähler manifoldu: Bir Kähler metriğiyle hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Kähler manifoldu denir.

Kähler manifoldu: Bir kompleks manifold üzerinde bir Kähler metriği tanımlanabiliyorsa bu kompleks manifolda bir Kähler manifoldu denir.

Hemen hemen parakompleks yapı: n-reel boyutlu bir manifold M ve M nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerinde $J^2=I$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ=m$ ile verilen TM üzerindeki bir $(1,1)$ tipinden J tensör alanına bir hemen hemen para-kompleks yapı denir.

Hemen hemen çarpım manifoldu: M n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olsun. M de $F^2=0$ olmak üzere F bir $(1,1)$ tipinde tensör alanı ve M hemen hemen çarpım yapısıyla donatılmışsa M ye bir hemen hemen çarpım manifoldu denir.

Diferansiyellenebilir dönüşüm: E^n ve E^m sırasıyla n-ve m-boyutlu Öklid uzayları olmak üzere $F:E^n\to E^m$ fonksiyonu verilmiş olsun. F fonksiyonunun koordinat fonksiyonu olan $f_i:E^n\to R$ fonksiyonları diferansiyellenebilir ise $F=(f_1,...,f_m)$ fonksiyonu da diferansiyellenebilirdir. Bu durumda $F:E^n\to E^m$ fonksiyonuna bir diferansiyellenebilir dönüşüm denir.

Submersiyon: M ve N sırasıyla m ve n boyutlu manifoldlar olmak üzere, $F:M\to N$ diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. $m>n$ ve $rankF=n$ oluyorsa M nin her noktasında F ye bir submersiyondur denir.

Demet: E manifoldu total uzay, M manifoldu baz uzay ve p de projeksiyon olmak üzere $p:E\to M$ bir örten submersiyonsa (E,p,M) üçlüsüne bir demet adı verilir.

Lif: ve M, manifoldlar, $\pi:E\to M$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Eğer π örten submersiyon ise (E,π,M) üçlüsüne bir lifli manifold denir. Bir (E,π,M) lifli manifoldunda E ye total uzay, M ye taban uzayı, π ye projeksiyon ve her bir $p \in M$ noktası için E nin $\pi^{-1}(p) = E(p)$ alt cümlesine de p üzerindeki lif denir. Yani, M bir manifold olmak üzere $\forall x \in M$ için $p^{-1}(x) = E_x$ ise p ye M nin x üzerindeki lifi denir.

Semispray: J n-reel boyutlu bir M manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde bir hemen hemen tanjant yapı olsun. TM üzerinde lokal koordinatlar (q^i, v^i), $1 \le i \le m$ ve $\xi = v^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$, $\dot{q}^i = v^i$, $\dot{v}^i = \xi^i$ vektör alanına M üzerinde bir semispray (ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklem) denir.

Liouville vektör alanı: J bir hemen hemen tanjant yapı ve ξ bir semispray olmak üzere $V = J\xi = v^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$ ile verilen V vektör alanına Liouville vektör alanı denir.

Kinetik enerji: n-reel boyutlu bir manifold M ve M nin tanjant demeti TM olsun. M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar (q^i), $1 \le i \le m$ ve TM üzerinde lokal koordinatlar (q^i, v^i) olsun m_i M üzerinde m parçacıklı sistemin kütlesi olmak üzere $T = \frac{1}{2} m_i (\dot{q}^i)^2 = \frac{1}{2} m_i (v^i)^2$ ile verilen $T : TM \to R$ dönüşümüne sistemin kinetik enerjisi denir.

Potansiyel enerji: n reel boyutlu bir manifold M ve M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar (q^i), $1 \le i \le m$ olsun. m_i, M üzerinde m parçacıklı sistemin kütlesi g, yer çekimi ivmesi ve h, sistemin orijine uzaklığı olmak üzere $P = m_i gh$ ile verilen $P : M \to R$ dönüşümüne sistemin potansiyel enerjisi denir.

Kanonik projeksiyon: TM tanjant demetinden M manifoldu üzerine sürekli ve örten $\tau_M : TM \to M$ dönüşümüne kanonik projeksiyon denir.

Lagrangian fonksiyonu: m-reel boyutlu bir manifold M, M nin tanjant demeti TM, $\tau_M : TM \to M$ kanonik projeksiyon olsun. $T = \frac{1}{2} m_i (\dot{q}^i)^2 = \frac{1}{2} m_i (v^i)^2$ ve $P = m_i gh$ sırasıyla sistemin kinetik ve potansiyel enerjisi olmak üzere $L = T - Po\tau_M$ ile verilen $L : TM \to R$ dönüşümüne Lagrangian fonksiyonu denir.

Enerji fonksiyonu: $V = v^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$ Liouville vektör alanı ve L Lagrangian fonksiyonu olmak üzere TM üzerinde $E_L = VL - L$ fonksiyonuna L ye bağlı Enerji fonksiyonu denir.

Dikey türev: Bir M manifoldu üzerinde her bir X vektör alanı için, X ile bir ω

p -formunun $i_X\omega$ iç çarpımı veya dikey türevi aşağıdaki gibi tanımlanır;

(1) $i_X\omega = 0,\ p = 0$

(2) $i_X\omega = \omega(X), p = 1$

(3) $i_X\omega = \omega(Y_1,...,Y_{p-1}),\ Y_1,...,Y_{p-1} \in \chi(M)$ bu durumda $i_X\omega \in \wedge^{p-1}(M)$ olur.

Euler-Lagrange vektör alanı: n reel boyutlu bir M manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde $\phi_L = -dd_J L$ kapalı 2 -form ve $\chi(TM)$, TM üzerindeki vektör alanlarının cümlesi ve $(\chi(TM))^*$, TM üzerindeki 1-formların cümlesi olsun. Bu durumda; $TM_\phi : \chi(TM) \to \chi(TM)^*$ izomorfizmi için $i_{X_L}\phi_L = dE_L$ eşitliğini sağlayan bir tek X_L vektör alanı vardır ki bu vektör alanına Euler-Lagrange vektör alanı denir.

Lagrange sistem: TM tanjant demet, ϕ_L kapalı 2-form, X_L Euler-Lagrange vektör alanı, E_L L ye bağlı enerji fonksiyonu olmak üzere (TM,ϕ_L,X_L) veya (TM,ϕ_L,E_L) üçlüsüne Lagrange sistem adı verilir.

Euler-Lagrange denklemleri: m-reel boyutlu bir M manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde lokal koordinatlar (q^i,v^i), $1 \le i \le m$ olsun. L Lagrange fonksiyonu E_L L ye bağlı enerji fonksiyonu ve X_L Euler-Lagrange vektör alanı olmak üzere $i_{X_L}\phi_L = dE_L$ eşitliğinden $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q^i} = 0$ denklemleri bulunur. Bu denklemlere Euler-Lagrange denklemleri denir.

Dual hemen hemen tanjant yapı: m-reel boyutlu bir manifold M ve M nin kotanjant demeti T^*M olsun. T^*M üzerinde $J^{*2} = 0$ eşitliğini sağlayan ve rank $J^* = m$ ile verilen T^*M üzerindeki $(1,1)$ tipinden J^* tensör alanına T^*M üzerinde hemen hemen tanjant yapı denir.

Liouville form: n-reel boyutlu bir manifold M ve M nin kotanjant demeti T^*M olsun. T^*M üzerinde J^* hemen hemen tanjant yapı ve ω 1-form olsun. M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar (q^i), $1 \le i \le m$ ve T^*M üzerinde lokal koordinatlar (q^i, p_i) olmak üzere ω 1-formu için T^*M üzerinde lokal olarak $\lambda_M = J^*\omega$ ile verilen λ_M ye Liouville form adı verilir.

Hamilton fonksiyonu: (M,ϕ) simplektik manifold olsun. $H : M \to R$ ile verilen ve

L ye karşılık gelen H enerji fonksiyonuna Hamilton fonksiyonu denir.

Hamilton vektör alanı: M bir simplektik manifold ve $H : M \to R$, M üzerinde bir Hamilton enerji olsun. $\chi(M)$, M üzerinde vektör alanların cümlesi ve $\chi(TM)^*$, M üzerindeki 1-formların cümlesi olsun. Bu durumda $M_\phi : \chi(M) \to \chi(TM)^*$ izomorfizm dönüşümü $i_{X_H}\phi = dH$ biçiminde tanımlanmak üzere M üzerinde bir tek X_H vektör alanı vardır ki bu vektör alanına H Hamilton enerjiyle Hamilton vektör alanı denir.

Hamilton sistem: M bir manifold, ϕ kapalı 2-form, X_H Hamilton vektör alanı olmak üzere (M, ϕ, X_H) veya (M, ϕ, H) üçlüsüne Hamilton sistem denir.

Hamilton denklemleri: (M, ϕ), $2n$-reel boyutlu simplektik manifold ve M üzerinde lokal koordinatlar (q^i, p^i), $1 \leq i \leq m$ olsun. H Hamilton fonksiyon X_H Hamilton vektör alanı olmak üzere $i_{X_H}\phi = dH$ eşitliğinden $\dfrac{dp^i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}$, $\dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p^i}$ şeklinde elde edilen denklemlere Hamilton denklemleri adı verilir.

Einstein toplam kuralı: $\sum_{j=1}^{n} a_j x^j$ ifadesindeki gibi bir indis (bir kez üstte bir kez altta olmak üzere) iki kez tekrarlanırsa $\sum$ işaretini kaldırıp sadece $a_j x^j$ yazarak, indise alması mümkün değerleri vermek suretiyle elde edilen, bütün terimlerin toplanması kabulüne Einstein toplam kuralı adı verilir.

Kesitsel eğrilik: Bir p noktasında M manifoldunun iki lineer bağımsız u_i ve v_i tanjant vektörleri tarafından gerilen (u, v) yüzeyine teğet bir Riemann manifoldunun iki boyutlu geodezik alt manifoldunun Gauss eğriliği, kesitsel eğrilik olarak adlandırılır ve K ile gösterilir. $p \in M$ için u_i ve v_i ortogonal birim vektörler olmak üzere (u, v) yüzeyinde kesitsel eğrilik;

$$K = \frac{R_{hijk} u^h v^i u^j v^k}{\left(g^{hk} g^{ij} - g^{hj} g^{ik}\right) u^h v^i u^j v^k}$$

dir.

Sabit eğrilik: p noktasında K kesitsel eğriliği (u, v) yüzeyinden bağımsızsa $R_{hijk} = K\left(g^{hk} g^{ij} - g^{hj} g^{ik}\right)$ için M manifoldu, p de sabit eğriliklidir denir. n boyutlu bir bağlantılı Riemann manifoldunun $K(p)$ kesitsel eğriliği $n > 2$ için her bir p noktasında bütün yüzeylerden bağımsızdır, o zaman $K(p)$ mutlak sabittir ve bu yüzden M manifoldu sabit eğriliklidir.

Uzay form: M manifoldunun kesitsel eğriliği (u,v) yüzeyinin bütün noktalarında sabitse sabit eğrilikli bir manifold veya bir uzay form olarak adlandırılır.

Kompleks uzay form: c sabit holomorfik kesitsel eğrilikli n-boyutlu bir Kähler manifolduna bir kompleks uzay formu denir.

Kähler uzay form: M Kähler manifoldunun kesitsel eğriliği (u,v) yüzeyinin bütün noktalarında sabitse sabit eğrilikli bir Kähler manifoldu veya bir Kähler uzay form olarak adlandırılır.

Parakompleks uzay form: c sabit para-holomorfik kesitsel eğrilikli n-boyutlu bir para-Kähler manifolduna bir parakompleks uzay formu denir.

Para-Kähler uzay form: M para-Kähler manifoldunun kesitsel eğriliği (u,v) yüzeyinin bütün noktalarında sabitse sabit eğrilikli bir para-Kähler manifoldu veya bir para-Kähler uzay form olarak adlandırılır.

İzometrik dönüşüm: $\boldsymbol{K}$ kesitsel eğriliği 0 ise $R_{hijk}=0$dır ve M manifoldu üzerinde lokal koordinat sistemi $\left(x^{1'},...,x^{n'}\right)$ olmak üzere $g^{ij'}$metrik tensörünün bütün bileşenleri sabittir. Dolayısıyla M nin her koordinat komşuluğu, Öklid uzayının belli bir tanım kümesi üzerinde, izometrik bir dönüşüm tanımlar denir. Tersine M nin her bir koordinat komşuluğu, Öklid uzayının belli bir tanım kümesi üzerinde izometrik bir dönüşüm tanımlıyorsa $R_{hijk}=0$ sağlanır.

BÖLÜM 3

MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Matematiksel Modelleme

Matematiksel model ya da dinamik model, bir sistemin matematik diliyle ifade edilmesidir. Bir matematiksel model oluşturma süreci matematiksel modelleme olarak adlandırılmaktadır. Bilim adamlarının dünyayı daha iyi bir şekilde anlamak ve karşılaşılan sorunlara en iyi şekilde çözüm bulmak için herşeyi matematiksel terimlerle ifade edilmesine matematiksel modelleme denir. Değişkenlerdeki değişikliği gösteren matematiksel ifadeler diferansiyel denklemler olarak adlandırılır.

Karmaşık olayların matematiksel ifadelere aktarabilmesi için çok iyi tanımlamalara ihtiyaç vardır, bu tanımlamalarla birlikte matematiksel bir ifadeye dönüştürülebilir. Matematiksel modelleme yapabilmek için üstün bir matematik bilgisi ve tecrübe gerekmektedir çünkü modelleme ile en kısa ve en ekonomik çözüm üretilmelidir.

Matematiksel modellemenin amacı; gerçek dünyanın farklı yönlerini tahmin etmek, açıklamak, tanımlamak ve anlamaktır. Bu yolla eski mısırlılar toprak problemlerini çözmek, bu topraklar için su temini problemini halletmek için geometriyi, astronomlarda gezegenlerin hareketlerini hatasız tahmin etmek için matematiksel modellemeyi kullandılar

Matematiksel modelleme, gerçek dünya durumlarının, beklentilerinin bir kısmını temsil etmek üzere seçilen bir veya birden fazla matematiksel oluşumların veya aralarındaki ilişkilerin birleşimidir (Niss, 1988). Matematiksel modelleme gerçek hayat içinde yapılandırılmamış problemlere hayatın uygulamasını gerektirir (Galbraith ve Catworthy, 1990). Profesyonel matematik ve okul matematiğindeki bu süreç; algoritmik bir süreç değil, problem durumunu formüle etmeyi içeren zorlayıcı bir yapıya rağmen, uygun değişkenleri seçme, bu değişkenler arasındaki bağlantıyı ortaya çıkarma, bu değişkenler ve bağlantılara bağlı olarak matematiksel bir model ortaya koyma ve bu model ve uygulamaların test edilmesi sürecidir ve bir sanattır (Burghes, 1980; Evans, 1980; Galbraith, 1987).

Matematiksel modellemeyi kurabilmek için sırasıyla problemin belirlenmesi, problemin analizi, model analizi, modelsel becerilerin geliştirilmesi, matematiksel modelleme becerileri, değişkenlerin tanımlanması gerekmektedir. Bu aşamaların sonunda uygun bir matematiksel model kurulur.

3.2. Euler-Lagrangian Matematiksel Modelleme

Lagrangian mekaniği enerjinin korunumu ile momentumun korunumunun birleştirilmesiyle klasik mekaniğin yeniden formüle edilmesidir. Fransız matematikçi

Joseph-Louis Lagrange tarafından 1788'de tanımlandı.

M n-boyutlu bir manifold ve M üzerindeki tanjant demeti(manifoldu) TM dir. M manifoldu üzerindeki fonksiyon $F(M)$, M manifoldu üzerindeki vektör alanı $\chi(M)$ ve M manifoldu üzerindeki 1-form $\Lambda^1(M)$ kurulur. M manifoldunun koordinatı (q^i) ve TM tanjant demetinin koordinatı $\left(q^i, \dot{q}^i\right)$ dir.

Lagrangian fonksiyonu $L: TM \to R$ ye $L = T - P$ şeklinde ifade edilir. Buradaki T kinetik enerjiyi ve P potansiyel enerjiyi sembolize eder.

TM tanjant manifoldu üzerindeki özel bir vektör alanı ξ, simplektik 2-form ϕ_L ile gösterilir ve $\phi_L = -dd_F L$ dir.

M manifoldu üzerinde kurulan TM tanjant demeti üzerindeki mekanik sisteminin, L ye ilişkin enerji fonksiyonun E_L ile ifade edilir. M manifoldu üzerinde kurulan (TM, π, M) tanjant demeti üzerinde Liouville vektör alanı $V = F(\xi)$ şeklinde ifade edilir burada F tanjant, kompleks veya parakompleks yapı olabilir $(F: TM \to TM)$. Buradan E_L enerji fonksiyonu $E_L = V(L) - L$ şeklinde elde edilir.

Lagrange fonsiyonunun dinamik formalizmi $i_\xi \phi_L = dE_L$ şeklinde ifade edilir. TM tanjant manifold, ϕ_L simplektik 2-form ve ξ vektör alanı ile beraber (TM, ϕ_L, ξ) üçlüsü Lagrangian mekanik sistem olarak adlandırılır. Dinamik denklemin temsil ettiği manifold yapısının üzerine kurulan dinamik sisteme ait Euler-Lagrange denklem formatı $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$ şeklindedir.

3.3. Hamiltonian Matematiksel Modelleme

Hamiltonian mekaniği klasik mekaniğin yeniden formüle edilmesidir ki İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından 1883’de tanımlandı.

M n-boyutlu bir manifold ve M üzerindeki kotanjant demeti T^*M dir. T^*M kotanjant demetinin koordinatı (q^i, p^i), burada $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p^i$ ' dir.

Hamiltonian fonksiyon $H: T^*M \to R$ ye $H = T + P$ şeklinde ifade edilir, buradaki T kinetik enerjiyi sembolize ederken P potansiyel enerjiyi sembolize eder.

T^*M kotanjant manifold üzerindeki vektör alanı X ile gösterilirken, kotanjant demeti üzerindeki simplektik form ϕ ile gösterilir ve $\phi = -d\lambda$ dir. Buradaki λ Lioville formu ifade eder ve $\lambda = F^*(w)$ şeklindedir $\left(F^* : T^*M \to T^*M\right)$. Burada F^* dual yapısı tanjant(tam), kompleks veya parakompleks olabilir. Ayrıca w 1-formdur.

Hamilton fonksiyonunun dinamik formalizmi $i_X \phi = dH$ şeklinde ifade edilir. T^*M kotanjant manifold, ϕ simplektik 1-form ve X vektör alanı ile beraber (T^*M, ϕ, X) üçlüsü Hamiltonian mekanik sistem olarak adlandırılır. Dinamik denklemin temsil ettiği manifold yapısının üzerine kurulan dinamik sisteme ait Hamilton denklemlerinin formatı

$\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$, $\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}$ şeklindedir.

3.4. Lagrangian ve Hamiltonianların Benzerlikleri ve Farklılıkları

Lagrange mekaniğine benzer şekilde Hamilton denklemleri de klasik mekanikten faydalanarak bize yeni bir yol sağlar.

Hamilton metodu Lagrangian metodundan farklı olarak, n boyutlu koordinat uzayı üzerinde 2.mertebeden denklemler yerine 1. mertebeden denklemleri ifade eder.

Hamiltonian metodu Lagrangian mekaniğinden ortaya çıkmıştır. Ancak simplektik uzay kullanılarak Lagrangian mekaniğine başvurulmadan formüle edilebilir.

Genellikle, Hamilton denklemleri belirli bir sorunu çözmede daha kolay bir yolu vermez. Aksine, Hamilton mekaniği klasik mekaniğin genel yapısı ile derinden bağlantılıdır ve kuantum mekaniği ile de tümüyle ilişkilidir. Bu alanların yanısıra diğer bilim alanları ile de bağlantıya sahiptir.

3.5. Holomorfik Fonksiyon

Holomorf fonksiyonlar karmaşık analizin temel çalışma araçlarından biridir. Bu fonksiyonlar karmaşık düzlemin yani C'nin açık bir altkümesinde tanımlı, bu altkümedeki her noktada karmaşık anlamda türevli ve aldığı değerler yine C içinde olan fonksiyonlardır. Bu koşul normal gerçel türevlilikten daha güçlüdür. Daha derin anlamda, holomorf fonksiyon sonsuz kere türevlenebilir ve Taylor serisi ile tanımlanabilir. Her ne kadar daha geniş anlamda (gerçel, karmaşık veya daha genel bir çerçevede) fonksiyonun tanım kümesi içindeki her noktanın komşuluğunda fonksiyonun Taylor serisine eşit olması anlamına gelse de, analitik fonksiyon teriminin holomorf fonksiyon terimi yerine de kullanıldığı bolca yer vardır. Analitik fonksiyonlar sınıfının karmaşık analizde holomorf fonksiyonlar sınıfı ile aynı olması karmaşık analizde önemli bir teoremdir. Holomorf fonksiyonlara bazen düzenli fonksiyonlar dendiği de olmaktadır. Karmaşık düzlemin tümünde holomorf olan fonksiyona tam fonksiyon adı verilir. "a noktasında holomorf olma" terimi a noktasında türevli manasına gelmekle beraber aynı zamanda karmaşık düzlemde a noktası etrafındaki belli bir açık disk içindeki her noktada türevli anlamına da gelmektedir.

3.6. Finsler Metriği ve Finsler Manifoldu

M ' nin n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifoldu M^n olsun. M 'nin üzerindeki metrik yapıları alalım. Bizim burada söz konusu olan C^∞-diferansiyellenebilirliktir. M 'nin tanjant demetini TM ile ve kotanjant demetini de T^*M ile gösterelim.

$\tau : TM \to M$ ve $T_x M = \tau^{-1}(x), \forall x \in M$

M üzerindeki vektör alanlarının uzayını da $\chi(M)$ ile gösterelim. $\Gamma(TM)$, tanjant demetinin kesit uzayıdır. TM nin T^0M sıfır kesiti $0_X \in T_X M$ sıfır vektörlerinin birleşimidir. Eğer M 'nin koordinatları $(x^1, x^2, ..., x^n)$ ise $T_X M$ 'nin bazı $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(x) = \partial_i(x), 1 \le i \le n\right\}$ olup TM deki baz $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i, 1 \le i \le n\right\}$ olur. Bu koordinat sistemi için, tanjant demeti, $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(x) \in T_x M$ tanjant vektörüne bağlı olarak $(x, y) = (x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ kanonik koordinatları ile verilir. Bir $U \in \chi(M)$ vektör alanı $U(x) = \sum_{i=1}^{n} u^i(x)\partial_i(x)$ şeklinde yazılır.

TM 'deki $(x, y) = (x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ kanonik koordinatların bir seti cinsinden her koordinat fonksiyonuna eşdeğer olan F için $\overline{\frac{\partial}{\partial x^i}}F = \frac{\partial}{\partial y^i}F$ 'dir, böylece $\overline{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \frac{\partial}{\partial y^i}$ olur (Rademacher, 2004).

Tanım: M , n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold ve F fonksiyonu üzerinde Finsler uzayı $F^n = (M, F)$ şeklinde tanımlanır. M üzerindeki bir Finsler metriği

$F : TM \to R$

şeklinde sürekli bir dönüşümdür ve bu dönüşüm T^0M sıfır kesiti dışında C^∞ olup aşağıdaki üç şartı sağlar:

F1) F pozitif olarak homojendir. Yani $\forall X \in TM$ tanjant vektörü ve $\forall \mu \in R$ pozitif sayısı için;

$F(\mu X) = \mu F(X)$'dir.

F2) $F(X) = 0 \Rightarrow X = 0$'dır.

F3) Legendre şartını sağlar: Yani $\forall V \in T_x M \ (V \neq 0)$

$$g_V : T_x M \times T_x M \to R$$

$$g_V(X,Y) = \langle X,Y \rangle_V = \frac{1}{2} \overline{XY} F^2(V) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[F^2(V + sX + tY) \right]_{s=0,t=0}$$

şeklinde tanımlı simetrik bilineer form pozitif tanımlıdır (Rademacher, 2004).

Sonuçlar: 1) TM deki $(x,y) = (x^1,...,x^n, y^1,...,y^n)$ kanonik koordinatların ikilisi cinsinden

$$g_{ij}(x,y) = g_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x,y)$$

O halde Legendre şartından $g_{ij}(x,y)_{1 \le i,\, j \le n}$ simetrik matrisinin $y \neq 0$ için pozitif tanımlı olduğu çıkartılır.

2) $\forall \mu > 0$ için $F(\mu X) = \mu F(X)$ olduğundan

$$\begin{aligned} g_V(V,V) = \langle V,V \rangle_V &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[F^2(V + sV + tV) \right]_{s=0,t=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[F^2(V + +tV) \right]_{t=0} \\ &= F^2(V) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Koordinatlar cinsinden;

$$\frac{1}{2} y^i y^j \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} F^2(x,y) = F^2(x,y)$$'dir (Rademacher, 2004).

Tanım: Bir (M,F) Finsler manifoldu üzerinde Legendre transformasyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$L_F : TM \to T^* M$$

$$V \to L_F(V): TM \to R$$

$$(W) \to L_F(V)(W) = g_V(V,W)$$

$L_F(V)$yi, g_V metriğine göre Vyi dual 1-form olarak görülür (Rademacher, 2004).

3.6.1. Finsler yapısı

$F^n = (M,F)$ Finsler uzayı, $\widetilde{TM} = TM - \{0\}$ manifoldu üzerinde hemen hemen Kähler uzayı olarak tanımlanır. $F^n = (M,F)$ Finsler uzayında N_j^i Cartan nonlinear konneksiyonunu dikkate alalım ve sırasıyla TM ve T^*M üzerinde hemen hemen kompleks yapılar F ve F^*tanımlayalım:

$$F\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y^i},\ F\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \frac{\delta}{\delta x^i} \tag{3.1}$$

$$F^*\left(dx^i\right) = -\delta y^i,\ F^*\left(\delta y^i\right) = dx^i$$

F^n Finsler uzayının F temel fonksiyonu $\widetilde{TM}$ üzerinde iyi tanımlıdır ve $F^2 = -I$ ‘dır.

Tanjant uzayının baz yapısı olarak $\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ ve aynı manifold üzerinde kotanjant uzayının baz yapısı olarak $\left(dx^i, \delta y^i\right)$ alınacaktır.

g_{ij} temel tensörünün Sasaki-Matsumoto lifi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j .$$

Sonuç olarak, G metriği F^n Finsler uzayının $\widetilde{TM}$ üzerinde Riemann metriğidir ve yatay ve dikey dağılımları birbirleriyle ortogonaldir.

Teorem: (i) *(G,F)* çifti $\widetilde{TM}$ üzerinde hemen hemen Hermitian yapıdır.

(ii) (*G*,*F*) hemen hemen simplektik 2_form ve hemen hemen Hermitian yapı ile ilişkilidir $\theta = g_{ij}(x,y)\delta y^i \otimes dx^j$.

(iii) $H^{2n} = \left(\widetilde{TM}; G, F\right)$ uzayı hemen hemen Kähler uzayı, F^n Finsler uzayının *F* temel fonksiyonu ile elde edilir.

Tanım: $H^{2n} = \left(\widetilde{TM}; G, F\right)$ uzayı F^n Finsler uzayının hemen hemen Kähler modeli denir. $T\widetilde{M}$ üzerinde aşağıdaki tensör uzayı belirtilir

$$\overset{0}{G} = g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j + \frac{a^2}{\|y\|^2} g_{ij}(x,y)\delta y^i \otimes \delta y^j, \forall (x,y) \in T\widetilde{M}.$$

F^n Finsler uzayının F temel fonksiyonunun $T\widetilde{M}$ homejen lifi. $a > 0$ sabit ve $\|y\|^2$ Liouville vektör alanının normunun karesidir.

$$\|y\|^2 = g_{ij}(x,y)y^i y^j = y_i y^j = F^2(x,y) \text{ ile } y_i = g_{ij}(x,y)y^j = \frac{\partial F^2}{\partial y^i}.$$

F hemen hemen kompleks yapısı (3.1)'de tanımlanır. Burada $\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right)(1,...,n)$ 1-homojen vektör alanıdır.

Bu hemen hemen kompleks yapısını yeni bir şekilde tanımlanabilir. $\overset{0}{F} : \chi(TM) \to \chi(TM)$,

$$\overset{0}{F}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = -\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial}{\partial y^i}, \ \overset{0}{F}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \frac{a}{\|y\|}\frac{\delta}{\delta x^i}, \ (i = 1, n)$$

$$\overset{0}{F}{}^*(dx^i) = -\frac{\|y\|}{a}\delta y^i, \ \overset{0}{F}{}^*(\delta y^i) = \frac{a}{\|y\|}dx^i.$$

- $\overset{0}{F}$, $T\widetilde{M}$ üzerinde $(1,1)$ tipinde tensor alanıdır.
- $\overset{0}{F} \circ \overset{0}{F} = -I$.
- $\overset{0}{F}$, F^n finsler uzayının F temel fonksiyonuna bağlıdır.
- $\overset{0}{F} : \chi(T\widetilde{M}) \to \chi(T\widetilde{M})$, $\chi(T\widetilde{M})$ vektör alanı formunun homojenlik özelliklerini korur.
- $\overset{0}{F}$ kompleks yapıdır.
-

3.7. Finsler Manifoldu Üzerinde Euler-Lagrange Denklemleri

M, n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold ve $\overset{0}{F}: TM \to R$ fonksiyonu üzerindeki Finsler uzayı $F^n = \left(M, \overset{0}{F}(x,y)\right)$ şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki aksiyomları sağlar:

$\overset{0}{F}$, $T\widetilde{M} = TM - \{0\}$ manifoldu üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon ve $\overset{0}{F}$, $\pi : TM \to M$ projeksiyonunun sıfır kesiti üzerinde süreklidir.

M manifoldu üzerinde kurulan (TM, π, M) tanjant demeti üzerindeki Euler-Lagrange denklemlerini elde edeceğiz. TM nin koordinatları (x^i, y^i) ile verilsin. TM nin yatay dağılımı HTM, düşey dağılımı VTM olup bunların yerel bazları $\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right), (i = 1,...,n)$dir. Bu durumda $\overset{0}{F}$ hemen hemen kompleks yapısının da bu bazlar üzerindeki etkisi aşağıdaki gibidir.

$$\overset{0}{F}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = -\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \overset{0}{F}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \frac{a}{\|y\|}\frac{\delta}{\delta x^i} \tag{3.2}$$

ξ semisprayi aşağıdaki şekilde kurulur:

$$\xi = X^i \frac{\delta}{\delta x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}, X^i = \dot{x}^i = y^i, Y^i = \dot{y}^i = \overset{..}{x}^i . \tag{3.3}$$

M manifoldu üzerinde kurulan (TM, π, M) tanjant demeti üzerinde Liouville vektör alanı, $V = \overset{0}{F}(\xi)$ tarafından belirlenen vektör alanıdır ve aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$V = \overset{0}{F}(\xi) = -X^i \frac{\|y\|}{a}\frac{\partial}{\partial y^i} + Y^i \frac{a}{\|y\|}\frac{\delta}{\delta x^i} \tag{3.4}$$

M manifoldu üzerinde kurulan (TM, π, M) tanjant demeti üzerindeki mekanik sisteminin, L ye ilişkin enerji fonksiyonunun $E_L = \overset{0}{F}(L) - L$ ile hesaplandığını biliyoruz.

$i_{\overset{0}{F}}$ opertörü

$$i_{\overset{0}{F}} : \wedge^2 TM \to \wedge^1 TM \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlıdır ve $\overset{0}{F}$ ile iç çarpım ya da bazen iç çarpım operatörü ya da $\overset{0}{F}$ tarafından verilen kontraksiyon operatörü olarak adlandırılır. $d_{\overset{0}{F}}$ dış türevi. $\overset{0}{F}$ tanjant yapısı olmak üzere;

$$d = \frac{\delta}{\delta x^i} dx^i + \frac{\partial}{\partial y^i} \delta y^i . \Rightarrow d_{\overset{0}{F}} = \overset{0}{F}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) dx^i + \overset{0}{F}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \delta y^i \tag{3.6}$$

$$d_{\overset{0}{F}} = -\frac{\|y\|}{a} \frac{\partial}{\partial y^i} dx^i + \frac{a}{\|y\|} \frac{\delta}{\delta x^i} \delta y^i ,\; d_{\overset{0}{F}} : \overset{0}{F}(TM) \to \wedge^1 TM. \tag{3.7}$$

şeklinde verilir.

$\overset{0}{F}$ ile verilen hemen hemen kompleks yapısı için bu kapalı tanjant demeti formu $\phi_L = -dd_{\overset{0}{F}} L$ ile elde edilen kapalı 2_formdur.

Bir düzgün, reel, sonlu boyutlu M manifoldu üzerinde kurulan (TM, π, M) tanjant demeti üzerindeki ϕ_L kapalı tanjant demeti formu simplektik yapı olduğundan aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\phi_L &= -dd_{\overset{0}{F}} L = -d\left(-\frac{\|y\|}{a} \frac{\partial}{\partial y^i} dx^i + \frac{a}{\|y\|} \frac{\delta}{\delta x^i} \delta y^i \right) \\
&= \left(-\frac{\delta}{\delta x^j} dx^j - \frac{\partial}{\partial y^j} \delta y^j \right)\left(-\frac{\|y\|}{a} \frac{\partial}{\partial y^i} dx^i + \frac{a}{\|y\|} \frac{\delta}{\delta x^i} \delta y^i \right) \\
\phi_L &= \frac{\|y\|}{a} \frac{\delta}{\delta x^j} \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} \right) dx^j \wedge dx^i - \frac{a}{\|y\|} \frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i} dx^j \wedge \delta y^i \\
&+ \frac{\|y\|}{a} \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} \delta y^j \wedge dx^i - \frac{a}{\|y\|} \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\frac{\delta L}{\delta x^i} \right) \delta y^j \wedge \delta y^i \quad .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$i_\xi \phi_L = dE_L$ dinamik denkleminin sol tarafı hesaplandığında,

$$\phi_L(\xi)=\begin{pmatrix}\frac{\|y\|}{a}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)dx^j\wedge dx^i-\frac{a}{\|y\|}\frac{\delta^2 L}{\delta x^j\delta x^i}dx^j\wedge\delta y^i\\+\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial^2 L}{\partial y^j\partial y^i}\delta y^j\wedge dx^i-\frac{a}{\|y\|}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)\delta y^j\wedge\delta y^i\end{pmatrix}\left(X^i\frac{\delta}{\delta x^i}+Y^i\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

$$=\frac{\|y\|}{a}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)X^i\delta_i^j dx^i-\frac{\|y\|}{a}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)X^i 1dx^j+\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial^2 L}{\partial y^j\partial y^i}X^i 0dx^i-\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial^2 L}{\partial y^j\partial y^i}X^i 1\delta y^j$$

$$-\frac{a}{\|y\|}\frac{\delta^2 L}{\delta x^j\delta x^i}X^i\delta_i^j\delta y^i+\frac{a}{\|y\|}\frac{\delta^2 L}{\delta x^j\delta x^i}X^i 0dx^j-\frac{a}{\|y\|}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)X^i 0\delta y^i+\frac{a}{\|y\|}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)X^i 0\delta y^j$$

$$+\frac{\|y\|}{a}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)Y^i 0dx^i-\frac{\|y\|}{a}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)Y^i 0dx^j+\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial^2 L}{\partial y^j\partial y^i}Y^i\delta_i^j dx^i-\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial^2 L}{\partial y^j\partial y^i}Y^i 0\delta y^j$$

$$-\frac{a}{\|y\|}\frac{\delta^2 L}{\delta x^j\delta x^i}Y^i 0\delta y^i+\frac{a}{\|y\|}\frac{\delta^2 L}{\delta x^j\delta x^i}Y^i 1dx^j-\frac{a}{\|y\|}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)Y^i\delta_i^j\delta y^i+\frac{a}{\|y\|}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)Y^i 1\delta y^j$$

bulunur.

E_L enerji fonksiyonu hesaplandığında aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}E_L&=V(L)-L\\&=-X^i\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial L}{\partial y^i}+Y^i\frac{a}{\|y\|}\frac{\delta L}{\delta x^i}-L.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Bu E_L enerji fonksiyonunun diferansiyeli alınırsa aşağıdaki denklem karşımıza çıkar:

$$\begin{aligned}dE_L&=\left(\frac{\delta}{\delta x^j}dx^j+\frac{\partial}{\partial y^j}\delta y^j\right)\left(-X^i\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial L}{\partial y^i}+Y^i\frac{a}{\|y\|}\frac{\delta L}{\delta x^i}-L\right)\\&=-\frac{\|y\|}{a}X^i\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)dx^j-\frac{\|y\|}{a}X^i\frac{\partial^2 L}{\partial y^j\partial y^i}\delta y^j+\frac{a}{\|y\|}Y^i\frac{\delta^2 L}{\delta x^j\delta x^i}dx^j\\&+\frac{a}{\|y\|}Y^i\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)\delta y^j-\frac{\delta L}{\delta x^j}dx^j-\frac{\partial L}{\partial y^j}\delta y^j\end{aligned}\tag{3.10}$$

$\phi_L(\xi)=dE_L$ 'den

$$\frac{\|y\|}{a}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)X^i\delta_i^j dx^i - \frac{\|y\|}{a}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)X^i 1dx^j + \frac{\|y\|}{a}\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}X^i 0dx^i - \frac{\|y\|}{a}\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}X^i 1\delta y^j$$
$$-\frac{a}{\|y\|}\frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i}X^i\delta_i^j\delta y^i + \frac{a}{\|y\|}\frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i}X^i 0dx^j - \frac{a}{\|y\|}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)X^i 0\delta y^i + \frac{a}{\|y\|}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)X^i 0\delta y^j$$
$$+\frac{\|y\|}{a}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)Y^i 0dx^i - \frac{\|y\|}{a}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)Y^i 0dx^j + \frac{\|y\|}{a}\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}Y^i\delta_i^j dx^i - \frac{\|y\|}{a}\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}Y^i 0\delta y^j$$
$$-\frac{a}{\|y\|}\frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i}Y^i 0\delta y^i + \frac{a}{\|y\|}\frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i}Y^i 1dx^j - \frac{a}{\|y\|}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)Y^i\delta_i^j\delta y^i + \frac{a}{\|y\|}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)Y^i 1\delta y^j$$

$$=$$

$$-\frac{\|y\|}{a}X^i\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)dx^j - \frac{\|y\|}{a}X^i\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta y^j + \frac{a}{\|y\|}Y^i\frac{\delta^2 L}{\delta x^j \delta x^i}dx^j$$
$$+\frac{a}{\|y\|}Y^i\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)\delta y^j - \frac{\delta L}{\delta x^j}dx^j - \frac{\partial L}{\partial y^j}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\frac{\|y\|}{a}\frac{\delta}{\delta x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)X^i dx^i - \frac{a}{\|y\|}\frac{\delta^2 L}{\delta x^i \delta x^i}X^i\delta y^i + \frac{\|y\|}{a}\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^i}Y^i dx^i \\ -\frac{a}{\|y\|}\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)Y^i\delta y^i + \frac{\delta L}{\delta x^i}dx^i + \frac{\partial L}{\partial y^i}\delta y^i = 0\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\left[\frac{\|y\|}{a}X^i\frac{\delta}{\delta x^i} + \frac{\|y\|}{a}Y^i\frac{\partial}{\partial y^i}\right]\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)dx^i + \frac{\delta L}{\delta x^i}dx^i \\ -\left[\frac{a}{\|y\|}X^i\frac{\delta}{\delta x^i} + \frac{a}{\|y\|}Y^i\frac{\partial}{\partial y^i}\right]\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)\delta y^i + \frac{\partial L}{\partial y^i}\delta y^i = 0\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{\|y\|}{a}\xi\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)dx^i + \frac{\delta L}{\delta x^i}dx^i - \frac{a}{\|y\|}\xi\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)\delta y^i + \frac{\partial L}{\partial y^i}\delta y^i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\|y\|}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)dx^i + \frac{\delta L}{\delta x^i}dx^i - \frac{a}{\|y\|}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)\delta y^i + \frac{\partial L}{\partial y^i}\delta y^i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\|y\|}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)dx^i + \frac{\delta L}{\delta x^i}dx^i = 0, -\frac{a}{\|y\|}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)\delta y^i + \frac{\partial L}{\partial y^i}\delta y^i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\|y\|}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right) + \frac{\delta L}{\delta x^i} = 0,\ \frac{a}{\|y\|}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial y^i} = 0 \qquad \textbf{(3.11)}$$

elde edilir.

3.8. Finsler Manifoldu Üzerinde Hamilton Denklemleri

M manifoldu üzerinde kurulan $\left(T^*M, \pi, M\right)$ kotanjant demeti üzerinde Hamilton denklemlerini elde edeceğiz. T^*M nin koordinatları $\left(x^i, y^i\right)$ ile verilsin. T^*M nin yatay dağılımı HT^*M, düşey dağılımı VT^*M olup bunların yerel bazları $\left(dx^i, \delta y^i\right)$ dir. Bu durumda $\overset{0}{F}{}^*$ hemen hemen kompleks yapısının bu bazlar üzerindeki etkisi aşağıdaki gibidir:

$$\overset{0}{F}{}^*\left(dx^i\right) = -\frac{\|y\|}{a}\delta y^i, \quad \overset{0}{F}{}^*\left(\delta y^i\right) = \frac{a}{\|y\|}dx^i. \tag{3.12}$$

$$w = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\|y\|^2}x^i dx^i + \frac{1}{2}y^i \delta y^i \tag{3.13}$$

ile verilsin. $\lambda = \overset{0}{F}{}^*(w)$ eşitliğiyle hesaplanan λ Liouville formu T^*M 'de 1- formdur.

$$\begin{aligned} \lambda &= \overset{0}{F}{}^*(w) = \frac{1}{2}x^i \overset{0}{F}{}^*\left(dx^i\right) + \frac{1}{2}y^i \overset{0}{F}{}^*\left(\delta y^i\right) \\ \lambda &= -\frac{1}{2}\frac{a}{\|y\|}x^i \delta y^i + \frac{1}{2}\frac{a}{\|y\|}y^i dx^i \\ -\lambda &= \frac{1}{2}\frac{a}{\|y\|}x^i \delta y^i - \frac{1}{2}\frac{a}{\|y\|}y^i dx^i. \end{aligned} \tag{3.14}$$

$d(-\lambda) = \phi$ kotanjant form kapalı olduğundan T^*M 'de bir simplektik yapıdır.

$$\begin{aligned} d(-\lambda) &= \frac{1}{2}\frac{a}{\|y\|}dx^i \wedge \delta y^i - \frac{1}{2}\frac{a}{\|y\|}\delta y^i \wedge dx^i \\ &= \frac{1}{2}\frac{a}{\|y\|}dx^i \wedge \delta y^i + \frac{1}{2}\frac{a}{\|y\|}dx^i \wedge \delta y^i \\ &= \frac{a}{\|y\|}dx^i \wedge \delta y^i \\ d(-\lambda) &= \phi = \frac{a}{\|y\|}dx^i \wedge \delta y^i. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Farzedelim ki H Hamilton enerjiye bağlı X_H Hamilton vektör alanı aşağıdaki eşitlikle verilsin:

$$X_H = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\delta}{\delta y^i} \tag{3.16}$$

$$i_{X_H}\phi = dH$$
$$\phi(X_H) = dH$$
$$\phi(X_H) = \left(\frac{a}{\|y\|} dx^i \wedge \delta y^i\right)\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\delta}{\delta y^i}\right) \tag{3.17}$$
$$= \frac{a}{\|y\|} X^i \delta y^i - \frac{a}{\|y\|} Y^i dx^i .$$

Şimdi ise H Hamilton fonksiyonunun diferansiyelini hesaplayalım:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\delta H}{\delta y^i} \delta y^i \tag{3.18}$$

(3.17) ve (3.18) denklemlerini $\phi(X_H) = dH$ dinamik denklem gereği eşitlersek kotanjant uzay formunda Hamilton vektör alanı aşağıdaki elde edilir:

$$\frac{a}{\|y\|} X^i \delta y^i - \frac{a}{\|y\|} Y^i dx^i = \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\delta H}{\delta y^i} \delta y^i \tag{3.19}$$

$$X_H = \frac{\|y\|}{a} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\|y\|}{a} \frac{\delta H}{\delta y^i} \frac{\delta}{\delta y^i} \text{ olur.} \tag{3.20}$$

X_H Hamilton vektör alanının integral eğrisini

$$\alpha : I \subset R \to T^* M$$

eğrisi olduğunu kabul edersek, tanım gereği

$$X_H(\alpha(t)) = \dot{\alpha}, t \in I \tag{3.21}$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\alpha(t) = \left(x^i(t), y^i(t)\right) \text{ olur.}$$

Bu durumda α(t) aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dy^i}{dt}\frac{\delta}{\delta y^i} \quad \textbf{(3.22)}$$

Yukarıdaki (3.20), (3.21) ve (3.22) denklemleri göz önüne alınırsa Hamilton denklemleri olarak adlandırılan denklemler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\dot{\alpha}(t) = X_H(\alpha)$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\|y\|}{a}\frac{\delta H}{\delta y^i}, \frac{dy^i}{dt} = -\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial H}{\partial x^i}. \quad \textbf{(3.23)}$$

3.9. Dinamik Denklemlerin Çözümü

Tanım: İkinci basamaktan, iki bağımsız değişkenli hemen-hemen lineer kısmi diferansiyel denklemin genel formu:

$$P(x,y)z_{xx} + Q(x,y)z_{xy} + R(x,y)z_{yy} + S(x,y,z,z_x,z_y) = 0 \quad \textbf{(3.24)}$$

formundadır.

$$\Delta(x,y) = [Q(x,y)]^2 - 4P(x,y)R(x,y) \quad \textbf{(3.25)}$$

olacak şekilde Δ operatörü tanımlanır ve aşağıdaki tanımlanan durumlara göre verilen denklemin tipi belirlenir.

1. $\Delta(x,y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik,
2. $\Delta(x,y) = 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda parabolik,
3. $\Delta(x,y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik,

tiptendir denir (Koca, 2001).

Yukarıda yapılan hesaplamalar sonucunda mekanik sistemlere ait matematiksel modelleme ile uzayda hareket eden cisimlerin hareketlerinin yörüngelerini gösteren (3.11), (3.23) diferansiyel denklemleri elde edilmiştir. Bu diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri Maplesoft Maple v12.0 bilgisayar programı kullanılarak bulunabilir. Aşağıda denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için kodlar ve kapalı çözümler verilmiştir.

3.9.1. (3.11) denkleminin çözümü

$$(i)\ \frac{\|y\|}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)+\frac{\delta L}{\delta x^i}=0\quad (ii)\ \frac{a}{\|y\|}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial y^i}=0 \tag{3.26}$$

denklemleri incelendiğinde

(i) için $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=\dfrac{\|y\|}{a}$ ve $R(x,y)=0$ ve $\Delta(x,y)=\left[\dfrac{\|y\|}{a}\right]^2=1>0$

(ii) için $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=\dfrac{a}{\|y\|}$, $R(x,y)=0$ ve $\Delta(x,y)=\left[\dfrac{a}{\|y\|}\right]^2=1>0$

olduğundan denklemler hiperboliktir. Bu denklemlerin çözümü için Maple bilgisayar programı ile yazılan kodları ve çözümleri aşağıdaki gibidir.
(i) ve (ii) nin kodları farklı olup çözümlerinin tipleri aynıdır.

$$(i)\ dif:=\frac{\|y\|}{a}*diff\,(diff\,(L_1(x,y,t),y),t)+diff\,(L_1(x,y,t),x)=0 \tag{3.27}$$

$$(ii)\ dif:=\frac{a}{\|y\|}*diff\,(diff\,(L_2(x,y,t),x),t)+diff\,(L_2(x,y,t),y)=0 \tag{3.28}$$

(i) ve (ii) nin kapalı çözümü aşağıdaki gibidir.

$$cevap:=\{L1(x,y,t)=F_1(x)*F_2(y)*F_3(t)\} \tag{3.29}$$

$$cevap:=\{L2(x,y,t)=F_1(x)*F_2(y)*F_3(t)\} \tag{3.30}$$

şeklindedir. Buradaki fonksiyonlar;
(i) için;

$$\begin{aligned}&diff\,(F_1(x),x)=c_1*F_1(x),\\&diff\,(F_2(y),y)=c_2*F_2(y),\\&diff\,(F_3(t),t)=-\frac{c_1*F_3(t)*a}{c_2*\|y\|}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

(ii) için;

$$diff\,(F_1(x),x)=c_1*F_1(x),$$

$$diff\,(F_2(y),y) = c_2 * F_2(y), \tag{3.32}$$

$$diff\,(F_3(t),t) = -\frac{c_1 * F_3(t) * \|y\|}{c_2 * a}.$$

Bu ifadeler çözülürse;

$$c_1 = \frac{\ln F_1(x)}{x} + c_4, \quad c_2 = \frac{\ln F_2(y)}{y} + c_5, \quad \ln F_3(t) = \frac{\dfrac{\ln F_2(y)}{y} + c_5}{\dfrac{\ln F_1(x)}{x} + c_4} + c_3, \tag{3.33}$$

bulunur.

(i) ve (ii) ye ait denklem sisteminin kod ve çözüm aşağıdaki gibidir.

$$sistem := \begin{bmatrix} \dfrac{\|y\|}{a} * diff\,(diff\,(L_1(x,y,t),y),t) + diff\,(L_1(x,y,t),x) = 0 \\ \dfrac{a}{\|y\|} * diff\,(diff\,(L_2(x,y,t),x),t) + diff\,(L_2(x,y,t),y) = 0 \end{bmatrix}; \tag{3.34}$$

$$cevap := \left\{ \begin{matrix} L(x,y,t) = F_3(t) + \exp(-t) * F_4(ay + \|y\|x) \\ + F_5(t) + \exp(t) * F_6(ay - \|y\|x) \end{matrix} \right\} \text{‘dir.} \tag{3.35}$$

3.9.2. (3.23) denkleminin çözümü

$$(iii)\ \frac{dx^i}{dt} = \frac{\|y\|}{a}\frac{\delta H}{\delta y^i},\ (iv)\ \frac{dy^i}{dt} = -\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial H}{\partial x^i}, \tag{3.36}$$

(iii) ve (iv) denklem sisteminin çözümü;

$$sistem := \begin{bmatrix} \dfrac{\|y\|}{a} * diff\,(H(x,y,t),x) = diff\,(x(t),t);, \\ -\dfrac{\|y\|}{a} * diff\,(H(x,y,t),y) = diff\,(y(t),t); \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

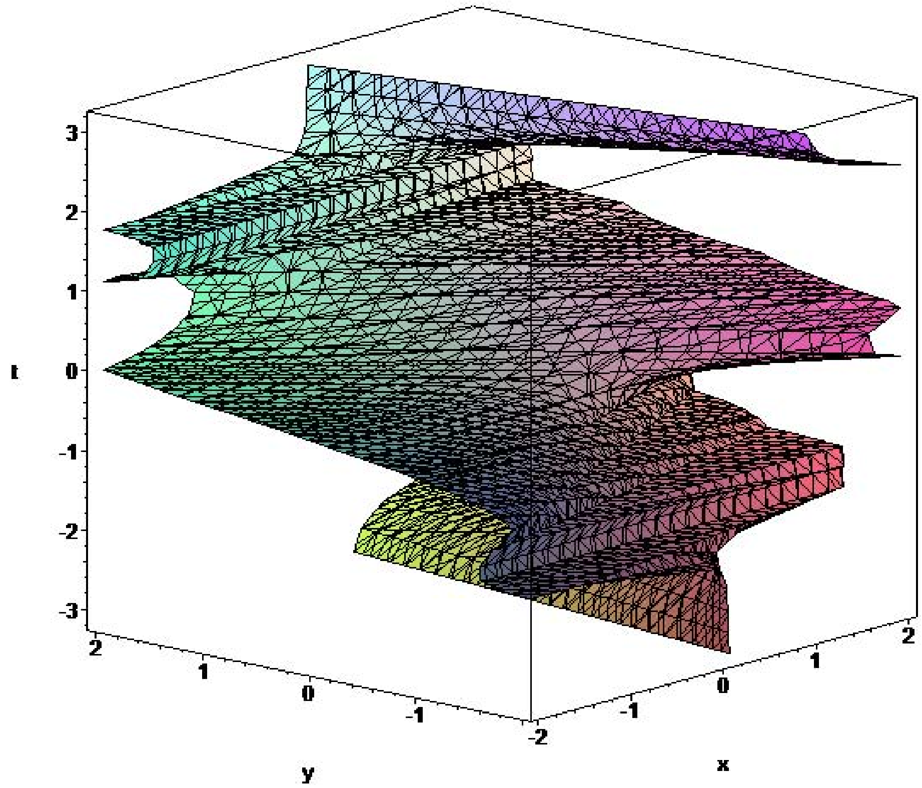
Yukarıdaki sistemin çözümünün yapılabilmesi için özel olarak $x(t) = t^2 + \sin(t)$ ve $y(t) = \tan(t)$ seçilecektir.

Cevap:={H(x,y,t)=8*(x*t+t*x*cos(2*t)+y-F1(t)+3/4*x*cos(t)+1/4*x*cos(3*t))
*(t+1/2*cos(t))*a/(4*t*cos(2*t)+3*cos(t)+cos(3*t)+4*t)/ $\|y\|$ }

bulunur. Yukarıdaki çözümde özel olarak F1(t)=t, $\|y\| = 1$ ve a=1 alınmıştır.

Elde edilen çözümün grafiğini Maple programı ile çizelim.

```
with(plots);
implicitplot3d((8*(x*t+t*x*cos(2*t)+y- t+3/4*x*cos(t)+1/4*x*cos(3*t)) *(t+1/2*cos(t)))
/1/(4*t*cos(2*t)+3*cos(t)+cos(3*t)+4*t),x=-2...2,y=-2...2,t=-Pi...Pi,numpoints=10000);
```



Şekil 1. Sisteminin özel değerler verilerek çizilen grafiği.

BÖLÜM 4

ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Araştırma Bulguları

Bu çalışmada mekanik sistemler için dinamik hareket denklemlerini matematiksel modelleme ile elde ettik. Ayrıca bu denklem ve denklem sistemlerinin kapalı çözümleri Maplesoft programı kullanılarak bu çalışmada elde ettik. Bu çalışmada elde edilen veriler aşağıda özetlenmiştir.

I) Yapılan ilk modellemede $\overset{0}{F}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)=-\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial}{\partial y^i}$ ve $\overset{0}{F}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=\frac{a}{\|y\|}\frac{\delta}{\delta x^i}$ hemen hemen kompleks holomorfik yapıları seçilmiştir. M manifold, $\overset{0}{F}$ holomorfik yapısı ve g metriği ile beraber temsil edilen $\left(M,\overset{0}{F},g\right)$ hemen hemen Kähler manifoldlarıdır. Ayrıca $\phi_L=-dd_{\overset{0}{F}}L=-d\left(d_{\overset{0}{F}}L\right)$ simplektik 2-form ve özel bir vektör alanı olan semispray $\xi=X^i\frac{\delta}{\delta x^i}+Y^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ ile (TM,ϕ_L,ξ) hemen hemen Kähler manifoldları için mekanik sistemdir. $\phi_L(\xi)=dE_L$ dinamik denklem kullanılarak tanjant demetinin Kähler manifoldları üzerinde Euler-Lagrange hareket denklemleri $\frac{\|y\|}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)+\frac{\delta L}{\delta x^i}=0$, $\frac{a}{\|y\|}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta x^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial y^i}=0$ şeklinde elde edilmiştir.

II. Ayrıca hemen hemen Kähler manifoldları $\left(M,\overset{0}{F}{}^{*},g\right)$ üzerinde kotanjant uzay ile $\left(T^*M,\phi,X_H\right)$ mekanik sistemi $\overset{0}{F}{}^{*}\left(dx^i\right)=-\frac{\|y\|}{a}\delta y^i$, $\overset{0}{F}{}^{*}\left(\delta y^i\right)=\frac{a}{\|y\|}dx^i$, hemen hemen kompleks holomorfik yapıları, $w=\frac{1}{2}\frac{a^2}{\|y\|^2}x^i dx^i+\frac{1}{2}y^i\delta y^i$, $\phi=-d\lambda$ ve $\lambda=\overset{0}{F}{}^{*}(w)$ seçilerek $\phi(X_H)=dH$ dinamik formalizm kullanılıp hemen hemen Kähler manifoldları $\left(M,\overset{0}{F}{}^{*},g\right)$ üzerinde kotanjant uzay ile $\left(T^*M,\phi,X_H\right)$ mekanik sisteminin Hamilton hareket denklemleri $\frac{dx^i}{dt}=\frac{\|y\|}{a}\frac{\delta H}{\delta y^i}$, $\frac{dy^i}{dt}=-\frac{\|y\|}{a}\frac{\partial H}{\partial x^i}$ elde edilmiştir.

III. Mekanik sistemlere ait diferansiyel denklemler ve sistemlerin kapalı çözümleri Maplesoft Maple v12.0 programı kullanılarak bulunmuştur ve özel değerler verilerek grafik (şekil 1) çizilmiştir.

4.2. Tartışma

Günümüzde mekanik sistemlerin dinamik hareket tarzını analiz etmek için Euler-Lagrangian ve Hamiltonian modelleme çok yaygın ve basit bir metot olarak kullanılmaktadır..

Yapılan bu çalışma ile potansiyel enerjisini harekete geçiren cisimlerin uzay içindeki göreceliliği dikkate alarak hareketin aşamalarını izah etmeye yönelik Euler-Lagrange (3.11) ve Hamilton (3.23) hareket denklemleri elde edilmiştir.

Bulunan denklemler Finsler manifoldları üzerinde farklı fiziksel alanlarda karşılaşılan sorunların çözümünde kullanılmaktadır.

Literatürde, uzayda hareket eden cisimlerin doğrusal yörüngeleri açıklayan denklemler bulunmuştur.

Bu çalışma ile uzayda fiziksel kanun ve prensipler göz önüne alınarak hareket eden cisimlerin tanımlandığı yörüngelerinde herhangi bir değişmeyi gösteren hareketlerinin en genel denklemleri elde edilmiştir.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Lagrangian ve Hamiltonian modelleri çok önemli araç olarak ortaya çıkar çünkü onlar mekanik sistemler modelini tanımlamak için basit metot oluştururlar.

Finsler uzayı üzerindeki Lagrange ve Hamilton denklemleri de bu uzaydaki cisimlerin doğrusal yörüngelerini açıklayan denklemleri bulmamızı sağlamıştır.

Daha fazla araştırma için, fiziğin elektrik, manyetik ve kuantumun yerçekimi alanı ve klasik mekaniğin problemleri ile uğraşmak için Lagrangian ve Hamiltonian mekanik denklemleri elde edilir.

KAYNAKLAR

Antonelli P.L. ve Miron R., 1996. Lagrange and Finsler Geometry. *Applications to Physics and Biology*, Kluwer Academic Publishers, FTPH 76.

Baleanu D. ve Vacaru S. I., 2010. Fractional Almost Kähler–Lagrange Geometry, arXiv:1006.5535v3 [math-ph].

Bogoslovsky G. Y., 2009. Finsler Geometry and Relativity Theory, http://www.hyper-complex.ru/finsler_geometry.php?lang=eng.

Crampin M., 1981. On the Differential Geometry of Euler-Lagrange Equations and The Inverse Problem of Lagrangian Dynamics, *J. Phys. A-Math. and Gen.*, 10: 2567–2575.

Chern S. S., 1996. Finsler Geometry Is Just Riemannian Geometry without the Quadratic Restriction, http://www.math.iupui.edu/~zshen/Finsler/history/chern.html.

De Leon M. ve Lacomba E., 1989. Lagrangian Submanifolds and Higher Order Mechanical Systems, *J. Phys. A-Math. and Gen*., 22: 3809-3820.

De Leon M. ve Rodrigues P., R., 1986. Almost Tangent Geometry and Higher Order Mechanical Systems, Differential Geometry and Its Applications, Proceeding of the Conference, August 24-30, Brno, Czechoslovakia.

De Leon M. ve Rodrigues P., R., 1987. Second-Order Differential Equations and Non-Conservative Lagrangian Systems, *J. Phys. A. Math. Gen*., 20: 5393-5396.

De Leon M. ve Rodrigues P., R., 1989. Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics, *North-Holland Mathematics Studies*, Vol.152, Elsevier, Amsterdam.

Hacısalihoğlu H., 2003. *Diferansiyel Geometri I*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 3. Baskı.

Hacısalihoğlu H., 2003. *Diferansiyel Geometi II*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 4. Baskı.

http://kadiri.bilkent.edu.tr/mat/mat.donem.odev/aykutaydin.matematiksekmodelleme.pdf.

Kasap Z. ve Tekkoyun M., 2013. Mechanical Systems on Almost Para/Pseudo-Kähler-Weyl

Manifolds, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 10: 1-8.

Kern J., 1974. *Lagrange Geometry*, Archiv der Mathematik (Basel) 25: 438–443.

Koca K., 2001. *Kısmi Türevli Denklemler*, Gündüz Eğitim Yayıncılık, Ankara.

Matsumoto M., 1986. *Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces*, Kaisisha: Shingaken, Japan.

Miron R. ve Anastasiei M., 1997. Vector Bundles. Lagrange spaces. *Applications to the Theory of Relativity, Balkan Press*, Bucuresti.

Miron R., Hrimiuc D., Shimada H. ve Sabau S. V., 2001. *The Geometry of Hamilton and Lagrange Spaces*, Hingham, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, P.L.7.

Oproiu V., 1980. Some Properties of the Tangent Bundle Related to the Finsler Geometry, *Proced. Nat. Sem. Finsler Spaces*, Brasov, 195-207.

Oproiu V., 1985. A Riemannian Structure in Lagrange Geometry, *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, 55 (2): 1-20.

Oproiu V., 2001. A Kähler Einstein Structure on the Tangent Bundle of a Space Form, *IJMMS*, 25: 3 183–195.

Rademacher H. B., 2004. Nonreversible Finsler Metrics of Positive Flag Curvature Riemann Finsler Geometry, *MSRI Publications*, 50: 261-302.

Rund H., 1959. Historical Remarks on Finsler Geometry, University of Natal, http://www.math.iupui.edu/~zshen/Finsler/history/rund.html.

Tekkoyun M., 2005, On Para-Euler Lagrange and Para-Hamiltonian Equations, *Physics Letters A*, 340: 7-11.

Tekkoyun M. ve Yayli Y., 2011. Mechanical Systems on Generalized on Quaternionic Kähler Manifolds,, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 8: 1419–1431.

Udrişte C. ve Neagu M., 1999. Extrema of p-Energy on Constant Curvature Finsler Spaces, *Differential Geometry-Dynamical Systems*, 1: 10-19.

Ulus N., 2008. Finsler Uzayları (Yüksek Lisans Tezi), Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya.

Vacaru S. I., 2008. Finsler and Lagrange Geometries in Einstein and String Gravity, arXiv:0801.4958v1 [gr-qc].

Vacaru S. I., 2011. Lagrange-Ricci Flows and Evolution of Geometric Mechanics and Analogous Gravity on Lie Algebroids, arXiv:1108.4333v2 [math-ph].

Wikipedia, http://tr.wikipedia.org/wiki/Holomorf_fonksiyon.

ŞEKİLLER **Sayfa No**

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Oğuzhan ÇELİK
Doğum Yeri : Alanya
Doğum Tarihi : 15-08-1986

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Pamukkale Üniversitesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI -Diğer

M. Tekkoyun ve O. Çelik, Mechanical Systems on an Kähler Model of a Finsler Manifold, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 10, 1320018 (2013)

b) Bildiriler -Uluslararası -Ulusal

Mechanical Systems on an Kähler Model of a Finsler Manifold,Uluslararası X. Geometri Sempozyumu, Balıkesir Üniversitesi, 13-16 Haziran 2012

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : -

İLETİŞİM

Mahmutlar Kasabası, Yeni mahalle, Fevzi çakmak caddesi, No:17, Alanya/Antalya
E-posta Adresi : oguzhanefe07@hotmail.com