

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPLANABİLİR MARKOV ZİNCİRİ

Enes FİLİZ

Yüksek Lisans Tezi
İstatistik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN

OCAK-2014

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPLANABİLİR MARKOV ZİNCİRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Enes FİLİZ
(Enstitü No:102133101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

Tezin Savunulduğu Tarih:

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN (F.Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü.)

Doç. Dr. Sinan ÇALIK (F.Ü.)

OCAK-2014

ÖNSÖZ

Bana araştırma olanağı sağlayan ve bu konuda çalışmaya yönlendiren, çalışmalarımın her aşamasında bana yakın ilgi ve yardımlarının esirgemeyen ve verdiği önerilerle beni yönlendiren değerli hocam sayın Doç. Dr. Mehmet Gürcan'a ve yine çalışmalarım esnasında her türlü yardımı esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Nurhan Halisdemir, Doç. Dr. Mahmut Işık ve Doç. Dr. Sinan Çalık'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Enes FİLİZ

OCAK-2014

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TABLolar LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE METOT	3
2.1 Stokastik Süreçler ile İlgili Temel Karakteristikler	3
2.2 Markov Zinciri	4
2.3 Markov Zincirinin Başlangıç Dağılımı	6
2.4 Zincirin Durağan Dağılımı	6
3. BULGULAR	8
3.1 Toplanabilir Markov Zinciri	8
3.2 Yutucu Durumların Belirlenmesi.....	12
3.3 Binom Süreci ve Toplanabilir Markov Özelliği	13
3.4 Toplanabilir Markov Zincirinin Durağan Dağılımı	16
3.5. İki Durumlu Toplanabilen Markov Zinciri.....	19
3.6 Toplamlı Geçiş Olasılıkları	23
3.7 Sürekli Parametrelili Zincirlerde Toplanabilir Markov Özelliği	24
3.8 Uygulama.....	26
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	39
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	42

ÖZET

TOPLANABİLİR MARKOV ZİNCİRİ

Toplanabilir Markov zinciri başlığı altında hazırlanan bu çalışmada stokastik süreçler içerisinde önemli bir yer tutan kesikli ve sürekli zamanlı Markov zincirleri ele alınmış, zincirin Markov özelliği toplanabilir Markov özelliği olarak incelenmiştir. Bu tanımlama incelenen zincire yeni bir takım özellikler kazandırmıştır. Çalışmanın bulgular kısmında bu özellikler incelenerek yeni kazanımlar ortaya konulmuştur.

İncelemeye ilaveten yapılan uygulamada sürekli parametrelili bir stokastik süreç olan geliş akımı ele alınarak bunun yardımıyla özel bir toplanabilir Markov zinciri tanımlanmış ve türetilen hipotetik veriden elde edilen hesaplamalar tablo halinde sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Markov zinciri, Geçiş olasılığı, Poisson geliş akımı, stokastik servis sistemi.

SUMMARY

SUMMABLE MARKOV CHAIN

It summable Markov chain in this study was prepared under Markov chain stochastic processes holds an important place in discrete and continuous time markov chains is discussed, this chain Markov property of the summable Markov property were analyzed. This definition has been examined chain processes for a new properties. The study findings at the recent gains have been demonstrated by examining these properties.

In addition to the views, the application which continuously develops a stochastic process parametrized by considering current that summable Markov chain with the help of a special Markov chain is identified and obtained from hypothetical data derived calculations are tabulated.

Key words: Markov chain, Transition probability, Poisson flow, The stochastic service system.

TABLolar LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1. Müşterilerin Geliş Anlarına Ait Veriler.....	27
Tablo 1. Devamı.....	28
Tablo 1. Devamı.....	29
Tablo 2. Birinci Gözlem Aralığı	32
Tablo 3. İkinci Gözlem Aralığı	33
Tablo 4. Üçüncü Gözlem Aralığı	34
Tablo 5. Dördüncü Gözlem Aralığı.....	34
Tablo 6. Beşinci Gözlem Aralığı	34
Tablo 7. Altıncı Gözlem Aralığı	35
Tablo 8. Yedinci Gözlem Aralığı.....	35
Tablo 9. Sekizinci Gözlem Aralığı.....	35
Tablo 10. 9-uncu Gözlem Aralığı	36
Tablo 11. 10-uncu Gözlem Aralığı	36
Tablo 12. 11-uncu Gözlem Aralığı	36
Tablo 13. 12-inci Gözlem Aralığı	37
Tablo 14. 13-üncü Gözlem Aralığı	37
Tablo 15. 14-üncü Gözlem Aralığı	37
Tablo 16. 15-inci Gözlem Aralığı	38
Tablo 17. 16-ıncı Gözlem Aralığı	38
Tablo 18. Hesaplanan Olasılık Değerleri ve Gözlem Durumları.....	40

1. GİRİŞ

Olasılık teorisinin ciddi anlamda ilk yazılı eseri şüphe yok ki Bernoulli'nin ölümünden sonra basılarak yayınlanan kitabıdır. Bernoulli bu eserinde olasılık teorisinin temel kavramları olan tesadüfi değişken kavramından binom toplamına kadar pek çok önemli kavram açıklanmaktadır. Özellikle binom toplamı gibi art arda toplanan tesadüfi değişkenlerde ortaya çıkan önemli bir özellik kısmi toplam dizilerinin herhangi bir andaki sabit değerinin biliniyor olmasıdır. Şayet dizinin bilinen bir kısmi toplamı mevcutsa dizinin bundan sonraki ilerleyişinde bilinen sabit değerden öncesinin herhangi bir etkisinin olmayışı istatistiksel anlamda büyük önem taşımaktadır. Bu özelliğin farkına ilk varan veya bu özelliği akademik anlamda ilk ortaya koyan kişi Andrey Markov'dur [3,9].

Markov özelliği olarak da bilinen bu özellik istatistik teorisine çok büyük yenilikler kazandırmış gerek uygulamalarda gerekse birçok teorik işlemde büyük yenilikler sağlamıştır. İstatistik biliminin duayenlerinden sayılan Markov 1856-1922 yılları arasında yaşamış olan Rus bilim adamıdır. Markov St. Petersburg üniversitesinde eğitim görmüş ve uzun yıllar burada Pafnuty Chebyshev in öğrencisi olarak çalışmalarına devam etmiştir.

Aslen ilk çalışmaları diferansiyel denklemler alanında olan Markov un ünlenmesine ve bugün bile büyük bir ilgi ile anılmasına neden olan çalışması kendi adıyla anılan Markov özelliğidir. Bu özellik stokastik süreçler içerisinde Markov süreçleri olarak adlandırılan önemli bir sınıfı ortaya çıkartmıştır.

Günümüze kadar geçen zaman diliminde Markov süreçleri birçok alanda başarıyla kullanılmıştır. Bunların başında İstatistiksel karar problemleri, ekonometrik parametrelerin hesaplanabilmesi ve yorumlanması, olasılık teorisi, stokastik hizmet sistemleri gibi alanlar gelmektedir [2,5].

Markov süreçlerinin Markov'dan sonra da gelişmesine neden olan araştırmacılardan en önemlisi Andrey Nicolaevich Kolmogorov dur. 1903-1987 yılları arasında yaşayan Rus bilim adamı Kolmogorov, Markov'dan sonra bu konu ile ilgilenen en önemli şahsiyetlerden birisidir. Hatta o derece ki bilim dünyasında Kolmogorov olmasaydı Markov'un teorisi bu kadar ilerleyemezdi diyenler bile zaman zaman ortaya çıkmıştır. Her ne olursa olsun her ikisi de hiç şüphe yok ki bilim dünyasının en önemli şahsiyetlerindedir. Markov on dokuzuncu yüzyılın sonu ve yirminci yüzyılın başına damgasını vurmuş bir araştırmacı iken Kolmogorov ise neredeyse yirminci yüzyılın tamamına adını yazdırmış bir bilim adamıdır. Kolmogorov un çalışmalarının azımsanamaz

önemli bir kısmında da Boris Viladimiroviç Gnedenko ve A. A. Shahbazov un isimleri bulunmaktadır. Bu önemli iki bilim adamı da Kolmogorov ve sonrasında çalışmalarını aynı yönde devam ettirerek Markov süreçlerinin günümüze yani yirmi birinci yüzyıla kadar uzanmasını sağlamışlardır.

Çalışmamızda Markov özelliğine önemli bir katkı sayılabilecek bir kabullenim yapılmaya çalışılmıştır. Sürecin sabit bir andaki bilinen durumu yerine sürecin sabit bir andaki bilinen ardışık durumlarının toplamı alınmıştır. Sabit bir andaki sürecin bilinen durumu süreç için önemli bir özelliktir. Ancak bu durum gerçekleşemediği zaman sürecin incelenmesi güçleşmektedir. Bu özellik biraz gevşetilerek ardışık toplam durumun bilinmesi de sürece önemli özellikler kazandırabilmektedir. Bu özellik bir nevi sürecin belli bir andaki durumunun kesin bilinmesi yerine bu durumun bir Fuzzy sayısı olarak alınmasına da benzetilebilir. Ancak Fuzzy sayısı ile tesadüfi değişken arasında güçlü bir ilişki bulunduğundan sabit değerın Fuzzy sayısı olarak alınması Markov özelliğine beklenenden çok fazla bir şey kazandıramamaktadır. İleriki zamanlarda yapılan çalışmalarda bu özelliklerin bilime neler kazandırabileceğini görebilmek için bugün beklemek zorundayız.

2. MATERYAL VE METOT

2.1 Stokastik Süreçler ile İlgili Temel Karakteristikler

Stokastik süreçler teorisi genel olarak on dokuzuncu yüzyılın sonları ve yirminci yüzyılın tamamında etkili bir araştırma konusu olsa da stokastik süreç olasılık tarihinin en başından beri var olan bir tanımlamadır. En genel haliyle bir stokastik süreç aynı olasılık uzayında tanımlı tesadüfi değişkenlerin bir dizisidir. Dizinin indis kümesini I ve durum uzayını S ile gösterirsek bu iki kümenin kesikli veya sürekli olmasına göre stokastik süreçler dört ana gruba ayrılmaktadır. İndis kümesi kesikli olduğunda sürece kesikli zamanlı süreç indis kümesi sürekli olduğunda ise sürece sürekli parametrelili süreç adı verilmektedir. Sürecin durum uzayı kesikli olduğunda ise sürece zincir adı verilmektedir. Bu durumda stokastik zincirler kesikli zamanlı ve sürekli zamanlı olmak üzere iki ana gruba ayrılır.

Kesikli zamanlı bir stokastik süreç,

ve sürekli parametrelili bir süreç ise,

şeklinde gösterilmektedir [4,6].

Bir stokastik sürecin beklenen değeri diziyi oluşturan genel terimli tesadüfi değişkenin beklenen değeridir. Bu beklenen değer dizinin indisine bağlı olarak değer alabileceği gibi bu indisten bağımsız olarak da elde edilebilmektedir. Şayet bir stokastik süreç için sürecin genel teriminin beklenen değeri indisten bağımsız olarak elde edilebiliyorsa sürece ortak bir beklenen değere sahiptir denir. Aynı anlayış varyans içinde geçerlidir. Sürecin kovaryansı indisten bağımsız olabileceği gibi bazı süreçler için indisler arası farka da bağlı olarak elde edilebilmektedir. Bu tip süreçlere kovaryans durağan süreçler adı verilmektedir. Bu tip süreçler stokastik süreçlerin harmonik incelemelerinde oldukça önemli yer tutmaktadır [10].

Stokastik zincirlerin en önemli parametreleri de şartlı geçiş olasılıklarıdır. Süreç gözlemlenen bir durumdan başka bir duruma geçiş yaparken mümkün geçiş durumlarının olasılıklarının belirlenmesi zincirin devamı için önemli bir parametredir.

Sürekli parametrelili bir stokastik zincirin belli anlardaki değerleri yardımıyla oluşturulan

kesikli zamanlı sürecine daldırılmış veya gömülü zincir adı verilmektedir [7,12].

Bir stokastik süreç için en önemli karakteristiklerin birisi de süreci oluşturan tesadüfi değişkenlerin bağımsız olup olmamaları, şayet bağımsız değilse artımlarının bağımsız olup olmamalarıdır. Artımları bağımsız olan stokastik süreçlere bağımsız artımlı süreçler denilir. Özellikle binom süreci ve tesadüfi yürüyüş bağımsız artımlı süreçlere önemli iki örnektir.

Stokastik süreçler teorisi alanında araştırma yapan önemli bilim adamlarının başında, Andrey Markov, William Feller, Andrey N. Kolmogorov, David G. Kendall, Boris Vladimirovich Gnedenko, Anatoly V. Skorokhot ve A. A. Shahbazov gibi araştırmacılar gelmektedir. Bu araştırmacılar arasında Andrey Markov'un önemi büyüktür. Stokastik zincirler arasında Markov özelliği olarak adlandırılan özelliğe sahip zincirlerin sınıfı Markov zincirleri olarak adlandırılmaktadır. Şimdi Markov zincirlerine ait birkaç önemli özelliği diğer bölümde verelim.

2.2 Markov Zinciri

Andrey Andreyevich Markov 1856-1922 yılları arasında yaşamış olan önemli bir araştırmacı ve bilim adamıdır. Markov stokastik sürecinin herhangi bir andaki durumunun bilinmesi şartıyla sürecin belli olan bu durumdan sonraki durumlarının önceki durumlarından bağımsız olduğunu kabul ederek stokastik süreçler içerisinde Markov zincirleri olarak adlandırılan yeni bir sınıf oluşturmuştur. Markov özelliği olarak da adlandırılan bu özellik keyfi gözlem anları olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir,

Bu şartlı olasılık Markov zincirinin geçiş olasılığı olarak adlandırılmaktadır. kesikli zamanlı Markov zincirlerinde bir adım geçiş olasılıklarından oluşturulan matrisi de bir adım geçiş matrisi adı verilmektedir,

Burada zincirin durumlarını göstermektedir. Bir adım geçiş olasılıkları adım sayısına bağlı olmadığında zincire homojen Markov zinciri denilmektedir. Reel uygulamalarda genellikle Markov zincirleri homojen geçiş olasılığına sahip olarak kabul edilmektedir.

Kesikli zamanlı Markov zincirlerinde bir adım geçiş olasılıklarının yanı sıra yüksek adımlı geçiş olasılıkları da oldukça önemlidir. Yüksek adımlı geçiş olasılıkları ile bir adım geçiş olasılıkları arasında aşağıdaki gösterilen ilişki mevcuttur,

Benzer şekilde iki adım geçiş olasılıklarından oluşan iki adım geçiş matrisi bir adım geçiş matrisinin karesinden elde edilebilmektedir. Sonuç olarak yüksek adımlı geçiş olasılıkları matrisi aşağıdaki şekilde parçalanabilmektedir,

Elde edilen bu eşitliğe Kolmogorov-Chapman denklemi adı verilmektedir [8].

2.3 Markov Zincirinin Başlangıç Dağılımı

kesikli zamanlı Markov zincirinin ilk değişkeni olan X_0 değişkeninin dağılımına zincirin başlangıç dağılımı denir. Başlangıç dağılımı zincirin mümkün durumları üzerinden aşağıdaki olasılık vektörü yardımıyla gösterilir,

Burada π_0 olasılığını temsil etmektedir. Bir Markov zincirinde başlangıç dağılımı ve zincirin bir adım geçiş matrisi belirlendiğinde zincirin tüm parametreleri rahatlıkla hesaplanabilir. Zincirin keyfi bir değişkeninin dağılımı başlangıç dağılımı cinsinden,

π_0 şeklinde elde edilebilmektedir. Reel uygulamalarda gözlenen stokastik sistemin başlangıç dağılımı farklı çalışma periyotlarında alınmış gözlemlerden elde edilmelidir. Tek bir çalışma periyodundan elde edilmiş verilerden sistemin başlangıç dağılımı belirlenememektedir.

2.4 Zincirin Durağan Dağılımı

Markov zincirlerinde önemli olan göstergelerden biriside zincirin limit ve durağan dağılımıdır. Markov zincirinin limit dağılımı her zaman mevcut olmayabilir. Ancak durağan dağılımı mutlaka mevcuttur. Limit dağılımının var olduğu durumlarda bu iki dağılım birbirlerine eşittir. Durağan dağılım Markov zincirinin belli bir adım sayısından sonra mevcut tesadüfi değişkenin dağılımıdır. Başlangıç dağılımı biliniyorken π_0 değişkeninin dağılımı başlangıç dağılımı ile bir adım geçiş matrisinin çarpımından elde edilmektedir. Aynı şekilde π_0 değişkeninin dağılımı da π_0 değişkeninin dağılımı ile bir adım geçiş matrisinin çarpımından elde edilmektedir. İşlem aynı şekilde devam ettirilerek

diğer değişkenlerin dağılımları bulunmaktadır. Bu şekilde dağılımlar elde edilirken belli bir adımdan sonra hesaplanan olasılık değerleri sabitleşecektir. Sabitleşen bu olasılık değerleri zincirin durağan dağılımını oluşturacaktır. Bu nedenle zincirin durağan dağılımı aşığıdaki denklem sisteminin çözümlünden elde edilir,

Reel sistemlerin analizinde sistemin durağan olması önemli bir özelliktir [1,2,7].

3. BULGULAR

3.1 Toplanabilir Markov Zinciri

kesikli parametrelili ve kesikli durum uzayına sahip bir stokastik süreç olsun. Toplanabilir Markov özelliği aşağıdaki şekilde tanımlanır,

Toplanabilir Markov özelliğini sağlayan stokastik süreci kısaca toplanabilir Markov zinciri olarak adlandıracağız. Markov özelliği ve toplanabilir Markov özelliği birbirlerinden farklı özellikler olup bu kısımda sadece Markov zincirleri sınıfında toplanabilir Markov özelliğini inceleyeceğiz.

Yukarıdaki tanımlamaya dayanarak toplanabilir Markov zincirinin bir adım geçiş olasılığını kısaca aşağıdaki şekilde göstereceğiz,

Toplanabilir Markov zincirinde ardışık herhangi iki durumun toplamı belirlenebildiğinde bundan önceki durumların şartlı olasılıklarda önemli olmadığını görüyoruz. Markov zincirleri ile toplanabilirlik özelliği birbiri ile mukayese edilemez. Markov özelliğinin toplanabilirlik özelliğini gerektirmediği gibi toplanabilir olma özelliği de Markov özelliğini gerektirmemektedir. Ancak buradaki incelemede toplanabilen Markov zinciri olma şartı Markov özelliği ile birlikte tanımlanmıştır. Şimdi aşağıda için olasılıkları arasındaki ilişkiyi belirten teoremi inceleyelim.

Teorem 1. Kesikli zamanlı toplanabilen Markov zinciri olsun. Bu durumda için olasılıkları arasında olmak üzere aşağıdaki ilişki mevcuttur,

Burada Markov zincirinin bir adım geçiş olasılığı ve , adım geçiş olasılığı olmak üzere eşitlik 'ye göre indirgenebilir olup aşağıdaki eşitlik yazılabilir,

İspat: İlk olarak toplanabilir Markov zincirinin geçiş olasılıkları arasında var olan ilişkiyi gösterelim,

İstenen sonuç elde edilmiş olur. Bu eşitlikte toplanabilir Markov zincirinin adım geçiş olasılığı adım geçiş olasılığı ve Markov zincirinin bir adım geçiş olasılığı yardımıyla ifade edilebilmektedir. Bu eşitlik 'ye göre tekrar yazılacak olursa aşağıdaki ifade elde edilir,

Benzer şekilde eşitlik devam ettirildiğinde istenen recurrent ilişki elde edilir.
İspatlanan teoremi için özel olarak yazacak olursak aşağıdaki ifade elde edilir,

Geçiş olasılıklarından meydana gelen bir adım geçiş matrisi durum uzayının iki elemanı olmak üzere geçiş matrisleri aşağıdaki şekilde gösterilebilir,

Burada ve Markov zincirinin sırasıyla bir adım ve adım geçiş matrisidir.

Toplanabilir Markov zincirinin bir adım geçiş matrisi Markov zincirinde olduğu gibi karesel bir matris değil, bunun aksine satır sayısı daha fazla olan dikdörtgen bir matris olacaktır. Markov zincirinin durum uzayı olmak üzere Markov zincirinde bir adım geçiş matrisinin boyutu nin eleman sayısı ile aynı olmasına karşın toplanabilir Markov zincirinde toplamının maksimum değeri durum uzayının eleman sayısının iki katına eşit olacağından bir adım geçiş matrisinin doğal olarak satır sayısı sütunlarının sayısının iki katı olacaktır. Böyle bir durum Markov zincirindeki bazı önemli hesaplamaların farklılaşmasını sağlayacaktır. Örnek olarak Markov zincirinde iki adım geçiş matrisi bir adım geçiş matrisinin karesinden elde edilebilirken toplanabilir bir Markov zincirinde bu durum mümkün olmayacaktır.

Şimdi toplanabilir Markov zincirinin geçiş olasılıklarını Markov zincirinin geçiş olasılıkları türünden ifade edelim.

Teorem 2. Kesikli zamanlı toplanabilen Markov zinciri olsun. Bu durumda için olasılığı olmak üzere aşağıdaki biçimde yazılabilir,

Burada ve olasılığıdır.

İspat: için olasılığını yazalım,

Bu eşitlik Teorem 1'in için elde edilen sonucunda kullanılacak olursa aşağıdaki denklem elde edilir,

Benzer şekilde Teorem 1'in ifadesi için kullanılacak olursa istenen elde edilir,

3.2 Yutucu Durumların Belirlenmesi

Kesikli zamanlı toplanabilen Markov zinciri olsun. Zincirin durum uzayı olmak üzere durumunun yutucu durum olabilmesi için durumuna düşen zincirin bu adımdan sonra bulunduğu durumdan çıkamaması gerekmektedir. Markov zincirinde böyle bir durum olasılığı ile gösterilmektedir. Ancak bu durum toplanabilir Markov zincirinde olasılıkları cinsinden ifade edilememektedir. şartlı olasılıkları mevcut durumundan durumuna geçme olasılığını göstermektedir. Toplanabilir Markov zincirinde mevcut durum zincirin ve -inci adımların toplamı olduğundan zincirin durumunda yutulması halinde ve -inci adımların toplamı olacaktır. Bunun aksine toplamın olduğunun bilinmesi her bir ardışık adımın

durumunda olmasını gerektirmemektedir. Buna göre toplanabilir Markov zincirinde bir adım şartlı geçiş olasılığının olması durumunun yutucu durum olmasını tanımlamamaktadır.

Toplanabilen bir Markov zincirinde durumunun yutucu durum olması için ve olasılıklarının bire eşit olması gerekli ve yeterlidir. Bu şartlar aynı zamanda ve olasılıklarının da bire eşit olmasını sağlamaktadır. Bu durumun tersi de doğrudur. ve olasılıklarının bire eşit olması ve olasılıklarının eşit olmasını gerektirir. durumunun yutucu durum oluşu bu olasılıkların aynı zamanda bire eşit olmasını gerektirmektedir. Bu Teorem 2'nin eşitliğinden de elde edilebilmektedir.

3.3 Binom Süreci ve Toplanabilir Markov Özelliği

- parametrelili binom süreci olsun. Bu durumda binom sürecinin bir adım geçiş olasılığı aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır,

tesadüfi değişkeninin durum uzayı olup bu değerleri alma olasılıkları, binom olasılıkları şu şekilde tanımlanmaktadır,

Buna göre başlangıç değişkeni olmak üzere başlangıç dağılımı,

şeklinde alınabilir. Aynı şekilde değişkeninin dağılımı,

şeklinde alınacaktır. Şimdi binom sürecinin ortak dağılımını aşağıdaki şekilde belirleyelim,

Benzer şekilde binom sürecinin olasılığını hesaplayalım,

Burada sayısı çift sayı olduğunda Bernoulli değişkeni değerini almak zorundadır. Tersine sayısı tek sayı olduğunda Bernoulli değişkeni değerini almak zorundadır. Buna göre binom sürecinin toplamı geçiş olasılıkları aşağıdaki formda elde edilebilir,



Buna göre geçiş matrisi Şu Şekilde yazılabilir,

Teorem 1'in sonucu kullanılacak olursa yüksek adım geçiş matrisleri aşağıdaki Şekilde olacaktır,

Benzer formda diğer adıma geçiş matrisleri de yazılabilir.

3.4 Toplanabilir Markov Zincirinin Durağan Dağılımı

Kesikli parametrelili ve kesikli durumlu bir stokastik süreçte en önemli karakteristiklerin birisi de durağan dağılımın belirlenmesidir. Stokastik zincirlere ait birçok uygulamada limit dağılımını yerine durağan dağılımı kullanmak daha kolay olmaktadır. Durağan dağılım uzun süre takip edilen stabilize olmuş bir stokastik sistemde sistemin durum olasılıklarının belirlenmesidir. Bir Markov zincirinde sistemin durumu başlangıç dağılımı ve geçiş olasılıkları yardımıyla belirlenebilmektedir. Bu özellikten dolayı bir Markov zincirinde durağan dağılım aşağıdaki denklem sisteminin çözümünden elde edilecektir,

Yeterince büyük belli bir adım sayısından sonra stokastik sürecin durum olasılıkları değişmeyecektir. Aynı şekilde toplanabilir bir Markov zincirinde de durağan dağılım belli bir adım sayısından sonra durum olasılıklarının sabitleşmesi ve değişmemesidir.

Toplanabilir Markov zincirinde bilinen durumlar π_j olasılıklarıdır. Markov zincirinin durağan dağılımını aşağıdaki şekilde gösterelim,

Buna göre durağan dağılımdan elde edilen π_j olasılıkları da toplanabilen Markov zincirinin durağan dağılımını belirleyecektir,

Bu eşitlikte π_j olasılıklarının yerine π_j durağan dağılım olasılıkları kullanılırsa adım sayısından bağımsız olarak aşağıdaki durum olasılıkları bulunur,

Şimdi olasılıklarının en küçük kareler tahminini veren aşağıdaki teoremi inceleyelim,

Teorem 3. Kesikli zamanlı toplanabilen Markov zinciri olmak üzere

denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir,

İspat. İlk önce

dağılım vektörünü, matrisi ve π bağı olarak aşağıdaki şekilde elde edelim,

Bu eşitlik her bir i için geçerli olduğundan bu sonucu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz,

Bu eşitlikte P matrisi karesel bir matris olmadığından ters matrisi bulunamamaktadır. Bu durumda eşitliğin her iki tarafını P^T matrisinin transpozu ile

çarparak hem denklem sistemini bozmamış hem de katsayı matrisini karesel hale getirmiş oluruz,

Bu durumda da A matrisi karesel olmasına karşılık tam ranklı olmadığından tersi bulunamamaktadır. $A^{-1}x = b$ eşitliğini asimptotik olarak aşağıdaki formda yazabiliriz,

Elde edilen iki denklemi taraf tarafa toplayalım ve istenen çözümü elde edelim,

x_1 dağılım vektörünün değeri x_2 vektörü ve A matrisi cinsinden elde edilebilmektedir. Ancak x_1 dağılım vektörü ve A matrisinin değeri belli iken x_2 vektörünün değeri bunlara bağlı olarak elde edilememektedir. İspatta kullanılan yöntem önemlidir. A matrisinin tersi mevcut değilken yani denklem sisteminin en küçük kareler çözümü bulunamıyorken,

A matrisinin tersi sayısal olarak elde edilebilmektedir.

3.5. İki Durumlu Toplanabilen Markov Zinciri

kesikli zamanlı ve durum uzayı olan toplanabilen Markov zinciri olsun. Bu durumda toplamsal geçiş matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir,

Geçiş olasılıkları sırasıyla şu şekilde belirlenecektir,

Buna göre toplamsal geçiş matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir,

Burada

olduğuna dikkat edilmelidir. İki durumlu Markov zincirinin bir adım geçiş matrisini aşağıdaki şekilde seçecek olursak,

Toplamsal bir adım geçiş matrisi,

şeklinde yazılır.

şimdi iki durumlu toplanabilen Markov zincirinin durağan olasılıklarını inceleyelim. Bunun için iki durumlu Markov zincirinin aşağıdaki durağan olasılıklarını kullanmalıyız,

ve iki durumlu Markov zincirinde belli bir adımdan sonra zincirin sıfır ya da bir durumunda olma olasılıklarını göstermektedir. Uygulamalarda reel sistemler gözlemlenirken sistemin çalışma disiplininin belli bir kurala oturmuş olması gerekmektedir. Bu tip sistemler durağan sistemlerdir. Durağan sistemlerin analizinde gözlemin hangi zaman diliminde yapıldığı değil gözlemin hangi zaman aralığında yapıldığı

önemlidir. Bundan dolayı durağan dağılımlar gerçek sistemlerin incelenmesi için oldukça önemlidir. Toplanabilir Markov özelliğinde de sistemin durağan olması oldukça önemlidir. Toplanabilirlik özelliğine sahip olan bir Markov zincirinde zincirin hangi durumda olduğunun yanı sıra zincirin durağan olasılıklarının da bilinmesi önemlidir. Burada bu olasılıkları durağan ve olasılıkları yardımıyla aşağıdaki şekilde belirtelim.

İlk olarak zincirin ardışık iki elemanın toplamının sıfır durumunda olma olasılığı,

—

Zincirin ardışık iki teriminin toplamının bir olma olasılığı,

—

Zincirin ardışık iki teriminin toplamının iki olma olasılığı,

—

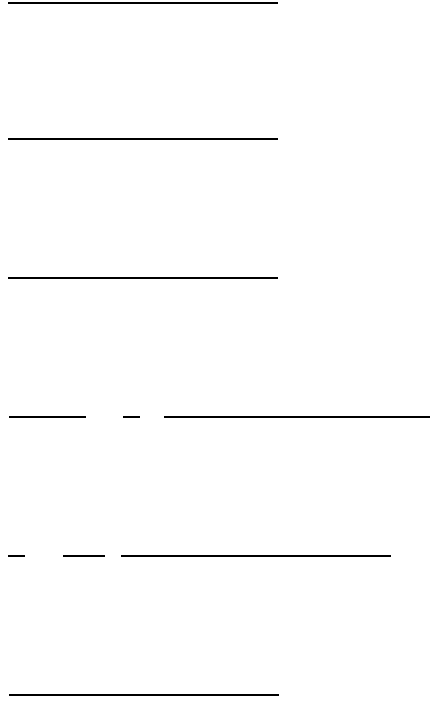
şeklinde elde edilir. Gerçek sistemlerde bu olasılıkların hesaplanabilmesi için sistemin durağan olduğunun bilinmesi gerekmektedir.

İki durumlu toplanabilen Markov zincirinde son olarak olasılık vektörünü en küçük kareler yöntemini kullanarak hesaplayalım. Genelde iki durumlu toplanabilen Markov zincirinde geçiş olasılıkları adım sayısına bağlı olarak tanımlanmaktadır. Ancak bu şart değildir. Markov zincirlerinde de bir adım geçiş olasılıkları adım sayısına bağımlı veya bağımsız olacak şekilde seçilebilmektedir. Şayet bir adım geçiş matrisi adım sayısından bağımsız ise Markov zinciri homojen olarak adlandırılmaktadır. Benzer şekilde toplanabilir Markov zincirinde de geçiş olasılıkları matrisi adım sayısından bağımsız şekilde homojen zincir olarak tanımlanabilir. Bu birçok incelemede kolaylık sağlarken bazı bilgileri de yok etmektedir. Örneğin homojen bir zincirde olasılıkları geçiş matrisinin elemanları cinsinden kesin çözümler elde edilememektedir. Bundan dolayı çözüm için en küçük kareler yöntemi Rich yaklaşımı ile kullanılabilir. Bunun için geçiş matrisinin elemanlarını

ile gösterelim. Teorem 3'ün sonucunu kullanacak olursak matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir,

matrisi Tam ranklı olmadığından ters matrisi aşağıdaki formda elde edilebilir,

$$\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{-----} \\ \\ \text{-----} \\ \\ \text{-----} \end{array}$$



Bu durumda olasılık değerleri için aşağıdaki şekilde elde edilebilir,

3.6 Toplamlı Geçiş Olasılıkları

kesikli zamanlı toplanabilen bir Markov zinciri olsun. Zincirin şartlı geçiş olasılıkları aşağıdaki şekilde tanımlansın,

Burada sıfır veya bir değerini alan Bernoulli değişkenidir. değerini aldığında toplanabilir Markov özelliği Markov özelliğine dđnüşerek şartlı geçiş olasılıkları Markov zincirinin bir adım geçiş olasılıkları olacaktır. değerini aldığında toplanabilir Markov özelliği geçerli olup şartlı geçiş olasılıkları bilinen durumları zincirin ardışık toplanmaları olan durumlarına göre düzenlenmiş zincir olacaktır.

sayısı n şeklinde tanımlanmış olup zincirin adımlarına göre farklı değerler alabilmektedir. Bu durumda Markov zincirinin şartlı geçiş olasılıkları her adımda X_n değişkeninin değerine göre karma bir yapıda olacaktır. X_n değişkeninin $[0,1]$ reel sayı değeri alması da mümkün olup X_n değişkeni X_{n-1} durumundan bağımsız seçileceği için,

X_n toplam olasılık bir olarak bulunmuş olur. X_n değişkeninin nasıl değer alacağına incelenen reel sistemin yapısı karar verecektir. Genelde reel uygulamalarda sıklıkla kullanılacak olan X_n değerlerinin seçimi aşağıdaki gibi yapılabilir,

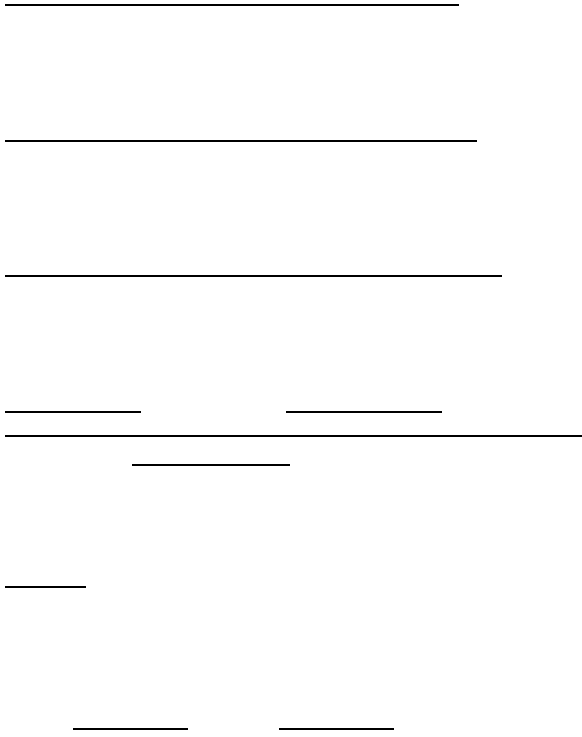
3.7 Sürekli Parametrelili Zincirlerde Toplanabilir Markov Özelliği

X_n sürekli parametrelili stokastik süreci keyfi $\{t_n\}$ gözlem anları için toplanabilir Markov özelliğini sağlıyorsa sürece sürekli parametrelili toplanabilir Markov zinciri denir. Sürekli parametrelili toplanabilir Markov zincirine ait en önemli süreçlerden biri bağımsız artımlı olan Poisson sürecidir. X_n aralığında gerçekleşen gelişlerin sayısını $N(t)$ ile gösterelim,

—

Bu ifade $[0,t]$ aralığında n tane gelişin olma olasılığıdır. X_n sürecinin gözlem anlarını $\{t_n\}$ ile gösterelim. Bu durumda X_n farklı bağımsız değişkenlerdir. Şimdi X_n değişkenini aşağıdaki şekilde tanımlayalım,

kesikli zamanlı süreci toplanabilir Markov özelliğine sahip olacaktır.
Geçiş olasılıklarını aşağıdaki şekilde gösterelim,



Elde edilen olasılıklar başarı olasılığı

olan binom olasılıklarıdır.

3.8 Uygulama

Markov zinciri istatistik ve olasılık teorisinin uygulanabilirliği en çok olan konularının başında gelmektedir. Uygulamalarda kolaylık bakımından Markov zinciri genelde homojen zincir olarak seçilmektedir. Bu durumda şartlı geçiş olasılıkları adım sayısına bağlı olmayacak ve veriler bir gözlem periyodu içerisinde değerlendirilecektir. Ancak bu husus oldukça dikkat gerektirmektedir. Zira adım sayısından bağımsız olmayan bazı geçiş olasılıkları veriler incelenirken bağımsız olarak kabul görmektedir. Bu ise analizin hatalı olmasını, öngörülen tahminlerin ise tutarsız olmasını gerektirir. Eğer bir stokastik sistem durmaksızın çalışabiliyorsa alınan gözlemler ardı ardına devam edeceğinden bu tipli verilerde zincir homojen olarak kabul edilebilir. Veriler arasında herhangi bir kesinti ise yüksek adımlı geçiş olasılıkları yardımıyla kapatılabilmektedir.

Bu bölümde geliş anlarının gözlenmiş olduğu bir stokastik servis sistemine ait geliş akımı hipotetik bir veri yardımıyla incelenecektir. Genellikle geliş akımı bir stokastik hizmet sistemi olan kuyruk modellerinde sisteme hizmet almak için gelen müşteri akımını göstermek için kullanılır. Genellikle kuyruk modellerinde geliş akımı poisson akımı olarak alınmaktadır. Poisson akımında gelişler arası süreler üstel dağılıma sahip olmaktadır. Böyle bir durumda geliş akımına ait önemli parametrelerin hesaplanabilmesi daha kolaydır. Geliş akımının dağılımının belirlenmediği durumlarda gelişler arası süreler birbirlerinden bağımsız ve yanı dağılımlı olarak kabul edilir. Bu durumda geliş akımına ait önemli parametrelerin hesaplanması güçleşmektedir.

Uygulamada geliş anları sürecinin bağımsız artımlı olma özelliği kullanılarak toplanabilir Markov zinciri tanımlanacaktır. Uygulamaya ait hipotetik veriler aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

Tablo 1. Müşterilerin Geliş Anlarına Ait Veriler

Sıra No:	Geliş Anı:	Gözlem Anı:
1:	8:02	
2:	8:05	
3:	8:07	
4:	8:12	
5:	8:15	
6:	8:19	
7:	8:24	
8:	8:26	
9:	8:28	
10:	8:32	
11:	8:45	
12:	8:48	
13:	8:52	
14:	9:00	
15:	9:02	
16:	9:09	
17:	9:15	
18:	9:17	
19:	9:18	
20:	9:20	
21:	9:21	
22:	9:24	
23:	9:26	
24:	9:28	
25:	9:29	
26:	9:32	
27:	9:33	

Tablo 1. Devamı

Sıra No:	Geliş anı	Gözlem Anı
28:	9:35	
29:	9:42	
30:	9:44	
31:	9:47	
32:	9:51	
33:	9:57	
34:	10:01	
35:	10:08	
36:	10:09	
37:	10:12	
38:	10:18	
39:	10:19	
40:	10:21	
41:	10:24	
42:	10:25	
43:	10:27	
44:	10:30	
45:	10:32	
46:	10:33	
47:	10:35	
48:	10:36	
49:	10:38	
50:	10:42	
51:	10:47	
52:	10:50	

Tablo 1. Devamı

Sıra No:	Geliş anı	Gözlem Anı
53:	10:51	
54:	10:55	
55:	10:56	
56:	11:01	
57:	11:02	
58:	11:05	
59:	11:07	
60:	11:08	
61:	11:11	
62:	11:13	
63:	11:15	
64:	11:16	
65:	11:19	
66:	11:20	
67:	11:24	
68:	11:26	
69:	11:27	
70:	11:32	
71:	11:35	
72:	11:37	
73:	11:41	
74:	11:44	
75:	11:46	
76:	11:47	
77:	11:52	
78:	11:54	
79:	11:58	

Tablo 1'deki veri incelendiğinde iki gözlem anı arası süre olarak belirlenmiştir. Gözlenen toplam geliş anı 79 adettir. Geliş anları arasındaki sürelerin ortalaması ise 3 dk. olarak elde edilmektedir. Buradaki inceleme geliş anları üzerinden değil gözlem anları üzerinden yapılacaktır.

Şimdi ile anındaki gelişlerin sayısını gösterelim. bağımsız artımlı bir süreçtir. Gözlem anları olmak üzere değişkenini aşağıdaki şekilde tanımlayalım,

Bu durumda kesikli zamanlı toplanabilir Markov zinciri olacaktır. Sürecin ardışık toplamı,

şeklinde elde edilir. Şimdi gözlem anı içerisinde herhangi bir değeri seçildiğinde bu değeri kapsayan gözlem aralığı için aşağıdaki şekilde olsun,

Bu durumda kesikli zamanlı stokastik süreci

sıralamasını dikkate alınarak şu şekilde seçelim,

Bunu dikkate aldığımızda sürecin ardışık toplamı,

iki gözlem anı arasındaki gelen müşteri sayısı olup, şartlı geçiş olasılıkları aşağıdaki formda yazılabilecektir,

Bu şartlı olasılık ardışık iki gözlem anı arasında tane müşterinin geldiği bilindiğine göre bunlardan tanesinin aralığında olma olasılığıdır. Önceki kısımdan bu olasılığın geliş akımı Poisson akımı olduğunda binom olasılığı şeklinde elde edildiğini biliyoruz. Ancak buradaki uygulamamızda bu şartlı olasılığı Poisson dağılımından bağımsız olarak hesaplayacağız. Bunun için önce iki gözlem arasındaki ortalama gelişler arası süreyi temsil eden,

- _____

oranını oluşturarak başlayalım. aralığında ortalama kaç adet gelişin olması gerektiğini aşağıdaki oranla tahmin edebiliriz,

Yukarıdaki değeri tam değer fonksiyonu ile tanımlanmış olup istenen geliş sayısı bu değere eşit veya bu değerden bir fazla olabilmektedir. Bundan dolayı geçiş olasılığı aşağıdaki şekilde alınabilir,

Burada sayısı,

şeklinde alınmıştır.

Şimdi tablodaki veriyi kullanarak ilgili hesaplamaları yapalım. İlk olarak birinci gözlem anı alınacaktır, bu durumda

olmak üzere aşağıdaki olasılık tablosunu oluşturalım,

Tablo 2. Birinci Gözlem Aralığı, , ,

8:03	4	0	5	1	4
8:05	3	0.33	4	0.67	3
8:07	2	0.66	3	0.34	2
8:09	2	0	3	1	2
8:11	1	0.33	2	0.67	1
8:13	0	0.66	1	0.34	0

Tabloya bakıldığında ilk satırından 8:03 anından sonra ilk gözlem anına kadar sisteme 4 adet müşterinin gelmesi olasılığı 1 dir. Buna göre ilk gözlem anına kadar sisteme

5 adet müşterinin geldiği bilindiğine göre bu ana kadar sisteme 1 müşterinin gelmesi gerekmektedir. Tablo 1'deki geliş anlarına bakıldığında zaten ilk geliş anının 8:02 olduğu görülecektir.

Şimdi ikinci gözlem aralığını inceleyelim. İkinci gözlem anı için,

olmak üzere aşağıdaki olasılık tablosunu oluşturalım,

Tablo 3. İkinci Gözlem Aralığı,

8:17	3	0.46	4	0.54	3
8:19	2	0.93	3	0.07	2
8:22	2	0.13	3	0.87	2
8:24	1	0.6	2	0.4	1
8:26	1	0.06	2	0.94	1
8:27	0	0.8	1	0.2	0

İkinci gözlem aralığı için düzenlenmiş bu tabloda da 4 adet geliş anının olduğu bilinmektedir. Yüksek olasılıklı durumları kontrol edersek, 8:19 anından sonra 0.93 olasılıkla sisteme 3 adet müşteri gelmiştir. O halde bu ana kadar sisteme gelen müşteri sayısı bu aralıkta 1 tane olmalıdır. Gerçekten geliş anları tablosu kontrol edildiğinde bu anda sisteme bir müşterinin geldiği görülecektir. Şimdi sırayla diğer aralıkları inceleyelim.

Tablo 4. Üçüncü Gözlem Aralığı,

8:31	1	0.86	2	0.14	1
8:33	1	0.6	2	0.4	1
8:34	1	0.46	2	0.54	1
8:38	0	0.93	1	0.07	0
8:40	0	0.66	1	0.34	0
8:45	0	0	1	1	0

Tablo 5. Dördüncü Gözlem Aralığı,

8:46	2	0.8	3	0.2	2
8:48	2	0.4	3	0.6	2
8:50	2	0	3	1	2
8:54	1	0.2	2	0.8	1
8:56	0	0.8	1	0.2	0
8:58	0	0.4	1	0.6	0

Tablo 6. Beşinci Gözlem Aralığı,

9:02	2	0.6	3	0.4	2
9:05	2	0	3	1	2
9:07	1	0.6	2	0.4	1
9:10	1	0	2	1	1
9:12	0	0.6	1	0.4	0
9:14	0	0.2	1	0.8	0

Tablo 7. Altıncı Gözlem Aralığı, , , ,

9:16	7	0.46	8	0.54	7
9:18	6	0.4	7	0.6	6
9:20	5	0.33	6	0.67	5
9:23	3	0.73	4	0.27	3
9:27	1	0.6	2	0.4	1
9:29	0	0.53	1	0.47	0

Tablo 8. Yedinci Gözlem Aralığı, , , ,

9:33	4	0	5	1	4
9:34	3	0.66	4	0.34	3
9:37	2	0.66	3	0.34	2
9:40	1	0.66	2	0.34	1
9:42	1	0	2	1	1
9:43	0	0.66	1	0.34	0

Tablo 9. Sekizinci Gözlem Aralığı, , , ,

9:46	2	0.8	3	0.2	2
9:49	2	0.2	3	0.8	2
9:51	1	0.8	2	0.2	1
9:53	1	0.4	2	0.6	1
9:57	0	0.6	1	0.4	0
9:59	0	0.2	1	0.8	0

Tablo 10. 9-uncu Gözlem Aralığı, , ,

10:03	3	0.2	4	0.8	3
10:07	2	0.13	3	0.87	2
10:10	1	0.33	2	0.67	1
10:12	0	0.8	1	0.2	0
10:13	0	0.53	1	0.47	0
10:14	0	0.26	1	0.74	0

Tablo 11. 10-uncu Gözlem Aralığı, , ,

10:17	6	0.06	7	0.94	6
10:18	5	0.6	6	0.4	5
10:20	4	0.66	5	0.34	4
10:25	2	0.33	3	0.67	2
10:27	1	0.4	2	0.6	1
10:29	0	0.46	1	0.54	0

Tablo 12. 11-uncu Gözlem Aralığı, , ,

10:33	4	0.8	5	0.2	4
10:36	3	0.6	4	0.4	3
10:39	2	0.4	3	0.6	2
10:40	2	0	3	1	2
10:42	1	0.2	2	0.8	1
10:44	0	0.4	1	0.6	0

Tablo 13. 12-inci Gözlem Aralığı, , ,

10:48	4	0	5	1	4
10:49	3	0.66	4	0.34	3
10:50	3	0.33	4	0.67	3
10:54	2	0	3	1	2
10:56	1	0.33	2	0.67	1
10:58	0	0.66	1	0.34	0

Tablo 14. 13-üncü Gözlem Aralığı, , ,

11:02	6	0.93	7	0.07	6
11:05	5	0.33	6	0.67	5
11:08	3	0.73	4	0.27	3
11:12	1	0.6	2	0.4	1
11:13	1	0.06	2	0.94	1
11:14	0	0.53	1	0.47	0

Tablo 15. 14-üncü Gözlem Aralığı, , ,

11:17	5	0.2	6	0.8	5
11:19	4	0.4	5	0.6	4
11:21	3	0.6	4	0.4	3
11:23	2	0.8	3	0.2	2
11:26	1	0.6	2	0.4	1
11:28	0	0.8	1	0.2	0

Tablo 16. 15-inci Gözlem Aralığı, , ,

11:32	3	0.33	4	0.67	3
11:34	3	0.66	4	0.34	3
11:37	2	0.66	3	0.34	2
11:40	1	0.66	2	0.34	1
11:42	1	0	2	1	1
11:44	0	0.33	1	0.67	0

Tablo 17. 16-ıncı Gözlem Aralığı, , ,

11:48	4	0	5	1	4
11:50	3	0.33	4	0.67	3
11:51	3	0	4	1	3
11:53	2	0.33	3	0.67	2
11:57	1	0	2	1	1
11:58	0	0.66	1	0.34	0

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Toplanabilir Markov zinciri başlığı altında hazırlanan bu çalışma Markov özelliğine farklı bir yön getirebilmek için hazırlanmıştır. 1900'li yılların başlarından itibaren günümüze kadar pek çok sahada başarıyla uygulanabilen Markov özelliği kendi yapısı içerisinde tüm ihtiyaçları karşılayabilen bir kuramdır. Ancak bazı uygulamalarda Markov özelliğinin sağlanmaması durumlarında özellikle Markov özelliğine sahip olmayan kuyruk modellerinde bu özelliğin yerine yarı Markov süreçleri başarıyla kullanılabilmiştir. Toplanabilir Markov zinciri tanımlaması da zincirin herhangi bir adımdaki durumunun belirlenememesi halinde kullanım açısından kolaylık sağlayabilecek bir özelliktir.

Çalışmada toplanabilir Markov zincirinin aşağıdaki önemli özellikleri gösterilmiştir,

1. Sıfır ve daha yüksek adımlı geçiş olasılıklarının tanımlanması
2. Yüksek adımlı geçiş olasılıkları arasındaki recurrent ilişkiler
3. Toplanabilir Markov zincirinin geçiş olasılıkları matrisi
4. Markov zinciri ve toplanabilir Markov zinciri geçiş olasılıklarının birbirleri cinsinden ifade edilmesi
5. Toplanabilir Markov zincirinin yutucu durumlarının belirlenmesi
6. Toplanabilir Markov özelliğinin binom sürecinde kullanılması
7. Zincirin durağan dağılımının tanımlanması
8. Toplanabilir Markov zincirinde şart olasılıklarının en küçük kareler çözümü
9. İki durumlu toplanabilir Markov zinciri
10. toplamlı geçiş olasılıkları
11. Toplanabilir Markov özelliğinin sürekli parametrelili zincirlerde kullanılması

Bunun yanı sıra yapılan uygulamada gözlenen geliş akımına ait olan toplanabilen Markov zinciri kurulmuş ve geçiş olasılıkları belirlenmiştir. Genellikle geliş akımının incelenmesi stokastik hizmet sistemlerinde karşımıza çıkmaktadır. Markov özelliğine sahip stokastik kuyruk modelleri Poisson geliş akımına sahip olarak kabul edilirler. Ancak bunun yanı sıra Markov özelliğine sahip olmayan kuyruk modelleri de mevcuttur. Uygulamada kullanılan yöntemde geliş akımının Poisson akımı olup olmamasına bakılmaksızın

toplanabilen Markov zinciri yapısıyla hesaplamalar yapılmıştır. Bu hesaplamaları aşağıdaki tablo yardımıyla Poisson geliş akımı ile karşılaştıralım,

Tablo 18. Hesaplanan Olasılık Değerleri ve Gözlem Durumları

Gözlem Anı	Gelen Müşteri Sayısı	Hesaplanan Olasılık Değeri	Poisson Olasılık Değeri	Gerçek Gözlem Değeri
8:03	1	1	0.36	1
8:11	4	0.67	0.191	3
8:19	5	0.93	0.152	5
8:38	10	0.93	0.094	10
8:56	13	0.8	0.04	14
9:07	15	0.6	0.02	15
9:23	21	0.73	0.03	21
9:40	28	0.66	0.05	28
9:51	31	0.8	0.045	31
10:07	35	0.87	0.036	34
10:17	37	0.94	0.029	37
10:42	49	0.8	0.046	49
10:50	52	0.67	0.047	52
11:13	62	0.84	-	62
11:28	68	0.8	-	69
11:44	74	0.67	-	74
11:53	77	0.67	-	77

Tabloda hesaplanan olasılık değerleri görülmektedir. Veriye bağlı olarak hesaplanan olasılık değerleri gerçek gözlem durumunu oldukça optimal bir şekilde yansıtabilmektedir. Poisson olasılıklarının gözlem durumunu ifade etmekte oldukça yetersiz kaldığını tablodaki değerlerden rahatlıkla görebilmekteyiz.

KAYNAKLAR

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (Eds.) (1964) "Handbook of Mathematical Functions, Applied Mathematics Series", Vol. 55. National Bureau of Standards, US Department of Commerce, Washington, DC.
- [2] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975) "Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models". New York: Rinehart and Winston
- [3] Paul C. Hoel, Sidney C. Port, Charles J. Stone (1972). "Introduction to Stochastic Processes" Houghton Miffling Company, Boston.
- [4] J. R. Norris (1997). "Markov Chains" Cambridge University Press, United Kingdom.
- [5] Cramer, H. (1946) "Mathematical Methods of Statistics" *Princeton University Press*: New Jersey
- [6] K. L. Chung (1967). "Markov Chains with Stationary Transition Probabilities" Springer, Berlin.
- [7] T. E. Harris (1989). "The Theory of Branching Processes" Dover, New York.
- [8] John G. Kemeny and J. Laurie Snell (1960). "Finite Markov Chains" D. Van Nostrand Company, London.
- [9] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov (1954). "Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables" Reading, Mass. Addison Wesley.
- [10] I. I. Gigan and A. V. Skorohod (1965). "Introduction to the Theory of Random Processes" Fizmatgiz.
- [11] K. Ito (1954). "Stationary Random Distributions" Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 28, 206-223.
- [12] J. H. Kinney (1953). "Continuity Properties of Sample Functions of Markov Processes" Trans. Amer. Math. Soc. 74, 280-302.
- [13] Shahbazov, A. (2005) "Olasılık Teorisine Giriş", Birsen Yayınevi, İstanbul

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Kırklareli'nin Babaeski ilçesinde dünyaya geldim. İlköğrenimimi Üsküp kasabasında orta öğrenimimi Kırklareli'nde, lise öğrenimimi de Balıkesir'de bitirdim. 2006 yılında Muğla Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'nü kazandım. 2010 yılında bu bölümden mezun oldum. 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Ana Bilim dalı İstatistik Teorisi dalında yüksek lisans öğrenimime başladım. 2010 yılından beri Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.