HİPERBOLİK VE DE SITTER UZAYLARINDA SABİT AÇILI YÜZEYLER

Tuğba MERT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2014
ANKARA

Tuğba MERT tarafından hazırlanan "HİPERBOLİK VE DE SİTTER UZAYLARINDA SABİT AÇILI YÜZEYLER" adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Baki KARLIĞA …….…………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Hesna KABADAYI …….…………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN …….…………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Baki KARLIĞA …….…………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Aysel VANLI …….…………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. H. Hüseyin UĞURLU …….…………………….
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Yusuf YAYLI …….…………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Prof. Dr. Nejat EKMEKCİ …….…………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Doç. Dr. Hesna KABADAYI …….…………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Tez Savunma Tarih: 24 /02/2014

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU …….…………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Tuğba MERT

HİPERBOLİK VE DE SİTTER UZAYLARINDA SABİT AÇILI YÜZEYLER

(Doktora Tezi)

Tuğba MERT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ŞUBAT 2014

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümlerde, sırası ile , Öklidyen ve Hiperbolik uzaydaki çalışmaların tarihçesi ve temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü ve beşinci bölümlerde, sırasıyla, Hiperbolik ve de Sitter uzaylarındaki eğriler ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi verilerek ilk defa sabit açılı yüzeylerin parametrizasyonları bulunmuştur. Dördüncü ve altıncı bölümlerde ise Hiperbolik ve de Sitter uzaylarındaki sabit açılı teğet yüzey örnekleri elde edilerek, bunlardan bazılarının açıları koruyan stereografik izdüşümler altındaki görüntüleri bulunarak mathematica proğramında çizdirilmiştir.

Bilim Kodu	**: 204.1.049**
Anahtar Kelimeler	**:Sabit Açılı Yüzey, Hiperbolik uzay, de-Sitter uzayı, helis**
Sayfa Adedi	**: 113**
Tez Yöneticisi	**: Prof. Dr. Baki KARLIĞA**

CONSTANT ANGLE SURFACES İN HYPERBOLİC AND DE SİTTER SPACES
(Ph. D. Thesis)

Tuğba MERT

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCİENCES
FEBRUARY 2014

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters. In first and second chapter, we have given historical information and principal concepts about studies of Euclidian and hyperbolical spaces, respectively. In thirth and fifth chapters, we have obtained parametrization of constant angle surfaces giving differential geometry of curves and surfaces in hyperbolic and de Sitter spaces, respectively. In forth and sixth chapters, examples of constant angle tangent surfaces in hyperbolic and de Sitter spaces are obtained. Under the streografic projection which preserves angles, the range of some of these are obtained and drow by mathematica programs.

Science Code : 204.1.049
Key Words : Constant Angle Surfaces, Hyperbolic space, de-Sitter space
Page Number : 113
Supervisor : Prof. Dr. Baki KARLIĞA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
IR^{n+1}	$(n+1)$ -boyutlu vektör uzayı
d_E	Öklidyen uzaklık fonksiyonu
d_H	Hiperbolik uzaklık fonksiyonu
E^n	*n*-boyutlu Öklidyen uzay
H^3	Hiperbolik uzay
S_1^3	De Sitter uzay
$\langle\, ,\rangle_L$	Lorentzien iç çarpım

1. GİRİŞ

Üç boyutlu Öklid uzayında sabit açılı yüzey, E^3 deki sabit bir vektör alanı ile sabit bir açı yapan yüzeydir. E^3 Öklid uzayında sabit açılı yüzeyler M.I. Munteanu ve A.I. Nistor tarafından [1] de çalışılmış ve E^3 de ki sabit açılı yüzeylerin tüm sınıfı elde edilmiştir.

[2]-[3] de A. J. Scala ve G. R. Hernandez tarafından E^n deki sabit açılı yüzeyler sınıfı çalışılmıştır.

[4] de P. Germelli ve A. J. Scala sabit açılı yüzeyleri sıvı katmanlar ve sıvı kristaller teorisine uygulamışlardır.

S^2 ve H^2 küresel ve hiperbolik düzlemler olmak üzere; $S^2 \times IR$, $H^2 \times IR$ ve Nil_3 çarpım uzaylarındaki sabit açılı yüzeyler, sırasıyla; [5], [6] ve [7] de çalışılmıştır.

Minkowski uzayında sabit açılı yüzey; yüzeyin birim normal vektör alanı ile E_1^3 de sabit bir timelike vektör alanı arasındaki açı sabit olacak şekildeki spacelike bir yüzeydir. [8] de R. Lopez ve M. Munteanu E_1^3 de bu tip yüzeyleri çalışmış ve sınıflandırmışlardır. Ayrıca, bu çalışmalarında, açılabilir bir teğet yüzeyin sabit açılı bir yüzey olması için gerekli ve yeterli koşulu vermişlerdir.

Öklid ve Lorentz uzaylarında iyi bilinen ve teknikte birçok uygulaması olan Helisoid yüzeylerin Lorentz uzayındaki benzeri olan sabit açılı yüzeyler, henüz Hiperbolik ve de Sitter uzaylarında çalışılmamıştır. Bu tezde, Hiperbolik ve de Sitter uzaylarındaki bir yüzeyin sabit açılı yüzey olma koşulları belirlenmiş ve bu yüzeylerin değişmezleri araştırılmıştır.

Günümüzde bildiğimiz yöntemlerle çözülemeyen problemleri farklı bir yöntem kullanarak çözüp, bu çözümlerin bu yöntemdeki yorumlarını vermek çalışmalarda önemli yer tutar. Kullanılan bu yöntemlerden biri de, çözülemeyen problemlere farklı uzaylarda modeller aramaktır. Lorentz, Hiperbolik ve de Sitter uzayları fiziksel olaylar için birer model olup, birçok fiziksel olay bu modellerle açıklanabilmektedir. Farklı uzaylardaki yüzey çeşitleri mimari, geometrik dizayn gibi günlük yaşantımızla alakalı alanlara rehberlik edeceğinden bu tip yüzey çeşitlerinin önemi büyüktür. Bunu, mimarlık tarihinde önce Öklidyen, ortaçağda küresel ve yakın çağımızda hiperbolik çizgilerin kullanıldığı yapılardan görmek mümkündür. Gelecekte de Sitter çizgilerini kullanan mimari yapılar ve geometrik dizaynlar günlük hayatımıza girecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklidyen Uzay

n- boyutlu Öklid uzayı için standart analitik model, *n*- boyutlu IR^n reel vektör uzayı ile eşleşen IR^n afin uzayıdır. IR^n üzerindeki Öklidyen iç çarpım non-dejenere, simetrik, bilineer ve pozitif tanımlıdır.

$\langle , \rangle$, *V* vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı bir iç çarpım olmak üzere $v \in V$ nin bu iç çarpıma göre normu

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlı reel sayıdır [9].

2.1. Tanım

$x, y \in IR^n$ olmak üzere iki vektör arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanır [9,10].

2.2. Tanım

IR^n üzerinde tanımlanan d_E metriğine *Öklid metriği* denir [10].

2.3. Tanım

$\phi : IR^n \to IR^n$ dönüşümünün bir ortogonal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in IR^n$ için

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

olmasıdır [9].

2.4. Tanım

$[a,b]$, IR de kapalı bir aralık ve $a<b$ olmak üzere $\gamma:[a,b]\to X$ sürekli fonksiyonuna X metrik uzayında bir *eğri* denir.

Eğer $X=E^n$ ise γ eğrisinin lineer olması için gerek ve yeter şart $\forall t\in[a,b]$ için

$$\gamma(a+t(b-a))=\gamma(a)+t(\gamma(b)-\gamma(a))$$

olmasıdır [9].

2.5. Tanım

E^n nin x,y,z gibi üç noktası için $y=x+t(z-x)$ olacak şekilde bir $t\in[0,1]$ reel sayısı varsa bu üç noktaya *doğrusaldır* denir [9].

(X,d) bir metrik uzay olmak üzere aşağıdaki tanımları verebiliriz.

2.6. Tanım

$[a,b]$, IR de kapalı aralık ve $a<b$ olmak üzere;

$$\alpha:[a,b]\to X$$

dönüşümü uzunluk koruyan sürekli fonksiyon ise α ya X metrik uzayında bir *jeodezik eğri yayı* denir

Bu durumda geodezik yayın başlangıç noktası $\alpha(a)$ ve bitiş noktası $\alpha(b)$ dir [9].

2.7. Tanım

$\forall x,y\in X$ ayrık çifti için x *ve* y yi içeren bir tek jeodezik parça varsa X 'e jeodezik olarak *konveks metrik uzay* denir [9].

2.8. Tanım

$\lambda : IR \to X$ dönüşümüne *jeodezik doğru* denir [9].

2.2. Lorentz Uzayı

$x, y \in IR^n$ iki vektör ve $n > 1$ olsun. x ile y nin Lorentzian iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + ... + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n$$

ile tanımlanan indefinit bir iç çarpımdır. Bu çarpım ile birlikte IR^n uzayına *Lorentz uzayı* denir ve IR_1^n ile gösterilir. IR_1^n uzayında bir x vektörünün Lorentz normu

$$\|x\| = \left| \langle x, y \rangle_L \right|^{1/2}$$

ile, x *ve* y noktaları arasındaki Lorentz uzunluk

$$d_L(x, y) = \|x - y\|$$

ile tanımlanır [9].

2.9. Tanım

IR_1^n Lorentz uzayında

$$\left\{ x \in IR_1^n : x_n^2 = x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 \right\}$$

şeklindeki C^{n-1} kümesine *ışık konisi (light koni)* denir. $\langle x, x \rangle_L = 0$ ise x vektörüne *ışık benzeri (lightlike veya null) vektör* denir [9].

2.10. Tanım

$x \in IR_1^n$ için, $\langle x, x \rangle_L > 0$ ise x vektörüne *uzay benzeri (spacelike) vektör* denir. C^{n-1} hiperkonisinin dışı, IR_1^n nin uzay benzeri vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir [9].

2.11. Tanım

$x \in IR_1^n$ için, $\langle x, x \rangle_L < 0$ oluyorsa x vektörüne *zaman benzeri (timelike) vektör* denir. C^{n-1} hiperkonisinin içi, IR_1^n nin zaman benzeri vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir. Eğer $x_1 > 0 \left(x_1 < 0 \right)$ ise x vektörüne *pozitif (negatif) zaman benzeri* denir [9].

2.12. Tanım

Sıfırdan farklı $x, y \in IR_1^n$ için $\langle x, y \rangle_L = 0$ oluyorsa x, y vektörlerine *Lorentz ortogonaldir* denir [9].

2.1. Teorem

x, y vektörleri, IR_1^n de sıfırdan farklı Lorentz ortogonal iki vektör olsun. Eğer x vektörü zaman benzeri ise y vektörü uzay benzeridir [9].

İspat

[9] da sayfa 60-61 den görülebilir.

2.1. Önerme

IR_1^n nin bir *V* alt vektör uzayının;

1) Zaman benzeri olması için gerek ve yeter şart *V* nin en az bir zaman benzeri vektöre sahip olmasıdır.

2) Uzay benzeri olması için gerek ve yeter şart *V* deki sıfırdan farklı her vektörün uzay benzeri olmasıdır.

3) Işık benzeri olması için gerek ve yeter şart *V* deki sıfırdan farklı her vektör için $\langle x, x \rangle_L = 0$ olmasıdır [9,11].

İspat

[9] da sayfa 61 den görülebilir.

2.13. Tanım

$x\ ve\ y$, IR_1^n de pozitif (negatif) zaman benzeri iki vektör olsun.

$$\langle x, y\rangle_L = -\|x\|\|y\|\cosh\eta(x,y)$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek $\eta(x,y)$ reel sayısı vardır. $x\ ve\ y$ arasındaki *Lorentz zaman benzeri (timelike) açı,* $\eta(x,y)$ olarak tanımlanır [9,11].

2.14. Tanım (Timelike vektörler arasındaki timelike açı)

$x\ ve\ y$, IR_1^n nin pozitif (negatif) timelike vektörleri olsun. $\eta(x,y)$ negatif olmayan bir reel sayı olmak üzere

$$\langle x, y\rangle_L = \|x\|\|y\|\cosh\eta(x,y)$$

dir. Buna göre $x\ ve\ y$ arasındaki Lorentzian timelike açı $\eta(x,y)$ dir. Eğer $\eta(x,y)=0$ ise $x\ ve\ y$ nin birbirlerinin pozitif skalar çarpımıdır [9].

2.15. Tanım (Spacelike vektörler arasındaki spacelike açı)

$x\ ve\ y$, IR_1^{n+1} in spacelike vektörleri olsun. Böylece 0 ve π arasında bir tek $\eta(x,y)$ reel sayısı vardır ki

$$\langle x, y\rangle_L = \|x\|\|y\|\cos\eta(x,y)$$

dır. $x\ ve\ y$ arasındaki Lorentzian spacelike açı $\eta(x,y)$ ile tanımlanır [9].

2.16. Tanım (Spacelike vektörler arasındaki timelike açı)

x *ve* y, timelike alt vektör uzayı tarafından gerilen IR_1^{n+1} in spacelike vektörleri olsunlar. Bir tek $\eta(x,y)$ reel sayısı vardır ki

$$|\langle x,y\rangle_L| = \|x\|\|y\|\cosh\eta(x,y)$$

dir. x *ve* y arasındaki Lorentzian timelike açı $\eta(x,y)$ ile tanımlanır [9].

2.17. Tanım (Timelike ve spacelike vektörler arasındaki açı)

IR_1^{n+1} de x spacelike vektör ve y pozitif timelike vektör olsun. Böylece bir tek negatif olmayan $\eta(x,y)$ reel sayısı vardır ki

$$|\langle x,y\rangle_L| = \|x\|\|y\|\sinh\eta(x,y)$$

dir. x *ve* y arasındaki Lorentzian timelike açı $\eta(x,y)$ ile tanımlanır [9].

2.3. Bir Manifoldun Alt Manifoldunun Hiperyüzeyleri

Bu bölümde [12] de C. Thas tarafından verilen bir manifoldun alt manifoldunun hiperyüzeyleri kavramı özetlenecektir. $\overline{N}, E^m$ Öklid uzayının $(n+1)$ boyutlu alt manifoldu ($m > n+1$) ve $N, \overline{N}$ nin n boyutlu bir alt manifoldu olsun. N üzerinde bir $p \in N$ noktasının bir U komşuluğunda $\overline{N}$ deki ξ birim normal vektör alanını düşünelim. E^m, $\overline{N}$ ve N nin standart Riemann konneksiyonları sırasıyla $\overline{\overline{D}}$, $\overline{D}$ ve D olsun. $\overline{N}$ de N nin Weingarten dönüşümü

$$\overline{D}_X\xi = L(X), \forall X \in N_p$$

ile verilir ve $\det L$, $\overline{N}$ de N hiperyüzeyinin bir p noktasındaki Gauss eğriliğidir. $V'(Y,Z)$, $\overline{N}$ de N nin ikinci temel formu ve $Y,Z \in \chi(N)$ olmak üzere Gauss formülünden

$$\overline{D}_Y Z = D_Y Z + V'(Y,Z) \quad , \; Y,Z \in \chi(N).$$

Ayrıca

$$\overline{D}_Y Z = D_Y Z - \langle L(Y), Z \rangle \xi$$

şeklindedir. Ohalde $\overline{V}(U,W)$, E^m de $\overline{N}$ nin ikinci temel formu olmak üzere

$$\overline{\overline{D}}_U W = \overline{D}_U W + \overline{V}(U,W) \quad , \; U,W \in \chi(\overline{N}).$$

Eğer $V(Y,Z), E^m$ de N nin ikinci temel formu ise

$$\overline{\overline{D}}_Y Z = D_Y Z + V(Y,Z)$$

ve buradan da

$$V(Y,Z) = -\langle L(Y), Z \rangle \xi + \overline{V}(Y,Z)$$

olur. A_ξ, N nin teğet uzayında bir self adjoint lineer dönüşüm ve $D^\perp$, $N^\perp$ normal demet de bir metrik konneksiyon olmak üzere, E^m de N nin ξ birim normal vektör alanına göre Weingarten denklemi

$$\overline{\overline{D}}_X \xi = -\left(A_\xi(X)\right) + D_X^\perp \xi \quad , \; \forall X \in N_p$$

ile verilir. Ayrıca

$$\overline{\overline{D}}_X \xi = \overline{D}_X \xi + \overline{V}(X,\xi)$$

veya

$$\overline{\overline{D}}_X \xi = L(X) + \overline{V}(X,\xi).$$

O halde

$$L(X) = -\left(A_\xi(X)\right)$$

ve

$$D_X^\perp \xi = \overline{V}(X,\xi) \ , \ \forall X \in N_p$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\det L = \pm \det A_\xi .$$

Yani $K\left(p,\xi_p\right), E^m$ de N nin p noktasındaki Lipschitz-Killing eğriliği olmak üzere $\overline{N}$ de N hiperyüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği $\pm K\left(p,\xi_p\right)$ye eşittir. $\overline{R}$, $\overline{N}$ nin eğrilik tensörü ve $U_1,U_2,U_3,U_4 \in \overline{N}$ olsun. O halde, E^m de $\overline{N}$ nin Gauss denklemi

$$\left\langle U_1,\overline{R}(U_2,U_3)U_4\right\rangle = \left\langle \overline{V}(U_2,U_1),\overline{V}(U_3,U_4)\right\rangle - \left\langle \overline{V}(U_2,U_4),\overline{V}(U_3,U_1)\right\rangle$$

ile verilir. Eğer, $X \in N_p$ ise $\overline{N}$ nin iki boyutlu $\left(X,\xi_p\right)$yönünde p noktasındaki Riemann eğriliği

$$\overline{K}\left(X,\xi_p\right) = \frac{\left\langle X,\overline{R}\left(X,\xi_p\right)\xi_p\right\rangle}{\left\langle X,X\right\rangle}$$

ile verilir.

2.4. Hiperbolik ve de-Sitter Uzayı

$S_1^n \subset IR_1^{n+1}$ ve $S_1^n = \left\{x \in IR_1^{n+1} :< x,x >= 1\right\}$ kümesine n-boyutlu birim *pseudo-küresel uzay (de-Sitter uzayı),* $H_0^n = \left\{x \in IR_1^{n+1} :< x,x >= -1\right\}$ kümesine de n- boyutlu birim *pseudo-hiperbolik uzay* denir. H_0^n uzayının iki bağlantılı bileşeni $H_{0,+}^n$ ve $H_{0,-}^n$ olmak üzere, bu bileşenlerin her biri n-boyutlu hiperbolik uzayın modeli olarak alınabilir. Biz literatüre bağlı kalarak hiperbolik uzayın modeli olarak pozitif bileşeni göz önüne alacağız, yani; $H_{0,+}^n = H^n \subset IR_1^{n+1}$ olarak alacağız [9].

2.18. Tanım

$x, y \in H^n \subset IR_1^{n+1}$ ve x *ile* y arasındaki Lorentzien zaman benzeri açı $\eta(x,y)$ olsun. x *ve* y arasındaki hiperbolik uzunluk

$$d_H(x,y) = \eta(x,y)$$

şeklinde tanımlı bir reel sayıdır.

$$\langle x,y\rangle_L = -\|x\|\|y\|\cosh\eta(x,y)$$

olduğundan

$$\cosh d_H(x,y) = -\langle x,y\rangle_L$$

olur [9,13].

2.2. Teorem

d_H hiperbolik uzunluk fonksiyonu H^n üzerinde bir metriktir [9].

İspat

[9] dan görülebilir.

2.19. Tanım

d_H metriği ile birlikte H^n uzayı *hiperbolik n-uzay* olarak adlandırılır [9].

2.20. Tanım

H^n nin bir doğrusu IR_1^{n+1} in iki boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile H^n nin arakesitidir. $x, y \in H^n$ vektörleri IR^{n+1} in $V(x,y)$ ile gösterilen iki boyutlu bir zaman benzeri alt uzayını gererler. Böylece $L(x,y) = H^n \cap V(x,y)$, x den geçen y yi içeren H^n nin bir doğrusudur [9].

Buna göre H^n nin jeodezikleri onun doğrularıdır.

2.21. Tanım

H^n nin bir *m*-düzlemi, IR_1^{n+1} in $(m+1)$ -boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile H^n nin arakesitidir [9].

2.22. Tanım

H^n nin bir hiperbolik 1-düzlemi onun hiperbolik doğruları, hiperbolik $(n-1)$ -düzlemi onun hiperdüzlemi olarak adlandırılır [9].

2.5. Öklidyen ve Hiperbolik Uzayda Tanımlar

Aşağıda vereceğimiz tanımlarda $X = E^n, H^n, S_1^n$ olarak alınacaktır.

2.23. Tanım

V bir reel vektör uzayı olsun. $g : V \times V \to IR$ dönüşümü bilineer ve simetrik ise g 'ye *V* üzerinde *simetrik bilineer form* denir [11].

2.24. Tanım

V vektör uzayı üzerinde $g : V \times V \to IR$ simetrik bilineer form ve W, V nin bir altvektör uzayı olsun. Bu durumda $g_W : W \times W \to IR$ kısıtlaması negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu *W* alt vektör uzayının boyutuna g 'nin *indeksi* denir.

Eğer indeks *v ise* $0 \leq v \leq boyV$ dir.

Ayrıca *V nin indeksi*, üzerinde tanımlı olan g ’nin indeksi olarak tanımlanır [11].

2.25. Tanım

V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı simetrik, bilineer, non-dejenere forma, *V* reel vektör uzayı üzerinde bir *skalar çarpım* denir. Bu çarpım ile birlikte *V* vektör uzayına da *skalar çarpım uzayı* denir. [11].

2.26. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold ve *P, M* nin altkümesi olsun. Eğer

i) *P, M* nin manifold topolojisinin, alt topolojik uzayıdır,

ii) $j : P \to M$, $j(p) = p$ inclusion dönüşümü C^∞ diferensiyellenebilir ve her bir $p \in P$ için $(dj)_p : T_pP \to T_pM$ türev dönüşümü birebir dönüşümdür,

özellikleri sağlanıyorsa, *P* ye *M* nin bir *altmanifoldu* denir [11].

2.27. Tanım

M ve *N* diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\phi : M \to N$, C^∞ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer her bir $p \in M$ noktası için $(d\phi)_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ dönüşümü birebir ise ϕ ye bir *immersiyon (daldırma)* denir.

Eğer *M, N* nin altmanifoldu ise *M* ye *N* nin *immersed (daldırılmış) altmanifoldu* denir [11].

2.28. Tanım

M ve N, C^∞ diferensiyellenebilir manifoldlar olsun.

$\phi : M \to N$ birebir immersiyon ise ϕ ye bir embedding denir.

Eğer *M*, *N* nin altmanifoldu ise *M* ye *N* nin *embedded altmanifoldu* denir [11].

2.29. Tanım

M, C^{∞} diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli (0,2)-tipinden g tensör alanına *metrik tensör* denir [11].

2.30. Tanım

M, C^{∞} diferensiyellenebilir manifold ve g, *M* üzerinde bir sıfırdan farklı indekse sahip metrik tensör olmak üzere (M,g) ikilisine bir *yarı-Riemann manifoldu* denir [11].

2.31. Tanım

M yarı-Riemann manifoldu üzerinde tanımlı g metrik tensörünün indeksine, *M yarı-Riemann manifoldunun indeksi* denir [11].

2.32. Tanım

M yarı-Riemann manifoldunun indeksi 1 ise *M* ye bir *Lorentz Manifoldu* denir [11].

Böylece n-boyutlu *M* Lorentz manifoldu üzerindeki metrik tensör,

$$g_p(v_p, w_p) = -v_1.w_1 + \sum_{i=2}^{n} v_i w_i\,, \quad p \in M,\ v_p, w_p \in T_pM$$

şeklinde tanımlanır.

2.33. Tanım

M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}$, *M* nin altmanifoldu olsun. $j:\overline{M} \to M$ inclusion dönüşümü olmak üzere her bir $p \in \overline{M}$ için, $(j(g))(p) = g(j(p))$ ile tanımlı

$j(g)$ dönüşümü $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin bir *yarı-Riemann altmanifoldu* denir [11].

2.34. Tanım

IR_1^n Minkowski uzayında,

$$H^n = \left\{ x = \left(x_1, ..., x_{n+1} \right) \in IR_1^{n+1} \middle| \left\langle x, x \right\rangle = -1, x_1 \geq 1 \right\}$$

kümesine n-boyutlu *hiperbolik uzayın hiperboloidal (Minkowski) modeli* denir [9].

2.35. Tanım

$2 \leq r < n$ için U, IR^{n-r} nin bir açık altkümesi olmak üzere,

$X : U \to IR_1^n$ immersiyonu ile belli olan $X(U) = M$, IR_1^n nin (n-r)-altmanifoldu olsun.

Buna göre $p \in M$ noktasındaki M nin teğet uzayı T_pM olmak üzere,

i) T_pM , IR_1^n nin spacelike altuzayı ise X e *spacelike immersiyon* ve M ye IR_1^n nin *spacelike (n-r)-altmanifoldu* denir.

ii) T_pM , IR_1^n nin timelike altuzayı ise X e *timelike immersiyon* ve M ye IR_1^n nin *timelike (n-r)-altmanifoldu* denir.

iii) T_pM , IR_1^n nin lightlike altuzayı ise X e *lightlike immersiyon* ve M ye IR_1^n nin *lightlike (n-r)-altmanifoldu* denir [9].

3.HİPERBOLİK UZAYDA EĞRİLER VE YÜZEYLER

Bu bölümde H^3 uzayında eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi özetlenecek ve H^3 uzayının Lorentzian modeli alınacaktır.

3.1. Hiperbolik Uzayda Eğriler

H^3 de eğrilerin [14] de verilen extrinsic diferansiyel geometrisini özetliyelim. $\gamma : I \to H^3$ birim hızlı regüler eğri ve γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki teğet vektörü $t(s)$ olmak üzere γ nın normal vektörü

$$n(s) = \frac{\overline{\overline{D}}_{t(s)}\gamma(s) - \gamma(s)}{\left\| \overline{\overline{D}}_{t(s)}\gamma(s) - \gamma(s) \right\|}$$

olarak verilir. γ nın binormal vektörüde $e(s) = \gamma(s) \wedge t(s) \wedge n(s)$ şeklinde tanımlanır. Buradan elde edilen $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ çatısına γ- boyunca IR_1^4 ün *pseudo ortonormal çatısı* denir.

$\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq -1$ olmak üzere; $\gamma : I \to H^3$ birim hızlı eğrisinin

$$\kappa_h(s) = \left\| \overline{\overline{D}}_{t(s)} t(s) - \gamma(s) \right\|$$

değerine γ *nın hiperbolik eğriliği*

ve

$$\tau_h(s) = -\frac{\det\left(\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)\right)}{\left[\kappa_h(s)\right]^2}$$

değerine de γ *nın hiperbolik burulması* denir [14]. Ayrıca γ nın $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ çatısından elde edilen

$$\begin{cases} \overline{\overline{D}}_{t(s)}\gamma(s) = t(s) \\ \overline{\overline{D}}_{t(s)}t(s) = \kappa_h(s)n(s) + \gamma(s) \\ \overline{\overline{D}}_{t(s)}n(s) = -\kappa_h(s)t(s) + \tau_h(s)e(s) \\ \overline{\overline{D}}_{t(s)}e(s) = -\tau_h(s)n(s) \end{cases}$$

eşitliklerine γ eğrisinin Frenet-Serret denklemleri denir [14].

$\kappa_h(s)$nin tanımından $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq -1$ koşulu $\kappa_h(s) \neq 0$ olmasına denk olduğu kolaylıkla görülür [14].

$\gamma(s)$ eğrisinin $\kappa_h(s) = 0$ şartını sağlaması için gerekli ve yeterli koşul $\gamma(s) - c$ geodezik olacak şekilde bir c lightlike vektörünün var olmasıdır [14].

$\kappa_h(s) = 0$ şartını sağlayan eğriye *equidistant eğri* denir. Ayrıca $\kappa_h(s) = 1$ ve $\tau_h(s) = 0$ ise γ bir *Horo-çemberdir* [14].

3.2. Hiperbolik Uzayda Sabit Açılı Eğriler

Teğeti sabit bir doğru ile sabit bir açı yapan eğriye IR^3 de *genel helis eğrisi* denir. Bir eğrinin genel helis eğrisi olması için gerekli ve yeterli koşul bu eğrinin eğriliğinin burulmasına oranının sabit olmasıdır. Bu sonuç 1802 yılında M.A.Lancret tarafından verilmiştir ve ilk olarak 1845 yılında B.de Saint Venant tarafından ispatlanmıştır.

3.1. Teorem (Öklid Uzayında Lancret Teoremi)

IR^3 de bir eğrinin genel helis eğrisi olması için gerekli ve yeterli koşul $\tau = b\kappa$ olacak şekilde sabit bir b sayısının var olmasıdır [15].

3.2. Teorem (Hiperbolik Uzayda Lancret Teoremi)

Hiperbolik uzaydaki bir γ eğrisinin genel helis eğrisi olması için gerekli ve yeterli koşul

1. $\tau \equiv 0$ ve γ, $H^2(-1)$ hiperbolik düzleminde bir eğridir,

veya

2. $\gamma, H^3(-1)$ hiperbolik uzayında bir helisdir [15].

3.3. Hiperbolik Uzayda Yüzeyler

H^3 de yüzeylerin [14] de verilen extrinsic diferansiyel geometrisini özetliyelim.

$v \in IR_1^4$ ve $c \in IR$ için $HP(v,c) = \{x \in IR_1^4 \mid \langle x, v \rangle = c, c \in IR\}$

şeklinde v pseudo normalli hiperdüzlem tanımlayalım.

3.1. Tanım

a) v timelike ise $HP(v,c)$ye bir *spacelike hiperdüzlem* denir.

b) v spacelike ise $HP(v,c)$ye bir *timelike hiperdüzlem* denir.

c) v lightlike ise $HP(v,c)$ye bir *lightlike hiperdüzlem* denir.

$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, IR_1^4 ün doğal tabanı ve $x_i = (x_0^i, x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ olmak üzere herhangi $x_1, x_2, x_3 \in IR_1^4$ için

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca

$\langle x, x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \rangle = \det(x, x_1, x_2, x_3)$

ve $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ herhangi x_i ye ortogonaldir.

IR_1^4 deki hiperdüzlemler ve H^3 ün kesişmesiyle verilen H^3 de yüzeylerin üç tipi vardır.

a) $HP(v,c)$ spacelike ise $H^3 \cap HP(v,c)$ yüzeyine *Küre* denir.

b)) $HP(v,c)$ timelike ise $H^3 \cap HP(v,c)$ yüzeyine *Equidistant yüzey* denir.

c) $HP(v,c)$ lightlike ise $H^3 \cap HP(v,c)$ yüzeyine *Horoküre* denir [14].

$U \subset IR^2$ bir açık alt küme, $M = x(U)$ ve x embedding olmak üzere $x : U \to H^3$ bir regüler yüzey olsun. O zaman $\{x_{u_1} = x_1, x_{u_2} = x_2\}$, x ile tanımlanan yüzeyin teğet düzleminin bazı olmak üzere

$$e(u) = \frac{x(u) \wedge x_1(u) \wedge x_2(u)}{\left\| x(u) \wedge x_1(u) \wedge x_2(u) \right\|}$$

vektörüne H^3 de M yüzeyinin birim normali denir.

$$E : U \subset R^2 \to S_1^3, E(u) = e(u)$$

şeklindeki dönüşüme x parametrizasyonu ile verilen yüzeyin *de Sitter Gauss dönüşümü* denir.

$$LC_+^* = \left\{ x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in IR_1^4 \mid x_0 > 0, \langle x, x \rangle = 0 \right\}$$

orjin merkezli future light konisini alalım. $x(u) \in H^3, e(u) \in S_1^3$ ve $\langle x(u), e(u) \rangle = 0$ olduğundan $x(u) \pm e(u) \in LC_+^*$.

$$L^{\pm} : U \subset R^2 \to LC_+^*, L^{\pm}(u) = x(u) \pm e(u)$$

şeklindeki dönüşüme x parametrizasyonu ile verilen yüzeyin *light koni Gauss dönüşümü* denir.

D_v, v teğet vektörüne göre kovaryant türev olmak üzere herhangi $p = x(u_0) \in M$ ve TpM için $D_v L^{\pm} \in TpM$ dir [14].

U ve M nin özellikleri altında $dx(u_0)$ türevi TpM teğet uzayı üzerinde I_{TpM} özdeşlik dönüşümü ile özdeştir $(p = x(u_0))$. Dolayısıyla $L^{\pm}(u) = x(u) \pm e(u)$ olduğundan

$$dL^{\pm}(u_0) = dx(u_0) \pm de(u_0)$$

ve buradan da

$$dL^{\pm}(u_0) = I_{TpM} \pm dE(u_0)$$

yazılır.

$$S_p^{\pm} := -dL^{\pm}(u_0) : TpM \to TpM$$

şeklinde tanımlı lineer dönüşüme $p = x(u_0)$ noktasında $M = x(u)$ yüzeyinin *hiperbolik şekil operatörü* denir.

$$A_p := -dE(u_0) : TpM \to TpM$$

tanımlı lineer dönüşümüne $p = x(u_0)$ da $M = x(u)$ yüzeyinin *de Sitter şekil operatörü* denir.

$\overline{K_i^{\pm}}(p)$ ve $K_i(p)$, ile sırasıyla $S_p^{\pm}$ ve A_p dönüşümünün öz değerlerini gösterelim. $\overline{K_i^{\pm}}(p)$ ve $K_i(p)$, $(i = 1,2)$ ye $p = x(u_0)$ da $M = x(u)$ yüzeyinin sırasıyla *asli hiperbolik* ve *asli de Sitter eğrilikleri* denir.

$S_p^{\pm}$ ve A_p aynı öz vektörlere sahiptir ve

$$\overline{K_i^{\pm}}(p) = -1 \pm K_i(p).$$

$\gamma(s)=x(u_1(s),u_2(s)), M=x(u)$ yüzeyi üzerinde $p=\gamma(s_0)$ noktasında birim hızlı eğri olsun. $k(s)=t'(s)-\gamma(s)$ hiperbolik eğrilik vektörü olmak üzere $p=\gamma(s_0)$ noktasında $\gamma(s)$ nin de Sitter normal eğriliği

$$K_n^{\pm}(s_0)=\left\langle k(s_0), L^{\pm}(u_1(s_0),u_2(s_0))\right\rangle=\left\langle t'(s_0), L^{\pm}(u_1(s_0),u_2(s_0))\right\rangle+1$$

[14].

de Sitter Gauss eğriliği sadece p noktasına ve p noktasındaki M yüzeyinin birim teğet vektörüne bağlıdır. Bu yüzden de Sitter normal eğriliği $p\in M$ noktasında maksimum ve minimuma sahiptir. p noktasında de Sitter normal eğriliğinin maksimum veya minimumu $\pm K_i(p)$ de Sitter asli eğriliklerine eşittir. Böylece aşağıdaki Hiperbolik tip Rodrig formülünü verebiliriz. Eğer $\gamma(s)=x(u_1(s),u_2(s))$ bir eğrilik çizgisi ise $K_n^{\pm}(s), \gamma(s)$ nin de Sitter asli eğriliklerinden biridir. Yani

$$-\frac{dL^{\pm}}{ds}(u_1(s),u_2(s))=\left(K_n^{\pm}(s)-1\right)\frac{dx}{ds}(u_1(s),u_2(s))$$

[14].

Burada $\overline{K_n^{\pm}}(s)=K_n^{\pm}(s)-1$ şeklinde tanımlanır ve $\overline{K_n^{\pm}}(s)$ ye $\gamma(s)$ *nin hiperbolik normal eğriliği* denir.

$p=x(u_0)$ noktasında $M=x(u)$ yüzeyinin Hiperbolik ve de Sitter Gauss eğrilikleri

$$\overline{K_h^{\pm}}(u_0)=\det S_p^{\pm}=\overline{K_1^{\pm}}(p)\overline{K_2^{\pm}}(p)$$

ve

$$K_e=\det Ap=K_1(p)K_2(p)$$

Hiperbolik ve de Sitter ortalama eğrilikleri

$$H_h^{\pm}(u_0)=\frac{1}{2}izS_p^{\pm}=\frac{\overline{K_1^{\pm}}(p)+\overline{K_2^{\pm}}(p)}{2}$$

ve

$$H_d(u_0)=\frac{1}{2}izAp=\frac{K_1(p)+K_2(p)}{2}$$

olarak tanımlanır.

de Sitter ortalama eğriliği tam olarak M nin ortalama eğriliğidir. Dolayısıyla H_d yerine H yazılır ve

$$H_h^{\pm}(u)=\pm H(u)-1$$

[14].

3.4. Hiperbolik Uzayda Sabit Açılı Yüzeyler

Sabit açılı yüzeyler Hiperbolik-3 uzaydaki yüzeylerin özel bir sınıfıdır. Teğet düzlemi H^3 de sabit bir vektör alanı ile sabit bir açı yapan yüzeye *sabit açılı yüzey* denir.

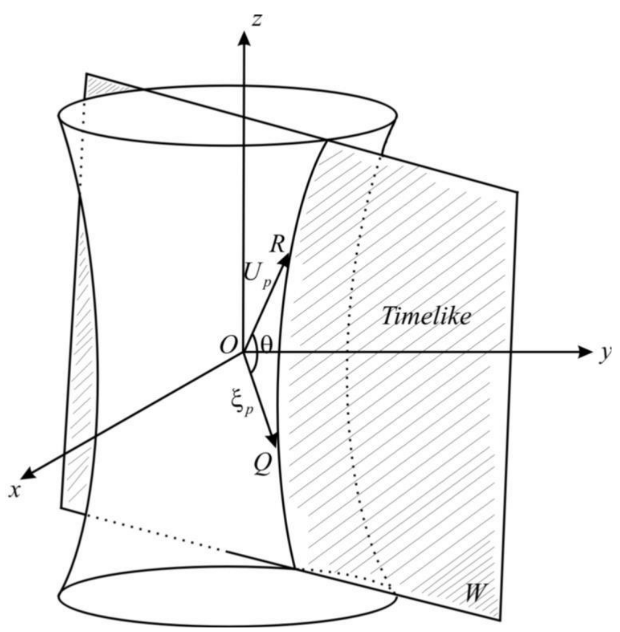
$x:M\to IR_1^4$ bir immersiyon olsun. Eğer x üzerindeki indirgenmiş metrik Lorentzian ise x'e *Timelike immersiyon,* Riemanian ise x'e *spacelike immersiyon,* dejenere ise x'e *Lightlike immersiyon* denir. Eğer $\langle x,x\rangle=-1$ ve $x_0>1$ ise x'e H^3 ün bir immersiyonu denir.

Bu bölümde H^3deki yüzeylerin iki özel sınıfı olan sabit timelike ve sabit spacelike açılı yüzeyler araştırılmıştır. Teğet düzlemi H^3deki sabit bir vektör alanı ile sabit bir timelike açı yapan yüzeye H^3 de *sabit timelike açılı yüzey* denir. Benzer şekilde ; teğet düzlemi H^3 deki sabit bir vektör alanı ile sabit bir spacelike açı yapan yüzeye H^3 de *sabit spacelike açılı yüzey* denir.

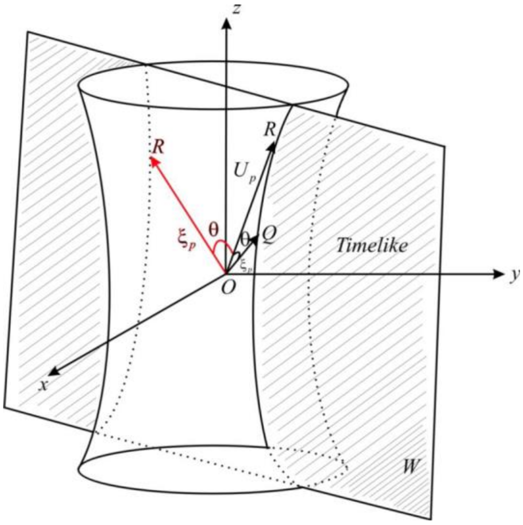
IR_1^4 Minkowski uzayında bir vektör alanının causal karekterlerinin çeşitliliğinden dolayı keyfi iki vektör alanı arasında doğal bir açı kavramı vardır. x, H^3 de spacelike immersion olduğundan ξ, M yüzeyi üzerinde birim spacelike vektör alanıdır. Eğer U, H^3 de birim spacelike vektör alanı ise $S_p\{U_p, \xi_p\}$ alt uzayı ya spacelike ya timelike ya da lightlike olur.

1. Eğer $S_p\{\xi_p, U_p\}$ timelike alt uzay ise;

QR hiperbolik doğru parçasının uzunluğuna ξ_p ve U_p arasındaki açının ölçüsü denir.



Şekil 3.1. Lorentz uzayında spacelike vektörler arasındaki timelike açı

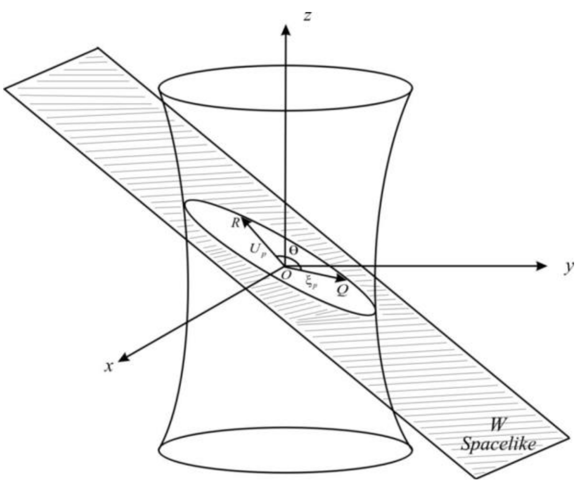


Şekil 3.2. Lorentz uzayında spacelike vektörler arasındaki timelike açı

Bu durumda $\left|\langle \xi_p, U_p \rangle\right| = \cosh\theta(\xi_p, U_p)$ olacak şekilde bir tek pozitif $\theta(\xi_p, U_p)$ reel sayısı vardır. Bu $\theta(\xi_p, U_p)$ reel sayısına ξ_p ve U_p spacelike vektörleri arasındaki timelike açı denir [9].

2. Eğer $S_p\{\xi_p, U_p\}$ spacelike alt uzay ise;

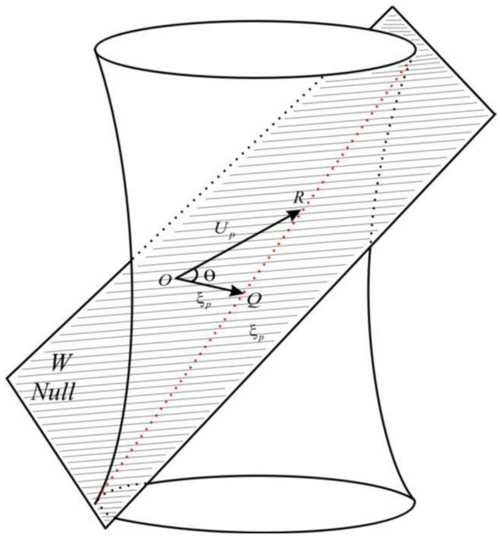
O halde her bir $p \in M$ için QR çember parçasının uzunluğuna ξ_p ve U_p arasındaki açının ölçüsü denir.



Şekil 3.3. Lorentz uzayında spacelike vektörler arasındaki spacelike açı

Bu durumda $\langle \xi_p, U_p \rangle = \cos\theta(\xi_p, U_p)$ olacak şekilde bir tek $\theta(\xi_p, U_p) \in (0, \pi)$ reel sayısı vardır. Bu $\theta(\xi_p, U_p)$ reel sayısına ξ_p ve U_p spacelike vektörleri arasındaki spacelike açı denir [9].

3. Eğer $S_p\{\xi_p, U_p\}$ lightlike alt uzay ise;



Şekil 3.4. Lorentz uzayındaki lightlike vektörler aasındaki açı

QR parçasının $d_E(Q,R)$ öklid uzunluğuna ξ_p ve U_p arasındaki açının ölçüsü denir. Bu durumda $\theta(\xi_p, U_p) = d_E(Q,R)$ olacak şekilde bir tek $\theta(\xi_p, U_p) \in IR$ reel sayısı vardır.

$\chi(M)$, M üzerindeki teğet vektör alanlarının modülü olsun. $\overline{\overline{D}}, \overline{D}, D$ ile sırasıyla IR_1^4, H^3 ve M nin Levi-Civita konneksiyonlarını belirtelim. O zaman $\widetilde{V}$, M nin IR_1^4 deki ikinci temel formunu, T ve $\perp$ simgeleri de $\overline{\overline{D}}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenlerini göstermek üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$D_X Y = \left(\overline{\overline{D}}_X Y\right)^T ,$$

$$\tilde{V} : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M),\ \tilde{V}(X,Y) = \left(\overline{\overline{D}}_X Y\right)^{\perp} ,$$

ve

$$\overline{\overline{D}}_X Y = \overline{D}_X Y + \langle X, Y \rangle x,\ \overline{\overline{D}}_X Y = D_X Y + \tilde{V}(X,Y). \qquad (3.1)$$

(3.1) denklemlerinin birincisine M nin H^3 deki, ikincisine de M nin IR_1^4 deki Gauss denklemi denir.

ξ, M nin H^3 deki birim normal vektör alanı olmak üzere $S_\xi^{\pm}(X)$ ve $A_x(X)$ dönüşümlerine $-\overline{\overline{D}}_X \xi$ ve $-\overline{\overline{D}}_X x$ teğet bileşenlerine karşılık gelen M nin H^3 ve IR_1^4 deki Weingarten dönüşümleri denir. Buna göre

$$\begin{aligned} S_\xi^{\pm}(X) &= -\overline{\overline{D}}_X \xi + \left\langle \overline{\overline{D}}_X x, \xi \right\rangle x \\ A_x(X) &= -\overline{\overline{D}}_X x + \left\langle \overline{\overline{D}}_X x, \xi \right\rangle \xi \end{aligned} \qquad (3.2)$$

$S_\xi^{\pm}(X)$ ve $A_x(X)$ in her bir $p \in M$ için lineer ve self adjoint operatörler olduğu [11] den görülebilir.

$S_\xi^{\pm}(X)$ ve $A_x(X)$ in $\overline{K_i^{\pm}}(p)$ ve $K_i(P)$ öz değerlerine M yüzeyinin sırasıyla H^3 ve IR_1^4 deki asli eğrilikleri denir.

Ayrıca $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\left\langle S^{\pm}(X), Y \right\rangle = \left\langle \tilde{V}(X,Y), \xi \right\rangle$$

ve

$$\langle A(X),Y\rangle=\langle\tilde{V}(X,Y),x\rangle.$$

$\tilde{V}(X,Y)$, M nin IR_1^4 deki ikinci temel formu olduğundan

$$\tilde{V}(X,Y)=\lambda_1\xi+\lambda_2 x$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\tilde{V}(X,Y)=\langle S^{\pm}(X),Y\rangle\xi-\langle A(X),Y\rangle x$$

bulunur. $\{v_1,v_2\},TpM$ teğet düzleminde bir bazı olmak üzere bundan sonra

$$\tilde{V}_{ij}=\langle\tilde{V}(v_i,v_j),\xi\rangle=\langle S^{\pm}(v_i),v_j\rangle$$

$$\tilde{W}_{ij}=\langle\tilde{V}(v_i,v_j),x\rangle=\langle A(v_i),v_j\rangle$$

kısa gösterimini kullanacağız. O halde

$$\overline{\overline{D}}_{v_i}v_j=D_{v_i}v_j-\tilde{V}_{ij}\xi+\langle v_i,v_j\rangle x \tag{3.3}$$

olarak yazılır. $\{v_1,v_2\}$ bazının ortonormal olması halinde de

$$\overline{\overline{D}}_{v_i}v_j=D_{v_i}v_j-\tilde{V}_{ij}\xi \tag{3.4}$$

Gauss denklemlerini elde ederiz. Benzer şekilde Weingarten denklemleri de

$$\overline{\overline{D}}_{v_i}\xi=-\tilde{v}_{i1}v_1-\tilde{v}_{i2}v_2 \tag{3.5}$$

$$\overline{\overline{D}}_{v_i}x=-\tilde{w}_{i1}v_1-\tilde{w}_{i2}v_2 \tag{3.6}$$

şeklindedir.

3.4.1. Hiperbolik Uzayda Sabit Timelike Açılı Yüzeyler

3.2.Tanım

$x:M\rightarrow H^3$ bir spacelike immersion ve ξ, M nin birim normal vektör alanı olsun. Eğer M üzerinde $\theta(\xi,U)$ timelike açısı sabit olacak şekilde bir U spacelike doğrultusu varsa M ye H^3de sabit timelike açılı yüzey denir.

ξ, M yüzeyinin H^3 de birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyi spacelike eksenli sabit timelike açılı yüzey olsun. O zaman ξ, U spacelike vektörleri arasındaki timelike açıyı θ, U spacelike vektörü ile x timelike vektörü arasındaki timelike açıyı da φ ile gösterelim. O halde

$$\langle \xi, U\rangle = -\cosh\theta,\ \langle U, x\rangle = \sinh(-\varphi)$$

olur. Eğer $\theta = 0$ ise $\xi = U$ olur. $\theta \neq 0$ ve M üzerinde $\langle U, x\rangle = sabit$ almak genelliği bozmaz. $U \in IR_1^4$ olmak üzere

$$U = U^T + U^N$$

şeklinde yazılır. O halde;

$$U = U^T + \lambda_1\xi + \lambda_2 x$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$U = U^T - (\cosh\theta)\xi + (\sinh\varphi)x$$

olur ve

$$\|U^T\| = \sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|} \neq 0$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla

$$e_1 = \frac{U^T}{\left\|U^T\right\|}$$

olmak üzere

$$U = \sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}e_1 - (\cosh\theta)\xi + (\sinh\varphi)x \tag{3.7}$$

bulunur. O halde hiperbolik uzaydaki sabit doğrultu

$$U_h = \sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}e_1 - (\cosh\theta)\xi \tag{3.8}$$

şeklinde tek olarak bulunur.

e_2, M üzerinde e_1 e ortogonal vektör alanı olmak üzere $\{e_1, e_2, \xi, x\}$ M nin her noktasında IR_1^4 ün ortonormal bazı olur. U_h, H^3 hiperbolik uzayında sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_2}U_h = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\overline{\overline{D}}_{e_2}U_h = \overline{D}_{e_2}U_h = 0$$

dır. O halde

$$\overline{\overline{D}}_{e_2}U_h = \sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}\overline{\overline{D}}_{e_2}e_1 - (\cosh\theta)\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi = 0$$

olduğundan

$$\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}\overline{\overline{D}}_{e_2}e_1 - (\cosh\theta)\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi = 0 \tag{3.9}$$

elde edilir. Buradan

$$\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}\left\langle\overline{\overline{D}}_{e_2}e_1, \xi\right\rangle - \cosh\theta\left\langle\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi, \xi\right\rangle = 0$$

olduğundan

$$\sqrt{\left|\sinh^2\varphi-\sinh^2\theta\right|}\left[\left\langle D_{e_2}e_1-\left\langle S^{\pm}(e_2),e_1\right\rangle\xi+\left\langle e_2,e_1\right\rangle x,\xi\right\rangle\right]=0$$

veya

$$\tilde{v}_{21}=\tilde{v}_{12}=0$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (3.9) denkleminden

$$\sqrt{\left|\sinh^2\varphi-\sinh^2\theta\right|}\,\overline{\overline{D}}_{e_2}e_1-(\cosh\theta)\left(-\tilde{v}_{21}e_1-\tilde{v}_{22}e_2\right)=0$$

veya buradan da

$$\overline{\overline{D}}_{e_2}e_1=-\frac{\cosh\theta}{\sqrt{\sinh^2\varphi-\sinh^2\theta}}\tilde{v}_{22}e_2 \tag{3.10}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde U_h, H^3 de sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_1}U_h=0$ dır. Ayrıca

$$\overline{\overline{D}}_{e_1}U_h=\overline{D}_{e_1}U_h+\left\langle e_1,U_h\right\rangle x$$

olduğundan

$$\overline{D}_{e_1}U_h=0 \text{ ve } \overline{\overline{D}}_{e_1}U_h=\sqrt{\left|\sinh^2\varphi-\sinh^2\theta\right|}x \tag{3.11}$$

elde edilir.

$$\overline{\overline{D}}_{e_1}U_h=\sqrt{\left|\sinh^2\varphi-\sinh^2\theta\right|}\,\overline{\overline{D}}_{e_1}e_1-(\cosh\theta)\overline{\overline{D}}_{e_1}\xi \tag{3.12}$$

ve (3.11) eşitliğinden

$$\sqrt{\left|\sinh^2\varphi-\sinh^2\theta\right|}\,\overline{\overline{D}}_{e_1}e_1-(\cosh\theta)\overline{\overline{D}}_{e_1}\xi=\sqrt{\left|\sinh^2\varphi-\sinh^2\theta\right|}x \tag{3.13}$$

olur. (3.13) denkleminin her iki tarafını ξ ile iç çarpıma tabi tutarak

$$\tilde{v}_{11} = 0$$

bulunur. Ayrıca (3.13) den

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 = x \tag{3.14}$$

eşitliği elde edilir.

3.1. Teorem

H^3 Hiperbolik uzayında spacelike eksenli sabit timelike açılı bir yüzey için D Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$D_{e_1} e_1 = 0 \qquad D_{e_2} e_1 = \frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} e_2$$

$$D_{e_1} e_2 = 0 \qquad D_{e_2} e_2 = \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} e_1$$

İspat

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 = D_{e_1} e_1 - \left\langle S^{\pm}(e_1), e_1 \right\rangle \xi + \left\langle e_1, e_1 \right\rangle x$$

olduğundan

$$x = D_{e_1} e_1 + x$$

veya

$$D_{e_1} e_1 = 0$$

elde edilir.

$$\left\langle e_1, e_2 \right\rangle = 0$$

olduğundan

$$\left\langle D_{e_1} e_2 , e_1 \right\rangle = 0$$

olur. $\langle e_2 , e_2 \rangle = 1$ olduğundan da $\left\langle D_{e_1} e_2 , e_2 \right\rangle = 0$ olur. Böylece

$$D_{e_1} e_2 = 0 .$$

Diğer taraftan

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 = D_{e_2} e_1 - \left\langle S^{\pm}(e_2), e_1 \right\rangle \xi + \langle e_2 , e_1 \rangle x$$

olduğundan

$$D_{e_2} e_1 = \overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 .$$

Ayrıca

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 = \frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} e_2$$

olduğundan da

$$D_{e_2} e_1 = \frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} e_2$$

olarak elde edilir. Son olarak $D_{e_2} e_2 = \dfrac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} e_1$ olduğunu gösterelim.

$$D_{e_2} e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

olacak şekilde yazılabilir. Buradan

$$\lambda_1 = \left\langle D_{e_2} e_2 , e_1 \right\rangle, \lambda_2 = \left\langle D_{e_2} e_2 , e_2 \right\rangle = 0$$

olur. O halde

$$D_{e_2} e_2 = \left\langle D_{e_2} e_2 , e_1 \right\rangle e_1$$

olduğundan

$$D_{e_2} e_2 = \left\langle \overline{\overline{D}}_{e_2} e_2 , e_1 \right\rangle e_1 \tag{3.15}$$

ve $\left\langle e_2 , e_1 \right\rangle = 0$ olduğundan (3.10) kullanılarak

$$\left\langle \overline{\overline{D}}_{e_2} e_2 , e_1 \right\rangle = \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22}$$

bulunur. Bu eşitlik (3.15) de yerine yazılarak

$$D_{e_2} e_2 = \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} e_1$$

elde edilir.

3.1. Sonuç

H^3 de sabit açılı bir spacelike M yüzeyi verilsin. O zaman $\beta = \beta(u,v), M$ yüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde u ve v lokal koordinatları vardır.

Yüzey Parametrizasyonunun Bulunması

Şimdi Sonuç 3.1 de verilen M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde $x = x(u,v)$ yüzeyinin parametrizasyonunu elde edelim.

3.2. Teorem

H^3 de spacelike eksenli sabit timelike açılı yüzeyin $x = x(u,v)$ parametrizasyonu

$$\begin{cases} x_{uu} = x \\ x_{uv} = \dfrac{\beta_u}{\beta} x_v \\ x_{vv} = -\beta\beta_u x_u + \dfrac{\beta_v}{\beta} x_v - \beta^2 \tilde{v}_{22}\xi + \beta^2 x \end{cases} \tag{3.16}$$

kısmi türevli denklem sistemini sağlar.

İspat:

$$\overline{\overline{D}}_{x_u} x_u = D_{x_u} x_u - \left\langle S^{\pm}\left(x_u\right), x_u \right\rangle \xi + \left\langle x_u, x_u \right\rangle x$$

ve

$$x_{uu} = \overline{\overline{D}}_{x_u} x_u$$

olduğundan

$$x_{uu} = x$$

bulunur.

$$x_{uv} = \overline{\overline{D}}_{x_v} x_u$$

ve

$$D_{x_v} x_u = \overline{\overline{D}}_{x_v} x_u$$

olduğundan

$$x_{uv} = D_{x_v} x_u$$

olur. Ayrıca

$$D_{e_2} e_1 = \frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} e_2$$

olduğundan da

$$x_{uv} = \frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} x_v \tag{3.17}$$

bulunur. Bu eşitliği x_v ile çarpıma tabi tutarak

$$\left\langle x_{uv}, x_v \right\rangle = \frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} \beta^2$$

ve

$$\left\langle x_v, x_v \right\rangle = \beta^2$$

eşitliğinden

$$\frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} = \frac{\beta_u}{\beta}$$

bulunur. Bu son eşitliği (3.17) de yerine yazarak

$$x_{uv} = \frac{\beta_u}{\beta} x_v$$

elde edilir.

$$\overline{\overline{D}}_{x_v/\|x_v\|} x_v / \left\|x_v\right\| = \frac{-\beta_v}{\beta^3} x_v + \frac{1}{\beta^2} x_{vv}$$

ve

$$\overline{\overline{D}}_{x_v/\|x_v\|} x_v / \|x_v\| = D_{x_v/\|x_v\|} x_v / \|x_v\| - \left\langle S^{\pm}\left(\frac{x_v}{\|x_v\|}\right), \frac{x_v}{\|x_v\|} \right\rangle \xi + \left\langle \frac{x_v}{\|x_v\|}, \frac{x_v}{\|x_v\|} \right\rangle x$$

olduğundan

$$\overline{\overline{D}}_{x_v/\|x_v\|} x_v / \|x_v\| = \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} \tilde{v}_{22} x_u - \tilde{v}_{22}\xi + x$$

bulunur. Böylece ;

$$x_{vv} = -\beta\beta_u x_u + \frac{\beta_v}{\beta} x_v - \beta^2 \tilde{v}_{22}\xi + \beta^2 x$$

olur.

3.2. Sonuç

ξ, sabit açılı M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyinin parametrizasyonu

$$\begin{cases} \xi u = \overline{\overline{D}}_{x_u}\xi = 0 \\ \xi v = \overline{\overline{D}}_{x_v}\xi = -\tilde{v}_{22} x_v \end{cases} \tag{3.18}$$

denklem sistemini sağlar.

İspat:

$$\begin{aligned} \xi_u &= \overline{\overline{D}}_{x_u}\xi \\ &= -\tilde{v}_{11} x_u - \tilde{v}_{12} \frac{x_v}{\|x_v\|} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\xi_u = 0$$

olur. Öte yandan

$$\xi v = \overline{\overline{D}}_{x_v}\xi \text{ ve } \overline{\overline{D}}_{x_v}\xi = \beta\overline{\overline{D}}_{x_v/\|x_v\|}\xi$$

olduğundan

$$\xi v = -\tilde{v}_{22}x_v$$

bulunur.

3.1.Önerme

M sabit timelike açılı spacelike eksenli bir yüzey ise $\beta(u,v)\tilde{v}_{22} = \psi(v)$ olacak şekilde $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu vardır.

İspat :

$\xi_{uv} = \xi_{vu} = 0$ olduğundan

$$\overline{\overline{D}}_{x_u}\left(-\tilde{v}_{22}x_v\right) = 0$$

veya

$$\left(\tilde{v}_{22}\right)_u x_v + \tilde{v}_{22}\overline{\overline{D}}_{x_u}x_v = 0 \tag{3.19}$$

olur. Ayrıca (3.19) ve Teorem 3.1 den

$$\left(\tilde{v}_{22}\right)_u - \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}}\left(\tilde{v}_{22}\right)^2 = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(\widetilde{v}_{22}\right)_u + \frac{\beta_u}{\beta}\widetilde{v}_{22} = 0 \tag{3.20}$$

veya

$$\left(\beta\widetilde{v}_{22}\right)_u = 0 \tag{3.21}$$

denkleminden

$$\beta\widetilde{v}_{22} = \psi(v) \tag{3.22}$$

olacak şekilde $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu bulunur.

3.2. Önerme

$x = x(u,v)$, H^3 Hiperbolik uzayında sabit açılı spacelike bir yüzeyin parametrizasyonu olsun. Eğer M üzerinde $\widetilde{v}_{22} = 0$ ise $x = x(u,v)$ hiperbolik düzlem belirtir.

İspat

M üzerinde $\widetilde{v}_{22} = 0$ olsun. ξ, sabit açılı M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyinin parametrizasyonu (3.18) kısmi türevli denklem sistemini sağladığından

$$\begin{cases} \xi u = 0 \\ \xi v = 0 \end{cases}$$

sistemi sağlanır. Buradan da ξ, M boyunca sabit bir vektör olmalıdır. Dolayısıyla M yüzeyinin normali sabit olduğundan $x = x(u,v)$ hiperbolik düzlem belirtir.

Tezin kalan kısmında $\widetilde{v}_{22} \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. (3.20) den elde edilen

$$\left(\tilde{v}_{22}\right)_u - \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}}\left(\tilde{v}_{22}\right)^2 = 0 \tag{3.23}$$

kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü arayalım. $\tilde{v}_{22} = \tilde{v}_{22}(u,v)$ iki değişkenli bir fonksiyon olmasına rağmen (3.23) denklemi değişkenlerden sadece birinin türevini ihtiva eden bir denklem olduğundan (3.23) denklemini adi türevli diferansiyel denklem gibi düşünebiliriz. Dolayısıyla

$$\frac{\left(\tilde{v}_{22}\right)_u}{\left(\tilde{v}_{22}\right)^2} - \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}} = 0$$

ve buradan da

$$\tilde{v}_{22} = \frac{-\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}}{u\cosh\theta + \alpha(v)}, \alpha(v) = \sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}\,\bar{\alpha}(v)$$

olacak şekilde bir $\alpha(v)$ fonksiyonu vardır.

(3.22) denkleminden

$$\beta(u,v) = \frac{-\psi(v)}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}}\left(u\cosh\theta + \alpha(v)\right)$$

elde edilir.

Özel olarak

$$\psi(v) = -v\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}$$

ve

$$\alpha(v) = \frac{1}{v}$$

alarak (3.16) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{cases} x_{uu} &= x \\ x_{uv} &= \dfrac{v\cosh\theta}{uv\cosh\theta+1}x_v \\ x_{vv} &= -v\cosh\theta\left(uv\cosh\theta+1\right)x_u+\dfrac{u\cosh\theta}{uv\cosh\theta+1}x_v \\ & -v\sqrt{\left|\sinh^2\varphi-\sinh^2\theta\right|}\left(uv\cosh\theta+1\right)\xi+\left(uv\cosh\theta+1\right)^2 x \end{cases} \tag{3.24}$$

kısmi türevli denklem sistemini elde ederiz.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.3. Teorem

(3.24) denklem sistemini sağlayan x spacelike immersiyonu M üzerinde u,v lokal koordinatlarına göre

$$x_i(u,v)=\frac{-C_{1i}(v)}{2v\cosh\theta(uv\cosh\theta+1)^2}+C_{2i}(v), i=1,2,3,4 \tag{3.25}$$

şeklindedir.

İspat

$$x=x_{uu}, x_v=\frac{uv\cosh\theta+1}{v\cosh\theta}x_{uv}$$

eşitliklerini (3.24) denklem sisteminin üçüncü denkleminde

yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &-\left(uv\cosh\theta+1\right)^2 x_{uu}+x_{vv}-\frac{u}{v}x_{uv}+v\cosh\theta\left(uv\cosh\theta+1\right)x_u \\ &=v\sqrt{\left|\sinh^2\varphi-\sinh^2\theta\right|}\left(uv\cosh\theta+1\right)\xi \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir.

Şimdi verilen kısmi türevli diferansiyel denklemde $\xi = \xi(u,v)$ fonksiyonunun analitik ifadesi bilinmediğinden $\xi_u = 0$ eşitliğinden yararlanarak verilen denklemi homojen kısmi türevli denkleme indirgeyelim.

(3.26) nın her iki tarafının u -ya göre türevini alarak

$$-v\cosh\theta(uv\cosh\theta+1)x_{uu}+\frac{v\cosh\theta}{uv\cosh\theta+1}x_{vv}-\left[\frac{1}{v}+\frac{u\cosh\theta}{uv\cosh\theta+1}\right]x_{vu}$$

$$+\left[v^2\cosh^2-(uv\cosh\theta+1)^2\right]x_u+\left[\frac{\cosh\theta}{(uv\cosh\theta+1)^2}+\frac{uv\cosh^2\theta}{(uv\cosh\theta+1)^2}\right]x_v$$

$$=-v^2\cosh\theta\sqrt{\left|\sinh^2\varphi-\sinh^2\theta\right|}\xi$$

elde edilir. Son eşitliğin u ya göre tekrar türevini alarak

$$(uv\cosh\theta+1)^2 x_{uu}+3v\cosh\theta(uv\cosh\theta+1)x_u=0$$

sistemi elde edilir. Buradan

$$x_{uu}+\frac{3v\cosh\theta}{uv\cosh\theta+1}x_u=0$$

elde edilir. Buradan

$$x_i=\frac{-c_{1i}(v)}{2v\cosh\theta(uv\cosh\theta+1)^2}+c_{2i}(v),\ i=1,2,3,4$$

parametrizasyonu bulunur.

3.1 Örnek

Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit timelike açılı yüzeyler için Gauss eğrilikleri, ortalama eğrilikler ve normal eğrilikleri hesaplayalım.

$X \in \chi(M), \xi \in \chi(M)^{\perp}$ olmak üzere

$$\overline{\overline{D}}_X \xi = \overline{D}_X \xi$$

olduğundan

$$\overline{\overline{D}}_{v_i} \xi = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 \xi$$

olarak yazılır. Buradan

$$\begin{cases} \lambda_1 = \left\langle \overline{\overline{D}}_{v_i} \xi, v_1 \right\rangle \\ \lambda_2 = \left\langle \overline{\overline{D}}_{v_i} \xi, v_2 \right\rangle \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\overline{\overline{D}}_{v_i} \xi = -\tilde{v}_{i1} v_1 - \tilde{v}_{i2} v_2$$

olarak elde edilir.

Dolayısıyla $S_{\xi}^{\pm}(v_i) = -\overline{\overline{D}}_{v_i} \xi$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$S^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{22} \end{pmatrix}$$

ve

$$\tilde{v}_{22} = \frac{v\sqrt{\left|\sinh^2 \varphi - \sinh^2 \theta\right|}}{1 + uv \cosh \theta} \quad .$$

$S_p^{\pm}$ lineer dönüşümünün karakteristik değerleri yani yüzeyin asli eğrilikleri

$\overline{K_1^{\pm}}(p)=0$ ve $\overline{K_2^{\pm}}(p)=\tilde{v}_{22}$

olur. Dolayısıyla $p=x(u_0)$ noktasında $M=x(u)$ yüzeyinin Hiperbolik Gauss eğriliği ve hiperbolik ortalama eğriliği

$$\overline{K_h^{\pm}}=0$$

ve

$$H_h^{\pm}=\frac{1}{2}\tilde{v}_{22}$$

olarak elde edilir. Öte yandan $S_p^{\pm}$ ve A_P aynı öz vektörlere sahiptir ve

$$\overline{K_i^{\pm}}(p)=-1\pm K_i(p)$$

olduğundan

$$K_1(p)=\pm 1 \qquad K_2(p)=\pm(1+\tilde{v}_{22})$$

olur. O halde $p=x(u_0)$ da M yüzeyinin de Sitter Gauss eğriliği ve de Sitter ortalama eğriliği

$$K_e=\pm(1+\tilde{v}_{22})$$

ve

$$H_d=\frac{\pm(2+\tilde{v}_{22})}{2}$$

olarak elde edilir.

$p=\gamma(s_0)$ noktasında $\gamma(s)$ nin de Sitter normal eğriliği ve hiperbolik normal eğriliği

$$K_n^{\pm}(s_0)=0$$

ve

$$\overline{K_n^{\pm}}(s)=-1$$

olur.

3.4.2. Hiperbolik Uzayda Sabit Spacelike Açılı Yüzeyler

3.3. Tanım

$x:M\rightarrow H^3$ bir spacelike immersiyon ve ξ, M nin birim normal vektör alanı olsun. Eğer M üzerinde $\theta(\xi,U)$ spacelike açısı sabit olacak şekilde bir U spacelike doğrultusu varsa M ye H^3 de sabit spacelike açılı yüzey denir.

ξ, M yüzeyinin H^3 de birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyi spacelike eksenli sabit spacelike açılı yüzey olsun. O zaman ξ, U spacelike vektörleri arasındaki spacelike açıyı θ ve U spacelike vektörü ile x timelike vektörleri arasındaki timelike açıyıda φ ile gösterelim. O halde

$$\cos\theta=\langle\xi,U\rangle \text{ ve } \langle U,x\rangle=\sinh(-\varphi), \varphi\neq 0$$

olur. Eğer $\theta=0$ ise $\xi=U$ olur. $\theta\neq 0$ ve M yüzeyi üzerinde $\langle U,x\rangle=$ sabit almak genelliği bozmaz. $U\in IR_1^4$ olmak üzere

$$U=U^T+U^N$$

şeklinde yazılır. O halde

$$U=U^T+\lambda_1\xi+\lambda_2 x$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$U = U^T + (\cos\theta)\xi + (\sinh\varphi)x$$

olur ve

$$\|U^T\| = \sqrt{\sin^2\theta + \sinh^2\varphi}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla

$$e_1 = \frac{U^T}{\|U^T\|}$$

olmak üzere

$$U = \sqrt{\sin^2\theta + \sinh^2\varphi}\, e_1 + (\cos\theta)\xi + (\sinh\varphi)x$$

bulunur. O halde hiperbolik uzaydaki sabit doğrultu

$$U_h = \sqrt{\sin^2\theta + \sinh^2\varphi}\, e_1 + (\cos\theta)\xi \qquad (3.27)$$

şeklinde tek olarak bulunur.

e_2, M üzerinde e_1 'e ortogonal vektör alanı olmak üzere $\{e_1, e_2, \xi, x\}$ M nin her noktasında IR_1^4 ün ortonormal bazı olur. U_h, H^3 hiperbolik uzayında sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_2}U_h = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\overline{\overline{D}}_{e_2}U_h = \overline{D}_{e_2}U_h = 0 \ .$$

O halde

$$\overline{\overline{D}}_{e_2}U_h = \sqrt{\sin^2\theta + \sinh^2\varphi}\, \overline{\overline{D}}_{e_2}e_1 + (\cos\theta)\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi = 0$$

olduğundan

$$\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}\,\overline{\overline{D}}_{e_2}e_1+(\cos\theta)\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi=0 \tag{3.28}$$

elde edilir. Buradan

$$\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}\left\langle\overline{\overline{D}}_{e_2}e_1,\xi\right\rangle+\cos\theta\left\langle\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi,\xi\right\rangle=0$$

veya

$$\tilde{v}_{21}=\tilde{v}_{12}=0$$

olarak elde edilir. Böylece (3.28) denkleminden

$$\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}\,\overline{\overline{D}}_{e_2}e_1+\cos\theta\left[-\tilde{v}_{21}e_1-\tilde{v}_{22}e_2\right]=0$$

ve buradan da

$$\overline{\overline{D}}_{e_2}e_1=\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}}\tilde{v}_{22}e_2 \tag{3.29}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde U_h, H^3 de sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_1}U_h=0$.

Ayrıca

$$\overline{\overline{D}}_{e_1}U_h=\overline{D}_{e_1}U_h+\left\langle e_1,U_h\right\rangle x$$

olduğundan

$$\overline{D}_{e_1}U_h=0 \text{ ve } \overline{\overline{D}}_{e_1}U_h=\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}\,x$$

elde edilir.

$$\overline{\overline{D}}_{e_1}U_h=\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}\,\overline{\overline{D}}_{e_1}e_1+(\cos\theta)\overline{\overline{D}}_{e_1}\xi$$

olmak üzere

$$\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}\,\overline{\overline{D}}_{e_1}e_1+(\cos\theta)\overline{\overline{D}}_{e_1}\xi=\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}\,x \tag{3.30}$$

olur. (3.30) denkleminin her iki tarafını ξ ile iç çarpıma tabi tutarak

$$\widetilde{v}_{11}=0$$

buluruz. Ayrıca (3.30) dan

$$\overline{\overline{D}}_{e_1}e_1=x \tag{3.31}$$

eşitliği elde edilir.

3.4.Teorem

H^3 Hiperbolik uzayında spacelike eksenli sabit spacelike açılı bir yüzey için D Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$D_{e_1}e_1=0 \qquad D_{e_2}e_1=\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}}\tilde{v}_{22}e_2$$

$$D_{e_1}e_2=0 \qquad D_{e_2}e_2=\frac{-\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}}\tilde{v}_{22}e_1$$

3.3. Sonuç

H^3 de sabit spacelike açılı sabit spacelike eksenli bir spacelike M yüzeyi verilsin. O zaman $\beta=\beta(u,v)$, M yüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle,\rangle:=du^2+\beta^2dv^2$ olacak şekilde u ve v lokal koordinatları vardır.

Yüzey Parametrizasyonunun Bulunması

Şimdi M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde $x = x(u,v)$ yüzeyinin parametrizasyonunu elde edelim.

3.5. Teorem

H^3 de sabit spacelike açılı sabit spacelike eksenli bir spacelike M yüzeyinin $x = x(u,v)$ parametrizasyonu

$$\begin{cases} x_{uu} = x \\ x_{uv} = \dfrac{\beta_u}{\beta} x_v \\ x_{vv} = -\beta\beta_u x_u + \dfrac{\beta_v}{\beta} x_v - \beta^2 \tilde{v}_{22}\xi + \beta^2 x \end{cases} \tag{3.32}$$

kısmi türevli denklem sistemini sağlar.

3.3. Önerme

$x = x(u,v)$, H^3 Hiperbolik uzayında sabit açılı spacelike bir yüzeyin parametrizasyonu olsun. Eğer M üzerinde $\tilde{v}_{22} = 0$ ise $x = x(u,v)$ hiperbolik düzlem belirtir.

Tezin kalan kısmında $\tilde{v}_{22} \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz.

3.4. Sonuç

ξ, sabit açılı M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyinin parametrizasyonu

$$\begin{cases} \xi_u = \overline{\overline{D}}_{x_u}\xi = 0 \\ \xi_v = \overline{\overline{D}}_{x_v}\xi = -\tilde{v}_{22} x_v \end{cases} \tag{3.33}$$

kısmi türevli denklem sistemini sağlar.

3.4. Önerme

M sabit spacelike açılı spacelike eksenli bir yüzey ise $\beta(u,v)\tilde{v}_{22}=\psi(v)$ olacak şekilde $\psi=\psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu vardır.

İspat

$\xi_{uv}=\xi_{vu}=0$ olduğundan $\overline{\overline{D}}_{x_u}\left(-\tilde{v}_{22}x_v\right)=0$ veya

$$\left(\tilde{v}_{22}\right)_u x_v+\tilde{v}_{22}\overline{\overline{D}}_{x_u}x_v=0 \tag{3.34}$$

olur. Diğer taraftan

$$\overline{\overline{D}}_{x_u}x_v=D_{x_u}x_v\ ,\ \overline{\overline{D}}_{x_v}x_u=D_{x_v}x_u\ \text{ ve }\ \overline{\overline{D}}_{x_u}x_v=\overline{\overline{D}}_{x_v}x_u$$

olduğundan

$$D_{x_u}x_v=D_{x_v}x_u$$

bulunur. Ayrıca (3.34) ve Teorem3.4 den

$$\left(\tilde{v}_{22}\right)_u+\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}}\left(\tilde{v}_{22}\right)^2=0 \tag{3.35}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(\tilde{v}_{22}\right)_u+\frac{\beta_u}{\beta}\tilde{v}_{22}=0 \tag{3.36}$$

veya

$$\left(\beta\tilde{v}_{22}\right)_u=0$$

denkleminden

$$\beta\tilde{v}_{22} = \psi(v) \tag{3.37}$$

olacak şekilde $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu elde edilir.

Şimdi (3.35) kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü arayalım. $\tilde{v}_{22} = \tilde{v}_{22}(u,v)$ iki değişkenli bir fonksiyon olmasına rağmen (3.35) denklemi değişkenlerden sadece birinin türevini ihtiva eden bir denklem olduğundan (3.35) denklemini adi türevli diferansiyel denklem gibi düşünebiliriz. Dolayısıyla

$$\frac{\left(\tilde{v}_{22}\right)_u}{\left(\tilde{v}_{22}\right)^2} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \sinh^2\varphi}} = 0$$

ve böylece

$$\tilde{v}_{22} = \frac{\sqrt{\sin^2\theta + \sinh^2\varphi}}{u\cos\theta + \alpha(v)}, \alpha(v) = -\sqrt{\sin^2\theta + \sinh^2\varphi}\,\bar{\alpha}(v)$$

olacak şekilde bir $\alpha(v)$ fonksiyonu vardır.

O halde (3.37) denkleminden

$$\beta(u,v) = \frac{\psi(v)}{\sqrt{\sin^2\theta + \sinh^2\varphi}}\left(u\cos\theta + \alpha(v)\right)$$

şeklinde elde edilir.

Özel olarak $\psi(v) = v\sqrt{\sin^2\theta + \sinh^2\varphi}$ ve $\alpha(v) = \frac{1}{v}$ alarak (3.32) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{cases} x_{uu} &= x \\ x_{uv} &= \dfrac{v\cos\theta}{vu\cos\theta+1}x_v \\ x_{vv} &= -v\cos\theta\left(uv\cos\theta+1\right)x_u+\dfrac{u\cos\theta}{uv\cos\theta+1}x_v \\ & -v\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}\left(uv\cos\theta+1\right)\xi+\left(uv\cos\theta+1\right)^2 x \end{cases} \tag{3.38}$$

denklem sistemini elde ederiz.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.6. Teorem

(3.38) denklem sistemini sağlayan x spacelike immersiyonu M yüzeyinin u,v lokal koordinatlarına göre

$$x_i(u,v)=\frac{-C_{2i}(v)}{2v\cos\theta(uv\cos\theta+1)^2}+C_{2i}(v), i=1,2,3,4 \tag{3.39}$$

şeklindedir.

3.5. Sonuç

Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit timelike açılı ve spacelike açılı yüzeyler hiperbolik düzlemseldir.

3.6. Sonuç

Hiperbolik uzayda sabit spacelike eksenli timelike açılı ve spacelike açılı minimal yüzeyler sadece düzlemdir.

3.4.Tanım

Eğer $K_1(p)=K_2(p)$ ise $u\in U$ veya $p=x(u)$ noktasına umbilical nokta denir. $S_p^{\pm}$ ve Ap nin öz vektörleri aynı olduğundan bu koşul $\overline{K_1^{\pm}}(p)=\overline{K_2^{\pm}}(p)$ koşuluna denktir. Eğer M üzerindeki tüm noktalar umbilical nokta ise $M=x(u)$ ya total umbilical denir [14].

3.7. Sonuç

Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit timelike açılı yüzey için $\overline{K_1^{\pm}}=0$ ve $\overline{K_2^{\pm}}=\widetilde{v}_{22}$ olduğundan bu yüzey üzerinde umbilical nokta yoktur.

3.8. Sonuç

Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit spacelike açılı yüzey için $\overline{K_1^{\pm}}=0$ ve $\overline{K_2^{\pm}}=\widetilde{v}_{22}$ olduğundan bu yüzey üzerinde umbilical nokta yoktur.

3.5. Tanım

Hiperbolik uzayda total umbilical bir yüzeye Horoküre denir [14].

3.9. Sonuç

Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit timelike ve sabit spacelike açılı yüzeyler horoküre değildir.

4. HİPERBOLİK UZAYDA SABİT AÇILI YÜZEY ÖRNEKLERİ

4.1. Hiperbolik Uzayda Sabit Açılı Teğet Yüzeyler

$\alpha : I \to H^3 \subset IR_1^4$ yay parametresi ile verilen regüler eğri olsun.

$$x(s,t)=(\cosh t)\alpha(s)+(\sinh t)\alpha'(s),\ (s,t)\in I\times IR \tag{4.1}$$

olmak üzere α-eğrisi ile üretilen M teğet yüzeyini tanımlayalım. M yüzeyinin (s,t) noktasındaki teğet düzlemi $\{x_s, x_t\}$ ile üretilir.

$$\begin{cases} x_s = (\cosh t)\alpha'(s) + (\sinh t)\alpha''(s) \\ x_t = (\sinh t)\alpha(s) + (\cosh t)\alpha'(s) \end{cases}$$

olmak üzere $\{x_s, x_t\}$ tabanına göre M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = 1 + K_h^2 \sinh^2 t,\ F = 1,\ G = 1$$

şeklindedir. O halde $EG - F^2 > 0$ olduğundan M yüzeyi spacelike bir yüzeydir. O halde $\{\alpha(s), t(s), n(s), e(s)\}, IR_1^4$ ün pseudo ortonormal çatısı olmak üzere Frenet-Serret tip formüllerden yararlanırsak

$$\begin{cases} x(s,t) = (\cosh t)\alpha(s) + (\sinh t)t(s) \\ x_s(s,t) = (\sinh t)\alpha(s) + (\cosh t)t(s) + K_h(s)(\sinh t)n(s) \\ x_t(s,t) = (\sinh t)\alpha(s) + (\cosh t)t(s) \end{cases} \tag{4.2}$$

olarak elde edilir. Öte yandan yüzeyimizin normal vektörü

$$e = \frac{x \times x_s \times x_t}{\|x \times x_s \times x_t\|} = \mp \frac{\alpha \times \alpha' \times \alpha''}{|K_h|}$$

şeklindedir.

4.1.1. Spacelike Eksenli Sabit Timelike Açılı Teğet Yüzeyler

Burada özel olarak hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit timelike açılı teğet yüzeyleri ele alacağız. Sabit spacelike eksenli sabit timelike açılı bir yüzeyin U_h doğrultusu

$$U_h = \sqrt{\left|\sinh^2 \varphi - \sinh^2 \theta\right|}\, e_1 - (\cosh \theta)\xi$$

idi. O halde

$$e_1 = \frac{x_s}{\|x_s\|}, \|x_s\| = \sqrt{1+(\sinh^2 t)K_h^2}$$

olmak üzere spacelike eksenli sabit timelike açılı teğet yüzeyin doğrultusu

$$\begin{aligned} U_h = (\sinh t\sqrt{\frac{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}{1+\sinh^2 tK_h^2}})\alpha(s) + (\cosh t\sqrt{\frac{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}{1+\sinh^2 tK_h^2}})t(s) + \\ +(K_h(s)\sinh t\sqrt{\frac{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}{1+\sinh^2 tK_h^2}})n(s) - (\cosh\theta)e(s) \end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde elde edilir.

4.1. Teorem

$\alpha : I \subset IR \to H^3$ hiperbolik doğrudan farklı bir eğri olsun. Eğer (4.1) de verilen teğet yüzeyi sabit spacelike eksenli sabit timelike açılı yüzey ise $\alpha(s)$ eğrisi hiperbolik düzlemseldir.

İspat

$\alpha : I \to H^3$ hiperbolik doğrudan farklı bir eğri olmak üzere $x(s,t)$ teğet yüzeyi sabit spacelike eksenli timelike açılı yüzey olsun. O halde

$$\xi = \frac{x \times x_s \times x_t}{\|x \times x_s \times x_t\|} = e(s) \tag{4.4}$$

olduğundan

$$\langle \xi, U_h \rangle = \langle e(s), U_h \rangle = -\cosh\theta \tag{4.5}$$

olacak şekilde $\theta > 0$ reel sayısı vardır. Buradan (4.5) eşitliğinin her iki tarafının s ye göre türevini alırsak

$$\langle e'(s), U_h \rangle = 0$$

olur. Ayrıca Frenet denklem sisteminden

$$\langle n(s), U_h \rangle = 0 \quad \text{veya} \quad \tau_h(s) = 0 \tag{4.6}$$

olur. Eğer (4.6) denkleminde $\langle n(s), U_h \rangle = 0$ ise (4.3) denkleminin her iki tarafının $n(s)$ ile iç çarpımını alırsak

$$\langle n(s), U_h \rangle = K_h(s)\sinh t\sqrt{\frac{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}{1 + K_h^2 \sinh^2 t}} = 0$$

olduğundan

$$K_h(s)\sinh t = 0, \; K_h(s) \neq 0$$

ve buradan da

$$\sinh t = 0$$

olacağından

$$t = 0$$

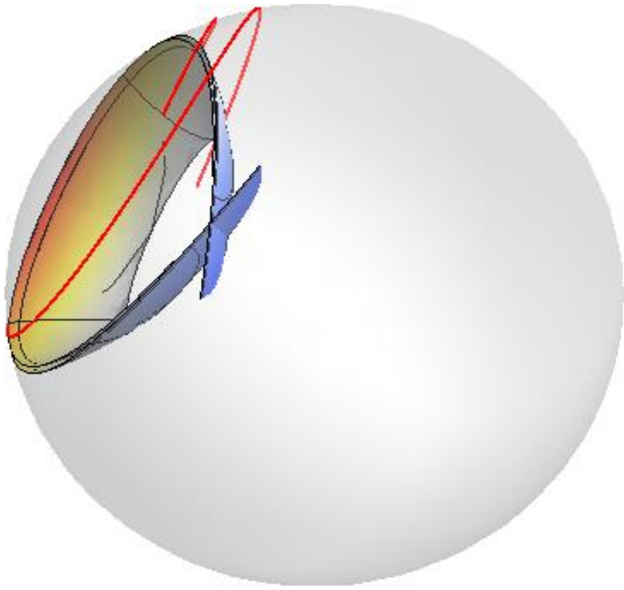
olur ki bu da teğet yüzeyin tanımıyla çelişir. O halde (4.6) denkleminden

$$\tau_h(s) = 0$$

olur. Bu ise α -eğrisinin hiperbolik düzlemsel bir eğri olduğunu gösterir.

4.1. Örnek

$\alpha : I \to H^3 \subset IR_1^4, \alpha(s) = (\sqrt{1+s^2}, s\cos(\arcsin h(s)), s\sin(\arcsin h(s)), 0)$ şeklinde yay uzunluğu parametresi ile verilmiş regüler bir eğri olsun. α eğrisi yardımıyla üretilen $x(s,t)$ teğet yüzeyinin Stereografik izdüşüm altındaki görüntüsü aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.1. Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit timelike açılı teğet yüzey

4.1.2 Spacelike Eksenli Sabit Spacelike Açılı Teğet Yüzeyler

Bu bölümde hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit spacelike açılı teğet yüzeyleri çalışacağız. Sabit spacelike eksenli sabit spacelike açılı bir yüzeyin U_h doğrultusu

$$U_h = \sqrt{\sin^2\theta + \sinh^2\varphi}\, e_1 + (\cos\theta)\xi$$

idi. O halde

$$e_1 = \frac{x_s}{\|x_s\|}, \|x_s\| = \sqrt{1 + K_h^2 \sinh^2 t}$$

ve $\xi = e$ olmak üzere spacelike eksenli sabit spacelike açılı teğet yüzeyin doğrultusu

$$U_h = (\sinh t\sqrt{\frac{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}{1+K_h^2\sinh^2 t}})\alpha(s)+(\cosh t\sqrt{\frac{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}{1+K_h^2\sinh^2 t}})t(s)$$

$$+(K_h(s)\sinh t\sqrt{\frac{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}{1+K_h^2\sinh^2 t}})n(s)+(\cos\theta)e(s) \tag{4.7}$$

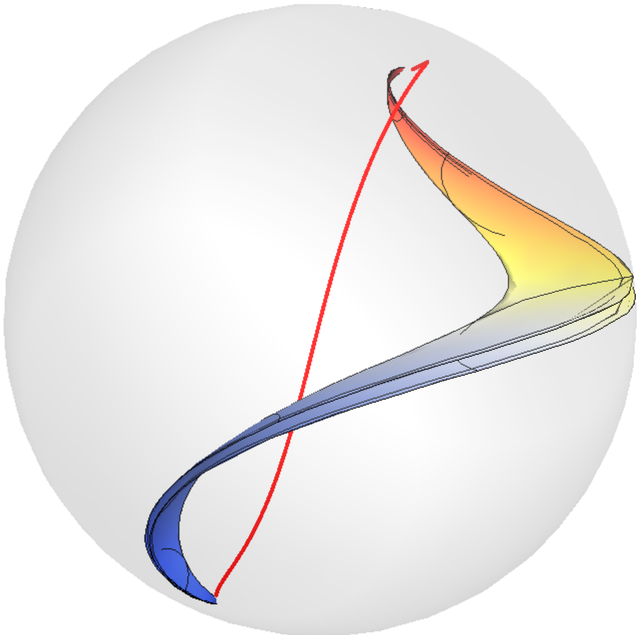
şeklinde elde edilir.

4.2. Teorem

$\alpha : I \subset IR \to H^3$ hiperbolik doğrudan farklı bir eğri olsun. Eğer (4.1) de verilen teğet yüzeyi sabit spacelike eksenli sabit spacelike açılı yüzey ise $\alpha(s)$ eğrisi hiperbolik düzlemseldir.

4.2. Örnek

$\alpha : I \to H^3 \subset IR_1^4, \alpha(s) = (\sqrt{2}\cosh(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sqrt{2}\sinh(\frac{s}{\sqrt{2}}), 1, 0)$ şeklinde yay uzunluğu parametresi ile verilmiş regüler bir eğri olsun. α eğrisi yardımıyla üretilen $x(s,t)$ teğet yüzeyinin Stereografik izdüşüm altındaki görüntüsü aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.2. Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit spacelike açılı teğet yüzey

5. DE SİTTER UZAYINDA EĞRİLER VE YÜZEYLER

Bu bölümde S_1^3 uzayında eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi özetlenmiştir [22].

$v \in IR_1^4$ ve $c \in IR$ için $HP(v,c) = \{x \in IR_1^4 \mid \langle x,v \rangle = c\}$

şeklinde v pseudo normalli hiperdüzlemleri tanımlayalım.

5.1. Tanım

a) v timelike ise $HP(v,c)$ bir spacelike hiperdüzlemdir.

b) v spacelike ise $HP(v,c)$ bir timelike hiperdüzlemdir.

c) v lightlike ise $HP(v,c)$ bir lightlike hiperdüzlemdir [22].

5.2. Tanım

$U \subset IR^2$ bir açık küme olmak üzere $x: U \to S_1^3$ bir embedding ve $M = x(U)$ olsun. $\forall p \in M$ için T_pM spacelike (timelike) ise M ' ye spacelike (timelike) hiperyüzey denir [22].

5.3. Tanım

$P_d = HP(v,c) \cap S_1^3$ kümesine S_1^3 ün bir düzlemi denir. Eğer $HP(v,c)$ sırasıyla timelike, spacelike veya lightlike ise P_d ye S_1^3 de sırasıyla timelike, spacelike veya lightlike düzlem denir.

S_1^3 ün timelike, spacelike veya lightlike düzlemlerine sırasıyla hiperbolik hiperkuadrik, eliptik hiperkuadrik veya de Sitter hiperhoroküre denir [22].

Şimdi [22] de verilen S_1^3 ün eğrilerinin extrinsic diferansiyel geometrisini özetleyelim. $\gamma : I \to S_1^3$ birim hızlı regüler spacelike (veya timelike) bir eğri ve $t(s)$ γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki teğet vektörü olmak üzere γ nın normal vektörü

$$n(s) = \frac{t'(s) + \gamma(s)}{\| t'(s) + \gamma(s) \|} \text{ (veya } n(s) = \frac{t'(s) - \gamma(s)}{\| t'(s) - \gamma(s) \|} \text{)}$$

olarak verilir. γ nın binormal vektörü de $e(s) = \gamma(s) \wedge t(s) \wedge n(s)$ şeklinde tanımlanır. Buradan elde edilen $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ çatısına γ-boyunca IR_1^4 ün pseudo ortogonal çatısı denir.

$\gamma : I \to S_1^3$ eğrisinin spacelike (veya timelike) olması halinde

$$\kappa_d(s) = \| t'(s) + \gamma(s) \| \text{ (veya } \kappa_d(s) = \| t'(s) - \gamma(s) \| \text{)}$$

değerine γ nın de Sitter eğriliği

$$\tau_d(s) = -\frac{\det(\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''')}{\kappa_d^2(s)}$$

değerinede γ nın de Sitter burulması denir. Ayrıca γ spacelike eğrisinin $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ çatısından elde edilen

$$\begin{cases} \gamma'(s) = t(s) \\ t'(s) = \kappa_d(s) n(s) - \gamma(s) \\ n'(s) = -\kappa_d(s) t(s) - \tau_d(s) e(s) \\ e'(s) = -\tau_d(s) n(s) \end{cases}$$

eşitliklerine γ spacelike eğrisinin Frenet- Serret formülleri denir.

Benzer şekilde γ timelike eğrisinin $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ çatısından elde edilen

$$\begin{cases} \gamma'(s) = t(s) \\ t'(s) = \kappa_d(s)n(s) + \gamma(s) \\ n'(s) = \kappa_d(s)t(s) + \tau_d(s)e(s) \\ e'(s) = -\tau_d(s)n(s) \end{cases}$$

eşitliklerine γ timelike eğrisinin Frenet-Serret formülleri denir.

$\kappa_d(s)$ nin tanımından $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 1$ olması $\kappa_d(s) \neq 0$ olmasına denk olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi de S_1^3 ün yüzeylerinin extrinsic diferansiyel geometrisini özetliyelim.

$U \subset IR^2$ nin bir açık alt kümesi olmak üzere $x : U \to S_1^3$ bir regüler yüzeyin parametrizasyonu olsun. O zaman $\{x_{u_1} = x_1, x_{u_2} = x_2\}$, x ile tanımlanan yüzeyin teğet düzleminin bazı olmak üzere

$$e(u) = \frac{x(u) \wedge x_1(u) \wedge x_2(u)}{\| x(u) \wedge x_1(u) \wedge x_2(u) \|}$$

vektörüne S_1^3 de yüzeyin birim normali denir.

$$E : U \subset IR^2 \to S_1^3, \; E(u) = e(u)$$

şeklindeki dönüşüme x parametrizasyonu ile verilen yüzeyin *de Sitter Gauss dönüşümü* denir.

$$Ap := -dE(u_0) : TpM \to TpM$$

tanımlı lineer dönüşüme $p = x(u_0)$ noktasında $M = x(u)$ nun *de Sitter şekil operatörü* denir. $K_1(p)$ ve $K_2(p)$, $p = x(u_0)$ noktasında $M = x(u)$ yüzeyinin asli de Sitter eğrilikleri olmak üzere ;

$$Ke = \det Ap = K_1(p)K_2(p)$$

değerine $M = x(u)$ yüzeyinin extrinsic *de Sitter Gauss eğriliği* denir.

Benzer şekilde

$$H_d = \frac{1}{2} izAp = \frac{K_1(p) + K_2(p)}{2}$$

değerine de $M = x(u)$ yüzeyinin *de Sitter ortalama eğriliği* denir.

5.1. De Sitter Uzayında Sabit Açılı Yüzeyler

Bu bölümde de Sitter uzayında sabit açılı yüzeyler incelenecektir. Sabit açılı yüzeyler de Sitter uzayındaki spacelike ve timelike yüzeyler için ayrı ayrı ele alınacaktır.

5.1.1. Sabit Açılı Spacelike Yüzeyler

$U \subset IR^2$ bir açık küme, $x : U \to S_1^3$ embedding ve $M = x(U), S_1^3$ uzayında spacelike bir yüzey olsun. $\chi(M)$, M üzerindeki teğet vektör alanlarının modülü olsun. $\overline{\overline{D}}, \overline{D}$ ve D ile sırasıyla IR_1^4, S_1^3 ve M nin Levi-Civita konneksiyonlarını belirtelim. O zaman $\tilde{V}$, M yüzeyinin IR_1^4 deki ikinci temel formunu, T ve $\perp$ simgeleri de $\overline{\overline{D}}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenlerini göstermek üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$D_X Y = (\overline{\overline{D}}_X Y)^T \ ,$$

$$\tilde{V} : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M), \tilde{V}(X,Y) = (\overline{\overline{D}}_X Y)^{\perp}$$

ve

$$\overline{\overline{D}}_X Y = \overline{D}_X Y - \langle X, Y \rangle x, \ \overline{\overline{D}}_X Y = D_X Y + \tilde{V}(X,Y) . \tag{5.1}$$

(5.1) denklemlerinin birincisine M nin S_1^3 deki, ikincisine de M nin IR_1^4 deki Gauss denklemi denir.

ξ, M nin S_1^3 deki normal vektör alanı olmak üzere $A_\xi(X)$ ve $B_x(X)$ dönüşümlerine $-\overline{\overline{D}}_X \xi$ ve $-\overline{\overline{D}}_X x$ teğet bileşenlerine karşılık gelen M nin S_1^3 ve IR_1^4 deki Weingarten dönüşümleri denir. Buna göre

$$\begin{aligned} A_\xi(X) &= -\overline{\overline{D}}_X \xi - \left\langle \overline{\overline{D}}_X x, \xi \right\rangle x \\ B_x(X) &= -\overline{\overline{D}}_X x - \left\langle \overline{\overline{D}}_X x, \xi \right\rangle \xi. \end{aligned} \tag{5.2}$$

$A_\xi(X)$ ve $B_x(X)$ operatörlerinin her bir $p \in M$ için lineer ve self adjoint olduğu [11] den görülebilir.

$A_\xi(X)$ ve $B_x(X)$ in $K_i(P)$ ve $\widetilde{K}_i(P)$ öz değerlerine M yüzeyinin sırasıyla S_1^3 ve IR_1^4 deki asli eğrilikleri denir.

Ayrıca $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\left\langle A_\xi(X), Y \right\rangle = \left\langle \widetilde{V}(X,Y), \xi \right\rangle$$

ve

$$\left\langle B_x(X), Y \right\rangle = \left\langle \widetilde{V}(X,Y), x \right\rangle.$$

$\tilde{V}(X,Y), M$ nin IR_1^4 deki ikinci temel formu olduğundan

$$\tilde{V}(X,Y) = \lambda_1 \xi + \lambda_2 x$$

olacak şekilde yazılabilir. Buradan da

$$\tilde{V}(X,Y) = -\left\langle A_\xi(X), Y \right\rangle \xi + \left\langle B_x(X), Y \right\rangle x \tag{5.3}$$

bulunur. $\{v_1, v_2\}, TpM$ teğet düzleminin bir bazı olmak üzere bundan sonra

$$a_{ij} = \left\langle \widetilde{V}(v_i, v_j), \xi \right\rangle = \left\langle A_\xi(v_i), v_j \right\rangle \tag{5.4}$$

$$b_{ij} = \left\langle \widetilde{V}(v_i, v_j), x \right\rangle = \left\langle B_x(v_i), v_j \right\rangle \tag{5.5}$$

kısa gösterimini kullanacağız. O halde

$$\overline{\overline{D}}_{v_i} v_j = D_{v_i} v_j - a_{ij}\xi - \left\langle v_i, v_j \right\rangle x \tag{5.6}$$

olarak yazılır. $\{v_1, v_2\}$ bazının ortonormal olması halinde de

$$\overline{\overline{D}}_{v_i} v_j = D_{v_i} v_j - a_{ij}\xi \tag{5.7}$$

Gauss denklemlerini elde ederiz. Benzer şekilde Weingarten denklemleri de

$$\overline{\overline{D}}_{v_i} \xi = -a_{i1}v_1 - a_{i2}v_2 \tag{5.8}$$

ve

$$\overline{\overline{D}}_{v_i} x = -b_{i1}v_1 - b_{i2}v_2 \tag{5.9}$$

şeklindedir.

Sabit Timelike Açılı Spacelike Eksenli Spacelike Yüzeyler

5.4. Tanım

$U \subset IR^2$ bir açık küme, $x : U \to S_1^3$ embedding ve $M = x(U), S_1^3$ uzayında spacelike bir yüzey olsun. ξ, M üzerinde timelike birim normal vektör alanı olmak üzere eğer M üzerinde $\theta(\xi, W)$ timelike açısı sabit olacak şekilde bir W sabit spacelike doğrultusu varsa M ye S_1^3 *de sabit timelike açılı yüzey* denir.

ξ, M yüzeyinin S_1^3 de birim normal vektör alanı olmak üzere M spacelike eksenli sabit timelike açılı spacelike yüzey olsun. O zaman ξ timelike vektörü ile W spacelike vektörü arasındaki timelike açıyı θ ile gösterelim. O halde

$$\langle \xi, W \rangle = \sinh(-\theta) \tag{5.10}$$

olur. $\theta \neq 0$ almak genelliği bozmaz.

5.1. Teorem

$x, W \in IR_1^4$ iki spacelike vektör olsun. W, x spacelike vektörleri arasındaki açı φ olmak üzere

i) φ spacelike iki vektör arasındaki spacelike açı ise $\langle W, x \rangle = \cos\varphi$ olmak üzere

$$W = \sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}\, e_1 + (\sinh\theta)\xi + (\cos\varphi)x$$

ve de Sitter uzayındaki sabit doğrultu

$$W_d = \sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}\, e_1 + (\sinh\theta)\xi \tag{5.11}$$

şeklindedir.

ii) φ spacelike iki vektör arasındaki timelike açı ise $\langle W, x \rangle = -\cosh\varphi$ olmak üzere

$$W = \sqrt{\left|\cosh^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\, e_1 + (\sinh\theta)\xi - (\cosh\varphi)x$$

ve de Sitter uzayındaki sabit doğrultu

$$W_d = \sqrt{\left|\cosh^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\, e_1 + (\sinh\theta)\xi \tag{5.12}$$

şeklindedir.

İspat

i) $W \in IR_1^4$ olmak üzere

$$W = W^T + W^N$$

şeklinde yazılır. O halde

$$W = W^T + \lambda_1 \xi + \lambda_2 x$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$W = W^T + (\sinh\theta)\xi + (\cos\varphi)x$$

olur ve

$$\| W^T \| = \sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta} \neq 0$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla

$$e_1 = \frac{W^T}{\| W^T \|}$$

olmak üzere

$$W = \sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}\, e_1 + (\sinh\theta)\xi + (\cos\varphi)x$$

olur. O halde de Sitter uzayındaki sabit doğrultu

$$W_d = \sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}\, e_1 + \sinh\theta\,\xi$$

şeklinde tek olarak bulunur.

ii) Birinci şıkka benzer şekilde kolaylıkla gösterilebilir.

e_2, M üzerinde e_1'e dik vektör alanı olmak üzere $\{e_1, e_2, \xi, x\}, M$ nin her noktasında IR_1^4 ün ortonormal bazı olur. W_d, S_1^3 de Sitter uzayında sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_2} W_d = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} W_d = \overline{D}_{e_2} W_d = 0 \ .$$

O halde

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} W_d = \sqrt{\sin^2 \varphi + \sinh^2 \theta}\, \overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 + (\sinh \theta) \overline{\overline{D}}_{e_2} \xi = 0$$

olduğundan

$$\sqrt{\sin^2 \varphi + \sinh^2 \theta}\, \overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 + (\sinh \theta) \overline{\overline{D}}_{e_2} \xi = 0 \tag{5.13}$$

elde edilir. Buradan

$$a_{21} \sqrt{\sin^2 \varphi + \sinh^2 \theta} = 0$$

veya

$$a_{21} = a_{12} = 0 \tag{5.14}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (5.13) denkleminden

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 = \frac{\sinh \theta}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \sinh^2 \theta}} a_{22} e_2 \tag{5.15}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde W_d, S_1^3 de sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_1} W_d = 0$ dır. Ayrıca

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} W_d = \overline{D}_{e_1} W_d - \langle e_1, W_d \rangle x$$

olduğundan

$$\overline{D}_{e_1}W_d = 0 \text{ ve } \overline{\overline{D}}_{e_1}W_d = -\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}\,x \tag{5.16}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\overline{\overline{D}}_{e_1}W_d = \sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}\,\overline{\overline{D}}_{e_1}e_1 + (\sinh\theta)\overline{\overline{D}}_{e_1}\xi$$

ve (5.16) eşitliğinden

$$\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}\,\overline{\overline{D}}_{e_1}e_1 + (\sinh\theta)\overline{\overline{D}}_{e_1}\xi = -\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}\,x \tag{5.17}$$

olur. (5.17) eşitliğinin her iki tarafını ξ ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$a_{11} = 0 \tag{5.18}$$

bulunur. Ayrıca (5.17) den

$$\overline{\overline{D}}_{e_1}e_1 = -x \tag{5.19}$$

eşitliği elde edilir.

5.2. Teorem

S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli spacelike yüzey için D Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$D_{e_1}e_1 = 0 \qquad D_{e_2}e_1 = \frac{\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}}a_{22}e_2$$

$$D_{e_1}e_2 = 0 \qquad D_{e_2}e_2 = \frac{-\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}}a_{22}e_1$$

İspat

$$\overline{\overline{D}}_{e_1}e_1 = D_{e_1}e_1 - \left\langle A_\xi(e_1), e_1\right\rangle\xi - \left\langle e_1, e_1\right\rangle x$$

olduğundan

$$D_{e_1} e_1 = 0$$

elde edilir.

$$\langle e_2, e_1 \rangle = 0$$

olduğundan

$$\langle D_{e_1} e_2, e_1 \rangle = 0$$

olur. $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olduğundan da $\langle D_{e_1} e_2, e_2 \rangle = 0$ olacağından $D_{e_2} e_2 = 0$ elde edilir. Diğer taraftan

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 = D_{e_2} e_1 - \langle A_\xi (e_2), e_1 \rangle \xi - \langle e_2, e_1 \rangle x$$

olduğundan

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 = D_{e_2} e_1$$

olur. O halde (5.15) den

$$D_{e_2} e_1 = \frac{\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}} a_{22} e_2$$

olarak elde edilir. Son olarak $D_{e_2} e_2 = \dfrac{-\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}} a_{22} e_1$ olduğunu gösterelim :

$$D_{e_2} e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

olacak şekilde yazılabilir. Buradan

$$\lambda_1 = \langle D_{e_2} e_2, e_1 \rangle, \lambda_2 = \langle D_{e_2} e_2, e_2 \rangle = 0$$

olur. O halde

$$D_{e_2} e_2 = \left\langle \overline{\overline{D}}_{e_2} e_2, e_1 \right\rangle e_1 \tag{5.20}$$

olur ve $\langle e_2, e_1 \rangle = 0$ eşitliği ve (5.15) kullanılarak

$$\left\langle \overline{\overline{D}}_{e_2} e_2, e_1 \right\rangle = \frac{-\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}} a_{22}$$

bulunur. Bu eşitlik (5.20) de yerine yazılarak

$$D_{e_2} e_2 = \frac{-\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}} a_{22}\, e_1$$

elde edilir.

5.1. Sonuç

S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli spacelike yüzey verilsin. O zaman $\beta = \beta(u,v)$, M üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere M yüzeyi üzerinde metrik $\langle , \rangle := du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde u ve v lokal koordinatları vardır.

Yüzeyin Parametrizasyonunun Bulunması

Şimdi M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde $x = x(u,v)$ yüzeyinin parametrizasyonunu elde edelim.

5.3. Teorem

S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli spacelike yüzeyin $x = x(u,v)$ parametrizasyonu

$$\begin{cases} x_{uu} = -x \\ x_{uv} = \dfrac{\beta_u}{\beta} x_v \\ x_{vv} = -\beta\beta_u x_u + \dfrac{\beta_v}{\beta} x_v - \beta^2 a_{22}\xi - \beta^2 x \end{cases} \tag{5.21}$$

kısmi türevli denklem sistemini sağlar.

İspat

$$\overline{\overline{D}}_{x_u} x_u = D_{x_u} x_u - \left\langle A_\xi(x_u), x_u \right\rangle \xi - \left\langle x_u, x_u \right\rangle x$$

ve

$$x_{uu} = \overline{\overline{D}}_{x_u} x_u$$

olduğundan

$$x_{uu} = -x$$

bulunur.

$$x_{uv} = \overline{\overline{D}}_{x_v} x_u \text{ ve } \overline{\overline{D}}_{x_v} x_u = D_{x_v} x_u$$

olduğundan

$$x_{uv} = D_{x_v} x_u$$

olur. Ayrıca

$$D_{e_2} e_1 = \frac{\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}} a_{22}\, e_2$$

olduğundan da

$$x_{uv} = \frac{\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}}\, a_{22}\, x_v \tag{5.22}$$

bulunur. (5.22) eşitliğini x_v ile iç çarpıma tabi tutarak

$$\langle x_{uv}, x_v \rangle = \frac{\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}}\, a_{22}\beta^2$$

ve

$$\langle x_v, x_v \rangle = \beta^2$$

eşitliğinden

$$\frac{\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}}\, a_{22} = \frac{\beta_u}{\beta} \tag{5.23}$$

bulunur. Bulduğumuz bu eşitliği (5.22) de yerine yazarak

$$x_{uv} = \frac{\beta_u}{\beta}\, x_v$$

elde edilir.

$$\overline{\overline{D}}_{x_v/\|x_v\|} x_{v/\|x_v\|} = \frac{-\beta_v}{\beta^3}\, x_v + \frac{1}{\beta^2}\, x_{vv}$$

ve

$$\overline{\overline{D}}_{x_v/\|x_v\|} x_{v/\|x_v\|} = D_{x_v/\|x_v\|} x_{v/\|x_v\|} - \left\langle A_\xi\left(\frac{x_v}{\|x_v\|}\right), \frac{x_v}{\|x_v\|} \right\rangle \xi - \left\langle \frac{x_v}{\|x_v\|}, \frac{x_v}{\|x_v\|} \right\rangle x$$

olduğundan

$$\overline{\overline{D}}_{x_v/\|x_v\|} x_{v/\|x_v\|} = \frac{-\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}}\, a_{22} x_u - a_{22}\xi - x$$

bulunur. Böylece

$$x_{vv} = -\beta\beta_u x_u + \frac{\beta_v}{\beta} x_v - \beta^2 a_{22}\xi - \beta^2 x$$

olur.

5.2. Sonuç

ξ, S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyinin parametrizasyonu

$$\begin{cases} \xi_u = \overline{\overline{D}}_{x_u}\xi = 0 \\ \xi_v = \overline{\overline{D}}_{x_v}\xi = -a_{22}x_v \end{cases} \tag{5.24}$$

kısmi türevli denklem sistemini sağlar.

İspat

$$\xi_u = \overline{\overline{D}}_{x_u}\xi = -a_{11}x_u - a_{12}x_v$$

olduğundan

$$\xi_u = 0.$$

Öte yandan

$$\xi_v = \overline{\overline{D}}_{x_v}\xi$$

ve

$$\overline{\overline{D}}_{x_v}\xi = -a_{21}x_u - a_{22}x_v$$

olduğundan

$$\xi_v = -a_{22} x_v$$

bulunur.

5.1. Önerme

M, S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli bir yüzey ise $\beta a_{22} = \psi(v)$ olacak şekilde $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu vardır.

İspat

$\xi_{uv} = \xi_{vu} = 0$ olduğundan $\overline{\overline{D}}_{x_u}(-a_{22} x_v) = 0$ veya

$$(a_{22})_u x_v + a_{22} \overline{\overline{D}}_{x_u} x_v = 0$$

olur. Dolayısıyla Teorem5.1 den

$$(a_{22})_u + \frac{\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}} (a_{22})^2 = 0 \tag{5.25}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Böylece

$$(a_{22})_u + \frac{\beta_u}{\beta} a_{22} = 0 \tag{5.26}$$

veya

$$(\beta a_{22})_u = 0 \tag{5.27}$$

denkleminden

$$\beta a_{22} = \psi(v) \tag{5.28}$$

olacak şekilde v-ye bağlı $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu bulunur.

5.2. Önerme

$x = x(u,v), S_1^3$ de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli spacelike bir yüzeyin parametrizasyonu olsun. Eğer M üzerinde $a_{22} = 0$ ise $x = x(u,v)$ de Sitter uzayında bir düzlem belirtir.

İspat

M üzerinde $a_{22} = 0$ olsun. ξ, sabit açılı M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyinin parametrizasyonu (5.24) kısmi türevli denklem sistemini sağladığından

$$\begin{cases} \xi u = 0 \\ \xi v = 0 \end{cases}$$

kısmi türevli denklem sistemi sağlanır. Buradan da ξ, M boyunca sabit bir vektör olmalıdır. Dolayısıyla M yüzeyinin normali sabit olduğundan $x = x(u,v)$ düzlem belirtir.

Tezin kalan kısmında $a_{22} \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. (5.25) de verilen

$$(a_{22})_u + \frac{\sinh\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}}(a_{22})^2 = 0$$

diferansiyel denklemini çözersek

$$a_{22} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}}{u\sinh\theta + \alpha(v)}, \alpha(v) = -\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}\,\overline{\alpha}(v)$$

olacak şekilde bir $\alpha = \alpha(v)$ fonksiyonu vardır.

(5.28) denkleminden

$$\beta(u,v) = \frac{\psi(v)}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}}(u\sinh\theta + \alpha(v)) \tag{5.29}$$

olarak elde edilir.

Özel olarak $\psi(v)=e^{v}\sqrt{\sin^{2}\varphi+\sinh^{2}\theta}$, $\alpha(v)=\dfrac{1}{e^{v}}$ alarak (5.21) denkleminde yerine yazarak

$$\begin{cases} x_{uu}=-x \\ x_{uv}=\dfrac{e^{v}\sinh\theta}{1+ue^{v}\sinh\theta}x_{v} \\ x_{vv}=-e^{v}\sinh\theta(ue^{v}\sinh\theta+1)x_{u}+\dfrac{ue^{v}\sinh\theta}{ue^{v}\sinh\theta+1}x_{v}- \\ \qquad -e^{v}\sqrt{\sin^{2}\varphi+\sinh^{2}\theta}(ue^{v}\sinh\theta+1)\xi-(ue^{v}\sinh\theta+1)^{2}x \end{cases} \tag{5.30}$$

denklem sistemini elde ederiz.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.4. Teorem

(5.30) denklem sistemini sağlayan x immersiyonu M nin u ve v lokal koordinatlarına göre

$$x_{i}(u,v)=\frac{-d_{1i}(v)}{2e^{v}\sinh\theta(ue^{v}\sinh\theta+1)^{2}}+d_{2i}(v),\ i=1,2,3,4$$

şeklindedir.

5.1 Örnek

de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli spacelike M yüzeyi verilsin. $X\in\chi(M),\xi\in\chi^{\perp}(M)$ olmak üzere

$$\overline{\overline{D}}_{X}\xi=\overline{D}_{X}\xi$$

olduğundan

$$\overline{\overline{D}}_{v_i}\xi = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 \xi$$

olarak yazılır. Buradan

$$\lambda_1 = \left\langle \overline{\overline{D}}_{v_i}\xi, v_1 \right\rangle, \lambda_2 = \left\langle \overline{\overline{D}}_{v_i}\xi, v_2 \right\rangle, \lambda_3 = 0$$

olmak üzere

$$\overline{\overline{D}}_{v_i}\xi = -a_{i1}v_1 - a_{i2}v_2$$

olur. Dolayısıyla $A_\xi(v_i)$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

dir. A_ξ lineer dönüşümünün karakteristik değerleri yani yüzeyin asli eğrilikleri

$$K_1 = 0,\ K_2 = a_{22}$$

olur. Dolayısıyla $p = x(u_0)$ noktasında $M = x(u)$ yüzeyinin de Sitter Gauss eğriliği ve de Sitter ortalama eğriliği

$$Ke = 0$$

ve

$$H_d = \frac{1}{2}a_{22}$$

olarak elde edilir.

<u>Sabit Timelike Açılı Timelike Eksenli Spacelike Yüzeyler</u>

5.5 Tanım

$U \subset IR^2$ bir açık küme, $x: U \to S_1^3$ embedding ve $M = x(U), S_1^3$ uzayında spacelike yüzey olsun. ξ, M üzerinde timelike birim normal vektör alanı olmak üzere eğer $\theta(\xi, W)$ timelike açısı sabit olacak şekilde bir W sabit timelike doğrultusu varsa M ye S_1^3 *de sabit timelike açılı timelike eksenli spacelike yüzey* denir.

ξ, M yüzeyinin S_1^3 de birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyi timelike eksenli, sabit timelike açılı spacelike yüzey olsun. ξ timelike vektörü ile W timelike vektörü arasındaki timelike açıyı θ, W timelike vektörü ile x spacelike vektörü arasındaki timelike açıyı da φ ile gösterelim. O halde

$$\langle \xi, W \rangle = -\cosh\theta, \ \langle W, x \rangle = -\sinh\varphi$$

olur. Eğer $\theta = 0$ ise $\xi = W$ olur. $\theta \neq 0$ ve M üzerinde $\langle W, x \rangle =$ sabit almak genelliği bozmaz. $W \in IR_1^4$ olmak üzere

$$W = W^T + W^N$$

şeklinde yazılır. O halde

$$W = W^T + \lambda_1 \xi + \lambda_2 x$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$W = W^T + (\cosh\theta)\xi - (\sinh\varphi)x$$

olur ve

$$\| W^T \| = \sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|} \neq 0$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$e_1 = \frac{W^T}{\|W^T\|}$$

olmak üzere

$$W = \sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}e_1 + (\cosh\theta)\xi - (\sinh\varphi)x$$

bulunur. O halde de Sitter uzayındaki sabit doğrultu

$$W_d = \sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}e_1 + (\cosh\theta)\xi \tag{5.31}$$

şeklinde tek olarak bulunur.

e_2, M üzerinde e_1'e dik vektör alanı olmak üzere $\{e_1, e_2, \xi, x\}, M$ nin her noktasında IR_1^4 ün ortonormal bazı olur. W_d, S_1^3 de Sitter uzayında sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_2}W_d = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\overline{\overline{D}}_{e_2}W_d = \overline{D}_{e_2}W_d = 0\,.$$

O halde

$$\overline{\overline{D}}_{e_2}W_d = \sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}\,\overline{\overline{D}}_{e_2}e_1 + (\cosh\theta)\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi = 0 \tag{5.32}$$

elde edilir. Buradan

$$\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}a_{21} = 0$$

veya

$$a_{21} = a_{12} = 0$$

olarak elde edilir. (5.32) denkleminden

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 = \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}} a_{22} e_2 \tag{5.33}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde W_d, S_1^3 de sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_1} W_d = 0$ dır. Ayrıca

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} W_d = \overline{D}_{e_1} W_d - \langle e_1, W_d \rangle x$$

olduğundan

$$\overline{D}_{e_1} W_d = 0 \text{ ve } \overline{\overline{D}}_{e_1} W_d = -\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|} x \tag{5.34}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} W_d = \sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|} \overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 + (\cosh\theta) \overline{\overline{D}}_{e_1} \xi$$

ve (5.34) denkleminden

$$\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|} \overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 + (\cosh\theta) \overline{\overline{D}}_{e_1} \xi = -\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|} \tag{5.35}$$

olur. (5.35) denkleminin her iki tarafını ξ vektörü ile iç çarpıma tabi tutarak

$$a_{11} = 0$$

bulunur. Ayrıca (5.35) den

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 = -x \tag{5.36}$$

eşitliği elde edilir.

5.5. Teorem

S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı timelike eksenli spacelike yüzey için D Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$D_{e_1}e_1 = 0 \qquad D_{e_2}e_1 = \frac{\sinh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}}a_{22}e_2$$

$$D_{e_1}e_2 = 0 \qquad D_{e_2}e_2 = \frac{-\sinh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}}a_{22}e_1$$

5.3. Sonuç

S_1^3 de sabit timelike açılı timelike eksenli spacelike bir M yüzeyi verilsin. O halde $\beta = \beta(u,v), M$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde u ve v lokal koordinatları vardır.

<u>*Yüzey Parametrizasyonunun Bulunması*</u>

Şimdi M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde $x = x(u,v)$ yüzeyinin parametrizasyonunu elde edelim.

5.6. Teorem

S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı timelike eksenli spacelike bir M yüzeyinin $x = x(u,v)$ parametrizasyonu

$$\begin{cases} x_{uu} = -x \\ x_{uv} = \dfrac{\beta_u}{\beta}x_v \\ x_{vv} = -\beta\beta_u x_u + \dfrac{\beta_v}{\beta}x_v - \beta^2 a_{22}\xi - \beta^2 x \end{cases} \tag{5.37}$$

kısmi türevli denklem sistemini sağlar.

5.4. Sonuç

ξ, S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı timelike eksenli spacelike M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyinin parametrizasyonu

$$\begin{cases} \xi_u = \overline{\overline{D}}_{x_u}\xi = 0 \\ \xi_v = \overline{\overline{D}}_{x_v}\xi = -a_{22}x_v \end{cases} \tag{5.38}$$

kısmi türevli denklem sistemini sağlar.

5.3. Önerme

M, S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı timelike eksenli spacelike bir yüzey ise $\beta a_{22} = \psi(v)$ olacak şekilde v-ye bağlı $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu vardır.

İspat

$\xi_{uv} = \xi_{vu} = 0$ olduğundan

$$\overline{\overline{D}}_{x_u}(-a_{22}x_v) = 0$$

veya

$$(a_{22})_u x_v + a_{22}\overline{\overline{D}}_{x_u}x_v = 0 \tag{5.39}$$

olur. Dolayısıyla (5.39) ve Teorem5.6 dan

$$(a_{22})_u + \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}}(a_{22})^2 = 0 \tag{5.40}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Dolayısıyla

$$(a_{22})_u + \frac{\beta_u}{\beta} a_{22} = 0 \tag{5.41}$$

veya

$$(\beta a_{22})_u = 0 \tag{5.42}$$

denkleminden

$$\beta a_{22} = \psi(v) \tag{5.43}$$

olacak şekilde v-ye bağlı $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu vardır.

5.4. Önerme

$x = x(u,v)$, S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı timelike eksenli spacelike bir yüzeyin parametrizasyonu olsun. Eğer M üzerinde $a_{22} = 0$ ise $x = x(u,v)$ de Sitter uzayın bir düzlemini tanımlar.

Tezin bundan sonraki kısmında $a_{22} \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. (5.40) diferansiyel denklemini çözersek

$$a_{22} = \frac{\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}}{u\cosh\theta + \alpha(v)}, \alpha(v) = -\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}\bar{\alpha}(v) \tag{5.44}$$

olacak şekilde bir $\alpha = \alpha(v)$ fonksiyonu vardır.

(5.43) denkleminden

$$\beta(u,v) = \frac{\psi(v)}{\sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}}(u\cosh\theta + \alpha(v)) \tag{5.45}$$

elde ederiz.

Özel olarak $\psi(v)=e^{v}\sqrt{\left|\sinh^{2}\theta-\sinh^{2}\varphi\right|}$ ve $\alpha(v)=e^{-v}$ alarak (5.37) denklem sisteminin çözümünü aşağıdaki teoremdeki gibi ifade edebiliriz.

5.6. Teorem

(5.37) denklem sistemini sağlayan x immersiyonu M nin u ve v lokal koordinatlarına göre

$$x_i(u,v)=\frac{-d_{1i}(v)}{e^{v}\cosh\theta(ue^{v}\cosh\theta+1)^{2}}+d_{2i}(v),\ i=1,2,3,4$$

şeklindedir.

5.1.2. Sabit Açılı Timelike Yüzeyler

$U\subset IR^{2}$ bir açık küme , $x:U\to S_1^3$ embedding ve $M=x(U),S_1^3$ uzayında timelike yüzey olsun. $\chi(M)$, M üzerindeki teğet vektör alanlarının modülü olsun. $\overline{\overline{D}},\overline{D}$ ve D ile sırasıyla IR_1^4,S_1^3 ve M nin Levi-Civita konneksiyonlarını belirtelim. O zaman $\widetilde{V},M$ nin IR_1^4 deki ikinci temel formunu, T ve $\perp$ simgeleri de $\overline{\overline{D}}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenlerini göstermek üzere $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$D_X Y=(\overline{\overline{D}}_X Y)^{T},$$

$$\widetilde{V}:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi^{\perp}(M),\tilde{V}(X,Y)=(\overline{\overline{D}}_X Y)^{\perp}$$

ve

$$\overline{\overline{D}}_X Y=\overline{D}_X Y-\langle X,Y\rangle x,\ \overline{\overline{D}}_X Y=D_X Y+\tilde{V}(X,Y)\,. \tag{5.46}$$

(5.46) denklemlerinin birincisine M nin S_1^3 deki, ikincisine de M nin IR_1^4 deki Gauss denklemi denir.

ξ, M nin S_1^3 deki normal vektör alanı olmak üzere $A_\xi(X)$ ve $B_x(X)$ dönüşümlerine $-\overline{\overline{D}}_X \xi$ ve $-\overline{\overline{D}}_X x$ teğet bileşinlerine karşılık gelen M nin S_1^3 ve IR_1^4 deki Weingarten dönüşümleri denir. Buna göre

$$\begin{cases} A_\xi(X) = -\overline{\overline{D}}_X \xi - \left\langle \overline{\overline{D}}_X x, \xi \right\rangle x \\ B_x(X) = -\overline{\overline{D}}_X x + \left\langle \overline{\overline{D}}_X x, \xi \right\rangle \xi \end{cases} \tag{5.47}$$

şeklindedir. $A_\xi(X)$ ve $B_x(X)$ in her bir $p \in M$ için lineer ve self adjoint operatörler olduğu [11] den görülebilir.

$A_\xi(X)$ ve $B_x(X)$ in $K_i(P)$ ve $\tilde{K}_i(P)$ öz değerlerine M yüzeyinin sırasıyla S_1^3 ve IR_1^4 deki asli eğrilikleri denir.

Ayrıca $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\left\langle A_\xi(X), Y \right\rangle = \left\langle \tilde{V}(X,Y), \xi \right\rangle$$

ve

$$\left\langle B_x(X), Y \right\rangle = \left\langle \tilde{V}(X,Y), x \right\rangle.$$

$\tilde{V}(X,Y)$, M nin IR_1^4 deki ikinci temel formu olduğundan

$$\tilde{V}(X,Y) = \lambda_1 \xi + \lambda_2 x$$

şekilde yazılabilir. Buradan da

$$\tilde{V}(X,Y) = \left\langle A_\xi(X), Y \right\rangle \xi + \left\langle B_x(X), Y \right\rangle x$$

bulunur. $\{v_1, v_2\}, TpM$ teğet düzleminin bir bazı olmak üzere bundan sonra

$$a_{ij}=\left\langle \widetilde{V}(v_i,v_j),\xi\right\rangle=\left\langle A_\xi(v_i),v_j\right\rangle$$

$$b_{ij}=\left\langle \widetilde{V}(v_i,v_j),x\right\rangle=\left\langle B_x(v_i),v_j\right\rangle$$

kısa gösterimini kullanacağız. O halde

$$\overline{\overline{D}}_{v_i}v_j=D_{v_i}v_j-\left\langle A_\xi(v_i),v_j\right\rangle\xi-\left\langle v_i,v_j\right\rangle x \tag{5.48}$$

olarak yazılır. $\{v_1,v_2\}$ tabanının ortonormal olması halinde de

$$\overline{\overline{D}}_{v_i}v_j=D_{v_i}v_j-a_{ij}\xi \tag{5.49}$$

Gauss denklemini elde ederiz. Benzer şekilde weingarten denklemleri de

$$\overline{\overline{D}}_{v_i}\xi=a_{i1}v_1-a_{i2}v_2 \tag{5.50}$$

$$\overline{\overline{D}}_{v_i}x=b_{i1}v_1-b_{i2}v_2 \tag{5.51}$$

şeklindedir.

<u>Sabit Timelike Açılı Spacelike Eksenli Timelike Yüzeyler</u>

5.6. Tanım

$U\subset IR^2$ bir açık küme, $x:U\to S_1^3$ embedding ve $M=x(U), S_1^3$ uzayında timelike yüzey olsun. ξ, M üzerinde spacelike birim normal vektör alanı olmak üzere eğer M üzerinde $\theta(\xi,W)$ timelike açısı sabit olacak şekilde bir W sabit spacelike doğrultusu varsa M ye S_1^3 de *sabit timelike açılı spacelike eksenli timelike yüzey* denir.

ξ, M yüzeyinin S_1^3 de birim normal vektörü olmak üzere M spacelike eksenli sabit timelike açılı timelike yüzey olsun. O zaman ξ, W spacelike vektörleri arasındaki timelike açıyı θ ile gösterirsek

$\langle \xi, W \rangle = -\cosh\theta$

olur. Eğer $\theta = 0$ ise $\xi = W$ dir. $\theta \neq 0$ almak genelliği bozmaz.

5.7. Teorem

$x, W \in IR_1^4$ iki spacelike vektör olsun. W, x spacelike vektörleri arasındaki açı φ olmak üzere

i) φ spacelike iki vektör arasındaki spacelike açı ise $\langle W, x \rangle = \cos\varphi$ olmak üzere

$$W = \sqrt{\left|\sin^2\varphi - \cosh^2\theta\right|}\, e_1 - (\cosh\theta)\xi + (\cos\varphi)x$$

ve de Sitter uzayındaki sabit doğrultu

$$W_d = \sqrt{\left|\sin^2\varphi - \cosh^2\theta\right|}\, e_1 - (\cosh\theta)\xi \tag{5.52}$$

şeklindedir.

ii) φ spacelike iki vektör arasındaki timelike açı ise $\langle W, x \rangle = -\cosh\varphi$ olmak üzere

$$W = \sqrt{\cosh^2\varphi + \sinh^2\theta}\, e_1 - (\cosh\theta)\xi - (\cosh\varphi)x$$

ve de Sitter uzayındaki sabit doğrultu

$$W_d = \sqrt{\cosh^2\varphi + \sinh^2\theta}\, e_1 - (\cosh\theta)\xi \tag{5.53}$$

şeklindedir.

$e_1 = \dfrac{W^T}{\| W^T \|}$, M üzerinde birim teğet vektör alanı, e_2, M üzerinde e_1'e dik vektör alanı olmak üzere $\{e_1, e_2, \xi, x\}, M$ nin her noktasında IR_1^4 ün ortonormal bazı olur. W_d, S_1^3 de Sitter uzayında sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_2} W_d = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} W_d = \overline{D}_{e_2} W_d = 0$$

olur. O halde

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} W_d = \sqrt{\left|\sin^2\varphi - \cosh^2\theta\right|}\,\overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 - (\cosh\theta)\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi = 0$$

olduğundan

$$\sqrt{\left|\sin^2\varphi - \cosh^2\theta\right|}\,\overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 - (\cosh\theta)\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi = 0 \tag{5.54}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının ξ vektörü ile iç çarpımı alınırsa

$$-\sqrt{\left|\sin^2\varphi - \cosh^2\theta\right|}\,a_{21} = 0$$

ve buradan da $-\sqrt{\left|\sin^2\varphi - \cosh^2\theta\right|} \neq 0$ olmak üzere

$$a_{21} = a_{12} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (5.54) denkleminden

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 = \frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sin^2\varphi - \cosh^2\theta\right|}}\, a_{22} e_2 \tag{5.55}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde W_d, S_1^3 de Sitter uzayında sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_1} W_d = 0$ dır. Ayrıca

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} W_d = \overline{D}_{e_1} W_d - \langle e_1, W_d \rangle x$$

olduğundan

$$\overline{D}_{e_1} W_d = 0 \text{ ve } \overline{\overline{D}}_{e_1} W_d = \sqrt{\left|\sin^2 \varphi - \cosh^2 \theta\right|}\, x \tag{5.56}$$

elde edilir.

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} W_d = \sqrt{\left|\sin^2 \varphi - \cosh^2 \theta\right|}\, \overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 - (\cosh\theta) \overline{\overline{D}}_{e_1} \xi$$

ve (5.56) eşitliğinden

$$\sqrt{\left|\sin^2 \varphi - \cosh^2 \theta\right|}\, \overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 - (\cosh\theta) \overline{\overline{D}}_{e_1} \xi = \sqrt{\left|\sin^2 \varphi - \cosh^2 \theta\right|}\, x \tag{5.57}$$

elde edilir. (5.57) denkleminin her iki tarafını ξ ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$a_{11} = 0$$

bulunur. Ayrıca (5.57) den

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 = x \tag{5.58}$$

eşitliği elde edilir.

5.8. Teorem

S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı sabit spacelike eksenli timelike bir yüzey için D Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$D_{e_1} e_1 = 0 \qquad D_{e_2} e_1 = \frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sin^2 \varphi - \cosh^2 \theta\right|}} a_{22} e_2$$

$$D_{e_1}e_2 = 0 \qquad D_{e_2}e_2 = \frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sin^2\varphi - \cosh^2\theta\right|}}a_{22}e_1$$

5.5. Sonuç

S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli timelike bir M yüzeyi verilsin. O zaman $\beta = \beta(u,v), M$ yüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := -du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde u ve v lokal koordinatları vardır.

<u>Yüzey Parametrizasyonunun Bulunması</u>

Şimdi yukarıdaki sonuçta verilen M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := -du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde $x = x(u,v)$ yüzeyinin parametrizasyonunu elde edelim.

5.6. Sonuç

S_1^3 de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli timelike bir M yüzeyinin $x = x(u,v)$ parametrizasyonu

$$\begin{cases} x_{uu} = x \\ x_{uv} = \dfrac{\beta_u}{\beta} x_v \\ x_{vv} = \beta\beta_u x_u + \dfrac{\beta_v}{\beta} x_v - \beta^2 a_{22}\xi - \beta^2 x \end{cases} \qquad (5.59)$$

kısmi türevli diferansiyel denklem sistemini sağlar.

5.7. Sonuç

ξ ,sabit timelike açılı spacelike eksenli timelike M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyinin parametrizasyonu

$$\begin{cases} \xi_u = \overline{\overline{D}}_{x_u}\xi = 0 \\ \xi_v = \overline{\overline{D}}_{x_v}\xi = -a_{22}x_v \end{cases} \tag{5.60}$$

kısmi türevli diferansiyel denklem sistemini sağlar.

5.5. Önerme

M , sabit timelike açılı spacelike eksenli timelike bir yüzey ise $\beta a_{22} = \psi(v)$ olacak şekilde $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu vardır.

İspat:

$\xi_{uv} = \xi_{vu}$ olduğundan

$$\overline{\overline{D}}_{x_u}(-a_{22}x_v) = 0$$

veya

$$(a_{22})_u x_v + a_{22}\overline{\overline{D}}_{x_u} x_v = 0$$

olur. Buradan da

$$(a_{22})_u - \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sin^2\varphi - \cosh^2\theta\right|}}(a_{22})^2 = 0 \tag{5.61}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Dolayısıyla

$$(a_{22})_u + \frac{\beta_u}{\beta}(a_{22}) = 0 \tag{5.62}$$

veya

$$(\beta a_{22})_u = 0 \tag{5.63}$$

denkleminden

$$\beta a_{22} = \psi(v) \tag{5.64}$$

olacak şekilde v-ye bağlı $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu bulunur.

5.6. Önerme

$x = x(u,v), S_1^3$ de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli timelike yüzey olsun. Eğer M üzerinde $a_{22} = 0$ ise $x = x(u,v)$ de Sitter uzayında bir düzlem belirtir.

Tezin kalan kısmında $a_{22} \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. (5.61) denkleminden

$$a_{22} = \frac{-\sqrt{\sin^2\varphi - \cosh^2\theta}}{u\cosh\theta + \alpha(v)}, \alpha(v) = \sqrt{\sin^2\varphi - \cosh^2\theta}\,\bar{\alpha}(v)$$

olacak şekilde bir $\alpha(v)$ fonksiyonu vardır. (5.64) denkleminden

$$\beta(u,v) = \frac{-\psi(v)}{\sqrt{\sin^2\varphi - \cosh^2\theta}}(u\cosh\theta + \alpha(v)). \tag{5.65}$$

Özel olarak $\psi(v) = -v\sqrt{\sin^2\varphi - \cosh^2\theta}$ ve $\alpha(v) = \ln v$ seçelim. Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.9. Teorem

(5.59) denklem sistemini sağlayan x immersiyonu M nin u,v lokal koordinatlarına göre

$$x_i(u,v) = \frac{-d_{1i}(v)}{2\cosh\theta(u\cosh\theta + \ln v)^2} + d_{2i}(v),\ i = 1,2,3,4$$

şeklindedir.

Sabit Spacelike Açılı Spacelike Eksenli Timelike Yüzeyler

5.7 Tanım

$U \subset IR^2$ bir açık küme, $x : U \to S_1^3$ embedding ve $M = x(u), S_1^3$ uzayında timelike yüzey olsun. Eğer M üzerinde $\theta(\xi, W)$ spacelike açısı sabit olacak şekilde sabit bir W spacelike doğrultusu varsa M ye S_1^3 de *sabit spacelike açılı spacelike eksenli timelike yüzey* denir.

ξ, M yüzeyinin S_1^3 de birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyi sabit spacelike açılı sabit spacelike eksenli timelike bir yüzey olsun. O zaman ξ, W spacelike vektörleri arasındaki spacelike açıyı θ, W, x spacelike vektörleri arasındaki timelike açıyı da φ ile gösterelim. O halde

$$\langle \xi, W \rangle = \cos\theta\,,\ \langle W, x \rangle = -\cosh\varphi$$

olur. Eğer $\theta = 0$ ise $\xi = W$ olur. $\theta \neq 0$ ve M üzerinde $\langle W, x \rangle =$ sabit almak genelliği bozmaz. $W \in IR_1^4$ olmak üzere

$$W = W^T + W^N$$

şeklinde yazılır. O halde

$$W = W^T + \lambda_1 \xi + \lambda_2 x$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$W = W^T + (\cos\theta)\xi - (\cosh\varphi)x$$

olur ve

$$\| W^T \| = \sqrt{\left| \sin^2\theta - \cosh^2\varphi \right|} \neq 0$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla $e_1 = \dfrac{W^T}{\|W^T\|}$

olmak üzere

$$W = \sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\, e_1 + (\cos\theta)\xi - (\cosh\varphi)x$$

bulunur. O halde de Sitter uzayındaki sabit doğrultu

$$W_d = \sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\, e_1 + (\cos\theta)\xi \qquad (5.66)$$

şeklinde tek olarak bulunur.

e_2, M üzerinde e_1'e dik vektör alanı olmak üzere $\{e_1, e_2, \xi, x\}, M$ nin her noktasında IR_1^4 ün ortonormal bazı olur. W_d, S_1^3 de sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_2} W_d = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} W_d = \overline{D}_{e_2} W_d = 0 .$$

O halde

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} W_d = \sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\, \overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 + (\cos\theta)\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi = 0$$

olduğundan

$$\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\, \overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 + (\cos\theta)\overline{\overline{D}}_{e_2}\xi = 0 \qquad (5.67)$$

elde edilir. Buradan

$$a_{21} = a_{12} = 0$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (5.67) denkleminden

$$\overline{\overline{D}}_{e_2} e_1 = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}} a_{22} e_2 \tag{5.68}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde W_d, S_1^3 de sabit bir vektör alanı olduğundan $\overline{D}_{e_1} W_d = 0$ dır. O halde

$$\overline{D}_{e_1} W_d = 0 \ , \ \overline{\overline{D}}_{e_1} W_d = \sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\, x \tag{5.69}$$

elde edilir.

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} W_d = \sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\, \overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 + (\cos\theta) \overline{\overline{D}}_{e_1} \xi$$

ve (5.69) eşitliğinden

$$\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\, \overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 + (\cos\theta) \overline{\overline{D}}_{e_1} \xi = \sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\, x \tag{5.70}$$

olur. (5.70) denkleminin her iki tarafını ξ ile iç çarpıma tabi tutarak

$$a_{11} = 0$$

bulunur. Ayrıca (5.70) den

$$\overline{\overline{D}}_{e_1} e_1 = x \tag{5.71}$$

eşitliği elde edilir.

5.10. Teorem

S_1^3 de Sitter uzayında sabit spacelike açılı spacelike eksenli bir yüzey için D Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$D_{e_1} e_1 = 0 \qquad D_{e_2} e_1 = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}} a_{22} e_2$$

$$D_{e_1}e_2 = 0 \qquad D_{e_2}e_2 = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}}a_{22}e_1$$

5.8. Sonuç

S_1^3 de sabit spacelike açılı sabit spacelike eksenli timelike bir M yüzeyi verilsin. O zaman $\beta = \beta(u,v), M$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := -du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde u ve v lokal koordinatları vardır.

<u>Yüzey Parametrizasyonunun Bulunması</u>

Şimdi yukarıdaki sonuçta verilen M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := -du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde $x = x(u,v)$ yüzeyinin parametrizasyonunu bulalım.

5.11 Teorem

S_1^3 de sabit spacelike açılı sabit spacelike eksenli timelike M yüzeyinin $x = x(u,v)$ parametrizasyonu

$$\begin{cases} x_{uu} = x \\ x_{uv} = \dfrac{\beta_u}{\beta}x_v \\ x_{vv} = \beta\beta_u x_u + \dfrac{\beta_v}{\beta}x_v - \beta^2 a_{22}\xi - \beta^2 x \end{cases} \tag{5.72}$$

kısmi türevli denklem sistemini sağlar.

5.9. Sonuç

ξ, sabit spacelike açılı sabit spacelike eksenli timelike bir M yüzeyinin normal vektörü olmak üzere M yüzeyinin parametrizasyonu

$$\begin{cases} \xi_u = \overline{\overline{D}}_{x_u}\xi = 0 \\ \xi_v = \overline{\overline{D}}_{x_v}\xi = -a_{22}x_v \end{cases} \tag{5.73}$$

kısmi türevli denklem sistemini sağlar.

5.6. Önerme

M, sabit spacelike açılı sabit spacelike eksenli timelike bir yüzey ise $\beta a_{22} = \psi(v)$ olacak şekilde $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu vardır.

İspat

$\xi_{uv} = \xi_{vu} = 0$ olduğundan

$\overline{\overline{D}}_{x_u}(-a_{22}x_v) = 0$.

O halde

$$(a_{22})_u + \frac{\cos\theta}{\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}}(a_{22})^2 = 0$$

(5.74)

diferansiyel denklemi elde edilir. Dolayısıyla

$$(a_{22})_u + \frac{\beta_u}{\beta}a_{22} = 0 \tag{5.75}$$

veya

$$(\beta a_{22})_u = 0 \tag{5.76}$$

denkleminden

$$\beta a_{22} = \psi(v) \tag{5.77}$$

olacak şekilde $\psi = \psi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu vardır.

5.7. Önerme

$x = x(u,v), S_1^3$ de Sitter uzayında sabit spacelike açılı spacelike eksenli timelike yüzeyin parametrizasyonu olsun. Eğer M üzerinde $a_{22} = 0$ ise $x = x(u,v)$ de Sitter uzayında bir düzlem belirtir.

Tezin kalan kısmında $a_{22} \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz.

$$(a_{22})_u + \frac{\cos\theta}{\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}}(a_{22})^2 = 0$$

diferansiyel denkleminden

$$a_{22} = \frac{\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}}{u\cos\theta + \alpha(v)}, \alpha(v) = -\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}\,\overline{\alpha}(v) \tag{5.78}$$

olacak şekilde bir $\alpha(v)$ fonksiyonu vardır.

Dolayısıyla (5.77) denkleminden

$$\beta(u,v) = \frac{\psi(v)}{\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}}(u\cos\theta + \alpha(v)) \tag{5.79}$$

elde ederiz. Burada özel olarak $\psi(v) = v\sqrt{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}$ ve $\alpha(v) = \ln v$ seçelim.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.11. Teorem

(5.72) denklem sistemini sağlayan x immersiyonu M nin u,v lokal koordinatlarına göre

$$x_i(u,v)=\frac{-d_{1i}(v)}{2\cos\theta(u\cos\theta+\ln v)^2}+d_{2i}(v),\ i=1,2,3,4$$

şeklindedir.

6. DE SİTTER UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEY ÖRNEKLERİ

6.1. de Sitter Uzayında Sabit Açılı Spacelike Teğet Yüzeyler

Bu bölümde de Sitter uzayında spacelike teğet yüzeyleri çalışacağız. $\alpha : I \to S_1^3 \subset IR_1^4$ yay parametresi ile verilen spacelike eğri olsun.

$$x(s,t) = (\cos t)\alpha(s) + (\sin t)\alpha'(s), (s,t) \in I \times IR \tag{6.1}$$

olmak üzere α eğrisi ile üretilen M teğet yüzeyini tanımlayalım. M yüzeyinin (s,t) noktasındaki teğet düzlemi $\{x_s, x_t\}$ ile üretilir.

$$\begin{cases} x_s = (\cos t)\alpha'(s) + (\sin t)\alpha''(s) \\ x_t = (-\sin t)\alpha(s) + (\cos t)\alpha'(s) \end{cases}$$

olmak üzere $\{x_s, x_t\}$ tabanına göre M yüzeyinin I. temel formunun katsayıları

$$E = 1 + (\sin^2 t)K_d^2(s), F = 1, G = 1,$$

olur. O halde $EG - F^2 > 0$ olduğundan M yüzeyi spacelike bir yüzeydir. O halde

$$\begin{cases} x(s,t) = \left(\cos t\right)\alpha(s) + \left(\sin t\right)t(s) \\ x_s(s,t) = \left(-\sin t\right)\alpha(s) + \left(\cos t\right)t(s) + \left(\kappa_d(s)\sin t\right)n(s) \\ x_t(s,t) = \left(-\sin t\right)\alpha(s) + \left(\cos t\right)t(s) \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Öte yandan yüzeyimizin normal vektörü

$$e = \frac{x \times x_s \times x_t}{\| x \times x_s \times x_t \|} = \mp \frac{\alpha \times \alpha' \times \alpha''}{|\kappa_d|}$$

şeklindedir.

6.1.1. Timelike Açılı Spacelike Eksenli Spacelike Teğet Yüzeyler

Burada özel olarak de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli teğet yüzeyleri inceleyelim. Sabit timelike açılı spacelike eksenli spacelike yüzeyin W_d doğrultusu

$$W_d = (\sqrt{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta})e_1 + (\sinh\theta)\xi$$

şeklinde idi.

$$e_1 = \frac{x_s}{\| x_s \|}, \| x_s \| = \sqrt{1+\sin^2 t\kappa_d^2(s)}, \xi = e$$

olmak üzere timelike açılı spacelike eksenli spacelike teğet yüzeyinin doğrultusu

$$\begin{aligned} W_d \quad &= (-\sin t\sqrt{\frac{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}{1+\sin^2 t\kappa_d^2(s)}})\alpha(s) + (\cos t\sqrt{\frac{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}{1+\sin^2 t\kappa_d^2(s)}})t(s) \\ &+(\kappa_d(s)\sin t\sqrt{\frac{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}{1+\sin^2 t\kappa_d^2(s)}})n(s) + (\sinh\theta)e(s) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

6.1. Teorem

$\alpha : I \subset IR \to S_1^3,\ \kappa_d \neq 0$ olacak şekilde bir eğri olsun. (6.1) teğet yüzeyinin sabit timelike açılı, spacelike eksenli bir yüzey olması için gerekli ve yeterli koşul $\alpha(s)$ eğrisinin de Sitter uzayında düzlemsel olmasıdır.

İspat

$\alpha : I \to S_1^3, \kappa_d \neq 0$ olacak şekilde bir eğri olmak üzere $x(s,t)$ teğet yüzeyi sabit timelike açılı, spacelike eksenli bir yüzey olsun. O halde,

$$\xi = \frac{x \times x_s \times x_t}{\| x \times x_s \times x_t \|} = e(s)$$

olduğundan

$$\langle \xi, W_d \rangle = \langle e(s), W_d \rangle = \sinh\theta \tag{6.2}$$

olacak şekilde $0 < \theta < \pi$ reel sayısı vardır. (6.2) eşitliğinin her iki tarafının s ye göre türevini alırsak

$$\langle e'(s), W_d \rangle = 0$$

olur. Ayrıca Frenet denklem sisteminden $e'(s) = -\tau_d(s)n(s)$ olduğundan

$$-\tau_d(s)\langle n(s), W_d \rangle = 0 \tag{6.3}$$

olur. O halde

$\langle n(s), W_d \rangle = 0$ veya $\tau_d(s) = 0$

olur. Eğer $\langle n(s), W_d \rangle = 0$ ise o halde

$$\kappa_d(s)\sin t\sqrt{\frac{\sin^2\varphi + \sinh^2\theta}{1 + \sin^2 t\kappa_d^2(s)}} = 0$$

buradan da

$$\kappa_d(s)\sin t = 0,\ \kappa_d \neq 0$$

olacağından

$$\sin t = 0$$

olur ki bu da

$t = 0$

olması demektir. Bu da teğet yüzeyin tanımıyla çelişir. O halde (6.3) eşitliğinde $\tau_d(s) = 0$ olur. Bu ise α - eğrisinin de Sitter uzayında düzlemsel bir eğri olduğunu gösterir.

6.1. Uyarı

Burada de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli spacelike yüzeyin sabit doğrultusu

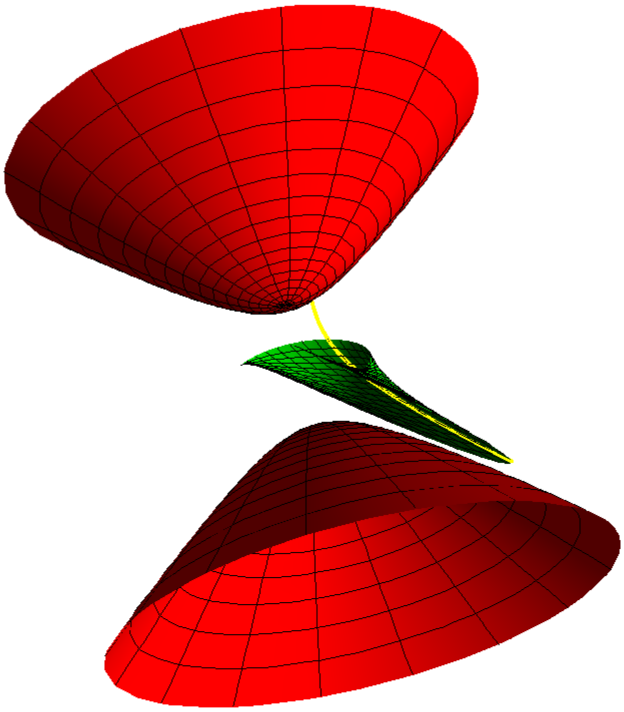
$$W_d = \sqrt{\left|\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi\right|} e_1 + \sinh \theta \xi$$

olarak alınırsa da benzer sonuçlar elde edilir.

6.1. Örnek

$$\alpha : I \to S_1^3 \subset IR_1^4, \alpha(s) = (s \sinh(\arccos hs), s \cosh(\arccos hs), \sqrt{1 - s^2}, 0)$$

parametrizasyonu ile verilen regüler bir eğri olun. α - eğrisi yardımı ile üretilen (6.1) M teğet yüzeyinin stereografik izdüşüm altındaki görüntüsü aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.1. de Sitter uzayında timelike açılı spacelike eksenli spacelike teğet yüzey

6.1.2 Timelike Açılı Timelike Eksenli Spacelike Teğet Yüzeyler

Bu bölümde de Sitter uzayında sabit timelike açılı timelike eksenli teğet yüzeyleri inceleyeceğiz. Sabit timelike açılı timelike eksenli spacelike yüzeyin W_d doğrultusu

$$W_d = \sqrt{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}\,e_1 + \cosh\theta\,\xi$$

şeklinde idi. O halde

$$e_1 = \frac{x_s}{\| x_s \|}, \| x_s \| = \sqrt{1+\sin^2 t\kappa_d^2}$$

olmak üzere timelike açılı timelike eksenli spacelike teğet yüzeyin doğrultusu

$$W_d = (-\sin t\sqrt{\frac{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}{1+\sin^2 t\kappa_d^2(s)}})\alpha(s) + (\cos t\sqrt{\frac{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}{1+\sin^2 t\kappa_d^2(s)}})t(s)$$
$$+(\kappa_d(s)\sin t\sqrt{\frac{\left|\sinh^2\theta - \sinh^2\varphi\right|}{1+\sin^2 t\kappa_d^2(s)}})n(s) + (\cosh\theta)e(s)$$

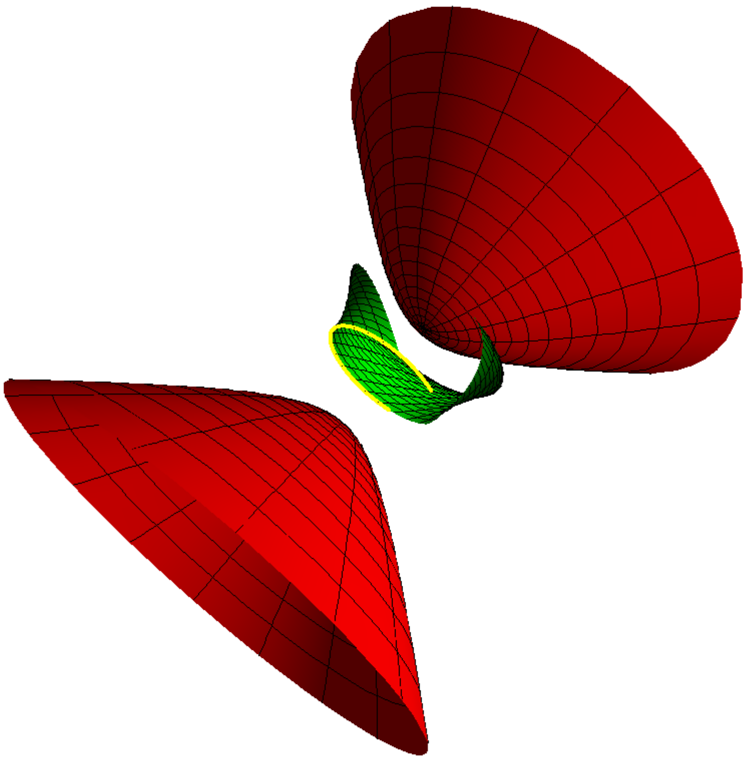
olarak elde edilir.

6.2. Teorem

$\alpha : I \subset IR \rightarrow S_1^3, \kappa_d \neq 0$ olacak şekilde bir eğri olsun. Eğer (6.1) teğet yüzeyi sabit timelike açılı timelike eksenli bir yüzey ise $\alpha(s)$ eğrisi de Sitter uzayında düzlemseldir.

6.2. Örnek

$\alpha : I \rightarrow S_1^3 \subset IR_1^4, \alpha(s) = (1, \sqrt{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0)$ parametrizasyonu ile verilen regüler bir eğri olun. α - eğrisi yardımı ile üretilen M teğet yüzeyinin stereografik izdüşüm altındaki görüntüsü aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.2. de Sitter uzayında timelike açılı timelike eksenli spacelike teğet yüzey

6.2. de Sitter Uzayında Sabit Açılı Timelike Teğet Yüzeyler

Bu bölümde de Sitter uzayında timelike teğet yüzeyleri çalışacağız. $\alpha : I \to S_1^3 \subset IR_1^4$ yay parametresi ile verilen timelike regüler eğri olsun.

$$x(s,t) = (\cosh t)\alpha(s) + (\sinh t)\alpha'(s), (s,t) \in I \times IR \tag{6.4}$$

olmak üzere α - eğrisi ile üretilen M teğet yüzeyini tanımlayalım. M yüzeyinin (s,t) noktasındaki teğet düzlemi $\{x_s, x_t\}$ ile üretilir.

$$\begin{cases} x_s = (\cosh t)\alpha'(s) + (\sinh t)\alpha''(s) \\ x_t = (\sinh t)\alpha(s) + (\cosh t)\alpha'(s) \end{cases}$$

olmak üzere $\{x_s, x_t\}$ tabanına göre M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = -1 + \left(\sinh^2 t\right) K_d^2(s), F = -1, G = -1$$

olur. O halde $EG - F^2 < 0$ olduğundan M yüzeyi timelike bir yüzeydir. Dolayısıyla

$$\begin{cases} x(s,t) = (\cosh t)\alpha(s) + (\sinh t)t(s) \\ x_s(s,t) = (\sinh t)\alpha(s) + (\cosh t)t(s) + \kappa_d(s)(\sinh t)n(s) \\ x_t(s,t) = (\sinh t)\alpha(s) + (\cosh t)t(s) \end{cases}$$

olur. Şimdi yüzeyimizin normal vektörünü bulalım. $e = \dfrac{x \times x_s \times x_t}{\| x \times x_s \times x_t \|}$ idi. Burada

$x \times x_s \times x_t = -\sinh t(\alpha \times \alpha' \times \alpha''),\ \| x \times x_s \times x_t \| = | \kappa_d \sinh t |$

olmak üzere

$$e = \mp \frac{\alpha \times \alpha' \times \alpha''}{| \kappa_d |},\ \kappa_d(s) \neq 0$$

olarak elde edilir.

6.2.1. Timelike Açılı Spacelike Eksenli Timelike Teğet Yüzeyler

Burada özel olarak de Sitter uzayında sabit timelike açılı spacelike eksenli timelike teğet yüzeyleri inceleyeceğiz. Sabit timelike açılı spacelike eksenli timelike bir yüzeyin W_d doğrultusu

$$W_d = \sqrt{\left|\sin^2 \varphi - \cosh^2 \theta\right|}\, e_1 - (\cosh \theta)\xi$$

idi. O halde

$$e_1=\frac{x_s}{\|x_s\|}, \|x_s\|=\sqrt{1+\kappa_d^2(s)\sinh^2 t},\ \ \xi(s)=e(s)$$

olmak üzere timelike açılı spacelike eksenli timelike teğet yüzeyin doğrultusu

$$\begin{aligned} W_d \quad &=(\sinh t\sqrt{\frac{\left|\sin^2\varphi-\cosh^2\theta\right|}{1+\sinh^2 t\kappa_d^2(s)}})\alpha(s)+(\cosh t\sqrt{\frac{\left|\sin^2\varphi-\cosh^2\theta\right|}{1+\sinh^2 t\kappa_d^2(s)}})t(s) \\ &+(\kappa_d(s)\sinh t\sqrt{\frac{\left|\sin^2\varphi-\cosh^2\theta\right|}{1+\sinh^2 t\kappa_d^2(s)}})n(s)-(\cosh\theta)e(s) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

6.3. Teorem

$\alpha: I\subset IR\rightarrow S_1^3,\ \kappa_d\neq 0$ olacak şekilde bir eğri olsun. Eğer (6.4) teğet yüzeyi sabit timelike açılı spacelike eksenli timelike bir yüzey ise $\alpha(s)$ eğrisi de Sitter uzayında düzlemseldir.

6.2.2. Spacelike Açılı Spacelike Eksenli Timelike Teğet Yüzeyler

Bu bölümde de Sitter uzayında sabit spacelike açılı spacelike eksenli timelike teğet yüzeyleri çalışacağız. Sabit spacelike açılı spacelike eksenli timelike yüzeyin W_d doğrultusu

$$W_d=\sqrt{\left|\sin^2\theta-\cosh^2\varphi\right|}\,e_1+(\cos\theta)\xi$$

idi. O halde

$$e_1=\frac{x_s}{\|x_s\|}, \|x_s\|=\sqrt{1+\sinh^2 t\kappa_d^2(s)}$$

olmak üzere spacelike açılı spacelike eksenli timelike teğet yüzeyin doğrultusu

$$W_d = (\sinh t\sqrt{\frac{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}{1+\sinh^2 t\kappa_d^2(s)}})\alpha(s) + (\cosh t\sqrt{\frac{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}{1+\sinh^2 t\kappa_d^2(s)}})t(s)$$
$$+(\kappa_d(s)\sinh t\sqrt{\frac{\left|\sin^2\theta - \cosh^2\varphi\right|}{1+\sinh^2 t\kappa_d^2(s)}})n(s) + (\cosh\theta)e(s)$$

olarak elde edilir.

6.4. Teorem

$\alpha : I \subset IR \rightarrow S_1^3, \kappa_d \neq 0$ olacak şekilde bir eğri olsun. Eğer (6.4) teğet yüzeyi sabit spacelike açılı spacelike eksenli timelike bir yüzey ise $\alpha(s)$ eğrisi de Sitter uzayında düzlemseldir.

KAYNAKLAR

1. Munteanu, M.I., Nistor, A.I., "A new approach on constant angle surfaces in E^3" , ***Turk T.Math***.,33:169-178 (2009).

2. Di Scala, A.J., Ruiz-Hernandez, G., "Helix submanifolds of Euclidean space", ***Monatsh. Math.*** DOI 10.1007 / s00605-008-0031-9.

3. Ruiz-Hernandez, G., "Helix, shadow boundary and minimal submanifolds", ***Illinois J. Math.***,52:1385-1397 (2008).

4. Cermelli, P., Di Scala, A.J., "Constant angle surfaces in liquid crystals", ***Phylos. Magazine***, 87:1871-1888 (2007).

5. Dillen, F., Fastenakels, J., Van der Veken, J., Vrancken, L., "Constant angle surfaces in $S^2\times R$" , ***Monaths. Math***. , 152:89-96 (2007).

6. Dillen, F. and Munteanu, M. I., "Constant angle surfaces in $H^2\times R$" , ***Bull. Braz. Math. soc.*** , 40:85-97 (2009).

7. Fastenakels, J., Munteanu, M. I. , Van der Veken, J., "Constant angle surfaces in the Heisenberg group", ***Acta Math. Sinica (English Series)***, 27:747-756 (2011).

8. Lopez, R., Munteanu, M.I., "Constant angle surfaces in Minkowski space", ***Bulletin of the Belgian Math.*** So. Simon Stevin, 18:2,271-286 (2011).

9. Ratcliffe, J.G., "Foundations of Hyperbolic Manifolds", ***Springer-Verlag***, Berlin, 36 (1994).

10. Hacısalihoğlu, H.H., "İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler", ***A.Ü.Fen Fakültesi***, Ankara, 18-43 (1998).

11. O'neil, B., "Semi-Riemannian Geometry", ***Academic Press***., London, (1983).

12. Thas, C., “A gauss map on hypersurfaces of submanıfolds ın Euclıdean spaces”, ***J.Korean Math.Soc.***, 16:1 (1979).

13. Vinberg, E.B., “Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences”, ***Springer-Verlag***, 4-79 (1993).

14. Izumıya, S., Sajı, K., Takahashı, M., “Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space”, ***J.Math.Soc.Japan***, 87:789-849 (2010).

15. Barros, M., “General Helices and a Theorem of Lancret”, ***Proceedıngs of the American Marhematical Society***, 125:1503-1509 (1997).

16. Izumıya, S., Peı, D., Fuster, M.D.C.R., “The horospherical geometry of surfaces ın hyperbolic 4-spaces”,***Israel Journal of Mathematıcs***, 154:361-379 (2006).

17. Izumıya, S., Peı, D., Sano, T., “Sıngularities of hyperbolic gauss map”, ***London Math.Soc.***,3:485-512 (2003).

18. Takızawa, C., Tsukada, K., “Horocyclic surfaces in hyperbolic 3-space”, ***Kyushu J.Math***., 63:269-284 (2009).

19. Izumıya, S., Fuster, M.D.C.R. , “The horospherical Gauss-Bonnet type theorem in hyperbolic space”, ***J.Math.Soc.Japan***, 58:965-984 (2006).

20. Fenchel, W., “Elementary Geometry in Hyperbolic Space”, ***Walter de Gruyter***,New York , 1989.

21. Lopez, R., “Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space”, ***Instituto de Matematica e Estatıstica (IME-USP) University of Saol Paulo,*** Brasil, 1-4 (2008).

22. Kasedou, M., “Differential Geometry of Spacelike submanıfolds ın de Sitter Space” , ***Hokkaido Universty Sapporo 060-0810***, Japan.

23. Kasedou, M., “Spacelike Submanifolds in de Sitter Space” , ***Demonstratıo Mathematıca***, XLIII , 2010.

24. Karlığa, B.,“On the Generalized Stereographic Projection”, ***Beitrage zur Algebra and Geometrie Contrıbutıons to Algebra and Geometry***, 2:329-336,37(1996).

25. Mak, M., “Genelleştirilmiş Stereografik İzdüşüm ve İnversiyon”, ***Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Ankara, Yüksek Lisans Tezi, 26-37(2008).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: MERT, Tuğba
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 21.12.1984, Sivas
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (346) 219 10 10 – 3140
e-mail	: tmert@cumhuriyet.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Cumhuriyet Üniversitesi /Matematik Bölümü	2009
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi/Matematik Bölümü	2006
Lise	Sivas Lisesi	1996

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2007-	Cumhuriyet Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yüzme , Müzik , Tenis