

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BEREZİN SEMBOLLERİ VE ABEL YAKINSAKLIK İLE İLGİLİ
BAZI SONUÇLAR

Hasret DEĞER

Danışman
Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2014

©2014[Hasret DEĞER]

TEZ ONAYI

Hasret DEĞER tarafından hazırlanan “Berezin Sembolleri ve Abel Yakınsaklık ile İlgili Bazı Sonuçlar” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Doç.Dr. Mehmet GÜRDAL

Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Jüri Üyesi

Doç.Dr.Aydın KURNAZ

Selçuk Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Jüri Üyesi

Doç.Dr. Suna SALTAN

Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Enstitü Müdürü

Doç.Dr.Ahmet ŞAHİNER

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Hasret DEĞER

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	2
3. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	12
4.1. Bergman Uzayında Abel Yakınsaklık ve Berezin Sembolleri.....	12
4.2. Berezin Sembolleri ve Abel Yakınsaklık ile İlgili Bazı Sonuçlar	21
4.2.1. Szegő ve bergman tipli çekirdekler.....	21
4.2.2. Ağırlıklı bergman uzayındaki dizi ve serilerin abel yakınsaklığı	24
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	29
KAYNAKLAR.....	30
ÖZGEÇMİŞ	33

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BEREZİN SEMBOLLERİ ve ABEL YAKINSAKLIK İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

Hasret DEĞER

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edilmiş ve çalışmanın amacından bahsedilmiştir. Gerekli görülen bazı tanımlara ve temel sonuçlara yer verilmiştir. Berezin sembolleri ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Berezin sembolünün S_1 iz sınıfından olan operatörlerle ilişkisi açıklanmıştır. Sonra Berezin sembolleri yönteminin bir uygulaması olan bazı dizi ve serilerin Abel yakınsaklığı verilmiştir. Öncelikle T_d ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolleri yardımıyla L^2_α Bergman uzayındaki kompleks sayı dizi ve serilerin Abel yakınsaklığı için bazı kriterler verilmiştir. Ardından Berezin sembolü ile kompleks düzlemin $\mathbb{D}$ birim diski üzerindeki $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ ağırlıklı Bergman uzayı üzerinde T_d ağırlıklı kaydırma operatörünün ilişkilendirilmesiyle bazı dizi ve serilerin Abel yakınsaklığı karakterize edilmiştir. Aynı zamanda Szegő ve Bergman tipli üretici çekirdekler ve onların üretici çekirdek Hilbert uzaylarının tamlık problemleri araştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Üretici çekirdek, Berezin sembolü, Abel yakınsaklık, Ağırlıklı Bergman uzayı, Ağırlıklı kaydırma operatörü.

2014, 33 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME RESULTS RELATED WITH BEREZIN SYMBOLS AND ABEL CONVERGENCE

Hasret DEĞER

Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

In this work, firstly historical development of the topic is expressed and the purpose of the work is mentioned. Certain definitions and main results required are presented. We investigated Berezin symbols and their properties. We also explained Berezin symbols of associated the operators in S_1 trace class. Then we give Abel convergence of some sequences and series that is the application of the method of Berezin symbols. First, we give the criteria for Abel convergence of sequences and series of complex numbers on L^2_α Bergman space in terms of Berezin symbols of T_d weighted shift operators. Later, Berezin symbols associated with T_d weighted shift operators on $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ the weighted Bergman space on the unit disc $\mathbb{D}$ of the complex plane $\mathbb{C}$, we characterize Abel convergence of some sequences and series. We also investigate Szegő and Bergman type kernels and some completeness problems for their reproducing kernels Hilbert space.

Keywords: Reproducing kernel, Berezin symbol, Abel convergence, Weighted Bergman space, Weighted shift operator.

2014, 33 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL'a ve çalışmam sırasında yardımını esirgemeyen Arş. Gör. Ulaş YAMANCI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen eşime, aileme ve tüm arkadaşlarıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimime maddi destek sağlayan TÜBİTAK (2210-Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı) 'a teşekkür ederim.

Hasret DEĞER
ISPARTA, 2014

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\tilde{A}$	A operatörünün Berezin sembolü
$ber(A)$	A operatörünün Berezin sayısı
$Ber(A)$	A operatörünün Berezin kümesi
D_ε	$\{\varepsilon_n\}$ ile belirli köşegen operatör
H^p	Hardy uzayı
H^∞	Sınırlı analitik fonksiyonların uzayı
$H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$	Ağırlıklı Bergman uzayı
$Hol(\mathbb{D})$	$\mathbb{D}$ üzerindeki analitik fonksiyonların uzayı
$\mathcal{H}$	Fonksiyonel Hilbert uzayı
$iz(A)$	A operatörünün izi
$k_{\mathcal{H},\lambda}$	Üretici çekirdek
$\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}$	Normalleştirilmiş üretici çekirdek
K_α	Szegő ve Bergman tipli çekirdekler
L_a^2	Bergman uzayı
$s_n(A)$	A operatörünün singüler sayısı
S_p	Schatten-von Neumann sınıfı
S_1	İz sınıfı
T_d	Ağırlıklı kaydırma operatörü
μ_z	Evalüsyon fonksiyoneli
Γ	Gama fonksiyonu

1. GİRİŞ

Berezin sembolleri ve onun tanımlanmasında kullanılan üretici çekirdek kavramı sürekli gelişmekte olan matematiğin modern analiz ve pratik alanlarının yanı sıra atom fiziğinde de büyük önem taşıdığı bilinmektedir. Bilim ve teknoloji alanında hızlı gelişmelere bağlı olarak yeni uygulama arayışları, Berezin sembolü ile ilgili çalışmaların en etkili yürütücü kuvveti olmuştur. Berezin sembollerinin Bergman uzaylarında ve Poisson çekirdeğinin Hardy uzaylarında önemli bir role sahip olduğu bilinen bir gerçektir. Eğer Berezin sembollerinin tanımlandığı küme, yani Berezin kümesi operatörün nümerik değer kümesinin alt kümesi olduğu dikkate alınır, bu kavramların haberleşme alanında geniş bir uygulamaya sahip olduğunu söyleyebiliriz. Bunlara ilaveten, elektronların Vieck ve anti-Vieck sembolleri Berezin sembolleri ile sıkı bir ilişkiye sahip olmasından dolayı da yine Berezin sembolleri elektronların enerji seviyelerinin belirlenmesinde var olduğu görülmektedir. Ayrıca Berezin sembolleri diferansiyel denklemler teorisinde, Riesz bazıları konusunda ve operatörlerle yakından ilişkili olduğu için birçok alanda kullanılmaktadır. Bunun dışında gün geçtikçe de değişik kullanım alanları ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, Berezin sembolleri yöntemi ile Abel yakınsaklık arasındaki ilişkiyi ve bunun bazı sonuçlarını vermektir. Öncelikle T_d ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolleri yardımıyla L_α^2 Bergman uzayındaki kompleks sayı dizisi ve serilerinin Abel yakınsaklığı için bazı kriterler verilmiştir. Daha sonra $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ ağırlıklı Bergman uzayı üzerindeki durumu incelenmiştir. Buna ilaveten, Szegő ve Bergman tipli çekirdekler ve onların üretici çekirdek Hilbert uzaylarından bahsedilmiştir. Ayrıca, üretici çekirdeklerin aileleri için tamlik problemleri incelenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

$\lambda \in \Omega$ için $f \rightarrow f(\lambda)$ evalüsyon fonksiyoneli sürekli olacak şekilde Ω kümesi üzerinde kompleks değerli f fonksiyonlarının oluşturduğu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayına fonksiyonel Hilbert uzayı veya üretici çekirdek Hilbert uzayı denir. $\{e_n\}$ $\mathcal{H}$ uzayının herhangi bir ortonormal bazı olmak üzere

$$k_{\mathcal{H},\lambda}(z) = k_{\mathcal{H}}(\lambda, z) = K(\lambda, z) = \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

şeklinde tanımlanan ve Berezin sembolünün tanımlanmasında kullanılan üretici çekirdek kavramı Moore tarafından çekirdeğin üretici özelliğe sahip olması nedeniyle ifade edilmiştir (Moore, 1916; 1935). Daha sonra üretici çekirdek konusu ayrıntılı olarak Aronszajn tarafından ele alınmıştır (Aronszajn, 1950).

$\mathcal{H}$ normalleştirilmiş üretici çekirdeğe sahip fonksiyonel Hilbert uzayı ve A sınırlı lineer operatör olsun.

$$\tilde{A}(\lambda) = \left\langle A\hat{k}_{H,\lambda}, \hat{k}_{H,\lambda} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

şeklinde tanımlanan kompleks değerli bir fonksiyon olan A operatörünün Berezin sembolü ilk defa Berezin (1972; 1974) tarafından tanımlanmıştır. Sonrasında bu konu çok sayıda matematikçinin ilgisini çekmiş ve bunun üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Englis, 1994; Nordgren ve Rosenthal, 1994; Axler ve Zheng, 1998). Berezin sembollerinin çarpımsal özelliği incelenmiştir (Kılıç, 1995). Bergman uzayı üzerinde operatörlerin kompakt olmasıyla Berezin dönüşümleri arasındaki ilişki analiz edilmiştir (Zorboska, 2002). Berezin sembolleri kullanılarak Abel teoremlerinin alternatif ispatları verilmiştir (Karaev, 2004). Böylece Berezin sembolleri ve Abel yakınsaklık arasında bir ilişki kurulmuştur. Ayrıca Berezin kümesi ve Berezin sayısı tanımları Karaev tarafından verilmiştir (Karaev, 2006a, b). Buna ilaveten Hardy ve Bergman uzayları üzerinde operatörlerin Berezin sembolleri ile ilgili bazı problemler araştırılmıştır (Karaev, Gürdal ve Yamancı, 2013).

Son yıllarda üretici çekirdek ve Berezin sembolleri geniş bir şekilde öğrenilmekte ve bu iki kavramın önemli uygulamaları da açıkça literatürde görülmektedir (Nikolski, 1986; Zhu, 1990; 2007; Korenblum, 1977; Sarason, 1994; Pehlivan ve Karaev,

2004; Chalender vd., 2006; Chalender vd., 2012). Ancak bu konularda çok sayıda çözülmemiş sorular hala mevcuttur (Zhu, 1990; 2007).

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak olan gerekli bazı kavramlar ve bu kavramlarla ilgili tanım, notasyon ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1. X , $\mathbb{C}$ kompleks skalerler üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $x, y, z \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$(I1) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(I2) \quad \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle},$$

$$(I3) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$(I4) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

özelliklerini sağlayan $\langle x, y \rangle$ kompleks sayısı varsa o zaman $\langle x, y \rangle$ ' ye x ve y nin iç çarpımı denir. X kompleks vektör uzayının iç çarpımı varsa iç çarpım uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 3.2. X , $\mathbb{C}$ kompleks skalerler üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (pozitif)},$$

$$(N2) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (üçgen eşitsizliği)},$$

$$(N3) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ (homojenlik)},$$

özelliklerini sağlayan $\|x\|$ reel sayısına x ' in normu denir. X kompleks vektör uzayı norma sahipse normlu uzay olarak adlandırılır.

Teorem 3.3. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) X iç çarpım uzayında her $x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak x ve y nin lineer bağımlı olmasıyla sağlanır.

Teorem 3.4. Her iç çarpım uzayı normlu uzaydır.

Tanım 3.5. Normlu bir X uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine kuvvetli yakınsaktır ya da norma göre yakınsaktır denir ve bu durum,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{veya} \quad x_n \rightarrow x$$

ile ifade edilir. x değerine $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir ve $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli olarak x değerine yakınsaktır denir.

Tanım 3.6. Normlu bir X uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer her $f \in X'$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{z} x$ şeklinde yazılır. x değerine $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir ve $\{x_n\}$ dizisi zayıf olarak x değerine yakınsaktır denir.

Tanım 3.7. X normlu uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi $m \rightarrow \infty$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.8. X normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X uzayında bir limite sahipse tamdır denir. Yani, eğer $m \rightarrow \infty$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

Tanım 3.9. Tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Tanım 3.10. Tam normlu uzaya Banach uzayı denir.

Şimdi de dizi ve seriler için abel yakınsaklık tanımlarını verelim.

Tanım 3.11. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a$$

limiti varsa $\{a_n\}$ dizisi a değerine Abel yakınsaktır denir ve (A) yakınsak olarak yazılır (Powell ve Shah, 1972).

Tanım 3.12. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kompleks sayıların bir serisi olsun. Eğer $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ kısmi toplam-
lar dizisi L değerine (A) yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi L değerine (A) yakınsaktır denir.
Burada $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ dır (Powell ve Shah, 1972).

Şimdi de $\mathbf{O}, \mathbf{o}, \sim$ sembollerinin tanımlarını verelim.

Tanım 3.13. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları verilsin. x_0 sabit nokta olsun. $g(x)$ fonksiyonunun x_0 civarındaki açık aralıkta pozitif ve sürekli olduğunu kabul edelim.

- (i) Eğer x_0 civarındaki açık aralıkta $|f(x)| \leq Kg(x)$ olacak şekilde bir K sabiti var ise $f(x) = \mathbf{O}(g(x))$, $(x \rightarrow x_0)$
- (ii) Eğer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = \mathbf{o}(g(x))$, $(x \rightarrow x_0)$
- (iii) Eğer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ise $f(x) \sim g(x)$, $(x \rightarrow x_0)$

ile tanımlıdır. (iii) de $g(x)$ x_0 civarında pozitif olmak zorunda değildir.

Tanım 3.14. $X, \mathbb{C}$ kompleks skaleri üzerinde bir normlu uzay olsun. $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ operatörü her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

koşulunu sağlıyorsa lineer fonksiyonel ve ayrıca f sınırlı ise sınırlı lineer fonksiyonel olarak adlandırılır. Buna göre, her $x \in X$ için

$$|f(x)| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir c sayısı vardır ve f fonksiyonunun normu

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.15. (Riesz Temsil Teoremi) Bir H Hilbert uzayı üzerinde, her sınırlı lineer f fonksiyoneli iç çarpımla ifade edilebilir, yani, y, f fonksiyoneline bağımlı olmak üzere,

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir tek y vektörü vardır ve $\|f\| = \|y\|$ dir.

Tanım 3.16. $e_j, j = 1, 2, \dots$ için H Hilbert uzayının vektörleri olsun. Eğer

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

ise $S = \{e_1, e_2, \dots\}$ vektör dizisine ortonormal küme denir.

Teorem 3.17. (Bessel Eşitsizliği) $\{e_j\}$, bir X iç çarpım uzayında ortonormal bir dizi olsun. Buna göre her $x \in X$ için,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

dir. Burada $\langle x, e_j \rangle$ iç çarpımlarına, x 'in, $\{e_j\}$ ortonormal dizisine göre Fourier katsayıları adı verilir.

Tanım 3.18. H bir Hilbert uzay olsun. $T : H \rightarrow H$ dönüşümü her $x, y \in H$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

özellikliğini sağlarsa lineer operatör olarak adlandırılır.

Tanım 3.19. H Hilbert uzayında T lineer bir operatör olsun. Her $x \in H$ için

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde $c \geq 0$ sayısı varsa T operatörüne sınırlıdır denir ve T nin normu,

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

dir.

Teorem 3.20. Bir H Hilbert uzayı üzerinde S ve T sınırlı lineer operatörler olsunlar. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) Her $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\|\alpha T\| \leq |\alpha| \|T\|$
- (ii) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$
- (iii) $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$ (Furuta, 2001).

Riesz Temsil Teoremi, bir H Hilbert uzayı üzerinde, sınırlı lineer bir operatörün adjoint operatörünü tanımlamamıza olanak sağlamaktadır. Bu operatör sayesinde self adjoint, normal, üniter, ortogonal projeksiyon ve izometri operatörleri tanımlanabilmektedir. İlk olarak adjoint operatörün tanımını verelim.

Tanım 3.21. H_1 ve H_2 Hilbert uzayları olmak üzere, $T : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. T nin T^* adjoint operatörü, her $x \in H_1$ ve her $y \in H_2$ için

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

olacak şekilde bir $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ operatörüdür.

Teorem 3.22. H_1 ve H_2 Hilbert uzayları olmak üzere, $T : H_1 \rightarrow H_2$ ve $S : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer operatörler olsun. Bu durumda T^* ve S^* operatörler de sınırlı lineer olup aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $\|T^*\| = \|T\|$
- (ii) $(S + T)^* = S^* + T^*$
- (iii) Her $\alpha \in \mathbb{C}$ için $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
- (iv) $(T^*)^* = T$
- (v) $(ST)^* = T^* S^*$
- (vi) $\|T^* T\| = \|T T^*\| = \|T\|^2$
- (vii) $T^* T = 0 \Leftrightarrow T = 0$ (Furuta, 2001).

Tanım 3.23. Hilbert uzayı üzerinde operatörlerin bazı özel türleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

self-adjoint operatör: $T^* = T$.

normal operatör: $T^* T = T T^*$.

projeksiyon operatör: $T^2 = T$ (idempotent) ve $T^* = T$.

üniter operatör: $T^* T = T T^* = I$.

izometri operatör: $T^*T = I$.

pozitif operatör: Her $x \in H$ için $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ ile tanımlanır ve $T \geq 0$ ile gösterilir.

Şimdide kompakt operatör, köşegen operatör ve Schatten-von Neumann sınıfları tanımlarını verelim.

Tanım 3.24. X ve Y normlu iki uzay olsun. Bir $T : X \rightarrow Y$ operatörü T 'nin lineer ve X 'in her sınırlı M alt kümesi için $T(M)$ rölatif kompakt, yani $\overline{T(M)}$ kapanışının kompakt olması halinde, T , kompakt lineer bir operatördür.

Teorem 3.25. H kompleks Hilbert uzayı üzerinde bir T lineer operatörünün kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $x_n \xrightarrow{z} 0$ iken $\|Tx_n\| \rightarrow 0$ dır (Zhu, 1990).

Teorem 3.26. $\{e_n\}$ ve $\{f_n\}$ sırasıyla E ve F nin denk normalleştirilmiş bazları olsunlar. $\{\alpha_n\}$ sınırlı dizisi verilsin ve $T : E \rightarrow F$ sınırlı lineer operatörü her bir n için $T(e_n) = \alpha_n f_n$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda T nin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $\alpha_n \rightarrow 0$ olmasıdır (Choi ve Kim, 1993).

Tanım 3.27. X ve Y Banach uzayları, $\{x_n\} \subset X$ ve $\{y_n\} \subset Y$ lineer bağımsız diziler olsunlar. $\{\varepsilon_n\}$ sabit skaler dizi olmak üzere $D_\varepsilon x_n = \varepsilon_n y_n$ şeklinde tanımlanan $D_\varepsilon \in B(X, Y)$ operatörüne $\{\varepsilon_n\}$ ile belirli köşegen operatör denir. X den Y ye tüm köşegen operatörlerin kümesi $D(X, Y)$ ile gösterilir. Bu küme bir vektör uzayı oluşturur. Çünkü iki köşegen operatörün toplamı ve köşegen operatörün skalerle çarpımı yine köşegen operatörlerin kümesindedir.

Örnek 3.28. $D : l_2 \rightarrow l_2$ köşegen operatörü ve $\{\lambda_k\}$ sınırlı kompleks dizi olmak üzere

$$D(x_k) = \lambda_k x_k$$

şeklindedir. Buna göre köşegen operatörün adjointi

$$D^*(x_k) = \bar{\lambda}_k x_k$$

olur. Bu durumda D operatörünün self-adjoint olması için gerekli ve yeterli koşul her k için $\lambda_k \in \mathbb{R}$ olmasıdır.

Ayrıca $\{e_k\}$ için $D(e_k) = \lambda_k e_k$ ve $D^*(e_k) = \bar{\lambda}_k e_k$ olmak üzere D köşegen operatörünün üniter olması için gerekli ve yeterli koşul her k için $|\lambda_k| = 1$ olmasıdır. Ayrıca, $DD^*e_k = D^*De_k = |\lambda_k|^2 e_k$ olduğundan D köşegen operatörü normaldir.

Tanım 3.29. $B(H)$ sonsuz boyutlu ayrılabilir H kompleks Hilbert uzayı üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin cebiri ve $\mathcal{K}_n \subset B(H)$ rankı n yi geçmeyen tüm operatörlerin kümesi olsun. Bir $A \in B(H)$ operatörünün $s_n(A)$ singüler sayısı (s -sayısı)

$$s_n = \lambda_n((AA^*)^{\frac{1}{2}}), n \geq 1$$

ile tanımlanır. Burada $\lambda_n, (AA^*)^{\frac{1}{2}}$ operatörünün özdeğeridir. Başka bir deyişle

$$s_{n+1} = \text{dist}(A, \mathcal{K}_n), n \geq 0$$

dir.

Tanım 3.30. $0 < p < \infty$ için Schatten-von Neumann sınıfı $S_p := S_p(H)$

$$\sum_{n \geq 0} (s_n(K))^p \leq +\infty$$

koşulunu sağlayan $s_n(K)$ singüler sayısına sahip H üzerindeki tüm K kompakt operatörlerin uzayıdır. Herhangi $0 < p < \infty$ için S_p sadece bir vektör uzayıdır. Fakat $S_p, 1 \leq p < \infty$ için

$$\|K\|_{S_p} = \left(\sum_{n \geq 0} (s_n(K))^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. S_p nin özel durumu S_1 iz sınıfından olan operatörler Berezin sembolleri konusunda önemli bir rol oynamaktadır. Herhangi bir $T \in S_1$ ve H nin $\{e_n\}$ ortonormal bazı için T operatörünün izi

$$\text{iz}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle$$

şeklinde tanımlanır (Karaev, 2002).

Şimdi de analitik ve gama fonksiyonlarının tanımlarını verelim.

Tanım 3.31. Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu z_0 noktası ve bunun bir komşuluğundaki her noktada türevli ise f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Teorem 3.32. Eğer $f(z)$ fonksiyonu analitik ise Taylor serisine açılabilir. Yani

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.33. $0 < x < \infty$ için $\Gamma(x)$ fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.34. (i) $0 < x < \infty$ aralığındaki her bir x için $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dir.

(ii) $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$ dir.

Son olarak Hahn-Banach Teoremini ifade edelim.

Teorem 3.35. (Hahn-Banach Teoremi) X reel bir vektör uzayı ve p, X üzerinde altlineer bir fonksiyonel olsun. Ayrıca f fonksiyonelinin X uzayının bir Z altuzayı üzerinde tanımlı olup her $x \in Z$ için

$$f(x) \leq p(x)$$

koşulunu gerçekleyen lineer bir fonksiyonel olduğunu kabul edelim. Bu durumda f fonksiyoneli, Z uzayından X uzayına, her $x \in X$ için

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $\tilde{f}$ lineer genişlemesine sahiptir. Yani, $\tilde{f}$ X üzerinde lineer bir fonksiyonel olup, X üzerinde (3.1) eşitsizliğini gerçekler ve her $x \in Z$ için

$$f(x) = \tilde{f}(x)$$

dir (Kreyszig, 1978).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Bergman Uzayında Abel Yakınsaklık ve Berezin Sembolleri

Bu bölümde öncelikle Berezin sembolleri konusunda önemli bir yere sahip Hardy ve Bergman uzaylarının tanımları verilmiştir. Ardından Berezin sembolünün bazı özelliklerinden bahsedilmiş ve S_1 sınıfından olan operatörlerle ilişkisi açıklanmıştır. Berezin sembolleri yönteminin ilk kez kullanıldığı Abel Teoremlerinin fonksiyonel analiz ispatları verilmiştir (Karaev, 2004). Bu yöntemin uygulamasıyla kompleks sayı dizi ve serilerinin Abel yakınsaklığı karakterize edilmiştir. Bunun için T_d ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolü kullanılmıştır.

Öncelikle Hardy ve Bergman uzaylarının tanımlarını verelim.

Tanım 4.1.1. $1 \leq p < \infty$ için $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim disk üzerindeki

$$\|f\|_p = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu sonlu olacak şekilde tüm analitik f fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya, yani

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) : \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right) < +\infty \right\}$$

uzayına H^p Hardy uzayı denir.

$p = \infty$ için H^∞ disk üzerinde tüm sınırlı analitik fonksiyonların uzayıdır ve normu

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 < r < 1} |f(z)|$$

şeklinde tanımlanır (Rosenblum ve Rovnyak, 1985).

Tanım 4.1.2. $\|f\|_{L_a^2}^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA_2(z)$ normu sonlu olacak şekilde tüm analitik fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayına $L_a^2 = L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayı denir. Burada $dA_2 = \frac{dx dy}{\pi}$, $\mathbb{D}$ birim diskinin ölçümü bire eşit olacak şekilde normalleştirilmiş Lebesgue bölge ölçümüdür.

Şimdi Berezin sembolünün tanımını verebilmek için gerekli olan evalüsyon fonksiyoneli, fonksiyonel Hilbert uzayı veya üretici çekirdek Hilbert uzayı, üretici çekirdek ve standart fonksiyonel Hilbert uzayı tanımlarını verelim.

Tanım 4.1.3. $\mathcal{H} := \{f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$ iç çarpımla donatılmış fonksiyonların Hilbert uzayı olsun. Her bir $\lambda \in \Omega$ için

$$\mu_z : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, \mu_z(f) = f(\lambda)$$

dönüşümüne evalüsyon fonksiyoneli denir (Al-Ammari, 2006).

Tanım 4.1.4. Her $\lambda \in \Omega$ için $f \rightarrow f(\lambda)$ evalüsyon fonksiyoneli sürekli olacak şekilde Ω kümesi üzerinde kompleks değerli f fonksiyonlarının oluşturduğu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayına fonksiyonel Hilbert uzayı veya üretici çekirdek Hilbert uzayı denir (Halmos, 1982).

Tanım 4.1.5. Riesz Temsil teoremine göre $\lambda \in \Omega$ için $f(\lambda) = \langle f, k_{\mathcal{H},\lambda} \rangle$ olacak şekilde bir tek $k_{\mathcal{H},\lambda} \in \mathcal{H}$ vardır. Bu $k_{\mathcal{H},\lambda}$ fonksiyonuna $\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeği, $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} = \frac{k_{\mathcal{H},\lambda}}{\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|}$ fonksiyonuna da $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği denir (Karaev, 2006b).

$\{e_n\}$ $\mathcal{H}$ uzayının ortonormal bazı olmak üzere, bazlar yardımıyla üretici çekirdeği

$$k_{\mathcal{H},\lambda}(z) = k_{\mathcal{H}}(\lambda, z) = K(\lambda, z) = \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Şimdi fonksiyonel Hilbert uzayına örnekler verelim ve üretici çekirdeklerini bulalım.

Örnek 4.1.6. $H^2(\mathbb{D}), \{z^n\}$ ortonormal bazına sahip bir fonksiyonel Hilbert uzayıdır ve Szegő çekirdeği olarak da bilinen üretici çekirdeği

$$k_{\mathcal{H},\lambda}(z) = \sum_{n \geq 0} \overline{\lambda}^n z^n = \sum_{n \geq 0} (\overline{\lambda} z)^n = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}$$

dır. Ayrıca bu uzayın normalleştirilmiş üretici çekirdeği

$$\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\lambda|^{2n} = \frac{1}{1 - |\lambda|^2} \quad \text{olup} \quad \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} = \frac{\sqrt{1 - |\lambda|^2}}{1 - \bar{\lambda}z}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.1.7. $L_a^2(\mathbb{D}), \{\sqrt{n+1}z^n\}$ ortonormal bazına sahip bir fonksiyonel Hilbert uzayıdır ve bu uzayın üretici çekirdeği

$$\begin{aligned} k_{L_a^2,\lambda}(z) &= \sum_{n \geq 0} \overline{(\sqrt{n+1}\lambda^n)} (\sqrt{n+1}z^n) = \sum_{n \geq 0} (n+1) \bar{\lambda}^n z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+1) (\bar{\lambda}z)^n = \sum_{n \geq 0} ((\bar{\lambda}z)^{n+1})' \\ &= \left(\frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} \right)' = \frac{1}{(1 - \bar{\lambda}z)^2} \end{aligned}$$

dır.

Tanım 4.1.8. $\mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzayı ve $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}$, bu uzayın normalleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. Eğer $\lambda \rightarrow \partial\Omega$ iken $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rightarrow 0$ zayıf yakınsak ise $\mathcal{H}$ uzayına standart fonksiyonel Hilbert uzayı denir (Aronzajn, 1950; Saitoh, 1988; 1997).

$H^2(\mathbb{D})$ ve $L_a^2(\mathbb{D})$ standart fonksiyonel Hilbert uzayına örnek olarak verilebilir.

Tanım 4.1.9. $A, \mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer bir operatör ve $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}$, bu uzayın normalleştirilmiş üretici çekirdeği olmak üzere

$$\widetilde{A}(\lambda) = \langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{A}$ fonksiyonuna A operatörünün Berezin sembolü denir (Berezin, 1972).

Tanım 4.1.10. A operatörünün Berezin kümesi

$$Ber(A) = \left\{ \widetilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega \right\}$$

ve Berezin sayısı

$$ber(A) = \sup \left\{ \left| \widetilde{A}(\lambda) \right| : \lambda \in \Omega \right\}$$

ile tanımlanır (Karaev, 2006a).

Şimdi de Berezin sembolünün özelliklerini verelim:

(1) Sınırlı lineer bir A operatörünün Berezin sembolü $\widetilde{A}$ sınırlı bir fonksiyondur.

Berezin sembolünün tanımı kullanılarak kolaylıkla elde edilir. Yani,

$$\left| \widetilde{A}(\lambda) \right| = \left| \left\langle A\widehat{k}_{H,\lambda}, \widehat{k}_{H,\lambda} \right\rangle \right| \leq \left\| A\widehat{k}_{H,\lambda} \right\| \left\| \widehat{k}_{H,\lambda} \right\| \leq \|A\| \left\| \widehat{k}_{H,\lambda} \right\| \left\| \widehat{k}_{H,\lambda} \right\| = \|A\| \quad (\lambda \in \Omega)$$

olup sınırlı bir fonksiyondur.

(2) I birim operatörünün Berezin sembolü $\widetilde{I} = 1$ dir. Yani,

$$\widetilde{I}(\lambda) = \langle I\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle = 1$$

dir.

(3) A^* adjoint operatörünün Berezin sembolü $\widetilde{A}$ nın kompleks eşleniğine eşittir.

Yani,

$$\widetilde{A^*}(\lambda) = \left\langle A^*\widehat{k}_{H,\lambda}, \widehat{k}_{H,\lambda} \right\rangle = \left\langle \widehat{k}_{H,\lambda}, A\widehat{k}_{H,\lambda} \right\rangle = \overline{\left\langle A\widehat{k}_{H,\lambda}, \widehat{k}_{H,\lambda} \right\rangle} = \overline{\widetilde{A}}(\lambda)$$

dir.

(4) A self-adjoint ise $\widetilde{\widetilde{A}} = \widetilde{A}$ olup reel değerli bir fonksiyondur.

(5) $\widetilde{\widetilde{A+B}} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$ dir.

(6) $\widetilde{AB} \neq \widetilde{A}\widetilde{B}$ dir. Ancak bu özelliğin sağlanması için operatörlerden birinin çarpım operatörü olması gerekir. Yani A ya da B operatörlerinden biri

$$M_\varphi f(z) = \varphi(z)f(z)$$

olmalıdır.

(7) $A = B \Rightarrow \widetilde{A}(\lambda) = \widetilde{B}(\lambda)$ dir.

(8) Bazı uzaylarda Berezin sembolü birebir bir dönüşümdür. Yani her $\lambda \in \Omega$ için

$$A = 0 \Leftrightarrow \widetilde{A}(\lambda) = 0 \text{ dir.}$$

(9) $\mathcal{H}$ standart fonksiyonel Hilbert uzayı ve $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ kompakt operatör ise

$\lambda \rightarrow \partial\Omega \neq \emptyset$ iken $\tilde{A}(\lambda) \rightarrow 0$ dır. Çünkü Teorem 3.25 den

$$\left| \tilde{A}(\lambda) \right| = \left| \left\langle A\hat{k}_{H,\lambda}, \hat{k}_{H,\lambda} \right\rangle \right| \leq \left\| A\hat{k}_{H,\lambda} \right\| \left\| \hat{k}_{H,\lambda} \right\| \rightarrow 0$$

dır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani Berezin sembolü sıfıra yaklaştığında A kompakt olmayabilir .

Şimdi de S_1 sınıfından olan operatörler ile Berezin sembolleri arasındaki ilişkiyi veren önermeyi ifade edelim.

Önerme 4.1.11. $A : L_a^2(\mathbb{D}) \rightarrow L_a^2(\mathbb{D})$ bir operatör olsun. $A \in S_1(L_a^2)$ ise o zaman

$$iz(A) = \int_{\mathbb{D}} \left\langle A\hat{k}_{L_a^2,z}, \hat{k}_{L_a^2,z} \right\rangle d(z) = \int_{\mathbb{D}} \tilde{A}(z) d(z)$$

olur. Burada

$$d(z) = k(z, z) dm_2(z) = \frac{dm_2(z)}{(1 - |z|^2)^2}$$

$\mathbb{D}$ deki ölçümdür.

İspat. (e_n) , L_a^2 uzayının bir ortonormal bazı olsun. O zaman

$$\begin{aligned} iz(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} (Ae_n)(z) \overline{e_n(z)} dm_2(z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} \langle Ae_n, k_z \rangle \overline{e_n(z)} dm_2(z) = \int_{\mathbb{D}} \left\langle A \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z) \overline{e_n(z)}, k_z \right\rangle dm_2(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \langle Ak_z, k_z \rangle dm_2(z) = \int_{\mathbb{D}} \langle Ak_z, k_z \rangle \frac{k(z, z)}{k(z, z)} dm_2(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \langle Ak_z, k_z \rangle \frac{k(z, z)}{\|k_z\|^2} dm_2(z) = \int_{\mathbb{D}} \left\langle A \frac{k_z}{\|k_z\|}, \frac{k_z}{\|k_z\|} \right\rangle d(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \left\langle A\hat{k}_{L_a^2,z}, \hat{k}_{L_a^2,z} \right\rangle d(z) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi Berezin sembolleri yönteminin ilk kez kullanıldığı Abel teoremlerinin alternatif ispatlarını verelim (Karaev, 2004).

Teorem 4.1.12. Eğer $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi a değerine yakınsak ise $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi a sayısına (A) yakınsaktır (Powell ve Shah, 1972).

İspat. $H^2(\mathbb{D})$ uzayında $D_{\{a_n\}}$ köşegen operatörü

$$D_{\{a_n\}}z^k = a_k z^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır. $\{a_n\}$ sınırlı bir dizi olduğundan $D_{\{a_n\}}$ operatörü H^2 uzayında sınırlı bir operatördür. Şimdi $D_{\{a_n\}}$ operatörünün Berezin sembolünü hesaplayalım. $\|k_\lambda\| = \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}$ olduğu Örnek 4.1.6 da elde edilmişti. O halde $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\{a_n\}}(\lambda) &= \langle D_{\{a_n\}}\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle \\ &= \sqrt{1-|\lambda|^2} \langle D_{\{a_n\}} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\lambda}^k z^k, \hat{k}_\lambda \rangle \\ &= \sqrt{1-|\lambda|^2} \langle \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\lambda}^k D_{\{a_n\}} z^k, \hat{k}_\lambda \rangle \\ &= \sqrt{1-|\lambda|^2} \langle \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\lambda}^k a_k z^k, \hat{k}_\lambda \rangle \\ &= (1-|\lambda|^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\lambda|^{2k} \end{aligned}$$

olup $\tilde{D}_{\{a_n\}}(\lambda) = (1-|\lambda|^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\lambda|^{2k}$ elde edilir. Her $\lambda \in \mathbb{D}$ için $t = |\lambda|^2$ olsun. O zaman

$$\tilde{D}_{\{a_n\}}(\sqrt{t}) = (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad 0 < t < 1$$

bulunur. Buradan

$$(1-t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a) t^k + a(1-t) \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \tilde{D}_{\{a_n-a\}}(\sqrt{t}) + a$$

eşitliğini elde ederiz. Teoremin koşuluna göre $n \rightarrow \infty$ iken $a_n - a \rightarrow 0$ dir. Teorem 3.26 ya göre $a_n - a \rightarrow 0$ ise $D_{\{a_n-a\}}$ kompakt operatördür. Böylece özellik (9) dan $\lim_{t \rightarrow 1^-} \tilde{D}_{\{a_n-a\}}(\sqrt{t}) = 0$ bulunur. Yukarıdaki eşitlikte $t \rightarrow 1^-$ limit alınırsa

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a$$

elde edilir. Yani $\{a_n\}$ dizisi a ya (A) yakınsaktır (Karaev, 2004).

Teorem 4.1.13 Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi L değerine yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi L sayısına (A) yakınsaktır (Powell ve Shah, 1972).

İspat. Teorem 4.1.12'nin ispatından

$$\tilde{D}_{\{s_n\}}(\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad 0 < t < 1$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bundan dolayı her bir $t \in (0, 1)$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ serisi yakınsaktır.

Teoremin koşulundan $n \rightarrow \infty$ iken $s_n - L \rightarrow 0$ dir. Teorem 3.26'ya göre $s_n - L \rightarrow 0$ olduğundan $D_{\{s_n - L\}}$ köşegen operatörü kompaktır ve

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \tilde{D}_{\{s_n - L\}}(\sqrt{t}) = 0$$

dir. Diğer taraftan $D_{\{s_n\}} = LI + D_{\{s_n - L\}}$ olup

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \tilde{D}_{\{s_n\}}(\sqrt{t}) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (L + \tilde{D}_{\{s_n - L\}}(\sqrt{t})) \\ &= L + \lim_{t \rightarrow 1^-} \tilde{D}_{\{s_n - L\}}(\sqrt{t}) = L \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi L değerine (A) yakınsaktır (Karaev, 2004).

Şimdi kompleks sayı dizilerinin ve serilerinin Abel yakınsaklığı için bazı kriterleri T_d ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolünü kullanarak verelim.

$\{\sqrt{n+1}z^n\}$, $L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayının ortonormal bazı olmak üzere T_d ağırlıklı kaydırma operatörü

$$T_d \sqrt{n+1}z^n = d_n \sqrt{n+2}z^{n+1}, \quad n \geq 0$$

şeklinde tanımlanır. Öncelikle $L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayı üzerinde sınırlı lineer bir operatörün Berezin sembolünü ifade eden yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 4.1.14. Herhangi bir $T \in B(L_a^2)$ operatörü ve $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n, \quad L_a^2 \text{ uzayının ortonormal bazı olmak üzere}$$

$$\tilde{T}(\lambda) = (1 - |\lambda|^2)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(m+1)} \langle T e_n, e_m \rangle \bar{\lambda}^n \lambda^m$$

dir (Yamancı, 2013).

İspat. Berezin sembolü yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\lambda) &= \langle T \hat{k}_{L_a^2, \lambda}, \hat{k}_{L_a^2, \lambda} \rangle = \langle T \frac{k_{L_a^2, \lambda}}{\|k_{L_a^2, \lambda}\|}, \frac{k_{L_a^2, \lambda}}{\|k_{L_a^2, \lambda}\|} \rangle \\ &= (1 - |\lambda|^2)^2 \langle \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} T e_n(z), \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z) \rangle \\ &= (1 - |\lambda|^2)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \overline{e_n(\lambda)} e_m(\lambda) \langle T e_n, e_m \rangle \\ &= (1 - |\lambda|^2)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)} \bar{\lambda}^n \sqrt{(m+1)} \lambda^m \langle T e_n, e_m \rangle \\ &= (1 - |\lambda|^2)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(m+1)} \langle T e_n, e_m \rangle \bar{\lambda}^n \lambda^m \end{aligned}$$

elde edilir (Yamancı, 2013).

Teorem 4.1.15. $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ kompleks sayıların sınırlı bir dizisi ve T_d operatörü L_a^2 Bergman uzayında ağırlıklı kaydırma operatörü olsun. Bu durumda

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} d_n$ serisinin Abel yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $t \rightarrow 1^-$ iken $\frac{|\tilde{T}_d|(t)}{t} = \mathbf{O}((1-t)^2)$ olmasıdır.
- (ii) $\left\{ \sqrt{(n+1)(n+2)} d_n \right\}_{n \geq 0}$ dizisinin Abel yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $t \rightarrow 1^-$ iken $\frac{|\tilde{T}_d|(t)}{t(1-t)} = \mathbf{O}(1-t)$ olmasıdır (Yamancı, 2013).

İspat. Yardımcı Teorem 4.1.15 kullanılarak T_d ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolü

$$\begin{aligned} \tilde{T}_d(\lambda) &= (1 - |\lambda|^2)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(m+1)} \langle d_n e_{n+1}, e_m \rangle \bar{\lambda}^n \lambda^m \\ &= \lambda (1 - |\lambda|^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} d_n |\lambda|^{2n}, \quad (\lambda \in \mathbb{D}) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\left| \frac{\tilde{T}_d(\lambda)}{\lambda(1 - |\lambda|^2)^2} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} d_n |\lambda|^{2n} \right| \quad (4.1)$$

ve

$$\left| \frac{\tilde{T}_d(\lambda)}{\lambda(1 - |\lambda|^2)} \right| = \left| (1 - |\lambda|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} d_n |\lambda|^{2n} \right| \quad (4.2)$$

yazılabilir.

$t = |\lambda|^2$ olsun. Bu durumda her $0 \leq t < 1$ için (4.1) ve (4.2) ifadelerinden

$$\frac{|\widetilde{T}_d|(t)}{t(1-t)^2} = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} d_n t^n \right|$$

ve

$$\left| \frac{|\widetilde{T}_d|(t)}{t(1-t)} \right| = \left| (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} d_n t^n \right|$$

elde edilir. Böylece teoremin (i) ve (ii) iddiaları elde edilir (Yamancı, 2013).

Sonuç 4.1.16.

$$(i) \text{ } Ber(T_d) = \left\{ \lambda(1-|\lambda|^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} d_n |\lambda|^{2n} : \lambda \in \mathbb{D} \right\}$$

$$(ii) \text{ } ber(T_d) = \sup \left\{ |\lambda| (1-|\lambda|^2)^2 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} d_n |\lambda|^{2n} \right| : \lambda \in \mathbb{D} \right\}$$

(iii) Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $d_n = \mathbf{O}((n+1)(n+2))^{-\frac{1}{2}}$, yani $C > 0$ için $\sqrt{(n+1)(n+2)} |d_n| \leq C$ ise $ber(T_d) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}C$ dir.

İspat. (i) ve (ii) nin ispatları ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolünden aşıkardır.

(iii) $n \geq 0$ iken $\sqrt{(n+1)(n+2)} |d_n| \leq C$ olduğundan

$$\begin{aligned} ber(T_d) &\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \left(|\lambda| (1-|\lambda|^2)^2 C \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \right) \\ &\leq C \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \left(|\lambda| (1-|\lambda|^2)^2 \frac{1}{1-|\lambda|^2} \right) \\ &= C \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} (|\lambda| (1-|\lambda|^2)) \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}}C \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Berezin Sembolleri ve Abel Yakınsaklık ile İlgili Bazı Sonuçlar

Bu bölümde üretici çekirdekler ile ilgili bazı sorular, kompleks sayı dizi ve serilerinin Abel yakınsaklığı ve Berezin sembolleri ele alınmıştır.

4.2.1. Szegő ve bergman tipli çekirdekler

Bu kısımda Szegő ve Bergman tipli üretici çekirdekler ve onların üretici çekirdek Hilbert uzayları incelenmiştir. Ardından üretici çekirdeklerin ailesi için bazı tamamlık problemleri tartışılmıştır. Sonuçları vermeden önce $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ ağırlıklı Bergman uzayı hakkında bazı gerekli tanımları verelim.

Tanım 4.2.1.1. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski üzerinde

$$K_\alpha(z, w) = (1 - \bar{z}w)^{-\alpha} \quad (z, w \in \mathbb{D})$$

şeklinde tanımlanan K_α çekirdeği $\alpha = 1$ için Szegő çekirdeği ve $\alpha > 1$ için Bergman tipli çekirdekler olarak adlandırılırlar. Burada ξ^α , $\mathbb{R}_+$ üzerinden $\{\xi : \operatorname{Re} \xi > 0\}$ açık yarı düzlemine t^α nın analitik devamıdır.

K_α çekirdeği pozitif tanımlıdır. O zaman K_α üretici çekirdeğini kabul eden $\mathbb{D}$ üzerinde bir tek H_{K_α} Hilbert uzayı vardır (Aronzajn, 1950). Ağırlıklı Bergman uzayının tanımını vermeden önce aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 4.2.1.2. (i) $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ Hilbert uzayı, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ve $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ fonksiyonları için

$$(g, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} b_n \bar{c}_n$$

iç çarpımıyla donatılmış

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} |a_n|^2 < \infty ,$$

olacak şekilde $\mathbb{D}$ üzerinde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitik fonksiyonların uzayıdır, burada Γ Gama fonksiyonudur.

(ii) Ayrıca $\alpha > 1$ olduğunda $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$,

$$(g, h) = \frac{\alpha - 1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{\alpha-2} |g(z)| |h(z)| dx dy$$

iç çarpımıyla donatılmış

$$\iint_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{\alpha-2} |f(z)|^2 dx dy < \infty \quad (z = x + iy) ,$$

olacak şekilde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitik fonksiyonların uzayıdır (Okutmuş, 2005).

Teorem 4.2.1.2 den α nın aldığı değerlere göre $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ uzayının davranışları değişir. Eğer $\alpha > 1$ ise $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\mu_\alpha(z) < \infty$$

olacak şekilde $\mathbb{D}$ üzerinde $f(z)$ analitik fonksiyonlarının bir Hilbert uzayı olur. Burada μ_α

$$d\mu_\alpha(z) = \frac{\alpha - 1}{\pi} (1 - |z|^2)^{\alpha-2} dx dy, \quad (z = x + iy)$$

ile verilen $\mathbb{D}$ 'deki ölçümdür.

Eğer $\alpha < 1$ ise $H_{K_\alpha}(ii)$ deki iç çarpıma göre bir üretici çekirdek Hilbert uzayı değildir (Okutmuş, 2005).

$\alpha = 1$ için H_{K_1} , $k_z^{H^2}(w) = \frac{1}{1 - \bar{z}w}$ ($z, w \in \mathbb{D}$) üretici çekirdeğe (Szegő çekirdeği) sahip klasik $H^2 := H^2(\mathbb{D})$ Hardy uzayıdır.

Tanım 4.2.1.3. $\alpha > 1$ için $H_{K_\alpha} := H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ uzayı $\frac{\alpha - 1}{\pi} (1 - |z|^2)^{\alpha-2}$ ağırlığı ile $\mathbb{D}$ üzerinde ağırlıklı Bergman uzayı olarak adlandırılır ve

$$f_n(z) := \left(\frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n + 1)} \right)^{1/2} z^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ile tanımlanan $\{f_n(z)\}_{n \geq 0}$ sistemi H_{K_α} uzayının ortonormal bir bazıdır.

Şimdi üretici çekirdek ailesi için tamlık problemlerini inceleyelim. Öncesinde gerekli olan belirleyici (determining) alt küme tanımını verelim.

Tanım 4.2.1.4. S kümesinin bir Λ alt kümesi olmak üzere eğer $\mathcal{H}(S)$ uzayındaki

her fonksiyon Λ üzerinde sıfıra eşit, denk olarak S üzerinde de sıfıra eşit ise Λ belirleyici alt küme olarak adlandırılır. Özellikle, eğer Λ , S kümesinde bir limit noktasına sahipse belirleyici alt kümedir.

Örneğin, iki analitik fonksiyon Λ belirleyici alt kümesi üzerinde denkse, o zaman tüm S kümesi üzerinde de denktirler, yani $f_1|_{\Lambda} = f_2|_{\Lambda}$ olması $f_1|_S = f_2|_S$ yi gerektirir.

Eğer $E \subset H^2$ kaydırmalı invariant alt uzay yani, $z \in E$ olmak üzere $zE \subset E$ ise o zaman $\frac{1}{1 - \bar{z}w}$ dış fonksiyonu kullanılarak ünlü Beurling teoreminden $\frac{1}{1 - \bar{z}w} \notin E$ ise $E \neq H^2$ sonucu çıkar. Böylece her $z \in \mathbb{D}$ için

$$k_z^{H^2} = \frac{1}{1 - \bar{z}w} \in E \text{ ise } E = H^2$$

dir (Beurling, 1949).

Bu iddianın ispatı

$$\text{span} \left\{ k_z^{H^2} : z \in \mathbb{D} \right\} = H^2 \quad (4.3)$$

eşitliğinden aşıkardır, yani $\left\{ k_z^{H^2} : z \in \mathbb{D} \right\}$ sistemi H^2 uzayında tam sistemdir. (4.3) ün ispatı $k_z^{H^2}$ nin üretici özelliğinden ve Hahn-Banach teoreminden elde edilir. Şimdi $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2) = +\infty$ sağlayan $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{D}$ dizisi için

$$\text{span} \left\{ k_{z_n}^{H^2} : n = 1, 2, \dots \right\} = H^2 \quad (4.4)$$

eşitliğinin farklı bir ispatını verelim.

Teorem 4.2.1.5. Eğer $\{z_n\}_{n \geq 1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2) = +\infty$ olacak şekilde $\mathbb{D}$ birim diskinde dizi ise $\left\{ k_{z_n}^{H^2} : n \geq 1 \right\}$ sistemi H^2 uzayında tam sistemdir. Yani, (4.4) eşitliği sağlanır.

İspat. Tersini kabul edelim. Yani, $\left\{ k_{z_n}^{H^2} : n \geq 1 \right\}$ sistemi H^2 uzayında tam sistem olmasın. O zaman $f_0 \notin \text{span} \left\{ k_{z_n}^{H^2} : n \geq 1 \right\}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $f_0 \in H^2$ fonksiyonu vardır. Böylece Hahn-Banach teoreminden $\Psi(f_0) \neq 0$ ve $\Psi|_{\text{span} \left\{ \frac{1}{1 - \bar{z}_n w} : n \geq 1 \right\}} = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı lineer sürekli bir Ψ

fonksiyoneli vardır. O halde, her $n \geq 0$ için $\Psi \left(\frac{1}{1 - \bar{z}_n w} \right) = 0$ dır. Diğer taraftan her $G \in H^2$ için $(\psi, G) = \Psi(G)$ sağlayan bir $\psi \in H^2$ fonksiyonu vardır. Bundan dolayı her $n = 1, 2, \dots$ için $\left\langle \psi, \frac{1}{1 - \bar{z}_n w} \right\rangle = 0$ dır. Böylece her $n \geq 1$ için $\psi(z_n) = 0$ ve bundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2) = +\infty$ özelliğiyle her $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{D}$ dizisinin H^2 için belirleyici alt küme olduğunu düşünürsek $\psi = 0$ sonucu elde edilir. Bu da $\Psi = 0$ olmasını gerektirir. Fakat bu $\Psi(f_0) \neq 0$ olmasıyla çelişir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.1.6. $z \in E$ olmak üzere $E, zE \subset E$ olacak şekilde H^2 uzayının kapalı alt uzayı olsun. Eğer $\{k_z^{H^2} : n \geq 1\} \subset E$ ise $E = H^2$ dir.

Şimdi Teorem 4.2.1.5 in daha genel sonucunu verelim.

Teorem 4.2.1.7. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(S)$, $k_z^{\mathcal{H}}$ üretici çekirdeğine sahip S kümesi üzerinde üretici çekirdek Hilbert uzayı olsun. $\Lambda \subset S$ kümesinin, $\mathcal{H}$ uzayı için belirleyici alt küme olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\text{span} \{k_z^{\mathcal{H}} : z \in \Lambda\} = \mathcal{H}$$

dir.

4.2.2. Ağırlıklı bergman uzayındaki dizi ve serilerin abel yakınsaklığı

Bu kısımda $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ ağırlıklı Bergman uzayı üzerinde T_d ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolü yardımıyla kompleks sayı dizi ve serilerinin Abel yakınsaklığı karakterize edilmiştir.

$H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ ağırlıklı Bergman uzayı üzerinde T_d ağırlıklı kaydırma operatörü

$$T_d f_n(z) = d_n f_{n+1}(z), n = 0, 1, 2, \dots$$

formülüyle tanımlanır, burada $d = \{d_n\}_{n \geq 0}$ kompleks sayıların sınırlı ağırlık dizisidir ve $\{f_n(z)\}_{n \geq 0}$ Tanım 4.2.1.3 de ifade edilen $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ uzayının ortonormal bir bazıdır.

Teorem 4.2.2.1. $\{d_n\}_{n \geq 0}$ kompleks sayıların sınırlı bir dizisi ve T_d , $1 \leq \alpha < \infty$ olmak üzere $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ ağırlıklı Bergman uzayı üzerinde ağırlıklı kaydırma operatörü olsun.

$$\delta_n = \left(\frac{\Gamma(\alpha + n) \Gamma(\alpha + n + 1)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n + 1) \Gamma(n + 2)} \right)^2 d_n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

ve

$$\mathcal{T}_{d,\alpha}(z) = \frac{\tilde{T}_d(z)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + \alpha)} \right)^2 |z|^{2n} (z \in \mathbb{D})$$

olsun. O zaman

(a) $(\delta_n)_{n \geq 0}$ dizisinin Abel yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $t \rightarrow 1^-$ iken $\mathcal{T}_{d,\alpha}(t) = \mathbf{O}\left(\frac{1}{1-t}\right)$ olmasıdır.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$ serisinin Abel yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $t \rightarrow 1^-$ iken $\mathcal{T}_{d,\alpha}(t) = \mathbf{O}(1)$ olmasıdır.

İspat. İlk olarak $X \in \mathcal{B}(H_{K_\alpha}(\mathbb{D}))$, yani $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörlerin Banach cebirinin bir elemanı olmak üzere X operatörünün Berezin sembolü için aşağıdaki formülü ispatlayalım. Her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} \tilde{X}(z) = & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + \alpha)} \right)^2 |z|^{2n} \right)^{-1} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha + n) \Gamma(\alpha + m)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n + 1) \Gamma(m + 1)} \right)^{1/2} (X f_n, f_m) \bar{z}^n z^m \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aslında $\alpha = 1, 2, \dots$ için $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ olduğunu gözönüne alırsak

$$\frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(n + 1)} = (n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2) \dots (n + 1)$$

ve

$$K_\alpha(z, w) = \frac{1}{(1 - \bar{z}w)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n + 1)} (\bar{z}w)^n$$

ve Teorem 4.2.1.2 yi kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + \alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha - 1)!}{(n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2) \dots (n + 1)} < +\infty$$

ve

$$\|K_\alpha\|_{H_{K_\alpha}(\mathbb{D})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 |z|^{2n}$$

elde edilir.

O zaman üretici çekirdek tanımı da kullanılarak her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} \tilde{X}(z) &= \left(X \frac{K_\alpha}{\|K_\alpha\|_{H_{K_\alpha}(\mathbb{D})}}, \frac{K_\alpha}{\|K_\alpha\|_{H_{K_\alpha}(\mathbb{D})}} \right) \\ &= \left(\|K_\alpha\|_{H_{K_\alpha}(\mathbb{D})}^{-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{f_n(z)} X f_n(w), \sum_{n=0}^{\infty} \overline{f_n(z)} f_n(w) \right) \right) \\ &= \left(\|K_\alpha\|_{H_{K_\alpha}(\mathbb{D})}^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{f_n(z)} f_m(z) (X f_n, f_m) \right) \\ &= \left(\|K_\alpha\|_{H_{K_\alpha}(\mathbb{D})}^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)} \right)^{1/2} \bar{z}^n \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(m+1)} \right)^{1/2} z^m (X f_n, f_m) \right) \\ &= \left(\|K_\alpha\|_{H_{K_\alpha}(\mathbb{D})}^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+m)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(m+1)} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. (X f_n, f_m) \bar{z}^n z^m \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 |z|^{2n} \right)^{-1} \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+m)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(m+1)} \right)^{1/2} (X f_n, f_m) \bar{z}^n z^m \end{aligned}$$

olup (4.5) formülü elde edilir.

Şimdi Teorem 4.2.2.1 in ispatına başlayalım. Bunun için $X = T_d$ yazarak (4.5)

formülünden her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} \tilde{T}_d(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 |z|^{2n} \right)^{-1} \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+m)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(m+1)} \right)^{1/2} (d_n f_{n+1}, f_m) \bar{z}^n z^m \\ &= z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 |z|^{2n} \right)^{-1} \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+n+1)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2)} \right)^{1/2} d_n |z|^{2n} \end{aligned}$$

dir, yani her $z \in \mathbb{D}$ için T_d operatörünün Berezin sembolü

$$\begin{aligned}\tilde{T}_d(z) = & z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 |z|^{2n} \right)^{-1} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+n+1)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2)} \right)^{1/2} d_n |z|^{2n}\end{aligned}\quad (4.6)$$

şeklinde bulunur. Buradan her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{T}_d(z)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 |z|^{2n} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+n+1)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2)} \right)^{1/2} d_n |z|^{2n}\end{aligned}\quad (4.7)$$

ve

$$\begin{aligned}(1 - |z|^2) \frac{\tilde{T}_d(z)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 |z|^{2n} \\ = (1 - |z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+n+1)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2)} \right)^{1/2} d_n |z|^{2n}\end{aligned}\quad (4.8)$$

dır. Açıkça, $\frac{\tilde{T}_d(z)}{z}$ yalnızca $|z|^2$ ye bağlıdır, yani radial fonksiyondur.

$$\mathcal{T}_{d,\alpha}(z) = \frac{\tilde{T}_d(z)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 |z|^{2n} \quad (z \in \mathbb{D})$$

olsun. $\mathcal{T}_{d,\alpha}(z) = \mathcal{T}_{d,\alpha}(|z|^2)$ olduğu açıktır. O zaman $t = |z|^2$ yazarak (4.7) ve (4.8) den $0 \leq t < 1$ için

$$\mathcal{T}_{d,\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+n+1)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2)} \right)^{1/2} d_n t^n \quad (4.9)$$

ve

$$(1-t) \mathcal{T}_{d,\alpha}(t) = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+n+1)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2)} \right)^{1/2} d_n t^n \quad (4.10)$$

elde edilir.

$$\delta_n = \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+n+1)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2)} \right)^2 d_n, \quad n \geq 0$$

olduğundan dizi ve serilerin Abel yakınsaklık tanımlarından, (4.9) ve (4.10) dan direkt olarak Teorem 4.2.2.1 ispatlanmış olur.

Son olarak $1 \leq \alpha < \infty$ olmak üzere $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ uzayı üzerinde T_d ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin kümesi ve Berezin sayısının tanımlandığı aşağıdaki (4.6)

formülünden hemen çıkan sonucu verelim.

Önerme.4.2.2.2.

$$(a) \ Ber(T_d) = \left\{ z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 |z|^{2n} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+n+1)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2)} \right)^{1/2} d_n |z|^{2n} : z \in \mathbb{D} \right\}.$$

$$(b) \ ber(T_d) = \sup \left\{ |z| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \right)^2 |z|^{2n} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\alpha+n+1)}{(\Gamma(\alpha))^2 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2)} \right)^{1/2} d_n |z|^{2n} : z \in \mathbb{D} \right\}.$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hazırlanan bu yüksek lisans tez çalışmasında Berezin sembolleri yöntemi ile Abel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenmiş ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Öncelikle bu yöntemin ilk kez kullanıldığı Abel teoremlerinin alternatif ispatlarına yer verilmiştir (Karaev, 2004). Daha sonra

$$T_d f_n(z) = d_n f_{n+1}(z), n = 0, 1, 2, \dots$$

ile tanımlanan T_d ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolleri yardımıyla L^2_α Bergman ve $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ ağırlıklı Bergman uzaylarındaki kompleks sayı dizi ve serilerin Abel yakınsaklığı karakterize edilmiştir. Ayrıca Szegő ve Bergman tipli çekirdekler ve onların üretici çekirdek Hilbert uzaylarından bahsedilmiştir. Son olarak, üretici çekirdeklerin aileleri için tamlık problemleri tartışılmıştır.

Bu çalışmanın devamı olarak düşünülen bir öneri vardır:

T_d ağırlıklı kaydırma operatörünün Berezin sembolleri yardımıyla L^2_α Bergman ve $H_{K_\alpha}(\mathbb{D})$ ağırlıklı Bergman uzaylarındaki kompleks sayı dizi ve serilerin Abel yakınsaklığı karakterize edilmiştir. Benzer şekilde Cesaro toplanabilirlik Berezin sembolleri yardımıyla nasıl karakterize edilebilir?

KAYNAKLAR

- Al-Ammari, M.R., 2006. Product of Bergman Space Toeplitz Operators Brown Halmos Type Theorems. King Saud University, Master thesis.
- Aronszajn, N., 1950. Theory of Reproducing Kernels. Transactions of the American Mathematical Society, 68, 337-404.
- Axler, S., Zheng, D., 1998. The Berezin Transform on the Toeplitz Algebra *Studia Mathematica*, 127, 113-136.
- Berezin, F.A., 1972. Covariant and Contravariant Symbols for Operators *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 6, 1117-1151.
- Berezin, F.A., 1974. Quantization. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 8, 1109-1163.
- Beurling, A., 1949. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Mathematica*, 21, 239-253.
- Chalendar, I., Fricain, E., Gürdal, M., Karaev, M.T., 2012. Compactness and Berezin symbols. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, 78, 315-329.
- Chalendar, I., Fricain, E., Partington, J.R., 2006. Over-completeness of sequences of reproducing kernels in model spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, 56, 45-56.
- Choi, Y.S., Kim, S.G., 1993. Compact Diagonal Linear Operators on Banach Spaces with Unconditional Bases. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 16(4), 823-824.
- Englis, M., 1994. Functions Invariant under the Berezin Transform. *Journal of Functional Analysis*, 121, 223-254.
- Furuta, T., 2001. *Invitation to Linear Operators*. Taylor and Francis, London.
- Halmos, P., 1982. *A Hilbert Space Problem Book*. Springer-Verlag, Berlin.

- Karaev, M.T., Gürdal, M., Yamancı, U., 2013, Some results related with Berezin symbols and Toeplitz operators, *Mathematical Inequalities & Applications*, basımda.
- Karaev, M.T., 2006a. Berezin Set and Berezin Number of Operators and Their Applications. The 8th Workshop on Numerical Ranges and Numerical Radii, WONRA 06, University of Bremen (Germany), July 15-17.
- Karaev, M.T., 2006b. Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces. *Journal of Functional Analysis*, 238, 181-192.
- Karaev, M. T., 2004. Functional Analysis Proofs of Abel's Theorems. *Proceedings of American Mathematical Society*, 132(8), 2327-2329.
- Karaev, M. T., 2002. Berezin Symbols and Schatten-von Neumann Classes. *Mathematical Notes*, 72, 185-192; translation from *Matem. Zametki*, 72(2002), 207-215.
- Kılıç, S., 1995. The Berezin Symbol and Multipliers of Functional Hilbert Spaces *Proceedings of American Mathematical Society*, 123(12), 3687-3691.
- Korenblum, B., 1977. A Beurling type theorem. *Acta Mathematica*, 138, 265-293.
- Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, USA.
- Moore, E.H., 1916. On Properly Positive Hermitian Matrices. *Bulletin of American Mathematical Society*, 23, 59.
- Moore, E.H., 1935. *General Analysis*. *Memoirs of the American Philosophical Society*, Part I.
- Nikolski, N.K., 1986. *Treatise on the shift operator*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary values of Berezin symbols. *Operator Theory: Advances and Applications*, 73, 362-368.
- Okutmuş, B., 2005. *Reproducing Kernel Hilbert Spaces*. Bilkent University,

Master thesis.

Pehlivan, S., Karaev, M.T., 2004. Some Results Related with Statistical Convergence and Berezin Symbols. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 299 (2) , 333-340.

Powell, R.E., Shah, S.M., 1972. *Summability Theory and Applications*. Van Nostrand Reinhold, London.

Rosenblum, M., Rovnyak, J., 1985. *Hardy classes and operator theory*. Oxford University Press.

Sarason, D., 1994. Products of Toeplitz operators, in "Linear and Complex Analysis Problem Book 3", Part I, *Lecture Notes in Mathematics*, v.1573, Springer-Verlag, New York.

Saitoh, S., 1988. *Theory of Reproducing Kernels and Its Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific & Technical, UK., 189.

Saitoh, S., 1997. *Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 369.

Yamancı, U.,2013, Berezin Sembolleri ve Toeplitz Operatörleri ile İlgili Bazı Sonuçlar. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 56s, Isparta.

Zhu, K., 2007. *Operator theory in function spaces*, volume 138 of *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI, second edition.

Zhu, K., 1990. *Operator Theory in Function Spaces*. Marcel New York.

Zorboska, N., 2002. The Berezin Transform and Radial Operators. *Proceedings of American Mathematical Society*, 131(3), 793-800.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hasret Değer
Doğum Yeri ve Yılı : Balıkesir/Gönen, 1988
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : hasretdeger@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Kütahya (YDA) Lisesi, 2006
Lisans : YTÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
Yüksek Lisans : SDÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik