İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KESİTLİ EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİMLERİNİN TEORİK VE DENEYSEL ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Caner Hayri DÖNMEZ

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Katı Cisimlerin Mekaniği Programı

OCAK 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KESİTLİ EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİMLERİNİN TEORİK VE DENEYSEL ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Caner Hayri DÖNMEZ
(503081521)

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Katı Cisimlerin Mekaniği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

OCAK 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503081521 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Caner Hayri DÖNMEZ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"DEĞİŞKEN KESİTLİ EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİMLERİNİN DENEYSEL VE TEORİK ANALİZİ "** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Reha ARTAN** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
	Yrd. Doç. Dr. Oğuz ALTAY İstanbul Teknik Üniversitesi	....

Teslim Tarihi : **19 Aralık 2011**
Savunma Tarihi : **27 Ocak 2012**

Anneme ve babama,

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasında yardımını, desteğini ve bilgisini esirgemeyen, değerli hocam sayın Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ'ye katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Aralık 2011 Caner Hayri Dönmez
(Makine Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

A	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A	: Çubuğun kesit alanı
b	: Çubuk kesitinin derinliği
c	: Boyutsuz frekans
C	: Kayma rijitliği matrisi
d	: Çubuk kesitinin çapı
D	: Eğilme rijitliği matrisi
E	: Elastiklik modülü
F	: Kesite etkiyen iç kuvvet vektörü
F_n , F_b , F_t	: Kesite ait iç kuvvet bileşenleri
$F(\omega)$	: Frekans ortamındaki etki fonksiyonu
G	: Kayma modülü
h	: Çubuk kesitinin yüksekliği
$H(\omega)$	: Frekans ortamındaki cevap fonksiyonu
I_n , I_b	: Çubuk kesitinin normal ve binormal eksenlere göre eylemsizlik momentleri
I_p	: Polar eylemsizlik momenti
i	: Jiroskopik yarıçap
J	: Burulma eylemsizlik momenti
k	: Matrikantın terim sayısını belirten indis.
k_n , k_b	: Kayma gerilmesinin kesite üniform yayılmadığını gösteren sabitler
M	: Kesite etkiyen iç moment vektörü
M_k	: Matrikant matrisi
M_n , M_b , M_t	: Kesite ait iç moment bileşenleri
m_n , m_b , m_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış moment bileşenleri
N	: Matrikant matrisinden sınır koşulları yazılarak oluşturulan matris
n, b, t	: Normal, binormal ve teğetsel koordinatları belirten indisler
q_n , q_b , q_t	: Çubuğa etkiyen dış kuvvet bileşenleri
Q	: Ortogonal dönüşüm matrisi
p_n , p_b , p_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış kuvvet bileşenleri
r_0 , r	: Şekil değiştirmiş ve değiştirmemiş çubuğa ait konum vektörleri
R	: Eğrilik yarıçapı
s	: Yay uzunluğu
t	: Zaman
u	: Yerdeğiştirme vektörü
u, v, w	: Yer değiştirme bileşenleri
W	: Antisimetrik matris
$X(\omega)$	: Frekans ortamındaki tepki fonksiyonu
y	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü

μ	: Çubuğun birim boyunun kütlesi
η	: Çubuk kesit alanının değişim oranı
ρ	: Özgül kütle
λ	: Narinlik oranı
ω	: Açısal frekans
ϕ	: Açısal koordinat
ϕ_t	: Toplam kiriş açısı
ν	: Poisson oranı
$\mathbf{\Omega}_n$, $\mathbf{\Omega}_b$, $\mathbf{\Omega}_t$	: Kesite ait dönme açısının bileşenleri
γ	: Eksenel şekil değiştirme vektörü
τ	: Eğrinin burulma açısı

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

DEĞİŞKEN KESİTLİ EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİMLERİNİN TEORİK VE DENEYSEL ANALİZİ

ÖZET

Çubuklar, en yaygın ve en basit yapı elemanlarından biri olarak, mühendislik uygulamalarında önemli bir yere sahiptir. Çubukların analizi, seneler boyunca araştırmacıların ilgilendiği, günümüzde hala güncelliğini koruyan, üzerine çalışmalar yapılan bir konu olmuştur. Çubukların birçok modern mühendislik yapısının temelini oluşturması, çok sayıda araştırmacının çubukların davranış modeli üzerine çalışmasına neden olmuştur.

Bu çalışmada, eğri eksenli, sürekli değişken kesitli düzlemsel çubukların dinamik davranışları ele alınmaktadır. Çalışmanın temel amacı, çubukların düzlem içi dinamik problemlerinin analitik çözümünde matrikant (yaklaşık taşıma matrisi) yöntemini kullanarak, alternatif çözüm yöntemi sunmaktır. Matrikant yöntemi, kesin çözümü olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık olarak çözülebilmesini sağlar. Çubuk geometrisi ve sınır şartları belli ise, yöntem kolaylıkla uygulanabilir. Literatürdeki örnekler, kayma deformasyonu, eksenel uzama ve dönme eylemsizliği etkileri de dikkate alınarak, matrikant yöntemi ile çözülmüş ve sonuçlar birbiriyle karşılaştırılmıştır. Ayrıca, belirli sınır şartlarındaki çubuğun deneysel analizi yapılarak, sonuçların analitik çözüm ve sonlu elemanlar yöntemi çözümü ile karşılaştırması yapılmıştır.

Birinci bölümde, çubuk teorisi hakkında genel bir bakış verilmiş, çalışmanın amacı ve kapsamı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubukların titreşim problemleri üzerine literatürde yapılan çalışmalar incelenmiş, kullanılan yöntemler hakkında bilgi verilmiştir. Çalışmaların birçoğunda, çubuğa ait diferansiyel denklemler basitleştirilerek kullanılmakta, kayma deformasyonu, eksenel uzama ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmektedir. Bu denklemler, sonlu elemanlar veya enerji metotları yöntemleri kullanılarak çözülmektedir. Literatürde, sürekli değişken kesitli çubukların düzlem içi titreşim problemleri üzerine birçok çalışma bulunmasına rağmen, düzlem dışı titreşim problemi üzerine yapılan çalışmalar oldukça az sayıdadır.

Üçüncü bölümde, eğri eksenli çubukların genel denklemleri verilmektedir. Çubuk eksen eğrisi uzaysal bir eğri olarak ele alınmaktadır. Çubuk statiğinin genel denklemlerine bağlı olarak, çubuk titteşimlerinin genel denklemleri elde edilmektedir. Düzlemsel çubukların düzlem içi ve düzlem dışı davranışlarını ifade eden denklemler verilmektedir.

Dördüncü bölümde, değişken kesitli eğri eksenli çubukların kendi düzlemindeki ve düzlemine dik doğrultudaki titreşim problemlerinin analitik çözümü, matrikant yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Matrikant yöntemi hakkında bilgi verilmiş, yöntemin titreşim problemlerine uygulanışı detaylı olarak ele alınmıştır.

Beşinci bölümde, eğri eksenli çubukların titreşim problemleri ile ilgili literatürde yapılan benzer çalışmalar incelenmiştir. Sürekli değişken kesite sahip, farklı eksen eğriliklerindeki çubukların düzlem içi ve düzlem dışı titreşim problemleri ele alınmıştır. Literatürde daha fazla örneğinin olması sebebiyle, ağırlıklı olarak düzlem içi problemler üzerinde durulmuştur. Sayısal örnekler, matrikant yöntemi kullanılarak çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yapılan çalışmada elde edilen sonuçların, literatürdeki örneklerde elde edilen sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Altıncı bölümde, yapılan deneysel analiz çalışmasına yer verilmiştir. Deneylerde, değişken kesitli, çember eksenli, simetrik ve asimetik iki farklı çubuğun doğal frekansları elde edilmiştir. Farklı sınır şartlarında yapılan deney sonuçları, teorik analiz sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Teorik analiz için, sonlu elemanlar yöntemi çözümlerinde kullanılan Abaqus analiz programı kullanılmıştır.

Yedinci bölümde, çalışmanın kapsamından kısaca bahsedilmiş, elde edilen sonuçlar tartışılmış ve öneriler belirtilmiştir.

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF VIBRATIONS OF CURVED BEAMS WITH VARYING CROSS-SECTIONS

SUMMARY

Beam elements are the simplest and the most commonly used structural elements in many engineering applications. The analysis of such elements has received considerable amounts of attention in recent years. Many researchers have been still working on static and dynamic behaouvir of beams. Many engineering structures can be modeled as beam elements, since beams are the simplest and the most commonly used structural elements. Curved beam elements occur frequently in many engineering applications such as spring design, electrical machinery, turbo-machinery blades, circumferential stiffeners for shells and aerospace structures in mechanical engineering and the design of arch bridges, highway construction, long span roof structures and earthquake resistant structures in civil engineering. Therefore, the analysis of a curved beam is of great importance and has received considerable attention since the end of the nineteenth century.

The interest in efficient and reliable modeling of in-plane and out-of-plane behavior of curved beams has been demonstrated by the significant body of literature. Various scientists have tried to solve the arch problem by different methods. In the literature, most of the theoretical work in this field included the application of different numerical methods to solve various arch problems.

Many techniques have been considered in the papers on in-plane and out-of-plane vibrations of arches. With the advancement of computer technology, curved beam problems have been solved widely by using finite element method and many finite elements were developed for this purpose. Therefore, a number of curved beam elements have been developed. In most of earlier elements, the effect of axial extension, shear deformation and rotary inertia was not considered. A few papers dealt with the curved beams of different geometries than circle. Arches with thin walled cross-sections were also considered. The elements were developed by using finite-strain beam theory and geometrically exact beam theory. The arches with elastic foundations and the stress analysis of thick curved beam were also studied.

It is often difficult and sometimes impossible to find general closed form solution for the vibration problem of a curved beam, since the governing differential equations possess variable coefficients. The governing equations of vibrations of arches are six simultaneous linear differential equations of the first order. When the axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects are taken into account, the governing equations of motion are very complicated. Because of this complexity, most of the researchers calculated the natural frequencies of vibrations of arches, based on the classical theory in which the foregoing effects are neglected. Although exact methods are employed for only the simple cases, Ritz, Galerkin and finite element methods are used extensively when the complicated cases are considered.

The exact solution of the governing equations exists only for a circular beam of uniform cross-section. The equations of motion, which take into account axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects, can be solved exactly. The previous studies are based upon the classical theory in which axial extension, rotatory inertias and shear deformation effects are neglected. Timoshenko beam theory considers the effects of shear deformation and rotatory inertias due to both flexural and torsional vibrations and provides a better approximation to the actual arch behaviour.

The purpose of the present study is to give the approximate solution to the governing equations of the out-of-plane and in-plane dynamic problems of a curved beam with varying cross-sections and also to exhibit the advantages of the solution. The problems in the literature are solved by using the matricant method and the comparisons between the results are given in the tables and figures. The experiments are also performed to assess the theory. The mode transition phenomenon which is characterized by the sharp increase in frequencies of modes and occurs at certain combinations of curvature and length of the arch is studied.

For in-plane vibration of curved beams, a phenomenon of transition of modes from extensional into inextensional, which occurs with increase in beam curvature, has been observed by several authors. The similar phenomenon can also be observed for out-of-plane vibrations of arches. The transition phenomenon is characterized by the sharp increase in frequencies of modes that occurs at certain combinations of curvature and length of the curved beam. This increase in mode frequency is accompanied by a significant change in the mode shapes. There is still no comprehensive analysis of the transition phenomenon and there are no proper explanations and methods for prediction the frequencies of a curved beam. This is possibly due to the fact that numerical simulations, commonly employed for the analyses, provide little analytical insight into the vibrational problem. In this study, the analysis of the transition phenomenon in vibrational behaviour of a circular curved beam with non-uniform cross-section is also presented by using the approximate solution of the governing equations.

In the dynamic problems of this study, the effects of axial extension, shear deformation and rotatory inertia are taken into account. But the warping deformation of the cross-section is neglected. The matricant method is used in order to solve the governing differential equations. The solution depends on the boundary conditions. The variations of the frequency coefficients with respect to the opening angle are presented for a certain slenderness ratio and several boundary conditions. The examples given in the literature are solved and the results are compared.

In the first chapter, a general concepts of the theory of curved beams and the aim of the present study are given.

In the second chapter, the studies in the literature on dynamic problems of curved beams with varying-cross section are reviwed. Reviewing the literature has shown that although a few papers deal with the out-of-plane dynamic behavior of arches with varying cross-section, many excellent papers are present with in-plane dynamic behavior of arches with non-uniform cross-section and variable curvature. It seems that finite elements were the major tool in this research. With the advancement of computer technology, arch problems are solved widely by using finite element method and many finite elements were developed for this purpose. Most of work has been done within the scope of Euler-Bernoulli beam theory. However, for arches having large cross-sectional dimensions in comparison with their span length and for arches in which higher modes of vibration are required, the Timoshenko beam theory, which takes into account the rotatory inertia and the shear deformation effects, gives a better approximation to the actual beam behaviour. Only a few works have taken into account the axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects. Almost all of work in the literature use the numerical methods and give approximate solutions.

The governing differential equations of a planar curved beam are given for the static and dynamic problems in the third chapter. The beam is represented by a space curve whose every point is coupled with a rigid orthonormal vector diad. The vectors are chosen to be perpendicular to the tangent vector of the space curve in the initial state and they represent the cross-section of the beam. In the deformed configuration, these directors still remain unit and perpendicular each other because of the assumption of a rigid cross-section.

In the fourth chapter, the matricant method are explained and applied for in-plane and out-of plane vibration problems of curved beams solving approximately. It is possible to use that method in order to obtain the vibrations of an arch which has non-uniform cross-section. The governing differantial equations of dynamic problems of curved beams with varying cross-section and variable curvatıre are presented. The axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects are considered in the governing differential equations of free vibrations.

In the fifth chapter, the problems in the literature which interest of dynamic behaviour of curved beams with continuous varying cross-section and variable curvature are solved by using the matricant method and the comparisons between the results are given in the tables and figures. Clamped-clamped, hinged-hinged, hinged-clamped, clamped-free and free-free boundary conditions are studied for different opening angles. The axial extension, transverse shear deformation and rotatory inertia effects are included in the governing differential equations of free vibrations. Although many of problems are solved by not taking into account the effect of axial extension, shear deformation and rotary inertias, several problems are solved by considering individually the effects of axial extension, shear deformation and rotatory inertias. The results show that matricant method solutions and the other ethod's solutions using in the literature are generally in good agreement with each other.The mode transition phenomenon is also investigated and the frequency coefficients are obtained for the first five modes of arches. The mode shapes are given in figures.

In the sixth chapter, experimental studies and vibration analysis of two curved beams are given. The experimental results are compared with the theoretical solution for two different curved beams at different boundary conditions. The natural frequencies and mode shapes of beams are also obtained by using finite element package program ABAQUS in order to compare with experimental results. The first twenty natural frequencies are exacted from analytical and finite element solutions then compared with the experimental results. The results show that experimental, analytical and finite element solutions are in good agreement with each other.

In the chapter seven, the scope of the study is given with results and discussions. Some suggestions are made to improve methods in advance.

1. GİRİŞ

Çubuklar, en yaygın ve en basit yapısal eleman olarak kullanılmakta ve birçok mühendislik yapısının temelini oluşturmaktadır. Çok sayıda araştırmacı, bilim adamı ve mühendis, seneler boyunca çubuklar ve çubuk teorileri üzerine çalışmalar yapmıştır. Modern mühendislik yapılarındaki önemi ve kullanım yaygınlığı nedeni ile çubukların analizi ve davranış modeli üzerine yapılan çalışmalar günümüzde güncelliğini korumakta ve halen araştırmacıların ilgisini çekmeye devam etmektedir.

Çubukların belirli bir yük etkisi altında eksenel şekil değiştirme, eğilme ve burulma problemleri pek çok bilim adamı ve mühendis için temel araştırma konusu olup, konu ile ilgili bilimsel yayınlarda en doğru çözüm yöntemini bulma çalışmalarının yoğun bir şekilde devam ettiği görülmektedir. Elastik çubukların hesabında kullanılan elastisite teorisi, dış kuvvetlerin etkisi altında bulunan elastik bir cismi, gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirme açısından inceleyen bir bilim dalıdır. Ancak, oldukça karmaşık sınır değer problemlerinin ortaya çıkması sebebiyle, çok basit durumlar dışında elastisite teorisinin kullanılması neredeyse imkansızdır. Bu nedenle, elastisite teorisi kullanılarak yapılan çalışmalarda, problemi basitleştirmek için çubuk ekseni, çubuk kesiti ve çubuğa etkiyen dış kuvvetlerle ilgili varsayımlar ve kabuller yapılmaktadır. Böylece sadece bazı özel hallerde uygulanabilecek çözümler elde edilmektedir. Çubuk ekseninin eğri olarak seçildiği dinamik problemlerin büyük bir kısmında da bu tür basitleştirmeler görmek mümkündür.

Eğri eksenli çubukların dinamik problemleri üzerine yapılan çalışmalarda, genellikle, eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizlikleri etkilerini hesaba katmayan Euler-Bernoulli çubuk teorisinin esas alındığı görülür. Böylece eşitlikler daha basit hale dönüşmekte, fakat elastisite teorisinin getirdiklerinden ve gerçek çubuk davranışından uzaklaşılmaktadır. Literatürdeki çalışmalarda, elastisite teorisinin getirdiği denklemlerin çözümünde, Ritz, Galerkin ve sonlu elemanlar yöntemi gibi yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılarak sonuca ulaşılmaktadır. Özellikle, sonlu elemanlar yöntemi, sayısal yöntemler ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte, çalışmaların büyük bir kısmında uygulama alanı bulmuştur.

Eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı dinamik davranışları üzerine birçok çalışma olmasına rağmen, bunların çoğu, sabit kesit alanı ve sabit eğrilik yarıçapına sahip çubukları ele almaktadır. Sürekli değişken kesitli ve değişken eğrilik eksenine sahip çubukların titreşim problemleri daha az sayıda çalışmaya konu olmuştur. Özellikle, bu çubukların düzlem dışı titreşimleri üzerine yapılan çalışmalar, oldukça sınırlı sayıdadır.

1.1 Tezin Amacı

Bu çalışmada, sürekli değişken kesitli, sabit ya da değişken eğrilik yarıçapına sahip düzlemsel çubukların, düzlem içi ve düzlem dışı dinamik davranışları ele alınmaktadır. Çubuğun serbest titreşimleri, teorik ve deneysel analiz yöntemleriyle ele alınmış, literatürdeki benzer çalışmalardaki örnekler incelenmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Çubuk statiğinin genel denklemleri kullanılarak, D'Alambert prensibi yardımıyla, eğri eksenli çubukların dinamik davranışlarını ifade eden genel denklemler elde edilmiştir. Bu denklemler, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımı oluşturmaktadır. Bu denklemlere, eksenel uzama, kayma deformasyonu etkileri ile beraber dönme eylemsizliği etkileri de dahil edilmektedir. Denklem takımının kesin çözümü, sadece katsayıların sabit olması durumunda mevcuttur. Çubuk kesitinin değişken, eğrilik ekseninin de sabit veya değişken olması durumunda ise, bu diferansiyel denklem takımının çözümü yaklaşık olarak elde edilebilmektedir.

Literatürdeki mevcut çalışmalarda, değişken kesitli eğri eksenli çubukların titreşim problemlerinin teorik çözümleri için, farklı çözüm yöntemleri kullanılmaktadır. Bu çalışmanın amacı ise, sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubukların serbest titreşimlerinin analitik çözümünde, matrikant yöntemini kullanarak alternatif bir çözüm yolu ortaya koymaktır. Matrikant yöntemi, kesin çözümü yapılamayan diferansiyel denklem takımının yaklaşık olarak çözümünde kolaylık sağlayan bir yöntemdir. Bu çözüm yöntemi ile eksen eğrisi ve sınır şartları belli olan herhangi bir sürekli değişken kesitli çubuğun, serbest titreşimleri incelenebilir. Hesaplamalarda, Matlab programı kullanılarak çubuğa ait doğal frekanslar elde edilebilmektedir.

Yapılan bu çalışmada, sürekli değişken kesit alanına sahip, sabit veya değişken eğrilik eksenli çubuklara ait literatürdeki sayısal örnekler, matrikant yöntemi kullanılarak elde edilen çözümler ile karşılaştırılmıştır. Daha fazla sayıda örneğinin bulunması sebebiyle, ağırlıklı olarak düzlem içi titreşim problemleri üzerinde durulmuş, düzlem dışı problemlere ait birkaç örnekte çözülmüştür. Ayrıca, teorik sonuçlar, deneysel analiz ile elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Toplam kiriş açısının, mesnetleme durumunun, kesit alanının değişim oranının, çubuğa ait boyutsuz frekans değerlerine etkisi, tablo ve grafikler şeklinde sunulmuştur. Ayrıca, literatürdeki örneklerin birçoğunun aksine, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizlikleri etkileri de hesaba dahil edilerek sonuçlar elde edilmiştir.

Tüm bu çalışmalara paralel olarak, elde edilen teorik sonuçların gerçek durum ile karşılaştırılması amacıyla, eğri eksenli çubukların titreşimleri deneysel olarak da incelenmiştir. Deney parçası olarak, 180^{o} kiriş açıklığına sahip, sürekli değişken dikdörtgen kesitli, çember eksenli iki farklı çubuk kullanılmıştır. Farklı sınır şartlarında serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Teorik sonuçlar, sonlu elemanlar çözümünde kullanılan Abaqus analiz programı yardımıyla elde edilmiştir.

2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLAR ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR

Eğri eksenli çubukların dinamik davranışları, literatürdeki birçok çalışmada inceleme konusu olmuştur. Bu çalışmaların büyük bir kısmı, sabit kesite ve sabit eğrilik yarıçapına sahip çubukları kapsamaktadır. Sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubukların titreşim problemleri inceleyen çalışmalarda, daha çok düzlem içi titreşim davranışı göz önüne alınmıştır. Çalışmalarda, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizlikleri etkilerinin ihmal edildiği Euler-Bernoulli çubuk teorisi esas alınarak, yaklaşık çözüm yöntemleriyle sonuca ulaşılmıştır.

Bu bölümde, eğri eksenli çubukların genel teorisini, matrikant yöntemini ve sürekli değişken kesitli çubukların dinamik davranışlarını inceleyen, literatürde yapılan çalışmalara ve kaynaklara yer verilmiştir.

2.1 Literatür Araştırması

İnan [1,2] çubuk teorisinin temelini oluşturan çalışmaların başında gösterilebilir. [2] çalışmasında çubuk, bazı kısıtlamaları sağlayan bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmakta ve sınır değer problemi bu ortamda kurulmaktadır. Herhangi bir eksen eğriliğine sahip ve değişken kesitli çubuklarda da, bu denklemler kullanılabilmektedir.

Eğri eksenli çubukların statik ve dinamik davranışı ile ilgili yapılan en önemli ve en eski çalışmalardan biri Love [3] tarafından ortaya konulmuştur. Eğri eksenli çubuk, bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmakta ve teori skaler büyüklüklerle verilmektedir. Çalışmada, dairesel kesitli tam bir daire halkası çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal eden Euler-Bernoulli çubuk teorisi ile alınmıştır.

Timoshenko ve Goodier [4], elastisite teorisinin temelleri ve teorinin uygulanması ile ilgili bilgiler sunmuşlardır. Reddy ve diğerleri [5] tarafından yapılan çalışmada, Euler-Bernoulli ve Timoshenko çubuk teorileri hakkında bilgi verilmiş ve bu teorilerin birbirleriyle olan ilişkileri ortaya konulmuştur.

Gantmacher [6,7] kitaplarında, matikant yöntemini anlatmıştır. Bu kitaplarda, matrikant yönteminin diferansiyel denklemlere uygulanışı detaylı olarak verilmiştir.

Güvençli [8] çalışmasında, dairesel eksenli çubuklarda burkulma yüklerinin bulunmasında, başlangıç değerler yöntemi ile matrikant yöntemini kullanmıştır. Ulusoy [9], matrikant yöntemi ile çubuk elemanlarının burkulma problemlerini incelemiştir.

Tüfekçi [10], eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik problemlerini, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ayrı ayrı göz önüne alarak incelemiştir. Elde edilen genel denklemin çözümünü, başlangıç değerleri yöntemi ile vermiştir.

Tarnopolskaya ve diğerlerine [11] ait çalışmada, düşük frekanslardaki mod geçişini incelemişlerdir. Değişken eğrilik ve kesit alanı için hesaplamalar yapılmış, eğrilik yarıçapının mod şekli üzerindeki etkileri mod geçişi açısından ele alınmıştır. Düşük ve yüksek modlardaki mod geçişi durumları karşılaştırılmıştır.

Tüfekçi [12]'de yüksekliğin kiriş açıklığına oranla az olduğu sığ çubukları incelemiştir. Hesaplamalar sonucunda, kayma etkisi ve dönme eylemsizliği etkilerinin sığ çubuklarda, sığ olmayan çubuklara göre daha baskın olduğu görülmüştür.

Tüfekçi ve Arpacı [13], eğri eksenli, sabit kesitli düzlemsel çubukların, düzlem içi serbest titreşimlerinin kesin çözümünü, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini dahil ederek vermektedir. Çalışmada başlangıç değerleri yöntemi kullanılmış, sonuçlar tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur.

Rubin ve Tüfekçi [14] tarafından yapılan çalışmada, eğri eksenli dikdörtgen kesitli çubukların titreşimi, Cosserat Teorisi ile incelenmiştir. Çalışmada, çubuk teorisinin, Cosserat teorisinin, sonlu eleman analizinin ve deneyden elde edilen bulguların karşılaştırılması verilmiştir.

Doğruer [15]'e ait çalışmada, eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemlerinin kesin çözümü başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Tüfekçi ve Doğruer [16] aynı yöntemi kullanarak, değişken kesitli ve eksenli çubukların düzlem dışı titreşimlerini incelemişlerdir.

Karami ve Malekzadeh [17], değişken kesitli eğri eksenli çubuk geometrilerinin düzlem içi titreşimlerini diferansiyel kuadratür yöntemini (differential quadrature method) kullanarak incelemiş, sonuçları referans çalışmalarla karşılaştırmışlardır. Çalışmada eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmiştir.

Liu ve Wu [18], çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerini, genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemini (generalized differential quadrature method) kullanarak incelemiş, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal etmiştir. Sabit kesitli, sürekli değişken ve kademeli değişken kesitli çubukların titreşimleri incelenmiş, Rayleigh-Ritz, Rayleigh-Schmidt, Galerkin, sonlu eleman ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization) yöntemleri ile elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır.

Auciello ve Rosa [19], çember eksenli çubukların titreşimlerini Euler-Bernoulli teorisi yardımıyla incelemekte, sonuçları diğer yöntemlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmaktadır. Çalışmada, kademeli değişken ve sürekli değişken kesitli çember eksenli çubuklar, ankastre-ankastre, sabit-sabit ve sabit-ankastre sınır koşulları için incelenmiştir.

Laura ve diğerleri [20], değişken kesitli çember eksenli çubuğun düzlem içi titreşimlerini Rayleigh-Ritz yöntemi ile incelemişlerdir.

Yiğit [21], eğri eksenli değişken kesitli çubukların statik ve dinamik problemlerini başlangıç değerleri yöntemiyle incelemiştir. Sürekli değişken kesitli çubukların düzlem içi titreşimlerini, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini de dahil ederek hesaplamıştır. Tüfekçi ve Yiğit [22], aynı yöntem ile sürekli değişken kesitli çubukların düzlem içi titreşimlerini incelemiş ve literatürdeki çalışmalarla karşılaştırmıştır.

Gutierrez ve diğerlerine [23] ait olan çalışmada, kesiti kademeli ve sürekli değişen, farklı eksen eğriliklerine sahip çubukların titreşimleri, polinom fonksiyonlar seçilerek Ritz yöntemiyle incelemiştir. Parabol, zincir eğrisi (catenary), spiral, çember ve sikloid eksenlere sahip çubukların boyutsuz doğal frekansları, farklı sınır şartları için sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılarak tablolar halinde sunulmuştur. Simetrik ve asimetrik geometriye sahip çubuklar, sürekli değişken kesitli ve kademeli değişken kesitli olarak ayrı ayrı ele alınmıştır. Çalışmada, eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmiştir.

Shin ve diğerleri [24], değişken kesitli çember eksenli çubuğun, doğal frekans değerlerini, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal ederek, diferansiyel transformasyon metodu (differential transformation method) ve genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemi (generalized differential quadrature rule) ile hesaplamışlardır.

Tong ve diğerlerine ait çalışmada [25], çember eksenli değişken kesitli çubukların serbest ve zorlanmış titreşimleri Euler-Bernoulli çubuk teorisi kullanılarak incelenmiştir. Sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubukları, sabit kesitli elemanlara ayırmış ve her bir sabit kesitli çubuğun titreşim frekanslarını kesin çözümle elde etmiştir. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek elde edilen sonuçlarda, eleman sayısı arttıkça sonucun yakınsadığı gösterilmiştir.

Rossi ve diğerlerine [26] ait olan çalışmada, [23]'deki çalışma esas alınarak, serbest ucunda konsantre kütle bulunan, ankastre-serbest çubukların titreşimleri incelenmiştir. [23]'te verilen örneklere aynı geometriye sahip eğri eksenli çubuklar için frekans değerleri hesaplanmıştır.

Huang ve diğerleri [27], sürekli değişken kesitli çubuğun düzlem içi doğal frekanslarını, dinamik katılık matrisi metodunu (dynamic stiffness matrix method) kullanarak elde etmişlerdir.

Huang ve diğerleri [28], sürekli değişken kesitli ve değişken eğrilik eksenli çubuğun düzlem dışı doğal frekanslarını, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini de hesaba katarak, dinamik katılık matrisi metodunu (dynamic stiffness matrix method) kullanarak hesaplamışlardır. Aynı çalışmayı, Suzuki ve diğerleri [29] modal süperpozisyon tekniğini (modal superposition technique) kullanarak, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini hesaba dahil etmeyerek ele almışlardır.

Lee ve Chao tarafından [30,31]'de yapılan çalışmalarda, sabit eğrilikli, değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem-dışı serbest titreşimlerini ifade eden diferansiyel denge denklemleri verilmiştir. Analizi basitleştirmek için, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içeren iki fiziksel parametre geliştirilmiş, çalışmanın sonunda verilen örneklerde, kiriş açıklığı ve kiriş uzunluğunun ilk iki doğal frekans üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Oh ve diğerleri [32], parabol, elips ve sinüs eğriliklerine sahip değişken kesitli çubukların, düzlem içi titreşimlerine ait denklemleri, eksenel uzama, kayma etkisi ve dönme eylemsizliği etkilerini dahil ederek elde etmiştir. Farklı kayma katsayısı ve narinlik oranları için hesaplamalar, sonlu eleman yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Ewins'e [33] ait olan kitapta, deneysel modal analizin temel esasları ve uygulama alanları anlatılmıştır.

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ

Çubuk ekseninin uzamadığını ve kesitte kayma meydana gelmediğini kabul eden Euler-Bernoulli denklemlerinin, çubuk teorisinin gelişiminde önemli bir yer tuttuğu görülmektedir. Bu bölümde, çubuk statiğinin ve titreşimlerinin genel denklemlerinin, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınarak, elde edilmesi özetlenecektir.

3.1 Çubuk Statiğinin Genel Denklemleri

Çubuk eksen eğrisi, üzerindeki, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(s)$ konum fonksiyonu ile belirlenen her noktaya, birbirine dik $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ birim vektörleri bağlı, bir parametreli yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmaktadır. s parametresi, başlangıç durumunda, yay uzunluğudur. Bu iki vektöre dik olan $\mathbf{e}_t^0(s)$ birim vektörü, başlangıçta, eğrinin teğeti ile çakışmaktadır ve

$$\mathbf{e}_t^0(s) = \mathbf{e}_n^0 \times \mathbf{e}_b^0$$

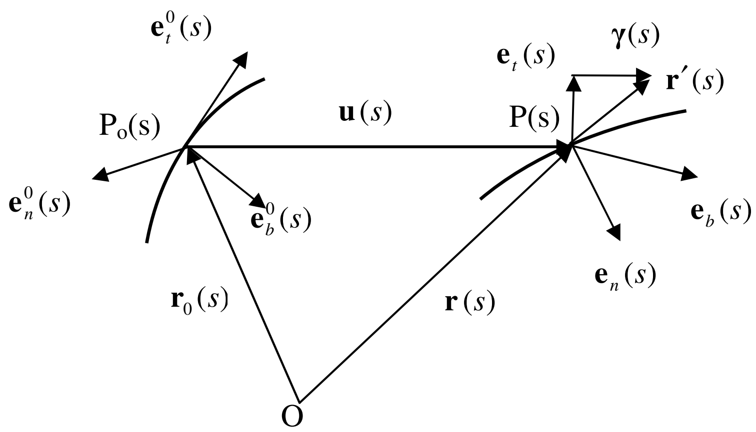
$$\mathbf{e}_t^0(s) = \frac{d\mathbf{r}_0(s)}{ds} \qquad \textbf{(3.1)}$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\mathbf{e}_n^0(s)$, $\mathbf{e}_b^0(s)$ kesit vektörleri, sırasıyla çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıdır. Bu doğrultular kesit asal eksenleriyle çakışmayabilir. Bu durumda, aralarındaki ilişkiyi belirleyecek bir fonksiyona gerek duyulacaktır. Burada, bu doğrultuların çakıştığı durum göz önüne alınacaktır.

Çubuğun yüksüz ve gerilmesiz olduğu başlangıç durumu için $\mathbf{r}_0(s)$, $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ vektörleri bilinmektedir. Çubuk şekil değiştirdikten sonra, geometriyi $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$ vektörleri belirlemektedir. Şekil değiştirmeden sonraki kesit vektörleri $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$, yine birim vektörler olup birbirlerine diktirler. Ancak, başlangıçtaki teğet birim vektörü $\mathbf{e}_n$ ve $\mathbf{e}_b$ vektörlerine dik kalmasına rağmen, artık ne şekil değiştirmiş eksen eğrisine teğet, ne de birim vektör olma şartı vardır (Şekil 3.1). Yani, dik kesit ötelenir ve döner; ancak, herhangi bir deformasyona uğramaz. Serbestçe dönebilme yeteneği nedeniyle,

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \neq \alpha \mathbf{e}_t(s) \tag{3.2}$$

olacak, dik kesit şekil değişiminden sonra çubuk eksenine dik kalmayacaktır. Bu durum, kayma deformasyonu etkisiyle ortaya çıkan haldir. Ayrıca, artık s parametresi yay uzunluğuna eşit olmadığından $\mathbf{r}'(s)$ vektörü şekil değiştirmiş eğriye teğet olmakla birlikte birim vektör olmayabilir.



Şekil 3.1 : Çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları.

Şekil 3.1'de, çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları gösterilmektedir. Buradaki $(^0)$ üst indisi, şekil değiştirmemiş durumu ifade eder.

Çubuğun yer değiştirme durumu iki vektörle tanımlanabilir:

Birincisi, eksen üzerindeki yer değiştirme vektörü;

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0(s) \tag{3.3}$$

ikincisi, rijit cisim gibi hareket ettiği varsayılan dik kesitin dönme vektörüdür.

Aslında, rijit cismin sonlu dönmeleri, vektörle ifade edilemez. Fakat burada, yer ve şekil değiştirmeler küçük sayılarak, dönme bir vektörle belirlenecektir.

Ortogonal olan $\mathbf{e}_n^0$, $\mathbf{e}_b^0$, $\mathbf{e}_t^0$ vektör üçlüsü, yine kendisi gibi ortogonal olan $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_b$, $\mathbf{e}_t$ vektör üçlüsüne,

$$\mathbf{e}_i(s) = Q_{ji}\mathbf{e}_j^0(s) \tag{3.4}$$

şeklinde, Q ortogonal dönüşüm matrisi ile dönüşmektedir. Bu matrisin,

$$Q_{ij} = \delta_{ij} + W_{ij} \tag{3.5}$$

olarak parçalanması durumunda, (3.4) eşitliği,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + W_{ji}\mathbf{e}_j^0(s) \tag{3.6}$$

biçiminde yazılabilir. Burada, δ_{ij}, birim matristir. Dönüşüm matrisinin ortogonalliğini kullanarak; yer ve şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla; W_{ij} bir antisimetrik matris olacaktır. Antisimetrik bir matris için;

$$W_{ij}.\mathbf{e}_i^0 = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}_i^0 \tag{3.7}$$

özelliğini sağlayan $\mathbf{\Omega}$ vektörü bulunabilir. Çubuk kesitin dönme vektörü olan $\mathbf{\Omega}(s)$ ile (3.6) eşitliği,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + \mathbf{\Omega}(s) \times \mathbf{e}_i^0(s) \tag{3.8}$$

şekline dönüşür. $\mathbf{\Omega}(s)$ dönme vektörü, ağırlık merkezinden geçen eksenlerdeki dönmeleri belirten vektördür.

Çubuğun şekil değiştirme durumu da iki vektörle tanımlanabilir:

Birinci vektör, çubuğa ait eksenel şekil değiştirme vektörü olan $\boldsymbol{\gamma}$ vektörüdür. Bu vektör, eksen eğrisinin boy değişimini ve eksen eğrisi ile dik kesit arasındaki kaymaları ifade etmektedir. $\boldsymbol{\gamma}$ eksenel şekil değiştirme vektörü, şekil değiştirmeden sonraki yer vektörünün türevi ile dik kesit normali arasındaki farktır ve

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \mathbf{e}_t \tag{3.9}$$

şeklinde tarif edilmektedir.

İkinci şekil değiştirme vektörü, bazı çalışmalarda birim dönme vektörü olarak tanımlanır ve

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} \qquad \textbf{(3.10)}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda, ilgili şekil değiştirme denklemi,

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\omega} \qquad \textbf{(3.11)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada **M** kesite etkiyen momentlerin bileşke vektörü, **D** ise eğilme rijitliği matrisidir [1].

Bazı mühendislik çalışmaları, ikinci şekil değiştirme vektörü olarak, $\boldsymbol{\omega}$ açısal değişim vektörünü kullanmaktadır. Bileşenleri, çubuk ekseninin eğriliklerini ve burulmasını veren bu vektör;

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \qquad \textbf{(3.12)}$$

olarak tarif edilmektedir.

Yer ve şekil değiştirme büyüklükleri tanımlandıktan sonra, çubuk teorisinin **M**, **R**, **u**, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\omega}$ olarak bilinen altı bilinmeyeni, iki yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntısı, iki denge ve iki bünye denklemi yardımıyla çözülebilir.

3.1.1 Yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları

Yer değiştirme vektörünü tanımlayan (3.3) ifadesi türetilerek,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \qquad \textbf{(3.13)}$$

elde edilir. (3.1), (3.8) ve (3.9) ifadelerinden faydalanılarak,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_t^0 + \boldsymbol{\gamma} \qquad \textbf{(3.14)}$$

şeklinde ilk yer değiştirme şekil değiştirme bağıntısı elde edilmiş olur.

(3.8) ifadesi türetilerek elde edilen,

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} + \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} \times \mathbf{e}_i^0 + \mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} \tag{3.15}$$

eşitliğinde, (3.12)'de verilen açısal değişim vektörü yerleştirilerek,

$$\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0 + \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} \times \mathbf{e}_i^0 + \mathbf{\Omega} \times \left(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0\right) \tag{3.16}$$

ifadesi bulunur. (3.8) eşitliği ve vektörel çarpım özellikleri kullanılarak,

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Omega}) \times \mathbf{e}_i^0 = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) \times (\mathbf{e}_i^0 \times \mathbf{\Omega}) \tag{3.17}$$

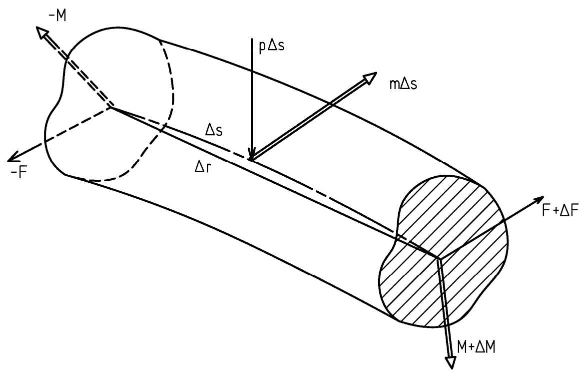
elde edilir. Şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımı ile eşitliğin sağ tarafı sıfır olarak tanımlanabilir. Böylece, eşitliğin sol tarafındaki parantezin içinin de sıfır olması gerekecektir. Buradan,

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Omega} \tag{3.18}$$

eşitliği elde edilecektir.

3.1.2 Denge denklemleri

$\mathbf{p}(s)$ ve $\mathbf{m}(s)$ vektörleri, birim uzunluktaki çubuğa etkiyen dış kuvvetler ve momentler olarak tanımlanmaktadır. **F** ve **M** vektörleri, sırasıyla kesite etkiyen iç kuvvet ve moment vektörlerini göstermek üzere, Şekil 3.2'deki elemana ait denge denklemleri,



Şekil 3.2 : Çubuk elemanına etkiyen dış yükler ve kesit tesirleri.

$$-\mathbf{F}+\mathbf{F}+\Delta\mathbf{F}+\mathbf{p}.\Delta s=0$$

$$-\mathbf{M}+\mathbf{M}+\Delta\mathbf{M}+\mathbf{m}.\Delta s+\Delta\mathbf{r}\times(\mathbf{F}+\Delta\mathbf{F})=0 \tag{3.19}$$

olarak yazılabilir. Gereken sadeleştirmeler yapılıp, $(\Delta s\rightarrow 0)$ için limit alındığında,

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds}+\mathbf{p}=0$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds}+\mathbf{e}_t^0\times\mathbf{F}+\mathbf{m}=0 \tag{3.20}$$

şeklinde denge denklemleri elde edilir [2].

3.1.3 Bünye denklemleri

Seçilen herhangi bir koordinat düzleminde,

$$\mathbf{M}=\mathbf{D}\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds}$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} \tag{3.21}$$

ilişkisi vardır. Burada **C** ve **D** ile gösterilen katsayılar, yalnız çubuk malzemesine ve kesit geometrisine bağlı değerler olup, çubuğa ait kayma ve eğilme rijitlik matrislerini gösterir.

Böylece, elastik çubuk teorisinin genel denklemlerine ait 6 adet denklem elde edilmiş olmaktadır. Bunlar, yer değiştirme ve dönme olarak adlandırılan $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{\Omega}$, şekil değiştirme elemanları olan $\boldsymbol{\gamma}$ ve $\boldsymbol{\omega}$, kesite etkiyen iç kuvvet ve moment vektörleri olan **F** ve **M**' dir ve

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds}+\mathbf{e}_t^0\times\mathbf{\Omega}-\boldsymbol{\gamma}=0$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds}-\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_0+\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}_0=0$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_0)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} \qquad \textbf{(3.22)}$$

şeklinde yazılabilir [2]. denklemlerde **C** ve **D** matrisleri simetriktir. Eğer, kesit simetrik ise ve $\mathbf{e}_n^0$, $\mathbf{e}_b^0$ eksenleri kesitin simetri eksenleriyle çakışırsa, matrisler, diyagonal matrisler olarak elde edilir [1]:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & C_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & C_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_n} GA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_b} GA & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_n & 0 & 0 \\ 0 & EI_b & 0 \\ 0 & 0 & GJ \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.23)}$$

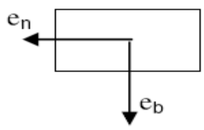
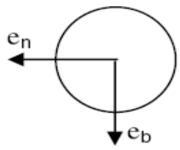
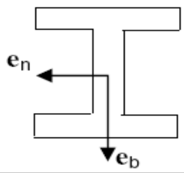
Burada E ve G, malzemenin elastiklik ve kayma modüllerini, I_n, I_b, kesit eylemsizlik momentlerini, J, kesitin burulma eylemsizlik momentini, A, kesit alanını gösterir. k_n ve k_b ise, kayma gerilmelerinin kesite üniform olarak yayılmadıklarını karakterize eden sabitlerdir. Bu sabitler, Çizelge (3.1)'de çeşitli kesitler için verilmektedir.

(3.21) eşitliklerinden,

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F} \qquad \textbf{(3.24)}$$

Çizelge 3.1 : k_n, k_b sabitleri

Kesit	k_n	k_b
	6/5	6/5
	10/9	10/9
	2.10	2.20

denklemleri elde edilir. Bunlar, (3.22)'de verilen genel denklemlerin ilk ikisinde yerine konulduğunda, (3.22) eşitlikleri aşağıdaki hale gelir:

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = -\mathbf{p}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{F} = -\mathbf{m} \qquad \textbf{(3.25)}$$

Buradaki $\mathbf{u}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{m}$ vektörleri, şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla şekil değiştirmemiş çubuk eksenine yerleştirilmiş $\mathbf{e}_n^0$, $\mathbf{e}_b^0$, $\mathbf{e}_t^0$ eksen takımında,

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_n^0 + v\mathbf{e}_b^0 + w\mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_n \mathbf{e}_n^0 + \Omega_b \mathbf{e}_b^0 + \Omega_t \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{F} = F_n \mathbf{e}_n^0 + F_b \mathbf{e}_b^0 + F_t \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{M} = M_n \mathbf{e}_n^0 + M_b \mathbf{e}_b^0 + M_t \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{p} = p_n \mathbf{e}_n^0 + p_b \mathbf{e}_b^0 + p_t \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{m} = m_n \mathbf{e}_n^0 + m_b \mathbf{e}_b^0 + m_t \mathbf{e}_t^0 \tag{3.26}$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Ekseni herhangi bir uzaysal eğri olan çubuk için, kesit asal eksenleri ile çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal eksenlerinin çakışması durumunda, açısal değişim vektörü,

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \kappa_0 \mathbf{e}_n^0 + \kappa_0' \mathbf{e}_b^0 + \tau_0 \mathbf{e}_t^0 \tag{3.27}$$

olarak ifade edilir. Burada, κ_0, $(\mathbf{e}_b^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, κ_0', $(\mathbf{e}_n^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, τ_0 ise eğrinin burulma açısıdır [1].

(3.26) denklemlerindeki büyüklüklerin türevleri hesaplanırken,

$$\frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0 \tag{3.28}$$

eşitliğinden faydalanılacaktır.

Kesit asal eksenleri, eksen eğrisinin normal ve binormal eksenleri ile çakışan düzlemsel eğri eksenli çubuk için,

$$\kappa_0 = 0$$

$$\kappa_0' = \frac{1}{R_0}$$

$$\tau_0 = 0 \tag{3.29}$$

olarak ele alınır. Böylece, (3.25) denklemleri ile bir çubuğun denklemleri,

$$\frac{du}{ds}+\frac{w}{R_0}-\Omega_b-\frac{F_n}{C_n}=0 \qquad \frac{dF_n}{ds}+\frac{F_t}{R_0}+p_n=0$$

$$\frac{dv}{ds}+\Omega_n-\frac{F_b}{C_b}=0 \qquad \frac{dF_b}{ds}+p_b=0$$

$$\frac{dw}{ds}-\frac{u}{R_0}-\frac{F_t}{C_t}=0 \qquad \frac{dF_t}{ds}-\frac{F_n}{R_0}+p_t=0$$

$$\frac{d\Omega_n}{ds}+\frac{\Omega_t}{R_0}-\frac{M_n}{D_n}=0 \qquad \frac{dM_n}{ds}+\frac{M_t}{R_0}-F_b+m_n=0$$

$$\frac{d\Omega_b}{ds}-\frac{M_b}{D_b}=0 \qquad \frac{dM_b}{ds}+F_n+m_b=0$$

$$\frac{d\Omega_t}{ds}-\frac{\Omega_n}{R_0}-\frac{M_t}{D_t}=0 \qquad \frac{dM_t}{ds}-\frac{M_n}{R_0}+m_t=0 \tag{3.30}$$

şeklinde elde edilir. Burada; çubuk kesit alanı normal ve binormal eksenlere göre simetrik varsayıldığından düzlem içindeki ve düzlem dışındaki eğilmelerle ilgili büyüklükler aynı denklemlerde birlikte bulunmamaktadır. Dolayısıyla, düzlemsel eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki şekil değiştirmelerini ifade eden (3.30) denklemlerinde, yay uzunluğu yerine $ds = R_0 d\phi$ eşitliği konarak düzenlenirse,

$$\frac{dw}{d\phi}=u+\frac{R_0(\phi)}{C_t(\phi)}F_t$$

$$\frac{du}{d\phi}=-w+\frac{R_0(\phi)}{C_n(\phi)}F_n+R_0(\phi)\Omega_b$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi}=\frac{R_0(\phi)}{D_b(\phi)}M_b$$

$$\frac{dM_b}{d\phi}=-R_0(\phi)F_n-R_0(\phi)m_b$$

$$\frac{dF_t}{d\phi} = F_n - R_0(\phi)\,p_t$$

$$\frac{dF_n}{d\phi} = -F_t - R_0(\phi)\,p_n \qquad \textbf{(3.31)}$$

şeklinde düzlem içine ait denklemler elde edilir. Benzer şekilde (3.30) eşitliğinden, çubuğun kendi düzlemine dik doğrultudaki şekil değiştirmelerine ait denklemler,

$$\frac{dv}{d\phi} = \frac{R_0(\phi)}{C_b(\phi)}F_b - R_0(\phi)\Omega_n$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R_0(\phi)}{D_n(\phi)}M_n$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R_0(\phi)}{D_t(\phi)}M_t$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + R_0(\phi)F_b - R_0(\phi)m_n$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - R_0(\phi)m_t$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} = -R_0(\phi)\,p_b \qquad \textbf{(3.32)}$$

şeklinde elde edilirler. Burada; u, w normal ve teğetsel yer değiştirmeleri, v binormal yer değiştirmeyi, ϕ kiriş açıklığını, Ω_n, Ω_t normal ve teğetsel eksenlerdeki dönme açılarını, Ω_b binormal eksendeki dönme açısını, $R_0(\phi)$ şekil değiştirmemiş çubuğun eksen eğrisinin eğrilik yarıçapını, F_n, F_t normal ve teğetsel tekil iç kuvvetleri, F_b tekil binormal iç kuvveti, M_n, M_t normal ve teğetsel eksen üzerindeki iç momentleri, M_b binormal eksen üzerindeki tekil iç momenti, p_n, p_t normal ve teğetsel eksen üzerindeki yayılı dış yükleri, p_b binormal eksen üzerindeki yayılı dış yükü, m_n, m_t normal ve teğetsel eksen üzerindeki yayılı dış momentleri, m_b binormal eksen üzerindeki yayılı dış momenti ifade eder.

3.2 Çubuk Titreşimlerinin Genel Denklemleri

Çubuk teorisinin genel denklemleri, (3.30) eşitlikleri ile verilmektedir. Denklemlerde, eksen eğrisinin uzaması ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmaktadır. D'Alambert prensibi yardımı ile, çubuk teorisinin bu genel denklemleri kullanılarak çubuk titreşimlerini de incelemek mümkündür. Bu prensibe göre, maddesel bir sistemin hareketinden dolayı, bir t anında meydana gelen eylemsizlik kuvvetleri aktif dış kuvvetler olarak, sisteme etki eden gerçek kuvvetlerle birlikte göz önüne alınırsa, sistem bütün bu kuvvetlerin etkisi altında, t anındaki konumunda dengede bulunur. Böylece, **p** ve **m** dış yükleri,

$$p_n = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad m_n = -\frac{\mu}{A} I_n \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial t^2}$$

$$p_b = -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad m_b = -\frac{\mu}{A} I_b \frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2}$$

$$p_t = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad m_t = -\frac{\mu}{A} I_p \frac{\partial^2 \Omega_t}{\partial t^2} \qquad \textbf{(3.33)}$$

şeklinde eylemsizlik kuvvetleri ve kuvvet çiftleri olarak alınabilir. Burada, μ birim alanın kütlesi, A kesit alanı, I_n, I_b sırası ile kesitin normal ve binormal eksenlerine göre eylemsizlik momentlerini, I_p kesitin polar eylemsizlik momentini göstermektedir. Yer değiştirme büyüklükleri konum ve zamanın fonksiyonlarıdır. O halde tüm büyüklükler de konum ve zamanın fonksiyonları olacaktır. Bu büyüklükler, konum ve zaman fonksiyonlarının çarpımı olduğu varsayımı ile,

$$\mathbf{u}(s,t) = \mathbf{u}(s) e^{i\omega t} \qquad \mathbf{\Omega}(s,t) = \mathbf{\Omega}(s) e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{F}(s,t) = \mathbf{F}(s) e^{i\omega t} \qquad \mathbf{M}(s,t) = \mathbf{M}(s) e^{i\omega t} \qquad \textbf{(3.34)}$$

şeklinde elde edilebilirler. Burada ω açısal frekansı, t ise zamanı göstermekte olup, bu eşitlikler kullanılarak (3.33) denklemleri,

$$p_n = \mu \omega^2 u(s) e^{i\omega t} \qquad m_n = \frac{\mu}{A} I_n \Omega_n(s) \omega^2 e^{i\omega t}$$

$$p_b = \mu\omega^2 v(s) e^{i\omega t} \qquad m_b = \frac{\mu}{A} I_b \Omega_b(s) \omega^2 e^{i\omega t}$$

$$p_t = \mu\omega^2 w(s) e^{i\omega t} \qquad m_t = \frac{\mu}{A} I_p \Omega_t(s) \omega^2 e^{i\omega t} \tag{3.35}$$

şeklinde düzenlenebilir. Böylece, bu ifadeler (3.30) denklemlerinde yerine konulur ve zaman fonksiyonları sadeleştirilirse denklemler sadece konuma ve frekansa bağlı olarak elde edilirler.

Kesit asal doğrultularının, çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıyla çakışması durumunda, (3.29) denklemleri geçerli olacak ve düzlemsel eğri eksenli çubuğun serbest titreşimlerinin genel denklemleri aşağıdaki gibi elde edilecektir:

$$\frac{du}{ds} + \frac{w}{R} - \Omega_b - \frac{F_n}{C_n} = 0 \qquad \frac{dF_n}{ds} + \frac{F_t}{R} + \mu\omega^2 u = 0$$

$$\frac{dv}{ds} + \Omega_n - \frac{F_b}{C_b} = 0 \qquad \frac{dF_b}{ds} + \mu\omega^2 v = 0$$

$$\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R} - \frac{F_t}{C_t} = 0 \qquad \frac{dF_t}{ds} - \frac{F_n}{R} + \mu\omega^2 w = 0$$

$$\frac{d\Omega_n}{ds} + \frac{\Omega_t}{R} - \frac{M_n}{D_n} = 0 \qquad \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{R} - F_b + \mu\frac{I_n}{A}\omega^2\Omega_n = 0$$

$$\frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{D_b} = 0 \qquad \frac{dM_b}{ds} + F_n + \mu\frac{I_b}{A}\omega^2\Omega_b = 0$$

$$\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{R} - \frac{M_t}{D_t} = 0 \qquad \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{R} + \mu\frac{I_p}{A}\omega^2\Omega_t = 0 \tag{3.36}$$

Burada, düzlem içindeki titreşimlerle ilgili büyüklükler ve düzlem dışındaki titreşimlerle ilgili büyüklüklerin ayrı denklemlerde bulunduğu görülmektedir. Dolayısıyla, düzlemsel eğri eksenli çubuğun serbest titreşimlerini ifade eden genel denklemlerde yay uzunluğu yerine $ds = Rd\phi$ eşitliği konarak düzenlenir, **C** ve **D** rijitlik matrislerine ait değerler yerlerine konulursa çubuğun kendi düzlemindeki serbest titreşimlerini ifade eden denklemler,

$$\frac{dw}{d\phi} = u + \frac{R}{EA} F_t$$

$$\frac{du}{d\phi} = -w + R\Omega_b + \frac{RF_n}{GA/k_n}$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R}{EI_b} M_b$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -RF_n - R\mu \frac{I_b}{A} \omega^2 \Omega_b$$

$$\frac{dF_t}{d\phi} = F_n - R\mu\omega^2 w$$

$$\frac{dF_n}{d\phi} = -F_t - R\mu\omega^2 u \tag{3.37}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, çubuğun kendi düzlemine dik doğrultudaki serbest titreşimlerini ifade eden denklemler ise aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dv}{d\phi} = -R\Omega_n + \frac{R}{GA/k_b} F_b$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R}{EI_n} M_n$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R}{GJ} M_t$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + RF_b - R\mu \frac{I_n}{A} \omega^2 \Omega_n$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - R\mu \frac{I_p}{A} \omega^2 \Omega_t$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} = -R\mu\omega^2 v \tag{3.38}$$

4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

4.1 Matrikant Yöntemi

Matrikant yöntemi, kesin çözümü hesaplanamayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık olarak hesaplanmasında kolaylık sağlayan bir yöntemdir. Matrikant, bazı kaynaklarda yaklaşık taşıma matrisi olarak da geçmektedir.

Matrikant yönteminin uygulanışı, aşağıdaki gibi kesin çözümü hesaplanamayan bir diferansiyel denklemde ele alınsın:

$$\frac{dy}{dt} = A[t]y$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \textbf{(4.1)}$$

Burada, $[A]$'nın elemanları t'nin sürekli fonksiyonları ise, $[A]$ matrisi belirlenen terime kadar bir serinin toplamı şeklinde, integre edilerek (t, t_0) aralığında matrikant bulunabilir [6]:

$$M(t, t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\int_{t_0}^{\tau} A(\sigma)d\sigma d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\int_{t_0}^{\tau} A(\sigma)\int_{t_0}^{\sigma} A(\psi)d\psi d\sigma d\tau + ... \quad \textbf{(4.2)}$$

Burada, M matrisi, (t, t_0) aralığında $[A]$ matrisinin matrikantını, t_0, $t = 0$ başlangıç referans noktasını, I birim matrisi, τ, σ, ψ sembolleri rastgele değişkenleri ifade eder.

Matrikant, (4.2) eşitliğindeki gibi sonsuz sayıda serinin toplamından oluşur. Bu seri açılımı aşağıdaki bağıntıyla ifade edebiliriz:

$$\frac{dM_k}{dt} = A(t).M_{k-1} \qquad (k = 1,2,...\infty) \tag{4.3}$$

Burada k indisi matrikantın terim sayısını göstermektedir. Bu eşitlikte, M_0, I birim matrisine eşit olmak üzere,

$$M_k = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau) M_{k-1} d\tau \tag{4.4}$$

şeklinde matrikant ifadesinin genel denklemi elde edilir. Bu ifadeden, matrikantın birkaç terimi hesaplanırsa,

$$M_0 = I$$

$$M_1 = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau$$

$$M_2 = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) d\tau \tag{4.5}$$

şeklinde terimler elde edilir. Burada, $M_k(k = 0,1,2,...\infty)$ terimli matrikantın, $(k+1)$ elemanın toplamından oluşan sonsuz serili bir matris olduğunu görebiliriz [7]. Dikkat edilmesi gereken nokta, iki ve daha fazla integral hesabının olduğu ifadelerin değişken dönüşümü yapılarak hesaplandığıdır.

Matrikant denkleminde kaç terim alınıp hesap yapılacağına yakınsama yoluyla karar verildikten sonra, matrikant, $y(0)$ başlangıç değerleri ile çarpılarak çözüm elde edilir:

$$y(t) = M(t,t_0) y(0) \tag{4.6}$$

4.1.1 Matrikant yöntemi ile alternatif çözüm

Diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için matrikant yöntemini kullanmak çözüm kolaylığı sağladığı gibi, en yakın çözümü bulabilmek için matrikant serisini olabildiğince ilerletmek gerekebilir. Fakat belirli bir terim sayısından sonra matrikantı hesaplamak güçleşir. Bu noktada yaklaşık çözümü daha kolay bir şekilde elde edebilmek için matrikant serisi belirlenen terime kadar hesaplanır. Daha sonra ise çözümün istendiği sınırlar, daha küçük parçalara bölünerek hesap yapılır. Bu işlem hem hesap kolaylığı sağlar, hem de daha yakınsak bir çözüm elde edilmesine yardımcı olur.

Matrikant yönteminde, çözümün sınırlarının aralıklara bölünmesi hesaplanırken integral sınırları (t, t_0) yerine, (t, u) olarak alınır. Burada u, sembolik bir değişkendir. Bu şekilde denklemlerde yer değiştirme yapılırsa,

$$M_0 = I$$

$$M_1 = M_0 + \int_u^t A(\tau)d\tau$$

$$M_2 = M_0 + \int_u^t A(\tau)d\tau + \int_u^t A(\tau)\left(\int_u^\tau A(\sigma)d\sigma\right)d\tau \qquad \textbf{(4.7)}$$

olarak yazılabilir. Burada matrikant denklemi, (4.5) eşitliğindeki gibi iki terimde bırakılmıştır. Çözümü yakınsamak için, terim sayısı istenildiği kadar ilerletilebilir. Fakat eleman sayısı arttırıldıkça hesap yapmak güçleşecektir. Bu noktada, yakın çözümü bulmak için, matrikantın terim sayısı arttırılmadan, çözümün integral sınırları $(0-t)$, n parçaya bölünerek sonuç elde yakınsanabilir. $(0-t)$ aralığının n parçaya bölünmüş hali aşağıdaki denklemde verilmektedir [9]:

$$M_k = M_k(t,u) = M_k\left(t, \frac{(n-1)t}{n}\right) M_k\left(\frac{(n-1)t}{n}, \frac{(n-2)t}{n}\right) \cdots M_k\left(\frac{2t}{n}, \frac{t}{n}\right) M_k\left(\frac{t}{n}, \frac{(n-n)t}{n}\right)$$

(4.8)

Bu ifadedeki terimlerin her biri (4.7)'de yerine koyularak, kendi integral sınırları içerisinde hesaplanır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta; aralık n parçaya bölündüğünden matrikant denkleminin, n tane teriminin çarpımına eşit olduğudur.

Bu yöntemle (t, t_0) integral sınırları içerisinde matrikant hesaplandıktan sonra, $y = M_k \, y(0)$ hesaplanmak suretiyle denklemin yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

4.2 Eğri Eksenli Çubukların Titreşimlerinin Matrikant Yöntemi İle Çözümü

Eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı serbest titreşimlerine ait verilen (3.37) ve (3.38) denklemleri, sürekli değişken kesite sahip çubuk için ele alındığında, denklem takımının yaklaşık olarak çözümünde matrikant yöntemi kullanılabilir.

Eğri eksenli çubukların kendi düzlemindeki ve kendi düzlemine dik doğrultudaki serbest titreşimlerine ait (3.37) ve (3.38) denklemleri, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımıdır ve matris şeklinde ifade edildiğinde,

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\phi} = \mathrm{A}(\phi)\mathbf{y}(\phi) \qquad \textbf{(4.9)}$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{y}(\phi)$, 6 elemanlı değişkenler vektörünü, $\mathrm{A}(\phi)$, 6×6 elemanlı katsayılar matrisini ifade etmek üzere, düzlem içi serbest titreşimler, aşağıdaki gibi yazılabilir [10]:

$$\mathbf{y}(\phi) = \begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \\ M_b \\ F_t \\ F_n \end{bmatrix}$$

$$
\mathrm{A}(\phi)=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & R/EA & 0\\
-1 & 0 & R & 0 & 0 & Rk_n/GA\\
0 & 0 & 0 & R/EI_b & 0 & 0\\
0 & 0 & -R\mu(I_b/A)\omega^2 & 0 & 0 & -R\\
-R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & -R\mu\omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{bmatrix}
$$

(4.10)

Benzer şekilde, düzlem dışı serbest titreşimler ise,

$$
\mathbf{y}(\phi)=\begin{bmatrix} v\\ \Omega_n\\ \Omega_t\\ M_n\\ M_t\\ F_b \end{bmatrix}
$$

$$
\mathrm{A}(\phi)=\begin{bmatrix}
0 & -R & 0 & 0 & 0 & Rk_b/GA\\
0 & 0 & -1 & R/EI_n & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & R/GJ & 0\\
0 & -R\mu(I_n/A)\omega^2 & 0 & 0 & -1 & R\\
0 & 0 & -R\mu(I_p/A)\omega^2 & 1 & 0 & 0\\
-R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

(4.11)

şeklinde yazılabilir.

Yukarıdaki diferansiyel denklem takımları, sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubuğu ifade ediyor ise, A katsayılar matrisinin tüm elemanları sabit sayılar değildir. Böyle bir çubukta A, I_b, I_n, I_p ve J ifadeleri ϕ açısına bağlı olarak değişkenlik gösterir. Bunlarla birlikte, kesit çember eksenli değil ise, R yarıçapı da ϕ açısına bağlı olarak değişkenlik gösterecektir. Bu durumda (3.37) ve (3.38) denklemlerinde,

$$A = A(\phi)$$

$$\mu = \mu(\phi)$$

$$I_b = I_b(\phi)$$

$$I_n = I_n(\phi)$$

$$I_p = I_p(\phi)$$

$$J = J(\phi) \tag{4.12}$$

olarak tanımlanabilir. Buradan, (3.37) çember eksenli çubukların düzlem içi serbest titreşim denklemleri,

$$\frac{dw}{d\phi} = u(\phi) + \frac{R}{EA(\phi)} F_t$$

$$\frac{du}{d\phi} = -w + R\Omega_b + \frac{RF_n}{GA(\phi)/k_n}$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R}{EI_b(\phi)} M_b$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -RF_n - R\mu(\phi)\frac{I_b(\phi)}{A(\phi)}\omega^2\Omega_b$$

$$\frac{dF_t}{d\phi} = F_n - R\mu(\phi)\omega^2 w$$

$$\frac{dF_n}{d\phi} = -F_t - R\mu(\phi)\omega^2 u \tag{4.13}$$

şeklinde, düzlem dışı serbest titreşim denklemleri ise,

$$\frac{dv}{d\phi} = -R\Omega_n + \frac{R}{GA(\phi)/k_b} F_b$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R}{EI_n(\phi)} M_n$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R}{GJ(\phi)} M_t$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + RF_b - R\mu(\phi)\frac{I_n(\phi)}{A(\phi)}\omega^2\Omega_n$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - R\mu(\phi)\frac{I_p(\phi)}{A(\phi)}\omega^2\Omega_t$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} = -R\mu(\phi)\omega^2 v \qquad \textbf{(4.14)}$$

şeklinde tanımlanabilir. Çubuğun eğrilik ekseninin parabol, spiral, zincir eğrisi (catenary) gibi olması durumunda ise,

$$R = R(\phi) \qquad \textbf{(4.15)}$$

şeklinde düşünülecektir.

Yukarıdaki ifadelere göre; (4.9)'daki denklem takımının yaklaşık çözümü, matrikant yöntemi kullanılarak, (4.6) eşitliğindeki gibi ifade edilirse;,

$$\mathbf{y}(\phi) = M_k(\phi,\phi_0)\mathbf{y}(\phi_0) \qquad \textbf{(4.16)}$$

denklemi yardımıyla bulunabilir. Burada, $M_k(\phi,\phi_0)$ matrikant terimi, (4.2) ve (4.4) eşitlikleri ile,

$$M_k(\phi,\phi_0) = I + \int_{\phi_0}^{\phi} \left(\mathrm{A}(\tau)\right) M_{k-1} d\tau$$

$$M_k(\phi,\phi_0) = I + \int_{\phi_0}^{\phi} \mathrm{A}(\tau)d\tau + \int_{\phi_0}^{\phi} \mathrm{A}(\tau)\int_{\phi_0}^{\tau} \mathrm{A}(\sigma)d\sigma d\tau + \dots \qquad \textbf{(4.17)}$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.17) denkleminde k terim sayısı belirlenerek; (4.8) eşitliği ile (ϕ,ϕ_0) çözüm sınırları n parçaya bölünerek, yakınsama iyileştirilebilir:

$$M_k(\phi,\phi_0)=M_k\left(\phi,\frac{(n-1)\phi}{n}\right)M_k\left(\frac{(n-1)\phi}{n},\frac{(n-2)\phi}{n}\right)\cdots M_k\left(\frac{2\phi}{n},\frac{\phi}{n}\right)M_k\left(\frac{\phi}{n},0\right) \quad \textbf{(4.18)}$$

Burada, ϕ toplam kiriş açısı, çubuğun $\phi_0 = 0$ referans koordinatından çubuğun uçları arasındaki kiriş açılarının toplamıdır. Yani $\phi_0 = 0$ ile A ucu arasındaki açı ϕ_A, B ucu arasındaki açı ϕ_B ise; $\phi = \phi_A + \phi_B$ gibi düşünülebilir. (4.16) eşitliğinde, $\mathbf{y}(\phi_0)$, $\phi_0 = 0$ koordinatındaki başlangıç değerleri vektörünü ifade etmektedir. $\mathbf{y}(\phi_0)$ başlangıç değerleri vektörünün 6 bilinmeyeni, çubuğun iki ucu için yazılan sınır şartları kullanılarak elde edilir. Çubuğun her iki ucu A ve B için sınır şartları, düzlem içi titreşim problemlerinde, sabit mesnet, ankastre mesnet ve serbest uç için aşağıdaki gibidir:

Sabit mesnet: $w(\phi) = 0$, $u(\phi) = 0$, $M_b(\phi) = 0$

Ankastre mesnet: $w(\phi) = 0$, $u(\phi) = 0$, $\Omega_b(\phi) = 0$

Serbest uç: $M_b(\phi) = 0$, $F_t(\phi) = 0$, $F_n(\phi) = 0$ **(4.19)**

Düzlem dışı titreşim problemlerinde ise, sabit mesnet, ankastre mesnet ve serbest uç için sınır şartları,

Sabit mesnet: $v(\phi) = 0$, $\Omega_n(\phi) = 0$, $M_n(\phi) = 0$

Ankastre mesnet: $v(\phi) = 0$, $\Omega_n(\phi) = 0$, $\Omega_t(\phi) = 0$

Serbest uç: $M_n(\phi) = 0$, $M_t(\phi) = 0$, $F_b(\phi) = 0$ **(4.20)**

şeklinde ifade edilir. Sınır şartlarından elde edilen 6 denklem, homojen diferansiyel takımı oluştururlar.

$\mathbf{y}(\phi_0)$ başlangıç değerleri vektörünün sıfırdan farklı bir çözümünün olması, (4.17) matrikant denkleminin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur. Determinant ifadesi, ω doğal frekansına bağlı bir ifadedir. Buradan, (4.17) eşitliğindeki k matrikant terim sayısı ve (4.18) eşitliğindeki n sayısı belirlendikten sonra; düzlem içi veya düzlem dışı titreşimlere göre çubuğun iki ucu için mesnet şartları (4.19) veya (4.20) eşitliklerindeki gibi belirlendikten sonra, $\phi_0 = 0$ referans noktasından A ve B uçlarına kadar olan kiriş açılarında,

$$\det\left[\mathrm{N}(\phi,\phi_0)\right] = 0 \tag{4.21}$$

ifadesinden denklemi sıfıra eşitleyen kökler bulunur. Burada N, M_k matrikant matrisinden sınır koşulları yazılarak oluşturulan matristir. Bu kökler, Regula-Falsi veya benzeri kök bulma sayısal yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir. Bu köklerden, (4.10) veya (4.11) eşitliklerindeki A katsayılar matrisine göre, çubuğun düzlem içi veya düzlem dışı ω doğal frekansları elde edilecektir.

A katsayılar matrisi (4.10) ve (4.11) eşitliklerinde, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizlikleri etkilerinin tümünü göz önüne alınır. Doğal frekansların hesaplanmasında bu etkilerin tümü dahil ya da ihmal edilebilir. Ayrıca, bu etkiler ayrı ele alınarak da doğal frekansları hesaplamak mümkündür.

Değişken eğrilik yarıçapı ve kesitine sahip bir çubuk için tüm etkilerin hesaba katıldığı durumda, (4.10) eşitliğindeki A düzlem içi katsayılar matrisinin 3 terimli M_k matrikant matrisi hesaplandığında, matrisin açılımı şu şekildedir:

$$M_{11} = 1$$

$$M_{12} = \phi + \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^3}{6}$$

$$M_{15} = \int_0^{\phi} \frac{R(\tau)}{EA(\tau)} d(\tau) + \int_0^{\phi} \frac{\left(\int_0^{\tau} \frac{R(\sigma)}{EA(\sigma)} d(\sigma)\right) R(\tau)}{EA(\tau)} d(\tau) + \int_0^{\phi} \frac{\left(\int_0^{\tau} \frac{\left(\int_0^{\sigma} \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} d(\psi)\right) R(\sigma)}{EA(\sigma)} d(\sigma)\right) R(\tau)}{EA(\tau)} d(\tau)$$

$$M_{21} = -\phi + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{6}$$

$$M_{22} = 1$$

$$M_{23}=\int_0^{\phi}R(\tau)d(\tau)+\int_0^{\phi}\left(\int_0^{\tau}R(\sigma)d(\sigma)\right)R(\tau)d(\tau)+\int_0^{\phi}\left(\int_0^{\tau}\left(\int_0^{\sigma}R(\psi)d(\psi)\right)R(\sigma)d(\sigma)\right)R(\tau)d(\tau)$$

$$M_{26}=\int_0^{\phi}\frac{R(\tau)k_n}{GA(\tau)}d(\tau)+\int_0^{\phi}\frac{\left(\int_0^{\tau}\frac{R(\sigma)k_n}{GA(\sigma)}d(\sigma)\right)R(\tau)k_n}{GA(\tau)}d(\tau)+\int_0^{\phi}\frac{\left(\int_0^{\tau}\frac{\left(\int_0^{\sigma}\frac{R(\psi)k_n}{GA(\psi)}d(\psi)\right)R(\sigma)k_n}{GA(\sigma)}d(\sigma)\right)R(\tau)k_n}{GA(\tau)}d(\tau)$$

$$M_{33}=1$$

$$M_{34}=\int_0^{\phi}\frac{R(\tau)}{EI_b(\tau)}d(\tau)+\int_0^{\phi}\frac{\left(\int_0^{\tau}\frac{R(\sigma)}{EI_b(\sigma)}d(\sigma)\right)R(\tau)}{EI_b(\tau)}d(\tau)+\int_0^{\phi}\frac{\left(\int_0^{\tau}\frac{\left(\int_0^{\sigma}\frac{R(\psi)}{EI_b(\psi)}d(\psi)\right)R(\sigma)}{EI_b(\sigma)}d(\sigma)\right)R(\tau)}{EI_b(\tau)}d(\tau)$$

$$M_{43}=\int_0^{\phi}-\rho\omega^2I_b(\tau)R(\tau)d(\tau)+\int_0^{\phi}\left(\int_0^{\tau}-\rho\omega^2I_b(\sigma)R(\sigma)d(\sigma)\right)-\rho\omega^2I_b(\tau)R(\tau)d(\tau)+$$
$$\int_0^{\phi}\left(\int_0^{\tau}\left(\int_0^{\sigma}-\rho\omega^2I_b(\psi)R(\psi)d(\psi)\right)-\rho\omega^2I_b(\sigma)R(\sigma)d(\sigma)\right)-\rho\omega^2I_b(\tau)R(\tau)d(\tau)$$

$$M_{44}=1$$

$$M_{46}=\int_0^{\phi}-R(\tau)d(\tau)+\int_0^{\phi}\left(\int_0^{\tau}-R(\sigma)d(\sigma)\right)-R(\tau)d(\tau)+\int_0^{\phi}\left(\int_0^{\tau}\left(\int_0^{\sigma}-R(\psi)d(\psi)\right)-R(\sigma)d(\sigma)\right)-R(\tau)d(\tau)$$

$$M_{51}=\int_0^{\phi}-\rho\omega^2A(\tau)R(\tau)d(\tau)+\int_0^{\phi}\left(\int_0^{\tau}-\rho\omega^2A(\sigma)R(\sigma)d(\sigma)\right)-\rho\omega^2A(\tau)R(\tau)d(\tau)+$$
$$\int_0^{\phi}\left(\int_0^{\tau}\left(\int_0^{\sigma}-\rho\omega^2A(\psi)R(\psi)d(\psi)\right)-\rho\omega^2A(\sigma)R(\sigma)d(\sigma)\right)-\rho\omega^2A(\tau)R(\tau)d(\tau)$$

$$M_{55}=1$$

$$M_{56} = \phi + \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^3}{6}$$

$$M_{62} = \int_0^{\phi} -\rho\omega^2 A(\tau)R(\tau)d(\tau) + \int_0^{\phi}\left(\int_0^{\tau} -\rho\omega^2 A(\sigma)R(\sigma)d(\sigma)\right) - \rho\omega^2 A(\tau)R(\tau)d(\tau) +$$
$$\int_0^{\phi}\left(\int_0^{\tau}\left(\int_0^{\sigma} -\rho\omega^2 A(\psi)R(\psi)d(\psi)\right) - \rho\omega^2 A(\sigma)R(\sigma)d(\sigma)\right) - \rho\omega^2 A(\tau)R(\tau)d(\tau)$$

$$M_{65} = -\phi + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{6}$$

$$M_{66} = 1 \tag{4.22}$$

Buradan çubuğun ankastre-serbest sınır şartında olduğunu düşünürsek, (4.19) eşitliği yardımıyla N matrisi şu şekilde oluşacaktır:

$$\mathrm{N} = \begin{bmatrix} M_{11}(\phi_A) & M_{12}(\phi_A) & M_{13}(\phi_A) & M_{14}(\phi_A) & M_{15}(\phi_A) & M_{16}(\phi_A) \\ M_{21}(\phi_A) & M_{22}(\phi_A) & M_{23}(\phi_A) & M_{24}(\phi_A) & M_{25}(\phi_A) & M_{26}(\phi_A) \\ M_{31}(\phi_A) & M_{32}(\phi_A) & M_{33}(\phi_A) & M_{34}(\phi_A) & M_{35}(\phi_A) & M_{36}(\phi_A) \\ M_{41}(\phi_B) & M_{42}(\phi_B) & M_{43}(\phi_B) & M_{44}(\phi_B) & M_{45}(\phi_B) & M_{46}(\phi_B) \\ M_{51}(\phi_B) & M_{52}(\phi_B) & M_{53}(\phi_B) & M_{54}(\phi_B) & M_{55}(\phi_B) & M_{56}(\phi_B) \\ M_{61}(\phi_B) & M_{62}(\phi_B) & M_{63}(\phi_B) & M_{64}(\phi_B) & M_{65}(\phi_B) & M_{66}(\phi_B) \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

5. DEĞİŞKEN KESİTLİ EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİ

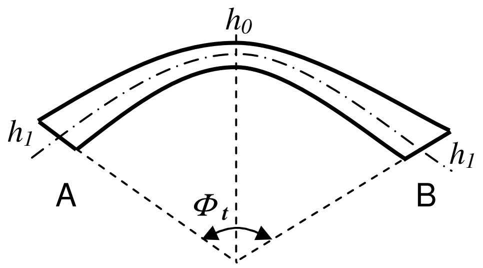
Literatürde, sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerine ait çok sayıda örnek bulunmasına rağmen, bu çubukların düzlem dışı titreşim problemlerine ait örnekler oldukça az sayıdadır. Bu sebeple, bu çalışma içerisinde ağırlıklı olarak düzlem içi titreşim problemlerine yer verilmiştir.

Literatürdeki sayısal örnekler, Bölüm 4.2'de değinilen matrikant ile çözüm yöntemi kullanılarak çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Çubuğun doğal frekanslarının bulunması için yapılan hesaplarda, Matlab programı kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir.

5.1 Düzlem İçi Serbest Titreşim Probleminin Analizi

Çubuk teorisinin w, u, Ω_b, M_b, F_t, F_n olarak belirlenen altı bilinmeyeni, eğri eksenli düzlemsel çubuğun kendi düzlemindeki titreşimini ifade eden (3.37) eşitliğinde belirlenmiştir. Bu eşitlikler birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımıdır ve (4.10) denklemlerinde matris şeklinde ifade edilmiştir. Bölüm 4.2'de, bu diferansiyel takımının yaklaşık çözümü için, matrikant yöntemi kullanılarak, mesnetleme şartları belirli olan sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubuğun doğal frekanslarının elde edilebileceği bir yöntem sunulmuştur. Bu bölümde, sürekli değişken dikdörtgen kesite ve farklı eksen eğriliklerine sahip çubukların düzlem içi serbest titreşim problemlerine ait örnekler incelenmiş, (4.21) eşitliğinden kökler bulunarak çubukların doğal frekansları elde edilmiştir.

Çalışma içerisindeki sayısal örneklerde, çubukların doğal frekanslarının hesaplanması için, (4.17)'deki matrikant eşitliği üç terimli olarak alınmış, daha yakınsak bir çözüm elde edebilmek için de, (4.18) denklemindeki gibi (ϕ_t, ϕ_0) kiriş açısı, aralığa bölünerek yakınsama yapılmıştır. Çözüm sınırlarının aralığa bölünme sayısı n'i belirlemek için, Şekil 5.1'de gösterilen lineer değişken dikdörtgen kesitli, çember eksenli simetrik çubuk, referans geometri olarak alınmış, bu çubuğun c boyutsuz frekans değerlerinin, n sayısına göre değişimi incelenmiştir:



Şekil 5.1 : Lineer değişken kesitli simetrik çubuk.

Şekil 5.1'de verilen çubukta, çubuğun orta noktası $\phi_0 = 0$ referans alınarak, h kesit yüksekliğinin değişimi,

$$h(\phi) = h_0(1 - 2\eta(\phi/\phi_t)) \qquad -\phi_t/2 \le \phi \le 0$$

$$h(\phi) = h_0(1 + 2\eta(\phi/\phi_t)) \qquad 0 \le \phi \le \phi_t/2 \tag{5.1}$$

şeklindedir. Burada, h_0, çubuğun referans noktasındaki kesitinin yüksekliğini, ϕ_t, toplam kiriş açısını, ϕ, açısal koordinatı, η, çubuğun kesit alanının değişim oranını göstermektedir. Çubuğun, $\phi_0 = 0$ referans noktasındaki h_0 kesit yüksekliği ve R eksen eğriliği yarıçapı, narinlik oranı ile belirlenmiştir. λ narinlik oranı,

$$\lambda = \frac{R}{i} = \frac{R}{\sqrt{\frac{I_b}{A}}} \tag{5.2}$$

olarak tanımlanır. Burada, i, jirasyon yarıçapını ifade eder. Dikdörtgen kesitli çubukta; A kesit alanı,

$$A(\phi) = bh(\phi) \tag{5.3}$$

şeklinde alınacaktır. Burada b, kesit derinliğidir ve eğri botunca sabittir. Binormal eksene göre alan eylemsizlik momenti I_b ise,

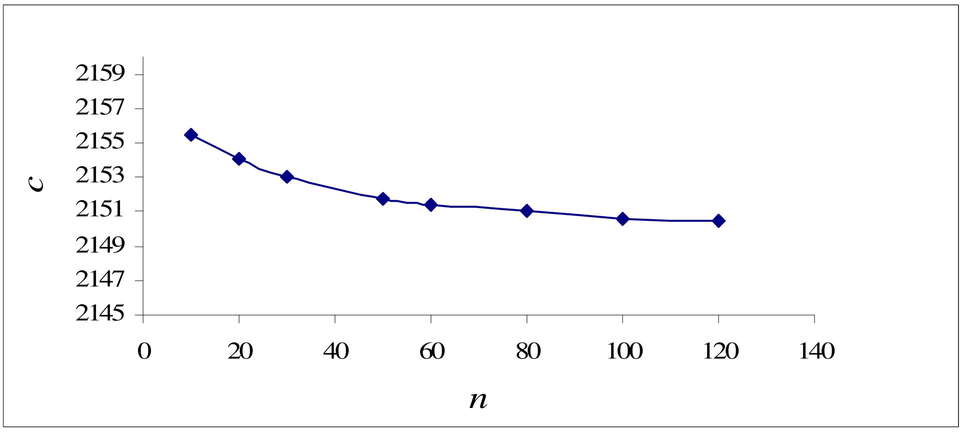
$$I_b(\phi) = \frac{b(h(\phi))^3}{12} \tag{5.4}$$

şeklinde olacaktır. Çubuğa ait boyutsuz frekans;

$$c = \omega R^2 \sqrt{\frac{\mu}{EI_b}} \tag{5.5}$$

ile ifade edilmiştir. Burada, c, çubuğa ait boyutsuz frekansı, μ, çubuğun birim boyunun kütlesini, E, elastiklik modülünü göstermektedir.

Yukarıdaki ifadeler göz önünde bulundurularak; Şekil 5.2'deki grafikte, Şekil 5.1'deki çubuk referans alınarak, $\lambda = 50$, kiriş açısı $\phi_t = 10^{\circ}$, $\eta = 0.1$ ve ankastre-ankastre sınır şartı durumunda, çubuğun ilk boyutsuz doğal frekanslarının n'e göre değişimi incelenmiştir. Grafikte, yatay eksen n, kiriş açısının aralığa bölünme sayısını, dikey eksen c, boyutsuz doğal frekans değerini göstermektedir.



Şekil 5.2 : Simetrik çubuğun birinci boyutsuz doğal frekans değerinin, kiriş açısının aralığa bölünme sayısına göre değişimi.

Şekil 5.2'deki grafiğe göre, eğrinin belli bir yerden sonra yakınsamaya başladığı ve boyutsuz doğal frekans değerinin, aralığın bölünme sayısının artmasıyla önemli oranda değişmediği görülmektedir. Çözüm sınırlarının aralığa bölünme sayısının, doğal frekansa etkisinin azaldığı bu değer, $n = 50$ olarak alınabilir. Aralığa bölme sayısının 50 alınmasıyla, Şekil 5.1'deki çubuk ve örneklerdeki diğer çubuklar için yeterli doğrulukta sonuç elde edilip, hesaplamalar daha kısa sürede yapılabilmiştir. Çok daha hassas sonuçlara ulaşabilmek için, 120 ya da daha fazla aralık sayısına bölme yapılabilir fakat bu işlem hesaplamalarda daha fazla zaman almaktadır.

Çubukların düzlem içi doğal frekansları, ankastre-ankastre (A-A), sabit-sabit (S-S), sabit-ankastre (S-A), ankastre-serbest (A-Sr), serbest-serbest (Sr-Sr) olmak üzere beş faklı sınır şartı göz önünde bulundurularak incelenmiştir. Çubukların iki uç noktası (A ve B ucu) için bu sınır koşullarından gelen 6 adet eşitlik (4.19) eşitliğinde gösterilmiştir. Bu sınır şartlarıyla frekans değerleri hesaplanırken, çubuğun, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal ya da dahil eden durumları da göz önüne alınmıştır. Frekans değerlerini gösteren çizelgelerde, kolonları ifade eden aşağıdaki rakamlar, bu durumları gösterir:

(1) Tüm etkiler: Bu kabulde Euler-Bernoulli çubuk teorisinde ihmal edilen bütün etkiler, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınarak, frekans değerleri hesaplanır.

(2) Etkiler ihmal: Euler-Bernoulli çubuk teorisine uygun olarak, çubuğa etkiyen eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek frekans değerleri hesaplanır.

(3) Eksenel uzama: Sadece eksenel uzama etkisi göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

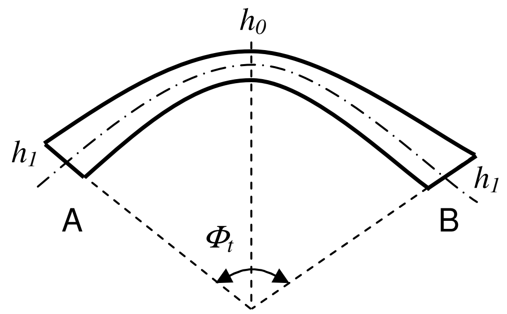
(4) Kayma deformasyonu: Sadece kayma deformasyonu etkisi göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

(5) Dönme eylemsizliği: Sadece dönme eylemsizliği etkisi göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

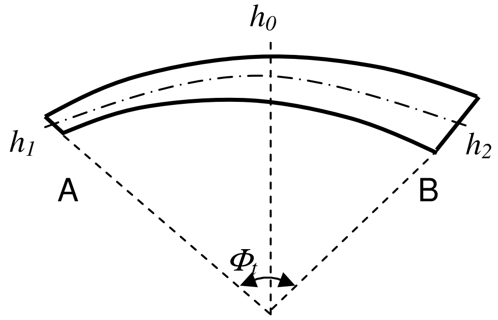
5.1.1 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Literatürdeki çalışmalarda, sürekli değişken kesitli, çember, parabol, spiral ya da zincir eğrisi eksenli çubuklar, simetrik ve asimetrik olarak iki farklı geometride incelenmektedir. Bu çalışmalardaki örnekler çözülerek, elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar, farklı kiriş açıları ve kesit alanı değişim oranları için, farklı sınır şartında gerçekleştirilmiştir. Referans çalışmalarda boyutsuz frekans değerleri farklı formülasyonlarla ifade edilmekte olup, bu formülasyonlar çizelge ismi içerisinde verilmiştir.

Literatürdeki çalışmalar genellikle dikdörtgen kesitli çubukları göz önüne almıştır. Şekil 5.3’de, sürekli değişken kesitli çember eksenli simetrik çubuk gösterilmekte olup h_0 ve h_1 sırasıyla çubuğa ait en küçük ve en büyük kesit alanının yükseklik değerlerini ifade etmektedir. Şekil 5.4'de ise, sürekli değişken kesitli çember eksenli asimetrik çubuk gösterilmekte ve h_0, çubuğun referans noktasındaki kesitinin yükseklik değerini h_1 ve h_2 sırasıyla çubuğa ait en küçük ve en büyük kesit yüksekliği değerlerini belirtmektedir. Çubuğun kesit yüksekliği $h(\phi)$, örneklerde verilen bağıntılara göre değişmektedir. Kesit derinliği b ise, tüm örneklerde, aksi ifade edilmedikçe, eğri boyunca sabittir.

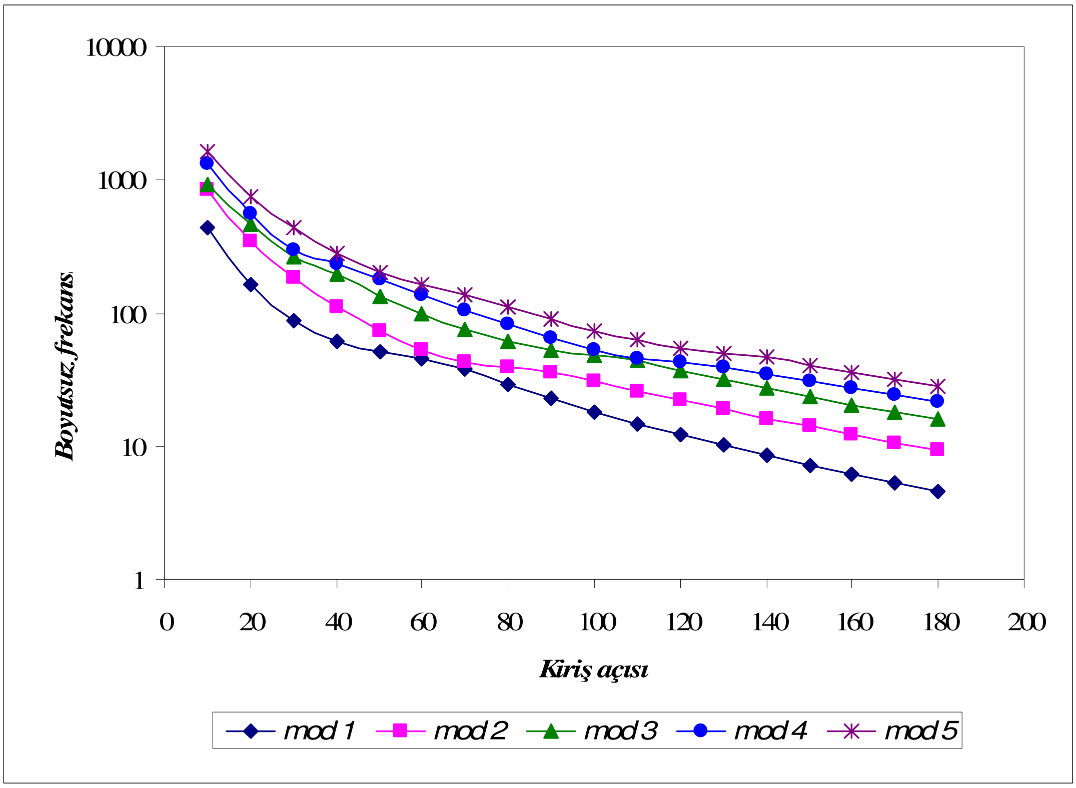


Şekil 5.3 : Lineer değişken kesitli simetrik çubuk.



Şekil 5.4 : Lineer değişken kesitli asimetrik çubuk.

Şekil 5.5, Şekil 5.3'deki gibi sürekli değişken kesitli çember eksenli çubuğun, tüm etkilerin dahil edilmesi durumunda elde edilen frekans değerlerinin kiriş açısı ile değişimini göstermektedir. Sınır şartı, ankastre-ankastre olarak seçilmiş, ilk beş mod için boyutsuz frekans değerleri hesaplanmıştır. Grafikten de görüleceği üzere, bazı açı değerlerinde, iki ayrı moda ait frekanslar birbirine çok yakın değerler almaktadır. Birbirine yakın frekansların, hemen öncesindeki açının ilk mod şekli ve hemen sonrasındaki açının sonraki mod şekliyle aynıdır. Farklı modlarda yakın frekansların elde edildiği bu durum "mod geçişi" olarak adlandırılmaktadır [11]. Yüksekliğin, kiriş açıklığına oranla az olduğu sığ çubuklarda belirgin olarak ortaya çıkan bu durum, [12]'de detaylı olarak ele alınmaktadır.



Şekil 5.5 : Ankastre-ankastre mesnetli simetrik çubuğun ilk beş doğal frekansları.

Şekil 5.6'da, Şekil 5.3'deki gibi sürekli değişken kesitli çember eksenli çubuğun, ankastre-ankastre sınır şartında, farklı kiriş açılarında, beş farklı etki durumu;

Durum 1: Tüm etkiler

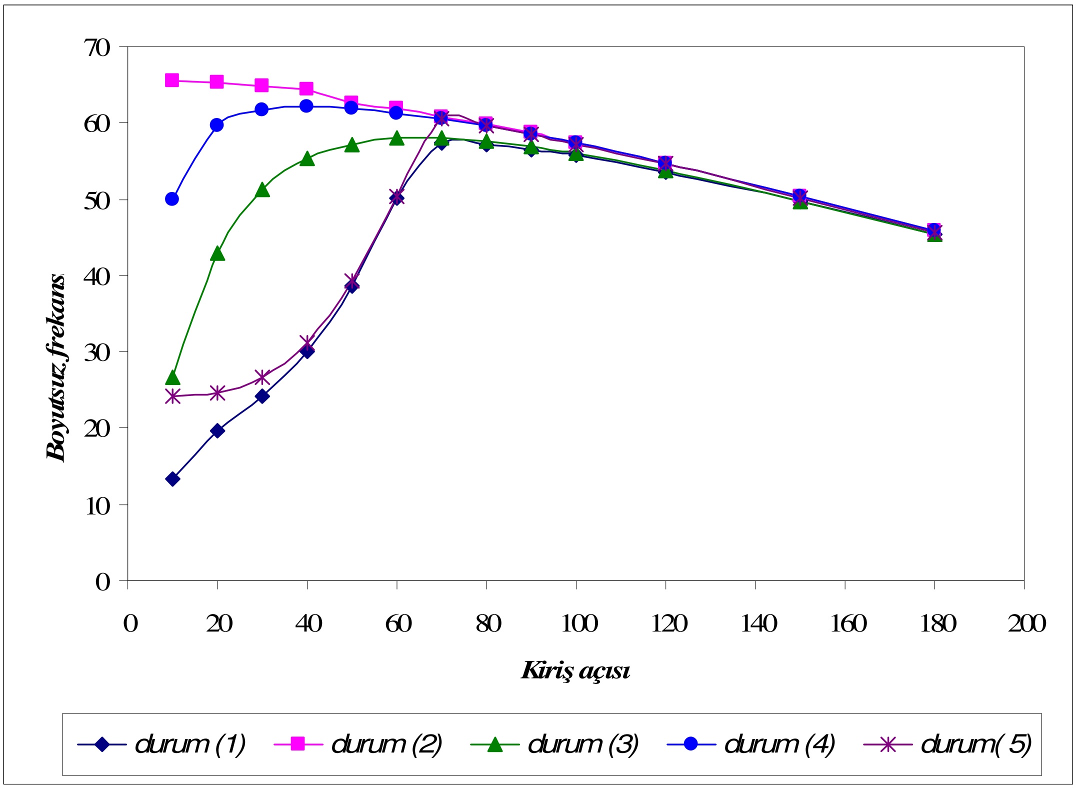
Durum 2: Tüm etkiler ihmal

Durum 3: Eksenel uzama etkisi

Durum 4: Kayma deformasyonu etkisi

Durum 5: Dönme eylemsizliği etkisi

için hesaplanan ilk doğal frekans değerleri verilmektedir. Çubuk geometrisi (5.1) eşitliğindeki gibi alınmıştır. Durum 1 ve durum 2 ile elde edilen boyutsuz frekans değerlerinin, küçük kiriş açılarında birbirinden oldukça farklı olduğu; kiriş açısı büyüdükçe, tüm durumlarda değerlerin birbirine yaklaştığı görülmektedir.



Şekil 5.6 : Ankastre-ankastre mesnetli simetrik çubuğun beş farklı durum için hesaplanan birinci doğal frekansları.

Çizelge 5.1 ve 5.2'de, Şekil 5.3'deki gibi simetrik geometriye sahip çubuğun boyutsuz ilk iki doğal frekans değerleri, çeşitli kiriş açılarında ve mesnet şartlarında hesaplanmıştır. Bu değerleri; Karami ve Malekzadeh [17], diferansiyel kuadratür yöntemi (differential quadrature method-DQM) kullanarak; Liu ve Wu [18], genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemi (generalized differential quadrature rule-GDQR) ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization method-CDM) yöntemi ile; Aucello ve Rosa [19] ile Laura ve Irassar [20], Rayleigh-Ritz (RR) ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization method-CDM) yöntemleri yardımıyla elde etmişlerdir. Çalışmada, tüm etkileri ihmal ederek hesaplama yapmışlardır. Aynı çalışmayı, Yiğit [21] ile Tüfekçi ve Yiğit [22], başlangıç değerleri yöntemi yardımıyla çubuğu sabit kesit alanlı alt elemanlara ayırarak incelemiş, tüm etkilerin hesaba dahil ve ihmal edildiği (1) ve (2) durumlarında boyutsuz doğal frekans değerlerini hesaplamışlardır.

Çizelge 5.1 : Simetrik çubuk için elde edilen birinci ve ikinci boyutsuz frekans değerlerinin $(c = \omega R^2 (\mu / EI_b)^{1/2})$ karşılaştırılması $(\eta = 0.1)$.

			Bu Çalışma		[22]		[17]	[19],[20]	[18],[19]
		ϕ_t	(1)	(2)	(1)	(2)	DQM	R-R	CDM
A - A	1	10	433.78	2151.74	433.46	2149.73	2149.78	2034	2138.3
		20	161.84	535.97	161.5	535.443	535.45	506.54	532.59
		30	88.309	236.74	88.126	236.515	236.518	223.7	235.26
		40	61.76	132.031	61.72	131.907	131.908	124.73	131.2
		50	50.837	83.5881	50.864	83.506	83.507		
	-								
	2	10	843.38	3862.79	848.36	3859.2	3858.78	3859.9	3821.7
		20	343.469	964.301	346.51	963.421	963.4	963.59	954.09
		30	183.182	427.548	185.25	427.169	427.167	427.24	422.92
		40	111.646	239.707	113.06	239.484	239.484	239.52	237.17
		50	74.128	152.745	75.131	152.616	152.61		
S - S	1	10	274.99	1358.50	273.27	1357.21	1357.21	1299	1354.4
		20	90.337	337.710	89.78	337.388	337.388	322.86	336.7
		30	57.548	148.692	57.377	148.548	148.549	142.15	148.25
		40	49.292	82.522	49.245	822.473	82.473	78.89	82.31
		50	46.441	51.959	46.466	51.909	51.909		
	-								
	2	10	775.468	2916.05	777.78	2913.3	2913.19	2913.5	2900.8
		20	269.889	727.548	270.38	726.907	726.89	726.98	723.8
		30	132.242	322.315	132.41	322.022	322.02	322.04	320.66
		40	76.834	180.487	76.914	180.316	180.31	180.33	179.56
		50	49.451	114.838	49.534	114.731	114.73		
S- A	1	10	352.55	1724.47	351.56	1722.84		1712	1716.6
		20	123.5	429.172	122.95	428.76		426.1	427.21
		30	70.067	189.318	69.834	189.139		187.96	188.46
		40	53.331	105.386	53.256	105.287		104.45	104.91
		50	46.89	66.557	46.91	66.493		66.011	66.257
		60	41.236	45.482	41.417	45.44		45.111	45.28

Çizelge 5.1 ve 5.2'de doğal frekansları hesaplanan simetrik çubuk, çember eksenlidir ve h kesitinin değişimi (5.1) eşitliğindeki gibidir. Mevcut çalışmada (2) ile elde edilen ilk iki frekans değerleri ve literatürdeki sonuçlar arasında küçük açılarda farklar olmasına rağmen açı değeri arttıkça sonuçların birbirine çok yaklaştığı görülmektedir. Tüm etkilerin dahil edilmesi durumunda ise, sonuçlar (1), [21] ve [22] ile gayet uyumlu fakat (2) durumundaki değerler ile çok farklıdır. Sabit – sabit ve sabit – ankastre koşullarında ise, kiriş açısı büyüdükçe, (1) ve (2) durumundaki birinci frekans değerleri arasındaki fark azalmaktadır. Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2

karşılaştırılırsa, ankastre-ankastre ve sabit-sabit sınır koşullarında, çubuğun kesit alanının değişim oranının artmasıyla, tüm açılarda frekans değerlerinin arttığı görülebilir.

Çizelge 5.2 : Simetrik çubuk için elde edilen birinci ve ikinci boyutsuz frekans değerlerinin $(c=\omega R^2(\mu / EI_b)^{1/2})$ karşılaştırılması $(\eta = 0.2)$.

			Bu Çalışma		[21]		[17]	[19],[20]	[18],[19]
		ϕ_t	(1)	(2)	(1)	(2)	DQM	R-R	CDM
A - A	1	10	448.33	2279.36	447.27	2268.7	2275.39	2069.8	2263.8
		20	170.04	567.808	168.86	565.16	566.819	515.48	563.93
		30	92.850	250.868	92.15	249.69	250.34	227.64	249.15
		40	64.570	139.958	63.99	139.3	139.71	126.94	139
		50	52.389	88.6389	52.23	88.22	88.48		
	-								
	2	10	857.357	4081.02			4073.37	4076.6	4035.3
		20	353.823	1018.82			1017.01	1017.7	1007.4
		30	190.825	451.728			450.96	451.28	446.71
		40	117.137	253.274			252.84	253.02	250.46
		50	78.151	161.420			161.14		
S - S	1	10	281.339	1421.64	277.32	1415	1419.05	1315.1	1416.1
		20	94.482	353.448	91.22	351.79	352.79	326.88	352.08
		30	58.495	155.644	58.05	154.91	155.35	143.9	155.05
		40	49.922	86.431	49.7	86.02	86.274	79.875	86.105
		50	46.914	54.416	46.89	54.16	54.317		
	-								
	2	10	782.173	3064.48			3058.83	3060.2	3045.7
		20	275.651	764.639			763.251	763.58	759.96
		30	137.889	338.745			338.134	338.27	336.68
		40	80.334	189.669			189.346	189.44	188.53
		50	51.874	120.700			120.483		

Gutierrez ve diğerleri [23], çember eksenli simetrik çubukların boyutsuz frekanslarını, kiriş açısını da hesaba dahil ederek, Ritz metodu (RM) ile elde etmişlerdir. Çalışmada, tüm etkiler ihmal edilmiştir. Aynı çalışmayı Yiğit [21] ile Tüfekçi ve Yiğit [22], tüm etkileri dahil ve ihmal ederek ele almışlardır. Çubuğun kesit yüksekliğinin değişimi (5.1) eşitliğindeki gibidir. Çizelge 5.3'de, $\eta = 0.1$ ve $\eta = 0.2$ durumları için boyutsuz frekans değerleri karşılaştırılmıştır. Mevcut çalışmada etkiler ihmal edildiğinde, birinci ve ikinci frekans değerlerinin [22] ile çok yakın olduğu, (1) durumunda ise değerler arasında fark olduğu görülmektedir. Bunun temel nedeni, özellikle eksenel uzama etkisinin küçük açı değerlerinde çok önemli olmasıdır. Bu çizelgelerden, söz konusu etkilerin ihmal edilmesinin hatalı sonuçlara yol açtığı açıkça görülmektedir. [22]'deki birinci frekans değerleri ile [23]'deki ikinci frekans ve sabit-ankastre birinci frekans değerleri bu çalışmayla oldukça uyumludur.

Çizelge 5.3 : Simetrik çubuk için elde edilen birinci ve ikinci boyutsuz frekans değerlerinin $(c=\omega R^2\phi_t^2(\mu/EI_b)^{1/2})$ karşılaştırılması.

			$\eta=0.1$					$\eta=0.2$		
			Bu Çalışma		**[22]**		**[23]**	**Bu Çalışma**	**[21]**	**[23]**
		ϕ_t	**(1)**	**(2)**	**(1)**	**(2)**	**RM**	**(2)**	**(2)**	**RM**
A - A	**1**	10	13.21	65.545	16.19	65.48	61.96	69.433	69.11	63.05
		20	19.72	65.306	22.11	65.24	61.72	69.185	68.86	62.81
		30	24.12	64.904	27.46	64.84	61.33	68.777	68.45	62.41
		40	30.08	64.352	36.19	64.28	60.79	68.214	67.89	61.87
	-									
	2	10	28.08	117.600	33.46	117.55	117.58	124.23		124.18
		20	42.85	117.423	49.65	117.39	117.41	124.05		124.01
		30	50.22	117.150	56.23	117.11	117.13	123.75		123.72
		40	54.41	116.763	58.97	116.72	116.74	123.34		123.32
S - S	**1**	10	8.37	41.382	9.15	41.34	39.57	43.305	43.10	40.06
		20	10.96	41.148	12.37	41.11	39.34	43.066	42.86	39.83
		30	15.72	40.764	19.77	40.72	38.97	42.67	42.47	39.45
		40	23.96	40.234	31.86	40.19	38.45	42.125	41.92	38.93
	-									
	2	10	24.44	88.823	28.51	88.74	88.75	93.296		93.22
		20	31.87	88.645	36.09	88.57	88.58	93.115		93.04
		30	34.91	88.360	38.2	88.28	88.29	92.808		92.74
		40	35.56	87.960	38.7	87.88	87.89	92.382		92.33
S- A	**1**	10	10.78	52.522	12.59	52.48	52.15	55.329		54.84
		20	15.01	52.285	16.65	52.24	51.92	55.086		54.55
		30	19.178	51.894	22.57	51.85	51.53	54.687		54.25
		40	25.952	51.356	32.79	51.31	50.91	54.135		53.66
		50	35.677	50.655	45.54	50.63	50.27	53.435		52.99
		60	45.329	49.869	48.07	49.83	49.47	52.604		52.07

Çizelge 5.4, parabol eksenli simetrik çubuğun ilk iki boyutsuz doğal frekans değerlerini göstermektedir. Bu değerleri, Gutierrez ve diğerleri [23] tüm etkileri ihmal ederek hesaplamıştır. Yiğit [21] ise sadece birinci frekans değerlerini elde etmiştir. Çubuk kesitinin yüksekliği için (5.1) eşitliği kullanılırken, [23]' de çubuğun eğrilik yarıçapı,

$$R = \frac{R_0}{\cos^3 \phi} \qquad \textbf{(5.6)}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Çizelge 5.4’deki karşılaştırma, tüm etkilerin ihmal edildiği duruma göre yapılmıştır. Mevcut çalışma ile [21]’de elde edilen birinci frekans değerleri ile sabit-ankastre şartında [23]’de elde edilen değerler oldukça uyumlu, ikinci frekanslar ise, diğer sınır şartlarında [23] ile birbirine çok yakındır.

Çizelge 5.4 : Parabol eksenli simetrik çubuk için elde edilen birinci ve ikinci boyutsuz frekans değerlerinin $(c = \omega R^2 \phi_t^2 (\mu / EI_b)^{1/2})$ karşılaştırılması.

			$\eta = 0.1$			$\eta = 0.2$		
			Bu Çalışma	**[21]**	**[23]**	**Bu Çalışma**	**[21]**	**[23]**
		ϕ_t	**(2)**	**(2)**	**RM**	**(2)**	**(2)**	**RM**
A - A	**1**	10	65.036	64.89	61.46	68.898	68.59	62.57
		20	63.281	63.18	59.86	67.060	66.80	60.91
		30	60.409	60.39	57.18	64.054	63.88	58.2
		40	56.503	56.57	53.53	59.950	59.89	54.51
	-							
	2	10	116.858		116.79	123.465		123.36
		20	114.274		114.28	120.752		120.71
		30	110.002		110.13	116.261		116.34
		40	104.109		104.39	110.084		110.31
S - S	**1**	10	41.063	40.97	39.27	42.976	42.78	39.76
		20	39.883	39.82	38.15	41.759	41.60	38.63
		30	37.961	37.95	36.33	39.775	39.67	36.8
		40	35.36	35.41	33.87	37.087	37.05	34.32
	-							
	2	10	88.208		88.15	92.704		92.59
		20	86.193		86.19	90.598		90.54
		30	82.855		82.95	87.118		87.16
		40	78.267		78.48	82.316		82.48
S- A	**1**	10	52.119	52.00	51.76	54.900	54.65	54.47
		20	50.664	50.59	50.43	53.384	53.18	53.06
		30	48.284	48.27	48.16	50.907	50.77	50.75
		40	45.056	45.12	45.07	47.543	47.50	47.58
		50	41.083	41.24	41.18	43.397	43.46	43.54
		60	36.502	36.75	36.44	38.610	38.78	38.67

Çizelge 5.5, spiral eksenli simetrik çubuğun ilk iki boyutsuz doğal frekans değerlerini göstermektedir. Çubuğun eğrilik yarıçapı,

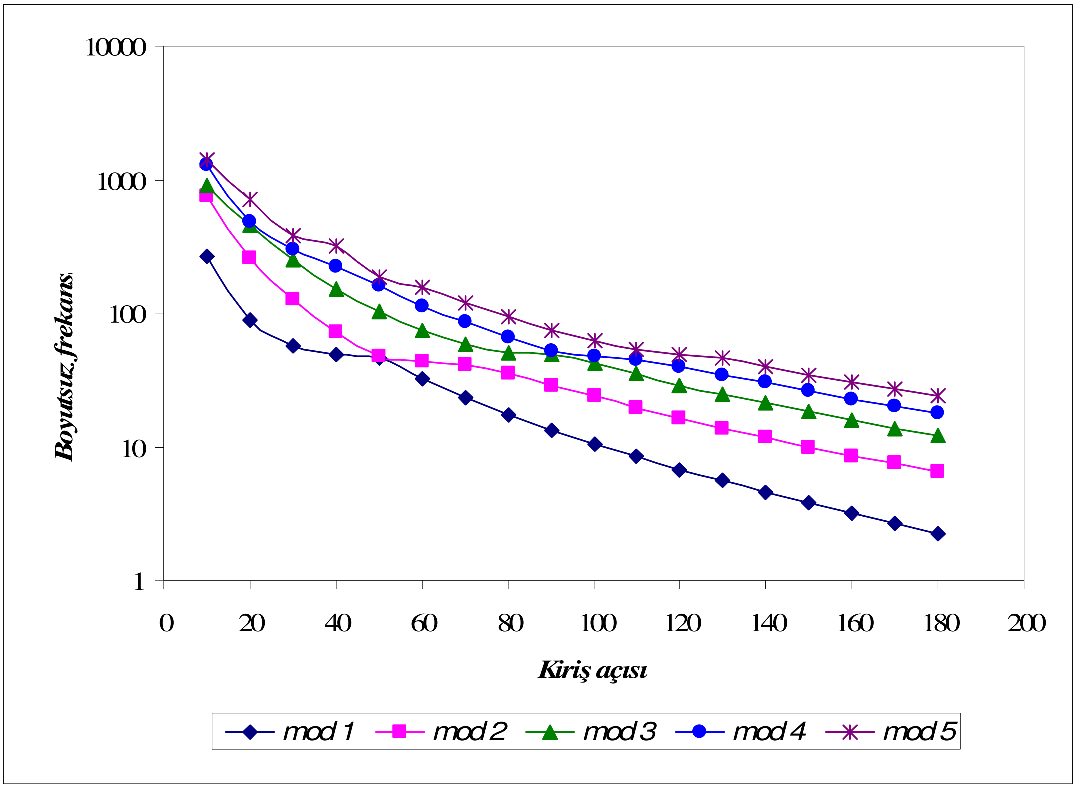
$$R = \frac{R_0}{\cos\phi} \tag{5.7}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Mevcut çalışma ile [21]'de elde edilen birinci frekans değerleri ile sabit-ankastre şartında [23]'de elde edilen değerler oldukça uyumludur. İkinci frekans değerleri ise, diğer sınır şartlarında [23] ile birbirine çok yakındır.

Çizelge 5.5 : Spiral eksenli simetrik çubuk için elde edilen birinci ve ikinci boyutsuz frekans değerlerinin $(c = \omega R^2 \phi_t^2 (\mu / EI_b)^{1/2})$ karşılaştırılması.

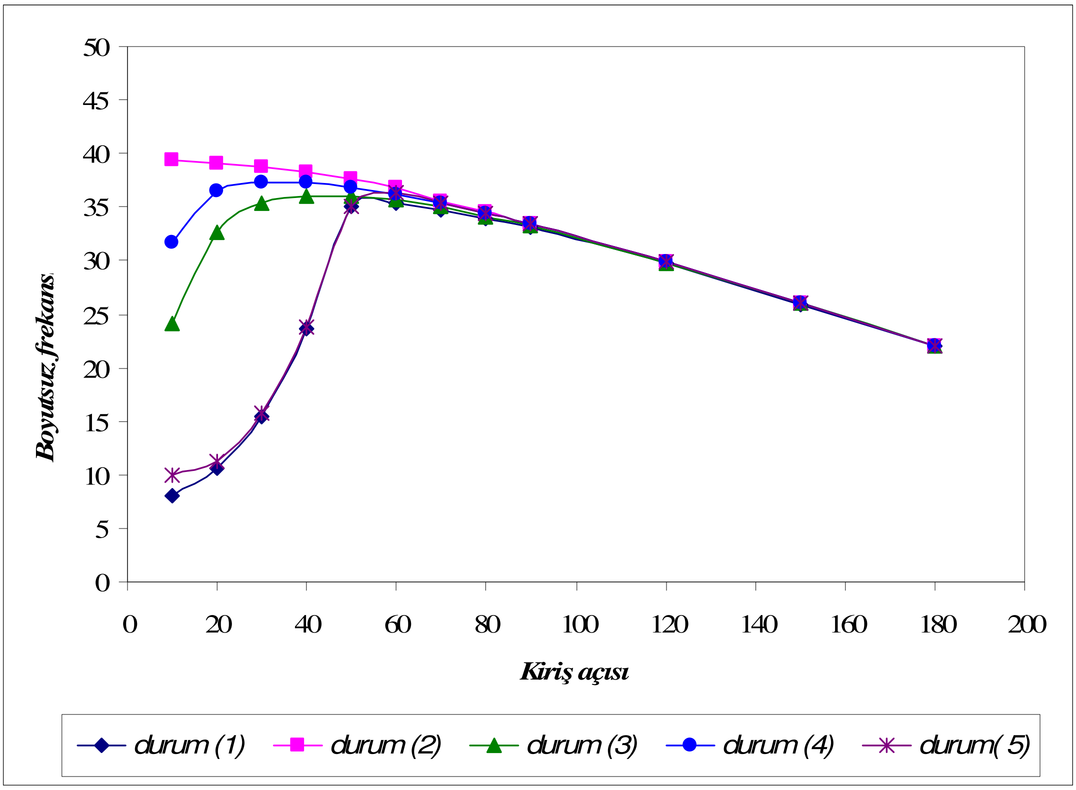
			$\eta = 0.1$			$\eta = 0.2$		
			Bu Çalışma	**[21]**	**[23]**	**Bu Çalışma**	**[21]**	**[23]**
		ϕ_t	**(2)**	**(2)**	**RM**	**(2)**	**(2)**	**RM**
A - A	**1**	10	65.375	65.22	61.81	69.254	68.93	62.89
		20	64.625	64.49	61.1	68.472	68.17	62.17
		30	63.387	63.27	59.93	67.178	66.91	60.99
		40	61.662	61.59	58.31	65.386	65.16	59.35
	-							
	2	10	117.397		117.32	124.031		123.91
		20	116.417		116.36	123.006		122.9
		30	114.790		114.77	121.289		121.23
		40	112.510		112.55	118.903		118.9
S - S	**1**	10	41.275	41.18	39.47	43.195	42.99	39.96
		20	40.724	40.64	38.08	42.628	42.44	39.43
		30	39.816	39.74	36.88	41.691	41.52	38.55
		40	38.566	38.52	36.08	40.402	40.26	37.35
	-							
	2	10	88.621		88.55	93.134		93.01
		20	87.831		87.78	92.308		92.21
		30	86.512		86.5	90.934		90.86
		40	84.677		84.7	89.010		88.99
S- A	**1**	10	52.393	52.27	52	55.185	54.93	54.69
		20	51.746	51.64	51.45	54.515	54.27	54.03
		30	50.678	50.59	50.43	53.408	53.19	53.06
		40	49.205	49.15	49.07	51.882	51.70	51.61
		50	47.344	47.32	47.24	49.946	49.81	49.8
		60	45.123	45.15	45.16	47.637	47.55	47.66

Şekil 5.7, Şekil 5.4'deki gibi sürekli değişken kesitli çember eksenli asimetrik çubuğun, tüm etkilerin dahil edilmesi durumunda elde edilen frekans değerlerinin kiriş açısı ile değişimini göstermektedir. Sınır şartı, sabit-sabit mesnetli olarak seçilmiş, ilk beş mod için boyutsuz frekans değerleri hesaplanmıştır. Şekil 5.5'deki simetrik çubuğa ait grafikte olduğu gibi, mod geçişi burada da ortaya çıkmaktadır.



Şekil 5.7 : Sabit-sabit mesnetli asimetrik çubuğun ilk beş doğal frekansları.

Şekil 5.8'de, Şekil 5.4'deki gibi sürekli değişken kesitli çember eksenli çubuğun, sabit-sabit mesnet sınır şartında, farklı kiriş açılarında, beş farklı etki durumu için birinci boyutsuz doğal frekansları hesaplanmıştır. Beş farklı etki durumu, Şekil 5.6'da simetrik çubuk için hesaplanan durumlar ile aynıdır. Burada da, özellikle küçük kiriş açılarında, tüm etkileri dahil eden (1) ve tüm etkileri ihmal eden (2) durumlarda, frekans değerlerinin birbirinden oldukça farklı olduğu görülmektedir. Kiriş açısı büyüdükçe bütün durumlarda frekans değerlerinin neredeyse birbiriyle aynı olduğu görülmektedir.



Şekil 5.8 : Sabit-sabit mesnetli asimetrik çubuğun beş farklı durum için hesaplanan birinci doğal frekansları.

Çizelge 5.6, Şekil 5.4'deki gibi asimetrik geometriye sahip çubuğun boyutsuz ilk doğal frekans değerlerini, çeşitli kiriş açıları ve mesnet şartlarında göstermektedir. Referans çalışmalardaki çubuk çember eksenlidir ve geometrisi,

$$h(\phi) = h_0 \left(1 + 2\eta(\phi / \phi_t)\right) \qquad -\phi_t / 2 \leq \phi \leq \phi_t / 2 \tag{5.8}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Çizelge 5.6'da tüm etkilerin ihmal edildiği (2) durumda, mevcut çalışma ile [22] ve [18]'de genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemi (generalized differential quadrature rule-GDQR) ile elde edilen sonuçlar birbirine çok yakındır. [19]'da Rayleigh-Ritz (RR) ve [18]'de hücre ayrıklaştırma (cell discretization method-CDM) yöntemiyle elde edilen sonuçlar ise kiriş açısı arttıkça mevcut çalışma ile uyumlu hale gelmektedir. Tüm etkilerin dahil edilmesi (1) durumunda ise sonuçlar, [22] ile tüm sınır şartlarında gayet uyumludur. Kiriş açısı arttıkça özellikle ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır koşullarında, (1) ve (2) durumlarında elde edilen sonuçların neredeyse birbiriyle aynı olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.6 : Asimetrik çubuk için elde edilen birinci boyutsuz frekans değerlerinin ($c = \omega R^2 (\mu / EI_b)^{1/2}$) karşılaştırılması ($\eta = 0.1$) .

			Bu Çalışma		[22]		[18]	[19]	[18].[19]
		ϕ_t	**(1)**	**(2)**	**(1)**	**(2)**	**GDQR**	**R-R**	**CDM**
A-A	**1**	10	417.183	2016.93	417.67	2016.98	2016.98	1999.9	2000.5
		20	152.86	502.290	153.28	502.304	502.303	498.33	499.44
		30	83.466	221.818	83.73	221.821	221.821	220.06	220.56
		40	59.088	123.667	59.28	123.669	123.669	122.7	122.97
		50	49.424	78.259	49.39	78.257	78.257	77.632	77.81
		60	44.557	53.608	44.68	53.607	53.607	53.172	53.3
		80	27.389	29.145	27.95	29.145	29.145		
S - S	**1**	10	266.50	1290.45	267.09	1290.48	1290.48	1286.5	1287.8
		20	87.579	320.756	87.75	320.762	320.763	319.09	320.11
		30	56.375	141.200	56.45	141.201	141.201	141.05	140.92
		40	48.568	78.371	48.63	78.373	78.373	78.069	78.22
		50	45.930	49.311	45.66	49.312	49.312	49.124	49.218
		60	32.194	33.545	32.51	33.546	33.546	33.43	33.484
		80	17.419	17.920	17.59	17.920	17.920		
S - A	**1**	10	348.081	1642.75	348.21	1642.61		1637.5	1636.7
		20	120.293	408.817	120.48	408.78		407.31	407.32
		30	68.478	180.327	68.58	180.30		179.86	179.67
		40	52.540	100.37	52.59	100.35		100.17	100.01
		50	46.482	63.379	46.54	63.373		63.24	63.152
		60	40.016	43.305	40.43	43.300		43.151	43.151
A - Sr	**1**	10	92.084	101.483	92.24	101.67	101.67		
		20	24.749	25.418	24.79	25.46	25.467		
		30	11.188	11.332	11.21	11.35			
		40	6.354	6.403	6.371	6.415	6.41		
		50	4.107	4.1209	4.110	4.129			
		60	2.861	2.882	2.878	2.887	2.88		
		70	2.132	2.1341	2.134	2.138			
		80	1.649	1.650	1.650	1.653	1.65		
Sr - Sr	**1**	10	518.86	733.209	519.05	733.39	733.39		
		20	161.11	182.057	161.95	182.74	182.74		
		30	75.922	80.127	76.16	80.77			
		40	43.367	45.082	43.57	45.10	45.101		
		50	27.734	28.514	27.96	28.59			
		60	19.318	19.609	19.34	19.64	19.646		
		70	14.072	14.248	14.09	14.25			
		80	10.665	10.761	10.67	10.77	10.772		

Çizelge 5.6'daki çalışmanın devamı olarak, Çizelge 5.7'de, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarındaki çubuğun ikinci doğal frekanslarının kesit alanının değişim oranı göre karşılaştırması gösterilmektedir. Referans çalışmalardaki sonuçlar ile mevcut çalışmadaki sonuçlar oldukça uyumludur. Kiriş açısı arttıkça (1) durumu ve (2) durumu ile elde edilen sonuçlar arasındaki fark azalmaktadır. η kesit alanı değişim oranının artmasıyla, simetrik çubuktaki durumun aksine, frekans değerlerinin azaldığı görülmektedir.

Çizelge 5.7 : Asimetrik çubuk için elde edilen ikinci boyutsuz frekans değerlerinin $(c = \omega R^2 (\mu / EI_b)^{1/2})$ karşılaştırılması.

			$\eta = 0.1$					$\eta = 0.2$	
			Bu Çalışma		**[22]**		**[18]**	**Bu Çalışma**	**[18]**
		ϕ_t	**(1)**	**(2)**	**(1)**	**(2)**	**GDQR**	**(2)**	**GDQR**
A - Sr	**2**	10	409.173	691.935	409.37	692.21	692.20	660.294	660.95
		20	142.068	171.029	142.12	171.11	171.10	163.022	163.21
		30	67.631	74.5696	68.001	74.682		70.9382	
		40	38.517	40.9899	38.747	41.009	41.008	38.9263	38.973
		50	24.426	25.4818	24.541	25.497		24.1327	
		60	16.553	17.1286	16.673	17.139	17.139	16.1857	16.210
		70	11.842	12.1407	11.907	12.157		11.3478	
		80	8.819	8.9694	8.8290	8.9729	8.9728	8.4279	8.4461
Sr - Sr	**2**	10	901.956	2020.47	902.73	2020.5	2020.5	2011.49	2011.7
		20	379.462	504.130	379.74	504.30	504.30	501.876	502.11
		30	192.125	223.393	192.34	223.51		221.932	
		40	114.117	123.816	114.29	125.24	125.24	123.210	124.70
		50	75.013	79.6754	75.039	79.766		79.182	
		60	52.705	55.0105	52.720	55.064	55.064	54.7831	54.829
		70	38.877	40.0962	38.889	40.173		39.943	
		80	29.751	30.4375	29.754	30.512	30.512	30.3128	30.385

Çizelge 5.8'de, Gutierrez ve diğerleri [23], çember eksenli asimetrik çubukların boyutsuz frekanslarını, Ritz metodu (RM) ve sonlu elemanlar yöntemi (finite element method – FEM) ile elde etmişlerdir. Çalışmada, tüm etkiler ihmal edilmiştir. Aynı çalışmayı Tüfekçi ve Yiğit [22], tüm etkileri dahil ve ihmal ederek ele almışlardır. Referans çalışmalarda, çubuğun kesit yüksekliğinin değişimi,

$$h(\phi) = h_0 \left(1 - 2\eta(\phi / \phi_t)\right) \qquad -\phi_t / 2 \le \phi \le \phi_t / 2 \tag{5.9}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Çizelge 5.8’de, $\eta = 0.1$ alındığında, birinci boyutsuz frekans değerleri karşılaştırılmıştır. Mevcut çalışmada etkilerin ihmal edildiği (2) durumunda, sonuçların [22] ve [23] ile çok yakın olduğu görülmektedir. (1) durumunda ise, [22]’deki ve bu çalışmadaki değerler arasında farklar olduğu görülmektedir. (1) ve (2) durumları karşılaştırıldığında ise, bu çizelgelerden, söz konusu etkilerin ihmal edilmesinin hatalı sonuçlara yol açtığı açıkça görülmektedir.

Çizelge 5.8 : Asimetrik çubuk için elde edilen birinci boyutsuz frekans değerlerinin ($c = \omega R^2 \phi_t^2 (\mu / EI_b)^{1/2}$) karşılaştırılması ($\eta = 0.1$).

			Bu Çalışma		**[22]**		**[23]**	**[23]**
		ϕ_t	**(1)**	**(2)**	**(1)**	**(2)**	**RM**	**FEM**
A - A	**1**	10	12.708	61.439	15.47	61.44	60.92	
		20	18.625	61.202	20.89	61.20	60.72	61.23
		30	22.813	60.812	26.17	60.81	60.33	
		40	28.799	60.274	35.02	60.27	59.8	60.32
		50	37.534	59.598	47.86	59.59	59.12	
		60	48.862	58.788	56.62	58.78	58.31	58.86
S - S	**1**	10	8.005	39.309	8.928	39.31	39.19	
		20	10.639	39.083	12.11	39.08	38.88	39.09
		30	15.482	38.710	19.50	38.71	38.67	
		40	23.722	38.198	31.46	38.19	38.05	38.23
		50	34.978	37.552	36.68	37.55	37.41	
		60	35.699	36.786	36.18	36.78	36.66	36.87
S- A	**1**	10	10.176	49.061	12.39	50.03	48.82	
		20	13.356	48.829	16.28	49.80	48.58	49.71
		30	16.174	48.446	22.22	49.43	48.24	
		40	24.989	47.918	32.48	48.91	47.74	48.89
		50	40.567	47.253	44.92	48.26	47.07	
		60	43.885	46.461	46.07	47.48	46.21	47.50

Çizelge 5.9, parabol eksenli asimetrik çubuğun birinci boyutsuz doğal frekans değerlerini göstermektedir. Çubuğun geometrisi (5.9) eşitliğindeki gibi, çubuk eğrilik yarıçapı ise (5.6) denklemindeki gibi alınmıştır.

Çizelge 5.9’daki karşılaştırma, tüm etkilerin ihmal edildiği duruma göre yapılmıştır. Mevcut çalışma ile [21] ve [23]’de elde edilen birinci frekans değerleri oldukça uyumludur. Kesit alanı değişim oranının artmasıyla, bütün mesnet şartlarında frekansların azaldığı görülmektedir.

Çizelge 5.9 : Parabol eksenli asimetrik çubuk için elde edilen birinci boyutsuz frekans değerlerinin $(c=\omega R^2\phi_t^2(\mu/EI_b)^{1/2})$ karşılaştırılması.

			$\eta = 0.1$				$\eta = 0.2$			
			Bu Çalışma	**[21]**	**[23]**	**[23]**	**Bu Çalışma**	**[21]**	**[23]**	**[23]**
		ϕ_t	**(2)**	**(2)**	**RM**	**FEM**	**(2)**	**(2)**	**RM**	**FEM**
A - A	**1**	10	60.957	61.06	60.53		60.493	60.68	60.46	
		20	59.29	59.43	59.05	59.37	58.837	59.06	58.85	58.94
		30	56.563	56.76	56.49		56.129	56.41	56.21	
		40	52.856	53.13	52.91	53.1	52.449	52.80	52.65	52.72
		50	48.278	48.64	48.41		47.909	48.34	47.08	
		60	42.984	43.44	42.98	43.44	42.647	43.17	42.7	43.12
S - S	**1**	10	39.001	39.06	38.88		38.722	36.84	38.57	
		20	37.862	37.95	37.73	37.91	37.590	37.73	37.52	37.63
		30	36.008	36.13	36		35.747	35.92	35.77	
		40	33.503	33.68	33.46	33.67	33.259	33.48	33.22	33.42
		50	30.438	30.67	30.33		30.214	30.49	30.06	
		60	26.929	37.21	26.68	27.25	26.730	27.05	26.38	27.04
S- A	**1**	10	48.674	48.76	48.49		47.830	47.99	47.74	
		20	47.293	47.41	47.15	47.27	46.470	46.66	46.47	46.48
		30	45.042	45.20	45.07		44.254	44.49	44.36	
		40	41.987	42.21	42.14	42.19	41.249	41.54	41.28	41.49
		50	38.235	38.53	38.26		37.558	37.91	37.52	
		60	33.919	34.29	33.7	34.3	33.314	33.73	32.98	33.73

Çizelge 5.10, spiral eksenli asimetrik çubuğun birinci boyutsuz doğal frekans değerlerini göstermektedir. Çubuğun geometrisi (5.9) eşitliğindeki gibi, çubuk eğrilik yarıçapı ise (5.7) denklemindeki gibi alınmıştır.

Çizelge 5.10'daki karşılaştırma, tüm etkilerin ihmal edildiği duruma göre yapılmıştır. Mevcut çalışma ile [21] ve [23]'de elde edilen birinci frekans değerleri oldukça uyumludur. Kesit alanı değişim oranının artmasıyla, bütün mesnet şartlarında frekansların azaldığı görülmektedir.

Çizelge 5.10 : Spiral eksenli asimetrik çubuk için elde edilen birinci boyutsuz frekans değerlerinin $(c = \omega R^2 \phi_t^2 (\mu / EI_b)^{1/2})$ karşılaştırılması.

			$\eta = 0.1$				$\eta = 0.2$			
			Bu Çalışma	**[21]**	**[23]**	**[23]**	**Bu Çalışma**	**[21]**	**[23]**	**[23]**
		ϕ_t	**(2)**	**(2)**	**RM**	**FEM**	**(2)**	**(2)**	**RM**	**FEM**
A - A	**1**	10	61.278	61.37	60.79		60.811	60.99	60.79	
		20	60.560	60.66	60.13	60.6	60.099	60.29	60.06	60.17
		30	59.375	59.50	58.99		58.922	59.13	58.92	
		40	57.735	57.89	57.55	57.85	57.295	57.53	57.41	57.43
		50	55.656	55.84	55.57		55.230	55.50	55.35	
		60	53.164	53.39	53.21	53.39	52.757	53.07	52.92	53.01
S - S	**1**	10	39.206	39.26	39.09		38.926	39.04	38.78	
		20	38.673	38.74	38.57	38.69	38.396	38.52	38.36	38.41
		30	37.796	37.87	37.73		37.524	37.66	37.52	
		40	36.589	36.68	36.55	36.67	36.324	36.47	36.22	36.4
		50	35.075	35.19	35.1		34.819	34.99	34.87	
		60	33.278	33.42	33.22	33.45	33.034	33.22	32.98	33.2
S- A	**1**	10	48.932	49.01	48.74		48.082	48.24	48	
		20	48.314	48.40	48.16	48.26	47.471	47.64	47.41	47.45
		30	47.294	47.40	47.15		46.463	46.64	46.39	
		40	45.886	46.01	45.86	45.98	45.071	45.27	45.07	45.21
		50	44.112	44.27	44.09		43.317	43.54	43.26	
		60	41.997	42.19	42.04	42.2	41.227	41.48	41.18	41.47

Shin ve diğerleri [24], çember eksenli asimetrik çubuğun ilk iki boyutsuz doğal frekans değerlerini, tüm etkileri ihmal ederek, diferansiyel transformasyon metodu (differential transformation method - DTM) ve genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemi (generalized differential quadrature rule-GDQR) ile hesaplamışlardır. Çalışmada, çubuk geometrisinin değişimi, kuadratik bir fonksiyon,

$$h(\phi) = h_0 \left(1 + 2\eta (\phi / \phi_t)\right)^2 \quad -\phi_t / 2 \le \phi \le \phi_t / 2 \qquad \textbf{(5.10)}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Aynı çalışmayı, Tüfekçi ve Yiğit [22], (1) ve (2) durumları için incelemişlerdir. Çizelge 5.11'de mevcut çalışma ve referans çalışmalarda elde edilen boyutsuz doğal frekans değerleri verilmektedir. Mevcut çalışmada (2) durumunda elde edilen frekans değerleri ile [22] ve [24]'de elde edilen sonuçlar birbirine çok yakındır. (1) durumunda elde edilen değerler [22] ile uyumlu olmasına rağmen, (2) durumu ile arasında açık farklar görülmektedir. Bu değerler arasındaki farklar, kiriş açısının artmasıyla azalmaya başlamıştır. Çizelge 5.11'den, söz konusu etkilerin ihmal edilmesinin özellikle küçük kiriş açılarında hatalı sonuçlara yol açtığı görülmektedir.

Çizelge 5.11 : Asimetrik çubuk için elde edilen birinci ve ikinci boyutsuz frekans değerlerinin $(c = \omega R^2 (\mu / EI_b)^{1/2})$ karşılaştırılması $(\eta = 0.1)$.

			Bu Çalışma		[22]		[24]	[24]
		ϕ_t	(1)	(2)	(1)	(2)	DTM	GDQM
A - A	1	10	417.795	2012.206	417.810	2012.18	2012.2	2012.2
		20	153.291	501.1233	153.302	501.118	501.12	501.12
		30	83.720	221.3097	83.729	221.304	221.30	221.30
		40	59.263	123.3891	59.269	123.386	123.39	123.39
		50	49.373	78.0874	49.378	78.0826	78.082	78.082
		60	44.368	53.4947	99.135	53.4911	53.491	53.491
	-							
	2	10	832.601	3621.069	832.414	3622.01	3622.0	3622.0
		20	335.101	903.9165	335.042	904.183	904.18	904.18
		30	177.115	400.7542	177.113	400.884	400.88	400.88
		40	107.335	224.6648	107.334	224.733	224.73	224.73
		50	71.009	143.1552	71.0099	143.203	143.20	143.20
		60	48.997	98.8899	144.114	98.9199	98.920	98.920
S - S	1	10	264.497	1285.127	264.596	1285.10	1285.1	1285.1
		20	87.003	319.4308	87.134	319.425	319.43	319.43
		30	56.275	140.616	56.204	140.611	140.61	140.61
		40	48.423	78.047	48.461	78.0455	78.046	78.046
		50	45.045	49.1066	106.303	49.1058	49.106	49.106
		60	32.339	33.4058	32.341	33.4052	33.405	33.405
	-							
	2	10	762.902	2749.637	762.856	2750.39	2750.4	2750.4
		20	260.994	686.0489	260.958	686.247	686.25	686.25
		30	126.903	303.9009	126.847	304.001	304.00	304.00
		40	73.492	170.1646	73.454	170.219	170.22	170.22
		50	47.955	108.2684	172.160	108.301	108.30	108.30
		60	44.218	74.6452	44.2175	74.671	74.671	74.671

5.2 Düzlem Dışı Serbest Titreşim Probleminin Tanımı

Çubuk teorisinin v, Ω_t, Ω_n, M_n, M_t, F_b olarak belirlenen altı bilinmeyeni, eğri eksenli düzlemsel çubuğun kendi düzlemindeki titreşimini ifade eden (3.38) eşitliğinde belirlenmiştir. Bu eşitlikler birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımıdır ve (4.11) denklemlerinde matris şeklinde ifade edilmiştir. Bölüm 4.2'de, bu diferansiyel takımının yaklaşık çözümü için, matrikant yöntemi kullanılarak, mesnetleme şartları belirli olan sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubuğun doğal frekanslarının elde edilebileceği bir yöntem sunulmuştur. Bu bölümde, sürekli değişken kesitli ve farklı eksen eğriliklerine sahip çubukların düzlem dışı doğal frekansları, düzlem içi titreşim problemlerinde olduğu gibi, (4.21) eşitliğinden kökler bulunarak elde edilmiştir.

Sürekli değişken dikdörtgen kesitli çember eksenli bir çubuğun düzlem dışı titreşim problemini ele alırsak düzlem içi titreşim probleminden farklı olarak, çubuk kesitinin normal eksene göre eylemsizlik momenti I_n,

$$I_n(\phi) = \frac{h(\phi)(b)^3}{12} \tag{5.11}$$

eşitliğindeki gibi, polar eylemsizlik momenti I_p,

$$I_p(\phi) = \frac{h(\phi)(b)^3}{12} + \frac{b(h(\phi))^3}{12} \tag{5.12}$$

şeklinde alınacaktır. Burulma eylemsizlik momenti J ise, kesitte çarpılma olmaması durumunda yaklaşık olarak,

$$J = \frac{WH^3}{3}\left[1 - 0.63\frac{H}{W}\left(1 - \frac{H^4}{12W^4}\right)\right] \qquad W \geq H \tag{5.13}$$

şeklinde tanımlanır [15]. Burada *W, H* çubuk kesitinin genişlik ve yükseklik ölçüsünü gösteren değişkenlerdir. Bazı çalışmalarda ise J ifadesi,

$$J = I_p \tag{5.14}$$

şeklinde polar eylemsizlik momentine eşit olarak alınmaktadır. Düzlem dışı titreşim problemlerinde narinlik oranı,

$$\lambda = \frac{R}{i} = \frac{R}{\sqrt{\frac{I_n}{A}}} \tag{5.15}$$

şeklinde ifade edilir. k_b sabiti ise Çizelge 3.1'deki değerler gibi alınabilir. Diğer ifadeler, dikdörtgen kesitli çubuğun düzlem içi titreşim problemlerindeki gibidir.

Çubuk kesitinin yüksekliği h ve boyutsuz frekans c literatürdeki çalışmalarda farklı şekilde ifade edilmektedir.

Hesaplamalarda, düzlem içi problemlerde olduğu gibi, matrikant üç terimli olarak alınıp, çözümün sınırları 50 aralığa bölünerek yakınsama yapıldığında yeterli sonuca ulaşmak mümkündür.

Çubukların düzlem dışı doğal frekansları, ankastre-ankastre (A-A), sabit-sabit (S-S), sabit-ankastre (S-A), ankastre-serbest (A-Sr), serbest-serbest (Sr-Sr) olmak üzere beş faklı sınır şartı göz önünde bulundurularak incelenebilir. Çubukların iki uç noktası (A ve B ucu) için bu sınır koşullarından gelen 6 adet eşitlik (4.21) eşitliğinde gösterilmiştir. Bu sınır şartlarıyla frekans değerleri hesaplanırken, çubuğun, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal ya da dahil eden durumları aşağıdaki rakamlarla gösterilebilir:

(1) Tüm etkiler: Bu kabulde Euler-Bernoulli çubuk teorisinde ihmal edilen bütün etkiler, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınarak, frekans değerleri hesaplanır.

(2) Etkiler ihmal: Euler-Bernoulli çubuk teorisine uygun olarak, çubuğa etkiyen kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal edilerek frekans değerleri hesaplanır.

(3) Kayma deformasyonu: Sadece kayma deformasyonu etkisi göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

(4) Dönme eylemsizliği: Sadece eğilme nedeniyle ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkisi göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

(5) Dönme eylemsizliği: Sadece burulma nedeniyle ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkisi göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

5.2.1 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Literatürde, düzlem dışı titreşim problemleriyle ilgili çalışmalarda genellikle sabit kesitli çubuklar göz önüne alınmıştır. Sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubuğun düzlem dışı titreşimlerini inceleyen çalışma sayısı oldukça azdır.

Huang ve diğerleri [28], sürekli değişken eliptik eksenli dairesel kesitli simetrik bir çubuğun düzlem dışı doğal frekanslarını, dinamik katılık matrisi metodunu (dynamic stiffness matrix method) kullanarak elde etmişlerdir. Çalışmada, tüm etkileri hesaba dahil eden durumu göz önüne almışlardır. Aynı çalışmayı, Suzuki ve diğerleri [29] modal süperpozisyon tekniğini (modal superposition technique) kullanarak ele almışlardır. Çalışmada, tüm etkileri ihmal eden durum için hesaplama yapılmıştır. Bu çalışmada incelenen çubuk dairesel kesitlidir ve kesit çapı,

$$d(\phi) = d_0\left(1 + 0.2\phi^2\right) \quad -\phi_t/2 \le \phi \le \phi_t/2 \tag{5.16}$$

Şeklinde tanımlanmıştır. Burada d, çubuk kesitinin çapıdır. Dairesel kesitli çubuğun alanı,

$$A(\phi) = \pi(d(\phi)/2)^2 \tag{5.17}$$

şeklindedir. Çubuğun normal eksene göre eylemsizlik momenti,

$$I_n(\phi) = \frac{\pi(d(\phi))^4}{64} \tag{5.18}$$

olarak, polar eylemsizlik momenti,

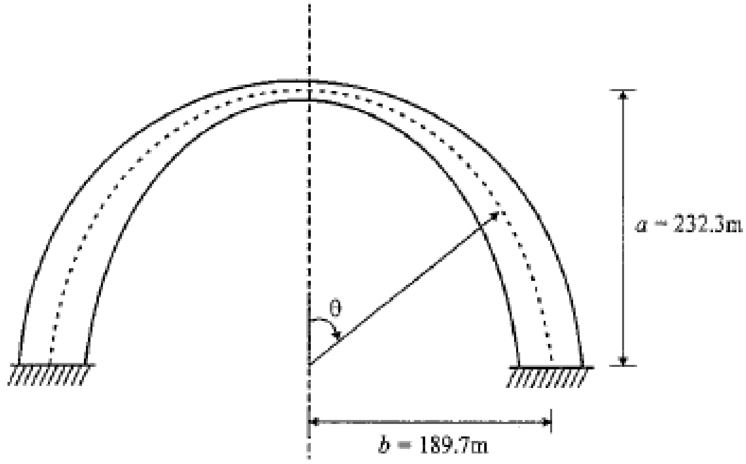
$$I_p(\phi) = \frac{\pi(d(\phi))^4}{32} \tag{5.19}$$

şeklinde ifade edilir. Çubuk kesitinde çarpılma olmadığı kabul edilerek, burulma eylemsizlik momenti (5.14) eşitliğindeki gibi alınmıştır.

Eliptik eksen eğrisinin yarıçapı ise,

$$R = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi}} \tag{5.20}$$

şeklinde alınabilir. Burada a ve b, çubuğun eksen eğrisinin yükseklik ve genişliğini gösteren rastgele değişkenlerdir. Bu örnekteki a ve b değerleri Şekil 5.9'da gösterilmiştir.



Şekil 5.9 : Eliptik eksenli simetrik çubuk geometrisi.

Örnekte, eliptik eksen eğrisinin başlangıç yarıçapı yaklaşık bir metot tanımlanarak $R_0 = 300$ m olarak alınmıştır. Çubuğun orta noktası referans kabul edilmiş ve buradaki kesit çapı $d_0 = 6$ m, poisson oranı $\nu = 0.3$ alınarak, $\phi_t = 180^o$ kiriş açıklığında, ankastre-ankastre mesnet şartında çubuğun ilk altı boyutsuz doğal frekansı elde edilmiştir.

Çizelge 5.12, mevcut çalışma ve referans çalışmada elde edilen bu frekans değerlerini göstermektedir. Mevcut çalışmada tüm etkiler hesaba dahil edilmiştir. Referans çalışmalarda elde edilen değerler ile mevcut çalışmada elde edilen değerler arasında küçük farklar görülmesine rağmen, sonuçlar birbirine yakındır.

Çizelge 5.12 : Eliptik eksenli simetrik çubuk için elde edilen düzlem dışı boyutsuz frekans değerlerinin $(c = (\omega^2 R_0^{\ 4} (\mu / EI_n))^{1/4})$ karşılaştırılması.

	$\phi_t = 180^o$			
	MOD	**Bu Çalışma**	**[30]**	**[31]**
A - A	1	1.7447	1.710	1.711
	2	2.6849	2.663	2.665
	3	3.7436	3.728	3.732
	4	4.7843	4.815	4.824
	5	5.8726	5.906	5.921
	6	6.9185	6.994	7.018

6. DENEYSEL TİTREŞİM ANALİZİ VE TEORİK ANALİZ

Deneysel titreşim analizi ya da modal analiz çalışmaları ile yapıların dinamik karakteristikleri olan doğal frekansları, mod şekilleri ve sönüm oranları elde edilebildiğinden, teorik analizlerin gerçeğe ne kadar yaklaşabildiği görülebilmekte, yapılan kabullerin gerçekte sağlanıp sağlanamadığı tespit edilebilmektedir.

Günümüzde bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişime bağlı olarak, bilgisayar destekli ölçüm cihazları, dijital sinyal işleme tekniği, kullanılan yazılımlar da hızla gelişmekte ve bu sayede deneysel titreşim analizi daha hızlı ve kolay bir şekilde yapılabilmektedir. Deneysel titreşim analizinin yaygın ve uygulanabilir bir hal alması, yapıların dinamik davranışlarının anlaşılmasına önemli katkı sağlamaktadır.

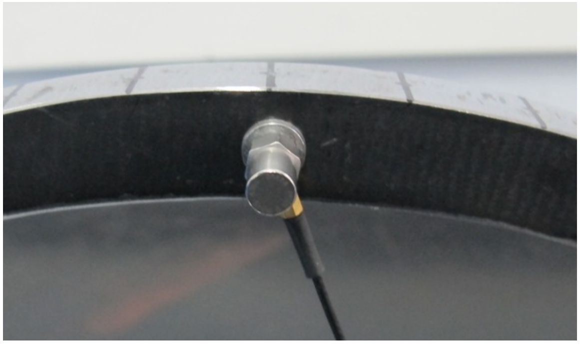
Deneysel çalışmalar, teorik analizin gerçeğe ne kadar yaklaşabildiğini gösterse de, deneyin de kendi içinde ölçme hataları olabileceğinden, fiziksel bir büyüklüğün gerçek değerini ölçebilmek pek mümkün değildir. Ölçme hatalarının büyüklüğü, deneyi yapan kişinin dikkati, ölçme becerisi, kullanılan deney teçhizatının hassasiyeti ve deney ortamındaki çevresel etkilere bağlı olarak değişebilmektedir. Bunların dışında, deneyde kullanılan parçaların malzemeleri, malzemenin mekanik özellikleri ve mesnet, bağlantı elemanları gibi yardımcı ekipmanların durumu da deney sonuçlarına etki eden faktörler arasında olabilir.

Bu çalışmada, sürekli değişken kesitli çember eksenli simetrik ve asimetrik çubukların deneysel titreşim ölçümleri ile çubukların doğal frekansları elde edilmiş, sonuçlar, teorik analiz ve analitik çözüm sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

6.1 Deneysel Titreşim Analizi

Deneysel titreşim analizi çalışmasında, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartları sağlanmış, düzlem içi ve düzlem dışı titreşim hareketi için veriler elde edilmiştir.

Düzlem içi ve düzlem dışı titreşim sinyallerinin algılanması amacıyla, tek eksenli piezoelektrik ivmeölçer (Brüel&Kjaer, 4507B tip), çubuğun kendi düzlemi içine ve kendi düzlemine dik doğrultularına yapıştırılarak ölçüm yapılmıştır (Şekil 6.1). Yüksek hassasiyete sahip olan bu ivmeölçerler ile oldukça geniş bir frekans aralığında titreşim ölçümü yapılabilmiştir.



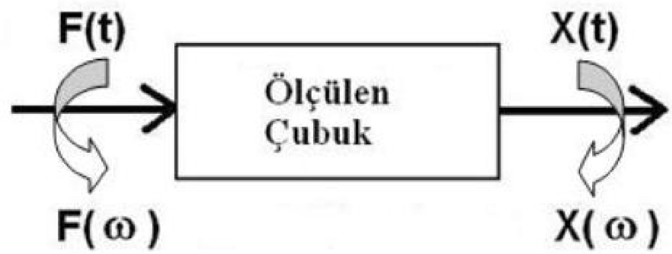
Şekil 6.1 : Deneyde kullanılan piezoelektrik ivmeölçer.

Çubuğa uygulana ilk hareket, darbe etkisi şeklinde uygulanmıştır ve bu iş için özel tasarlanan Şekil 6.2'deki gibi bir çekiç (Endevko, 2302–10 tip) kullanılmıştır.

Şekil 6.2 : Deneyde kullanılan darbe çekici.

Çekicin ucunda bulunan sinyal algılayıcı sayesinde, uygulanan kuvvet ölçülebilmektedir. Bu kuvvetin ölçümü şu şekilde yapılmaktadır:

Çubuğa uygulanan bu darbe etkisi (impact), zaman ortamında ölçülür. Uygulanan bu kuvvet altında, çubuk; sınır koşullarına ve malzeme özelliklerine bağlı olarak bir titreşim hareketi yapar. Çubuğun bu etkiye gösterdiği tepki (response), çubuğa bağlanan ivmeölçerler ile yine zaman ortamında ölçülür. Etki ve tepki fonksiyonları, Fourier dönüşümü (Fast Fourier Transform – FFT) kullanılarak zaman ortamından frekans ortamına dönüştürülür (Şekil 6.3).



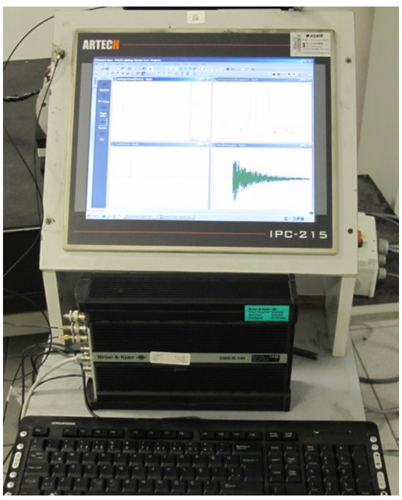
Şekil 6.3 : Etki ve tepki fonksiyonlarının zaman ortamından frekans ortamına dönüştürülmesi.

Çubuğa ait frekans cevap fonksiyonu (FRF), Fourier dönüşümleri yapılmış tepki fonksiyonunun, etki fonksiyonuna bölünmesiyle elde edilir [33]:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \tag{6.1}$$

Burada, $X(\omega)$; frekans ortamındaki tepki fonksiyonunu, $F(\omega)$; frekans ortamındaki etki fonksiyonunu, $H(\omega)$; frekans cevap fonksiyonunu göstermektedir.

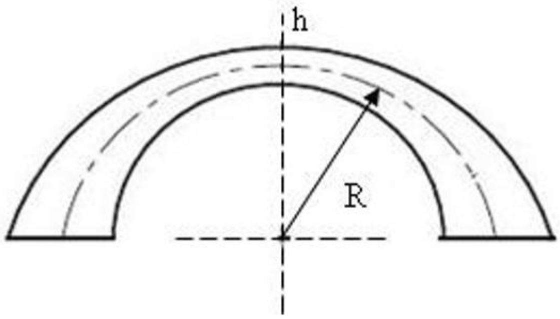
Deneysel titreşim analizinde, ivmeölçer ve çekiçten gelen sinyallerin toplanarak işlenmesi için, PULSE (Brüel&Kjaer) sinyal toplama ve işleme modülü kullanılmıştır (Şekil 6.4). Elde edilen tüm veriler, FRF diyagramlarına aktarılmakta ve farklı formatlarda saklanabilmektedir. FRF fonksiyonları işlenerek, çubuğa ait, rezonans frekanslarını, sönüm oranlarını ve mod şekillerini elde etmek mümkündür.



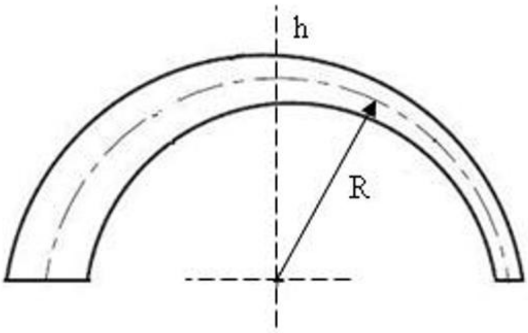
Şekil 6.4 : Deneyde kullanılan sinyal işleme ve toplama modülü.

6.1.1 Deney çalışması

Deneylerde, asimetrik ve simetrik geometriye sahip iki adet, sürekli değişken dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuklar kullanılmıştır (Şekil 6.5 ve 6.6).



Şekil 6.5 : Deneyde kullanılan simetrik çubuğun geometrisi.



Şekil 6.6 : Deneyde kullanılan asimetrik çubuğun geometrisi.

Çubuklar lazer yöntemi ile kesilerek imal edilmiş olup, malzeme özellikleri ve boyutları aşağıdaki gibidir:

$$E = 2.1\times10^{11} \quad N/m^2$$

$$G = 8.077\times10^{10} \quad N/m^2$$

$$\rho = 7840 \quad kg/m^3$$

$$\nu = 0.3$$

$$R = 200 \quad mm$$

$$b = 15 \quad mm$$

$$h_0 = 20 \quad mm$$

Burada h_0, çubuğun orta noktasındaki referans yerinin kesit yüksekliğidir. Şekil 6.5'deki simetrik çubuk geometrisi,

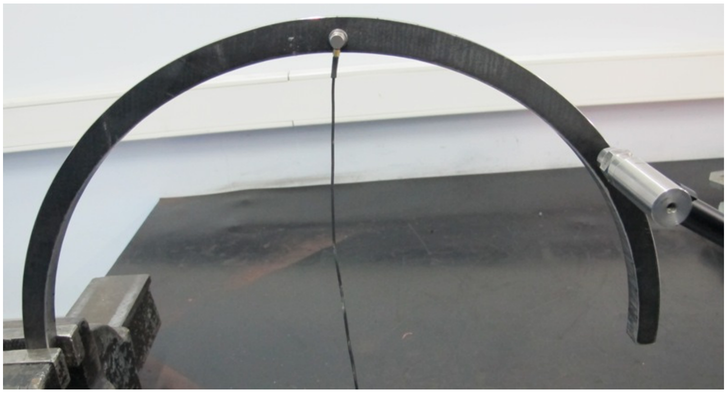
$$h(\phi) = h_0\left(1 - 2\eta\left|\phi / \phi_t\right|\right) \quad -\phi_t / 2 \leq \phi \leq \phi_t / 2 \tag{6.2}$$

eşitliğindeki gibi kabul edilerek ve Şekil 6.6'daki asimetrik çubuk geometrisi,

$$h(\phi) = h_0\left(1 + 2\eta\left(\phi / \phi_t\right)\right) \quad -\phi_t / 2 \leq \phi \leq \phi_t / 2 \tag{6.3}$$

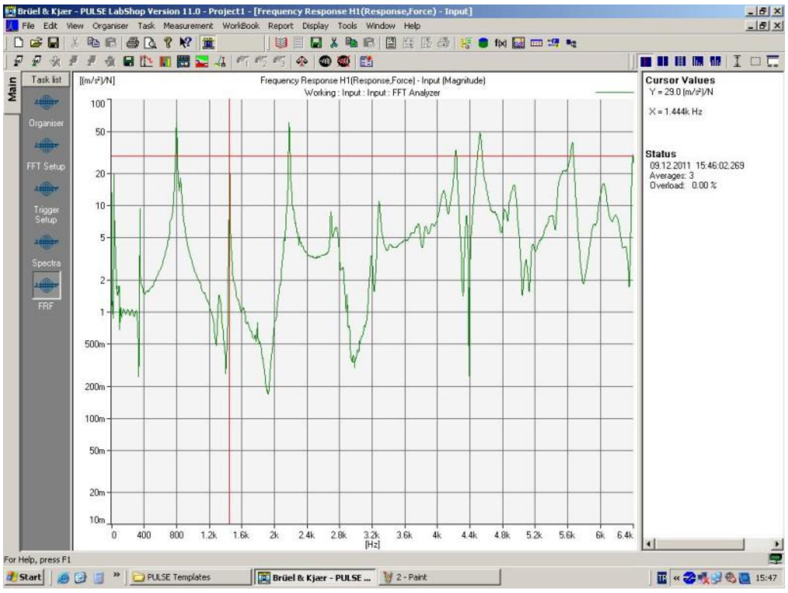
eşitliğindeki gibi kabul edilerek, her iki çubuk içinde $\eta = 0.2$ kesit alanı değişim oranına ve $\phi_t = 180^{o}$ kiriş açısına göre, çubuklar tasarlanmış ve imal edilmiştir.

Deneylerde, çubuğun düzleminin içinde ve düzlemine dik doğrultuda, sabit tahrik noktaları belirlenerek; ivmeölçer, farklı noktalara yapıştırılarak ölçümler alınmıştır (Şekil 6.7).



Şekil 6.7 : Ankastre-serbest sınır şartında düzlem dışı darbe uygulanması.

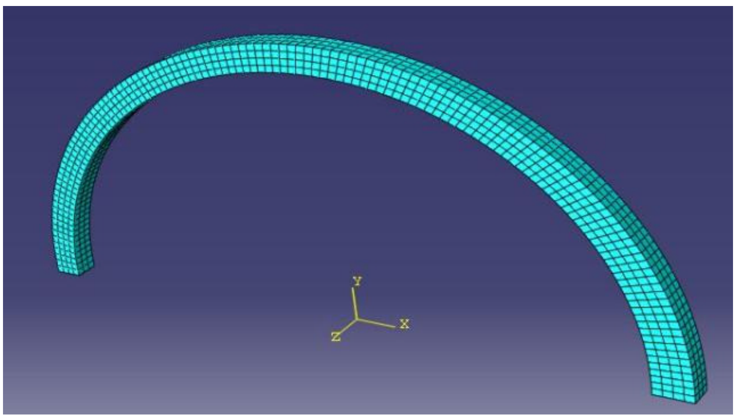
Deney hatalarını azaltabilmek için, her noktada üçer adet ölçüm yapılmış ve ortalamalar alınmıştır. Ayrıca, sonuçların doğruluğunu arttırmak için, ikinci bir tahrik noktası seçilerek ölçümler tekrarlanmıştır. Bu noktalardan doğal frekans değerlerini gösteren FRF fonksiyonları elde edilmiştir (Şekil 6.8).



Şekil 6.8 : Deneyde elde edilen FRF fonksiyonu örneği.

6.2 Deneysel Titreşim Analizi ve Teorik Analiz Sonuçları

Deneysel titreşim analizi çalışması ve teorik analiz çalışması, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarında gerçekleştirilmiştir. Analitik çözümlerde, Bölüm 4.2'de bahsedilen matrikant metodu kullanılarak, MATLAB programı yardımıyla çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri elde edilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi paket programı olan ABAQUS yardımıyla da, belirlenen sınır şartlarındaki doğal frekans değerleri ve mod şekilleri çıkarılmıştır. Abaqus programında çubuklar, sekiz nodlu kübik elemanlar kullanılarak yaklaşık 1500 elemana bölünerek modellenmiştir (Şekil 6.9). Üç farklı çözüm için elde edilen doğal frekans değerleri çizelgelerde verilmektedir.



Şekil 6.9 : Abaqus programında modellenen çubuk örneği.

Çizelge 6.1 ve 6.2'de, serbest-serbest ve ankastre-serbest sınır şartlarında çubukların düzlem içi ve düzlem dışı doğal frekansları verilmektedir. Frekanslar, Hz. (Hertz) cinsindendir. İtalik yazıyla belirtilen frekans değerleri, düzlem dışı titreşim hareketine ait frekanslardır. Analitik modelde dikkate alınan malzeme özellikleri ve sınır şartlarında yapılan kabullerin, deneysel çalışmadaki şartlarla tam uyumlu olamaması sebebiyle, bazı modlarda sonuçlar arasındaki farklar artmaktadır.

Çizelge 6.1 : Asimetrik kesitli çubuğun serbest-serbest sınır şartında elde edilen doğal frekansları.

	MOD	ANALİTİK	ABAQUS	DENEYSEL
SERBEST - SERBEST	1	209.645	211.51	208
	2	*357.983*	*356.29*	*368*
	3	604.237	603.47	601
	4	*778.126*	*771.62*	*806*
	5	1247.89	1248.7	1242
	6	*1435.98*	*1424.9*	*1500*
	7	*1890.39*	*1827.5*	*2019*
	8	2120.03	2108.8	2227
	9	*2460.66*	*2449.3*	*2644*
	10	*2837.83*	*2721.8*	*3019*
	11	3158.27	3163.8	3150
	12	*3451.86*	*3451.3*	*3450*
	13	*4158.22*	*4191.8*	*4144*
	14	4380.31	4396.2	4288
	15	*4697.77*	*4723.7*	*4500*
	16	*5489.23*	*5555.3*	*5275*
	17	5767.55	5785.9	5650
	18	5884.47	5835.2	5900
	19	*6431.18*	*6463.9*	*6360*
	20	*6811.62*	*6919.8*	*6680*

Çizelge 6.2 : Simetrik kesitli çubuğun ankastre-serbest sınır şartında elde edilen doğal frekansları.

	MOD	ANALİTİK	ABAQUS	DENEYSEL
ANKASTRE - SERBEST	1	32.964	33.81	34.58
	2	48.892	43.31	40
	3	*119.378*	*110.57*	*109.4*
	4	152.873	147.04	131
	5	*392.784*	*386.31*	*387.5*
	6	490.193	480.90	462
	7	*901.832*	*860.38*	*871.9*
	8	1102.32	1065.3	1034
	9	*1478.83*	*1481.0*	*1544*
	10	1801.30	1837.9	1794
	11	*2173.46*	*2167.1*	*2294*
	12	*2561.77*	*2545.5*	*2544*
	13	2893.98	2792.1	2850
	14	*3301.38*	*3264.3*	*3234*
	15	3799.17	3816.2	3750
	16	*3900.23*	*3822.4*	*3869*
	17	*4492.28*	*4413.4*	*4300*

Abaqus sonlu elemanlar analiz programı ile elde edilen, serbest-serbest sınır şartındaki asimetrik çubuğun, düzlem içi ve düzlem dışı titreşimlere ait mod şekilleri Ekler bölümünde verilmektedir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, değişken kesitli eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı dinamik davranışlarını, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınarak incelenmiştir. Değişken kesitli eğri eksenli çubukların diferansiyel denklem takımının yaklaşık çözümü için uygulanabilecek alternatif bir yöntem sunulmuştur.

Verilen çözüm yöntemi, literatürde, çubukların burkulma problemlerinde kullanılmasına rağmen, çubukların titreşim problemlerini inceleyen çalışmaların çoğunda kullanılmamıştır. Bu çözüm yöntemi yani; matrikant yöntemi ile incelenen literatürdeki çalışmaların sonuçları, referans çalışmalarda farklı yöntemlerle incelenen problemlerin sonuçlarıyla genelde birbirine çok yakındır.

Literatürde bulunan çalışmaların birçoğunda, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek problemler incelenmiştir. Mevcut çalışmada, bu etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen frekans değerleri ile literatürdeki sonuçlar oldukça yakın olmasına rağmen; mevcut çalışmada etkilerin dahil edilmesi ile elde edilen değerler ve bu değerler arasında belirgin farklar ortaya çıkmıştır. Çubuğun kiriş açısına, mesnet şartına, sığ ya da derin oluşuna göre, bu durumlar ile elde edilen değerler arasındaki farklar değişkenlik göstermektedir.

Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini dahil ederek problemleri inceleyen literatürdeki bazı çalışmaların sonuçlarıyla, mevcut çalışmada bu şekilde incelenerek elde edilen sonuçlar genellikle birbiriyle uyum içerisindedir. Mevcut çalışmada kullanılan matrikant yöntemi ile çözümlerde yakınsama iyileştirmesi yapılarak, bu sonuçların birbiriyle daha da yakın hale gelmesini sağlamak mümkündür. Matrikant yöntemi hesaplamaları, Matlab sayısal çözüm programı yardımıyla yapılmıştır.

Farklı modlarda ve farklı mesnet şartlarında, etkilerin tümünün hesaplara dahil edildiği durum için elde edilen boyutsuz frekans değerleri grafikler üzerinde gösterilmiştir. Grafiklerden, ayrı modlara ait eğrilerin, aynı frekans değerinde buluşabildiği gözlenmiştir. Farklı modlarda benzer frekansların yakalandığı bu durum mod geçişi olarak adlandırılmaktadır. Mod geçişi durumu, hem simetrik hem de asimetrik çubuklarda görülmüştür.

Etkilerin tümünün dahil veya ihmal edilerek, ya da ayrı ayrı alınarak elde edilen boyutsuz frekans değerlerinin çubuğun kiriş açısına göre değişimi grafikler üzerinde gösterilmiştir. Grafiklerden, etkilerin dahil edilmesi durum ile ihmal edilmesi durum arasında, özellikle küçük kiriş açılarında, belirgin farklar olduğu görülmüştür. Simetrik ve asimetrik çubukların her ikisi içinde aynı durum gözlenmiştir.

Teorik analiz sonuçlarının gerçeğe ne kadar yaklaşabildiğini görebilmek için deneysel titreşim analizi çalışması yapılmıştır. Deneyler, aynı kiriş açıklığına sahip, asimetrik ve simetrik çubuk üzerinde, belirlenen mesnet şartlarında yapılmıştır. Deney sonuçları, matrikant yöntemi ile elde edilen analitik sonuçlarla ve Abaqus analiz programından elde edilen sonlu elemanlar yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Sonuçlar incelendiğinde, bazı modlarda sonuçların birbirine çok yakın çıktığı görülmüştür. Bazı modlarda ise hata oranı artmıştır. Bu durum, analitik modelde dikkate alınan malzeme özellikleri ve sınır şartlarında yapılan kabullerin, deneysel çalışmadaki şartlarla tam uyumlu olamamasından kaynaklanabilir.

KAYNAKLAR

[1] **İnan, M.** (1966). *Elastik Çubukların Genel Teorisi*, İTÜ Yayını, İstanbul

[2] **İnan, M.** (1967). *Cisimlerin Mukavemeti*, İTÜ Yayını, İstanbul

[3] **Love, A. E. H.** (1994). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publication, New York

[4] **Timoshenko, S. ve Goodier, J. N.** (1951). *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., New York

[5] **Wang, C. M., Reddy J. N. ve Lee K. H.** (2000). *Shear Deformable Beams and Plates, Relationships with Classical Solutions*, Elsevier Science Ltd., Oxford

[6] **Gantmacher, F. R.** (1959). *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience Publishers, New York.

[7] **Gantmacher, F. R.** (1960). *Applications of the Theory of Matrices, Volume Two*, Chelsea Publishing Company, New York.

[8] **Güvençli, M. S**. (2004). *Değişken kesitli dairesel eksenli çubuklarda başlangıç değerler yöntemiyle burkulma yüklerinin bulunması*, (yüksek lisans tezi), İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[9] **Ulusoy, S. İ.** (2010). *Çubuk elemanların burkulmasında yaklaşık taşıma matrisi ve başlangıç değerler metodu*, (yüksek lisans tezi), İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[10] **Tüfekçi, E.** (1994). *Eğri eksenli düzlemsel çubukların statik ve dinamik problemlerinin analitik çözümü*, (doktora tezi), İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

[11] **Tarnopolskaya, T., De Hoog, F. R. ve Fletcher, N. H.** (1999). Low-frequency mode transition in the free in-plane vibration of curved beams, *Journal of Sound and Vibration*, ***228*****,** 69–90.

[12] **Tüfekçi, E.** (2001). Exact solution of free in-plane vibration of shallow circular arches, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, ***1***, 409–428.

[13] **Tüfekçi, E. ve Arpacı, A.** (1998). Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects, *Journal of Sound and Vibration*, ***209(5***), 845–856.

[14] **Rubin, M. B. ve Tüfekçi, E.** (2005). Three dimensional free vibrations of a circular arch using the theory of a cosserat point, *Journal of Sound and Vibration,* ***286***, 799–816.

[15] **Doğruer, O. Y.** (2006). *Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemlerinin analitik çözümü*, (doktora tezi), İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[16] **Tüfekçi, E. ve Doğruer, O. Y.** (2006). Exact solution of out-of-plane problems of an arch with varying curvature and cross-section, *Journal of Engineering Mechanics*, ***132***, 600–609.

[17] **Karami, G. ve Malekzadeh, P.** (2004). In-plane free vibration analysis of circular arches with varying cross-sections using differential quadrature method, *Journal of Sound and Vibration*, ***274***, 777–799.

[18] **Liu, G. R. ve Wu, T. Y.** (2001). In-plane vibration analysis of circular arches by the generalized differantial quadrature rule, *International Journal of Mechanical Sciences*, ***43***, 2597–2611.

[19] **Auciello, N. M. ve De Rosa, M. A.** (1994). Free vibrations of circular arches: A review, *Journal of Sound and Vibration, **174***, 433–458.

[20] **Laura, A. A. ve Verniere De Irassar, P. L.** (1988). A note on in-plane vibrations of arch-type structures of non-uniform cross-section: The case of linearly varying thickness, *Journal of Sound and Vibration*, ***124***, 1–12

[21] **Yiğit, Ö. Ö.** (2009). *Eğri eksenli değişken kesitli çubukların statik ve dinamik problemleri*, (doktora tezi), İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[22] **Tüfekçi, E. ve Yiğit, Ö. Ö.** (baskıda). In-plane vibrations of circular arches with varying cross-section, *Journal of Sound and Vibration*

[23] **Gutierrez, R. H., Laura, P. A. A., Rossi, R. E., Berteo, R. ve Villaggi, A.** (1989). In-plane vibrations of non-circular arches of non-uniform cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, ***129***, 181–200.

[24] **Shin, Y-J., Kwon, K-M. ve Yun, J-H.** (2008). Vibration analysis of a circular arch with variable cross-section using differential transformation and generalized differential quadrature, *Journal of Sound and Vibration*, ***309*,** 9–19.

[25] **Tong, X., Mrad, N. ve Tabarrok, B.** (1998). In-plane vibration of circular arches with variable cross-sections, *Journal of Sound and Vibration*, ***212***, 121–140.

[26] **Rossi, R. E., Laura, P. A. A. ve Verniere De Irassar, P. L.** (1989). In-plane vibrations of cantilevered non-circular archs of non-uniform cross-section with a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, ***129***, 201–213.

[27] **Huang, C. S., Tseng, Y. P., Leissa, W. ve Nieh, K. Y.** (1998). An exact solution for in-plane vibrations of an arch having variable curvature and cross-section, *International Journal of Mechanical Sciences*, ***40*,** 1159–1173.

[28] **Huang, C. S., Tseng, Y. P., Chang, S. H. ve Hung, C. L.** (2000). Out-of-plane dynamic analysis of beams with arbitrarily varying curvature and cross-section by dynamic stiffness matrix method, *International Journal of Solids and Structures, **37***, 495–513.

[29] **Suzuki, K., Sugi, K., Kosawada, T. ve Takahashi, S.** (1986). Out-of-plane impulse response of a curved bar with varying cross-section, *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers*, ***29***, 4312–4317.

[30] **Lee, S. Y. ve Chao, J. C.** (1999). Exact solution for out-of-plane vibration of curved non-uniform beams, *Journal of Applied Mechanics*, ***68***, 186–191.

[31] **Lee, S. Y. ve Chao, J. C.** (2000). Out-of-plane vibrations of curved non-uniform beams of constant radius, *Journal of Sound and Vibration*, ***238***, 443–458.

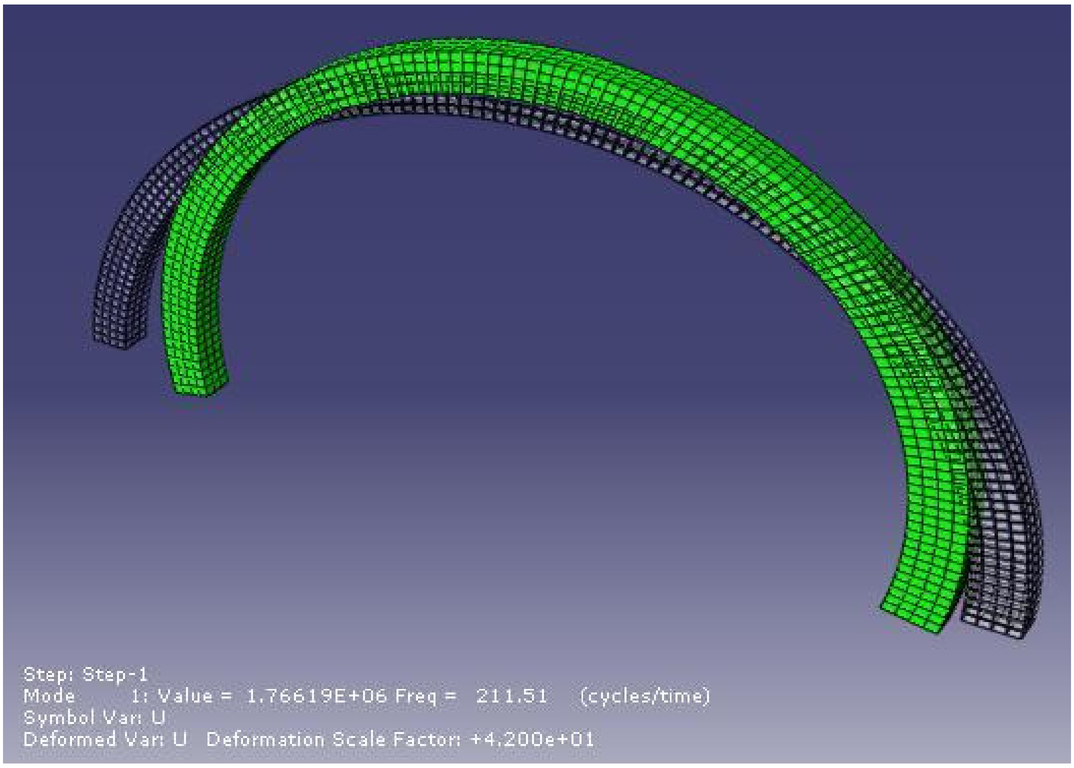
[32] **Oh, S. J., Lee, B. K. ve Lee, I. W.** (2000). Free vibrations of non-circular arches with non-uniform cross-Section, *International Journal of Solids and Structures*, ***37***, 4871–4891.

[33] **Ewins, D. J.** (2000). *Modal Testing: Theory, Practise and Application*, Research Studies Press Ltd., Hertfordshire

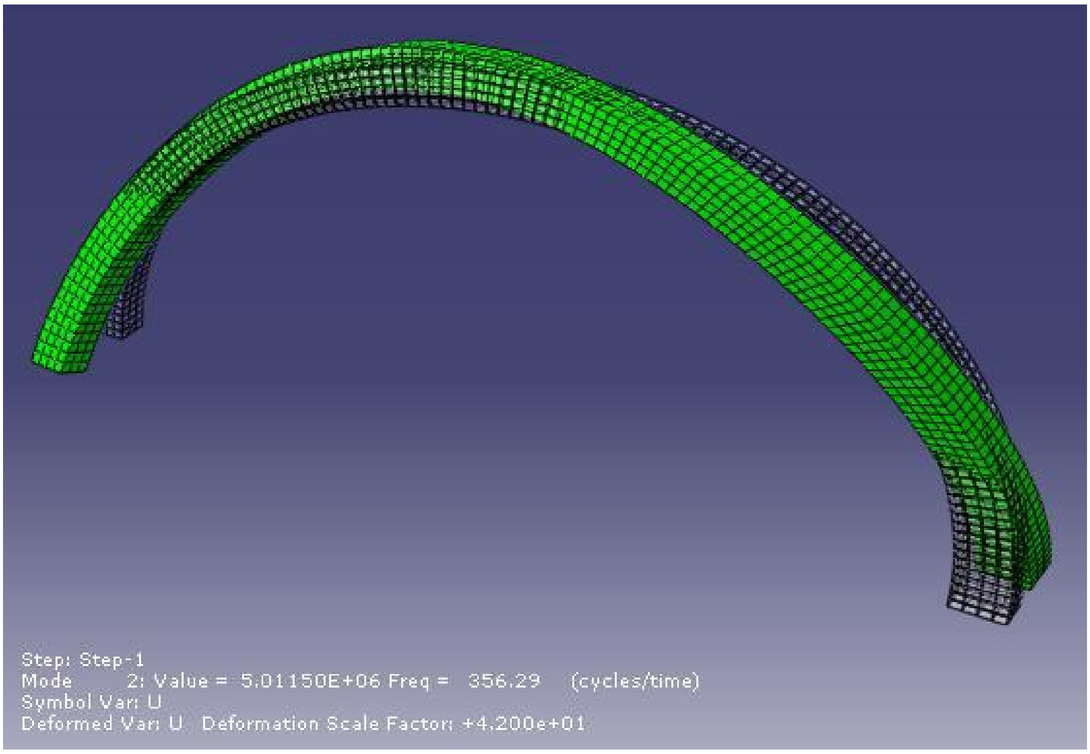
EKLER

EK A : Çubuğun serbest-serbest sınır şartında düzlem içi ve düzlem dışına ait mod şekilleri

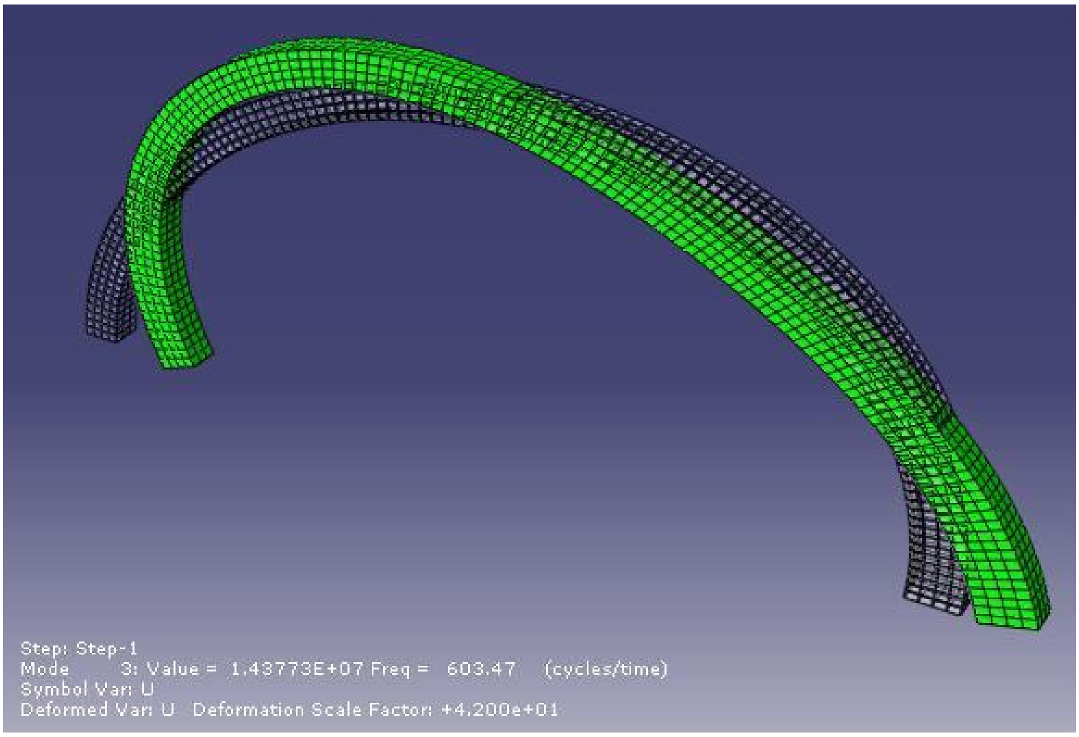
EK A



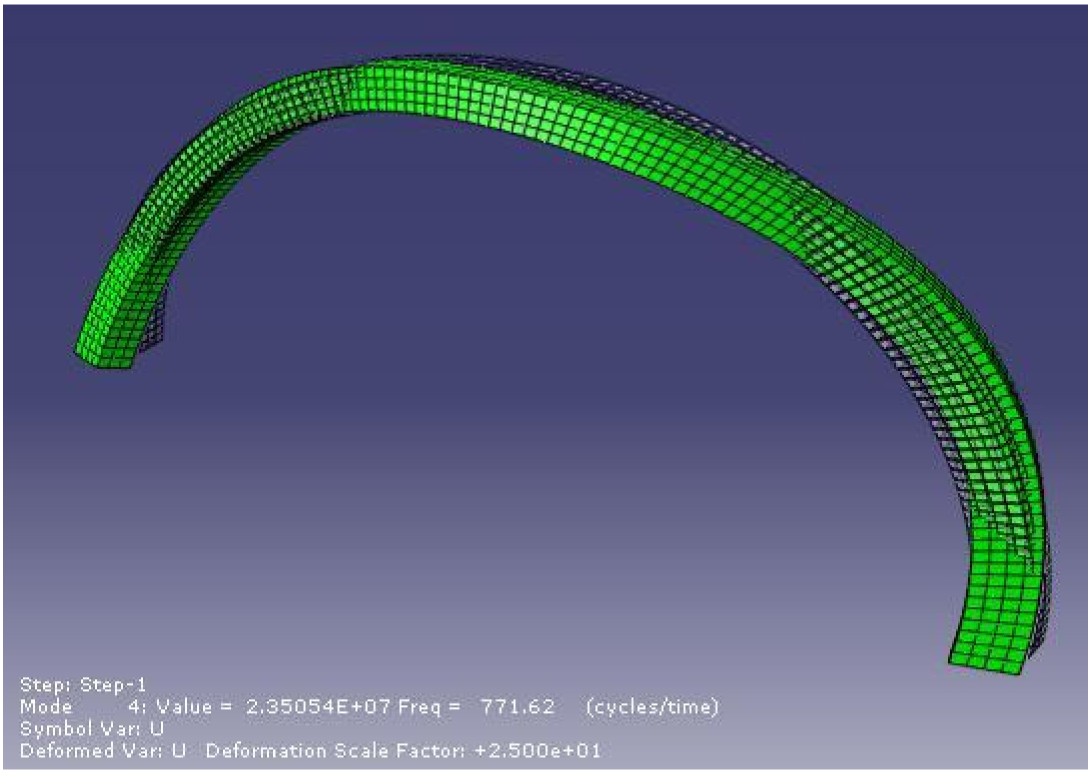
Şekil A.1 : Çubuğun düzlem içine ait birinci mod şekli (211.51 Hz).



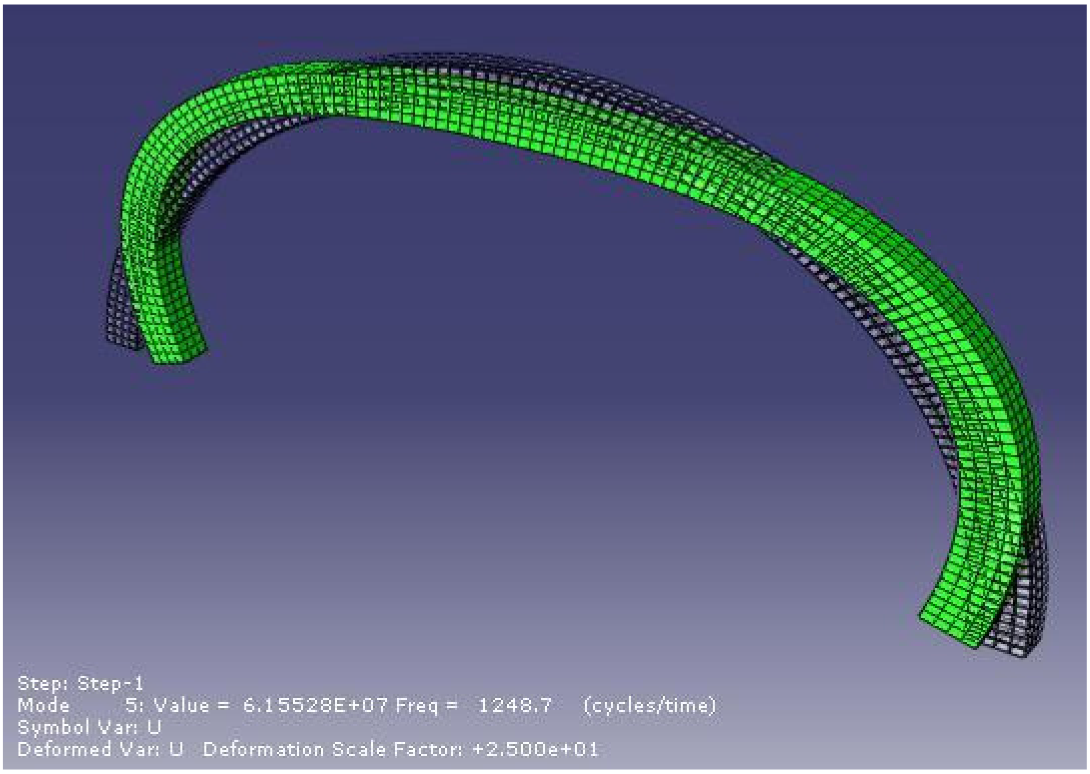
Şekil A.2 : Çubuğun düzlem dışına ait birinci mod şekli (356.29 Hz).



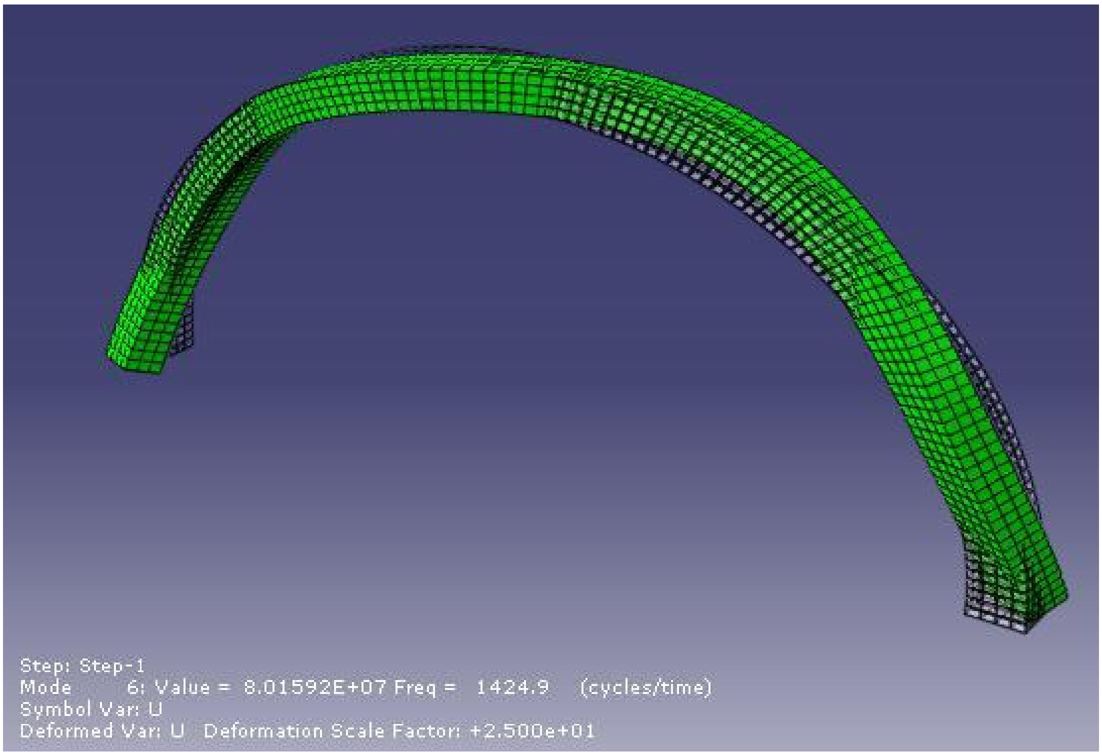
Şekil A.3 : Çubuğun düzlem içine ait ikinci mod şekli (603.47 Hz).



Şekil A.4 : Çubuğun düzlem dışına ait ikinci mod şekli (771.62 Hz).



Şekil A.5 : Çubuğun düzlem içine ait üçüncü mod şekli (1248.7 Hz).



Şekil A.6 : Çubuğun düzlem dışına ait üçüncü mod şekli (1424.9 Hz).

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Caner Hayri DÖNMEZ

Doğum Yeri ve Tarihi: Balıkesir 11.12.1984

E-Posta: canerhayri.donmez@arcelik.com

Lisans: Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü

Mesleki Deneyim : Arçelik A.Ş. Elektrik Motorları İşletmesi, Arge Mühendisi, (2009 - …)