

35712

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ NÜKLEER ENERJİ ENSTİTÜSÜ

**İKİ FAZLI AKIŞ KANALININ
TERMO-HİDROLİK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gemi Mak. İşl. Müh. İ. D. ER

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM ENSTİTÜSÜ
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Haziran 1994

Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Haziran 1994

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet BAYÜLKEN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hasbi YAVUZ
: Yrd. Doç. Dr. Cihat BAYTAŞ

Haziran 1994

ÖNSÖZ

Kaynar Sulu Reaktörler'de gerek yavaşlatıcı ve gerekse soğutucu görevi yapan akışkanda, kaynama mekanizması ile meydana gelen değişken akış biçimlerinin neden olduğu akış kararsızlıkları, akış salınımlarına neden olur. Akış salınımları da yavaşlatma karakteristiğini de etkileyerek nükleer kararsızlıkları meydana getirir. Bundan dolayı, reaktör dizaynında; reaktör kalbinin termo-hidrolik analizinin büyük önemi vardır.

Bu çalışmada; seçilen yakıt soğutucu modeline göre, sonlu farklar yaklaşımı çerçevesinde, sürekli rejimde iki fazlı akış kanalının termo-hidrolik analizi yapılmıştır.

İstanbul Teknik Üniversitesi bünyesinde, İstanbul Teknik Üniversitesi Denizcilik Yüksek Okulu mezunu olarak, ilk defa yüksek lisans programına katılma şansı ve imkanlarını bana tanıyan ve bu konuda sonsuz ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Hasbi YAVUZ'a ve Prof. Dr. Ahmet BAYÜLKEN'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İ. Deha ER

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER	v
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 GENEL KAVRAM VE TANIMLAR	3
2.1 Sürekli Ortam ve Akışkan Kavramı	3
2.2 Saf Madde, Hal Denklemi ve Termodinamiğin Temel Yasaları	3
2.3 Termodinamik Denge ve Kararlılık	6
2.4 Faz Dengesi ve Faz Dönüşümleri	8
2.5 Faz Kararlılığı	10
2.6 Farklı Faz Basınçlarında Faz Dönüşümü	11
2.7 Kabarcık Dinamiği	12
BÖLÜM 3 KORUNUM DENKLEMLERİNİN TÜRETİLMESİ	21
3.1 Süreklilik Denkleminin Kartezyen Koordinatlarda Türetilmesi	21
3.2 Momentum Denkleminin Kartezyen Koordinatlarda Türetilmesi	23
3.3 Süreklilik Denkleminin Silindirik Koordinatlarda Türetilmesi	36
3.4 Momentum Denkleminin Silindirik Koordinatlarda Türetilmesi	37
3.5 Enerji Denkleminin Türetilmesi	47
BÖLÜM 4 İKİ FAZLI AKIŞLAR	52
4.1 Açıklama	52
4.2 Akış Biçimleri ve Akış Kararsızlığı	52
4.3 İki Fazlı Akışların Sınıflandırılması	53
4.4 Düşey Akış Kanalındaki Akış Biçimleri	54
4.5 İki Fazlı Akışlarda Kullanılan Büyüklük ve Notasyonlar	59
4.5.1 Boşluk Oranı	59
4.5.2 Faz Hızları	59
4.5.3 Hacimsel Akı	60
4.5.4 Hacimsel Akış Oranı	60
4.5.5 Kayma Oranı	61
4.5.6 Relativ Hız	61
4.5.7 Yerel Ortalama Yoğunluk	62
4.5.8 Kuruluk Derecesi	62
4.5.9 Kesit Alanı Üzerinden Ortalama Notasyonu	63
4.5.10 Kütle Akısı	64
4.5.11 Boşluk Oranı İle Kuruluk Derecesi Arasındaki Bağlılıklar	65
4.5.12 Sürülenme Hızı	66
4.6 Kaynar Sulu Reaktörün Soğutma Kanalı İçin Korunum Denklemlerinin Yazılması	67

BÖLÜM 5 TERMO HİDROLİK MODELLEME	73
5.1 Soğutucu Kanalında Eksenel Yönde Isı Transferi	74
5.1.1 Tek Fazlı Akışın Termo Hidrolik Analizi	75
5.1.2 İki Fazlı Akışın Termo Hidrolik Analizi	78
5.2 Enerji Üretimini Veren Diferansiyel Denklemin Türetilmesi	81
5.3 Yakıt Elemanında Sıcaklık Düşümü	83
5.4 Yakıt Zarf Arasındaki Gaz Boşluğunda Sıcaklık Düşümü	85
5.5 Yakıt Zarfında Sıcaklık Düşümü	86
5.6 Çözüm Yöntemi	88
BÖLÜM 6 AKIŞ KANALI VE YAKIT ELEMANI İÇİN KULLANILAN PROGRAMIN TANITILMASI	98
SONUÇ VE ÖNERİLER	106
KAYNAKLAR	108
ÖZGEÇMİŞ	111

SEMBOLLER

A	Akışkan kesit alanı (cm ²)
A _{x-s}	Kütle akış kesiti (cm ²)
c	Özgöl ısı (J/g °C)
D	Yakıt elemanın çapı (cm)
D _h	Eşdeğer hidrolik çap (cm)
D _T	Deissler Taylor korelasyonu
E	Enerji (J)
F _s	Sürtünme katsayısı
g	Yerçekimi ivmesi (cm/s ²)
h	Akışkanın ısı taşınım katsayısı (W/cm ² °C)
h _g	Eşdeğer ısı geçiş katsayısı (W/cm ² K)
h _{lg}	Buharlaştırma gizli ısı (J/g)
h	Entalpi (J/g)
h _s	Akışkanın doyma entalpisi (J/g)
H _e	Uzatılmış uzunluk (cm)
H	Yakıt aktif boyu (cm)
j	Hacimsel akış hızı (cm/s)
k _f	Yakıtın ısı iletim katsayısı (W/cm ⁰ °C)
k _c	Zarfin ısı iletim katsayısı (W/cm ⁰ °C)
k _a	Akışkanın ısı iletim katsayısı (W/cm ⁰ °C)
K	Kinetik enerji (J)
K	Şekil faktörü
Nu	Nusselt sayısı
N	Kabarcık sayısı
Pr	Prandtl sayısı
P	Basınç (N/m ²)
P _r	Akışkan referans basıncı (N/m ²)
P _i	Isıtılan çevre (cm)
P _s	Sürtünme çevresi (cm)
Q	Hacimsel debi (cm ³ /s)
q ^{'''}	Birim hacimde birim zamanda üretilen enerji (W/cm ³)
q ^{''}	Isı akısı (W/cm ²)
q [']	Çizgisel güç yoğunluğu (W/cm)

ρ	Yoğunluk (g/cm ³)
r_f	Yakıt yarıçapı (cm)
r_g	Zarfin iç yarıçapı (cm)
r_c	Zarfin dış yarıçapı (cm)
r_p	İki yakıt çubuğu eksenini arasındaki uzunluk(cm)
Re	Reynold sayısı
R	Kabarcık yarıçapı (cm)
S	Kayma oranı
S	Entropi (J/g K)
T	Sıcaklık (°C)
T_m	Yakıt merkez sıcaklığı (°C)
T_g	Yakıt dış yüzey sıcaklığı (°C)
T_c	Zarf iç yüzey sıcaklığı (°C)
T_s	Zarf dış yüzey sıcaklığı (°C)
T_{cr}	Akışkan referans sıcaklığı (°C)
t	Zaman (s)
u'''	Birim hacimde üretilen nükleer enerji (J/cm ³)
U	İç enerji (J)
V	Akışkanın hızı (cm/s)
V	Hacim (cm ³)
v	Özgül hacim (cm ³ /g)
X	Akışkanın kuruluk derecesi
W	Kütleli debi (g/s)
w	Bileşen sayısı
Z_B	Kütleli kaynama sınırı
Δz	Eksenel yönde adım
μ	Akışkanın dinamik viskozitesi (Ns/m ²)
α	Boşluk oranı
α_1	Isı yayılma katsayısı (cm ² /s)
β	Hacimsel akış oranı
σ	Yüzey gerilimi (N/m)
τ	Kayma gerilmesi (N/m ²)
ε	Faz sayısı
ψ	Serbestlik derecesi

Alt İndisler

ort	Ortalama
l	Sıvı fazı
g	Gaz fazı
y	Yerel
p	Sabit basınç
v	Sabit hacim

ÖZET

Çalışma, Kaynar Sulu Reaktörler'de; yavaşlatıcı ve soğutucu olarak kullanılan yapan suyun bulunduğu akış kanalının termo-hidrolik analizini içermektedir. Radyal doğrultuda analitik, eksenel yönde ise sonlu farklar yaklaşımı çerçevesinde, kurulan yakıt soğutucu modeli esas alınarak, sürekli rejimde termo-hidrolik modelleme yapılmıştır.

Modelleme öncesinde; kurulacak olan modelde kullanılacak olan bazı büyüklüklere temel teşkil edecek ve kullanılacak denklem takımlarının oluşturulmasına yönelik olarak da; tek fazlı akış sistemlerine ait korunum denklemleri ve bu denklemlerden istifade edilerek iki fazlı akışlarda kullanılan korunum denklemleri ve büyüklüklerin türetilmesi konularının yanında, faz dönüşümünün ısı geçişi açısından ele alındığı kaynama olayı, faz dönüşümünün temel mekanizması olan kabarcık oluşumu ve kabarcık dinamiği incelenmiştir.

Kullanılan model; yakıt malzemesi, gaz boşluğu ve zarftan meydana gelen yakıt çubuğu ile yakıt çubuğunu çevreleyen soğutucu akış kanalını içine alan bir hücrenin termo-hidrolik davranışı esas alınarak gerçekleştirilmiş olup, ızgara hacminde akışkanın termo-hidrolik özelliklerinin değişmediği kabul edilmektedir. Akışkanın her bir ızgara hacminde, sahip olduğu entalpi değeri; doyma entalpisinin altında ise akışın tek fazlı bölgede olduğu, akışkanın sahip olduğu entalpi değeri, doyma entalpisinin üzerinde ise akışın iki fazlı kaynama bölgesinde olduğu göz önüne alınmaktadır.

Modelde; soğutucu akışkanın özellikleri sıcaklık ve basınca bağlı korelasyonlar yardımı ile hesaplanmaktadır. Tek fazlı bölgede "Dittus-Boelter" korelasyonu yardımı ile, iki fazlı bölgede ise "Jens-Lottes" korelasyonu kullanılarak ısı taşınım katsayıları hesaplanmaktadır. İki fazlı akış bölgesinde boşluk ve kayma oranları için "Martinelli-Nelson" bağıntılarından yararlanılmaktadır. Sürtünme faktörü için; "Fanning Sürtünme Faktörü" kullanılmaktadır. Yakıt çubuğunun ısı iletim katsayısı ise sıcaklığa bağlı olarak değişmektedir.

SUMMARY

THERMAL HYDRAULIC ANALYSIS OF A TWO PHASE FLOW CHANNEL

Two phase flows occur in an extremely wide range of environmental situations and industrial plants. Two phase flow is important for boilers, condensers, heat exchangers, refrigeration and air-conditioning equipment, rocket motors, chemical reactors, high temperature metallurgical process including steal making, natural gas liquefaction, nuclear reactors, desalination, pipelines etc. These applications may involve many fluid systems water/steam, organics, liquid metals, refrigerants, two component liquid systems.

The purpose of studying two phase flow is therefore the accurate prediction of engineering parameters describing performance such as pressure drop, void fraction, slip ratio, quality, void quality relations, heat and mass transfer parameters and etc. It is also essential to understand the physical phenomena which could limit the performance of equipment, for example void fraction and the location of void departure point in Boiling Water Reactors, hydrodynamic instability in steam generators or burnout in water cooled reactors. Two phase flow is vital in nuclear reactor design, in order to determine reactor behaviour under various situations.

In this study, thermal-hydraulic analysis of a two phase flow channel is based on the water which is used both moderator and coolant

located in a coolant channel in Boiling Water Reactors.

In order to make a model of a two phase flow channel, it is essential to review some of the physical and thermodynamic properties which are occasionally used in two phase flow analysis. As well as that conservation laws for mass, momentum and energy are reviewed, which are used to predict the hydrodynamic and thermodynamic behaviour of a two phase flow are exactly the same as those which govern single phase fluid dynamics. The reason that, two phase are flowing together, there are at least twice as many basic equations as in the single phase flow case. In addition, the boundary conditions are more complicated involving factors such as surface tension and phase change. Forces between phases are important as well as external forces and the same is true for heat and mass transfer process so the various ways of formulating the conservation equations and various simplifying assumptions which are made in this study could be useful.

On the other hand subject of boiling, particularly for the case where the fluid is evaporated in a heated channel or duct, the elementary thermodynamic aspects of liquid-vapour phase change are briefly reviewed to provide a background to a discussion of the basic aspects of a bubble nucleation and growth. This in turn, leads to a qualitative description of the heat transfer regimes present when a stagnant liquid is boiled in a container such as an electric kettle and various modes of heat transfer encountered when a liquid is circulated to a heated channel.

Pool boiling is defined as boiling from a heated surface submerged in a large volume of stagnant liquid. This liquid may be at its boiling point in which the case is called saturated pool boiling or below its boiling point when the term subcooled pool boiling is used. The results of the investigations into heat transfer rates in pool boiling are usually necessary for understanding the bubble nucleation, bubble growth and the bubble dynamics. At the beginning the natural convection region where the temperature gradients are set up in the pool and heat is removed by natural convection to the free surface. The onset of nucleate boiling where

the wall superheat becomes sufficient to cause vapour nucleation at the heating surface. This may occur close to the point where the water pressure is atmospheric pressure or above. Alternatively it may occur at much larger superheats than those required to support fully developed a nucleate boiling resulting in a sharp drop in surface heat flux. This latter behavior is associated with fluids at very low reduced pressures eg., water at below atmospheric pressure and liquid metals in particular. The nucleate boiling region where vapour nucleation occurs at the heating surface starting with a few individual sites at low fluxes the vapour structure changes, as the heat flux is increased, as a result of bubble coalescence and finally at high heat fluxes, vapour patches and columns are formed close to the surface. The critical heat flux marks the upper limit of nucleate boiling where the interaction of the liquid and vapour streams causes a restriction of the liquid supply to the heating surface. The transition boiling region is characterized by the existence of an unstable vapour blanket over the heating surface that releases large patches of vapour at more or less regular intervals. The film boiling region where a stable vapour film covers the entire heating surface and vapour is released from the film periodically in the form of regularly spaced bubbles. Heat transfer is accomplished principally by conduction and convection through the vapour film with radiation becoming significant as the surface temperature is increased.

The flow patterns encountered in vertical upwards flows are known as bubbly flow, slug flow, churn flow, wispy annular flow and annular flow. The formation of a two phase mixture by a vapour generation in a vertical heated tubular channel represents an important special case. The presence of an heat flux through the channel wall alters the flow pattern. These changes occur due to two main reasons, firstly, the departure from thermodynamic equilibrium coupled with the presence of radial temperature profiles in the channel and secondly, the departure from the local hydrodynamic equilibrium throughout the channel. The initial single phase region the liquid is being heated to the saturation temperature. A thermal boundary layer forms at the wall and a radial temperature profile is set up. At some position up the tube, the wall temperature will exceed the saturation temperature and the conditions for the vapour (nucleation) at the wall are satisfied. Vapour is formed at the preferred positions or sites out the surface of the tube. Vapour bubbles grow from these sites

finally detaching to form a bubbly flow. With production of more vapour the bubble population increases with length and coalescence takes place to form slug flow which in turn gives way to annular flow further along the channel. Close to this point the formation of vapour at this sites on the wall may cease and further vapour formation will be as a result of evaporation at the liquid film-vapour core interface. Increasing velocities in the vapour core will cause entrainment of liquid in the form of droplets. The depletion of the liquid from the film by this entrainment and by evaporation finally causes the film to dry out completely. Droplets continue to exist and are slowly evaporated until only single phase vapour is present.

The characteristic that distinguishes the boiling heat transfer process from other mechanism is the change of phase that occurs in the coolant. This change in phase can occur within the fluid, due to a process known as homogeneous nucleation, or more commonly, it can occur at nucleation sites within the fluid e.g., suspended foreign material in the fluid or on a heated surface. As a result it can be said that, the boiling process was a very efficient method for cooling heated surfaces. Because of these reasons the thermal-hydraulic analysis of the reactor core must play a very important role in reactor design.

In this study, the finite difference approximation in the axial direction and an analytical method in radial direction is used to make thermal-hydraulic analysis of two phase flow channel.

In order to determine the convective heat transfer coefficients "Dittus- Boelter" correlation is used for single phase flow and "Jens-Lottes" correlation is used for two phase flow. "Martinelli Nelson" correlation is used to compute the slip ratio, quality and void fraction relationships. "Running Method" is used to determine the friction factor in each mesh.

In this model, linear power density is supplied as an input from the analytical solution of the thermal neutron flux in steady state for a fuel

element. The thermal conductivities of the fuel element depends on temperature. The correlations is used to compute the properties of the coolant which is also the function of the temperature and pressure.

Finally THCAN code is used to make thermal-hydraulic analysis of a two phase flow channel and the results are discussed at the end of the study.



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kaynar Sulu Reaktörlerde; diğer su soğutmalı reaktör tiplerinde olduğu gibi, reaktör kalbi heterojen bir yapıya sahiptir. Reaktör kalbinin çıplak, homojen ve açısal simetriye sahip olduğu kabul edilirse; kalp içerisinde akı dağılımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi(r,z) = \phi_0 J_0 \left(\frac{2.405r}{R_e} \right) \cos \left(\frac{\pi z}{H_e} \right)$$

Bu ifadede akı dağılımının radyal bileşeni, ideal bir kalp için gerçeğe uymamakta olup, eksenel yönde kaynama nedeniyle akı kosinüs dağılımına uymaz. Ön hesap yapmak için yaklaşık olarak kosinüs dağılımına uyduğu kabul edilir.

Yakıt çubuğu ve yakıt çubuğunu çevreleyen akışkandan oluşan bir birim hücre seçilir. Seçilen birim hücre yardımıyla reaktör kalbinin termohidrolik analizi yapılır. Akış kanalından çıkan buhar, türbinlere gönderilir. Türbinde iş yapan akışkan, türbinden sonra yoğunlaştırucudan geçirilmek suretiyle reaktöre geri döner.

Bu çalışmada, seçilen birim hücre reaktör kalbinin merkezinde olup, yakıt çubuğunun çevresinde kontrol çubukları bulunmadığı düşünülerek, akıda ve dolayısıyla nükleer enerji üretiminde bir değişim olmamaktadır. Böylece reaktör kalbinde nükleer olaylar sonucunda oluşan enerji kalp soğutma sistemi tarafından kalpten dışarı alınmaktadır. Gerek yavaşlatıcı, gerekse soğutucu görevi yapan su soğutucu kanala sıvı fazda girmektedir. Suyun soğutucu kanala giriş koşulları zamana bağlı değişmemektedir. Akış kanalının belli bir noktasında kaynama başlamaktadır. Bu nedenle akış kanalı tek fazlı ve iki fazlı akış bölgesi olmak üzere, ikiye ayrılmak suretiyle incelenmektedir. İnceleme sırasında seçilen birim hücreye dışarıdan kütle ve enerji transferinin olmadığı kabul edilmektedir. Soğutma kanalında ısı taşınımı eksenel doğrultuda olmaktadır. Radyal doğrultudaki ısı taşınımı ihmal edilmektedir[1,2].

Akış kanalının termo-hidrolik modellemesi; tek fazlı ve iki fazlı akış bölgeleri için sabit rejimde yapılmak suretiyle akışkan sıcaklıkları ve yakıt elemanın aynı noktadaki sıcaklıkları hesaplanmaktadır. Yakıt çubuğu da yakıt bölgesi, gaz aralığı ve zarf bölgesi olmak üzere içiçe üç ayrı bölgeden meydana gelip, yakıt çubuğunun aktif boyunun, yarıçapına oranının çok büyük olduğu kabul edilerek, aksel yönde iletim ile ısı transferi ihmal edilmektedir[1,3,4].

Bu çalışmada seçilen modele ilişkin gerekli bilgiler için genel kavram ve tanımların incelenmesini takiben tek fazlı ve iki fazlı akışlar incelenmektedir.



BÖLÜM 2

GENEL KAVRAM VE TANIMLAR

2.1. Sürekli Ortam ve Akışkan Kavramı

Sürekli ortam kavramı; yoğunluk, dış kuvvet ve iç kuvvet kavramlarından meydana gelmiş olup, katı cisim ve akışkan modellerini içine alan bir genellemedir. Seçilen sistemin içerisinde her noktada yoğunluk tanımlanabiliyorsa ve sıfırdan büyük ise ortam "sürekli" dir. Ortam içindeki bir nokta etrafında hacim elemanına etkiyen dış kuvvetlerin, yalnız konuma ve zamana bağlı sonlu şiddette büyüklükler oldukları kabul edilmektedir. Benzer şekilde iki nokta arasında etkiyen iç kuvvetlerin de yalnız konumun ve zamanın fonksiyonu olan bir büyüklük oldukları kabul edilmekte ve gerilme olarak adlandırılmaktadır.

Sürekli ortam yukarıda bahsedilen bütün varsayımların hepsini sağlar. Gerçekte herhangi bir cisim, atomik yapıya sahip olduğu için süreksizdir; bu da sonsuz küçük büyüklükler olan konum diferansiyellerinin tanımını olanaksız kılar.

Sürekli ortamın sağladığı varsayımları, akışkan modeli de sağlar. Ancak akışkan modeli, sürekli ortam modelinin dışında bazı ek varsayımları da sağlamaktadır. Örneğin mükemmel bir akışkanda her hangi bir noktadaki gerilme vektörü, birim dış normal vektörle aynı doğrultu ve aynı yöndedir. Dolayısıyla etkidiği yüzeye dik olan bu gerilme bir basınçtır, konumun ve zamanın fonksiyonudur. Sürtünmeli akışkanlar için de benzer varsayımlar yapılarak, sürekli ortamların hareket denklemlerinden sürtünmeli akışkanın hareket denklemlerine geçilebilir[5].

2.2. Saf Madde, Hal Denklemi ve Termodinamiğin Temel Yasaları

Kimyasal bileşimi açısından homojen olan ve faz değişimi ile kimyasal olarak değişime uğramayan bir maddeye, termodinamik anlamda saf madde denir. Birden fazla saf maddenin oluşturduğu karışımlara ise çözelti adı verilir. Bu çözeltiyi oluşturan saf maddelere ise bileşen denir.

Termodinamik büyüklükler, nokta fonksiyonu ve yol fonksiyonu olan büyüklükler olmak üzere iki ana grupta toplanabilir. Nokta fonksiyonu olan büyüklüklerin değişimini bulmak için; bu fonksiyonun, yalnızca sistemin geçirdiği hal değişiminin başında ve sonunda aldığı değerleri bilmek yeterlidir. Nokta fonksiyonu büyüklükler, hal değişiminin şekline bağlı değildir. Saf maddenin halini belirleyen karakteristik büyüklükler nokta fonksiyonudur. Bunlara özellik adı verilir. Örnek olarak; toplam enerji, entropi, iç enerji, özgül hacim, basınç, sıcaklık, entalpi, Gibbs serbest enerji fonksiyonu ve Helmholtz serbest enerji fonksiyonu verilebilir. Nokta fonksiyonu büyüklüklerin temel özelliği, diferansiyellerinin bir tam diferansiyel olmasıdır.

Yol fonksiyonu büyüklükler de termodinamik sistemin hal değiştirmesine neden olan büyüklüklerdir. Örnek olarak iş ve ısı verilebilir. Bu büyüklüklerin değişimini bulmak için, sistemin geçirdiği hal değişiminin başlangıç ve sonunda söz konusu büyüklüklerin aldığı değerleri bulmak yeterli değildir, hal değişiminin şekli de bilinmelidir. Yol fonksiyonu büyüklüklerin temel özelliği, diferansiyellerinin tam diferansiyel olmayışıdır.

Saf maddenin iki bağımsız özelliği verildiğinde, üçüncü bir özellik hal denklemi kullanılarak bulunabilir. Örneğin basınç, sıcaklık, hacim arasında hal denklemi;

$$F(P, v, T) = 0 \quad (2.1)$$

kapalı fonksiyonuyla verilir. Her hangi bir akış probleminin çözümünde, bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla olduğunda, hal denklemi korunum denklemlerinin yanısıra kullanılabilir. Bunun için ya akışkanın akış koşullarında davranışını belirleyen yarı deneysel bir bağıntı kullanılır; ya da akışkan için verilen termodinamik özellik tablolarından yararlanılır.

Termodinamik biliminin dört temel yasası sırasıyla; Termodinamiğin Sıfıncı, Birinci, İkinci ve Üçüncü Yasalarıdır. Termodinamiğin Sıfıncı Yasası; üçüncü bir sistemle ısı dengede bulunan iki sistemin birbirleriyle ısı dengede olacağını (sıcaklıklarının eşit olacağını) belirtir. Termodinamiğin Birinci Yasası; bir sistemin hal değişimi boyunca çevresiyle yaptığı ısı alış verişinin, çevresiyle yaptığı iş alış verişiyile orantılı olduğunu kabul eder. Bir sistem farklı denge hallerinden geçerek farklı yollar izleyerek, hal değiştirerek tekrar eski haline döndüğünde, hal değişimi sırasında izlenen

yollar ne kadar farklı olursa olsun, sistemin çevresiyle yaptığı ısı ve iş alış verişini birbirine eşittir. Söz konusu durum, hal değişiminin başlangıç ve sonuna bağlıdır. Bir hal değişiminde ısı ve iş değişimleri farkı nokta fonksiyonudur ve enerji olarak adlandırılır. Birinci yasa; enerji kavramını doğurmakta olup, yol fonksiyonu büyüklükler ile nokta fonksiyonu büyüklükler arasında bir bağıntı vermektedir.[6,7]

$$\delta Q - \delta W = dE \quad (2.2)$$

E toplam enerji olup; kapalı sistem için iç enerji, kinetik enerji ve potansiyel enerjinin toplamı şeklinde yazılabilir.

$$Q_{1,2} - W_{1,2} = U_2 - U_1 + \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2) + mg(z_2 - z_1) \quad (2.3)$$

Birinci yasa; açık sistemler için ifade edilir ve kayma gerilmeleri ihmal edilirse, basınç kuvvetlerinin yaptığı iş gözönüne alınmak suretiyle aşağıdaki şekilde gösterilebilir[8].

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint_V \rho \left(u + \frac{1}{2}v^2 + gz \right) dV \right] + \iint_{S_k} \rho \left(h + \frac{1}{2}v^2 + gz \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS_k = \frac{\delta Q}{\partial t} - \frac{\delta W}{\partial t} \quad (2.4)$$

İş, ısı ve enerji arasındaki ilişkiyi veren termodinamiğin birinci yasası; hal değişiminin yönü hakkında bilgi vermez. Termodinamiğin ikinci yasasında sistem ve çevresi birlikte düşünüldüğünden; toplam entropinin artması yönünde hal değişimi gerçekleşecektir. Böylece termodinamiğin ikinci yasasında "entropi" adı verilen nokta fonksiyonu türetilmiş olur. W_k kayıp iş olmak üzere, kapalı bir sistemin geçirdiği diferansiyel hal değişimine ait ikinci yasa[7,9];

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \frac{\delta W_k}{T} \quad (2.5)$$

şeklinde olur. Herhangi bir hal değişimi olayının; entropinin artışı yönünde gerçekleşmesinin nedeni, sistemin çevreyle yaptığı ısı alışverişi ve sistem içindeki sürtünme gibi tersinir olmayan olaylar yüzünden oluşan kayıp iştir. Termodinamiğin üçüncü yasasında ise; hiç bir cisimde mutlak sıfır sıcaklığına ulaşamayacağı belirtilir.

2.3. Termodinamik Denge ve Kararlılık

Bir sistemin termodinamik dengede olabilmesi için, sistemin; mekanik kimyasal ve ısı dengede olması gerekir. Sistemin içinde ya da sistemle çevresi arasında dengelenmemiş bir kuvvet yoksa, sistem mekanik dengededir. Mekanik dengedeki bir sistemde kimyasal tepkimeler ve kütle geçişi gibi iç yapıyı değiştirecek olaylar gerçekleşmiyorsa, sistem kimyasal denge haline sahiptir. Mekanik ve kimyasal dengede olan bir sistem, çevresinden; ısı geçişi olan bir sınırla ayrılmışsa ve özelliklerinde bir değişme olmuyorsa, sistem ısı dengededir[9].

Mekanik, kimyasal ve ısı denge koşullarının birlikte sağlanması termodinamik dengeyi oluşturur. Termodinamik dengenin geçici rejimdeki davranışı; kararlı, kararsız ve metastabil denge kavramlarını ortaya çıkarır. Kararlı dengeye sahip bir sistem, herhangi bir dış etkiyle denge konumundan uzaklaşırsa ve dış etki sonradan ortadan kaldırılırsa sistem eski denge durumuna döner. Kararsız dengeye sahip bir sistem, bir dış etkiyle karşılaşır, eski denge durumuna gelmez ve yeni bir denge durumuna geçer. Metastabil dengeye sahip bir sisteme, sistemi denge halinden uzaklaştıracak ufak bir dış etki verilirse, sistem başka bir hale geçmez ve bu ufak etki sistem üzerinden kaldırılırsa sistem eski metastabil denge haline döner. Aynı sistem üzerine yeterince büyük değişiklik meydana getiren bir etki uygulanırsa, sistem metastabil denge halinden çıkarak yeni bir kararlı denge haline geçer.

Çevresiyle; ısı ve iş alışverişi yapmayan kapalı bir sistemin denge hali incelendiğinde, söz konusu sistemde iç enerji ve hacim sabit kalacaktır. Termodinamiğin birinci ve ikinci yasasından istifade edilerek;

$$TdS \geq dU + PdV \quad (2.6)$$

yazılır. $dU = 0$; $dV = 0$ olduğundan $dS \geq 0$ denge koşulu bulunur. Bu bağıntıda eşitsizlik dengenin olmamasına, eşitlik ise denge durumuna karşı gelir. Şu halde söz konusu sistem için denge durumu $S = S_{max}$, $dS = 0$ ve $d^2S < 0$ koşullarıyla belirtilir.

Sistem çevresiyle etkileşim içerisinde olduğunda, termodinamik denge sistem ile çevresinin etkileşim koşullarına bağlıdır. Uygulamada önemli olan dört etkileşim koşulu; aşağıda göz önüne alınacaktır.

1-) Sistem çevresiyle ısı alış verişi yapar, fakat hacmi ve entropisi sabit kalır ise bu durumda $dV=0$ ve $dS=0$ olup $dU \leq 0$ şeklinde bulunur. Böyle bir sistem denge durumuna yaklaştığında iç enerjisi azalacaktır ve denge durumunda $U=U_{\min}$, $dU=0$ ve $d^2U > 0$ koşulları sağlanır.

2-) Sistem çevresiyle ısı ve iş alış verişi yapar; basınç ve entropisi sabit kalır ise bu durumda;

$$TdS \geq dH - VdP \quad (2.7)$$

ve $dP=0$, $dS=0$ olduğundan $dH \leq 0$ denge koşulu olarak bulunur. Bu durumda sistem, denge konumuna yaklaştığında entalpisi azalır ve denge durumunda; $H=H_{\min}$, $dH=0$ ve $d^2H > 0$ koşulları sağlanır.

3-) Sistem çevresiyle ısı alış verişi yapar, fakat hacmi ve sıcaklığı sabit kalır ise; bu durumda,

$$d(TS) - dU \geq SdT + PdV \quad (2.8)$$

olur ve $F=U-TS$ Helmholtz serbest enerji fonksiyonu olarak tanımlanmak suretiyle $dT=0$, $dV=0$ ve $dF \leq 0$ denge koşulu olarak bulunur. Böyle bir sistem, denge konumuna yaklaştığında Helmholtz serbest enerjisi azalacaktır. Denge konumunda $F=F_{\min}$, $dF=0$ ve $d^2F > 0$ koşullarını sağlayacaktır.

4-) Sistem çevresiyle iş ve ısı alış verişi yapar, fakat sistemin basınç ve sıcaklığı sabit kalır ise; bu durumda denklem (2.7) den de yararlanılmak suretiyle;

$$d\Phi \leq -SdT + VdP \quad (2.9)$$

yazılır. $\Phi = H-TS$ Gibbs serbest enerji fonksiyonu olarak tanımlanır. $dT=0$ $dP=0$ olduğundan; $d\Phi \leq 0$ denge koşulu olarak bulunur. Böyle bir sistem denge konumuna yaklaştıkça Gibbs serbest enerjisi azalacaktır. Denge konumunda ise; $\Phi = \Phi_{\min}$, $d\Phi=0$ ve $d^2\Phi > 0$ koşullarını sağlayacaktır.

Bir termodinamik sistemin kararlılık koşulları, ısı kararlılık ve mekanik kararlılık olmak üzere ikiye ayırmak suretiyle incelenebilir. Isı kararlılık için $c_v > 0$ olmalıdır. Eğer sabit hacimde özgül ısı negatif bir değere sahip olursa, sisteme ısı ilave edildiğinde, sistemin sıcaklığının azalması anlamına gelir. Böylece sistem ile çevresi arasındaki sıcaklık farkının artışına ve daha fazla ısıнын sisteme geçişine neden olur. Böylece sistem gittikçe hızlanan bir şekilde kararlı denge halinden uzaklaşır ve kararsız denge haline geçer. Bu nedenle sabit hacimde özgül ısı pozitif olmalıdır. $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T < 0$ mekanik kararlılık koşulu incelendiğinde; söz konusu kısmi türev pozitif bir değere sahip olursa, basınçtaki artış, hacim artışını ve hacimdeki bir artış da basınç artışını getireceğinden, sistem gittikçe hızlanarak kararlı dengeden uzaklaşır. Bu yüzden kısmi türev, sabit sıcaklıkta negatif bir değere sahip olmalıdır.

2.4. Faz Dengesi ve Faz Dönüşümleri

Çevresiyle ısı ve iş alış verişi yapmayan bir sistemde, iki bölge iki fazdan oluşuyorsa, fazların birbirleriyle termodinamik dengede olabilmesi için aşağıda belirtilen üç koşul sağlanmalıdır.

$$\text{Mekanik denge} \quad P_1 = P_2 \quad (2.10)$$

$$\text{Isıl denge} \quad T_1 = T_2 \quad (2.11)$$

$$\text{Faz dengesi} \quad \phi_1 = \phi_2 \quad (2.12)$$

Faz dengesinin olabilmesi için ise; termodinamik dengeye ek olarak, kimyasal potansiyellerin eşitliği de gereklidir. Kimyasal potansiyel Gibbs serbest enerji fonksiyonunun kütleye bölünmesi ile bulunur.

Faz dönüşümü, sistemin özelliklerinde olan değişim sonucu, saf maddenin diğer faz haline gelmesi olayıdır. Faz dönüşümünün incelenmesinde Gibbs faz kuralı önem taşır[9].

$$\psi = W - \epsilon + 2 \quad (2.13)$$

Saf maddeye uygulama halinde karışım içindeki bileşen sayısı $W=1$ olduğunda (tek bileşenli); $\psi = 3 - \epsilon$ olur. Eğer saf madde bir fazdan oluşuyorsa $\epsilon=1$ olacağından $\psi=2$ olarak bulunur. Bu durumda sistemin serbestlik derecesi iki olduğundan, iki özellik verilirse diğer tüm özellikler bulunabilir. Örneğin sıkıştırılmış sıvı ya da kızgın buhar bölgesinde olan

suyun özellikleri bu kurala uyar. Şayet saf madde iki fazdan oluşuyor ise $\epsilon=2$ olacağından $\psi=1$ olarak bulunur. Bu durumda sistemin serbestlik derecesi bir olur ve tek özellik sistemin her fazının tüm özelliklerini belirlemeye yeter. Örneğin doymuş sıvı ve buhar karışımı bölgesinde bulunan suyun sıvı ve buhar fazlarının tüm özelliklerini bulabilmek için; doyma basıncı ya da doyma sıcaklığı gibi bir özeliğin verilmesi yeterlidir.

Eğer bir bileşenli saf madde üç fazdan oluşuyor ise $\epsilon=3$ ve $\psi=0$ olur. Serbestlik derecesi sıfır olarak bulunduğundan, birbirinden bağımsız olarak alınan koordinatların sayısı da sıfırdır. Üç faz yalnız belirli bir basınç ve sıcaklıkta birlikte bulunur. Bu noktaya üçlü nokta adı verilir.

Faz dönüşümü sırasında basınç ve sıcaklık değişimleri Clausius Clapeyron denklemi ile ifade edilir. P basıncında, T sıcaklığında iki faz dengedeysse, kimyasal potansiyeller birbirine eşit olacaktır.

$$\phi_1(P,T)=\phi_2(P,T) \quad (2.14)$$

Her iki fazın basıncı dP ve sıcaklığı dT kadar değiştirilirse; yeni durumda iki faz dengede olmaya devam ederse;

$$\phi_1(P+dP,T+dT)=\phi_2(P+dP,T+dT) \quad (2.15)$$

olur.

$$\phi(P+dP,T+dT)=\phi(P,T)+\left(\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)_T dP+\left(\frac{\partial\phi}{\partial T}\right)_P dT+... \quad (2.16)$$

şeklinde Taylor serisine açılarak ikinci ve daha yüksek mertebeden diferansiyeller diğerlerinin yanında ihmal edilerek ve (2.17) , (2.18) bağıntıları da kullanılmak suretiyle;

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)_T = v \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial T}\right)_P = -s \quad (2.18)$$

$$\phi_1(P,T)+v_1dP-s_1dT=\phi_2(P,T)+v_2dP-s_2dT \quad (2.19)$$

şeklinde yazılır.

$$\phi_1(P, T) = \phi_2(P, T) \quad (2.20)$$

olduğundan;

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} \quad (2.21)$$

olacaktır. Faz dönüşümü sırasında basınç ve sıcaklık sabit kaldığı için;

$$Tds = dh \Rightarrow T(s_2 - s_1) = h_2 - h_1 \quad (2.22)$$

bulunur. Böylece Clausius Clapeyron denklemi; h_{lg} faz değişimi entalpisi olmak üzere aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{dP}{dT} = \frac{h_{lg}}{T(v_g - v_l)} \quad (2.23)$$

2.5. Faz Kararlılığı

İki fazlı bir sistem ele alındığında Gibbs serbest enerjisi;

$$\Phi = \phi_1 m_1 + \phi_2 m_2 \quad (2.24)$$

şeklinde yazılır. Faz dönüşümü sırasında sıcaklık ve basıncın sabit kaldığı düşünülürse; kimyasal potansiyeller de sabit kalacağından;

$$d\phi_1 = 0, \quad d\phi_2 = 0 \quad (2.25)$$

yazılır. Bu takdirde;

$$d\Phi = \phi_1 dm_1 + \phi_2 dm_2 \quad (2.26)$$

bulunur. Sistemin toplam kütlesi sabit olduğundan;

$$m = m_1 + m_2 = \text{sbt} \Rightarrow dm_1 = -dm_2 \quad (2.27)$$

yazılır. (2.26) ifadesi ile (2.27) ifadeleri birleştirilmek suretiyle;

$$d\Phi=(\varphi_2-\varphi_1)dm_2 \quad (2.28)$$

yazılır. Basınç ve sıcaklığın sabit kaldığı bir sistemde; termodinamik dengeye ulaşmak için, Gibbs serbest enerjisi azalacaktır.

$$d\Phi<0 \quad (2.29)$$

Bu durumda eğer $\varphi_2>\varphi_1$ ise $dm_2<0$ olacaktır ve (2) fazından (1) fazına kütle geçişi olur. Eğer $\varphi_1>\varphi_2$ ise $dm_2>0$ olur ve bu durumda (1) fazından (2) fazına kütle geçişi olur. Her iki durum birlikte incelendiğinde kimyasal potansiyeli daha ufak olan fazın daha kararlı olduğu söylenebilir.

2.6. Farklı Faz Basınçlarında Faz Dönüşümü

İki faz üzerinde farklı basınç olduğu zaman, fazlar yine termodinamik dengede olabilir. Şu halde iki faza etki eden basınçlar arasındaki fark, fazlardan birisine etki eden ek basınca eşittir. Diğer bir durum da, iki fazın başlangıçta aynı basınçta olması ve fazlardan birinin basıncının ani olarak değişmesidir. Bu durumda dengedeki sistemin bir fazının basıncı artırılırsa, diğerinin de basıncı artacaktır.

Eğer iki faz arasındaki yüzey düzlemsel değilse ve eğimliyse, yüzey gerilimine bağlı olarak fazlar arasında bir basınç farkı oluşur. Birbirine dik iki eğrilik yarıçapı r_1 ve r_2 ile belirli bir yüzey için iki faz arasındaki basınç farkı[10];

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.30)$$

olur. Küresel bir ara yüzey söz konusu olursa; $r_1 = r_2 = r$ olacaktır. Bu durumda;

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{r} \quad (2.31)$$

olarak bulunur.

2.7. Kabarcık Dinamiği

Çekirdek kaynamanın temeli kabarcık oluşumudur. Kabarcıkların; makroskopik düzeyde dinamiği olarak adlandırılan, ana sıvı kütlesi içerisindeki hareketi ve mikroskopik düzeyde dinamiği olarak adlandırılan; kabarcık yarıçapının zaman içindeki değişimi, kaynama olayı ve kritik ısı akısının belirlenmesi; buhar kazanları, buharlaştırıcılar, iklimlendirme ve soğutma sistemleri, nükleer reaktörler gibi içerisinde faz dönüşümü olan sistemlerde, yüksek öneme sahiptir. Diğer yandan kabarcık dinamiğinin incelenmesinin, hidromekanik bilimi açısından da özellikle kavitasyonlu akışın olduğu sistemlerde, önemli bir yeri vardır.

Sıvı içerisinde bir kabarcığın oluşabilmesi için; belli bir miktarda enerjiye ihtiyaç vardır ve ihtiyaç duyulan enerji miktarı aşağıdaki gibi belirtilebilir[5].

- a-)Kabarcık oluşumu için gerekli buharlaşma gizli ısısına ihtiyaç vardır,
- b-)Kabarcık yüzeyinde, yüzey gerilim kuvvetlerinin yaptığı işin karşılanması gereklidir,
- c-) Kabarcığın büyümesi sırasında, kabarcık yüzeyi ile sıvı fazı temasta olduğundan, viskoz ve sürtünme kuvvetlerince yapılacak işi karşılayacak enerjiye ihtiyaç vardır.

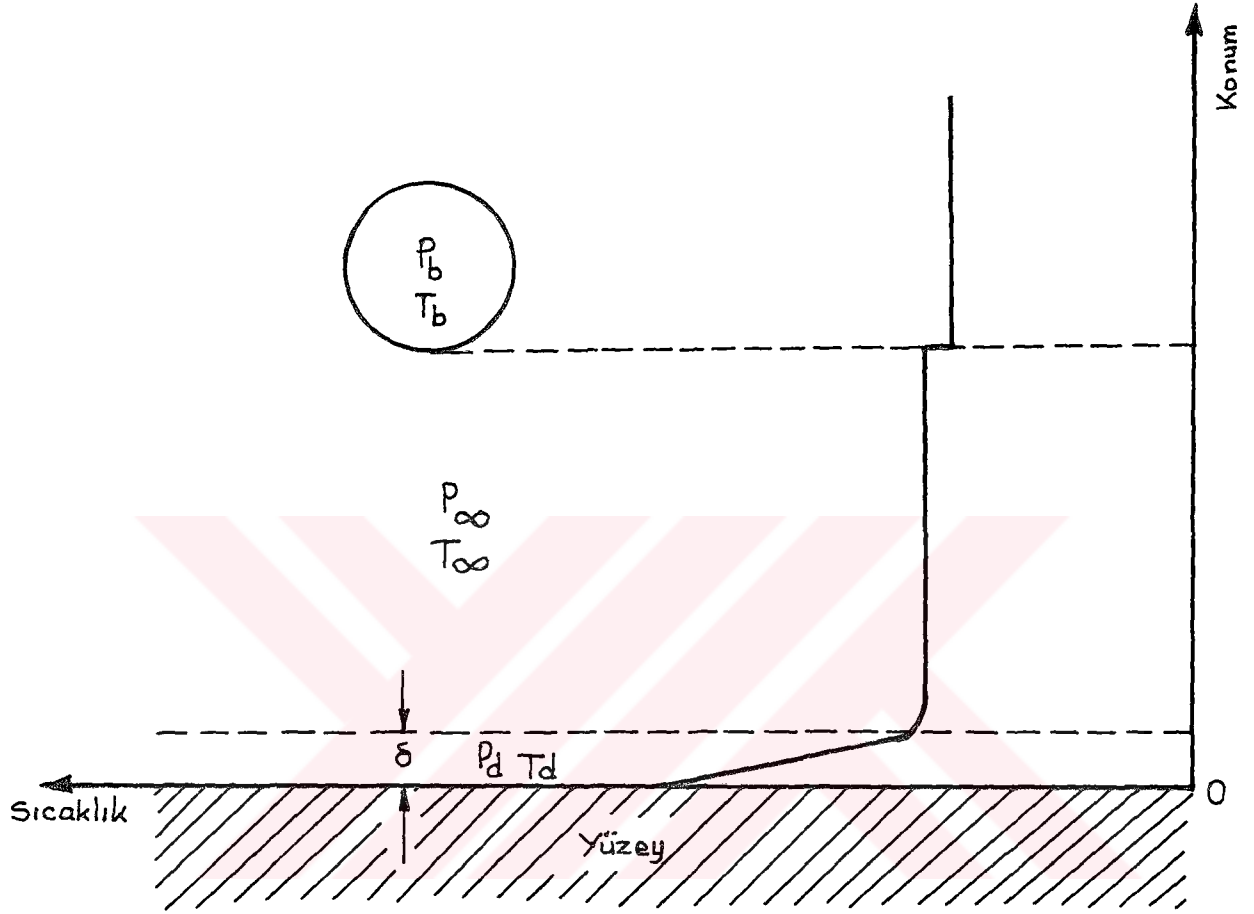
Bütün bu etkilerin karşılanabilmesi için; sıvı ile, kabarcık ara yüzeyinde enerji geçişi olmalıdır. Şekil (2.1)'den de görüleceği üzere sınır tabakanın hemen başlangıcında sıcaklığı T_{∞} ve basıncı P_{∞} olan bir sıvı kütlesi gözönüne alındığında, sıvının kabarcık oluşturabilmesi için kızdırılması gerekir. Söz konusu kabarcığın içerisindeki buharın basıncı P_b ve sıcaklığı T_b olsun. Kızdırmanın T_{∞} 'a kadar çıktığı varsayılır ise ve T_{∞} 'a karşı gelen doyma basıncına P_d ve sıvının basıncı olan P_{∞} 'a karşı gelen doyma sıcaklığına T_d denildiğinde;

$$T_{\infty} > T_d \quad \text{ve} \quad P_{\infty} < P_d \quad (2.32)$$

olacaktır. Kabarcığın büyüebilmesi için;

$$P_b > P_{\infty} \quad (2.33)$$

olur ve eğrisel ara yüzey nedeniyle;



Şekil 2.1. Ana sıvı kütlesi içinde büyüyen kabarcık

$$P_b < P_d \quad (2.34)$$

olur. Bu durumda; (2.33) ve (2.34) eşitsizlikleri birleştirilirse;

$$P_\infty < P_b < P_d \quad (2.35)$$

elde edilir. Söz konusu basınçlara ait sıcaklıklar gözönüne alındığında ise;

$$T_d < T_b < T_\infty \quad (2.36)$$

elde edilir. Kızdırma miktarını hesaplamak için; kabarcık duvarında termodinamik denge kabul edilirse, Clasius Clapeyron denklemi kullanılabilir.

$$\frac{dP}{dT} = \frac{h_{lg}}{v_{lg}T} \quad (2.37)$$

R kabarcık yarıçapı olmak üzere mekanik denge aşağıdaki ifadede belirtildiği gibidir.

$$P_d - P_\infty = \frac{2\sigma}{R} \quad (2.38)$$

P_∞ 'a karşı gelen doyma sıcaklığı T_d ve T_∞ 'a karşı gelen doyma basıncı P_d olduğundan Clasius Clapeyron denklemi integre edilmek suretiyle;

$$\int_{T_d}^{T_\infty} \frac{dT}{T} = \int_{P_\infty}^{P_d} \frac{v_{lg}}{h_{lg}} dP \quad (2.39)$$

ve integrasyon sınırları içinde v_{lg} ve h_{lg} 'nin değişmediği kabul edilerek;

$$\int_{T_d}^{T_\infty} \frac{dT}{T} = \frac{v_{lg}}{h_{lg}} \int_{P_\infty}^{P_d} dP \quad (2.40)$$

yazılır.

$$\ln \frac{T_\infty}{T_d} = \frac{v_{lg}}{h_{lg}} \frac{2\sigma}{R} \quad (2.41)$$

bulunur. $\ln \frac{T_\infty}{T_d}$ fonksiyonu; $\frac{T_\infty}{T_d} \cong 1$ civarında seriye açılır ve ufak kızdırma miktarları için ilk terim yanında, diğer terimler ihmal edilirse;

$$\ln \frac{T_\infty}{T_d} \cong \frac{T_\infty}{T_d} - 1 \quad (2.42)$$

bulunur. (2.40) denklemi; (2.39) denkleminde yerine konulmak suretiyle gerekli kızdırma miktarı;

$$T_{\infty} - T_d \cong \frac{V_{lg}}{h_{lg}} \frac{2\sigma T_d}{R} \quad (2.43)$$

olarak bulunur. Bu sıcaklık farkı, sıvının kabarcık oluşturabilmek için, doyma sıcaklığının ne kadar üzerinde ısıldığını veya ısıtıcı yüzey ile kabarcık duvarı arasındaki sıcaklık düşümünü gösterir. Kabarcıkların sıfır yarı çapından itibaren büyüyemedikleri denklem (2.43)'de limit alınırsa, $R \rightarrow 0$ giderken;

$$\lim_{R \rightarrow 0} (T_{\infty} - T_d) = \infty \quad (2.44)$$

olduğu görülür. Başlangıç yarıçapı sıfır olan kabarcığı oluşturmak için gerekli kızdırma miktarının sonsuz olduğu ortaya çıkmaktadır[11]. Bu takdirde büyüme sıfırdan büyük bir yarıçaptan başlamalıdır. Dergarabedian[12], kabarcığın büyümeye başladığı; dinamik olarak dengesiz başlangıç yarıçapının; $\Delta P = P_b - P_{\infty}$ olmak üzere;

$$\frac{4R}{3\Delta P} \leq R_0 \leq \frac{2R}{\Delta P} \quad (2.45)$$

aralığında olduğunu vermektedir. Kaynama konusunda yapılan deneyler sonucunda, R_0 yarıçapından itibaren büyümeye başlayan kabarcıkların üç ayrı mekanizmayla oluştuğu görülmektedir.

a-) Yüzey üzerinde kabarcık oluşmasıdır. Kabarcıklar ısıtıcı yüzeyin her tarafında oluşmayıp, belirli noktalarında oluştuğu görülmektedir. Bu noktalara kabarcık kaynakları adı verilir. Bunlar, plastik şekil verme işlemi sırasında oluşan oyuklar, mikroskopik dikenler, malzeme üzerindeki damar sınırları veya yüzey üzerindeki kir ve oksit tabakaları, yüzey malzemesinin heterojenlik gösteren bölgeleri, yüzey pürüzlülüğü arasına sıkışmış çok küçük kabarcık gaz çekirdeklerinin büyümesiyle olabilir[13].

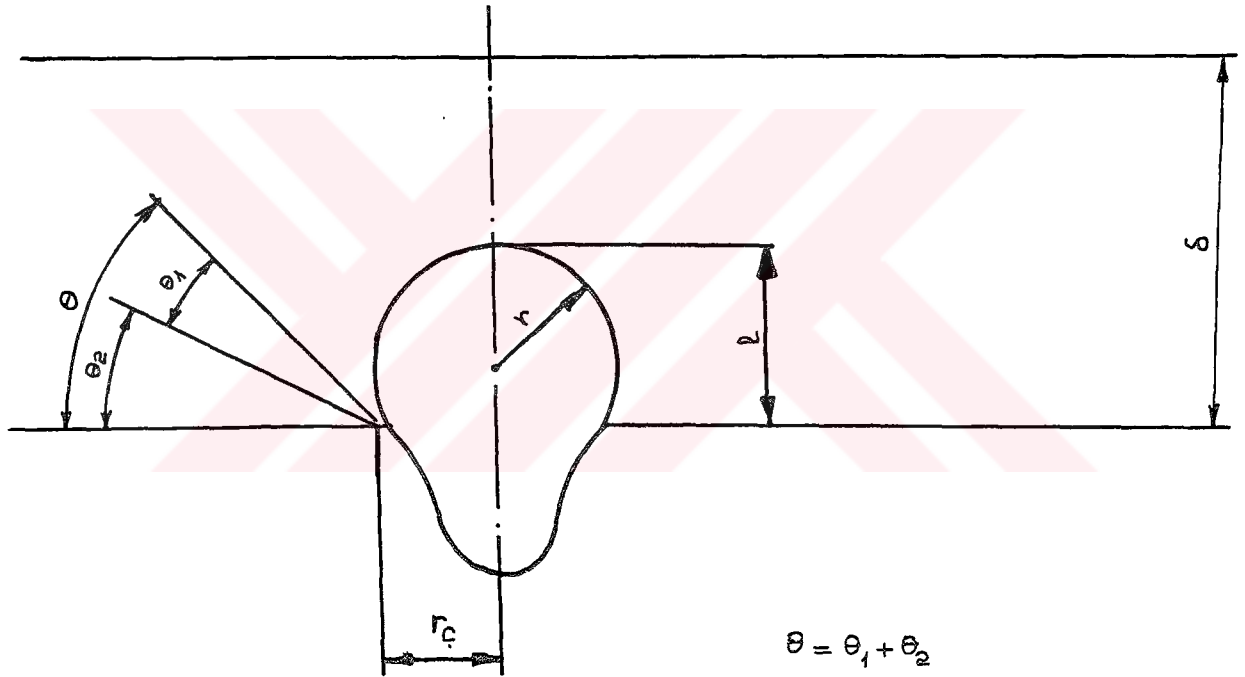
b-) Sıvı içinde yabancı maddelerin etrafında veya çok küçük gaz kabarcıklarının sıkışması ve bu kabarcıkların büyümesiyle kabarcık oluşmasıdır.

c-) Adyabatik kaynama ile kabarcık oluşması şeklindedir. Bu tür kaynamada sıvı yüksek basınç altında iken basınç aniden kaldırılır ve mekanik olarak kabarcık oluşturulur[10].

Isıtıcı yüzeyin sıcaklığı da kabarcık kaynaklarının sayısı için belirleyici bir etkidir. Gaertner^[14], bu sayı için;

$$N \approx \exp\left(\frac{-1}{T_v^3}\right) \quad (2.46)$$

orantısını verir. Hangi oyukların kabarcık oluşturacağı; Şekil (2.2)'den de görüleceği üzere Hsu'nun modeline göre incelenebilir^[15].



Şekil 2.2. Kabarcık oluşturan oyuklar

Hsu'nun modeline göre δ kalınlığındaki ısıl sınır tabaka içinde bulunan ve ağız yarıçapı R olan oyukta bulunan sıkışmış bir gazdan (hava olabilir) kabarcık oluşur. Bu kabarcık daha önce aynı oyuktan kalkan kabarcığın bıraktığı buhar gaz karışımı tarafından şekillendirilmiştir. Kabarcık "1" yüksekliğine gelip, yüzeyden ayrılınca olay tekrarlanır. Yüzeyden sıvıya ısı iletimle geçer. Sıvının sıcaklığı oyuk içindeki kabarcığın bulunduğu basınçtaki doyma sıcaklığını aşınca bu kez sıvı ile

kabarcık ara yüzeyinde kabarcığa doğru buharlaşma başlar. Bunun sonucunda kabarcık büyür ve yarıçapı belli bir değere ulaşınca yüzeyden ayrılır. Bu mekanizmayla oluşan kabarcıklar ancak R yarıçapına sahip oyuklar içerisinde çıkabilir. Hsu kabarcığının ancak iki yarıçap değeri arasında oluşabileceğini göstermiştir.

$$(R)_{1,2} = \frac{\delta}{4} \left[(1 - \xi_d) \pm \sqrt{(1 - \xi_d)^2 - \frac{6.4A}{\delta T_v}} \right] \quad (2.47)$$

$$R_1 > R > R_2 \quad (2.48)$$

olup;

$$\xi = \frac{T_d - T_\infty}{T_v - T_\infty} \quad \text{ve} \quad A = \frac{2\sigma T_d}{\rho_g h_{lg}} \quad (2.49)$$

olarak ifade edilir. Scriven yalnız ısı geçişi kontrollü büyümede kabarcık yarıçapını

$$R = 2\beta \sqrt{\alpha_1 t} \quad (2.50)$$

şeklinde vermektedir. α_1 ısı yayılım katsayısı olup; birimi m^2/s dir. β büyüme katsayısı olup; basınç ve sıcaklık farkının fonksiyonudur. Kızdırmanın ufak değerlerinde;

$$\beta = \sqrt{\left\{ \frac{(T_\infty - T_d)}{2 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \left[\frac{h_{lg}}{c_l} + \frac{c_l + c_g}{c_l} (T_\infty - T_d) \right]} \right\}} \quad (2.51)$$

ve kızdırmanın büyük değerleri için;

$$\beta = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left\{ \frac{(T_\infty - T_d)}{\left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \left[\frac{h_{lg}}{c_l} + \frac{c_l + c_g}{c_l} (T_\infty - T_d) \right]} \right\} \quad (2.52)$$

şeklinde ifade edilir. Diğer bir çalışma Mikic ve Rohsenow tarafından gerçekleştirilmiştir[17].

$$R^{\dagger} = \frac{2}{3} \left[\left(t^{\dagger} + 1 \right)^{3/2} - \left(t^{\dagger} \right)^{3/2} - 1 \right] \quad (2.53)$$

$$R^{\dagger} = \frac{AR}{B^2} \quad \text{ve} \quad t^{\dagger} = \frac{A^2 t}{B^2} \quad (2.54)$$

$$A = \left[b \frac{(h_g - h_p) \rho_g - (T_{\infty} - T_d)}{\rho_l T_d} \right]^{1/2} \quad (2.55)$$

$$B = \left(\frac{12}{\pi} \alpha_1 \right)^{1/2} J_a \quad (2.56)$$

Jakob sayısı;

$$Ja = \frac{(T_{\infty} - T_d) c_p r_l}{r_g h_{fg}} \quad (2.57)$$

Burada B bir katsayı olup, yüzey üzerinde büyüyen kabarcık için $B = \frac{\pi}{7}$ ve sıvı kütlesi içinde büyüyen kabarcık için $B = 2/3$ değerindedir.

Forster ve Zuber kabarcık yarıçapının büyümesini zamana bağlı olarak;

$$R \cong \sqrt{\pi} Ja (\alpha_1 t)^{1/2} \quad (2.58)$$

bağıntısı ile vermektedir[18].

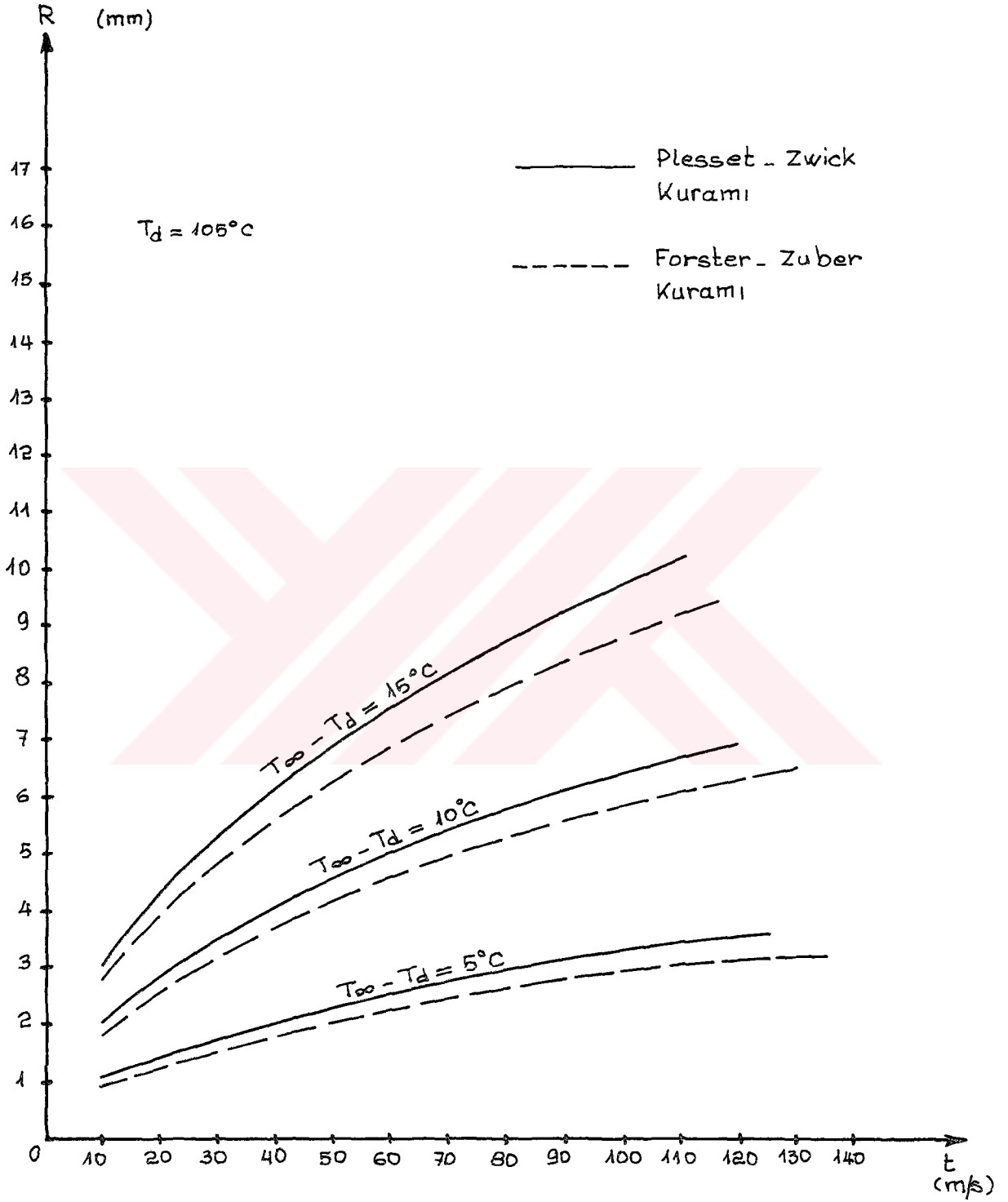
Plesset ve Zwick'de kabarcık yarıçapının zamanla değişimini

$$R \cong \left(\frac{12}{\pi} \right)^{1/2} Ja (\alpha_1 t)^{1/2} \quad (2.59)$$

şeklinde ifade etmişlerdir[19].

Forster ve Zuber kuramıyla, Plesset ve Zwick kuramı yaklaşık aynı sonucu vermektedir. Her iki kuram arasında fark, sabitlerin değişik olmasıdır. Birbirlerine göre yaklaşık % 9.3'lük bir sapma gösterirler. Şekil (2.3)'de $T_d=105^\circ\text{C}$ doyma sıcaklığı alınarak, çeşitli kızdırma miktarları için; yarıçapın zamana bağlı değişimi her iki kuram içinde verilmiştir.





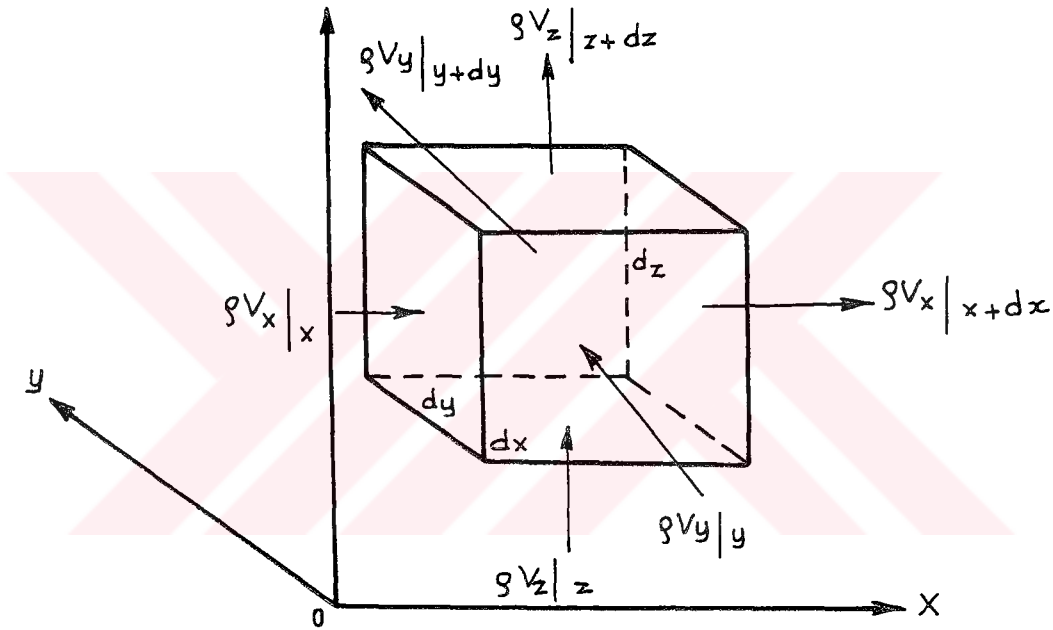
Şekil 2.3. Kabarcık yarıçapının zamana bağlı değişimi

BÖLÜM 3

KORUNUM DENKLEMLERİNİN TÜRETİLMESİ

Tek fazlı akış sistemleri için, korunum denklemlerinin kartezyen koordinatlarda türetilmesi.

Şekil (3.1)'de içerisinde akışkan geçen ve hacmi $dx dy dz$ olan bir diferansiyel hacim elemanı görülmektedir.



Şekil 3.1. Kartezyen koordinatlarda diferansiyel hacim elemanı

3.1. Süreklilik Denkleminin Kartezyen Koordinatlarda Türetilmesi

Kütlenin korunumu gereğince; kütlenin birikme miktarı; sisteme giren kütle miktarı ile , sistemden çıkan kütle miktarı arasındaki farka eşit olacaktır. x eksenine doğrultusunda diferansiyel hacim elemanına giren $\rho V_x|_x dy dz$ ve yine x eksenine doğrultusunda söz konusu hacim elemanından çıkan kütle miktarı $\rho V_x|_{x+dx} dy dz$ olur. Böylece x eksenine doğrultusunda hacim elemanı içinde kütlenin değişimi $(\rho V_x|_x - \rho V_x|_{x+dx}) dy dz$ olur. $\rho V_x|_{x+dx}$ ifadesi Taylor serisine açıldığında;

$\rho V_x + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} \Big|_x \frac{dx}{1!} + \frac{\partial^2(\rho V_x)}{\partial x^2} \Big|_x \frac{dx^2}{2!} + \frac{\partial^3(\rho V_x)}{\partial x^3} \Big|_x \frac{dx^3}{3!} + \dots$ birinci ve ikinci terim alınır ve bu terimler yanında diğer terimler ihmal edilirse, x eksenini doğrultusunda kütlenin değişimi $\left[\rho V_x - \rho V_x - \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx \right] dy dz = -\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx dy dz$ elde edilir. Benzer şekilde y eksenini doğrultusunda kütlenin değişimi $-\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} dx dy dz$ ve z eksenini doğrultusunda kütlenin değişimi $-\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} dx dy dz$ olacaktır. Diferansiyel hacim elemanı içerisinde kütlenin birim zamandaki değişimi $\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$ dir. Bu ifade ile kütlenin korunumu gereğince, yukarıda her bir eksen doğrultusunda hesaplanan kütle değişimleri toplamı birbirine eşit olduğundan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \left(\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \right) dx dy dz$$

yazılır ve kütle korunumunun genel ifadesi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \rho V_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho V_z \right] \quad (3.1)$$

şeklinde bulunur. Aynı ifade vektör notasyonu ile yazıldığında $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \vec{V} = -\text{div} \rho \vec{V}$ olur.

(3.1) Denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki ifadelerin diferansiyelleri alınıp yoğunluğun türevleri eşitliğin sol tarafında toplanırsa;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

elde edilir. Böylece (3.2) denklemi (3.3) denklemindeki yapıya sahip olur.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V} \quad (3.3)$$

Sıkıştırılmaz sıvılar için süreklilik denklemi ise;

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.4)$$

şeklinde yazılır.

3.2 Momentum Korunum Denkleminin Kartezyen Koordinatlarda Türetilmesi

Momentum korunumu gereğince, sistemin momentum değişimi sisteme etki eden kuvvetlerin toplamı ve sisteme giren momentum miktarı ile sistemden çıkan momentum miktarının farkına eşittir.

Momentum değişimi, diferansiyel hacim elemanında iki şekilde olmaktadır. Birincisi kütle akışının neden olduğu, diğeri de hız gradyanlarının etkisiyle moleküler geçiştir. x eksenini doğrultusunda diferansiyel hacim elemanına taşınım yoluyla giren momentum miktarı $\rho V_x V_x|_x dydz$ ve yine x eksenini doğrultusunda söz konusu hacim elemanından çıkan momentum miktarı $\rho V_x V_x|_{x+dx} dydz$ olur. Böylece x eksenini doğrultusunda kütle akışı yoluyla momentum değişimi $(\rho V_x V_x|_x - \rho V_x V_x|_{x+dx}) dydz$ olur. $\rho V_x V_x|_{x+dx}$ ifadesi Taylor serisine

$$\text{açıldığında; } \rho V_x V_x|_x - \frac{\partial(\rho V_x V_x)}{\partial x} \Big|_x \frac{dx}{1!} + \frac{\partial^2(\rho V_x V_x)}{\partial x^2} \Big|_x \frac{dx^2}{2!} - \frac{\partial^3(\rho V_x V_x)}{\partial x^3} \Big|_x \frac{dx^3}{3!} + \dots$$

birinci ve ikinci terimlerin yanında, diğer terimler ihmal edilirse, x eksenini doğrultusunda kütle akışının neden olduğu momentum değişiminin x eksenini yönündeki bileşeni;

$$\left[\rho V_x V_x - \rho V_x V_x - \frac{\partial \rho V_x V_x}{\partial x} dx \right] dydz = - \frac{\partial \rho V_x V_x}{\partial x} dx dydz \quad \text{olur. Benzer}$$

şekilde y eksenini doğrultusunda, kütle akışının neden olduğu momentum değişiminin x eksenini yönündeki bileşeni; $-\frac{\partial \rho V_y V_x}{\partial y} dx dydz$ ve z eksenini doğrultusundaki kütle akışının neden olduğu momentum değişiminin x

ekseni yönündeki bileşeni $-\frac{\partial \rho V_z V_x}{\partial z} dx dy dz$ olur. Toplam kütle akışı yoluyla momentum değişiminin x eksen yönündeki bileşeni;

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho V_x V_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y V_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho V_z V_x\right) dx dy dz \quad (3.5)$$

olur. x eksen doğrultusunda moleküler taşınım yolu ile momentum değişiminin x eksen yönündeki bileşeni $\left[\tau_{xx}\big|_x - \tau_{xx}\big|_{x+dx}\right] dy dz$ olacaktır.

$\tau_{xx}\big|_{x+dx}$ ifadesi Taylor serisine açılır ise;

$$\tau_{xx}\big|_{x+dx} = \tau_{xx}\big|_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\big|_x \frac{dx}{1} + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2}\big|_x \frac{dx^2}{2!} + \dots \text{ ve ilk iki terimler yanında, diğer}$$

terimler ihmal edilir ise $\left[\tau_{xx} - \tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx\right] dy dz$ olur. x eksen

doğrultusunda moleküler taşınım yolu ile momentum değişiminin x eksen yönündeki bileşeni $-\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx dy dz$, ve yine benzer şekilde y

ekseni doğrultusunda moleküler taşınım yolu ile momentum değişiminin x eksen yönündeki bileşeni $-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz$ ve z eksen doğrultusunda

moleküler taşınım yolu ile momentum değişiminin x eksen yönündeki bileşeni $-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz$ olur. Toplam moleküler taşınım yoluyla momentum değişiminin x eksen yönündeki bileşeni;

$$-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dx dy dz \quad (3.6)$$

olur. Burada τ_{xx} ; x eksen yüzeyine dik ve x eksen doğrultusundaki normal gerilme; τ_{yx} ise viskoz kuvvetlerin etkisiyle y eksen yüzeyine dik ve x eksen yönündeki teğetsel gerilmedir.

Hareket halindeki bir akışkan için hal denklemi $p=p(\rho, T)$ şeklindedir ve skaler bir büyüklüktür. Çoğu kez sistem üzerine etkiyen kuvvetlerden en önemlileri olarak akışkanın basıncı ve yerçekimi ivmesinden dolayı meydana gelen kuvvetler gözönüne alınır. Bu kuvvetlerin x eksen doğrultusundaki bileşkesi ise;

$(p|_x - p|_{x+dx})dydz + \rho g_x dx dy dz$ olur. Göz önüne aldığımız diferansiyel hacim elemanına etki eden kuvvetlerin toplamı olarak

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \right] dx dy dz \quad (3.7)$$

yazılır. Diferansiyel hacim elemanı içerisinde x eksenini doğrultusunda momentum değişimi $\frac{\partial \rho V_x}{\partial t} dx dy dz$ dir. Momentumun korunumu gereğince;

$$\frac{\partial \rho V_x}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho V_x V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y V_x}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z V_x}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (3.8)$$

olur. Benzer şekilde diferansiyel hacim elemanı içerisinde sırasıyla y eksenini ve z eksenini doğrultularında momentum korunum denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial \rho V_y}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho V_x V_y}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z V_y}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \rho V_z}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho V_x V_z}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y V_z}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z V_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (3.10)$$

Burada, $\rho V_x, \rho V_y, \rho V_z$ kütle miktarı vektörü $\rho \vec{V}$ 'nin bileşenleridir. g_x, g_y, g_z yerçekimi ivmesi g 'nin bileşenleridir. $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ ise ∇p (grad p) vektörünün bileşenleridir. $\rho V_x V_x, \rho V_x V_y, \rho V_x V_z, \rho V_y V_x, \rho V_y V_y, \rho V_y V_z, \rho V_z V_x, \rho V_z V_y, \rho V_z V_z$ kütle akışı momentum akışı olup $\rho \vec{V} \vec{V}$ 'nin dokuz tane olan bileşenlerini göstermektedir. $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz}$ gerilme tansörü (τ)'nin dokuz tane olan bileşenlerini göstermektedir. Momentumun korunumu vektörel olarak aşağıdaki gibi yazılır. Birim hacimde momentum değişimi: birim hacimde kütle akışı ile kazanılan momentum değişimi, birim hacim elemanı üzerindeki basınç kuvveti, birim hacimde moleküler taşınım ile kazanılan momentum değişimi ve birim hacim elemanı üzerindeki yerçekimi kuvvetinin toplamına eşittir.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\left(\nabla \cdot \rho \vec{V} \vec{V}\right) - \nabla p - \nabla \cdot \tau + \rho \vec{g} \quad (3.11)$$

Denklem (3.8)'de kütle akışı yoluyla momentum değişimi ifadelerinin diferansiyelleri alınarak eşitliğin sol tarafında toplanmak suretiyle ve (3.1) kütlenin korunumu denkleminde de faydalanılarak;

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (3.12)$$

bulunur. Aynı işlemler sırası ile (3.9) ve (3.10) denklemlerine uygulandığında;

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad (3.13)$$

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (3.14)$$

bulunur. Toplam momentum değişimi ise

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \tau + \rho \vec{g} \quad (3.15)$$

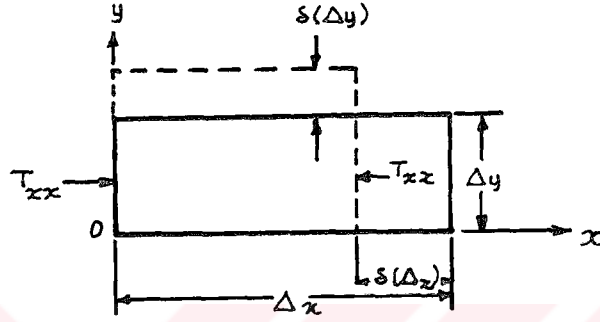
olur. (3.15) denkleminde birim hacmin kütlesi ile diferansiyel hacim elemanı üzerine etki eden kuvvetlerden ötürü; kazandığı ivme ile çarpımı birim hacim elemanı üzerindeki basınç kuvveti, birim hacim elemanına etki eden viskoz kuvvetler ve birim hacim elemanı üzerindeki yerçekimi kuvvetinin toplamına eşittir. Viskoz kuvvetlerin ihmal edilmesi halinde $\nabla \cdot \tau = 0$ olur ve (3.15) denklemi;

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (3.16)$$

şeklini alır ki Euler denklemi olarak bilinen bu denklem viskoz etkilerin oldukça önemsiz olduğu akış sistemlerinin tanımlanmasında kullanılır.

Katı elastik cisimlere ait olan Hooke yasası gereğince; gerilme ve şekil değiştirme bağıntılarının lineer olarak değiştiği göz önüne

alındığında Stoke'un Newtonien akışkanlar için aynı lineer bağıntının söz konusu olduğu hipotezinin açıklanması ve gerilmelerin dinamik vizkozite ile hız gradyanı cinsinden ifade edilmesinden önce, katı elastik cisimler için geçerli olan gerilme ve şekil değiştirme bağıntılarına burada kısaca değinilecektir.

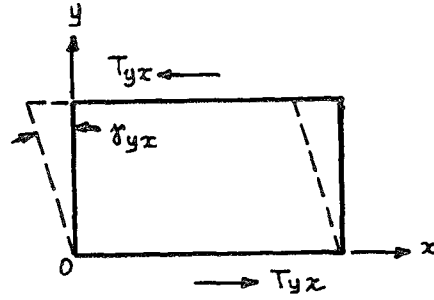


Şekil 3.2 Normal gerilmenin neden olduğu deformasyon

Normal gerilme basıya çalıştığında, işaretini pozitif kabul edersek Şekil (3.2)'de de görüldüğü üzere x eksenı doğrultusunda bir daralma olurken, y eksenı doğrultusunda genişlemenin olduğu görülür. Söz konusu sistem üç boyutlu olursa z eksenı doğrultusunda da genişleme meydana gelir. x eksenı doğrultusundaki şekil değiştirme negatif değere sahip olur ve $\epsilon_x = \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x}$ olarak gösterilir. Dış etkiler altında kenarlar şekil değiştirdikten sonra sırası ile $(1+\epsilon_x)\Delta x$, $(1+\epsilon_y)\Delta y$, $(1+\epsilon_z)\Delta z$ olur. Böylece eski hacim $\Delta V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z$ iken yeni hacim $\Delta V = (1+\epsilon_x)\Delta x (1+\epsilon_y)\Delta y (1+\epsilon_z)\Delta z$ olur. Hacim değiştirme oranı;

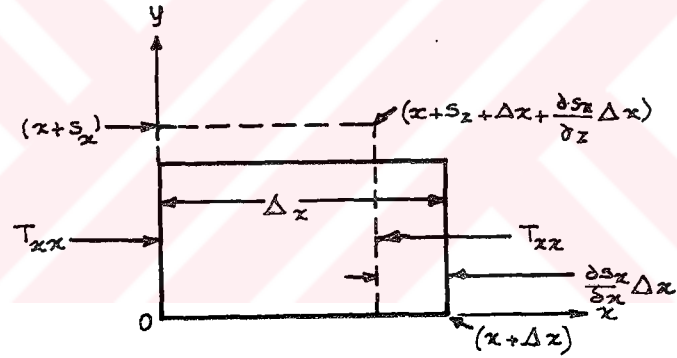
$$\epsilon_v = \frac{\delta(\Delta V)}{\Delta V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (3.17)$$

şeklinde yazılır. Teğetsel gerilme ile oluşan şekil değiştirme açısaldır ve Şekil (3.3)'de gösterilmektedir.

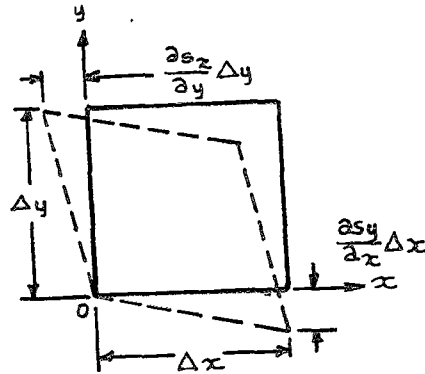


Şekil 3.3. Teğetsel gerilmenin neden olduğu deformasyon

$\vec{s}$ vektörü $\vec{s} = s_x \vec{e}_x + s_y \vec{e}_y + s_z \vec{e}_z$, x, y, z koordinatlarındaki yerdeğiştirme vektörüdür. s_x, s_y, s_z , x, y, z değişkenlerinin sürekli ve türevi olan fonksiyonlarıdır. s_x, s_y, s_z ve bunların kısmi türevleri küçük ise,



Şekil 3.4. Yer değiştirme vektörü ile ifade edilen daralma



Şekil 3.5. Yer değiştirme vektörü ile ifade edilen açısal deformasyon

Şekil (3.4)'den de görüleceği üzere; şekil değiştirme $\epsilon_x = \frac{\partial s_x}{s_x}$ olarak bulunur. Şekil (3.5)'den de görüleceği gibi x ve y doğrultuları arasındaki γ_{xy} açı değiştirmesi $\alpha_1 + \alpha_2$ olur.

$$\tan \alpha_1 = \frac{-\frac{\partial s_y}{\partial x} \Delta x}{\Delta x} = -\frac{\partial s_y}{\partial x} \Rightarrow \alpha_1 \cong -\frac{\partial s_y}{\partial x} \text{ ise;}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{-\frac{\partial s_x}{\partial y} \Delta y}{\Delta y} = -\frac{\partial s_x}{\partial y} \Rightarrow \alpha_2 \cong -\frac{\partial s_x}{\partial y} \text{ ise;}$$

$$\gamma_{xy} = -\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) \quad (3.18)$$

olur. Böylece; normal gerilmenin neden olduğu deformasyon

$$\epsilon_i = \frac{\partial s_i}{\partial x_i} \quad (3.19)$$

Teğetsel gerilmenin neden olduğu deformasyon

$$\gamma_{ij} = -\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.20)$$

ve hacim değiştirme oranı

$$\epsilon_v = \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial s_j}{\partial x_j} = \nabla \cdot \vec{s} \quad (3.21)$$

olarak yazılır.

Şekil (3.3)'de basit kaymanın meydana geldiği; bir küp göz önüne alındığında, şekil değiştirme sonrası dik açılar γ kadar sapma yapmış olsun. Bazı elastik cisimler teğetsel gerilme ile açı değişimi arasında lineer bağıntı,

$$\tau_{ij} = G\gamma_{ij} = -G\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.22)$$

şeklinde yazılır. G sabitine malzemenin kayma modülü adı verilir ve birimi gerilme boyutundadır. Şekil (3.2)'den de görüleceği gibi $\tau_{||}$ şiddetinde bir gerilme etkisi altında uygulanan kuvvete paralel olarak kübün kenarları ε_1 kadar kısalırken, kuvvete dik iki doğrultudaki kenarlar uzar. Bu kenarların şekil değiştirme oranları $\varepsilon_1 = \varepsilon_k$ değerini alır. ε_1 ve $\tau_{||}$ arasında Hooke kanunu gereğince lineer bir bağıntı vardır.

$$-\varepsilon_1 = \frac{\tau_{||}}{E} \quad (3.23)$$

şeklinde gösterilir. $1/E$ orantı katsayısı sabit olup birimi (N/m^2) dir. E sabitine malzemenin elastisite modülü adı verilir. Küpe uygulanan kuvvete dik kenarlardaki uzama ile uygulanan kuvvete paralel olarak ε_1 şekil değiştirme arasında deneysel olarak ν gibi bir boyutsuz bağıntının olduğu görülür. Bu çarpana Poisson oranı denir ve

$$\varepsilon_1 = -\nu \varepsilon_1 + \nu \frac{\tau_{||}}{E} \quad (3.24)$$

şeklinde gösterilir.

x eksenini doğrultusundaki normal gerilmelerden dolayı meydana gelen deformasyon

$$\varepsilon_x = -\frac{\tau_{xx}}{E} + \nu \frac{\tau_{yy}}{E} + \nu \frac{\tau_{zz}}{E} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{E} (\nu (\tau_{yy} + \tau_{zz}) - \tau_{xx}) \quad (3.25)$$

şeklinde olur. Benzer olarak diğer koordinatlar içinde;

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\nu \sum_{j \neq i} \tau_{jj} - \tau_{ii} \right) \quad (3.26)$$

şeklinde yazılır. Hacim değiştirme oranı denklem (3.17)'den yararlanılmak sureti ile;

$$\varepsilon_v = -\frac{1-2\nu}{E} (\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) \quad (3.27)$$

bulunur. Denklem (3.26) ve (3.27)' den yararlanılarak

$$\tau_{||} = -\frac{E}{1+\nu} \varepsilon_1 - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_v \quad (3.28)$$

yazılır. Kayma modülü, elastisite modülü ve Poisson oranı birbirleri cinsinden yazılabilir.

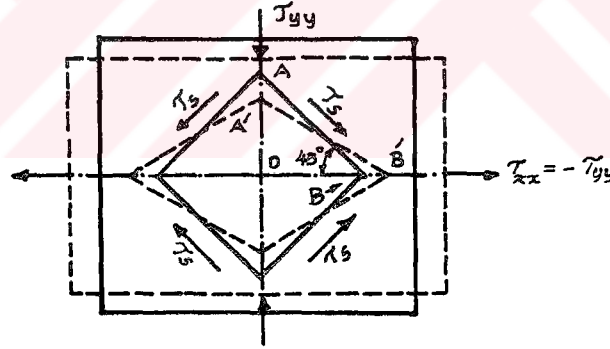
Normal gerilmelerin sayısal değerleri birbirine eşit ve şekil (3.6)'dan da görüleceğe üzere ters işaretli olduklarından kare üzerine etkileyen normal gerilme yoktur. OAB üçgeni şekil değiştirerek OA'B' üçgenine dönüşmüştür.

$$\frac{OA'}{OA} = 1 + \varepsilon_y = 1 + \frac{1}{E}(\nu\tau_{xx} - \nu\tau_{yy}) = 1 - \frac{\tau_{yy}}{E}(1 + \nu) \quad \text{ve}$$

$$\frac{OB'}{OB} = 1 + \varepsilon_x = 1 + \frac{\tau_{yy}}{E}(1 + \nu)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_x} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\psi}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\psi}{2}} = \frac{1 - \tan\frac{\psi}{2}}{1 + \tan\frac{\psi}{2}}$$

bulunur.



Şekil 3.6. Normal gerilme ve teğetsel gerilme arasındaki ilişki

Dikdörtgene göre 45° lik açı yapan kare üzerindeki teğetsel gerilmeler dikdörtgen üzerindeki normal gerilmelere sayısal olarak eşittir. Bu durum için;

$$\frac{OA'}{OA}, \frac{OB'}{OB} \quad \text{ve} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) \quad \text{denklemlerine bakıldığında}$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \varepsilon_x = -\varepsilon_y = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\nu) \cong \frac{\gamma}{2} \quad (3.29)$$

olduğu görülür. $\tau_s = G\gamma$ teğetsel gerilmesi, τ_{yy} normal gerilmesine sayısal olarak eşit ise (3.29) denkleminde yerine konulmak suretiyle

$$E = 2G(1+\nu) \quad (3.30)$$

olarak bulunur. Bu bağıntı (3.28) denkleminde yerine konulursa

$$\tau_{ij} = -2G\varepsilon_i - \frac{2G\gamma}{1-2\nu}\varepsilon_v \quad (3.31)$$

şeklinde yazılır. (3.30) denklemini (3.27) denkleminde yerine konulursa

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = \sum_{j=1}^3 \tau_{jj} = \frac{-2G(1+\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_v \quad (3.32)$$

olur. Ortalama normal gerilme ise;

$$\tau_m = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \tau_{jj} = -\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\varepsilon_v \quad (3.33)$$

şeklinde ifade edilir. (3.33) denklemini (3.30) denkleminden çıkarılırsa

$$\tau_{ij} = \tau_m - 2G\varepsilon_i + \frac{2}{3}G\varepsilon_v \Rightarrow \tau_{ij} = \tau_m - \frac{2G\partial s_i}{x_j} + \frac{2}{3}G \sum_{j=1}^3 \frac{\partial s_j}{\partial x_j} \Rightarrow$$

Stokes'un hipotezine göre; viskoz gerilmeler şekil değiştirme ile orantılıdır. Şekil değiştirme konum vektörü $\vec{s}$ cinsinden ifade edilebilir. Şekil değiştirme miktarı ise konum vektörünün zamana göre türevi alınmak suretiyle bulunur ki bu da akışkanın hızı olacaktır. Böylece Newtonien akışkan için hız vektörü konum vektörünün yerine kullanılır.

Bu taktirde kayma modülü yerine dinamik viskozite katsayısı μ ve $\left(\frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\right)$ yerine ise λ ikinci vizkozite katsayısı kullanılır. Bu taktirde teğetsel gerilme;

$$\tau_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.36)$$

olur. Normal gerilme ise (3.35) denkleminde

$$\tau_{ii} = -2\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_i} - \lambda \nabla \cdot \vec{V} \quad (3.37)$$

bulunur. (3.34) denkleminde

$$\tau_{ii} = \tau_m - 2\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (3.38)$$

elde edilir. τ_m ise

$$\tau_m = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{V} = k \nabla \cdot \vec{V} \quad (3.39)$$

bağıntısı bulunur. Buradaki k katsayısına hacim viskozitesi denir. Hacim viskozitesi, düşük yoğunluklu tek atomlu gazlar için ise ihmal edilebilir. Denklem (3.37)

$$\tau_{ij} = -2\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \left(\frac{2}{3}\mu - k\right) \nabla \cdot \vec{V} \quad (3.40)$$

şeklinde yazılır. Aşağıda normal ve teğetsel gerilmelerin dinamik viskozite ve hız gradyanları cinsinden

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (3.41)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (3.42)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (3.43)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \quad (3.44)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \quad (3.45)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \quad (3.46)$$

şeklinde ifade edilir.

Kartezyen koordinatlarda momentumun korunumu; dinamik viskozite ve hız gradyanları cinsinden, (3.12) , (3.13) ve (3.14) denklemlerinden

x bileşeni:

$$\begin{aligned} \rho \frac{DV_x}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \vec{V}) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \right] + \rho g_x \end{aligned} \quad (3.47)$$

y bileşeni:

$$\begin{aligned} \rho \frac{DV_y}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \vec{V}) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \right] + \rho g_y \end{aligned} \quad (3.48)$$

z bileşeni:

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) \right] + \rho g_z \quad (3.49)$$

şeklinde yazılabilir.

Yoğunluk ve dinamik vizkozitenin sabit olması durumunda Newtonien bir akışkan için momentumun korunumu hız gradyanları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

x bileşeni:

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (3.50)$$

y bileşeni:

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \quad (3.51)$$

z bileşeni:

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (3.52)$$

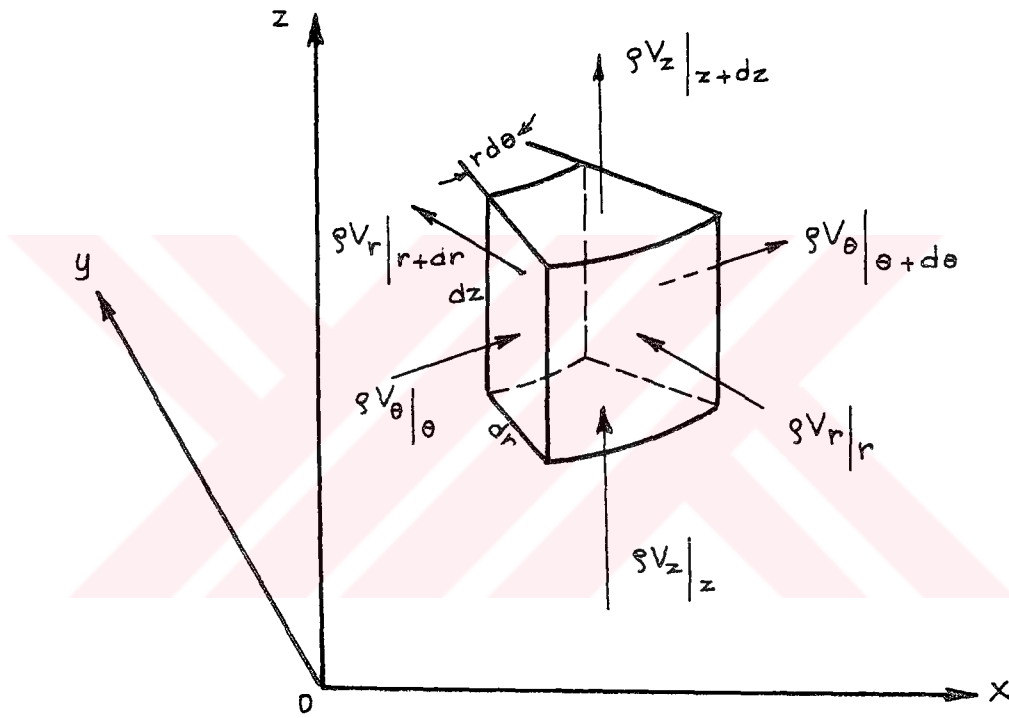
Vektör notasyonu ile (3.50), (3.51) ve (3.52) denklemleri

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \cdot \vec{V} + \rho \vec{g} \quad (3.53)$$

şeklinde yazılır. (3.53) denklemi ilk defa Navier-Stokes tarafından 1822'de geliştirildiğinden Navier-Stokes denklemi olarak bilinir.

Tek fazlı akış sistemleri için korunum denklemlerinin silindirik koordinatlarda türetilmesi:

Şekil (3.7)'de içerisinde akışkan geçen ve hacmi $dr\,r\,d\theta\,dz$ olan bir diferansiyel hacim elemanı gösterilmektedir.



Şekil 3.7. Silindirik koordinatlarda diferansiyel hacim elemanı

3.3. Süreklilik Denkleminin Silindirik koordinatlarda Türetilmesi

Kütlenin korunumu gereğince; sistemin kütlesindeki değişim, sisteme giren kütle miktarı ile sistemden çıkan kütle miktarı arasındaki farka eşittir. Bölüm 3.1.'de de anlatıldığı üzere; r doğrultusunda kütlenin değişimi:

$$\begin{aligned}
& (\rho V_r|_r - \rho V_r|_{r+dr}) r d\theta dz \Rightarrow \left[\rho V_r - \left(\rho V_r + \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r} + \dots \right) \right] r d\theta dz \Rightarrow -\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} r d\theta dz \\
& = \left(\rho V_r + \frac{r \partial \rho V_r}{\partial r} \right) dr d\theta dz \quad \text{olur. } \theta \text{ açısı yönünde kütlenin değişimi ise;} \\
& (\rho V_\theta|_\theta - \rho V_\theta|_{\theta+d\theta}) dr dz \quad \text{ve} \quad \left[\rho V_\theta - \left(\rho V_\theta + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + \dots \right) \right] dr dz = -\frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} dr d\theta dz \\
& \text{olur. } z \text{ doğrultusunda kütlenin değişimi} \quad (\rho V_z|_z - \rho V_z|_{z+dz}) r dr d\theta \Rightarrow \\
& \left[\rho V_z - \left(\rho V_z + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} + \dots \right) \right] r dr d\theta = -\frac{\partial \rho V_z}{\partial z} r dr d\theta dz \text{ olur. Diferansiyel hacim} \\
& \text{elemanı içerisinde kütlenin birim zamandaki değişimi} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} r dr d\theta dz \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Kütlenin korunumu gereğince bu ifade ile yukarıda diferansiyel hacim elemanın her bir yüzeyine dik hesaplanan kütle değişimlerinin toplamı birbirine eşit olacaktır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} r dr d\theta dz &= - \left[\left(\rho V_r + r \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} \right) dr d\theta dz + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} dr d\theta dz + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} r dr d\theta dz \right] \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \left[\left(\frac{\rho V_r}{r} + \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right] \quad \text{olur ve} \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} &= 0 \tag{3.54}
\end{aligned}$$

şeklini alır.

3.4. Momentum Korunum Denkleminin Silindirik Koordinatlarda Türetilmesi

Momentum korunumu gereğince; momentum değişimi, sisteme giren momentum değişimi ile sisteme etki eden kuvvetlerin toplamından, sistemden çıkan momentum değişiminin farkının alınması ile elde edilir.

Bölüm 3.3'de yapılan açıklamalardan da faydalanılmak suretiyle; r doğrultusunda $r d\theta dz$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına kütle akışı yoluyla giren momentum değişimi $(\rho V_r r d\theta dz) V_r \vec{e}_r|_r$ ve diferansiyel hacim elemanından kütle akışı yoluyla çıkan momentum değişimi ise $(\rho V_r r d\theta dz) V_r \vec{e}_r|_{r+dr}$ olur. $(\rho V_r r d\theta dz) V_r \vec{e}_r|_{r+dr}$ ifadesi Taylor serisine

açılıp, birinci ve ikinci terimler yanında diğer terimler ihmal edilmek suretiyle , r doğrultusunda kütle akışı yoluyla momentum değişimi;

$$-\frac{\partial(\rho V_r V_r \vec{l}_r)}{\partial r} dr d\theta dz = -\left[\rho V_r V_r \vec{l}_r + r \frac{\partial \rho V_r V_r}{\partial r} \vec{l}_r + \rho V_r V_r \frac{\partial \vec{l}_r}{\partial r} \right] dr d\theta dz \quad (3.55)$$

olacaktır. Eşitliğin sağ tarafındaki son terim sıfıra eşit olacağından (3.55) ifadesi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$-\left[\frac{\partial(\rho V_r V_r)}{\partial r} \vec{l}_r \right] dr d\theta dz = -\left[V_r \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \rho V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right] \vec{l}_r dr d\theta dz \quad (3.56)$$

r doğrultusunda; drdz yüzeyinden kütle akışı yoluyla diferansiyel hacim elemanına giren momentum değişimi $(\rho V_\theta drdz) V_r \vec{l}_r|_\theta$ ve yine r doğrultusunda diferansiyel hacim elemanının aynı yüzeyinden kütle akışı yoluyla çıkan momentum değişimi $(\rho V_\theta drdz) V_r \vec{l}_r|_{\theta+d\theta}$ olacaktır. Benzer şekilde r doğrultusunda kütle akışı yoluyla momentum değişimi;

$$-\frac{\partial(\rho V_\theta V_r \vec{l}_r)}{\partial \theta} dr d\theta dz = -\left[V_r \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} \vec{l}_r + \rho V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \vec{l}_r + \rho V_\theta V_r \frac{\partial \vec{l}_r}{\partial \theta} \right] dr d\theta dz \quad (3.57)$$

$$= -\left[\left(V_r \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + \rho V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{l}_r + \rho V_\theta V_r \vec{l}_\theta \right] dr d\theta dz \quad (3.58)$$

olur. θ açısı yönünde drdz yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına kütle akışı yoluyla giren momentum değişimi $(\rho V_\theta drdz) V_\theta \vec{l}_\theta|_\theta$ ve yine $\theta + d\theta$ açısı yönünde diferansiyel hacim elemanından kütle akışı yoluyla çıkan momentum değişimi $(\rho V_\theta drdz) V_\theta \vec{l}_\theta|_{\theta+d\theta}$ olacaktır. Benzer şekilde θ açısı yönünde kütle akışı yoluyla momentum değişimi;

$$-\frac{\partial(\rho V_\theta V_\theta \vec{l}_\theta)}{\partial \theta} dr d\theta dz = -\left[V_\theta \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} \vec{l}_\theta + \rho V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \vec{l}_\theta + \rho V_\theta V_\theta \frac{\partial \vec{l}_\theta}{\partial \theta} \right] dr d\theta dz \quad (3.59)$$

$$= - \left(\left[V_{\theta} \frac{\partial \rho V_{\theta}}{\partial \theta} + \rho V_{\theta} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} \right] \vec{l}_{\theta} - \rho V_{\theta}^2 \vec{l}_r \right) dr d\theta dz \quad (3.60)$$

olur. r doğrultusunda $rd\theta dr$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına kütle akışı yoluyla giren momentum değişimi $(\rho V_z r d\theta dr) V_r \vec{l}_r|_z$ ve yine r doğrultusunda diferansiyel hacim elemanından kütle akışı yoluyla çıkan momentum değişimi $(\rho V_z r d\theta dr) V_r \vec{l}_r|_{z+dz}$ olacaktır. Benzer şekilde r doğrultusunda kütle akışı yoluyla momentum değişimi;

$$- \frac{\partial(\rho V_z V_r \vec{l}_r)}{\partial z} r dr d\theta dz = - \left[V_r \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \vec{l}_r + \rho V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \vec{l}_r + \rho V_z V_r \frac{\partial \vec{l}_r}{\partial z} \right] r dr d\theta dz \quad (3.61)$$

olur. Eşitliğin sağ tarafındaki son terim sıfıra eşit olacağından (3.61) ifadesi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$- \left[V_r \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \rho V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right] \vec{l}_r r dr d\theta dz \quad (3.62)$$

Kütle akışı yoluyla r doğrultusunda, diferansiyel hacim elemanı içerisinde toplam momentum değişimi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$- \left[V_r \frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r} + \rho V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right] dr d\theta dz - \left[V_r \frac{\partial \rho V_{\theta}}{\partial \theta} + \rho V_{\theta} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \rho V_{\theta}^2 \right] dr d\theta dz - \left[V_r \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + \rho V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right] r dr d\theta dz \quad (3.63)$$

$$\left[-V_r \frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r} - V_r \frac{\partial(\rho V_{\theta})}{\partial \theta} - V_r \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \right] dr d\theta dz + \left[-\rho V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \rho V_{\theta} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \rho V_{\theta}^2 - \rho V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right] dr d\theta dz \quad (3.64)$$

Benzer şekilde $rd\theta dz$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına giren ve dr mesafesinde yine $rd\theta dz$ yüzeyinden çıkan akışkan kütlelerinin r doğrultusunda moleküler taşınım yoluyla meydana getirdiği momentum değişimi;

$$\left[\tau_{rr} \vec{e}_r \Big|_r - \tau_{rr} \vec{e}_r \Big|_{r+dr} \right] r d\theta dz = - \frac{\partial(\tau_{rr} r)}{\partial r} dr d\theta dz \quad (3.65)$$

olacaktır. $drdz$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına giren $rd\theta$ mesafesinden yine $drdz$ yüzeyinden çıkan akışkan kütleinin r ve θ açısı doğrultusunda moleküler taşınım yoluyla meydana getirdiği momentum değişimi;

$$\left[\tau_{r\theta} \vec{e}_r \Big|_\theta - \tau_{r\theta} \vec{e}_r \Big|_{\theta+d\theta} \right] dr dz = \left(- \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} dr d\theta dz \vec{e}_r - \tau_{r\theta} \vec{e}_\theta \right) dr d\theta dz \quad (3.66)$$

$$\left[\tau_{\theta\theta} \vec{e}_\theta \Big|_\theta - \tau_{\theta\theta} \vec{e}_\theta \Big|_{\theta+d\theta} \right] dr dz = - \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta dr d\theta dz + \tau_{\theta\theta} \vec{e}_r \quad (3.67)$$

olacaktır. $drd\theta$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına giren ve yine dz mesafesinde aynı yüzey alanından çıkan akışkan kütleinin r doğrultusunda moleküler taşınım yoluyla meydana getirdiği momentum değişimi;

$$\left[\tau_{rz} \vec{e}_r \Big|_z - \tau_{rz} \vec{e}_r \Big|_{z+dz} \right] r dr d\theta = - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} r dr d\theta dz \vec{e}_r \quad (3.68)$$

olacaktır.

Moleküler taşınım yoluyla r doğrultusunda ; diferansiyel hacim elemanı içerisinde toplam momentum değişimi ise;

$$\left[- \frac{\partial(\tau_{rr} r)}{\partial r} - \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \tau_{\theta\theta} - r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] dr d\theta dz \quad (3.69)$$

şeklinde yazılır. Akışkanın basıncı ve yerçekimi ivmesinden dolayı sistem üzerine etki eden kuvvetlerin r doğrultusundaki bileşeni;

$$\left[- \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \right] r dr d\theta dz \quad (3.70)$$

şeklinde yazılır. Diferansiyel hacim elemanı içerisinde r doğrultusunda toplam momentumun birim zamanda değişimi ise $\frac{\partial \rho V_r}{\partial t} r dr d\theta dz$ olacaktır.

Momentumun korunumu gereğince;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_r}{\partial t} r dr d\theta dz = & -V_r \left[\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right] dr d\theta dz - \left[\rho V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \rho V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \right. \\ & \left. \rho V_\theta^2 + \rho V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right] dr d\theta dz - \left[\frac{\partial(\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \tau_{\theta\theta} - r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] dr d\theta dz + \\ & \left(\rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} \right) r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (3.71)$$

olur. Eşitliğin her tarafı $r dr d\theta dz$ ifadesine bölünmek suretiyle ve eşitliğin sol tarafındaki ifadesinin diferansiyeli alınarak, Bölüm 3.3'de bahsedilen kütle korunumu ifadesinden de istifade edilerek (3.71) eşitliği (3.72) eşitliğine dönüşür.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \right. \\ & \left. \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + \rho g_r \end{aligned} \quad (3.72)$$

(3.72) denkleminde yer alan $\rho \frac{V_\theta^2}{r}$ ifadesi santrifüj kuvvet olarak tanımlanır ve akışkanın θ açısı yönündeki hareketinden kaynaklanan, r doğrultusundaki net kuvveti verir [20,21]. θ açısı yönünde $r d\theta dz$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına giren ve dr mesafe sonra aynı yüzeyden çıkan akışkan kütlelerinin kütle akışı yoluyla meydana getirdiği momentum değişimi;

$$(\rho V_r r d\theta dz) V_\theta \vec{l}_\theta|_r - (\rho V_r r d\theta dz) V_\theta \vec{l}_\theta|_{r+dr} = - \frac{\partial \rho V_r V_\theta r \vec{l}_\theta}{\partial r} dr d\theta dz \quad (3.73)$$

$$= - \left[V_\theta \frac{\partial(\rho V_r r)}{\partial r} \vec{l}_\theta + \rho V_r r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \vec{l}_\theta + \rho V_r V_\theta r \frac{\partial \vec{l}_\theta}{\partial r} \right] dr d\theta dz \quad (3.74)$$

olacaktır. (3.74) denklemindeki son terim sıfıra eşit olacağından aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$-\left[V_{\theta} \frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r} + \rho V_r \frac{\partial V_{\theta}}{\partial r} \right] \vec{i}_{\theta} dr d\theta dz \quad (3.75)$$

(3.60) denkleminin ilk iki terimi ve (3.58) denkleminin son terimi alınmak suretiyle (3.76) denklemi oluşturulur.

$$-\left[V_{\theta} \frac{\partial \rho V_{\theta}}{\partial \theta} + \rho V_{\theta} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} + \rho V_{\theta} V_r \right] \vec{i}_{\theta} dr d\theta dz \quad (3.76)$$

θ açısı yönünde $r d\theta dr$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına giren ve dz mesafe sonra aynı yüzeyden çıkan akışkan kütlelerinin kütle akışı yoluyla meydana getirdiği momentum değişimi;

$$(\rho V_z r d\theta dr) V_{\theta} \vec{i}_{\theta} \Big|_z - (\rho V_z r d\theta dr) V_{\theta} \vec{i}_{\theta} \Big|_{z+dz} = - \frac{\partial \rho V_z V_{\theta} r \vec{i}_{\theta}}{\partial z} r dr d\theta dz \quad (3.77)$$

$$= - \left[V_{\theta} \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \vec{i}_{\theta} + \rho V_z \frac{\partial(\rho V_{\theta})}{\partial z} \vec{i}_{\theta} + \rho V_z V_{\theta} \frac{\partial \vec{i}_{\theta}}{\partial r} \right] r dr d\theta dz \quad (3.78)$$

olacaktır. (3.78) denklemindeki son terim sıfıra eşit olacağından aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$-\left[V_{\theta} \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \rho V_z \frac{\partial V_{\theta}}{\partial z} \right] \vec{i}_{\theta} r dr d\theta dz \quad (3.79)$$

Kütle akışı yoluyla θ açısı yönünde diferansiyel hacim elemanı içerisinde toplam momentum değişimi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} & \left[V_{\theta} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \rho V_r \frac{\partial V_{\theta}}{\partial r} \right] dr d\theta dz - \left[V_{\theta} \frac{\partial \rho V_{\theta}}{\partial \theta} + \rho V_{\theta} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} + \rho V_r V_{\theta} \right] dr d\theta dz - \\ & \left[V_{\theta} \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + \rho V_z \frac{\partial V_{\theta}}{\partial z} \right] r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (3.80)$$

Benzer şekilde $r d\theta dr$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına giren ve dr mesafe sonra aynı yüzeyden çıkan akışkan kütlelerinin θ açısı yönünde moleküler taşınım yoluyla meydana getirdiği momentum değişimi ve (3.66) denkleminin de ikinci ifadesi dikkate alınmak suretiyle;

$$\left[\tau_{\theta r} \vec{i}_\theta \Big|_r - \tau_{\theta r} \vec{i}_\theta \Big|_{r+dr} \right] r d\theta dz = \left(-\frac{\partial(\tau_{\theta r} r)}{\partial r} dr d\theta dz - \tau_{\theta r} dr d\theta dz \right) \vec{i}_\theta \quad (3.81)$$

olacaktır. Sırasıyla $drdz$ ve $rd\theta dr$ yüzeylerinden diferansiyel hacim elemanına giren ve yine sırasıyla $rd\theta$ ve dz mesafe sonra aynı yüzeylerden çıkan akışkan kütlelerinin θ açısı yönünde moleküler taşınım yoluyla meydana getirdikleri momentum değişimleri aşağıda verilmiştir.

$$\left[\tau_{\theta\theta} \vec{i}_\theta \Big|_\theta - \tau_{\theta\theta} \vec{i}_\theta \Big|_{\theta+d\theta} \right] dr dz = -\frac{\partial(\tau_{\theta\theta})}{\partial\theta} dr d\theta dz \vec{i}_\theta \quad (3.82)$$

$$\left[\tau_{\theta z} \vec{i}_\theta \Big|_{z\theta} - \tau_{\theta z} \vec{i}_\theta \Big|_{z+dz} \right] r d\theta dr = -\frac{\partial(\tau_{\theta z})}{\partial z} dr d\theta dz \vec{i}_\theta \quad (3.83)$$

Akışkanın basıncı ve yerçekimi ivmesinden dolayı sistem üzerine etki eden kuvvetlerin θ açısı yönündeki bileşeni ise;

$$\left[-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial\theta} + \rho g_\theta \right] r dr d\theta dz \quad (3.84)$$

olacaktır.

Diferansiyel hacim elemanı içerisinde θ açısı doğrultusunda birim zaman içinde toplam momentum değişimi ise $\frac{\partial \rho V_\theta}{\partial t} r dr d\theta dz$ olacaktır. Momentumun korunumu gereğince;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial t} r dr d\theta dz = & -V_\theta \left[\frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial\theta} + r \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right] dr d\theta dz - \left[\rho V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \rho V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \right. \\ & \left. \rho V_r V_\theta + \rho V_z r \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right] dr d\theta dz - \left[\frac{\partial(\tau_{\theta r})}{\partial r} + \tau_{r\theta} \frac{\partial(\tau_{\theta\theta})}{\partial\theta} + r \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] dr d\theta dz + \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial\theta} + \right. \\ & \left. \rho g_\theta \right] r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (3.85)$$

olur. Eşitliğin her tarafı $r dr d\theta dz$ ifadesine bölünmek suretiyle ve eşitliğin sol tarafındaki ifadenin diferansiyeli alınarak; kütle korunumu ifadesinden de istifade edilerek (3.85) eşitliği aşağıdaki gibi olur.

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_r V_\theta + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + \rho g_\theta \quad (3.86)$$

(3.86) denkleminde yer alan $\rho V_r V_\theta / r$ ifadesi Koriolis kuvveti olarak tanımlanır. Akışkanın gerek r doğrultusunda ve gerekse θ açısı yönündeki hareketinden kaynaklanan; θ açısı yönündeki net kuvveti verir[20,21]. z eksenini doğrultusunda $r d\theta dz$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına giren ve dr mesafe sonra aynı yüzeyden çıkan akışkan kütlelerinin kütle akışı yoluyla meydana getirdiği momentum değişimi;

$$\begin{aligned} & (\rho V_r r d\theta dz) V_z \vec{l}_z|_r - (\rho V_r r d\theta dz) V_z \vec{l}_z|_{r+dr} = -\frac{\partial (\rho V_r V_z \vec{l}_z)}{\partial r} dr d\theta dz \Rightarrow \\ & - \left[V_z \frac{\partial (\rho V_r r)}{\partial r} + \rho V_r r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] dr d\theta dz \vec{l}_z \end{aligned} \quad (3.87)$$

olacaktır. Benzer şekilde z eksenini doğrultusunda $dr dz$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına giren ve $r d\theta$ mesafe sonra aynı yüzeyden çıkan akışkan kütlelerinin kütle akışı yoluyla meydana getirdiği momentum değişimi;

$$\begin{aligned} & (\rho V_\theta dr dz) V_z \vec{l}_z|_\theta - (\rho V_\theta dr dz) V_z \vec{l}_z|_{\theta+d\theta} = -\frac{\partial (\rho V_\theta V_z \vec{l}_z)}{\partial \theta} dr d\theta dz \Rightarrow \\ & - \left[V_z \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \rho V_\theta \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right] dr d\theta dz \vec{l}_z \end{aligned} \quad (3.88)$$

olacaktır. z eksenini doğrultusunda $r d\theta dr$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına giren ve dz mesafe sonra aynı yüzeyden çıkan akışkan kütlelerinin kütle akışı yoluyla meydana getirdiği momentum değişimi;

$$\begin{aligned} & (\rho V_z r d\theta dr) V_z \vec{l}_z|_z - (\rho V_z r d\theta dr) V_z \vec{l}_z|_{z+dz} = -\frac{\partial (\rho V_z V_z \vec{l}_z)}{\partial z} r dr d\theta dz \Rightarrow \\ & - \left[V_z \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \rho V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] r dr d\theta dz \vec{l}_z \end{aligned} \quad (3.89)$$

olacaktır. Benzer şekilde $r d\theta dz$ yüzeyinden diferansiyel hacim elemanına giren ve dr mesafe sonra aynı yüzeyden çıkan akışkan kütesinin z eksenini doğrultusunda moleküler taşınım yoluyla meydana getirdiği momentum değişimi;

$$\left[\tau_{rz} \vec{l}_r \Big|_r - \tau_{rz} \vec{l}_r \Big|_{r+dr} \right] r d\theta dz = - \frac{\partial(\tau_{rz} r)}{\partial r} dr d\theta dz \vec{l}_z \quad (3.90)$$

olacaktır. Sırasıyla; $dr dz$ ve $dr d\theta$ yüzeylerinden diferansiyel hacim elemanına giren ve yine sırasıyla $r d\theta$ ve dz mesafe sonra aynı yüzeylerden çıkan akışkan kütlelerinin z eksenini doğrultusunda moleküler taşınım yoluyla meydana getirdiği momentum değişimleri aşağıda verilmiştir.

$$\left[\tau_{\theta z} \vec{l}_z \Big|_\theta - \tau_{\theta z} \vec{l}_z \Big|_{\theta+d\theta} \right] dr dz = - \frac{\partial(\tau_{\theta z})}{\partial \theta} dr d\theta dz \vec{l}_z \quad (3.91)$$

$$\left[\tau_{zz} \vec{l}_z \Big|_z - \tau_{zz} \vec{l}_z \Big|_{z+dz} \right] r dr d\theta = - \frac{\partial(\tau_{zz})}{\partial z} r dr d\theta dz \vec{l}_z \quad (3.92)$$

Akışkanın basıncı ve yerçekimi ivmesinden dolayı sistem üzerine etki eden kuvvetlerin z eksenini doğrultusundaki bileşeni ise ;

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \right] r dr d\theta dz \quad (3.93)$$

Diferansiyel hacim elemanı içerisinde z eksenini doğrultusunda birim zamanda toplam momentum değişimi ise $\frac{\partial \rho V_z}{\partial t} r dr d\theta dz$ olacaktır. Momentumun korunumu gereğince;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_z}{\partial t} r dr d\theta dz = & -V_z \left[\frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right] dr d\theta dz - \left[\rho V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \rho V_\theta \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \rho V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] dr d\theta dz - \left[\frac{\partial(\tau_{rz} r)}{\partial r} + \frac{\partial(\tau_{\theta z})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\tau_{zz})}{\partial z} \right] dr d\theta dz + \\ & \left[-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \right] r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (3.94)$$

olur. Eşitliğin her tarafı $rdrd\theta dz$ ifadesine bölünmek suretiyle ve eşitliğin sol tarafındaki ifadenin diferansiyeli alınarak; kütle korunumu ifadesinden de istifade edilerek (3.94) eşitliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{rz}r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{\theta z})}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{zz})}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (3.95)$$

Denklem (3.40)'dan da istifade edilerek hacim viskozitesi ihmal edilmek suretiyle ; normal ve teğetsel gerilmelerin dinamik viskozite ve hız gradyanları cinsinden ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \quad (3.96)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \quad (3.97)$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \quad (3.98)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \quad (3.99)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right] \quad (3.100)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\mu \left[\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right] \quad (3.101)$$

Yoğunluk ve dinamik viskozitenin sabit olması durumunda Newtonien bir akışkan için momentumun korunumu hız gradyanları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} \right] + \mu \left[-\frac{2 \partial V_\theta}{r^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \quad (3.102)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right] + \mu \left[+\frac{2 \partial V_r}{r^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \quad (3.103)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} \right] + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \rho g_z \quad (3.104)$$

3.5. Enerji Korunum Denkleminin Türetilmesi

İçerisinden akışkan geçen; kartezyen koordinatlarda durağan bir diferansiyel hacim elemanı göz önüne alınırsa, herhangi bir t anında; söz konusu diferansiyel hacim elemanındaki akışkan için enerjinin korunumu, kararsız ve açık sistemde; termodinamiğin birinci kanunu ile aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

İç ve kinetik enerjinin değişimi; kütle akışı ile diferansiyel hacim elemanına giren ve çıkan iç ve kinetik enerji değişimlerinin farkları ile ısı girişinin değişiminin toplamından, sisteme çevreden yapılan işin değişiminin farkının alınması ile elde edilir.

İç enerji ile; moleküllerin iç hareketleri ve birbirleriyle etkileşmelerinden doğan enerji tanımlanmakta olup, yerel sıcaklık ve akışkan yoğunluğuna bağlıdır. Kinetik enerji ile akışkan hareketi $\frac{1}{2} \rho V^2$ olarak tanımlanmaktadır. Potansiyel enerji iş teriminde yer almaktadır. Nükleer, ısıma, elektromanyetik enerjiler ise hesaba katılmak istendiğinde

eşitliğin sağ tarafında yer alacaktır. Diferansiyel hacim elemanı içerisinde; iç ve kinetik enerji değişimi

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u + V_2 \rho V^2 \right) dx dy dz \quad (3.105)$$

olacaktır. Diferansiyel hacim elemanında biriken iç ve kinetik enerjilerin değişimi

$$\begin{aligned} & \left[V_x \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \right]_x - V_x \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \Big|_{x+dx} \Big] dy dz + \\ & \left[V_y \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \right]_y - V_y \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \Big|_{y+dy} \Big] dx dz + \\ & \left[V_z \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \right]_z - V_z \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \Big|_{z+dz} \Big] dx dy \end{aligned} \quad (3.106)$$

olur. Isı enerjisi değişimi

$$(q_x|_x - q_x|_{x+dx}) dy dz + (q_y|_y - q_y|_{y+dy}) dx dz + (q_z|_z - q_z|_{z+dz}) dx dy \quad (3.107)$$

şeklinde yazılır. Birim kütle başına , yerçekimi kuvvetinin üç bileşenine karşı yapılan iş ise ,

$$-\rho (V_x g_x + V_y g_y + V_z g_z) dx dy dz \quad (3.108)$$

olacaktır. Viskoz kuvvetlere karşı yapılan iş ise;

$$\begin{aligned} & \left[(\tau_{xx} V_x + \tau_{xy} V_y + \tau_{xz} V_z) \right]_x - (\tau_{xx} V_x + \tau_{xy} V_y + \tau_{xz} V_z) \Big|_{x+dx} \Big] dy dz + \\ & \left[(\tau_{yx} V_x + \tau_{yy} V_y + \tau_{yz} V_z) \right]_y - (\tau_{yx} V_x + \tau_{yy} V_y + \tau_{yz} V_z) \Big|_{y+dy} \Big] dx dz + \\ & \left[(\tau_{zx} V_x + \tau_{zy} V_y + \tau_{zz} V_z) \right]_z - (\tau_{zx} V_x + \tau_{zy} V_y + \tau_{zz} V_z) \Big|_{z+dz} \Big] dx dy \end{aligned} \quad (3.109)$$

şeklinde ifade edilir. Statik basınca karşı yapılan iş

$$(P V_x|_x - P V_x|_{x+dx}) dy dz + (P V_y|_y - P V_y|_{y+dy}) dx dz + (P V_z|_z - P V_z|_{z+dz}) dx dy \quad (3.110)$$

olarak gösterilir. Genel enerji denklemi ise;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} V_x \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} V_y \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} V_z \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \right) - \\ & \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \rho (V_x g_x + V_y g_y + V_z g_z) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho V_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho V_z \right) - \\ & \left(\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} V_x + \tau_{xy} V_y + \tau_{xz} V_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} V_x + \tau_{yy} V_y + \tau_{yz} V_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} V_x + \tau_{zy} V_y + \tau_{zz} V_z) \right) \end{aligned} \quad (3.111)$$

şeklinde yazılır. Aynı denklem vektör notasyonu ile aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) = - \left(\nabla \cdot \rho \vec{V} \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) \right) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) + \rho \nabla \cdot (\vec{V} \mathbf{g}) - \left(\nabla \cdot \rho \vec{V} \right) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \vec{V}) \quad (3.112)$$

Birim hacim başına kazanılan enerji değişimi; birim hacim başına giren enerji, birim hacim başına iletilen ısı enerjisi, birim hacim başına akışkana yerçekimi kuvvetlerince yapılan iş ve birim hacim başına viskoz kuvvetlerce yapılan işlerin toplamına eşit olacaktır. (3.112) denkleminde sol taraftaki ifadenin diferansiyeli alınarak sağ taraftaki

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) \text{ ifadesi;}$$

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) + \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) \nabla \cdot \rho \vec{V} \quad (3.113)$$

şeklinde açılarak;

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) + \left(\vec{V} \cdot \nabla \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) \right) \right) + \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} \right) = \\ - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \nabla \cdot (\vec{V} \mathbf{g}) - \nabla \cdot \rho \vec{V} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \vec{V}) \end{aligned} \quad (3.114)$$

elde edilir. (3.114) denkleminin sol tarafındaki 1. terim ;

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) + \left(\vec{V} \cdot \nabla \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) \right) \right) = \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \right) \quad (3.115)$$

şeklinde açılarak ve süreklilik denkleminden istifade edilerek;

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) = -\nabla q + \rho \nabla \cdot \vec{V} \vec{g} - \nabla \cdot p \vec{V} - \nabla \cdot (\tau \vec{V}) \quad (3.116)$$

yazılır.

Momentum denkleminin yerel hız ile çarpılması sonucunda elde edilen mekanik enerji denklemi ise aşağıdaki gibi olur.

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) = p \nabla \cdot \vec{V} - \nabla \cdot p \vec{V} + \rho \left(\nabla \cdot \vec{V} \vec{g} \right) - \nabla \cdot (\tau \vec{V}) + \tau : \nabla \vec{V} \quad (3.117)$$

(3.117) denklemini (3.116) denkleminden çıkarmak suretiyle ısı enerjisi denklemi elde edilir.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla q - p \nabla \cdot \vec{V} - \tau : \nabla \vec{V} \quad (3.118)$$

Birim hacim başına kazanılan iç enerji değişimi: birim hacim başına ısı iletimi ile giren iç enerji, birim hacim başına sıkıştırma ile tersinir iç enerji artışı, birim hacim başına viskoz etkilerle tersinmeyen iç enerji artışının toplamına eşittir.

(3.117) denkleminde yer alan $p \nabla \cdot \vec{V}$ ve $\tau : \nabla \vec{V}$ terimleri ters işaretli olarak yer almaktadır. Bunlar mekanik ve ısı enerjisinin karşılıklı dönüşümünü göstermektedir. $p \nabla \cdot \vec{V}$ terimi ; akışkanın genleşme veya sıkışma durumuna bağlı olarak negatif veya pozitif değer alabilir. $\tau : \nabla \vec{V}$ terimi daima pozitiftir. Mekanik enerjinin ısı enerjiye tersinmez biçimde dönüştüğünü göstermektedir.

Potansiyel enerji için; yerçekimi kuvveti, $\vec{g} = -\nabla \varpi$ şeklinde skaler bir fonksiyonun gradyanı olarak tanımlanır;

$$\rho \left(\vec{V} \vec{g} \right) = -\rho \left(\vec{V} \nabla \varpi \right) = -\frac{D\varpi}{Dt} + \rho \frac{\partial \varpi}{\partial t} \quad (3.119)$$

yazılır. Eğer ϖ zamandan bağımsız olursa 2. terim kalkar ve (3.116) denklemini aşağıda belirtildiği üzere; toplam enerji değişimi eşitliğine dönüşür.

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \varpi + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (\rho \vec{V}) - \nabla \cdot (\tau \vec{V}) \quad (3.120)$$

Enerji korunumu denkleminin silindirik koordinatlarda türetilmesi Bölüm 4.6' da iki fazlı akışlar için yapılmaktadır.



BÖLÜM 4

İKİ FAZLI AKIŞLAR

4.1. Açıklama

Kaynama ile ısı transferi; sıvı fazdan buhar fazına geçişte oluşan ısı transferi biçimidir. Esas olarak iki tür kaynama vardır. Bunlar sırası ile havuz tipi kaynama ve akışta kaynamadır. Bir havuz içinde meydana gelen kaynama olayına havuz tipi kaynama denir. Akışta kaynama ise; bir sıvı akışının içinde meydana gelen kaynamadır. Akış tipi kaynamada ısıtma yüzeyi akışkanı sınırlayan kanal duvarıdır. Bu takdirde kaynayan bir akışkan buhar ve sıvı karışımından meydana gelmiş olup; iki fazlı akışa bir örnektir. Kaynama buhar üretiminde, nükleer reaktörler, roket motorları gibi yüksek ısı transferi gerektiren sistemleri soğutmakta kullanılmaktadır.

4.2. Akış Biçimleri ve Akış Kararsızlığı

İki fazlı akışlar kabarcık dağılımına göre sınıflandırılabilir. Bu takdirde sıvı akımda kabarcıklar, buhar akımda sıvı damlacıkları ve bunların kesikli kombinasyonlarının tümüne birden akış biçimleri adı verilir[8,23]. Değişik akış biçimleri ısıtıldıkları duvar yakınındaki hidrodinamik şartlar üzerinde değişik etkiler gösterirler. Isıtılan duvar yakınında; akışın mikroskopik görüntüsü iki fazlı sınır tabaka akışı şeklindedir.

Akış kararsızlığı; hidrodinamik ve termodinamik özelliklerin değişimi sonucu ortaya çıkan bir olaydır. İki fazlı akışta meydana gelen kararsızlık kaynama sırasında büyük momentum değişiminin sonucudur. Düşük güçle ısıtılan bir kanalda küçük ve sabit genlikli akış salınımları başlarken, güç arttırıldığında, genlikte artar ve akış kararsız olur. Kaynama sırasında üç ana tipte akış kararsızlığı oluşabilir. Bunlar paralel kanallar arasında, doğal taşınım çevriminde ve değişken akış biçimlerinin yarattığı basınç düşüşü farklarının neden olduğu akış kararsızlıklarıdır. Akış salınımları Kaynar Sulu Reaktörler'de yavaşlatma karakteristiğini etkileyerek nükleer kararsızlıkta yaratabilmektedir[8].

İki fazlı akış kanalına ısı verildiğinde; meydana gelen hidrodinamik değişme ısı transferi karakteristiklerini etkilerken, transfer edilen ısı: faz değişimine neden olarak faz dağılımını ve akış biçimini değiştirmektedir[22].

Fazların tek maddeye ait olduğu akışa tek bileşenli akış ismi verilir. Tek bileşenli iki fazlı akışta; kanalda tam gelişmiş akış biçimi görülememektedir. Hidrodinamik kararsızlıklar ve fazlar arasındaki dengenin bozulması, karışıklık yaratan durum olarak ortaya çıkmaktadır.

Bir akış kanalında buhar üretimi iki kaynaktan sağlanmaktadır. Bunlar: ısıtıcı yüzeyde kaynama ve basınç düşümü ile sıvı kaynamasıdır. Buhar üretim hızı da : yüzeyden alınan ısı enerjisinin, faz değişimi ve gizli ısı olarak depolanma oranına, yüzeyde taneciğin meydana gelmesini sağlayacak yapının yoğunluğuna fazların geometrik yapısına ve fazlar arasındaki enerji geçişine bağlıdır.

4.3. İki Fazlı Akışların Sınıflandırılması

Düşey kanalda akan iki fazlı akışın, temel özellikleri: Karışımındaki fazlar farklı sıcaklık ve fiziksel özelliklere sahiptir. Fazlar arasında termal denge yoktur. İki faz arasında kütle, momentum ve enerji geçişi vardır. Fazlar farklı hızlarda hareket eder. Kütle momentum ve enerji korunum denklemleri ; akış rejimine faz hızlarına ve boşluk oranına bağlıdır. Yukarıdaki temel özellikler ve akış kararsızlıkları nedeniyle iki fazlı akışın modellenmesi zordur. İki fazlı akışlar; en basit akış halinden karmaşık yapıya doğru aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir[1.22].

- a-) Homojen Akış Modeli
- b-) Homojen Kaymalı Akış Modeli
- c-) Drift Akış Modeli
- d-) İki Akışkanlı Model

a-) Homojen Akış Modeli: Diğer iki fazlı akış modelleri ile kıyaslandığında en basit akış modelidir. Homojen akış modelinde; sıvı ve buhar fazları arasında termal denge mevcuttur, sıvı ve buhar fazının akış kanalının kesitinde homojen olarak dağıldığı varsayılır. Sıvı ve buhar fazlarının hızları birbirine eşittir. Homojen akış modeli iki fazlı akışların özel bir modellenmesi olup; böyle bir modelleme yapılmasının sebebi korunum denklemlerinin kolaylıkla yazılabilmesi ve denklem sistemlerine; uygun çözümlerin bulunmasından dolayıdır. Bu nedenlerden ötürü "referans model" olarak kullanılır. Homojen akış modeli birer adet kütle, momentum ve enerji denklemi ile ifade edilebilir.

b-) Homojen Kaymalı Akış Modeli: Homojen kaymalı akış modelinde, sıvı ve buhar fazlarının farklı hızlarla hareket ettikleri kabul edilmektedir. Fazlar arasındaki kaymanın; boşluk oranı ile buharın kuruluk derecesi arasındaki ilişkiye bağlı olması nedeniyle söz konusu ilişki deneysel olarak konmuş olan "Thom, Martinelli-Nelson, Baroczky, Chilseon ve Armand" gibi korelasyonları ile ifade edilir[22]. Homojen kaymalı akış modeli de birer adet kütle, momentum, enerji korunumu denklemleri ile ifade edilir.

c-) Drift Akış Modeli: Drift akış modelinde; sıvı ve buhar fazlarının sahip oldukları gerçek hızlar yerine bağıl hızlar göz önüne alınmaktadır. Bağıl hızlar; karışımının hızı ve buhar fazının sürüklenme hızıdır. Fazlar arasındaki termal dengesizlik ve buhar üretim hızı buhar fazı süreklilik denklemi ile ifade edilmektedir. Akış kanalının kesit alanında buhar ve sıvı fazın homojen dağılmış olması söz konusu olmadığından, sürüklenme hızının radyal yönde hız ve boşluk oranı değişimleri içermesi sağlanmıştır. Drift akış modelinde fazların dinamik ve termal özelliklerini taşıyan bir adet momentum ve bir adet enerji denklemi vardır. Bu modelde fazlar arasındaki enerji geçişi ve bağıl hız, buhar fazı süreklilik denklemi ve buharın sürüklenme hızı ile temsil edilir.

d-) İki Akışkanlı Model: İki fazlı akışlarda kullanılan en gelişmiş model olup, her bir faz için ayrı ayrı kütle, momentum ve enerji denklemleri yazılmak suretiyle; iki akışkanlı model iki adet korunum ve dört adet değişim denklemi ile ifade edilir. Matematiksel çözüm yönteminin zorluğu ve fazlar arasındaki girişimin belirsizliği bu modelin kullanılmasını zorlaştırmaktadır.

4.4. Düşey Akış Kanalında Akış Biçimleri

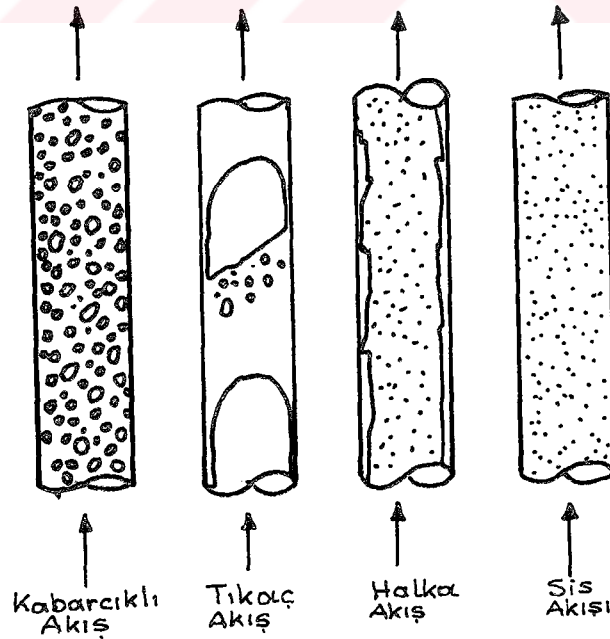
İki fazlı düşey akış kanalında akış biçimleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

- a-) Kabarcıklı Akış
- b-) Tıkaç Tipi Akış
- c-) Parçalı-Tıkaç Tipi Akış
- d-) Halkalı Akış
- e-) Sıvı Damlacıklı Buhar Akışı

Kabarcıklı akış; düşük boşluk oranlarında görülür. Buhar kabarcıklar şeklinde sıvı içersinde dağılmıştır. Sıvı faz sürekli, buhar fazı

süreksizdir. Tıkaç tipi akışta buhar kabarcıkları toplanmaya başlar ve salyangoz biçiminde sıvı kütleleri oluşur, aynı şekilde oluşan buhar kütleleri ile birbirlerini izleyerek bölgesel farklar yaratarak kanaldaki akışta kararsızlıklara neden olurlar. Sıvı ve buhar kütlelerinin birbirine daha yakın olması sonucunda parça parça tıkaç tipi akış görülür. Halkalı akışta ise sıvı faz duvar boyunca, buhar fazı ise merkezde sürekli dir. Kanal ortasında damlacıklar şeklinde süreksiz sıvı faz ve çeperlerde kabarcıklar şeklinde süreksiz buhar fazı vardır. Halkalı akış biçimi yüksek boşluk oranlarında görülür. Boşluk oranlarının daha da artması ile kanal tamamen buharla kaplanmaya başlar, içerisinde sıvı damlacıkları asılı olan sis akış biçimi görülür. Şekil (4.1)'de düşey akış kanalında akış biçimleri gösterilmektedir.

Birden fazla kaynama rejiminin varoluşu ilk defa 1934 yılında Nakiyama tarafından ortaya atılmıştır. Doymuş su ile dolu bir havuza daldırılan, yatay ve elektrikle ısıtılan bir telle yapılan deney sonucunda havuz tipi kaynamada oluşan değişik rejimler şekil (4.2)'deki grafikte, ısı akısına karşın yüzey sıcaklığı ile sıvının doyma sıcaklığı arasındaki fark çizilerek gösterilmiştir. A-B aralığında sıvı doğal taşınım ile ısıtılmakta ve bu tek fazlı bölgede henüz kaynama görülmemektedir. B-C aralığında yüzey yanındaki sıvı, kabarcık oluşumu



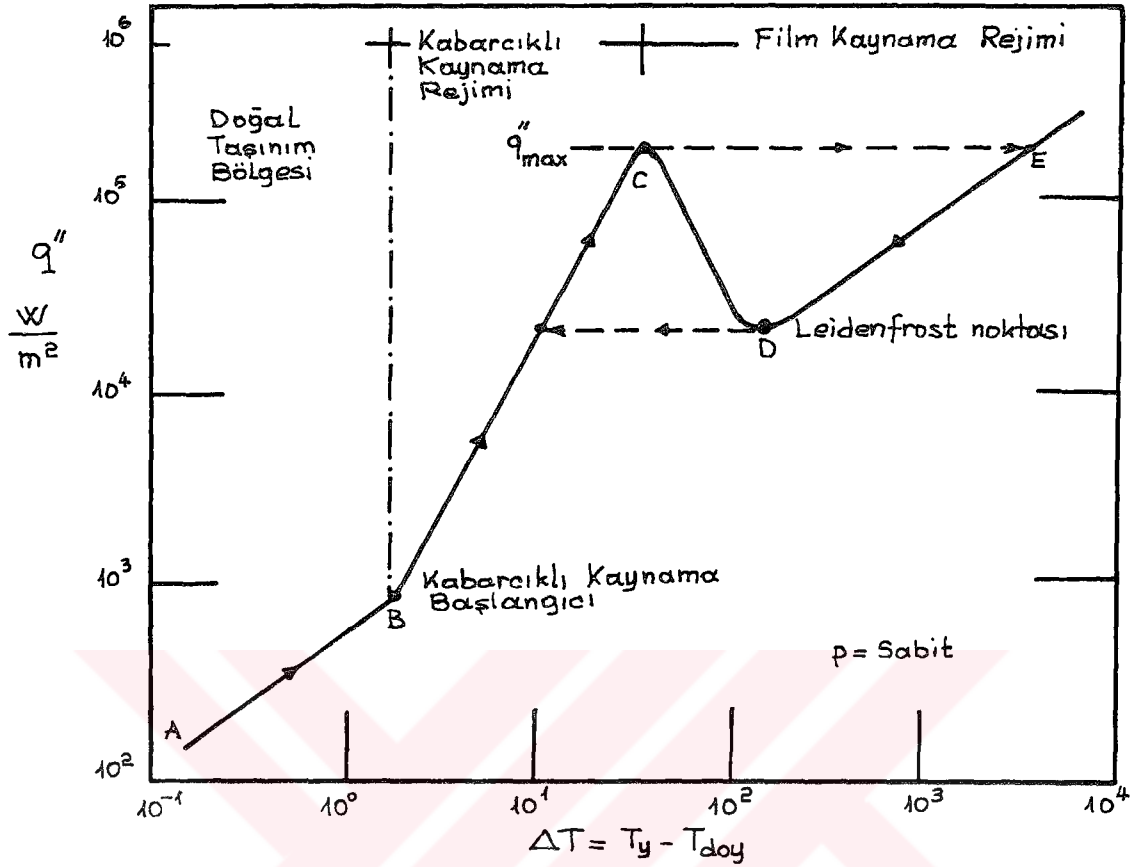
Şekil 4.1. Akış biçimleri

ile buharlaşmaya başlar. Kabarcıklar faz değişiminin gizli ısısını taşımakta olup ısıtma yüzeyi yanındaki sıvı kaynar. Böylece taşınım ile olan ısı geçişi artmış olur. Bu aralık kabarcıklı kaynama rejimi olarak adlandırılır. Bu bölgede küçük sıcaklık farkları daha yüksek ısı transferi akısı hızı göstermektedir.

Kabarcıklı kaynamada iki alt rejim vardır. Bunlar yerel kaynama ve yığıl kaynamadır. Yerel kaynama, aşırı soğutulmuş sıvıdaki kaynama tipi olup; oluşan kabarcıklar ısıtma yüzeyinden ayrılarak sıvı içinde giderek yoğunlaşmaktadır. Yığıl kaynama ise doymuş sıvıdaki kabarcıklı kaynamadır. Yığıl kaynama aralığında $q'' \cdot \Delta T_{\text{doymuş}}^n$ ile orantılı değişmekte olup (n) genellikle 2-5 arasındadır. Ancak yığıl kaynamada ısı akısı istenildiği kadar artırılamaz. C noktasında yüksek ısı akısına gelindiğinde kabarcık sayısı çok artmakta ve ısıtma yüzeyinden ayrılmayan kabarcıklar gelen sıvıyı engellemektedir. Bu şekilde oluşan buhar, ısıtma yüzeyini kaplayan bir yalıtım tabakası oluşturmakta yüzey sıcaklığının artmasına neden olmaktadır.. Bu olay kaynama krizi olarak nitelendirilir. Kaynama krizi; yanma (burn out) veya kabarcıklı kaynamadan ayrılma (departure from nucleate boiling) olarak da adlandırılır. C-D aralığında, kritik ısı akısına erişildikten hemen sonra kaynama kararsızdır ve "kısmi film kaynama" veya geçişte kaynama olarak adlandırılır.

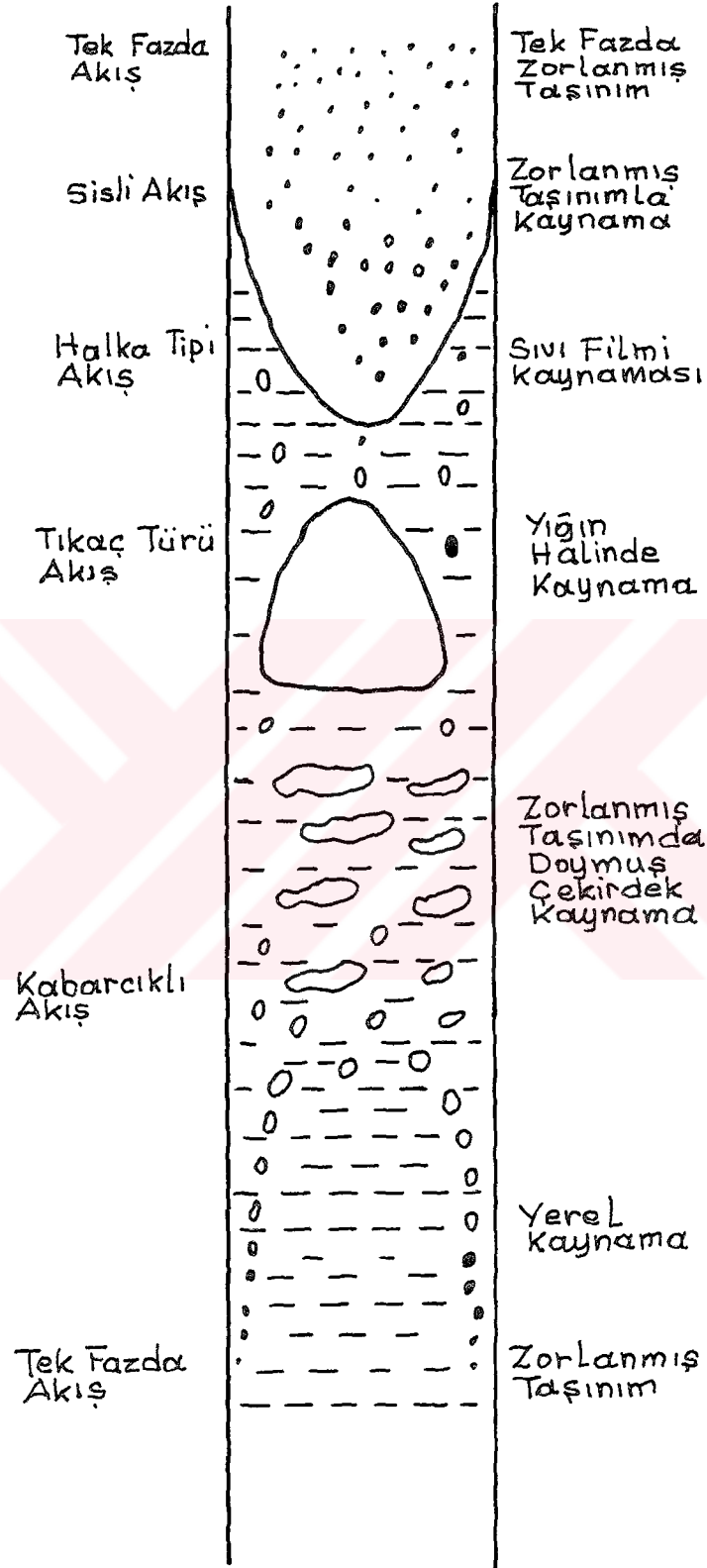
Yüzey, bir buhar tabakası, bir sıvı tabakası tarafından değiştirilerek örtüldüğü için yüzey sıcaklığında salınımlar oluşur. Isıtıcının gücü sabit tutulursa yüzey sıcaklığı hızla artarak D noktasına erişirken ısı akısı sürekli azalır. D-E aralığında, ısıtma yüzeyinin kararlı bir film tabakası tarafından kaplandığı görülür. Isı transferi hızı (gradyanı) minimuma erişir. Bu rejim "kararlı film kaynama" olarak adlandırılır. Duvar sıcaklığı arttıkça, ısı transfer hızı (gradyanı) bu bölgede ısı ışıma ile artar. Ancak yüksek sıcaklık ısıtıcı duvar için zararlı olup, malzeme özellikleri sıcaklık ile sınırlıdır.

Bahsedilen kaynama rejimleri kaynamalı akış için de geçerlidir. Ancak iki fazlı akışın kaynama süresince oynadığı önemli rolden ötürü mekanizma daha karışıktır. Akışkanın kabarcıkları sürüklemesiyle ortalama kabarcık büyüklüğü azalır fakat oluşum sıklığı artar. Pratikte eğrinin B-C aralığı ile ilgilenilir, bunun nedeni bu bölgede yüzey ile akışkan arasındaki oldukça düşük sıcaklık farklarında çok yüksek ısı akıları elde edilebilir olmasındandır.



Şekil 4.2. Kaynama rejimleri

Düsey durumda ısıtılan kanalda akışkan yukarı doğru akarken boşluk oranı kanal boyunca artar. Yüksek hızla yukarı akan ve kaynayan bir akışkan için akış biçimleri Şekil (4.3)'de gösterilmiştir. Yerel kaynama bölgesinde; aşırı soğutulmuş sıvı kütlesi kanal ortasında bulunmakta, ısıtıcı yüzey yakınında ise bu bölge aşırı ısıtılmış doymuş sıvı ile çevrili bulunmaktadır. İçinde kabarcıkların oluşup büyüdüğü aşırı ısıtılmış sıvı tabakasına bitişik iki fazlı kabarcık tabakasında ise yüzeye yapışık duran veya akışla taşınan kabarcıklar sürekli kanal ortasına doğru aşırı soğuk sıvı içinde yoğunlaşmaktadır. Duvardan ayrılan kabarcıklar akışkanın akma hızının %80'i kadar hızla hareket etmektedirler. Aşırı soğutulmuş akışkanın kaynamasında; gelişen kabarcık sınır tabakasındaki kabarcıkların ortalama büyüklüğünün, basıncın bir fonksiyonu olduğu ve bu tabakanın kalınlığının basıncın artmasıyla azaldığı gözlenmiştir. Yığık kaynama bölgesinde kabarcıklar gelişerek kanal merkezini doldurmaya başlamakta ve sıvı doygunluğuna ulaşmış bulunmaktadır. Bu durumda iki akış biçimi vardır. Bunlar kabarcıklı ve halka tipi akışlardır. Birincisi kabarcıklar doymuş suda dağılmıştır. Aşırı ısınmış sıvı hala ısıtıcı yüzey yanında bulunup akışı yoğunlaşmayan kabarcıklar ile besler ve böylece boşluk oranı artarken kabarcıklar akışın daha hızlı bölgesinde birikerek



Şekil 4.3. Isıtılan düşey kanalda akış

ortada buhar akışı ile kanal kesitinde iç içe halka görünümünde "Halka tipi akış" görülür. Bu akışta sıvı fazın büyük kısmı duvarda film şeklinde akar ve bundan ötürü bu akışa "Tırmanan film akışı" da denir.

4.5. İki Fazlı Akışlarda Kullanılan Büyüklük ve Notasyonlar

İki fazlı akışlarda; fazların sahip olduğu özellikleri tanımlayabilmek ve fazların göreceli oranlarının kantitatif olarak bilinmesi; Kaynar Sulu Reaktörlerde kullanılan iki fazlı soğutucu akışkanın, soğutma karakteristikleri ile meydana gelecek boşlukların nötronik etkilerini inceleyebilmek bakımından önemlidir. Aşağıda tanımlanacak olan büyüklükler; kanal kesiti ve zaman üzerinden ortalananmış olarak kullanılacaktır[24].

4.5.1. Boşluk Oranı (α)

İki fazlı akış içerisindeki, zaman ile ortalananmış buhar hacim oranına, buhar veya boşluk oranı adı verilir ve belli kesit alanında yerel buhar hacminin, toplam yerel akış hacmine oranı olarak tanımlanır.

$$\alpha = \frac{\iiint_{V_g} dv}{\iiint_V dv} = V_g / (V_l + V_g) \quad (4.1)$$

Kanal boyunca kesit alanın sabit kalması ve kanalda bir dz diferansiyel uzunluk elemanı boyunca boşluk oranı; alansal olarak da ifade edilebilir.

$$\alpha = dz \iint_{A_g} A / dz \iint_A dA = A_g / (A_g + A_l) \quad (4.2)$$

4.5.2. Faz Hızları (V_g, V_l)

Her fazın tek boyutlu ortalama hızı, kendi kesit alanları üzerinden akan hacimsel akış hızı (hacimsel debi)olarak tanımlanır.

$$V_l = Q_l / A_l, \quad V_g = Q_g / A_g \quad (4.3)$$

4.5.3. Hacimsel Akı (j_l, j_g)

Ortalama hacimsel akı, veya yüzeysel hız her fazın hacimsel akış hızının toplam akış kesitine olan oranı olarak tanımlanır.

$$j_l = Q_l / (A_l + A_g) = Q_l / A, \quad j_g = Q_g / (A_l + A_g) = Q_g / A \quad (4.4)$$

Karışımın toplam akışı $j = j_l + j_g$ olarak tanımlanır. Verilen ifadelerin tanımlarından yararlanılmak suretiyle ;

$$Q_l = V_l \times A_l \Rightarrow j_l = Q_l / (A_l + A_g) \Rightarrow j_l = V_l A_l / (A_l + A_g) \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{A_g}{(A_l + A_g)} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{A_l}{A_g} + 1 \Rightarrow \frac{(1-\alpha)(A_l + A_g)}{A_g} = \frac{A_l}{A_g} \Rightarrow 1 - \alpha = \frac{A_l}{A_l + A_g}$$

$$j_l = V_l (1 - \alpha) \quad (4.5)$$

$$j_g = Q_g / (A_l + A_g) \quad \text{ve} \quad V_g = Q_g / A_g \Rightarrow j_g = V_g A_g / (A_l + A_g), \quad \alpha = \frac{A_g}{A_l + A_g}$$

$$j_g = V_g \alpha \quad (4.6)$$

olur.

4.5.4. Hacimsel Akış Oranı (β)

Buharın hacimsel akış hızının (debisinin), toplam hacimsel akış hızına (debisine) oranına hacimsel akış oranı denir.

$$\beta = \frac{Q_g}{Q_l + Q_g} \quad (4.7)$$

ve;

$$j_l = \frac{Q_l}{A_l + A_g}, \quad j_g = \frac{Q_g}{(A_l + A_g)} \quad \beta = \frac{j_g (A_l + A_g)}{j_l + j_g (A_l + A_g)} \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{j_g}{j_l + j_g} \quad (4.8)$$

olarak bulunur.

4.5.5. Kayma Oranı (S)

Buhar fazının hızının, sıvı fazın hızına oranına denir. Homojen akış halinde, kayma oranının Bölüm 4.3'de anlatıldığı üzere bire eşit olacağı görülmektedir.

$$S = \frac{V_g}{V_l} \quad (4.9)$$

Böylece yerel bir büyüklük olan (α) ile , bir akış büyüklüğü olan (β) arasındaki bağıntı, bir C faktörü ile tanımlanabilir.

$$C = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha V_g + V_l(1-\alpha)}{V_g} \Rightarrow C = \alpha + \frac{(1-\alpha)}{S} \quad (4.10)$$

homojen akış halinde; kayma oranı bire eşit olduğundan $C=1$ ve $\alpha=\beta$ olarak bulunur.

4.5.6. Relativ Hız (V_r)

Normal olarak buhar fazının hızı, sıvı fazın hızından büyük olacaktır. Söz konusu hız farklarını belirleyen bu parametreye relativ hız adı verilir.

$$V_r = V_g - V_l \quad (4.11)$$

eğer kayma oranı bire eşitse $\frac{j_g}{\alpha} = \frac{j_l}{(1-\alpha)}$ $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{j_g}{j_l}$

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{j_l}{j_g} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{j_l + j_g}{j_g} \Rightarrow \alpha = \frac{j_g}{j_l + j_g} \quad \text{olur.}$$

4.5.7. Yerel Ortalama Yoğunluk ($\bar{\rho}$)

İki fazlı karışımda yerel ortalama yoğunluk aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{\rho} = \frac{\iiint \rho dV}{V_1 + V_g} = \left[\frac{\iiint \rho dV + \iiint \rho dV}{V_1 + V_g} \right]$$

$$\bar{\rho} = (1-\alpha)\rho_l + \alpha\rho_g \quad (4.12)$$

olur.

4.5.8. Kuruluk Derecesi (X_e, X, X_s)

İki fazlı akışlarda , üç değişik kuruluk derecesi tanımı yapılmaktadır.

a-) Termodinamik Denge Kuruluk Derecesi (X_e)

$$X_e = (h - h_l) / h_{lg} \quad (4.13)$$

h , iki fazlı karışımın entalpisi (h_l) ve (h_{lg}) ise yerel basıncın fonksiyonu olan sıvı entalpisi ve buhar-sıvı fazlarının entalpi farkıdır. X_e iki fazlı akışın termodinamik dengede olması halinde geçerlidir.

b-) Akış Kuruluk Derecesi (X)

Birim zamanda akan, buharın debisinin, toplam iki fazın debisine oranıdır. İki fazın termodinamik dengede olup olmadığına bakılmaksızın gerçek buhar oranını verir. Akış kuruluk derecesi $0 \leq X \leq 1$ değerlerini alabilir.

$$X = \frac{\rho_g V_g A_g}{(\rho_g V_g A_g + \rho_l V_l A_l)} \Rightarrow X = \frac{\rho_g V_g A_g}{W} \quad (4.14)$$

c-) Statik Kuruluk Derecesi (X_s)

Buhar kütlesinin, buhar ve sıvının toplam kütlesine oranı olarak tanımlanır.

$$X_s = \frac{\rho_g A_g}{(\rho_g A_g + \rho_l A_l)} \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{X} = \frac{V_l}{V_g} \frac{\rho_l A_l}{\rho_g A_g} + 1 \Rightarrow \frac{1-X}{X} = \frac{V_l}{V_g} \frac{\rho_l A_l}{\rho_g A_g} \quad \text{ve}$$

bulunur. Akış kuruluk derecesi ile aralarında

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_s} &= \frac{\rho_l A_l}{\rho_g A_g} + 1 \Rightarrow \frac{1-X_s}{X_s} = \frac{\rho_l A_l}{\rho_g A_g} \\ \frac{1-X}{X} &= \frac{V_l}{V_g} \frac{1-X_s}{X_s} \Rightarrow \frac{X}{1-X} = \frac{V_g}{V_l} \frac{X_s}{1-X_s} \quad \text{ve} \\ \frac{X}{1-X} &= S \frac{X_s}{1-X_s} \end{aligned} \quad (4.16)$$

bağıntısı yazılabilir. Homojen akış modelinde (4.16) denkleminde görüleceği üzere $X=X_s$ olmaktadır.

4.5.9. Kesit Alanı Üzerinden Ortalama Notasyonu

Bu notasyon Zuber tarafından tanımlanmış olup, herhangi bir değişken (δ) için, A toplam akış alanı olmak üzere [24];

$$\langle \delta \rangle = \frac{1}{A} \iint_A \delta dA \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanır. Buhar ve sıvı fazı değişkenleri için

$$\langle \delta_l \rangle = \frac{1}{A(1-\langle \alpha \rangle)} \iint_A \delta_l (1-\alpha) dA = \frac{\langle (1-\alpha)\delta_l \rangle}{\langle 1-\alpha \rangle} \quad (4.18)$$

$$\langle \delta_g \rangle_g = \frac{1}{\langle \alpha \rangle A} \iint_A \delta_g \alpha dA = \frac{\langle \alpha \delta_g \rangle}{\langle \alpha \rangle} \quad (4.19)$$

tanımları yapılabilir.

4.5.10. Kütle Akısı (G)

Kütle akısı; kütle akış hızının (kütleli debinin) , kesit alanına bölünmesi ile elde edilir.

$$G = \frac{W}{A_{x-s}} = \frac{\rho_1 \langle V_1 \rangle (1 - \langle \alpha \rangle)}{(1 - \langle X \rangle)} = \frac{\rho_g \langle V_g \rangle \langle \alpha \rangle}{\langle X \rangle} \quad (4.20)$$

olarak tanımlanır.

$$G = \frac{1}{A_{x-s}} \iint \left[\frac{\rho_1 V_1 (1 - \alpha) A_{x-s} + \rho_g V_g \alpha A_{x-s}}{A_{x-s}} \right] dA = \rho_1 \langle V_1 (1 - \alpha) \rangle + \rho_g \langle V_g \alpha \rangle$$

$$G = \rho_1 \langle V_1 \rangle (1 - \langle \alpha \rangle) + \rho_g \langle V_g \rangle \langle \alpha \rangle \Rightarrow$$

$$G(1 - \langle X \rangle) A_{x-s} = \rho_1 \langle V_1 \rangle (1 - \langle \alpha \rangle) A_{x-s}$$

ve

$$G \langle X \rangle A_{x-s} = \rho_g \langle V_g \rangle \langle \alpha \rangle A_{x-s}$$

$$G = \frac{W}{A_{x-s}} = \frac{\rho_1 \langle V_1 \rangle (1 - \langle \alpha \rangle)}{1 - \langle X \rangle} = \frac{\rho_g \langle V_g \rangle \langle \alpha \rangle}{\langle X \rangle}$$

$$\langle V_1 \rangle = \frac{G(1 - \langle X \rangle)}{\rho_1 (1 - \langle \alpha \rangle)}$$

$$\langle V_g \rangle = \frac{G \langle X \rangle}{\rho_g \langle \alpha \rangle} \quad \text{olarak bulunmuş olur.}$$

4.5.11. Boşluk Oranı İle Kuruluk Derecesi Arasındaki Bağlılıklar

$$\frac{\langle X \rangle}{(1 - \langle X \rangle)} = \frac{\rho_g S}{\rho_l} \left[\frac{\langle \alpha \rangle}{(1 - \langle \alpha \rangle)} \right] \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{\langle \alpha \rangle} - 1 = \frac{\rho_g S (1 - \langle X \rangle)}{\rho_l \langle X \rangle} \Rightarrow \frac{1}{\langle \alpha \rangle} = \left[\frac{(\rho_g S (1 - \langle X \rangle) + \langle X \rangle)}{\frac{\rho_l}{\langle X \rangle}} \right]$$

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\langle X \rangle}{\left[\langle X \rangle + \frac{S \rho_g (1 - \langle X \rangle)}{\rho_l} \right]} \Rightarrow \frac{\langle X_s \rangle}{(1 - \langle X_s \rangle)} = \frac{\rho_g}{\rho_l} \left[\frac{\langle \alpha \rangle}{(1 - \langle \alpha \rangle)} \right]$$

$$\frac{1}{\langle \alpha \rangle} - 1 = \frac{\rho_g (1 - \langle X_s \rangle)}{\rho_l \langle X_s \rangle} \Rightarrow \frac{1}{\langle \alpha \rangle} = \frac{\rho_g (1 - \langle X_s \rangle) + \langle X_s \rangle}{\rho_l \langle X_s \rangle} \Rightarrow$$

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\langle X_s \rangle}{\frac{\rho_g (1 - \langle X_s \rangle)}{\rho_l} + \langle X_s \rangle} \Rightarrow \langle \alpha \rangle = \frac{\langle X_s \rangle}{\frac{\rho_g}{\rho_l} + \frac{\langle X_s \rangle}{\rho_l} [\rho_l - \rho_g]}$$

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\langle X_s \rangle \rho_l}{[\langle X_s \rangle (\rho_l - \rho_g) + \rho_g]} \quad \text{ve} \quad \bar{\rho} = \rho_l (1 - \alpha) + \rho_g \alpha$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_l [\langle X_s \rangle \rho_l - \langle X_s \rangle \rho_g + \rho_g - \langle X_s \rangle \rho_l] + \rho_g \rho_l \langle X_s \rangle}{[\langle X_s \rangle (\rho_l - \rho_g) + \rho_g]} \Rightarrow$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_g \rho_l}{[\langle X_s \rangle \rho_l + \rho_g (1 - \langle X_s \rangle)]} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{\rho_l} \quad \text{ve}$$

$$V_{ig} = \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_l} \right) \text{ olduğundan; } \frac{1}{(V_l + \langle Xs \rangle V_{ig})} \text{ ve;}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_l \rho_g}{[\langle Xs \rangle \rho_l + (1 - \langle Xs \rangle) \rho_g]} = \frac{1}{V_l + \langle Xs \rangle V_{ig}}$$

olarak yazılır. Homojen akış için;

$$\bar{\rho} = (1 - \alpha) \rho_l + \alpha \rho_g \Rightarrow \langle \alpha \rangle = \frac{\langle X \rangle}{\left[\langle X \rangle + S \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) (1 - \langle X \rangle) \right]}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_l \left[\left[\langle X \rangle + S \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) (1 - \langle X \rangle) \right] - \langle X \rangle \right] + \langle X \rangle \rho_g}{\langle X \rangle + S \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) - S \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \langle X \rangle} \Rightarrow$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_l \rho_g [(1 - \langle X \rangle) S + \langle X \rangle]}{\rho_l \langle X \rangle + S \rho_g (1 - \langle X \rangle)} \Rightarrow \bar{\rho} = \frac{[(1 - \langle X \rangle) S + \langle X \rangle]}{\frac{1}{\rho_g} \langle X \rangle + \frac{1}{\rho_l} S (1 - \langle X \rangle)} \Rightarrow$$

$$\bar{\rho} = \frac{[(1 - X) S + \langle X \rangle]}{[\langle X \rangle V_g + V_l S (1 - \langle X \rangle)]} \Rightarrow \langle \rho \rangle = \frac{[(1 - \langle X \rangle) S + \langle X \rangle]}{\left[V_l S (1 - \langle X \rangle + V_g \langle X \rangle) \right]}$$

Homojen akış için $\langle \rho \rangle = \rho_H$ şeklinde tanımlanırsa,

$$\langle \rho_H \rangle = \frac{G}{\langle j \rangle} = \frac{W}{Q} = \frac{1}{(V_l + \langle X \rangle V_{ig})} \quad (4.22)$$

bulunur.

4.5.12. Sürüklenme Hızı (V_{gl})

Sürüklenme Hızı: Ortalama bir hızla hareket eden buhar fazının; karışımın hacimsel akışına göre olan relatif hızının boşluk faktörü üzerinden ağırlaştırılması ile elde edilir.

$$V_{gl} = \frac{\langle \alpha (V_{gl}) \rangle}{\langle \alpha \rangle} \quad (4.23)$$

4.6. Kaynar Sulu Reaktörün Soğutma Kanalı İçin Korunum Denklemlerinin Yazılması

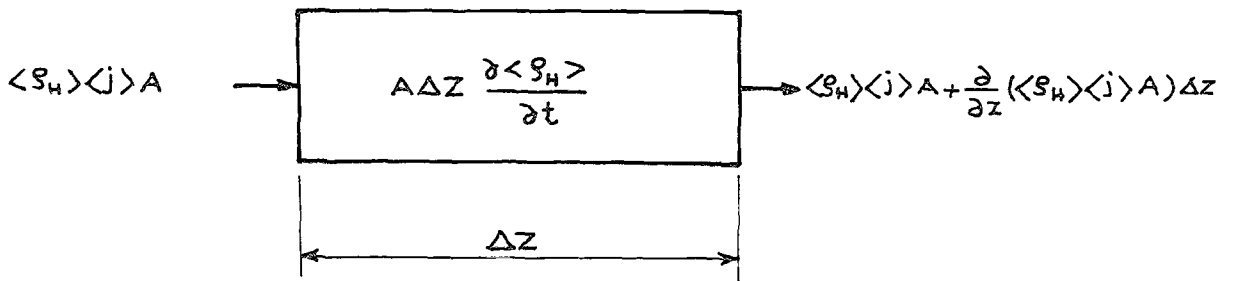
Korunum denklemlerinin yazılmasında; düşey soğutucu kanalına ; akışkan kanalın altından girmek suretiyle; homojen akış modelli iki fazlı akış olduğu göz önünde bulundurulmuştur. Korunum denklemleri eksenel boyutta ve akış kanal kesiti üzerinden ortalamaları alınmış büyüklükler olarak kabul edilerek yapılacaktır[1,23,24].

Süreklilik Denklemi:

Şekil (4.4)'den görüleceği üzere ve Bölüm 3'de detaylı olarak çıkartılmış olan süreklilik denklemlerinden de faydalanılmak suretiyle

$$\frac{Dj \langle \rho_H \rangle}{Dt} = - \langle \rho_H \rangle \frac{\partial \langle j \rangle}{\partial z} \quad (4.24)$$

yazılır.

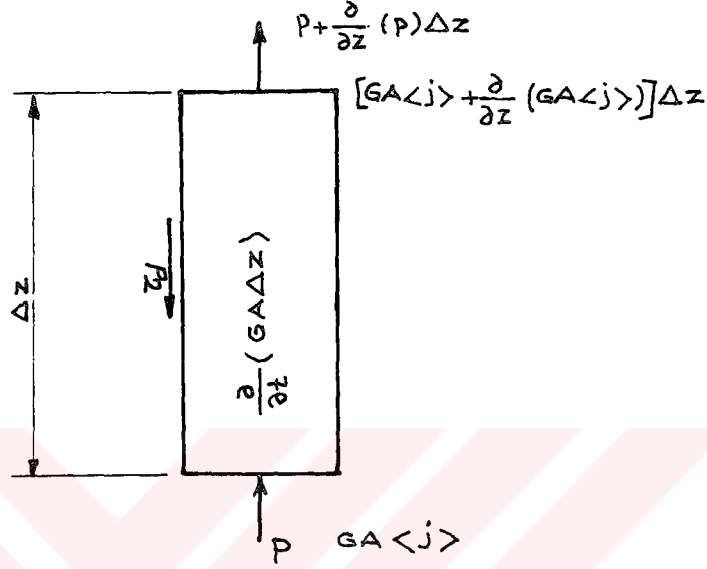


Şekil 4.4. Homojen akışta süreklilik denklemi

Momentum denklemi, Şekil (4.5)'den görüleceği üzere;

$$\frac{\partial}{\partial t} G A dz = - \frac{\partial}{\partial z} G A \langle j \rangle dz - \frac{\partial p}{\partial z} A dz - g \langle \rho_H \rangle A dz - \tau_d P_s dz \quad (4.25)$$

olur. Burada τ_d teğetsel kayma gerilmesi, P_s sürtünmenin meydana geldiği çevredir, $G = \langle \rho_H \rangle \langle j \rangle$ dir. 4.25 denkleminin sol tarafındaki terim seriye açılır ve



Şekil 4.5. Homojen akışta momentum denklemi

$\frac{\partial}{\partial t} G \Delta z = \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_H \rangle \langle j \rangle \Delta z = \langle \rho_H \rangle \frac{\partial}{\partial t} \langle j \rangle \Delta z + \langle j \rangle \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_H \rangle \Delta z$ aynı şekilde sağ taraftaki ilk terimde açılarak sol tarafa alınmak suretiyle ;

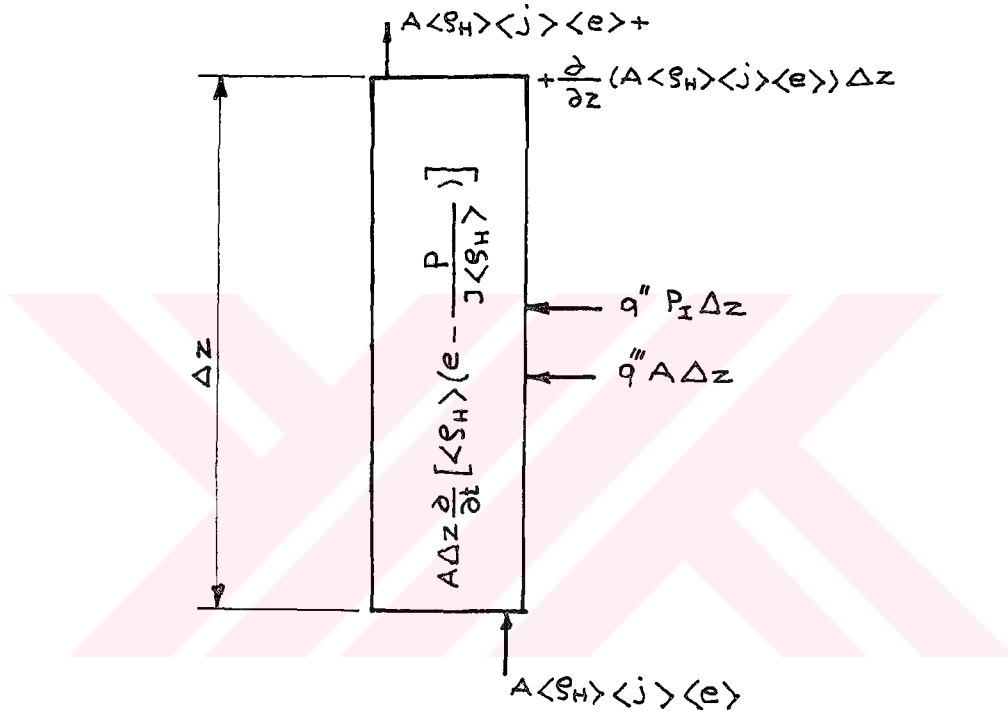
$$(\langle \rho_H \rangle (\frac{\partial \langle j \rangle}{\partial t} + \langle j \rangle \frac{\partial \langle j \rangle}{\partial z})) + \langle j \rangle (\frac{\partial \langle \rho_H \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho_H \rangle \langle j \rangle}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \langle \rho_H \rangle - \frac{\tau_d P_s}{A} \quad (4.26)$$

denklemi elde edilir. (4.26) denkleminde 2. terim hacimsel akı ile süreklilik denkleminin çarpılması olarak ortaya çıkmış olup sıfıra eşit olacaktır. Bu takdirde momentum korunum denklemi de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\langle \rho_H \rangle \frac{Dj \langle j \rangle}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \langle \rho_H \rangle - \frac{\tau_d P_s}{A} \quad (4.27)$$

Enerji Denklemi:

Şekil (4.6)'dan da görüleceği üzere tek boyutlu enerji denklemi diferansiyel formda aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 4.6. Homojen akışta enerji denklemi

$$-\frac{\partial}{\partial z} (\langle \rho_H \rangle \langle j \rangle A \langle e \rangle) dz + q'' P_i dz + q''' A dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\langle \rho_H \rangle \left(\langle e \rangle - \frac{p}{j \langle \rho_H \rangle} \right) \right) A dz \quad (4.28)$$

$$\langle e \rangle = \left(\langle h \rangle + \frac{\langle j \rangle^2}{2J} + \frac{gz}{J} \right) \quad (4.29)$$

tanımı ile , q'' yüzeyden akışkana transfer olan ısı akısı, q''' akışkan içindeki hacimsel enerji üretimi ve P_i ısıtılan çevre uzunluğudur.

$$-A \langle \rho_H \rangle \langle j \rangle \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial z} + \langle \Theta \rangle \left(\frac{\partial}{\partial z} (\langle \rho_H \rangle \langle j \rangle A) \right) + q'' P_l + q''' A =$$

$$A \langle \rho_H \rangle \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial t} + A \langle \Theta \rangle \frac{\partial \langle \rho_H \rangle}{\partial t} - A \frac{\partial p}{J \partial t}$$

ifadesi ile;

$$\langle \rho_H \rangle \left(\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial t} + \langle j \rangle \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial z} \right) + \frac{\langle \Theta \rangle}{A} \left(\frac{\partial}{\partial z} \langle \rho_H \rangle \langle j \rangle A + A \frac{\partial \langle \rho_H \rangle}{\partial t} \right) + q'' \left(\frac{P_l}{A} \right) + q''' + \frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial t}$$

elde edilir. Böylece, sistemin toplam enerji denklemi;

$$\langle \rho_H \rangle \frac{Dj \langle \Theta \rangle}{Dt} = q'' \left(\frac{P_l}{A} \right) + q''' + \frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.30)$$

şeklinde yazılır. Sistemin mekanik enerji denklemi; momentum denklemini; $\langle j \rangle$ ile çarpmak suretiyle elde edilir.

$$\langle \rho_H \rangle \frac{Dj \langle j^2 \rangle}{Dt} = - \frac{\langle j \rangle \partial p}{J \partial z} - g \langle j \rangle \langle \rho_H \rangle - \frac{\langle j \rangle \tau_{ds} P_s}{JA} \quad (4.31)$$

(4.30) denklemi aşağıdaki şekilde yazılarak;

$$\langle \rho_H \rangle \frac{Dj \langle h \rangle}{Dt} + \langle \rho_H \rangle \frac{Dj \langle j^2 \rangle / 2J}{Dt} + g \langle j \rangle \langle \rho_H \rangle = q'' \left(\frac{P_l}{A} \right) + q''' + \frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.32)$$

(4.32) denklemi elde edilir. Mekanik enerji denklemi olan (4.31) denklemi, (4.32) denkleminden çıkarılmak suretiyle aşağıda gösterilen ısı enerji denklemi elde edilmiş olur.

$$\langle \rho_H \rangle \frac{Dj \langle h \rangle}{Dt} = q'' \left(\frac{P_l}{A} \right) + q''' + \frac{1}{J} \frac{Dj P}{Dt} + \langle j \rangle \left(\frac{\tau_{ds} P_s}{JA} \right) \quad (4.33)$$

Isıl enerji denklemi, homojen akış modeli için, kurulum derecesi cinsinden kullanışlı bir denklem sistemine dönüştürülebilir. Şöyleki,

$$\langle \rho_H \rangle = \frac{1}{V_1 + \langle X \rangle V_{1g}} \quad \text{ve} \quad \langle h \rangle = h_1 + \langle X \rangle h_{1g}$$

hal denklemleri (4.33) denkleminde yerine konulmak suretiyle, akışkan içinde ısı üretimi q''' olmadığı ve viskoz etkilerin de ihmal edilmesi,

$$\langle \rho_H \rangle \frac{Dj \langle h \rangle}{Dt} = q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt} ;$$

$$\frac{1}{(V_1 + \langle X \rangle V_{1g})} \frac{Dj(h_1 + \langle X \rangle h_{1g})}{Dt} = q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt}$$

$$\frac{Dj(h_1 + \langle X \rangle h_{1g})}{Dt} = \left[q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt} \right] V_1 + \left[q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt} \right] \langle X \rangle V_{1g}$$

$$\frac{Dj h_1}{Dt} + \frac{Dj \langle X \rangle h_{1g}}{Dt} = \left[q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt} \right] V_1 + \left[q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt} \right] \langle X \rangle V_{1g}$$

$$\frac{Dj \langle X \rangle h_{1g}}{Dt} - \left[q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt} \right] \langle X \rangle V_{1g} = \left[q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt} \right] V_1 - \frac{Dj h_1}{Dt}$$

$$\langle X \rangle \frac{Dj h_{1g}}{Dt} + h_{1g} \frac{Dj \langle X \rangle}{Dt} - \left[q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt} \right] \langle X \rangle V_{1g} = \left[q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt} \right] V_1 - \frac{Dj h_1}{Dt}$$

$$\frac{Dj \langle X \rangle}{Dt} + \left\{ \frac{1}{h_{1g}} \left(\frac{Dj h_1}{Dt} - \left[q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{Dj p}{Dt} \right] V_{1g} \right) \right\} \langle X \rangle =$$

$$\frac{1}{h_{1g}} \left\{ \left[q'' \left(\frac{P_1}{A} \right) + \frac{1}{J} \frac{Dj p}{Dt} \right] V_1 - \frac{Dj h_1}{Dt} \right\} \quad (4.34)$$

denklemini elde edilir. Sistemin sabit basınçta olduğu ve eksenel basınç düşüşünün olmadığı gözönüne alınırsa

$$\eta = q'' \frac{P_1 V_{1g}}{A h_{1g}} \quad (4.35)$$

η faz değişiminin karakteristik frekansı olmak üzere (4.34) denkleminde yerine konulmak suretiyle

$$\frac{D_j \langle X \rangle}{Dt} - \eta \langle X \rangle = \eta \frac{V_1}{V_{1g}} \quad (4.36)$$

bağıntısı elde edilir.

Bölüm 4'de iki fazlı akışlar hakkında genel bilgiler verilmiş olup iki fazlı akışlarda kullanılan büyüklük ve notasyonların tanıtımı yapılmıştır. Bunlara paralel olarak da homojen akış halinde; Kaynar Sulu Reaktörün soğutma kanalı için korunum denklemleri; Bölüm 3'de tek fazlı akışlar için türetilmiş olan korunum denklemlerinden de istifade edilerek yazılmıştır. İki fazlı akışlarla ilgili olarak yapılmış olan tanımlamalar çerçevesinde soğutucu akış kanalının termo-hidrolik modellemesi yapılacaktır.



BÖLÜM 5

TERMO-HİDROLİK MODELLEME

Güç reaktörlerinin bazı tiplerinde soğutucu olarak kullanılan suyun reaktör içerisinde buharlaşmasına izin verilmek suretiyle; ayrı bir buhar üreticisine gerek duyulmaksızın reaktörde oluşan buhar, buhar türbinine gönderilir. Bu tip reaktörlere Kaynar Sulu Reaktörler adı verilir. Böylece reaktör kalbinde nükleer olaylar sonucunda oluşan enerji; kalp soğutma sistemi tarafından kalpten dışarı alınmaktadır. İki fazlı akış kanalının termo-hidrolik modellemesiyle; yakıt malzemesi; gaz boşluğu ve zarftan meydana gelen yakıt çubuğu ile yakıt çubuğunu çevreleyen soğutucu akış kanalını içine alan bir hücrenin enerji dengesi hesabı yapılabilir.

Basıncı su reaktörlerinde (PWR, PHWR), buhar üreteçlerinde, birinci devredeki basıncı suyun ısısının bir kısmı ikinci devredeki suyun buharlaşmasında kullanılır. Buhar üretici kanallarındaki kaynama ile kaynar sulu reaktör kanallarındaki kaynamanın mekanizmaları aynıdır.

Bu çalışmada, incelenmek üzere göz önüne alınan hücre için;

- 1.) Yakıt çubuğu, reaktör kalbinin merkezinde olup, yakıt çubuğunun çevresinde kontrol çubuklarının bulunmadığı,
- 2.) Yakıt çubuğunda aksel doğrultuda ısı iletimi ihmal edildiği[23,24],
- 3.) Yakıt ve zarfın ısı iletim katsayıları sıcaklığın fonksiyonu olduğu,
- 4.) Soğutucu kanallar arasında kütle ve enerji geçişi olmadığı,
- 5.) Soğutucu kanalında; tek fazlı aşırı soğuk sıvı ve kütleli kaynamalı bölge göz önüne alınarak; aşırı soğuk sıvı kaynama bölgesi ihmal edildiği,
- 6.) Soğutma kanalında ısı taşınımının aksel doğrultuda olduğu, radyal doğrultuda ısı taşınımı olmadığı,
- 7.) Akışkanın soğutucu kanala giriş koşulları zamana bağlı değişmediği,
- 8.) Gerek tek fazlı ve gerekse iki fazlı akışa ait özellikler sıcaklığın ve basıncın fonksiyonu olduğu,
- 9.) Soğutucu kanalda basınç düşümü; sürtünme, geometrik (yerel), hidrostatik yükselme ve akışkan hızının değişiminden meydana geldiği, varsayılmıştır.

Termo-hidrolik modelleme yapılırken; sonlu farklar yaklaşımı çerçevesinde, aksel yönde her bir ızgara için, analitik olarak hesaplanan

çizgisel güç yoğunluğu her bir ızgara hacmine ait olmak üzere; eksenel yönde adım, eksenel yönde ızgara aralıkları, şekil faktörlerine ilişkin sabitler, akışkanın soğutucu kanala giriş; sıcaklık, basınç, yoğunluk, hız ve entalpi değerleri esas alınmak suretiyle, her bir ızgara hacminde akışkana ait özellikler gerek tek fazlı ve gerekse iki fazlı bölgeler için hesaplanarak elde edilmiş olan akışkan sıcaklıkları ile yakıt elemanında aynı noktadaki sıcaklıklar hesaplanmıştır[4,27]. Modellemede; akışkanın termo-hidrolik özelliklerinin her bir ızgara hacminde değişmediği esas alınmıştır.

5.1. Soğutucu Kanalında Eksenel Yönde Isı Transferi

Kaynar Sulu Reaktörlerde; soğutucu kanal üç ayrı bölgede incelenebilir. Bunlar; tek fazlı aşırı soğuk sıvı bölgesi, aşırı soğuk sıvı kaynamalı bölge ve kütleli kaynamalı bölgedir. Aşırı soğuk sıvı kaynamalı bölgede, akışkan sıcaklığı; akışkanın doyma sıcaklığının altında olup yüzeyde oluşan kabarcıklar akışkan içerisinde yoğunlaşarak kaybolur. Bu sebepten ötürü bu bölgede net buhar üretimi yoktur. Söz konusu bu bölge tek fazlı aşırı soğuk sıvı bölgesi ile kütleli kaynamalı bölge arasında bir geçiş bölgesidir. Bu çalışmada yapılan termo-hidrolik analizde ihmal edilmiştir[1,22,23].

Tek fazlı aşırı soğuk sıvı bölgesinde; termo-hidrolik sabitlerin değişimi üzerinde basıncın fazla bir etkisi olmadığından bu bölge incelenirken, kütle ve enerjinin korunumunu göz önüne almak yeterli olacaktır. İki fazlı akış bölgesinde; soğutucu akışkanın doyma sıcaklığı ve diğer termo-hidrolik sabitler basıncın fonksiyonu olduğundan; bu bölgede kütlenin ve enerjinin korunumu yanında basınç değişimlerini de göz önünde bulundurulması gerekmektedir[1].

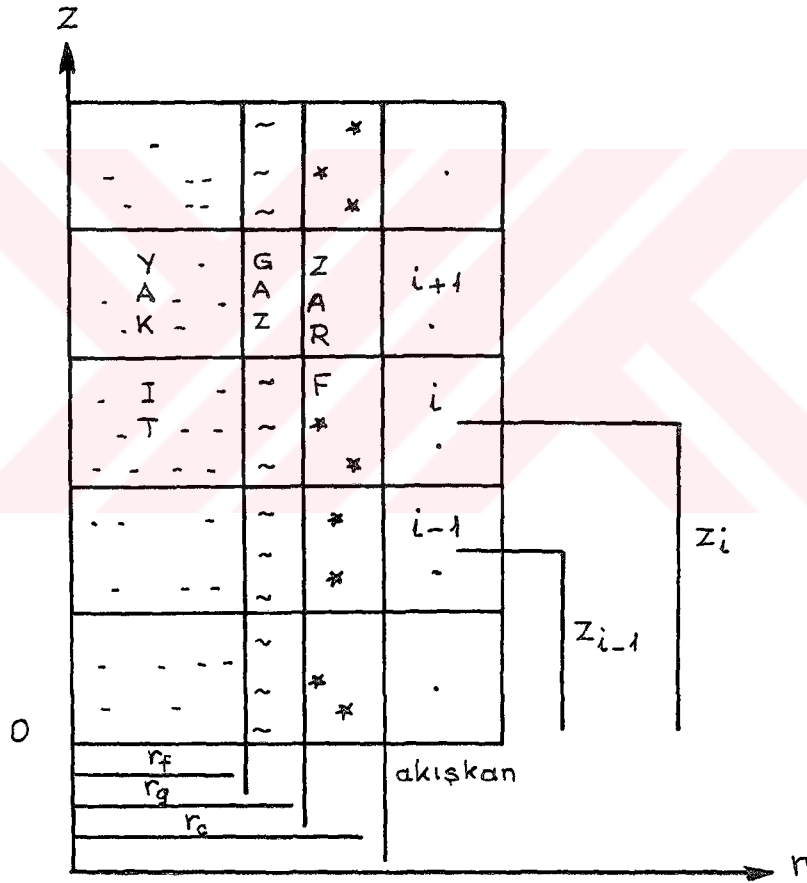
Soğutucu kanalda, akışkanın ortalama sıcaklığı doyma sıcaklığına ulaştığında kütleli kaynama başlayacaktır. Kütleli kaynama bölgesinde; Bölüm 4.2.' de de bahsedildiği üzere, matematiksel kolaylıklardan dolayı homojen akış tipi göz önüne alınarak iki fazlı akışın davranışı incelenebilir[22].

5.1.1. Tek Fazlı Akışın Termo Hidrolik Analizi

Sürekli rejimde; aksenal yönde kütlenin korunumu ifadesi;

$$\rho V A dh = q'(z) dz \Rightarrow W dh = q'(z) dz \quad (5.1)$$

şeklindedir. Şekil (5.1)'de gösterilen ızgara hacmine göre (5.1) denklemi entegre edildiğinde



Şekil 5.1. Soğutucu akış kanalı sonlu fark şeması

$$\int_{i-1}^i W dh = \int_{i-1}^i q'(z) dz \quad (5.2)$$

i noktasındaki entalpi değeri;

$$h_i = h_{i-1} + \frac{\Delta z_i}{2W} (q'_{i-1} + q'_i) \quad (5.3)$$

olur. $h(z)=c(z)Ta(z)$ ifadesi denklem (5.3)'de yerine konulmak suretiyle ızgara hacminde akışkan sıcaklığı;

$$Ta_i = Ta_{i-1} + \frac{\Delta z_i}{2WC_i} (q'_{i-1} + q'_i) \quad (5.4)$$

olur. Tek fazlı bölgede basıncın değişimi çok küçük olacağından, akışkanın hızının değişiminden meydana gelen kayıplar ihmal edilebilir. Böylece tek fazlı bölgede akışkan basıncındaki düşümler;

$$P_i = P_{i-1} - \Delta P_{Frl} - \Delta P_{Fi} - \Delta P_{hi} \quad (5.5)$$

şeklinde yazılabilir.(5.5) denkleminde görülen ΔP_{Frl} , ΔP_{Fi} , ΔP_{hi} sırasıyla sürtünme, geometrik değişim ve hidrostatik yükselmeden meydana gelen basınç düşümleridir.

$$\Delta P_{Frl} = \frac{2\Delta z_i}{D_H} \rho_i V_i^2 F_{si} \quad (5.6)$$

$$\Delta P_{hi} = \rho_i \Delta z_i g \quad (5.7)$$

$$\Delta P_{Fi} = 0.5 K_{Fi} V_i^2 \quad (5.8)$$

Denklem (5.6)'da F_{si} ifadesi sürtünme katsayısıdır. Sürtünme katsayısı denklem (5.10)'da verilen dairesel olmayan kanallar için "Blasius formülü" kullanılmak suretiyle hesaplanabilir[8,23].

$$D_T = -3.475 + 8.053 \left(\frac{r_p}{D} \right) - 4.705 \left(\frac{r_p}{D} \right)^2 + 0.916 \left(\frac{r_p}{D} \right)^3 \quad (5.9)$$

$$F_{si} = 0.0791 (Re_i)^{-0.25} D_T \quad 2300 < Re_i < 10^5 \quad (5.10)$$

Tek fazlı aşırı soğuk sıvı için, ısı taşınım katsayısı "Dittus Boelter" korelasyonu kullanılarak hesaplanabilir.

$$Nuc_i = 0.023 (Pr_i)^{0.4} (Re_i)^{0.8} \quad (5.11)$$

Denklem (5.11)'de kullanılan Reynold ve Prandtl sayıları boyutsuz olup aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Pr_i = \frac{\mu_i C_i}{k\alpha_i} \quad (5.12)$$

$$Re = \frac{\rho_i V D_h}{\mu_i} \quad (5.13)$$

Denklem (5.11)'de verilen Nusselt sayısı dairesel olmayan kanallar için;

$$Nu_i = Nuc D_T \quad (5.14)$$

olacaktır. Denklem (5.14)'den de faydalanılmak suretiyle ısı transfer katsayısı

$$h_i = k\alpha_i \frac{Nu_i}{D_h} \quad (5.15)$$

şeklinde hesaplanır. Izgara hacmi içerisinde seçilen noktadaki hızın, sıcaklığın, basıncın ve entalpinin ortalama değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$V_{ort} = \frac{W}{\rho_{ort} A} \quad (5.16)$$

$$P_{ort} = \frac{1}{2}(P_i + P_{i-1}) \quad (5.17)$$

$$Ta_{ort} = \frac{1}{2}(Ta_i + Ta_{i-1}) \quad (5.18)$$

$$h_{ort} = \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1}) \quad (5.19)$$

Tek fazlı aşırı soğuk sıvı bölgesinde akışkanın termo hidrolik özelliklerinin sıcaklığa bağlı olan değişimi; en küçük kareler yöntemi ile elde edilen fonksiyonlarla tanımlanmaktadır [1,27]. Bunlar sırasıyla;

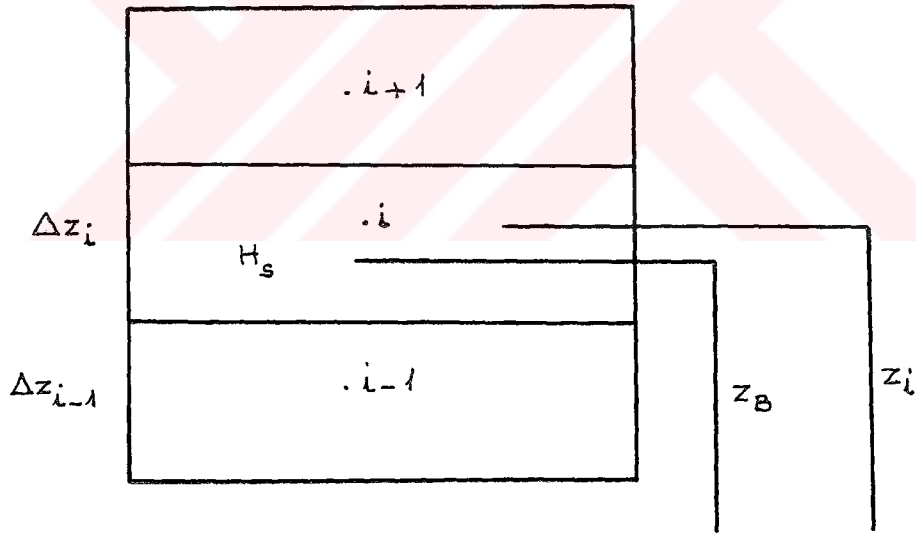
$$\rho = 0,73435 - 2,2274 \cdot 10^{-3} [T_a - T_{a,r}] - 8,63 \cdot 10^{-6} [T_a - T_{a,r}]^2 \quad (\text{g/cm}^3) \quad (5.20)$$

$$k_a = 5,791 \cdot 10^{-3} - 1,113 \cdot 10^{-5} [T_a - T_{a,r}] - 9,668 \cdot 10^{-10} [T_a - T_{a,r}]^2 \quad (\text{W/cm}^0 \text{C}) \quad (5.21)$$

$$c = 5,34811 + 1,2845 \cdot 10^{-2} [T_a - T_{a,r}] \quad (\text{J/g}^0 \text{C}) \quad (5.22)$$

$$\mu = 9,531 \cdot 10^{-4} - 3,79 \cdot 10^{-6} [T_a - T_{a,r}] - 1,4681 \cdot 10^{-8} [T_a - T_{a,r}]^2 \quad (\text{g/cm s}) \quad (5.23)$$

olup, akışkan sıcaklığının 215°C ve 300°C aralığında geçerli olmak üzere, referans sıcaklık 285.88°C dur.



Şekil 5.2. Kütlesel kaynama sınırı

5.1.2. İki Fazlı Akışın Termo Hidrolik Analizi

Kütlesel kaymanın başladığı nokta Şekil (5.2)'den de görüleceği üzere

$$z_B = z_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta z_{i-1} + \beta \Delta z_i \quad (5.24)$$

olacaktır. Denklem (5.24)'de kullanılan ' β ' değeri ise;

$$\beta = \frac{h_s - h_{t-1}}{h_1 - h_{t-1}} \quad (5.25)$$

olur. Kaynamanın başladığı ızgara hacminde entalpi değişimi $h_{t-1} \leq h_{sl} < h_1$ olacaktır. Denklem (5.1) akışkanın soğutucu kanala girişinden, kaynamanın başladığı noktaya kadar entegre edildiğinde;

$$W(h_{zB} - h_0) = \int_0^{z_B} q'(z) dz \Rightarrow h_s = h_0 + \frac{1}{W} \int_0^{z_B} q'(z) dz \quad (5.26)$$

olmak üzere; h_s soğutucu akışkanın doyma entalpisine eşit olacaktır. Kaynama sınırının üzerindeki bölgelerde entalpi değişimi

$$\int_{z_B}^z W dh = \int_{z_B}^z q'(z) dz \Rightarrow h(z) = h_s + \frac{1}{W} \int_{z_B}^z q'(z) dz \quad (5.27)$$

olur. Bölüm 4.5.8'den de faydalanılmak suretiyle iki fazlı akış bölgesinde kurulum derecesi;

$$X_1 = \frac{\int_{z_B}^z q'(z) dz}{W h_{lg}} \quad (5.28)$$

bağıntısından bulunur. Boşluk oranı ; "Martinelli-Nelson" korelasyonu kullanılmak suretiyle aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Korelasyonda bulunan α katsayısı basınca bağlı bir sabiti göstermektedir[27].

$$\alpha_1 = \frac{\alpha x_1}{1 + (\alpha - 1)x_1} \quad (5.29)$$

Tek fazlı akış bölgesinde ihmal edilen akışkan hızının değişiminden meydana gelen basınç kayıpları bu bölgede göz önüne almak suretiyle; iki fazlı akış bölgesinde basınç düşümleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$P_1 = P_{t-1} - \Delta P_{cl} - \Delta P_{Frl} - \Delta P_{Fl} - \Delta P_{hl} \quad (5.30)$$

$$\Delta P_{ai} = \rho_l V^2 (\ell - 1) \quad (5.31)$$

$$\Delta P_{Fri} = \frac{2\Delta Z}{D_h} \rho V^2 F_s R_{Fi} \quad (5.32)$$

$$\Delta P_{hi} = \rho \Delta z_i g \quad (5.33)$$

$$\Delta P_{Fi} = 0.5 K_g \rho V^2 \ell \quad (5.34)$$

Denklem (5.32)'de kullanılan iki fazlı sürtünme faktörü için "Becker Korelasyonu" kullanılabilir[4,27].

$$R_{Fi} = 1 + 1.486 \cdot 10^8 \left(\frac{x_i}{P_i} \right)^{0.96} \quad (5.35)$$

$$\ell = \frac{(1-x)^2}{(1-\alpha)} + \frac{x^2 \rho_l}{\alpha \rho_g} \quad (5.36)$$

Akışkan kesit alanında meydana gelen değişikliklere bağlı olarak; şekil faktörlerine ilişkin K_l ve K_g sabitlerinin , 0.6 ile 1.2 arasında değişen değerler aldığı görülmektedir.

İki fazlı akış bölgesinde ısı taşınım katsayısı "Jens Lottes Korelasyonu" yardımı ile aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$h_i = 1.266 \exp \left(0.161 \cdot 10^{-6} P_i \right) (q_i'')^{0.75} \quad (5.37)$$

Kütleli kaynamalı bölgede de akışkanın termo-hidrolik özelliklerinin sıcaklık ve basınca bağlı değişimi ; en küçük kareler yöntemi ile elde edilen fonksiyonlarla tanımlanmaktadır [1,27]. Bunlar sırasıyla;

$$T_g = 285.713 + 9.8 \cdot 10^{-6} [P - P_r] - 4.53 \cdot 10^{-13} [P - P_r]^2 \quad (^\circ C) \quad (5.38)$$

$$h_s = 1266.66 + 5.210 \cdot 10^{-5} [P - P_r] - 1.645 \cdot 10^{-12} [P - P_r]^2 \quad (J/g) \quad (5.39)$$

$$h_g = 1504,096 + 6,509 \cdot 10^{-5} [P - P_r] + 6,813 \cdot 10^{-13} [P - P_r]^2 \quad (\text{J/g}) \quad (5.40)$$

$$\rho_l = 0,740177 - 1,814 \cdot 10^{-8} [P - P_r] + 2,08 \cdot 10^{-6} [P - P_r]^2 \quad (\text{g/cm}^3) \quad (5.41)$$

$$\rho_g = 36,544 \cdot 10^{-3} + 5,871 \cdot 10^{-9} [P - P_r] + 1,58 \cdot 10^{-16} [P - P_r]^2 \quad (\text{g/cm}^3) \quad (5.42)$$

$$\mu = 9,485 \cdot 10^{-4} - 3,43435 \cdot 10^{-11} [P - P_r] \quad (\text{g/cm}^0 \text{C}) \quad (5.43)$$

$$k\alpha = 5,65 \cdot 10^{-3} - 1,79 \cdot 10^{-5} [T_a - T_{qr}] + 3,267 \cdot 10^{-4} [T_a - T_{qr}]^2 \quad (\text{W/cm}^0 \text{C}) \quad (5.44)$$

$$c = 5,372 - 2,744 \cdot 10^{-2} [T_a - T_{qr}] + 3,267 \cdot 10^{-4} [T_a - T_{qr}]^2 \quad (\text{J/g}^0 \text{C}) \quad (5.45)$$

olup, akışkan sıcaklığının 273°C ve 337°C aralığında ve akışkan basıncının 4.8 ve 11 MPa olduğu aralıkta geçerli olmak üzere, referans sıcaklık 285.88°C ve referans basınç 7 MPa dır.

Analitik olarak hesaplanan çizgisel güç yoğunluğu ve sonlu farklar yaklaşımı çerçevesinde ızgara hacimlerine ayrılan akış kanalında; akışlara ait sıcaklık, basınç, entalpi ve akışkanın diğer termo-hidrolik özelliklerinin hesaplanabilmesi sonucunda; yakıt elemanında aynı noktadaki sıcaklıklar hesaplanmaktadır.

5.2. Enerji Üretimini Veren Diferansiyel Denklemin Türetilmesi

Diferansiyel formülasyon beş adım kuralına göre yapılacaktır. İlk adımda sistem ve eksen takımı belirlenir. Şekil (4.3)'den de görüleceği üzere silindirik koordinatlarda diferansiyel hacim elemanı seçilmiş olup; söz konusu hacim elemanın açısal bağımlılığı ihmal edilecektir. Ayrıca yakıt çubuğunun boyunun yarıçapına oranı çok büyük olması nedeniyle de sadece radyal yönde ısı transferi olduğu kabul edilmiştir.

İkinci adımda genel kanun olarak; enerjinin korunumu ifadesi iş yapılmadığına göre; seçilen sistem için,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = q \quad (5.46)$$

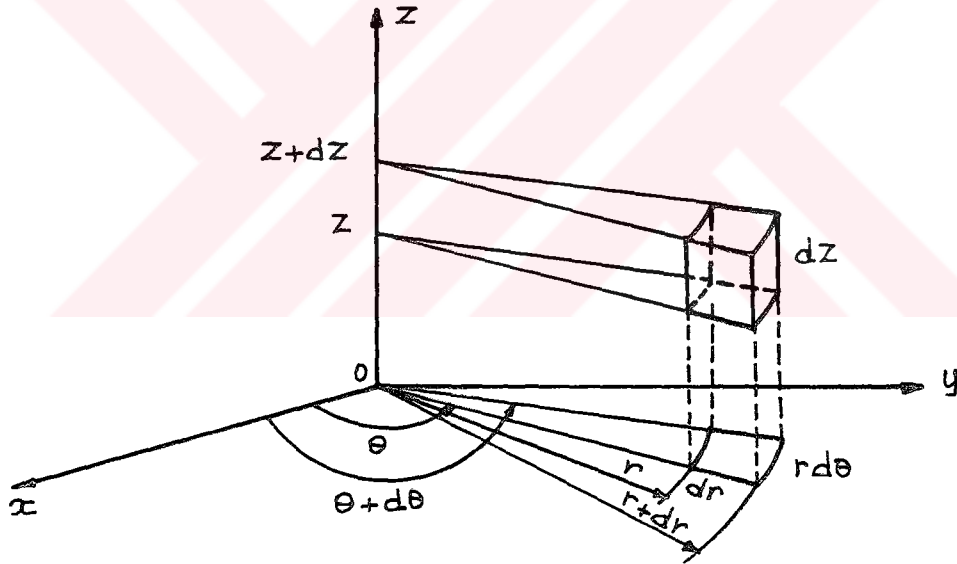
denklemini ile ifade edilebilir. $dV = 2\pi r dr dz$ olmak üzere ; sol taraftaki ifade açılarak

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (2\pi r dr dz \rho c T) - \frac{\partial}{\partial t} (2\pi r dr dz u''') \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u'''}{\partial t} = q''' \quad \text{tanımı ile} \quad (5.46)$$

denkleminin sol tarafı ;

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 2\pi r \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - q''' \right) dr dz \quad (5.47)$$

şeklini alır.



Şekil 5.3. Silindirik koordinatlarda diferansiyel hacim elemanı

Üçüncü adımda; seçtiğimiz sistem için Fourier özel kanunu $q_\theta = 0$ $q_z = 0$ olduğundan

$$q = q_r - q_{r+dr} \quad (5.48)$$

$$q_r = -k2\pi r dz \frac{\partial T}{\partial r} \quad , \quad q_{r+dr} = -k2\pi r dz \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(k2\pi r dz \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr \quad (5.49)$$

$$q = \frac{\partial}{\partial r} \left(k2\pi r dz \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr \quad (5.50)$$

olur.(5.47) ve (5.50) denklemlerinden faydalanılarak, eşitliğin her iki tarafı 2π ile bölünerek;

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -q''' + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.51)$$

denklemini elde edilir. Sürekli rejimde $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ olacağından; (5.51) denklemini

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -q''' \quad (5.52)$$

şeklini alır. Nükleer enerji üretimi terimi (5.52) denkleminde "r"den bağımsız (sabit) kabul edilir. Açısal bağımlılığı olmayan bir silindirik reaktörde hacimsel güç yoğunluğu;

$$q'''(z) = q'''_0 \cos\left(\frac{\pi z}{H_e}\right) \quad (5.53)$$

olur[23,25]. Burada q'''_0 , q''' 'nin maksimum değeri olup, yakıt elemanın merkezinde meydana gelir. Benzer şekilde çizgisel güç yoğunluğuda;

$$q'(z) = q'_0 \cos\left(\frac{\pi z}{H_e}\right) \quad (5.54)$$

şeklinde yazılır.

Bölüm 5.3, 5.4 ve 5.5'de türetilcek olan sıcaklık dağılımı ifadeleri, sonlu farklar yaklaşımı çerçevesinde her bir ızgara aralığına karşılık gelen noktalar için yapılacaktır.

5.3. Yakıt Elemanında Sıcaklık Düşümü

Daha önce türetilen (5.52) denklemini yakıt bölgesi için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_F r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -q''' \quad 0 < r < r_F \quad (5.55)$$

Yakıtın ısı iletim katsayısı sıcaklığın fonksiyonu olup, aşağıdaki gibi ifade edilebilir[25].

$$k_F(T) = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2 T} = \frac{9.975 \cdot 10^{-2}}{1 + 2.5 \cdot 10^{-3} T} \quad \left(\frac{W}{cm^0 C} \right) \quad (5.56)$$

(5.56) denklemi denklem (5.55)'de yerine konulmak suretiyle;

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha_1 r}{1 + \alpha_2 T} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -q''' \quad 0 < r < r_F \quad (5.57)$$

olur ve $\pi_F^2 q''' = q'$ olmak üzere; (5.57) denkleminde gerekli integrasyon ve türev alma işlemleri yapılmak suretiyle

$$T(r) = -\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2} \exp \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \frac{q' r^2}{4\pi r_F^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} A \ln r + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} B \right) \quad (5.58)$$

şeklinde yazılabilir. (5.58) denklemindeki integrasyon sabitlerini bulmak için iki tane sınır şartına ihtiyaç vardır. Yakıt içerisinde sıcaklığın simetrik bir dağılım gösterdiği kabul edilerek ilk sınır şartı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (5.59)$$

Yakıt yüzey sıcaklığının bilindiğini kabul edersek, ikinci sınır şartı

$$T(r = r_F) = T_g \quad (5.60)$$

şeklinde yazılabilir. (5.59) ve (5.60) denklemlerinde verilen sınır şartları, (5.58) denkleminde bulunan integrasyon sabitlerini bulabilmek için kullanılırsa;

$$A=0$$

$$B = \frac{q'}{4\pi} + \frac{a_1}{a_2} \ln(a_2 Tg + 1) \quad (5.61)$$

şeklinde bulunur. Denklem (5.61)'de verilen integrasyon sabitleri denklem (5.58)'de yerlerine yazılmak suretiyle;

$$T(r) = \frac{1+a_2 Tg}{a_2} \exp \left[\frac{a_2 q'}{4\pi a_1 r_F^2} (-r^2 + r_F^2) \right] - \frac{1}{a_2} \quad (5.62)$$

yakıt bölgesinde sıcaklık dağılımı bulunmuş olur. (5.62) denklemi yardımıyla yakıt bölgesindeki sıcaklık düşümü;

$$T_m = \frac{1+a_2 Tg}{a_2} \exp \left(\frac{a_2 q'}{4\pi a_1} \right) - \frac{1}{a_2} \quad (5.63)$$

bulunur. Yakıtın ortalama sıcaklığı ise aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$T_{ort} = \frac{\int_0^{r_F} 2\pi r T(r) dr}{\int_0^{r_F} 2\pi r dr} \quad (5.64)$$

(5.62) denklemi , denklem (5.64)'de yerine konulup , gerekli integral hesaplamaları yapılmak suretiyle yakıt bölgesi içerisinde ortalama yakıt sıcaklığı aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$T_{ort} = \frac{(1+a_2 Tg)4\pi a_1}{a_2^2 q'} \left[\exp \left(\frac{q' a_2}{4\pi a_1} \right) - 1 \right] - \frac{1}{a_2} \quad (5.65)$$

5.4. Yakıt Zarf Arasındaki Gaz Boşluğunda Sıcaklık Düşümü

Daha önce türetimi yapılan (5.52) denklemi bu bölgede enerji üretimi olmadığından aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_g r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad r_F < r < r_g \quad (5.66)$$

Denklem (5.66) belirlenecek sınır şartları altında çözüldüğünde, bu bölgede sıcaklık düşümü bulunabilir. Ancak yakıtın kullanılması sonucunda yakıtın şişmesi ve yüksek sıcaklıkta dış basıncın etkisi altında olan zarfın sürtünmesi nedenleriyle yakıt ile zarf arasındaki temas basıncı artar ve yakıt-zarf arasındaki ısı geçişine temas iletkenliği hakim olur. Bu sebeplerden ötürü gaz aralığı için bir ısı iletim katsayısı veya ısıl ısıma katsayısı yerine, yakıttan zarfa eşdeğer ısı geçiş katsayısı tanımlanır. Bu katsayının sayısal değeri gaz aralığı kalınlığına, yakıtla zarf arasındaki temas basıncının, kullanılan zarf malzemesinin ve yanma oranının fonksiyonu olarak (0.5 ile 1.1 W/cm²K) arasında değişmektedir[1.3,24].

Böylece (5.67) denklemi kullanılmak suretiyle gaz aralığındaki sıcaklık düşümü bulunabilir.

$$q' = 2\pi r_F h_g (T_g - T_c) \quad (5.67)$$

5.5. Yakıt Zarfında Sıcaklık Düşümü

Bu bölgede de enerji üretimi olmadığından (5.52) denklemindeki sıcaklık dağılımı ifadesi bu bölge için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_c r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad r_g < r < r_c \quad (5.68)$$

Zarfin ısı iletim katsayısı sıcaklığın fonksiyonu olup aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$k_c(T) = \frac{C_1}{1 + C_2 T} = \frac{0.1271}{1 - 6.292 \cdot 10^{-4} T} \quad \left(\text{W/cm}^2 \text{ } ^\circ\text{C} \right) \quad (5.69)$$

(5.69) denklemi (5.68) denkleminde yerine konularak ve gerekli integrasyon, türev alma işlemleri yapılarak , sıcaklık dağılımı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$T_c(r) = -\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2} \exp \left(\frac{C_2}{C_1} A \ln r + \frac{C_2}{C_1} B \right) \quad (5.70)$$

A ve B integrasyon sabitleri , sınır şartları kullanılarak çözülür. Bu sınır şartları;

$$T(r=r_g)=T_c \text{ ve } T(r=r_c)=T_s \quad (5.71)$$

şeklinde seçilirse, denklem (5.70)'de kullanılarak; integrasyon sabitleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$A = \frac{C_1}{C_2} \ln \left(\frac{1+C_2 T_s}{1+C_2 T_c} \right) \frac{1}{\ln r_c / r_g} \quad (5.72)$$

$$B = \frac{C_1}{C_2} \ln(1+C_2 T_c) - \frac{C_1}{C_2} \ln \left(\frac{1+C_2 T_s}{1+C_2 T_c} \right) \frac{\ln r_g}{\ln r_c / r_g}$$

A ve B katsayıları (5.70) denkleminde yerine yazılarak, zarf bölgesinde sıcaklık dağılımı bulunmuş olur.

$$T(r) = -\frac{1}{C_2} + \frac{1+C_2 T_c}{C_2} \exp \left[\ln \left(\frac{1+C_2 T_s}{1+C_2 T_c} \right) \frac{\ln \left(\frac{r}{r_g} \right)}{\ln \left(\frac{r_c}{r_g} \right)} \right] \quad (5.73)$$

Bu bölgede sıcaklık düşümünün bulunması ise ;

$$q'' = -k_c \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_g} \quad (5.74)$$

ve (5.73) denkleminin r_g noktasındaki türevi ve denklem (5.69)'un T_c noktasındaki değerleri , denklem (5.74)'de kullanılarak yakıt zarfında sıcaklık dağılımı;

$$q'' = \frac{q'}{2\pi r_g} \quad (5.75)$$

olmak üzere ,

$$T_c = \frac{1+C_2 T_s}{C_2} \left(\frac{r_c}{r_g} \right)^{us} - \frac{1}{C_2} \quad (5.76)$$

şeklinde bulunur. "us" terimi ise ;

$$us = \frac{q' C_2}{2\pi C_1} \quad (5.77)$$

olacaktır. Yakıt zarfindan akışkana sıcaklık düşümü her iki faz için korelasyonlar yardımı ile belirlenen ısı taşınım katsayıları kullanılarak hesaplanacaktır.

$$q' = 2\pi r_c h (T_s - T_a) \quad (5.78)$$

Burada T_a akışkan sıcaklığı her bir kontrol bölgesinde kalan noktadaki sıcaklık olan ortalama sıcaklığı göstermektedir.

5.6. Çözüm Yöntemi

Sonlu farklar yaklaşımı çerçevesinde; akışkan kanalı ızgara hacimlerine ayrılmak suretiyle, kütle ve enerji korunum denklemleri ile akışkana ait termo-hidrolik özellikleri belirleyen korelasyonlardan faydalanılarak her bir ızgara hacminde basınç , sıcaklık ve entalpi değerleri hacim elemanının giriş ve çıkışına ait büyüklüklerin aritmetik ortalamaları alınarak hesaplanmıştır.

Akış kanalı eşit ızgara hacimlerine ayrılıp , kaynama noktası esas alınmak suretiyle , gerek tek fazlı ve gerekse iki fazlı akış bölgesi ayrı ayrı incelenmiştir. İki fazlı akışın başladığı kaynama sınırı belirlenmek suretiyle bu noktayı içine alan ızgara hacminde her iki bölgede meydana gelen akış incelenerek bulunan sıcaklıkların ortalaması alınmıştır. Akışkanın termo-hidrolik özelliklerinin, her bir ızgara hacminde değişmediği göz önüne alınmıştır. Akışkanın doyma entalpisi basınca bağlı olarak verilen korelasyonlar yardımı ile hesaplanmaktadır. Akışkanın her bir ızgara hacmindeki entalpisi, doyma entalpisinin altında ise , akış tek fazlı olarak devam etmekte olup , akışkanın entalpisi doyma entalpisinin üzerinde ise, iki fazlı akış bölgesi göz önüne alınmıştır. Akışkanın ortalama sıcaklıkları her bir ızgara hacminde hesaplandıktan sonra, yakıt çubuğundaki bölgelerde de sıcaklıklar hesaplanmaktadır.

Yapılan çalışmada kullanılan değerler, literatürde BWR/6 reaktörü için verilmiş değerlerdir. Bu değerler akışkanın kanal girişindeki termo-hidrolik özellikleri ve yakıt elemanlarına ilişkin boyutlardır[1].

$$P = 7.10^6 \quad (\text{N/m}^2)$$

$$h = 1227 \quad (\text{J/g})$$

$$T_a = 269 \quad (^\circ\text{C})$$

$$U = 255 \quad (\text{cm/s})$$

$$\rho = 0.7508 \quad (\text{g/cm}^3)$$

$$r_F = 0.528 \quad (\text{cm})$$

$$r_g = 0.536 \quad (\text{cm})$$

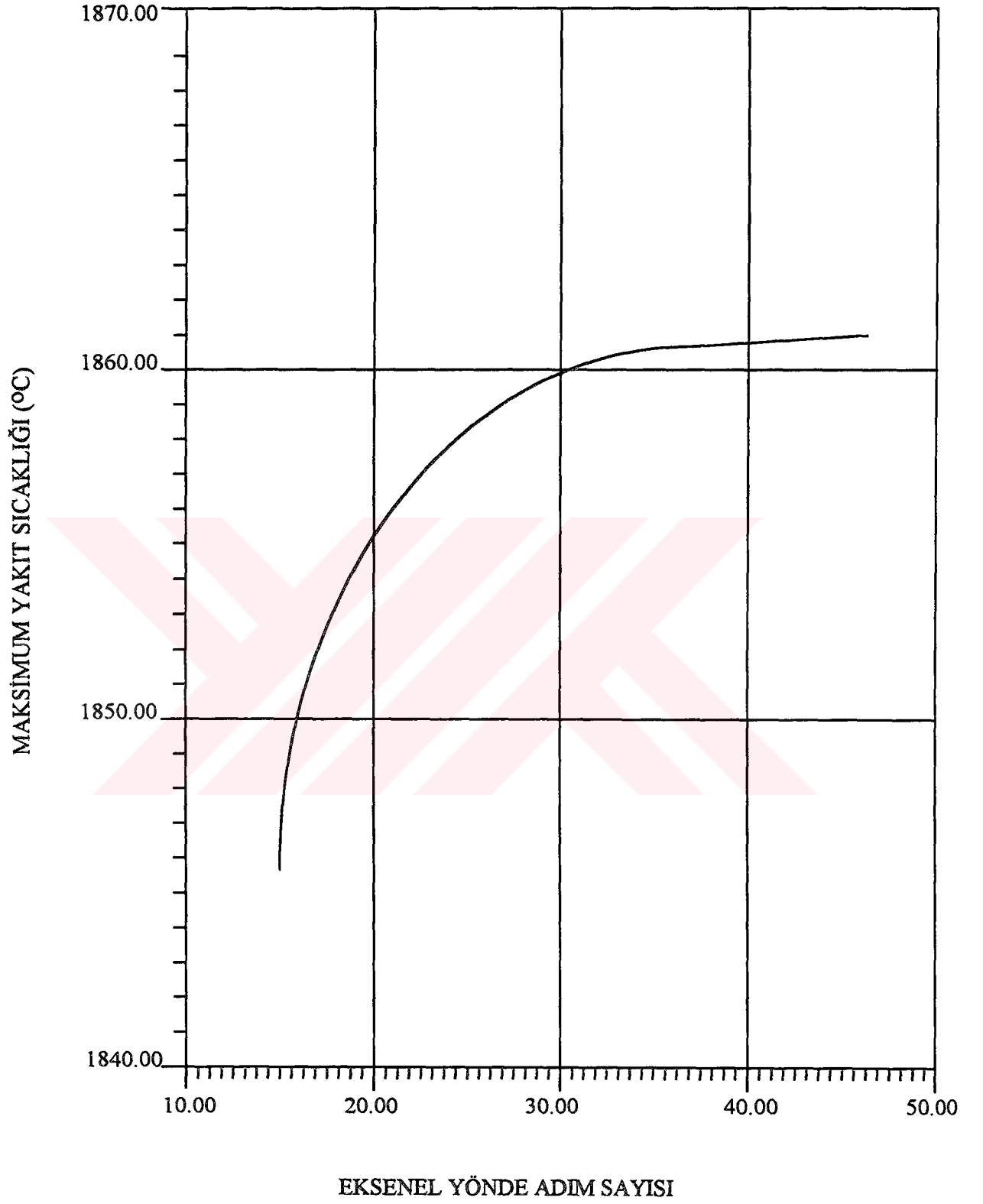
$$r_c = 0.6224 \quad (\text{cm})$$

$$r_p = 1.620 \quad (\text{cm})$$

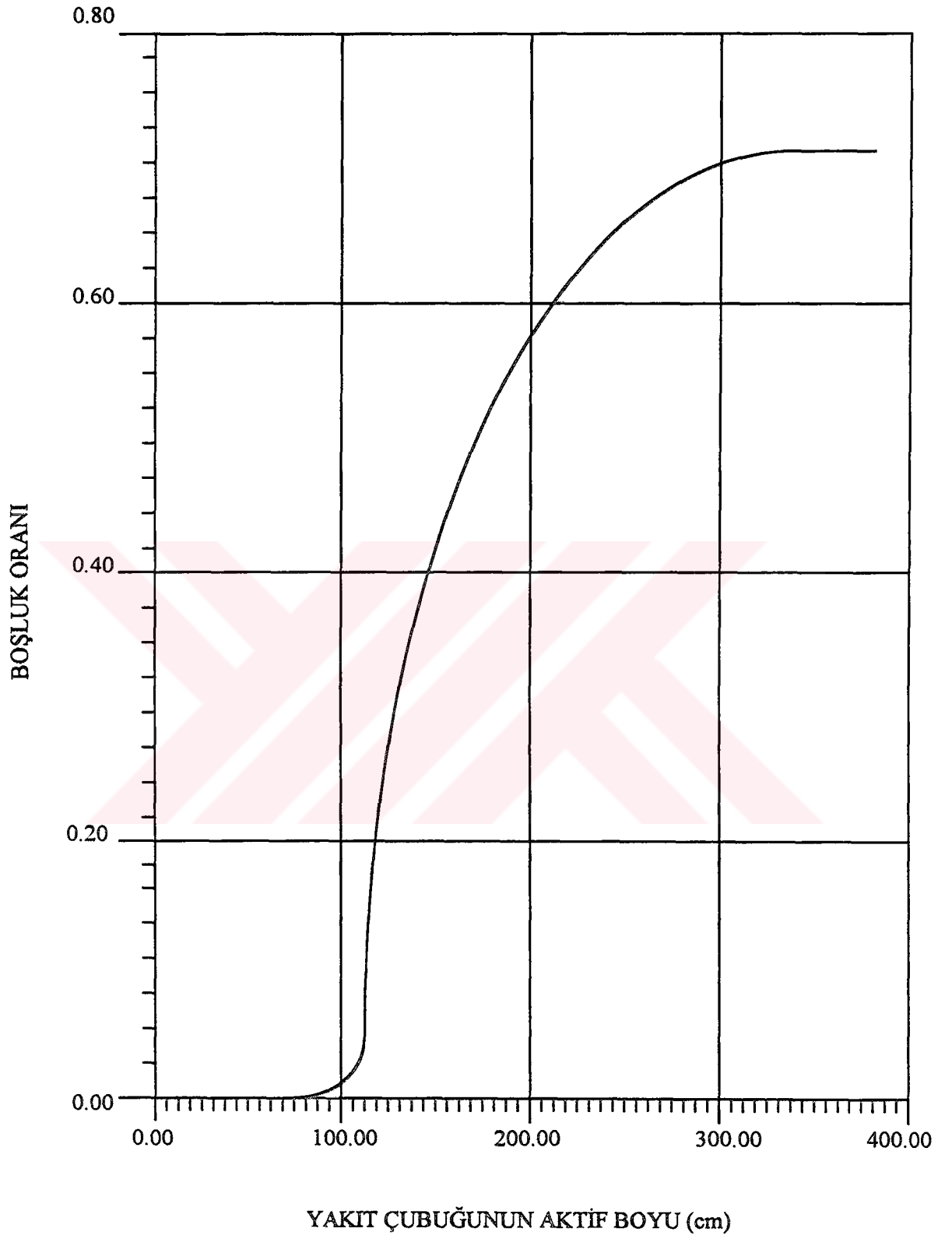
$$h_g = 0.700 \quad (\text{W / cm K})$$

Sonlu farklar yaklaşımı çerçevesinde; akışkan kanalı her biri eşit olmak üzere sırasıyla; 14, 20, 26, 30 ve 36 ızgara hacmine ayrılarak termo-hidrolik modelleme yapılmıştır. 30 ve 36. adımda yapılan incelemede yakıt merkezinde maksimum sıcaklıklarının veya akışkan sıcaklıklarının birbirlerine çok yakın değerler aldığı ve 36. adımdan sonraki adımlarda pek fazla değişmediği gözlenmiştir. Şekil (4.4)'de adım sayısına bağlı olarak maksimum yakıt sıcaklığındaki değişim gösterilmektedir.

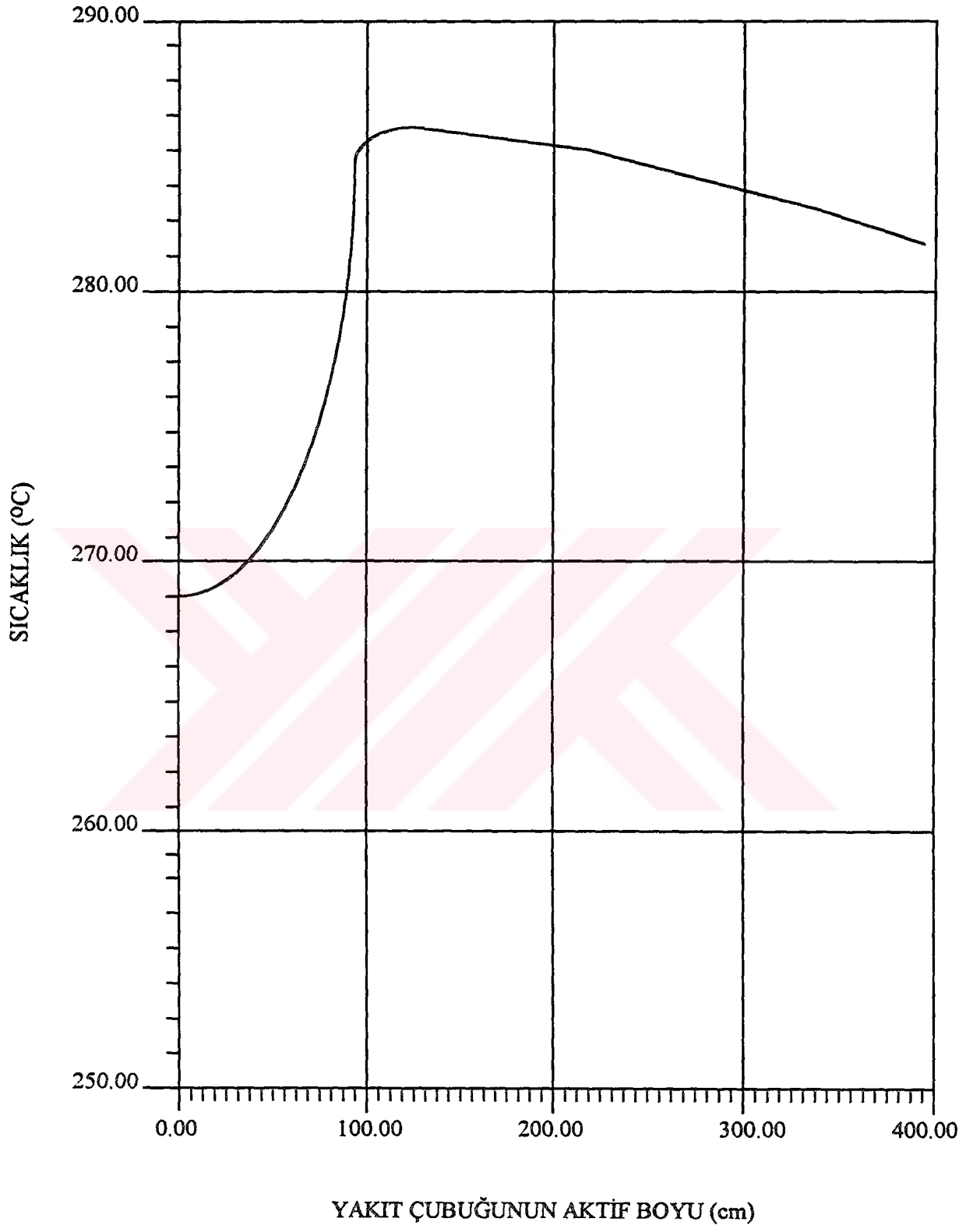
Şekil 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11'de her bir ızgara aralıkları birbirine eşit 36 adımda yapılan modelleme ile ilgili olarak; sırasıyla boşluğun aksenal değişimi, zarf iç yüzey sıcaklıklarının aksenal değişimi, yakıt dış yüzey sıcaklıklarının aksenal değişimi, yakıt merkez sıcaklıklarının aksenal değişimi ve ortalama yakıt sıcaklıklarının aksenal değişimi gösterilmektedir.



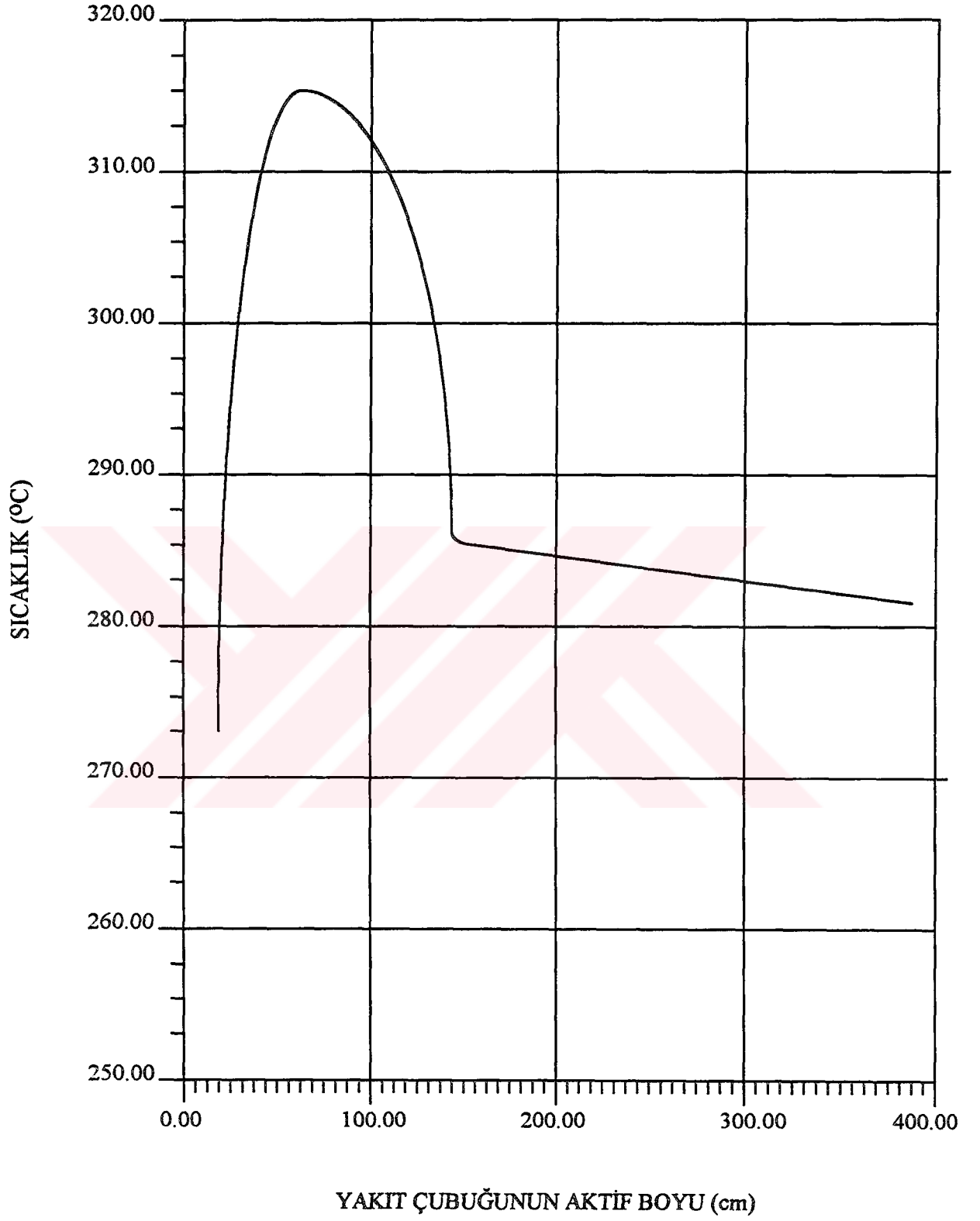
ŞEKİL 5.4 ADIM SAYILARI VE MAKSİMUM YAKIT SICAKLIKLARININ EKSENEL DEĞİŞİMİ



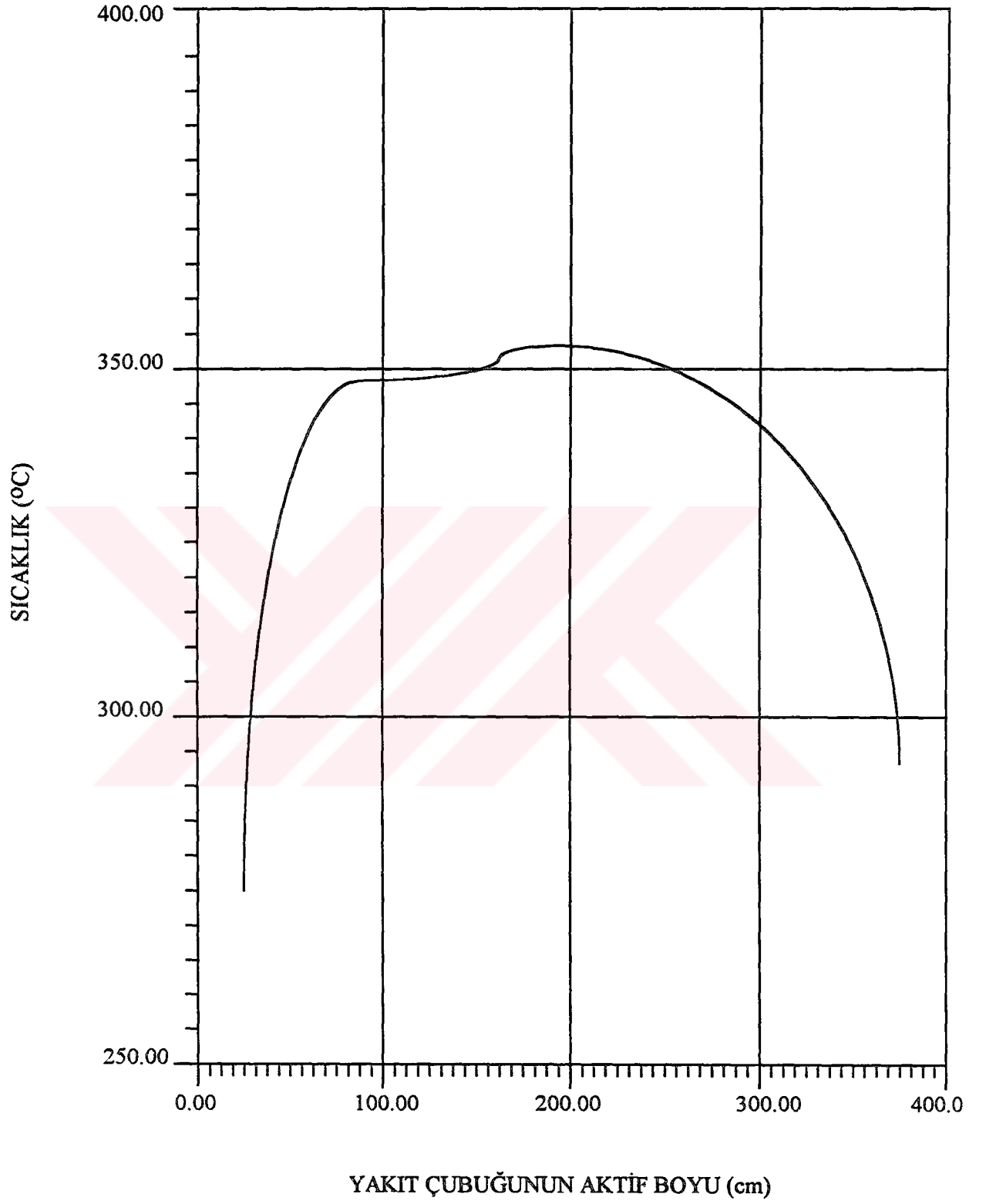
ŞEKİL 5.5 BOŞLUĞUN EKSENEL DEĞİŞİMİ



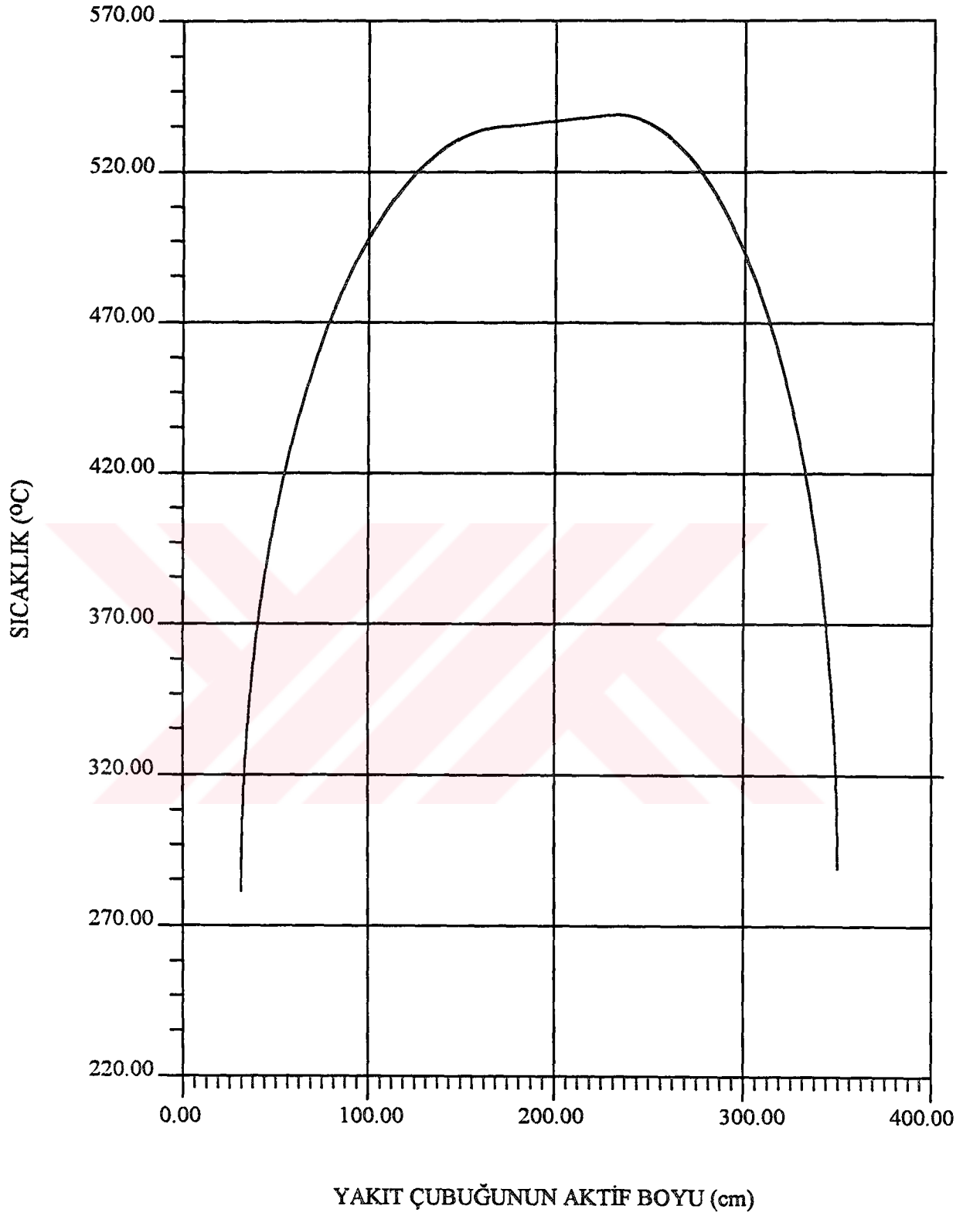
ŞEKİL 5.6 AKIŞKAN SICAKLIKLARININ
EKSENEL DEĞİŞİMİ



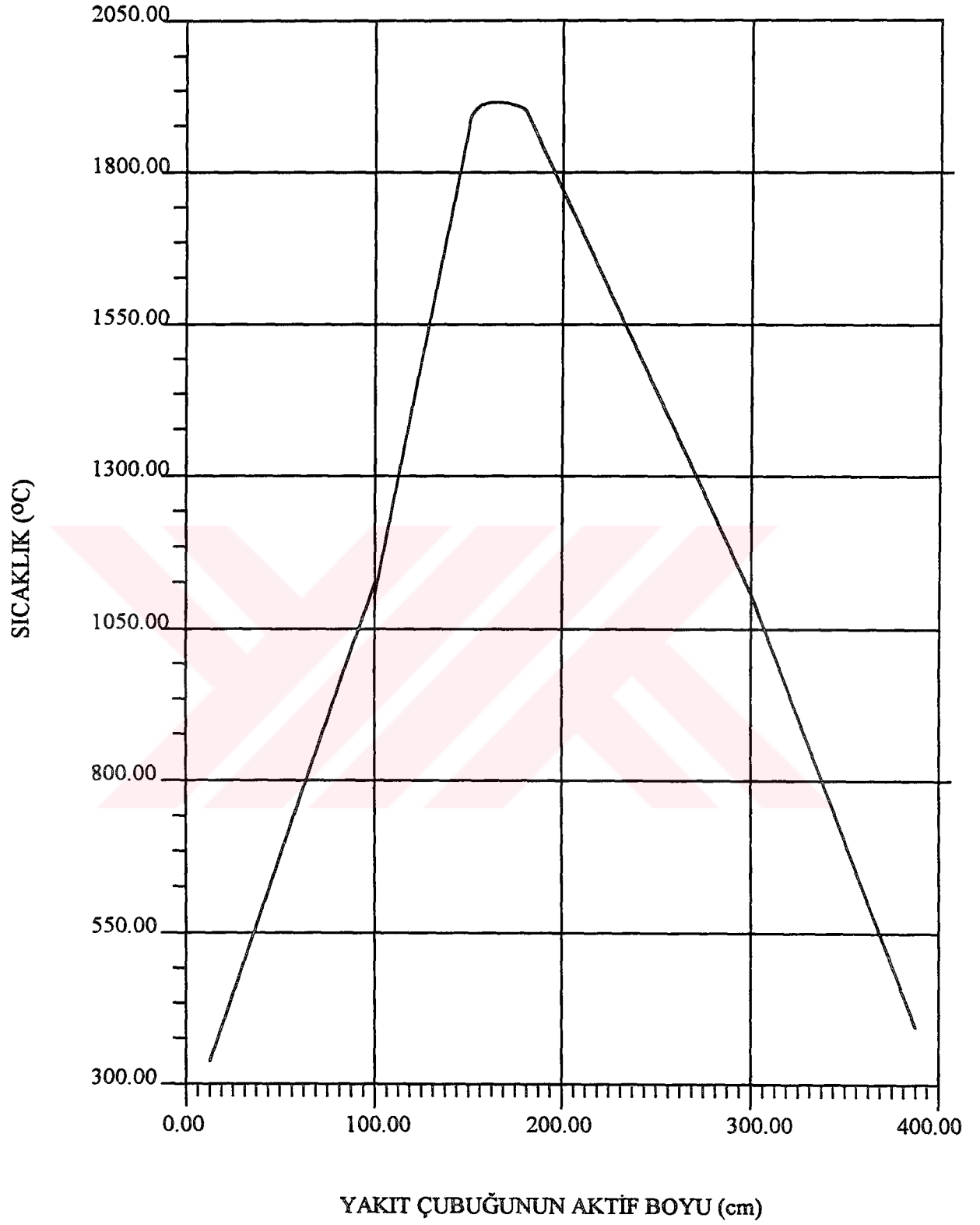
ŞEKİL 5.7 ZARF DIŞ YÜZEY SICAKLIKLARININ EKSENEL DEĞİŞİMİ



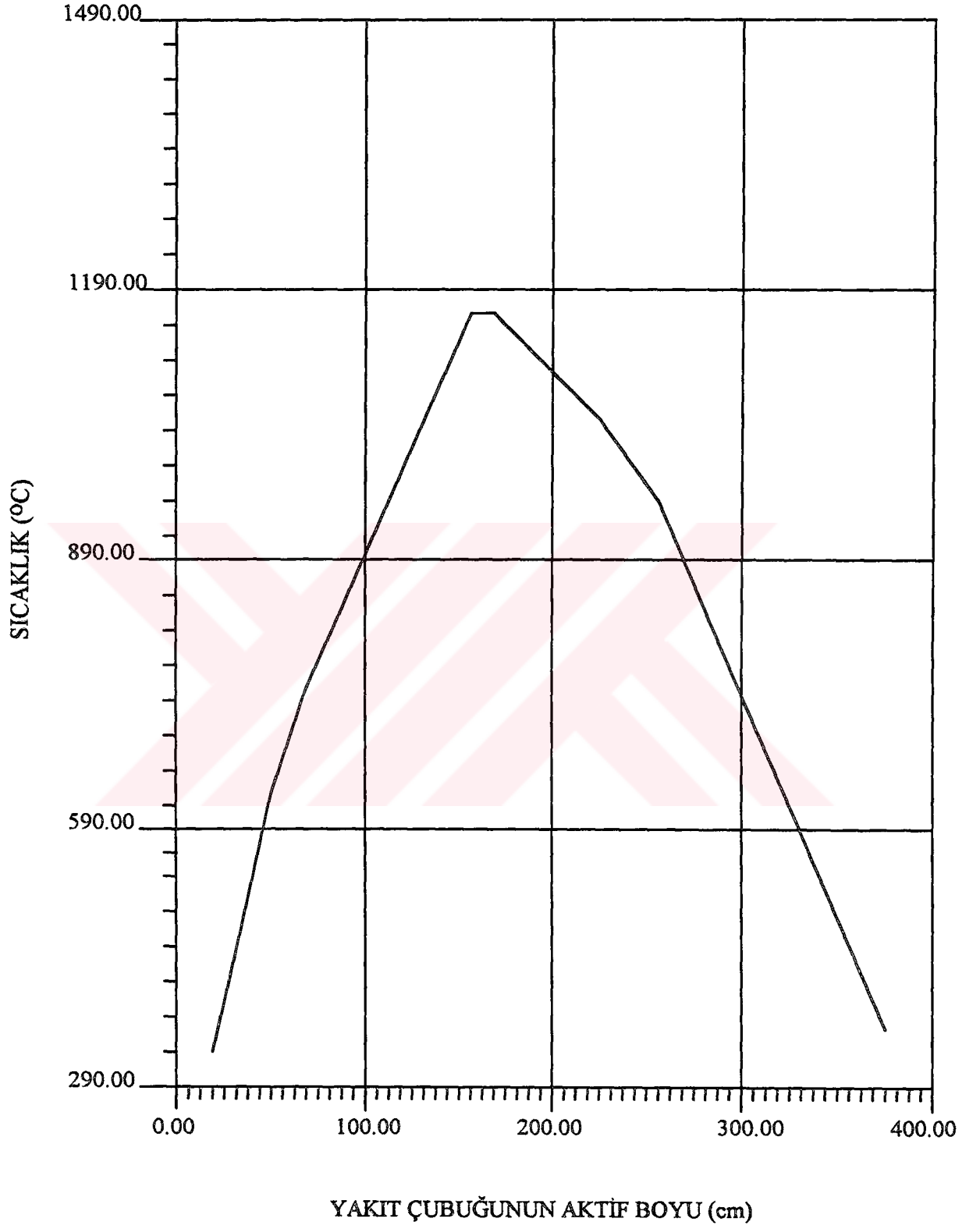
ŞEKİL 5.8. ZARF İÇ YÜZEY SICAKLIKLARININ
EKSENEL DEĞİŞİMİ



ŞEKİL 5.9 YAKIT DIŞ YÜZEY SICAKLIKLARININ
EKSENEL DEĞİŞİMİ



ŞEKİL 5.10 YAKIT MERKEZ SICAKLIKLARININ
EKSENEL DEĞİŞİMİ



ŞEKİL 5.11 ORTALAMA YAKIT SICAKLIKLARININ
EKSENEL DEĞİŞİMİ

BÖLÜM 6

AKIŞ KANALI ve YAKIT ELEMANI İÇİN KULLANILAN PROGRAMIN TANITILMASI

Bu çalışmada değişiklikler yaparak yararlanılan "THCAN" kodu Fortran IV dilinde yazılmış , kaynar sulu bir reaktörün ; sürekli rejimde termo hidrolik analizini yapan bilgisayar programıdır[23].

Eksenel yönde 36 eşit ızgara hacmine ayırarak , yeniden düzenlenen programda , ana programla birlikte altı tanede alt program bulunmaktadır.

Alt Programlar ; TFAITK, TFBK, IFAITK, IFBK, IFKK ve YCS olup sırasıyla;

TFAITK	=	Tek fazlı bölgede akışkanın ısı taşınım katsayısını hesaplar
TFBK	=	Tek fazlı bölgedeki basınç kayıplarını hesaplar
IFAITK	=	İki fazlı bölgede akışkanın ısı taşınım katsayısını hesaplar
IFBK	=	İki fazlı bölgede basınç kayıplarını hesaplar
IFKK	=	İki fazlı bölgede kuruluk derecesi, kayma oranı değerleri korelasyonlar yardımı ile hesaplar.
YCS	=	Hesaplanan ısı taşınım katsayılarından ve ortalama akışkan sıcaklıklarını kullanarak, yakıt çubuğundaki bölgelerdeki sıcaklıkları hesaplar.

Programda kullanılan simgeler:

ZDYS	Zarf dış yüzey sıcaklığı
ZIYS	Zarf iç yüzey sıcaklığı
YDYS	Yakıt dış yüzey sıcaklığı
YMS	Yakıt merkez sıcaklığı
OYS	Ortalama yakıt sıcaklığı
EYAS	Eksenel yönde adım sayısı
IA(K)	Eksenel yönde ızgara aralıkları
SFS(K)	Şekil faktörlerine ilişkin sabitler
QLIN(K)	Lineer güç yoğunluğu
A1	5.58 denklemindeki sabit sayı
A2	5.58 denklemindeki sabit sayı
C1	5.70 denklemindeki sabit sayı
C2	5.70 denklemindeki sabit sayı
AKA	Akışkan kesit alanı
SLP	Kayma oranı

BOSK	Boşluk oranı
AKAL	Kuruluk derecesi
ZBB	Kaynama noktası
YI	Yerçekimi ivmesi
PRAN	Prandtl sayısı
REY	Reynolds sayısı
AKAL	Akışkanın ısı iletim katsayısı
VIZ	Akışkanın dinamik viskozitesi
CAP	Akışkanın özgül ısısı
HFG	Akışkanın buharlaşma gizli ısısı
HSAT	Akışkanın doyma entalpisi
HYBK	Hidrostatik yükselmeden doğan basınç kaybı
YBK	Yerel basınç kayıpları
SDBK	Sürtünmeden doğan basınç kaybı
IDBK	İvmelenmeden doğan basınç kaybı
W	Akışkanın kütleli debisi
YOGIN	Akışkanın kanala giriş yoğunluğu
HIN	Akışkanın kanala giriş entalpisi
PIN	Akışkanın kanala giriş basıncı
TAİN	Akışkanın kanala giriş sıcaklığı
PORT	Akışkanın ortalama basıncı
OAS	Akışkanın ortalama sıcaklığı
YOGG	Akışkanın gaz fazdaki yoğunluğu
YOGL	Akışkanın sıvı fazdaki yoğunluğu
YOG	Akışkan yoğunluğu
GH	Eşdeğer ısı geçiş katsayısı
DH	Eşdeğer hidrolik çap
PIT	İki yakıt çubuğunun eksenleri arasındaki uzaklık
RF	Yakıt yarıçapı
RG	Zarfin iç yüzeyinin yarıçapı
RZ	Zarf dış yüzeyinin yarıçapı

```

C      *****
C      *
C      *          PROGRAM LISTESI
C      *
C      *****
C      IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION IA(36),QLIN(36),SFS(36),OAS(36),OYS(36),ZDYS(36),
&ZIYS(36),YDYS(36),YMS(36),BOSK(36),ZB(36)
      COMMON/T1/EYAS,IA/T2/QLIN/T3/TAVA,TA,TB/T4/H,HB,HORT,HSAT
      COMMON/T5/P,PB,PORT/T6/AKAL,AKALO,AKALB/T7/PIN,HIN,TAIN
&UIN,YOGIN
      COMMON/T8/SFS/T9/RF,RG,RZ,PIT,GH/T10/DR,CW,AKA,DH,FRD,
      OPEN(UNIT=5,FILE='DEHA.DAT')
      OPEN(UNIT=6,FILE='DEHA.OUT')
      READ(5,8) EYAS
8      FORMAT (2X,I4)
      READ(5,77) (QLIN(K), K=1,EYAS)
77     FORMAT (18(2X,F6.2))
      READ(5,7) (IA(K), K=1,EYAS)
7      FORMAT (18(2X,F9.6))
      READ(5,80) (SFS(K), K=1,EYAS)
80     FORMAT (18(2X,F8.6))
      READ(5,9) RF,RG,RZ,PIT,GH
9      FORMAT(5(2X,F6.4))
      READ(5,10) TAIN,HIN,UIN,YOGIN,PIN
10     FORMAT(2X,F5.1,2X,F6.1,2X,F5.1,2X,F6.4,2X,E6.1)
C      ***AKISKAN KANALINA AIT BAZI BUYUKLUKLERIN
C      HESAPLANMASI***
      PI=3.1416
      DR=2*RZ
      CW=PI*DR
      AKA=PIT**2-PI*RZ**2
      DH=4.*AKA/CW
C      ***DEISSLER TAYLOR KORELASYONU'NUN HESAPLANMASI***
      FRD=-3.475+8.053*(PIT/DR)-4.705*(PIT/DR)**2+0.916*(PIT/DR)**3
      WRITE(6,29)
      WRITE(6,30)
      DO 825 K=1,EYAS
      IF (K.GT.1) GO TO 751
      Z=.5*IA(K)
      TB=TAIN
      HB=HIN
      PB=PIN
      U=UIN
      YOG=YOGIN
      TA=TB
      P=PB
      ZBB=0.0
      BOS=0.0
      AKAL=0.0
      AKALO=0.0

```

```

AKALB=0.0
W=YOG*U*AKA
GO TO 753
751 Z=ZG+.5*(IA(K-1)+IA(K))
753 CONTINUE
C ***SAHIP OLDUGU BASINC DEGERINDE DOYMA ENTALPISI***
HS1=1266.66
HS2=5.210E-5
HS3=-1.645E-12
PREF=7.0E06
H=HB+QLIN(K)*IA(K)/W
PF=P-PREF
HSAT=HS1+HS2*PF+HS3*PF*PF
HORT=.5*(H+HB)
IF(HSAT.LT.H) GO TO 755
CALL TFAITK(1.D00,K,FRIC,W,YOG,U,AHS)
CALL TFBK (1.D00,K,FRIC,YOG,U)
CALL YCS (K,AHS,TS,TG,TC,TM,TAVF)
GO TO 790
755 IF(HSAT-HB) 757,756,780
756 ZBB=Z-.5*IA(K)
757 QINT=QLIN(K)*IA(K)
CALL IFKK (K,W,QINT,BOS,SLP,YOG,YOGL,YOGG,U,UL,UG,VIZ)
CALL IFBK (1.D00,K,W,VIZ,BOS,U,UL,YOG,YOGL,YOGG)
CALL IFAITK (K,AHB)
CALL YCS (K,AHB,TS,TG,TC,TM,TAVF)
GO TO 790
780 OHA=(HSAT-HB)/(H-HB)
OHU=(H-HSAT)/(H-HB)
ZBB=Z-0.5*IA(K)+IA(K)*OHA
QINT=QLIN(K)*IA(K)*OHU
CALL TFAITK(OHA,K,FRIC,W,YOG,U,AHS)
TB=TA
TAA=TAVA
CALL TFBK (OHA,K,FRIC,YOG,U)
PB=P
CALL YCS (K,AHS,TS,TG,TC,TM,TAVF)
TFA=TAVF
TS1=TS
TC1=TC
TG1=TG
TM1=TM
CALL IFKK (K,W,QINT,BOS,SLP,YOG,YOGL,YOGG,U,UL,UG,VIZ)
CALL IFBK (OHU,K,W,VIZ,BOS,U,UL,YOG,YOGL,YOGG)
CALL IFAITK (K,AHB)
TAB=TAVA
CALL YCS (K,AHB,TS,TG,TC,TM,TAVF)
TFB=TAVF
TS2=TS
TC2=TC
TG2=TG
TM2=TM

```

T.C. YÜKSEK HESAP
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

```

TAVA=.5*(TAA+TAB)
TAVF=.5*(TFA+TFB)
TS=.5*(TS1+TS2)
TC=.5*(TC1+TC2)
TG=.5*(TG1+TG2)
TM=.5*(TM1+TM2)
790 CONTINUE
BOSK(K)=BOS
OAS(K)=TAVA
OYS(K)=TAVF
ZDYS(K)=TS
ZIYS(K)=TC
YDYS(K)=TG
YMS(K)=TM
ZB(K)=ZBB
AKALB=AKAL
TB=TA
HB=H
PB=P
ZG=Z
825 CONTINUE
DO 4 K=1,EYAS
WRITE(6,12)OAS(K),ZDYS(K),ZIYS(K),YDYS(K),YMS(K),OYS(K),
&BOSK(K),ZB(K)
12 FORMAT(8(2X,F7.2))
4 CONTINUE
29 FORMAT(/,5X,'TAV',5X,'TSUR',5X,'TZIC',5X,'TYDIS',5X,'TO',6X,'TFV',
&7X,'BOSK',6X,'ZB')
30 FORMAT(5X,'***',5X,'*****',5X,'*****',5X,'*****',5X,'**',6X,'***',
&7X,'*****',6X,'**',/)
STOP
END
C *****
SUBROUTINE TFAITK (ORA,K,FRIC,W,YOG,U,AHS)
C *****
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION IA(36), QLIN(36)
COMMON/T1/EYAS,IA/T2/QLIN/T3/TAVA,TA,TB/T7/PIN,HIN,TAIN,UIIN,
&YOGIN
COMMON/T10/DR,CW,AKA,DH,FRD
C ***TEK FAZLI ASIRI SOGUK SIVI BOLGESINDE ISI TRANSFER
C KATSAYISI***
TREF=285.88
TF1=TA-TREF
CAP=5.34811+.012845*TF1
TA=TB+QLIN(K)*IA(K)/(W*CAP)*ORA
TAVA=.5*(TA+TB)
TF=TAVA-TREF
YOG=0.734525-2.2274E-03*TF-8.63E-06*TF*TF
U=W/(YOG*AKA)
VIZ=9.53125E-4-3.79019E-06*TF+1.46812E-08*TF*TF

```

```

AKL=5.7912E-03-1.11316E-05*TF-9.6688E-10*TF*TF
CAP=5.34811+.012845*TF
REY=YOG*U*DH/VIZ
C ***BLASIU FORMULU***
FRICC=.0791*REY**(-.25)
C ***DAIRESEL OLMAYAN AKIS KANALLARI ICIN SURTUNME
C FAKTORU***
FRIC= FRD*FRICC
PRAN=VIZ*CAP/AKL
ANUC=0.023*PRAN**0.4*REY**0.8
ANU=FRD*ANUC
AHS=AKL*ANU/DH
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE TFBK(ORA,K,FRIC,YOG,U)
C *****
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION IA(36), SFS(36)
COMMON/T1/EYAS,IA/T5/P,PB,PORT/T7/PIN,HIN,TAIN,UIN,
&YOGIN/T8/SFS
COMMON/T10/DR,CW,AKA,DH,FRD
C ***TEK FAZLI BOLGEDE BASINC DUSUMLERINI HESAPLIYOR***
YI=981.
CVR=0.1
SDBK=2*IA(K)*YOG*FRIC*U*U/DH*CVR*ORA
HYBK=YOG*YI*IA(K)*CVR*ORA
YBK=.5*SFS(K)*YOG*U**2*CVR
P=PB-SDBK-HYBK-YBK
PORT=.5*(P+PB)
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE IFKK(K,W,QINT,BOS,SLP,YOG,YOGL,YOGG,U,UL,UG,VIZ)
C *****
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON/T4/H,HB,HORT,HSAT/T5/P,PB,PORT/T6/AKAL,AKALO,AKALB
COMMON/T10/DR,CW,AKA,DH,FRD
C ***KALITE,BOSLUK VE KAYMA ORANLARINI MARTINELL-NELSON
C BOSLUK KORELASYONU VE S-a-X BAGINTILARINI KULLANARAK
C HESAPLIYOR.***
PREF=7.0E06
BET=9.8
PF=P-PREF
HFG=1504.1-6.509E-05*PF+6.813E-13*PF*PF
YOGL=.740177-1.814E-08*PF+2.08E-16*PF*PF
YOGG=3.6544E-2+5.871E-09*PF+1.58E-16*PF*PF
VIZ=9.485E-04-3.43435E-11*PF
IF(HSAT.GT.HB) GO TO 760
AKAL=AKALB+QINT/(W*HFG)
GO TO 762
760 AKAL=QINT/(W*HFG)

```

```

762 AKALO=0.5*(AKALB+AKAL)
   BOS=BET*AKALO/(1.+AKALO*(BET-1.))
   SLP=YUGL*AKALO*(1.-BOS)/(YOGG*(1.-AKALO)*BOS)
   YOG=(1.-BOS)*YUGL+BOS*YOGG
   U=W/(YOG*AKA)
   UG=AKALO*W/(YOGG*BOS*AKA)
   UL=UG/SLP
   RETURN
   END
C *****
C SUBROUTINE IFBK(ORA,K,W,VIZ,BOS,U,UL,YOG,YUGL,YOGG)
C *****
   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
   DIMENSION IA(36), SFS(36)
   COMMON/T1/EYAS,IA/T5/P,PB,PORT/T6/ AKAL,AKALO,AKALB
   COMMON/T8/SFS/T10/DR,CW,ACO,DH,FRD
C   ***IKI FAZLI BOLGEDEKI BASINC DUSUMLERINI BECKER
C   KORELASYONU KULLANIR.***
   YI=981.
   AF=1.48622E08
   CVR=.1
   RLF=1+AF*(AKAL/P)**0.96
   REY=YOG*UL*DH/VIZ
   FRICC=0.0791*REY**(-.25)
   FRIC=FRD*FRICC
   ETA=((1.-AKAL)**2/(1.-BOS)+YUGL*AKAL**2/(BOS*YOGG))
   SDBK=2*IA(K)*YOG*U*U*FRIC*RLF/DH*CVR*ORA
   HYBK=YOG*YI*IA(K)*CVR*ORA
   IDBK=W*W*(ETA-1)/(AKA*AKA*YUGL)*CVR
   YBK=.5*SFS(K)*ETA*W*W*CVR/(YUGL*AKA**2)
   P=PB-SDBK-HYBK-IDBK-YBK
   PORT=.5*(P+PB)
   RETURN
   END
C *****
C SUBROUTINE IFAITK (K,AHB)
C *****
   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
   DIMENSION QLIN(36), IA(36)
   COMMON/T1/EYAS,IA/T2/QLIN/T3/TAVA,TA,TB/T5/P,PB,PORT
   COMMON/T10/DR,CW,AKA,DH,FRD
C   ***IKI FAZLI AKIS BOLGESINDE ISI TRANSFERI KATSAYISI***
   PREF=7.0E06
   PF=P-PREF
   TA=285.713+9.80997E-06*PF-4.53283E-13*PF*PF
   TAVA=.5*(TA+TB)
   USP=.161E-06*PORT
C   ***JENS-LOTES KORELASYONU***
   AHB=1.266*EXP(USP)*(QLIN(K)/CW)**(.75)
   RETURN
   END

```

```

C      *****
C      SUBROUTINE YCS (K,AH,TS,TG,TC,TM,TAVF)
C      *****
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION QLIN(36),IA(36)
      COMMON/T1/EYAS,IA/T2/QLIN/T3/TAVA,TA,TB/T9/RF,RG,RZ,PIT,GH
C      ***RADYAL YONDE YAKIT SICAKLIKLARINI HESAPLIYOR.***
      A1=9.975E-2
      A2=2.50E-3
      C1=.1271
      C2=-6.292E-4
      TS=TAVA+.15916*QLIN(K)/(RZ*AH)
      UU=.15916*QLIN(K)*C2/C1
      RR=RZ/RG
      TC=((1.+C2*TS)*RR**UU-1)/C2
      TG=TC+.15916*QLIN(K)/(GH*RF)
      AA=0.07958*QLIN(K)*A2/(RF*RF*A1)
      US=AA*RF*RF
      TAVF=((A2*TG+1)*(EXP(US)-1)/(AA*RF*RF)-1)/A2
      TM=((A2*TG+1)*EXP(US)-1)/A2
      RETURN
      END

```

SONUÇ VE ÖNERİLER

İki fazlı akış kanalının termo-hidrolik analizi ile ilgili olarak yapılan çalışmada; öncelikli olarak, genel kavram ve tanımlarla ilişkili; termodinamik denge ve kararlılık, faz dengesi ve faz dönüşümleri ve kabarcık dinamiği konuları incelenmek suretiyle; tek fazlı akış sistemlerine ait korunum denklemleri türetilmiş ve bu denklemlerdende istifade edilerek, iki fazlı akışlarda kullanılan büyüklükler ve korunum denklemleri çıkarılmıştır. Bunlara paralel olarak da akış kanalı içerisinde, gerek tek fazlı akış ve gerekse iki fazlı akış bölgeleri incelenerek; ortalama akışkan sıcaklıkları ile yakıt elemanında aynı noktadaki sıcaklıklar hesaplanmıştır.

Bölüm 5'de Fortran 77 dilinde yazılmış olan programın çıkış değerleri Tablo (7.1)'de verilmektedir. Tablo (7.1)'de sırasıyla; her bir ızgara hacmin de; ortalama akışkan sıcaklıkları, zarf dış yüzey sıcaklıkları, zarf iç yüzey sıcaklıkları, yakıt dış yüzey sıcaklıkları ve boşluk oranının aksnel değışimi verilmektedir.

Sonuçlar irdelendiğinde; maksimum yakıt sıcaklığı 1860.67°C , akışkanın kanala giriş sıcaklığı 269°C , akışkanın kanaldan çıkış sıcaklığı ise 281.13°C olarak bulunmuştur. Elde edilen sonuçlar mevcut uygulamalardaki ve referans 22'deki sonuçlarla uyumludur. Şekil 4.5'den de görüleceği üzere; boşluğun aksnel değışimi, tek fazlı bölgede sıfır iken, kütleel kaynamalı bölgeye gelindiğinde boşluk kesri oluşmaktadır. Kanal çıkışına doğru giderek artmakta olan boşluk kesri kanalı 0.73 değeriinde terk etmektedir.

Bu konu ile ilgili; daha sonra yapılacak çalışmalarda; ihmal edilen aşırı soğuk sıvı kaynamalı bölgede göz önünde bulundurularak, kanal boyunca basınç değışimlerinin momentum korunum denklemlerinden de faydalanılmak suretiyle elde edilmesi ve çözüm yoluna gidilmesi; diğeri bir yol olarak önerilebilir.

TABLO 7.1. KURULAN MODELE GÖRE HESAPLANAN DEĞERLER

BOSK	OAS	ZDYS	ZIYS	YDYS	YMS	OYS
0.00	269.07	271.39	274.37	282.63	309.27	295.87
0.00	269.36	276.30	285.15	309.88	396.03	352.13
0.00	269.94	281.43	296.01	337.02	491.19	411.67
0.00	270.80	286.74	306.87	363.85	594.52	474.12
0.00	271.93	292.18	317.64	390.15	705.50	539.02
0.00	273.32	297.70	328.24	415.73	823.39	605.78
0.00	274.96	303.26	338.57	440.38	946.64	673.69
0.00	276.84	308.82	339.07	463.92	1073.99	741.92
0.00	278.93	314.31	339.79	486.17	1203.26	809.49
0.02	282.11	301.75	340.74	489.71	1299.18	851.10
0.07	285.35	286.15	341.03	490.05	1383.40	884.69
0.14	285.31	286.12	341.83	501.64	1490.03	935.42
0.21	285.26	286.07	344.61	512.68	1587.81	981.20
0.27	285.20	286.02	346.94	521.99	1647.17	1021.08
0.33	285.13	285.96	348.80	529.51	1746.56	1054.12
0.38	285.05	285.88	350.18	535.16	1802.81	1079.57
0.42	284.95	285.80	351.08	538.98	1841.88	1097.11
0.46	284.85	285.69	351.46	540.75	1860.67	1105.49
0.50	284.73	285.58	351.34	540.64	1860.40	1105.31
0.53	284.60	285.45	350.74	538.59	1840.50	1096.32
0.56	284.45	285.30	349.62	534.61	1801.50	1078.69
0.58	284.30	285.14	348.02	528.73	1744.75	1052.90
0.61	284.12	284.96	345.93	520.98	1671.89	1019.51
0.63	283.93	284.77	343.36	511.43	1585.09	979.31
0.64	283.73	284.56	340.34	500.14	1486.90	933.21
0.66	283.51	284.33	336.88	487.21	1379.90	882.17
0.67	283.28	284.09	333.00	472.70	1266.70	827.19
0.68	283.04	283.83	328.73	456.74	1150.01	769.32
0.70	282.78	283.55	324.10	439.44	1032.22	709.57
0.70	282.51	283.26	319.12	420.92	915.47	648.84
0.71	282.23	282.96	313.84	401.33	801.70	588.03
0.72	281.94	282.64	308.29	380.80	692.42	527.91
0.72	281.64	282.30	302.51	359.48	588.84	469.12
0.73	281.34	281.95	296.53	337.54	491.81	412.23
0.73	281.27	281.57	290.38	315.11	401.90	357.68
0.73	281.13	281.42	284.08	292.34	319.36	305.76

KAYNAKLAR

- [1] DUDERSTADT, J.J., Hamilton, L.J., Nuclear Reactor Analysis, New York, John Wiley and Sons. Inc., 1976.
- [2] LOCKHART, R.W., Martinelli, R.C., Proposed Correlation of Data for Two Phase Flow in Pipes, Chemical Engineering, 1949.
- [3] GLASSTONE, S., Sesonske, A., Nuclear Reactor Engineering, D. Van Nostrand Co., 1967.
- [4] BÜKE, T., Kaynar Sulu Reaktör Kalbinin Sürekli Rejimde Isıl Hidrolik Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Ocak., 1990.
- [5] BANKOFF, S.G., Bubble Dynamics in Boiling, Chemical Engineering Department, Northwestern University, 1965.
- [6] ARPACI, V.S., Conduction Heat Transfer, Addison Wesley Pub. Co., 1966
- [7] KIRILLIN, V.A., Sychev, V.V., Sheindlin, A.E., Engineering Thermodynamics, Mir Publishers, Moscow, 1976.
- [8] EL WAKIL, M.M., Nuclear Heat Transport, Toronto, London International Textbook Co., 1971.
- [9] ZEMANSKY, M.W., Heat and Thermodynamics, McGraw Hill, 1968.
- [10] YAVUZ, H., İki Fazlı Akışlar Ders Notları
- [11] BIRKHOFF, G., Margulies, R.S., Horning, W.A., Spherical Bubble Growth, The Physics of Fluids, Vol.1, No.3, 1958.

- [12] DERGARABEDIAN, P., Observations on Bubble Growth in Various Superheated Liquids, U.S. Naval Ordnance Test Station, Under Water Ordnance Department, 1960.
- [13] CLARK, H.B., Streng, P.S., Westwater, J.W., Active Sites for Nucleate Boiling, Chemical Engineering Progress Symposium, Vol.55, pp. 29-35.
- [14] ANDERSON, D.L.J., Judd, R.L., Merte, H.J., Site Activation Phenomena in Saturated Nucleate Boiling, Heat Transfer and Lubrication Conference, Michigan, 1970.
- [15] HSU, Y.Y., On the Size Range of Active Nucleation Cavities on a Heating Surface, Journal of Heat Transfer, Vol.125, 1962.
- [16] SCRIVEN, L.E., On the Dynamics of Phase Growth, Chemical Engineering Science, Vol.110, 1959.
- [17] MIKIC, B.B., Rohsenow, W.M., Griffith, P., On Bubble Growth Rates, Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 13, pp. 212-238, 1970.
- [18] FORSTER, H.K., Zuber, N., Growth of a Vapor Bubble in a Superheated Liquid, Journal of Applied Physics, Vol.25, 1959.
- [19] PLESSET, M.S., Bubble Dynamics, Division of Engineering and Applied Science, California Institute of Technology, Report No. 85-83, 1963.
- [20] BIRD, R.B., Steward, E.W., Lightfoot, E.N., Transport Phenomena, Department of Chemical Engineering, University of Wisconsin, 1960.

- [21] LONGWELL, P.A., Mechanism of Fluid Flow, California Institute of Technology, McGraw Hill, 1973.
- [22] TONG, L.S., Boiling Heat Transfer and Two Phase Flow, New York, John Wiley and Sons. Inc., 1965.
- [23] LAHEY, R.T., Moody, F.J., The Thermal Hydraulics of a Boiling Water Reactor, American Nuclear Society USA, 1977.
- [24] WALLIS, G.B., One-Dimensional Two Phase Flow, McGraw Hill, 1969.
- [25] YAVUZ, H., Nükleer Reaktörlerde Isı Transferi Ders Notları.
- [26] LAMARSH, J.R., Introduction to Nuclear Engineering, Adison Wesley Publishing Co., 1976
- [27] CAN, B., Kaynar Sulu Reaktörlerde Termo Hidrolik Geri Beslemeli Xenon Salınımlarının Çok Gruplu Difüzyon Simülasyonu, Doktora Tezi, İ.T.Ü, N.E.E, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

1969 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1987'de T.E.D. Ankara Koleji'nden mezun olduktan sonra, yine aynı yıl içinde Denizcilik Yüksek Okulu Makina bölümüne girdi ve 1991 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Denizcilik Yüksek Okulu'ndan mezun oldu. Mezuniyet sonrasında kısa bir süre gemide çalıştıktan sonra, Ankara'da Savunma Sanayii Müsteşarlığı'nda Gemi Tedarik Projelerinde görev aldı. 1992 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Nükleer Enerji Enstitüsü'nde yüksek lisans programına sınavsız kabul edildi. 1993 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Denizcilik Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen Araştırma Görevlisi olarak bu görevine devam etmektedir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
Denizcilik Fakültesi
Araştırma Görevlisi