

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DÜZENSİZ ÖRNEKLEMELİ SİSTEMLERİN KONTROLÜ

DOKTORA TEZİ

Ufuk SEVİM

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

NİSAN 2024

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DÜZENSİZ ÖRNEKLEMELİ SİSTEMLERİN KONTROLÜ

DOKTORA TEZİ

**Ufuk SEVİM
(504122105)**

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Afife Leyla GÖREN

NİSAN 2024

ISTANBUL TECHNICAL UNIVERSITY ★ GRADUATE SCHOOL

CONTROL OF NONUNIFORMLY SAMPLED SYSTEMS



Ph.D. THESIS

**Ufuk SEVİM
(504122105)**

Department of Control and Automation Engineering

Control and Automation Engineering Programme

Thesis Advisor: Prof. Dr. Afife Leyla GÖREN

APRIL 2024

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 504122105 numaralı Doktora Öğrencisi Ufuk SEVİM, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “DÜZENSİZ ÖRNEKLEMELİ SİSTEMLERİN KONTROLÜ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Afife Leyla GÖREN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Ali Fuat ERGENÇ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. İzzet Cem GÖKNAR
Işık Üniversitesi

Doç. Dr. İlker ÜSTOĞLU
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Özkan KARABACAK
Kadir Has Üniversitesi

Teslim Tarihi : 04 Ocak 2024
Savunma Tarihi : 26 Nisan 2024





Feza'ya,



ÖNSÖZ

Günümüzde birçok sistem sensör ölçüm zamanlarının ya da ölçülen bilginin iletilme zamanlarının düzensiz ve beklenmedik bir şekilde gerçekleştiği koşullarda çalışmaktadır. Bu düzensiz örneklemeler, sistem davranışını analiz ve kontrol etmek açısından çeşitli zorluklar ve ilginç problemler ortaya çıkarmaktadır. Bu problemlerin çözümü için bu tez kapsamında geliştirilen yöntemler çok etmenli sistemlerin uzlaşımı problemine de başarıyla uygulanmıştır.

Özellikle birbiri ile iletişim halinde olan cihaz sayısının her geçen gün artması nedeniyle bu tez kapsamındaki çalışmaların daha uzun yıllar güncelliğini koruyacağını düşünüyorum. Bu nedenle, bu tezi hazırlarken aynı zamanda konu ile ilgili Türkçe bir kaynak olabilmesi amacıyla, temel tanım ve bilgileri de birçok kaynaktan derleyerek sundum. Tezdeki hemen hemen tüm teoremlerin kanıtlarını da verdim. Bu kanıtların derli toplu olarak bir yerde bulunmasının konunun özümsemesi için faydalı olacağını düşünüyorum.

Bu tezin ortaya çıkmasında doğrudan ya da dolaylı katkısı ve desteği olan herkese teşekkürü bir borç bilirim. En başta, bu uzun ve zorlu süreçte her zaman yanımda olan, gösterdiği rehberliğin yanı sıra ele aldığımız problemlerin çözümünde derin öngörülerini ile büyük katkıda bulunan danışmanım Prof. Dr. Leyla GÖREN'e gösterdiği sınırsız ilgi ve destek için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Verdikleri değerli geri beslemelerle bu tezin kalitesinin önemli ölçüde artmasını sağlayan tez izleme komitesi jüri üyeleri Prof. Dr. İzzet Cem GÖKNAR ve Doç. Dr. Ali Fuat ERGENÇ'e beni toplamda onlarca saat sabırla dinledikleri için teşekkür ederim. Tezi satır satır detaylıca okuyarak çok değerli önerileri ile tezin yazımındaki birçok eksikliğin giderilmesini sağlayan tez savunma jüri üyesi Doç. Dr. Özkan KARABACAK'a tez üzerine yaptığımız tartışmalar için teşekkürlerimi sunarım. Zor zamanlarımda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve değerli yorumlarıyla tezin ortaya çıkmasına katkı sağlayan Dr. Burak BARDAK'a tezde düzelttiği tüm hatalar ve tutarsızlıklar için teşekkür ederim.

Karamsarlığa düştüğüm tüm zamanlarda desteğiyle her zaman yanımda olan eşim ve en yakın arkadaşım Buse BAYCAN'a kendi zamanından çalarak benim için yarattığı sayısız çalışma saati için derin şükranlarımı sunarım. Ne yaptığımı anlamasalar da bana her zaman destek olan aileme ve yakınlarıma yanlarında bulunamadığım onca zaman beni anlayışla karşıladıkları için teşekkür ederim.

Nisan 2024

Ufuk SEVİM
(Kontrol Mühendisi)



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	ix
İÇİNDEKİLER	xi
KISALTMALAR	xiii
ŞEKİL LİSTESİ	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
1.1 Motivasyon	1
1.2 Kısa Literatür Özeti	3
1.3 Tezde Ele Alınan Problemler	4
1.4 Tezin Özgün Katkıları	5
1.5 Tezin Düzeni	7
2. PROBLEM TANIMI VE TEMEL BİLGİLER	9
2.1 Notasyon ve Terminoloji	9
2.2 Problem Tanımı	11
2.3 Ayrık Zaman Durum Geçiş Matrisi	14
3. KARARLILIK	17
3.1 Kararlılık Tanımları	19
3.1.1 Lyapunov anlamında kararlılık	20
3.1.2 Asimptotik kararlılık	24
3.1.3 Üstel kararlılık	30
3.1.4 Sonuçlar	33
3.2 Kararlılık Koşulları	33
3.2.1 Gerek ve yeter kararlılık koşulları	34
3.2.2 Yeter kararlılık koşulları	39
4. ERİŞİLEBİLİRLİK VE GÖZLENEBİLİRLİK	43
4.1 Erişilebilirlik ve Kontrol Edilebilirlik	45
4.2 Gözlenebilirlik ve İnşa Edilebilirlik	48
4.3 Erişilebilirlik ve Gözlenebilirlik Dualitesi	52
4.4 Kararlı Kılınabilirlik	55
4.5 Örneklemme Altında Erişilebilirlik ve Gözlenebilirliğin Korunması	55
4.6 Düzensiz Örneklemeli Sistemlerde Atanabilirlik	56
5. KARARLI KILAN KONTROLÖRLER	61
5.1 Kontrolör GÜDÜMLÜ Örneklemme Altında Kontrol	65
5.1.1 Kararlı kılan kontrolörün varlığı	66
5.1.2 Dijital yeniden tasarım ile kontrol	72
5.1.3 Özdeğer atama ile kontrol	79
5.1.4 Tekil değer atama ile kontrol	82
5.1.5 Zaman gecikmeli sistemlerin kontrolü	88
5.2 Sabit Kontrolör ile Kontrol	92
6. ÇOK ETMENLİ SİSTEMLERİN UZLAŞIMI	93
6.1 Çizge Kuramı Temelleri	96
6.1.1 Temel tanımlar	96
6.1.2 Çizge matrisleri	98
6.2 Düzensiz Örneklemme Altında Uzlaşım Problemi	100
6.3 Genel Doğrusal Dinamik için Uzlaşım	103
6.4 Tek İntegratör Dinamik için Uzlaşım	109

6.5 Çift İntegratör Dinamik için Uzlaşım	110
6.6 Saat Senkronizasyonu	116
6.7 Sonuçlar	120
7. SONUÇLAR	123
KAYNAKLAR	125
EKLER	135
EK A : Genel Önsav ve Teoremler	137
EK B : Üstel Matris Özellikleri	139
EK C : Tekil Değer Sınırları	143
ÖZGEÇMİŞ	145



KISALTMALAR

BIBO	: Bounded-Input-Bounded-Output
BLDC	: Brush-Less Direct Current
DC	: Direct Current
IFAC	: International Federation of Automatic Control
IoT	: Internet of Things
LDI	: Linear Difference Inclusion
LPV	: Linear Parameter-Varying
PI	: Proportional-Integral
ppm	: parts per million
WSN	: Wireless Sensor Network



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.1 : Örnek 5.1 için kapalı çevrim sistemlerin durum yanıtları	79
Şekil 5.2 : Örnek 5.1 için sürekli ve ayrık kontrol işaretleri	79
Şekil 5.3 : Örnek 5.2 için $\hat{P}(h)$ 'nin 0'dan farklı tekil değerleri.	87
Şekil 5.4 : Örnek 5.2 için rastgele örnekleme altında kapalı çevrim sistemin durum yanıtı.	88
Şekil 5.5 : Örnek 5.4 için kapalı çevrim durum yanıtı	91
Şekil 6.1 : Örnek bir çizge.	97
Şekil 6.2 : Laplasyen matris için Gershgorin çemberleri	100
Şekil 6.3 : Örnek 6.1 için verilen ağ topoloji çizgeleri.	115
Şekil 6.4 : Örnek 6.1'de hesaplanan kontrolör için $\max_{ij} x^{(i)}(t_k) - x^{(j)}(t_k) $	115
Şekil 6.5 : Örnek 6.2'de hesaplanan kontrolör için $\max_{ij} x^{(i)}(t_k) - x^{(j)}(t_k) $	116
Şekil 6.6 : Örnek 6.3 için zaman senkronizasyonu. (a) Etmenlerin yerel saatleri. (b) Etmenler arasındaki zaman farklarının maksimum değeri. (c) Kontrol işareti	120



DÜZENSİZ ÖRNEKLEMELİ SİSTEMLERİN KONTROLÜ

ÖZET

Günümüzde farklı fiziksel konumlarda bulunup sınırlı bant genişliği üzerinden birbirlerine veri aktaran sistemler hızla yaygınlaşmaktadır. Bu sistemler sağladığı avantajların yanı sıra birçok kontrol problemini de beraberinde getirmektedir. Bu sistemlerin mimarisinin doğası gereği geri besleme sinyalinin ölçüm zamanı ya da bilginin iletilme zamanı düzensiz ve beklenmedik bir şekilde gerçekleşmektedir. Son yıllarda bu konuda yapılan yayın sayısının ciddi biçimde artması, konunun öneminin giderek arttığını göstermektedir.

Zamanla değişmeyen sürekli bir sistemin düzensiz örnekleme altında ayırıklaştırılmış modeli, zamanla değişen ayrık bir sistem ile ifade edilebilmektedir. Bu da klasik bilgisayarlı kontrol teorisindeki sonuçların geçerliliğini yitirmesine neden olmaktadır. Örneğin, ayrık bir sistemin kararlılığını göstermekte kullanılan sistem matris özdeğerlerinin birim çember içinde olması koşulu, düzensiz örnekleme bir sistemin kararlılığını garantilememektedir.

Düzensiz örnekleme sistemleri kararlı kılan kontrolörlerin bulunması bu tezin ana problemini oluşturmaktadır. Ayrıca, bulunan kontrolörün zaman gecikmesine sahip sistemlerin kararlı kılınması ve çok etmenli sistemlerin uzlaşımı problemlerine uygulanabilirliği araştırılmıştır.

Düzensiz örnekleme sistemler için ele alınan problemlerin çözümünde zamanla değişen ve parametre ile değişen sistemlere ek olarak, benzer matematiksel problemleri çözmeyi hedefleyen karma sistemler, olay tetiklemeli sistemler ve anahtarlamalı sistemlerin literatüründen de faydalanılmaktadır. Bu sistemlerin kararlı kılınması ve kontrolü için literatürde onlarca yöntem bulunsada en sık başvurulan yöntemlerden birisi ortak karesel Lyapunov fonksiyonu bulma yöntemidir. Bu yöntemde, zamanla değişen sistem matrislerinin tamamı için ortak olan karesel bir Lyapunov fonksiyonu bulunması ile kararlı kılan kontrolör sentezi yapılabilmektedir.

Bu tez kapsamında, ortak karesel Lyapunov fonksiyonu bulma yöntemi farklı bir bakış açısıyla ele alınarak bu yöntemle eşdeğer başka bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yöntemde, zamanla değişen sistem matrislerinin tamamını daralma haline getiren, yani sistem matrislerinin en büyük tekil değerlerini 1'den küçük yapan, ortak bir benzerlik dönüşümü bulunmasıyla kararlılık sağlanmaktadır. Literatürde küçük örnekleme aralığı yaklaşıklığı kullanan bir teorem genişletilerek bu yöntem ile kararlı kılan bir kontrolün her zaman var olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, kararlılığı gösteren ortak benzerlik dönüşüm matrisinin bulunması ile ilgili üç farklı yöntem geliştirilmiştir. Bahsedilen varlık koşulu kullanılarak farklı tekniklerle kararlı kılan kontrolörler sentezlenmiştir.

Kararlı kılan kontrolör sentezi için kullanılan ilk yöntem literatürde iyi bilinen dijital yeniden tasarım yöntemidir. Bu yöntemde düzensiz örnekleme sistemin durum

yanıtı, sürekli sistemin kapalı çevrim durum yanıtına eşitlenmeye çalışılmaktadır. Literatürde var olan bir dijital yeniden tasarım yöntemi düzensiz örneklemeli sistemler için genişletilerek kararlı kılan kontrolör sentezinde kullanılmıştır. Ayrıca, kararlılığın sağlandığı en büyük örnekleme aralığı için bir üst sınır verilmiştir.

Kararlı kılan kontrolör sentezi için bir başka yöntem yine literatürde iyi bilinen özdeğer atama yöntemidir. Bu yöntem ile kapalı çevrim sistem matrisinin özdeğerleri istenen sistem davranışını sağlayacak biçimde yerleştirilmektedir. Düzensiz örneklemeli sistemler için zamanla değişen sistem matrislerinin özdeğer yerleri kararlılık analizi için yeterli olmasa da bu tezde tek bir girişe sahip sistemler için özdeğer atayan kontrolörün kararlılığı garantilediği maksimum örnekleme aralığının var olduğu kanıtlanmıştır.

Literatürde başka bir örneğine rastlanmayan tekil değer atama ile kararlı kılma yöntemi bu tez kapsamında geliştirilmiştir. Bu yöntemde kararlılığın garantilenmesi için zamanla değişen kapalı çevrim sistem matrislerinin tekil değerleri ortak bir benzerlik dönüşümü altında 1'den küçük olacak biçimde atanmaktadır. Ayrıca, kararlılığın sağlandığı en büyük örnekleme aralığı için bir üst sınır verilmektedir.

Geliştirilen bu sentez yöntemlerinin ortak rasyonel bölünebilir olmayan çoklu zaman gecikmeli sistemlere uygulanabilmesi için düzensiz bir örnekleme dizisi seçim yöntemi önerilmiştir. Önerilen bu yöntem ile düzensiz örneklemeli sistemler için geliştirilmiş bir kontrolörün bu türden gecikmeli sistemlerin kararlı kılınması için kullanılabileceği gösterilmiştir.

Bu tez kapsamında geliştirilmiş olan kararlılık koşulu kullanılarak çift integratör dinamiğe sahip çok etmenli sistemlerin düzensiz örnekleme ve değişen topoloji altında uzlaşım probleminin çözümü için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yöntem ile literatürdeki diğer güncel yöntemlerin aksine değişen ağ topoloji çizgelerinin bilinmesi zorunluluğu ortadan kalkmaktadır. Tasarımcının keyfi seçeceği ağ çizgesinin Laplasyen matris özdeğer aralığı ve en büyük örnekleme aralığı parametreleri ile uzlaşımı sağlayan yerel kontrolör, basit bazı eşitsizlikler kullanılarak hesaplanabilmektedir. Ayrıca, ağ çizgeleri bağlı ve yönsüz olduğu sürece bu kontrolörün her zaman var olduğu kanıtlanmıştır.

Çok etmenli sistemlerin uzlaşımı için kullanılan yerel kontrolörün ufak değişikliklerle bir ağdaki cihazların saat senkronizasyonu probleminde de uygulanabileceği kanıtlanmış ve örneklerle desteklenmiştir.

CONTROL OF NONUNIFORMLY SAMPLED SYSTEMS

SUMMARY

Digital control systems have been used in almost all control applications for more than sixty years due to its advantages such as reliability, low cost and flexibility. In parallel, digital control theory has a vast and mature literature. However, in classical theory, the feedback signal required for control must be measured at periodic time intervals.

Nowadays, systems located in different physical locations and exchanging data with each other over band-limited channels are rapidly becoming widespread. Even though these systems provide many advantages, they also bring many challenges for stabilization and control. Due to the nature of this system architecture, the measurement time of the feedback signal or the time of transmission of information occurs irregularly and unexpectedly. The significant increase in the number of publications on this subject in recent years shows that the importance of the subject is increasing rapidly.

One of the main examples for systems with nonuniform sampling is *network control systems*. Network control systems consist of sensors, actuators and controllers located in different physical locations and communicate with each other using a band-limited channel. The purpose of such an architecture is to add flexibility to the system and at the same time reduce installation and maintenance costs. For a network control system, if the sensor information is sent over an unreliable communication channel, data losses will cause sampling to become irregular. Even if the communication channel is reliable, a nonuniform sampling scheme can be chosen to use the limited bandwidth efficiently.

System models with nonuniform sampling is particularly suitable for the control of *internet of things* systems, which have become very widespread in recent years. Since these systems are generally subject to energy, bandwidth and processor limitations, they try to use the resources efficiently by taking samples only when there is a change. Therefore, these systems inherently operate under irregular and unpredictable sampling.

Multi-agent systems can be defined as a distributed system formed by many agents with the same dynamics, communicating only with their neighbors. The basic problem of these systems is the problem of finding a local controller that brings the states of all agents to a common value, called the *consensus* problem. Consensus problem of multi-agent systems finds numerous applications such as mobile robot coordination, wireless sensor network clock synchronization and microgrid frequency synchronization.

Due to the distributed structure of multi-agent systems, it is rarely possible in practice to ensure that the state information of an agent is transmitted to their neighbors periodically. Additionally, in some applications, the communication topology of the agents may change over time. The problem of achieving consensus under these conditions is also a subject of active research.

When a continuous linear time invariant system is controlled under nonuniform sampling, the resulting discretized system model becomes time-varying. Therefore, the methods in classical digital control theory do not guarantee the stability of systems under nonuniform sampling.

A necessary and sufficient condition for the stability of a linear time invariant discrete system is that the eigenvalues of the system matrix lie within the unit circle. However, this condition is not sufficient to prove the stability of systems under nonuniform sampling.

The system model obtained by discretizing the continuous system can be examined from a time-varying or parameter-varying system perspective. However, since these perspectives are very general, the obtained stability conditions cannot provide a constructive method for controller synthesis.

Many different approaches and methods are present in the literature to solve the problem of stabilization and control of systems with nonuniform sampling. Some of the common ones can be listed as input delay approach, small gain approach, finding common quadratic Lyapunov function and finding multiple Lyapunov-like function methods.

In addition, there are other systems that uses similar mathematical framework as nonuniformly sampled systems, but tackles slightly different problems. Some examples can be given as hybrid systems, event-triggered systems, switched systems, impulsive systems and time scales systems. So the literature of these systems becomes useful for solving the problems of nonuniformly sampled systems.

The consensus problem of multi-agent systems can be transformed into a stability problem by using a decomposition. Therefore, the methods developed for the control of nonuniformly sampled systems are also applicable to this problem. Although there have been some studies on systems with general agent dynamics in the literature, double integrator agent dynamics are more commonly discussed.

A method used for solving the stabilization and control problems for all system types mentioned above is the method of finding a common quadratic Lyapunov function. In this method, the stability of the system is ensured by using a quadratic Lyapunov function that is common to all (time-varying) system matrices. Although this method is conservative, it has been successfully applied in many studies to solve stabilization and controller synthesis problems.

In this thesis, the problem of constructing stabilizing controllers for nonuniformly sampled systems is considered by using a novel common similarity transformation method. This method is proven to be equivalent to the common Lyapunov function method. In other words, a method widely used in the literature is approached from a different perspective to tackle stabilizing controller synthesis problem.

The possibility of using the constructed controller for stabilizing systems with multiple commensurate time delays is also investigated. Furthermore, the applicability of the same methods for solving the consensus problem of multi-agent systems with double integrator dynamics under nonuniform sampling and changing topology is studied.

In this thesis, the condition for the existence of a common similarity transformation matrix, which turns the (parameter-varying) closed-loop system matrices into a contraction, that is, makes the largest singular value of the matrices less than 1, has been developed for stability analysis. Moreover, it is shown that this condition is equivalent

to the common quadratic Lyapunov function condition, which is well known in the literature. This developed condition was used in the rest of the thesis to tackle the problem of synthesizing stabilizing controllers.

A novel system which has reachability and observability duality to the linear time-varying discrete systems has been created. Additionally, a new assignability concept has been introduced that allows the pointwise assignment of the closed loop system eigenvalues for systems with nonuniform sampling. A sufficient condition for assignability of a system with a single input has been proven. This concept of assignability is then applied to the problem of constructing a stabilizing controller by eigenvalue assignment.

An existing theorem in the literature regarding the existence of a controller that stabilizes nonuniformly sampled systems using a small sampling interval approximation has been extended in this thesis. The resulting theorem is quite general and has been used to prove that the designed controllers in this thesis are stabilizing. Additionally, the largest sampling interval for achieving stability can also be calculated with the same theorem.

Three different methods have been developed to find the similarity transformation matrix used in the stability analysis of the closed loop system. These developed methods can also be used to find the common quadratic Lyapunov function.

One method used in controller design for linear time invariant discrete systems is the so-called *digital redesign* method. In this method, the closed loop discrete time system state response is attempted to match the closed loop continuous system state response. In this thesis, a known digital design method has been extended for controlling nonuniformly sampled systems. Additionally, upper limits were found for the largest sampling interval that ensures stability.

A frequently used method in controller design in classical theory is the *eigenvalue assignment* or *pole placement* method. In this method, the eigenvalues of the closed loop system matrix are placed to selected locations to obtain the desired system behavior using a state feedback controller. Using the concept of assignability mentioned above, this method has been extended to control nonuniformly sampled systems with a single input and it has been proven that stability is achieved.

In this thesis, the *singular value assignment* method for controller design is developed. With this method, the singular values of the (parameter-varying) closed loop system matrices is assigned under a suitable similarity transformation, so that the matrices become contractions to achieve stability. Also, upper limits are given for the largest sampling interval that ensures stability. To the best of the author's knowledge, this is the first appearance of this method for controlling nonuniformly sampled systems in the literature.

The problem of stabilization and control of systems with multiple commensurate state measurement delays has been considered. It has been proven that this problem can be solved using a nonuniformly sampled system approach. A nonuniform sampling scheme is proposed such that given a control horizon, for every element in the sampling sequence, the corresponding delayed time is also in the sequence. Using this sampling scheme, it is shown that controllers developed for nonuniformly sampled systems can also be applied to solve this problem.

A novel method is proposed to solve the consensus problem of a multi-agent system with double integrator dynamics under nonuniform sampling and variable topology. With this method, controller parameters can be found using simple inequalities. Unlike similar studies in the literature, the proposed method eliminates the need to know the changing network topology graphs. It is sufficient for the designer to know only the Laplacian matrix eigenvalue range of the topology graphs. It is proven that under the arbitrary choice of this range and the arbitrary choice of the maximum sampling interval, the proposed controller always exists and achieves consensus as long as the topology graphs are connected and undirected. Lastly, the developed method is applied to the clock synchronization problem of a network of devices with nonuniform sampling and variable topology with slight modifications.



1. GİRİŞ

Bilgisayarlı kontrol sistemleri; güvenilirlik, düşük maliyet ve esneklik gibi sunduğu avantajlardan dolayı altmış yılı aşkın bir süredir neredeyse tüm kontrol uygulamalarında kullanılmaktadır [1]. Bunun paralelinde bilgisayarlı kontrol sistem teorisi de oldukça geniş ve olgun bir literatüre sahiptir [1,2,3]. Ancak, klasik teoride kontrol için gerekli olan geri besleme sinyalinin periyodik zaman aralıkları ile ölçülmüş olma şartı vardır.

Günümüzde birçok sistem, geri besleme sinyalinin ölçüm zamanlarının ya da ölçülen sinyalin iletilme zamanlarının periyodik olmadığı ve beklenmedik bir şekilde gerçekleştiği koşullarda çalışmaktadır [4]. Ölçüm zamanlarının düzensiz oluşu göz önünde bulundurulduğunda ortaya çıkan sistem modeli zamanla değişen bir hal almaktadır. Bu nedenle, klasik teoriden bilinen kararlılık analizi ve kontrol yöntemlerinin birçoğu geçerliliğini yitirmektedir [5]. Bunun sonucu olarak, düzensiz örneklemeli sistemlerin kararlı kılınması ve kontrolü probleminin çözümü için yeni yöntemler geliştirilmeye aktif olarak devam edilmektedir [6].

Bu tez kapsamında düzensiz örneklemeli sistemlerin kontrolü problemi ele alınmış ve bu problemin çözümü için özgün olan üç farklı yöntem geliştirilerek literatüre katkı sunulmuştur. Ayrıca, çift integratör dinamiğe sahip çok etmenli sistemlerin düzensiz örnekleme ve değişken topoloji altında uzlaşım problemi için mevcut yöntemlere göre daha avantajlı olan yeni bir yöntem geliştirilmiştir.

1.1 Motivasyon

Düzensiz örneklemeli sistemler için verilebilecek başlıca örneklerden biri *ağ kontrol sistemleridir (networked control systems)*. Ağ kontrol sistemleri, farklı fiziksel konumlarda bulunan sensör, eyleyici ve kontrolörlerin bant-sınırlı bir hat ile birbirlerine bağlanmasından oluşur. Böyle bir mimarinin amacı sisteme esneklik kazandırmak ve aynı zamanda kurulum ve bakım masraflarını azaltmaktır [7].

Bir ağ kontrol sistemi için eğer sensör bilgisi sağlıklı bir haberleşme hattından gönderiliyorsa yaşanacak veri kayıpları örneklemenin düzensiz hale gelmesine neden olmaktadır. Haberleşme hattı güvenilir olsa dahi sınırlı olan bant genişliğini verimli kullanmak için düzensiz bir örnekleme şeması seçilebilmektedir [6].

Pratikte kontrol algoritmasını koşturan mikrodenetleyiciler kontrol görevinin yanı sıra başka birçok görevi de yerine getirmektedir. İşlemcinin başka görevleri yerine getirirken kontrol görevini bekletmesinden dolayı oluşan gecikmeler düzensiz örneklemeye neden olmaktadır [8]. Öte yandan düzensiz örnekleme kullanan bir zamanlama (scheduling) yöntemi ile toplam işlemci yükü azaltılabilmektedir [9].

Geri besleme sinyalini ölçmek için kullanılan algılayıcının çalışma prensibi dolayısıyla da düzensiz örnekleme oluşabilmektedir. Buna bir örnek olarak fırçasız doğru akım motorunun (brushless DC motor, BLDC) hız ölçümü verilebilir. Bu ölçüm yapılırken stator sargılarına takılan Hall etkisi (Hall effect) algılayıcıları kullanılmaktadır. Motorun dönüş hızına göre yapılan ölçümün zaman aralığı da değişkenlik göstermektedir [10]. Bir başka örnek olarak kağıt endüstrisinde kaplama kalınlığını ölçen bazı algılayıcıların tarama (scanning) yaparak çalışmasından kaynaklı oluşan düzensiz örnekleme verilebilir [11].

Rasyonel bağımlılığı olmayan (incommensurate), yani ortak bir tam sayı böleni olmayan çoklu gecikmelere sahip sistemlerin kontrolü için düzensiz örnekleme kullanılarak kararlı kılma problemi çözülebilmektedir [12].

Son yıllarda oldukça yaygın hale gelen *nesnelerin interneti (internet of things)* ve *kablosuz sensör ağları (wireless sensor network)* gibi sistemlerin kontrolü için düzensiz örnekleme sistemi modelleri oldukça uygun olmaktadır. Bu sistemler genelde enerji, bant genişliği, işlemci gibi kısıtlamalara maruz kaldığından, sadece bir değişiklik olduğunda örnek alarak kaynakları verimli kullanmaya çalışmaktadır [13]. Dolayısıyla bu sistemler doğası gereği düzensiz ve kestirilemeyen örnekleme altında çalışmaktadır.

Çok etmenli sistemler (multi-agent systems) aynı dinamiğe sahip birçok etmenin sadece komşuları ile haberleşerek oluşturdukları dağıtık bir sistem olarak tanımlanabilir. Bu sistemlerin temel problemi, *uzlaşım (consensus)* problemi olarak adlandırılan, tüm etmenlerin durumlarını ortak bir değere getiren yerel bir kontrolör bulma problemidir. Çok etmenli sistemlerin uzlaşım problemi; mobil robot koordinasyonu, kablosuz sensör

ağı saat senkronizasyonu ve mikrogrid frekans senkronizasyonu gibi sayısız uygulama alanı bulmaktadır [14].

Çok etmenli sistemlerin dağıtık yapısından dolayı etmenlerin komşularına ilettikleri durum bilgisinin örneklenme aralığının periyodik olmasını sağlamak pratikte çok az mümkün olmaktadır [15]. Ayrıca, bazı uygulamalarda etmenlerin haberleşme topolojisi zamanla değişebilmektedir [16]. Bu koşullar altında uzlaşımın sağlanması problemi de aktif bir araştırma konusudur.

Yukarıda bahsedilen uygulamaların ve problemlerin tamamı günümüzde güncelliğini korumakta, hatta özellikle dağıtık sistemlerin yaygınlaşmasıyla birlikte daha da önem kazanmaktadır. Düzensiz örneklemeli sistemlerin kontrolü üzerine yapılan birçok çalışma olmasına rağmen, bu konu henüz olgunlaşmamış ve hala birçok açık problem barındırmaktadır [6].

1.2 Kısa Literatür Özeti

Doğrusal zamanla değişmeyen sürekli bir sistem, düzensiz örnekleme ile kontrol edilmeye çalışıldığında elde edilen ayrıklaştırılmış sistem modeli zamanla değişen bir hal almaktadır. Bu nedenle, klasik bilgisayarlı kontrol teorisindeki birçok yöntem düzensiz örneklemeli sistemlerin kararlılığını garantilememektedir.

Doğrusal zamanla değişmeyen ayrık bir sistemin kararlılığı için gerek ve yeter bir koşul sistem matrisinin özdeğerlerinin birim çember içinde bulunmasıdır [1]. Ancak, bu koşul düzensiz örneklemeli sistemlerin kararlılığını göstermek için yeterli değildir [5].

Sürekli sistemin ayrıklaştırılmasıyla elde edilen sistem modeli, zamanla değişen [17] ya da parametre ile değişen (parameter-varying) [18] sistem bakış açısı ile incelenebilmektedir [5]. Ancak, bu bakış açısı çok genel olduğundan elde edilen kararlılık koşulları hesaplanabilir bir yöntem sunamamaktadır [19].

Düzensiz örneklemeli sistemlerin kararlı kılınması ve kontrolü problemi için birçok farklı yaklaşım ve yöntem literatürde sunulmuştur. Bunların yaygın olanlarından bazıları giriş gecikmesi (input delay) yaklaşımı, küçük kazanç (small gain) yaklaşımı, ortak karesel (quadratic) Lyapunov fonksiyonu bulma yöntemi ve çoklu Lyapunov-benzeri (multiple Lyapunov-like) fonksiyon bulma yöntemi olarak sıralanabilir [5,6].

Ek olarak, düzensiz örnekleme sistemleri benzer matematik altyapıyı kullanan ama kısmen farklı problemleri ele alan karma (hybrid) sistemler [20], olay tetiklemeli (event-triggered) sistemler [21], anahtarlama (switched) sistemler [22], dürtüsel (impulsive) sistemler [23] ve zaman ölçeklemeli (time scales) sistemlerin [24,25] literatüründen de faydalanılmaktadır.

Çok etmenli sistemlerin uzlaşım problemi bir ayrıştırma kullanılarak kararlılık problemine dönüştürülebilmektedir [26]. Bu nedenle, düzensiz örnekleme sistemlerinin kontrolü için geliştirilen yöntemler bu probleme de uygulanabilir olmaktadır. Literatürde genel etmen dinamiğine sahip sistemler üzerine çalışma yapılmış olsa da daha yaygın olarak çift integratör etmen dinamiği ele alınmaktadır [16].

1.3 Tezde Ele Alınan Problemler

Bir önceki bölümde bahsedilen sistem türlerinin tamamının kararlı kılınması ve kontrolör sentezi problemi için kullanılan bir yöntem ortak karesel Lyapunov fonksiyonu bulma yöntemidir. Bu yöntemde, tüm sistem matrislerinin hepsi için ortak olan bir karesel Lyapunov fonksiyonu kullanılarak sistemin kararlılığı sağlanmaktadır. Bu yöntem her ne kadar konservatif olsa da birçok çalışmada kararlı kılma ve kontrolör sentezi problemlerinin çözümünde başarı ile uygulanmıştır [27,28,29].

Bu tezde ortak Lyapunov fonksiyonu bulmaya eşdeğer olan bir ortak benzerlik dönüşümü yöntemi kullanılarak kararlı kılan kontrolörlerin bulunması problemi irdelenmiştir. Yani literatürde yaygın olarak kullanılan bir yöntem farklı bir bakış açısıyla ele alınıp kararlı kılan kontrolör bulma yöntemleri aranmıştır.

Elde edilen kontrolör sentez yöntemlerinin rasyonel bağımlılığı olmayan çoklu durum gecikmeli sistemlerin kararlı kılınmasında kullanılabilirliği problemi irdelenmiştir. Bu sentez yöntemlerinin aynı zamanda çift integratör dinamiğe sahip çok etmenli sistemlerin düzensiz örnekleme ve değişen topoloji altında uzlaşım problemine uygulanarak, uzlaşım sağlayan kontrolör parametrelerinin bulunması üzerinde çalışılmıştır.

1.4 Tezin Özgün Katkıları

Bu tez kapsamında kararlılık analizi için kapalı çevrim sistem matrislerinin tamamını bir daralma (contraction) haline getiren, yani matrislerin en büyük tekil değerini 1'den küçük yapan ortak benzerlik dönüşüm matrisinin varlığı koşulu geliştirilmiştir. Ayrıca, bu koşulun literatürde iyi bilinen ortak karesel Lyapunov fonksiyonu koşuluna eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Geliştirilen bu koşul, tezin geri kalanında kararlı kılan kontrolörlerin bulunması probleminde kullanılmıştır.

Doğrusal zamanla değişen ayrık sistemler için erişilebilirlik ve gözlenebilirlik dualitesine sahip, literatürde olmayan bir sistem oluşturulmuştur. Ayrıca, düzensiz örneklemeli sistemler için kapalı çevrim sistem özdeğerlerinin nokta nokta (pointwise) atanabilmesine olanak veren yeni bir atanabilirlik kavramı tanıtılmıştır. Bir girişe sahip bir sistemin atanabilir olması için yeter bir koşul kanıtlanmıştır. Bu atanabilirlik kavramı, daha sonra özdeğer atama ile kararlı kılan kontrolörün bulunması problemine uygulanmıştır.

Küçük örnekleme aralığı yaklaşıklığı ile düzensiz örneklemeli sistemleri kararlı kılan kontrolörün varlığı ile ilgili literatürde olan bir teoremin sonucu bu tezde genişletilmiştir. Elde edilen teorem oldukça genel olup, bu tezde tasarlanan kontrolörlerin sistemi kararlı kıldığını kanıtlamak için kullanılmıştır. Ayrıca, aynı teorem ile kararlılığın sağlandığı en büyük örnekleme aralığı da hesaplanabilmektedir.

Kapalı çevrim sistemin kararlılık analizinde kullanılan benzerlik dönüşüm matrisinin bulunması ile ilgili üç farklı yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yöntemler aynı zamanda ortak karesel Lyapunov fonksiyonunun bulunmasında da kullanılabilir.

Doğrusal zamanla değişmeyen ayrık sistemler için kontrolör tasarımında kullanılan bir yöntem, *dijital yeniden tasarım (digital redesign)* olarak bilinen bir yöntemdir. Bu yöntemde kapalı çevrim sürekli sistem durum yanıtı ile kapalı çevrim ayrık sistem durum yanıtı eşitlenmeye çalışılmaktadır. Bu tez kapsamında literatürde olan bir dijital tasarım yöntemi, düzensiz örneklemeli sistemlerin kontrolü için genişletilmiştir. Ayrıca, kararlılığı sağlayan en büyük örnekleme aralığı için de üst sınırlar bulunmuştur.

Klasik teoride kontrolör tasarımında sıkça kullanılan bir yöntem, *özdeğer atama (eigenvalue assignment)* ya da *kutup yerleştirme (pole placement)* yöntemidir.

Bu yöntemde, kapalı çevrim sistem matrisinin özdeğerleri bir durum geri beslemesi kontrolörü kullanılarak istenen sistem davranışını sağlayacak şekilde yerleştirilmektedir. Yukarıda bahsedilen atanabilirlik kavramı kullanılarak bu yöntem bir girişe sahip olan düzensiz örneklemeli sistemlerin kontrolü için genişletilmiş ve bu yöntem ile kararlılığın sağlandığı kanıtlanmıştır.

Kapalı çevrim sistem matrislerinin tekil değerlerinin uygun yerlere atanması ile kontrol yöntemi bilindiği kadarıyla ilk kez bu tez kapsamında geliştirilmiştir. Tekil değer atama yönteminin kararlılığı garantilediği kanıtlanmış ve kararlılığı garantileyen en büyük örnekleme aralığı için üst sınırlar verilmiştir.

Rasyonel bağımlılığı olmayan çoklu durum ölçüm gecikmesine sahip sistemlerin kontrolü problemi ele alınmış ve önerilen bir örnekleme şeması (sampling scheme) ile bu problemin düzensiz örneklemeli sistem yaklaşımı kullanılarak çözülebileceği kanıtlanmıştır. Böylece, düzensiz örneklemeli sistemler için geliştirilmiş kontrolörlerin bu problemin çözümü için de uygulanabileceği örnekleriyle gösterilmiştir.

Çift integratör dinamiğe sahip çok etmenli bir sistemin düzensiz örnekleme ve değişken topoloji altında uzlaşım probleminin çözümü için yeni bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem ile kontrolör parametreleri basit eşitsizlikler kullanılarak bulunabilmektedir. Ayrıca önerilen yöntem, literatürdeki benzer çalışmaların aksine değişen ağ topoloji çizgilerinin bilinmesi gerekliliğini ortadan kaldırmaktadır. Tasarımcının yalnızca topoloji çizgilerinin Laplasyen matris özdeğer aralığını bilmesi yeterli olmaktadır. Bu aralığın ve maksimum örnekleme aralığının keyfi seçimi altında önerilen kontrolörün her zaman var olduğu kanıtlanmıştır. Geliştirilen bu yöntem, düzensiz örneklemeli ve değişken topolojili bir ağın saat senkronizasyonu problemine uygulanmıştır.

Tezin özgün katkıları sonucu aşağıdaki makaleler uluslararası hakemli dergi ve konferanslarda yayınlanmış, konferans yayınları sözlü olarak sunulmuştur:

- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2023). Consensus of double integrator multiagent systems under nonuniform sampling and changing topology, *AIMS Mathematics*, 8(7), 16175–16190.
- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2016). Stabilization of Controller-Driven Nonuniformly Sampled Systems via Digital Redesign, *6th IFAC Symposium on System Structure and Control*, Istanbul, 49(9), 142–145.

- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2014). Controllability, Observability and Eigenvalue Assignment on Isolated Time Scales, *19th IFAC World Congress*, Cape Town, s.3815–3820.
- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2012). Eigenvalue assignment for systems with multiple measurement delays on isolated time scales, *10th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Boston, cilt 10, s.156–160.

1.5 Tezin Düzeni

Tezdeki her bölümün girişinde ilgili literatür özeti detaylı biçimde verilmiştir. Bu nedenle giriş bölümünde kısa literatür özeti verilmiş olup ayrı bir literatür özeti bölümü bulunmamaktadır.

Tezin ikinci bölümünde tezde ele alınan problemin matematiksel tanımı ve bu problem ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Bu tezin ele aldığı problem, zamanla değişmeyen doğrusal sistemlerin sıfırıncı derece tutucu ile düzensiz örnekleme altında kontrolü olarak tanımlanmıştır. Bu problemin özel bir matris dizisine sahip zamanla değişen ayrık doğrusal bir sistemin kontrolü ile eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, zamanla değişen ayrık doğrusal sistemlerin çözümü ve durum geçiş matrisi özellikleri özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde zamanla değişen sistemler için farklı kararlılık tanımları birçok kaynaktan derlenerek verilmiştir. En genel haldeki tanımlardan başlanarak özel durumdaki tanımların neden geneldeki tanımlara eşdeğer oldukları kanıtlanmıştır. Örnekler kullanılarak neden birçok farklı tanım ihtiyacı olduğu ortaya çıkarılmıştır. Ayrıca hem gerek ve yeter, hem de yeter kararlılık koşulları verilip kanıtlanmıştır. Verilen bu koşullar tezdeki diğer yöntemlerin temelini oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde zamanla değişen doğrusal sistemler için erişilebilirlik ve gözlenebilirlik kavramları özetlenmiştir. Bu kavramlar, kararlı kılan kontrolörlerin varlığı için önem arz etmektedir. Bu durum, kararlı kılınabilirlik alt bölümünde tartışılmıştır. Ayrıca, düzensiz örnekleme altında erişilebilirliğin korunması için yeter koşullar özetlenmiştir. Son olarak, düzensiz örneklemeli sistemler için atanabilirlik kavramı tanımlanmıştır. Bu kavram kullanılarak özdeğer atama ile kontrol yöntemi için altyapı oluşturulmuştur.

Beşinci bölümde çeşitli kararlı kılan kontrolör tasarım yöntemleri geliştirilmiştir. Öncelikle kararlı kılan kontrolörün varlığı ile ilgili literatürdeki mevcut sonuçlar genişletilmiş ve kararlılığı kanıtlayan benzerlik dönüşüm matrisinin elde edilmesi için üç farklı yöntem önerilmiştir. Sonrasında bu yöntemler temel alınarak dijital yeniden tasarım (digital redesign), özdeğer atama (eigenvalue assignment) ve tekil değer atama (singular value assignment) yöntemleri ile kararlı kılan kontrolörler bulunmuştur. Bu yöntemlerin her biri için kararlılığın sağlandığı en büyük örnekleme aralığına dair üst sınırlar verilmiştir. Geliştirilen bu yöntemlerin, durum ölçümünde farklı ve ortak bölümleri olmayan gecikmeye sahip sistemlerin kararlı kılınması problemine uygulanabileceği gösterilmiştir. Son olarak, örnekleme aralığı ile değişen kontrolörlerin nominal bir örnekleme aralığı civarında sabit kontrolör olarak da kullanılabileceği kanıtlanmıştır.

Altıncı bölümde çift integratör dinamiğe sahip çok etmenli sistemlerin düzensiz örnekleme ve değişen topoloji altında uzlaşımı probleminin çözümü için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Ağ topolojileri bağlı ve yönsüz olduğu sürece geliştirilen kontrolörün keyfi seçilen örnekleme zamanı ve keyfi belirlenen ağ topoloji Laplasyen matris özdeğer aralığı için her zaman var olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, geliştirilen bu yöntem ufak değişiklikler ile bir ağdaki cihazlarının saat senkronizasyonu problemine uygulanmıştır.

Son olarak, yedinci bölümde sonuçlar verilmiştir. Tezde yapılan çalışmalar ve özgün katkılar kısaca özetlenerek açık problemler ve tezde ele alınmayan diğer konular tartışılmıştır.

2. PROBLEM TANIMI VE TEMEL BİLGİLER

Bu tez kapsamında ele alınan problem, doğrusal zamanla değişmeyen sürekli bir sistemin sıfırıncı mertebeden tutucu kullanılarak düzensiz örnekleme altında kontrolü problemidir. Bu bölümde, tezde kullanılan kavramların ve ele alınan problemin matematiksel tanımı yapılacaktır.

Birinci alt bölümde tezin geri kalanında kullanılacak notasyon ve terminoloji verilecektir. İkinci alt bölümde tezde ele alınan problemin matematiksel modeli oluşturulacaktır. Oluşan bu matematiksel model en genel halde zamanla değişen ayrık bir sistem ile ifade edilmektedir. Ancak, gerektiğinde parametre ile değişen ayrık sistem modeli de kullanılabilir. Üçüncü alt bölümde ise zamanla değişen ayrık zamanlı sistemlerin durum geçiş matrisi tanımlanarak bu matrisin sağladığı özellikler özetlenecektir.

2.1 Notasyon ve Terminoloji

Sıfırı içeren doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ sırasıyla tam sayılar, gerçel sayılar ve karmaşık sayılar kümelerini ifade eder. $\mathbb{R}^{>0}$, $\mathbb{R}^{\geq 0}$, $\mathbb{R}^{<0}$ ve $\mathbb{R}^{\leq 0}$ sırasıyla pozitif, negatif olmayan, negatif ve pozitif olmayan gerçel sayıları gösterir. Bir sıralaması olan diğer kümeler için de benzer şekilde kullanım mevcuttur. $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ kümelerinin kartezyen çarpımı $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ biçiminde yazılır.

Bir $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ve $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kümeleri sırasıyla gerçel sayılar doğrusunun bir açık ve kapalı aralığını temsil eder. $a > 0$ ifadesi ile $a \in \mathbb{R}^{>0}$ kastedilir. $\mathbb{R}^{>0} \cup \{\infty\}$ sonsuzu da içeren genişletilmiş pozitif gerçel sayıları ve $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ise 0 elemanını içermeyen tamsayıları ifade eder.

Bir $z \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısı için $|z|$, $\text{Re } z$ ve $\text{Im } z$ sırasıyla z 'nin genliğini, gerçel kısmını ve sanal kısmını gösterir. Yeni bir tanım yapılırken $:=$ sembolü, "tanım olarak eşit" anlamında kullanılır.

Bir $n, m \in \mathbb{Z}^{>0}$ için $\mathbb{R}^{n \times m}$ ($\mathbb{C}^{n \times m}$) elemanları gerçel (karmaşık) sayılar olan $n \times m$ boyutlu matris kümesini temsil eder. $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n \times 1}$ ($\mathbb{C}^n := \mathbb{C}^{n \times 1}$) elemanları gerçel (karmaşık) sayılar olan n boyutlu vektör kümesini gösterir. Yani tüm vektörler sütun olarak tanımlanmıştır.

Elemanları $a_k \in \mathbb{A}$ kümesine ait olan dizi $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ biçiminde gösterilir. Burada $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ ile elemanları $\mathbb{A}$ kümesine ait olan sayılabilir sonsuz uzunluktaki olası tüm dizilerin kümesi ifade edilir. $i = 1, 2, \dots, n$ doğal sayıları için $x_i \in \mathbb{R}$ ifadesi $x \in \mathbb{R}^n$ vektörünün i 'inci elemanını gösterir. Eğer alt indis olarak k kullanılırsa o zaman $x_k \in \mathbb{R}^n$ bir vektör dizisinin k 'inci zamandaki değerini gösterir. $x_k^{(i)} \in \mathbb{R}$ ise $x_k \in \mathbb{R}^n$ vektörünün i 'inci elemanını ifade eder. Aynı tanımlar benzer şekilde matris dizileri için de kullanılır.

Bir $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin i 'inci özdeğeri $\lambda_i(A)$ ve spektral yarıçapı $\rho(A)$ ile gösterilir. A 'nın sütun uzayı (image, range) $\text{Im } A$ ve çekirdek uzayı (kernel) $\ker A$ ile temsil edilir. Bir $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $A = \text{diag}\{a_i\}$ köşegen elemanları a_i olan köşegen bir matris tanımlar. Benzer şekilde $A_i \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $A = \text{blkdiag}\{A_i\}$ blok köşegen elemanları A_i olan blok köşegen bir matris tanımlar.

Hermityen (gerçel durumda simetrik) bir $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin en küçük ve en büyük özdeğerleri sırasıyla $\lambda_{\min}(P)$ ve $\lambda_{\max}(P)$ biçiminde ifade edilir. $P > 0$, $P \geq 0$, $P < 0$ ve $P \leq 0$ ifadeleri sırasıyla pozitif tanımlı (positive definite), pozitif yarı-tanımlı (positive semi-definite), negatif tanımlı ve negatif yarı-tanımlı matrisleri temsil eder.

Bir $x \in \mathbb{C}^n$ vektörü için $|x|$, Öklidyen vektör normunu temsil eder. Bir $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ matrisi için $\|A\|$, Öklidyen vektör normu üzerinden indüklenmiş matris normunu gösterir. Bu aynı zamanda bir matrisin en büyük tekil değerini verir ve bu değer $\bar{\sigma}(A)$ ile gösterilir. Eğer $\|A\| = \bar{\sigma}(A) < 1$ ise A bir *daralmadır* (contraction) denir.

$A : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ifadesi negatif olmayan gerçel sayılar kümesinden $n \times m$ boyutlu matrisler kümesine giden matris tanımlı fonksiyonu gösterir. Eğer fonksiyonun tanım kümesi ya da görüntü kümesi önemsenmiyorsa aynı ifade $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ya da $t \mapsto A(t)$ biçiminde de yazılabilir.

Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin $\lambda_i \in \mathbb{C}$ özdeğeri için Jordan bloğunun boyutu n_i olsun. Keyfi olarak seçilen $\delta > 0$ için matrisin gerçel Jordan bloğu, eğer $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gerçel bir sayıysa

$$\mathcal{J}(\lambda_i, \delta) := \begin{bmatrix} \lambda_i & \delta & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & \delta \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$$

biçiminde, eğer $j := \sqrt{-1}$ ve $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda_i = a_i \mp j b_i \in \mathbb{C}$ karmaşık eşlenik ise

$$C_i := \begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathcal{J}(\lambda_i, \delta) := \begin{bmatrix} C_i & \delta I \\ & \ddots & \ddots \\ & & C_i & \delta I \\ & & & C_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $n_i = 1$ ise konvansiyon olarak $\lambda_i \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{J}(\lambda_i) := \lambda_i$ ve $\lambda_i \in \mathbb{C}$ için $\mathcal{J}(\lambda_i) := C_i$ biçiminde yazılır.

2.2 Problem Tanımı

Aşağıda verilmiş olan doğrusal, sürekli ve zamanla değişmeyen sistem modeli ele alınsın:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Burada $x(t) \in \mathbb{R}^n$ sistemin durumlarını, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ girişlerini ve $y(t) \in \mathbb{R}^p$ çıkışlarını ifade eder. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ve $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matrisleri sabit matrislerdir, yani zamanla değişmezler.

Vektör tanımlı bir fonksiyon olan $u : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ parçalı sürekli kabul edilir. Literatürde standart olarak yapılan bu varsayım ile zaman zaman sıçramalar yapan bir işaret sisteme giriş olarak uygulanabilir.

Tanım 2.1 (Örnekleme Zamanı ve Örnekleme Aralığı). $t_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$ ve

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots \text{ ve } \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty \tag{2.2}$$

olmak üzere verilen bir $\mathcal{T} := \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisine *örnekleme zamanı dizisi* ve dizinin her elemanına bir *örnekleme zamanı* adı verilir. İki örnekleme zamanı arasındaki farka ise

örnekleme aralığı adı verilir ve $h_k := t_{k+1} - t_k$ biçiminde gösterilir. $\mathcal{H} := \{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisine *örnekleme aralığı dizisi* adı verilir.

Örnekleme aralığının üstten ve alttan sınırlı olduğu varsayılmaktadır. Yani bilinen $0 < h_{\min} \leq h_{\max}$ sayıları için

$$h_{\min} \leq h_k \leq h_{\max}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

olmalıdır. Dikkat edilecek olursa $\mathcal{H}$ örnekleme aralığı dizisi, $\mathcal{T}$ örnekleme zamanı dizisini eksiksiz olarak karakterize eder.

Yukarıdaki tanımda yapılan $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ varsayımı, literatürde *Zeno davranışı* olarak adlandırılan, örnekleme zamanı dizisinin sonlu bir değere yakınsaması probleminden kaçınmak için yapılmaktadır. Ancak, (2.3) varsayımı da Zeno davranışından kaçınmak için yeterlidir.

Açıkça görülebileceği gibi h_k her k için sabit bir değer olursa örnekleme periyodik hale dönüşür. Bu durumda tezde ele alınan problemler klasik bilgisayarlı kontrol teorisi kapsamında halihazırda çözülmüştür.

Bu tez kapsamında $u(t)$ 'nin değerleri örnekleme zamanlarında belirlenip *sıfırıncı derece tutucu* ile parçalı sürekli bir fonksiyona dönüştürülmektedir. Yani $u(t)$ fonksiyonu $t_k \leq t < t_{k+1}$ zaman aralığında t_k anındaki değerini t_{k+1} anına kadar sabit bir biçimde korur:

$$u(t) = u(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (2.4)$$

Bu şekilde belirlenen bir giriş fonksiyonu ile (2.1) sistemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Yukarıda verilen sistemin davranışını incelemek için durumların t_k anlarındaki değerlerini incelemek yeterlidir. Bir diğer deyişle, (2.5) sisteminin davranışı sistemin ayrık modelinin davranışına eşdeğerdir. Bu gerçek, aşağıdaki teorem ile formel bir biçimde gösterilebilir.

Teorem 2.1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ve $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

sürekli sistemi ele alınsın. Verilen bir $\mathcal{T} := \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ örnekleme zamanı dizisi için $u(t) = u_k, \forall t \in [t_k, t_{k+1})$ olsun. Bu durumda (2.6) sisteminin ayrık modeli

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= e^{Ah_k} x_k + \left(\int_0^{h_k} e^{A\tau} d\tau \right) Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned} \quad (2.7)$$

biçimindedir. Yani $x_0 = x(t_0)$ varsayımı altında tüm $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = x(t_k)$ ve $y_k = y(t_k)$ eşitlikleri sağlanır.

Kanıt (Doğrudan). (2.6) sistemindeki diferansiyel denklemin $x_0 = x(t_0)$ için tek çözümü

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

biçimindedir. Çözümün $x(t_{k+1}) = x(t_k + h_k)$ noktasındaki değeri incelendiğinde

$$\begin{aligned} x(t_k + h_k) &= e^{A(t_k+h_k)} x_0 + \int_{t_0}^{t_k+h_k} e^{A(t_k+h_k-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\ &= e^{Ah_k} e^{At_k} x_0 + e^{Ah_k} \int_{t_0}^{t_k} e^{A(t_k-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \int_{t_k}^{t_k+h_k} e^{A(t_k+h_k-\tau)} Bu(\tau) d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. Tüm $t \in [t_k, t_{k+1})$ için $u(t) = u_k$ varsayımından dolayı ikinci integralde $u(\tau) = u_k$ sabit bir değerdir ve integralin dışına çıkabilir. Yine ikinci integralde $\eta := t_k + h_k - \tau$ şeklinde bir değişken dönüşümü yapıldığında alt sınır için $t_k + h_k - t_k = h_k$ ve üst sınır için ise $t_k + h_k - (t_k + h_k) = 0$ değerleri elde edilir. $d\eta = -d\tau$ olduğu da aşikar olduğundan

$$\begin{aligned} x(t_k + h_k) &= e^{Ah_k} \left(e^{At_k} x_0 + \int_{t_0}^{t_k} e^{A(t_k-\tau)} Bu(\tau) d\tau \right) + \left(\int_{h_k}^0 e^{A\eta} B(-d\eta) \right) u_k \\ &= e^{Ah_k} x(t_k) + \left(\int_0^{h_k} e^{A\eta} d\eta \right) Bu_k \end{aligned}$$

elde edilir. Demek ki $\{x(t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ ve $\{y(t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizileri (2.7) sisteminin $x_0 := x(0)$ için tek çözümüdür. O halde tüm $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = x(t_k)$ ve $y_k = y(t_k)$ gösterilmiş olur. $\square$

Kanıt (Tümevarım). Teoremin varsayımı gereği $x(t_0) = x_0$ olur. Tümevarım varsayımı olarak $x(t_k) = x_k$ olsun. O halde yukarıdaki doğrudan kanıtı benzer şekilde,

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= e^{A(t_{k+1}-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} Bu(\tau) d\eta \\ &= e^{Ah_k} x(t_k) + \left(\int_0^{h_k} e^{A\eta} d\eta \right) Bu_k \\ &= x_{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da kanıtı tamamlar. $\square$

Dikkat edilecek olursa zamanla değişmeyen sürekli bir sistemin düzensiz örnekleme altındaki ayrık zamanlı modeli zamanla değişen bir sistem olmaktadır. Bu nedenle bu çalışma kapsamında en genel halde $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_k x_k + G_k u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned} \quad (2.8)$$

biçimindeki sistemler incelenecektir. Eğer sistemin sadece durumları ile ilgileniliyorsa sistem daha basit bir biçimde

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k \quad (2.9)$$

şeklinde ele alınacaktır.

Dikkat edilecek olursa bu notasyonda örnekleme zamanı kullanılmamaktadır. Aynı sistem, $F(t_k) := F_k$ ve $G(t_k) := G_k$ tanımlarını kullanarak

$$x(t_{k+1}) = F(t_k)x(t_k) + G(t_k)u(t_k) \quad (2.10)$$

biçiminde de yazılabilirdi. Bu şekilde bir notasyonun herhangi bir avantajı olmadığı gibi çokça parantez ve indis kullanımı denklemleri okumayı zorlaştırabilir. Bu nedenle t_k ve h_k bilgilerinin k indisinde taşındığını göz önünde bulundurarak notasyon sadeleştirilebilir.

Elde edilen (2.7) sistemi örnekleme zamanı t_k 'ya bağlı değil, yalnızca örnekleme aralığı h_k 'ya bağlıdır. Ayrıca bu sistem için F_k ve G_k matrisleri özel bir formda olduğundan bazı durumlarda sistemin analizi ve kontrolü en genel sistem modeline göre daha kolay olmaktadır. Bu nedenle bu çalışmanın birçok yerinde genel haldeki sonuçlar verilip gerektiğinde

$$F_k := e^{A h_k} \quad \text{ve} \quad G_k := \left(\int_0^{h_k} e^{A \tau} d\tau \right) B \quad (2.11)$$

tanımları yapılarak (2.7) şeklindeki sistemler incelenecektir.

2.3 Ayrık Zaman Durum Geçiş Matrisi

Bu bölümde doğrusal sistemlerin analizinde sıklıkla kullanılan durum geçiş matrisi tanımlanacaktır. Ayrıca, durum geçiş matrisinin literatürde iyi bilinen ve bu tez için önemli olan bazı özellikleri verilecektir. Daha fazla bilgi için [17] gibi kaynaklar incelenebilir.

Tanım 2.2 (Durum Geçiş Matrisi). $k, r \in \mathbb{N}, k \geq r$ ve $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall i \in \mathbb{N}$ olmak üzere durum geçiş matrisi

$$\Phi_F(k, r) := \begin{cases} I & k = r \text{ ise} \\ F_{k-1}F_{k-2} \dots F_r & k > r \text{ ise} \end{cases} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır. Literatürdeki kaynakların birçoğu $k < r$ için durum geçiş matrisini tanımsız kabul eder. Ancak, bazı kaynaklar ek olarak tüm $k \in \mathbb{N}$ için F_k matrislerinin tersi olduğu varsayımı altında

$$\Phi_F(k, r) := F_k^{-1}F_{k+1}^{-1} \dots F_{r-1}^{-1}, \quad k < r \quad (2.13)$$

şeklindeki tanımı da dahil edebilirler. Bu çalışma kapsamında aksi belirtilmedikçe $k < r$ için durum geçiş matrisi tanımsız kabul edilecektir.

Eğer durum geçiş matrisinin ait olduğu sistem matris dizisi $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, yazının bağlamında aşikar bir biçimde belliyse alt indis olarak yazılmaz. Yani herhangi bir karışıklığa sebep olmayacaksa $\Phi_F(k, r)$ yerine $\Phi(k, r)$ de yazılabilir.

Durum geçiş matrisinin bazı temel özellikleri aşağıdaki teorem ile tek seferde verilmiştir.

Teorem 2.2. *Durum geçiş matrisi tüm $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall i \in \mathbb{N}$ ve $k, s, r \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:*

- i. $\Phi_F(k+1, r) = F_k \Phi_F(k, r), \quad k \geq r$
- ii. $\Phi_F(k, r+1)F_r = \Phi_F(k, r), \quad k > r$
- iii. $\Phi_F(k, s)\Phi_F(s, r) = \Phi_F(k, r), \quad k \geq s \geq r$

Kanıt. (i) ve (ii) eşitlikleri, (iii) eşitliği ve durum geçiş matrisinin tanımı kullanılarak kolayca gösterilebilir. $k = s = r$, $k = s > r$ ve $k > s = r$ durumları için (iii) eşitliği aşikardır. O halde $k > s > r$ olmak üzere

$$\Phi_F(k, s)\Phi_F(s, r) = F_{k-1} \dots F_s F_{s-1} \dots F_r = \Phi_F(k, r)$$

elde edilerek kanıt tamamlanır. □

Aşağıdaki teorem ile (2.9) sisteminin çözümü durum geçiş matrisi tanımı kullanılarak elde edilebilir.

Teorem 2.3. Tüm $k \in \mathbb{N}$ için $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ olmak üzere, verilen $r \in \mathbb{N}$ ve $x_r \in \mathbb{R}^n$ için (2.9) sisteminin tek çözümü

$$x_k = \Phi(k, r)x_r + \sum_{i=r}^{k-1} \Phi(k, i+1)G_i u_i, \quad \forall k > r \quad (2.14)$$

biçimindedir.

Kanıt. Öncelikle (2.14) eşitliğinin bir çözüm olduğu tümevarımla gösterilecektir. $k = r + 1$ için savın doğruluğu aşağıdaki eşitliklerle gösterilebilir:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{r+1} \\ &= F_r x_r + G_r u_r \\ &= \Phi(r+1, r)x_r + \Phi(r+1, r+1)G_r u_r \\ &= \Phi(k, r)x_r + \sum_{i=r}^{k-1} \Phi(k, i+1)G_i u_i \end{aligned}$$

Savın k için doğru olduğunu varsayıp $k+1$ için de doğru olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_k \left(\Phi(k, r)x_r + \sum_{i=r}^{k-1} \Phi(k, i+1)G_i u_i \right) + G_k u_k \\ &= F_k \Phi(k, r)x_r + \sum_{i=r}^{k-1} F_k \Phi(k, i+1)G_i u_i + \Phi(k+1, k+1)G_k u_k \\ &= \Phi(k+1, r)x_r + \sum_{i=r}^k \Phi(k+1, i+1)G_i u_i \end{aligned}$$

Demek ki (2.14) eşitliği bir çözümdür.

Çözümün tekliğini göstermek için $y_r = x_r$ olmak üzere $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ve $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizilerinin, $k \geq r$ için verilen sistemin birer çözümü olduğu varsayılın. Şimdi $z_k := x_k - y_k, \forall k \in \mathbb{N}$ tanımlıysa

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= x_{k+1} - y_{k+1} \\ &= F_k x_k + G_k u_k - F_k y_k - G_k u_k \\ &= F_k (x_k - y_k) \\ &= F_k z_k \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $z_r = x_r - y_r = x_r - x_r = 0$ olmalıdır. Ancak, eğer bir k için $z_k = 0$ ise, $z_{k+1} = F_k 0 = 0$ olur. Demek ki $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi, $k \geq r$ için 0 sabit dizisidir. O halde $x_k = y_k, \forall k \geq r$ olmalıdır. Demek ki (2.14) eşitliği sistemin tek çözümüdür. $\square$

3. KARARLILIK

Bu çalışma kapsamında bir sistemin "iç kararlılığı" ya da "sıfır-giriş kararlılığı" ile ilgilenilmektedir. Yani sistemin bir başlangıç durumundan serbest bırakıldıktan sonraki davranışı incelenecektir. Bunun bir nedeni düzgün (uniform) asimptotik kararlı olan zamanla değişen doğrusal sistemlerin aynı zamanda "sınırlı-giriş-sınırlı-çıkış (bounded-input-bounded-output, BIBO) kararlı" olmasıdır [30]. Ancak bu durum asimptotik kararlılık düzgün değilse geçerli değildir [31]. Ayrıca doğrusal olmayan sistemler için de bunun geçerli olmadığı bilinmektedir [32].

Ayrık zamanla değişmeyen doğrusal sistemlerin kararlılığını incelemek için sistem matrisinin özdeğerlerinin birim çember içinde olması gerek ve yeter bir koşuldur [33]. Ancak, zamanla değişen doğrusal sistemler için sistem matris dizisindeki tüm matrislerin özdeğerlerinin birim çember içinde olması sistemin kararlılığı için yeterli değildir [22]. Özellikle anahtarlama (switching) sistemler için ters örnekler kolaylıkla oluşturulabilir [34]. Düzensiz örneklemeli sistemlerin özel formundan dolayı sistem matris fonksiyonunun özdeğerlerinin kararlılık için bir koşul verebileceği düşünülebilir, ancak bu da doğru değildir [5].

Literatürde zamanla değişen doğrusal sistemlerin kararlılığı için durum geçiş matrisinin normu üzerinden verilen ve Lyapunov fonksiyonu kullanan gerek ve yeter koşullar iyi bilinmektedir [17,31]. Bu çalışmada da bu koşullardan bazıları kanıtlarıyla verilecektir. Düzensiz örneklemeli doğrusal sistemler için, ayrık doğrusal parametre ile değişen (linear parameter-varying, LPV [18]) sistem yaklaşımı ile geliştirilmiş daha birçok gerek ve yeter kararlılık koşulu mevcuttur [5]. Ancak, bu koşulların hiçbirisi hesaplanabilir bir yöntem sunamamıştır [19].

Yukarıda bahsedilen gerek ve yeter koşullar için sonlu yaklaşıklık kullanılarak, verilen bir sistemin kararlı olduğu gösterilebilmektedir. Ancak, geliştirilen algoritmalar sadece sistem kararlıysa sonlu bir adımda sonuç vermektedir [35]. Ayrıca, yapılan sonlu yaklaşıklık derecesi arttıkça hesap yükü de üstel olarak artmaktadır [19]. Kararlı

olmayan bir düzensiz örneklemeli sistemin kararsız olduğu sonucuna sonlu zamanda varan bir algoritmanın varlığı bilinmemektedir (decidability problem) [36].

Gerek ve yeter koşulların yapıcı bir yöntem verememesi nedeniyle kararlılığı gösteren ve yapıcı olan birçok yeter koşul literatürde mevcuttur [5]. Bunlar en genel halde sürekli zaman ve ayrık zaman yöntemleri olarak ikiye ayrılabilir [6]. Literatürde iyi bilinen bir ayrık zaman yöntemi, ortak karesel Lyapunov fonksiyonu (common quadratic Lyapunov function) yöntemidir [6]. Bu yöntemde, örnekleme zamanının bir fonksiyonu olan tüm sistem matrisleri için ortak bir karesel Lyapunov fonksiyonu bulunarak kararlılığın sağlandığı gösterilmektedir. Böyle bir Lyapunov fonksiyonunu en genel halde bulmak kolay olmasa da bunun için birçok yöntem geliştirilmiştir [27,28,29].

Bu tez kapsamında ortak karesel Lyapunov fonksiyonuna denk olan bir ortak benzerlik dönüşümü yöntemi geliştirilmiştir. Bölüm 5'te sistemin kararlılığını gösteren ortak benzerlik dönüşüm matrisini bulmak için farklı yöntemler önerilmiş ve bu yöntemler kararlı kılan kontrolör tasarımında kullanılmıştır. Aynı yöntemler eşdeğer olarak ortak karesel Lyapunov fonksiyonu bulmak için de kullanılabilir.

Bir sonraki altbölümde literatürde mevcut olan kararlılık tanımları verilecektir. Ayrıca özel durumda birbirine denk olan tanımların eşdeğerlilik teoremleri kanıtlanacaktır. İkinci alt bölümde ise tez kapsamında kullanılacak olan kararlılık koşulları kanıtlarıyla verilecektir.

Tezin bu bölümündeki özgün katkılar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Literatürde Lyapunov eşitsizliği kullanan bir koşula denk olan ve benzerlik dönüşümü kullanan bir başka gerek ve yeter kararlılık koşulu geliştirilmiştir (Teorem 3.11).
- Yukarıda bahsedilen koşulun yeter hali düzensiz örneklemeli sistemler için kanıtlanmıştır (Teorem 3.14). Bunun sonucu olarak literatürde iyi bilinen ortak karesel Lyapunov fonksiyonu koşulu için alternatif bir kanıt sunulmuştur (Teorem 3.15).

3.1 Kararlılık Tanımları

Literatürde genel durumda birbirlerinden farklı birçok kararlılık tanımı bulunmaktadır [37]. Ancak, bu tanımlar bazı özel durumlarda birbirlerine denk olmaktadır. Örneğin, bu bölümde gösterileceği gibi, zamanla değişen doğrusal sistemler için "düzgün asimptotik kararlılık" ve "global düzgün üstel kararlılık" denk olmaktadır.

Bu nedenle bazı kaynaklarda, ele alınan probleme göre kararlılık tanımları farklılık gösterebilmektedir. Bu çalışmada tanımlar genelden başlayarak verilecek ve özel koşullarda neden denk oldukları gösterilecektir. Ayrıca, aynı tanımların eşdeğer formları da verilerek karmaşıklığa yol açmayacak biçimde konu özetlenmeye çalışılacaktır.

Bu alt bölümün kapsamını içeren benzer bir derleme [38] çalışmasında yapılmıştır. Ancak, bu bölümde verilen kanıtlar bu çalışmadan bağımsız olarak geliştirilmiştir. Bu nedenle benzer sonuçlar farklı yöntemlerle kanıtlanmıştır.

Bu çalışma kapsamında ilgilenilen kararlılık tanımlarının en genel hali, ayırık zamanla değişen doğrusal olmayan sistemlerin denge noktaları için verilebilir. Yani $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon ve $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı için

$$x_{k+1} = f(k, x_k), \quad \forall k \geq r \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanmış sistem ele alınsın. Bu sistemin bir denge noktası $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun, yani

$$f(k, \bar{x}) = \bar{x}, \quad \forall k \geq r$$

olsun. Genelliği kaybetmeden $\bar{x} = 0$ seçilebilir [37]. Çünkü, $z_k := x_k - \bar{x}$ koordinat dönüşümüyle denge noktası orijine taşınabilir.

Yukarıda verilen (3.1) sisteminin özel bir hali olarak zamanla değişen doğrusal sistemler ele alınabilir. Yani, $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ bir matris dizisi ve $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı için

$$x_{k+1} = F_k x_k, \quad \forall k \geq r \quad (3.2)$$

biçiminde verilmiş olan sistemler bu çalışmanın ilgi alanına girmektedir. Dikkat edilecek olursa, orijin noktası (3.2) sistemi için her zaman bir denge noktasıdır.

Yukarıda verilen (3.2) sisteminin de özel bir hali olarak düzensiz örneklemeli doğrusal sistemler ele alınabilir. Yani $h_{\max} \geq h_{\min} > 0$, $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ ve $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

matris değerli pürüzsüz (smooth) bir fonksiyon olmak üzere, $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı için

$$x_{k+1} = F(h_k)x_k, \quad \forall k \geq r \quad (3.3)$$

biçiminde verilmiş olan sistemler bu çalışmanın ana konusunu oluşturmaktadır.

Verilen sistem tanımlarından sonra genelden özele doğru giderek birçok kararlılık tanımı ve bunların eşdeğer formları verilebilir.

3.1.1 Lyapunov anlamında kararlılık

Sezgisel olarak bir denge noktasının Lyapunov anlamında kararlı olması, bu denge noktasına yeterince yakın tüm başlangıç durumları için sistem çözümlerinin de her zaman denge noktasına yakın olacağı anlamına gelmektedir.

Tanım 3.1 (Lyapunov Anlamında Kararlılık [39, Tanım 5.1]). Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$|x_r| < \delta \Rightarrow |x_k| < \varepsilon, \quad \forall k \geq r \quad (3.4)$$

koşulunu sağlayan $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$ varsa, (3.1) sisteminin 0 denge noktası *Lyapunov anlamında kararlıdır* denir. Ayrıca, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, r 'den bağımsız seçilebiliyorsa 0 denge noktası *Lyapunov anlamında düzgün kararlıdır* denir.

Düzgün (uniform) kararlılık tanımı başlangıç zamanından bağımsız olmayı ifade etmektedir. Ancak, aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi bu durum her zaman sağlanmayabilir.

Örnek 3.1 ([17, Örnek 22.3]). $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fonksiyonu ve $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı için

$$x_{k+1} = \frac{w(k+1)}{w(k)}x_k, \quad \forall k \geq r \quad (3.5)$$

formunda verilmiş skaler doğrusal sistem ele alınsın. Açıkça görülebileceği gibi, bu sistemin durum geçiş fonksiyonu

$$\phi(k, r) = \frac{w(k)}{w(r)}$$

şeklindedir. Örneğin amacına uygun bir fonksiyon

$$w(k) := \exp\left(-\frac{k}{2} [1 - (-1)^k]\right)$$

şeklinde seçilebilir. O halde,

$$x_k = \exp\left(-\frac{k}{2} [1 - (-1)^k]\right) \exp\left(\frac{r}{2} [1 - (-1)^r]\right) x_r$$

elde edilir. Açıkça görülebileceği gibi

$$|x_k| \leq \exp\left(\frac{r}{2} [1 - (-1)^r]\right) |x_r|, \quad \forall k \geq r$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca, k çift olduğunda eşitsizlik, eşitliğe dönüşür. Yani eşitsizlik sıkıdır. Eğer r tek ise eşitsizlik

$$|x_k| \leq e^r |x_r|, \quad \forall k \geq r$$

şekline dönüşür. Bu eşitsizlik r çift iken de geçerlidir. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta = \delta(\varepsilon, r) := \varepsilon e^{-r}$$

seçimi ile 0 denge noktasının Lyapunov anlamında kararlı olduğu gösterilebilir. Çünkü,

$$|x_r| < \delta = \varepsilon e^{-r} \Rightarrow |x_k| \leq e^r |x_r| < \varepsilon, \quad \forall k \geq r$$

elde edilir. Ancak, δ seçimi r 'den bağımsız yapılamaz. Çünkü r tek ise

$$|x_{r+1}| = e^r |x_r|$$

olmaktadır. Demek ki verilen bir $\varepsilon > 0$ için r 'den bağımsız olarak seçilmiş olan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ne kadar küçük olursa olsun, yeterince büyük bir r için $|x_{r+1}| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanamamaktadır.

Yukarıdaki örnekten anlaşılabileceği gibi Lyapunov anlamında kararlılığın "düzgün" olması, zamanla değişen doğrusal sistemler için de her zaman sağlanmayan bir özelliktir.

Tanımı gereği, Lyapunov anlamında kararlılık denge noktasının yerel bir özelliğidir. Yani bu tanım, sistemin denge noktasına yeterince yakın çözümleri için anlamlıdır. Ancak, zamanla değişen doğrusal sistemler için globallik, yani başlangıç durumlarından bağımsız olma, doğal olarak gelmektedir. Bu nedenle, zamanla değişen doğrusal sistemler için sıfır denge noktasının kararlılığı yerine sistemin kararlılığından bahsedilebilir.

Tanım 3.2 (Lyapunov Anlamında Kararlılık [17, Tanım 22.1]). Eğer her $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı ve her $x_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumu için

$$|x_k| \leq \gamma |x_r|, \quad \forall k \geq r \quad (3.6)$$

koşulunu sağlayan sonlu bir $\gamma = \gamma(r) > 0$ varsa (3.2) sistemi *Lyapunov anlamında kararlıdır* denir. Ayrıca, $\gamma > 0$, r 'den bağımsız seçilebiliyorsa (3.2) sistemi *Lyapunov anlamında düzgün kararlıdır* denir.

Açıkça gözükmesi de yukarıdaki tanım, zamanla değişen doğrusal sistemler için Tanım 3.1 ile denktir. Bu durum, aşağıdaki teorem ile kanıtlanmıştır.

Teorem 3.1. *Zamanla değişen doğrusal (3.2) sistemi için Tanım 3.1 ve Tanım 3.2 birbirine denktir.*

Kanıt. ($\Leftarrow$) Keyfi seçilen $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı ve $x_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumu için $\gamma(r) > 0$,

$$|x_k| \leq \gamma(r) |x_r|, \quad \forall k \geq r$$

eşitsizliğini sağlasın. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\delta := \varepsilon/\gamma(r)$ olsun. O halde,

$$|x_r| < \delta = \frac{\varepsilon}{\gamma(r)} \Rightarrow |x_k| \leq \gamma(r) |x_r| < \varepsilon, \quad \forall k \geq r$$

elde edilir. Ayrıca $\gamma > 0$, r 'den bağımsızsa δ da r 'den bağımsız olur.

($\Rightarrow$) Keyfi seçilen $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı ve $\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon, r) > 0$,

$$|x_r| < \delta(\varepsilon, r) \Rightarrow |x_k| < \varepsilon, \quad \forall k \geq r$$

koşulunu sağlasın. O halde,

$$|x_k| \leq \|\Phi(k, r)\| |x_r| < \|\Phi(k, r)\| \delta(\varepsilon, r) \Rightarrow |x_k| < \varepsilon, \quad \forall k \geq r$$

koşulu sağlanmalıdır. Demek ki,

$$\|\Phi(k, r)\| \delta(\varepsilon, r) \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq r$$

eşitsizliği geçerlidir. O halde keyfi seçilen $\tilde{x}_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumu için,

$$|x_k| \delta(\varepsilon, r) \leq \|\Phi(k, r)\| |\tilde{x}_r| \delta(\varepsilon, r) \leq \varepsilon |\tilde{x}_r|, \quad \forall k \geq r$$

sağlanır. Son olarak,

$$|x_k| \leq \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon, r)} |\tilde{x}_r|, \quad \forall k \geq r$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik tüm olası (δ, ε) çiftleri için geçerli olduğundan keyfi bir (δ, ε) seçimi için $\gamma(r) := \varepsilon/\delta(\varepsilon, r)$ tanımı yapılabilir. Ayrıca, eğer δ, r 'den bağımsızsa γ da r 'den bağımsız olur. Başlangıç durumu $\tilde{x}_r$ keyfi olduğundan bu γ seçimi ile teorem kanıtlanmış olur. $\square$

Örnek 3.1 için $\gamma(r) := e^r$ seçilebilir. Ayrıca, r tek ise $|x_{r+1}| = e^r |x_r|$ olduğundan γ, r 'den bağımsız seçilemez. Yani örnekte verilen sistem Lyapunov anlamında kararlı olmasına rağmen Lyapunov anlamında düzgün kararlı değildir.

Zamanla değişen doğrusal sistemler için durum geçiş matrisi üzerinden bir başka Lyapunov anlamında kararlılık koşulu aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.2 ([17, Teorem 22.4]). *Zamanla değişen doğrusal (3.2) sisteminin Lyapunov anlamında kararlı olması için gerek ve yeter koşul, tüm $k, r \in \mathbb{N}$ için*

$$\|\Phi(k, r)\| \leq \gamma, \quad \forall k \geq r \quad (3.7)$$

eşitsizliğini sağlayan sonlu bir $\gamma = \gamma(r) > 0$ olmasıdır. Ayrıca, sistemin Lyapunov anlamında düzgün kararlı olması için gerek ve yeter koşul γ 'nın r 'den bağımsız seçilebilmesidir.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Keyfi seçilen $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı için $\gamma(r) > 0$,

$$\|\Phi(k, r)\| \leq \gamma(r), \quad \forall k \geq r$$

eşitsizliğini sağlasın. O halde keyfi seçilen $x_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumu için,

$$|x_k| \leq \|\Phi(k, r)\| |x_r| \leq \gamma(r) |x_r|, \quad \forall k \geq r$$

eşitsizliği elde edilir. Tanım 3.2 gereği sistem Lyapunov anlamında (düzgün) kararlıdır.

$(\Leftarrow)$ Sistem Lyapunov anlamında (düzgün) kararlı olsun. Verilen bir $r, s \in \mathbb{N}$ ve $s \geq r$ için $\tilde{x}_r$,

$$|\tilde{x}_r| = 1 \text{ ve } |\Phi(s, r)\tilde{x}_r| = \|\Phi(s, r)\|$$

şeklinde seçilsin. İndüklenmiş matris normu için böyle bir seçim her zaman yapılabilir. O halde Tanım 3.2 gereği,

$$|x_s| = |\Phi(s, r)\tilde{x}_r| = \|\Phi(s, r)\| |\tilde{x}_r| = \gamma(r)$$

eşitsizliğini sağlayan sonlu bir $\gamma(r) > 0$ vardır. Her $r, s \in \mathbb{N}$ ve $s \geq r$ için yukarıdaki özellikte bir $\tilde{x}_r$ seçilebileceğinden teorem kanıtlanmış olur. $\square$

Yukarıdaki tartışmaların tamamı özel bir $\mathcal{H} := \{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ seçimi için düzensiz örneklemeli (3.3) sistemi için de geçerlidir. Ancak, birçok uygulamada tüm olası $\mathcal{H}$ seçimleri için sistemin kararlılığı istenmektedir. Bu nedenle, keyfi örneklemeye altında kararlılık kavramı tanımlanmaktadır.

Tanım 3.3 (Keyfi Örneklemeye Altında Lyapunov Anlamında Kararlılık). Verilen bir $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ ve tüm $\mathcal{H} := \{h_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}}$ örneklemeye aralığı dizileri için elde edilen (3.3) formundaki sistemlerin tamamı Lyapunov anlamında kararlıysa, (3.3) sistemi *keyfi örneklemeye altında Lyapunov anlamında düzgün kararlıdır* denir.

3.1.2 Asimptotik kararlılık

Lyapunov anlamında kararlılık, tanımı gereği çözümlerin denge noktasına yaklaşmasını garantilemez. Ancak, birçok problem için bu istenen bir durumdur. Bu nedenle asimptotik kararlılık kavramı tanımlanmaktadır.

Tanım 3.4 (Asimptotik Kararlılık [39, Tanım 5.1]). Zamanla değişen doğrusal olmayan (3.1) sisteminin 0 denge noktası;

- i. Lyapunov anlamında kararlı ve tüm $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı ve tüm $|x_r| < \beta(r)$ koşulunu sağlayan başlangıç durumları için $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = 0$ yapan sonlu bir $\beta(r) > 0$ varsa *asimptotik kararlıdır*,
- ii. Lyapunov anlamında düzgün kararlı ve tüm $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı, tüm $|x_r| < \beta$ koşulunu sağlayan başlangıç durumları ve her $\eta > 0$ için

$$|x_k| < \eta, \quad \forall k \geq r + R(\eta) \quad (3.8)$$

koşulunu sağlayan r 'den bağımsız bir $R = R(\eta) \in \mathbb{N}$ ve r 'den bağımsız sonlu bir $\beta > 0$ varsa *düzgün asimptotik kararlıdır*,

- iii. Lyapunov anlamında düzgün kararlı, $\delta(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$ koşulunu sağlayacak şekilde seçilebiliyorsa ve tüm $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı ve her $\eta, \beta > 0$ için

$$|x_k| < \eta, \quad \forall k \geq r + R(\eta, \beta), \quad \forall |x_r| < \beta \quad (3.9)$$

koşulunu sağlayan r 'den bağımsız bir $R = R(\eta, \beta) \in \mathbb{N}$ varsa *global düzgün asimptotik kararlıdır* denir.

Yukarıdaki tanımlarda verilen (3.8) koşulunun $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = 0$ limit koşulu ile aynı olduğu düşünülebilir. Ancak, (3.8) koşulu limitin " r ile düzgün" bir şekilde 0'a gideceği bilgisini de içerdiğinden daha sıkı bir koşuldur. Bu fark, aşağıdaki örnek ile gösterilebilir.

Örnek 3.2. $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı için

$$x_{k+1} = \frac{k}{k+1} x_k, \quad \forall k \geq r \quad (3.10)$$

skaler doğrusal sistem ele alınsın. Açıkça görülebileceği gibi, bu sistemin çözümü

$$x_k = \frac{r}{k} x_r$$

şeklinindedir. Demek ki her $r \in \mathbb{N}$ ve her $x_r \in \mathbb{R}$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = 0$ koşulu sağlanmaktadır. Bu koşulun eşdeğeri, her $\eta > 0$ için

$$|x_k| < \eta, \quad \forall k \geq r + R(\eta, r) \quad (3.11)$$

eşitsizliğini sağlayan $R(\eta, r) \in \mathbb{N}$ sayısının varlığıdır. Nitekim, $|x_r| < \beta$ için

$$|x_k| = \frac{r}{k} |x_r| < \frac{r\beta}{k} < \eta, \quad \forall k \geq r + R(\eta, r) \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $R(\eta, r)$ seçilmelidir. Tek bir $\beta > 0$ varlığı yeterli olduğu için herhangi bir β seçilebilir. O halde,

$$\frac{r\beta}{k} < \eta \Leftrightarrow k > \frac{r\beta}{\eta} \Leftrightarrow k > r + \frac{r(\beta - \eta)}{\eta} \quad (3.13)$$

olacağından $\lceil \cdot \rceil$ tavan fonksiyonu olmak üzere

$$R(\eta, r) := \begin{cases} 0 & , \eta \geq \beta \text{ ise} \\ \left\lceil \frac{r(\beta - \eta)}{\eta} \right\rceil & , \eta < \beta \text{ ise} \end{cases} \quad (3.14)$$

şeklinde seçilebilir. Bu seçim sistemin asimptotik kararlı olduğunu kanıtlamaktadır. Ne var ki, R, r 'den bağımsız seçilemez. Çünkü, seçilen bir $\beta > 0$ ve verilen bir $\eta < \beta$ için, seçilen R ne kadar büyük olursa olsun, yeterince büyük bir r için (3.13) koşulu sağlanmaz. Demek ki sistem düzgün asimptotik kararlı değildir.

Benzer şekilde verilen (3.9) koşulu da $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = 0, \forall x_r \in \mathbb{R}^n$ koşulundan daha sıkıdır ve yine limitin " r ile düzgün" bir şekilde 0'a gideceği bilgisini içerir. Kanıtlarda kolaylık sağlaması açısından yukarıdaki tanımlara eşdeğer daha formel tanımlar aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 3.5 (Asimptotik Kararlılık). Zamanla değişen doğrusal olmayan (3.1) sisteminin 0 denge noktası;

i. eğer tüm $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı için;

(a) her bir $\varepsilon > 0$ için

$$|x_r| < \delta(\varepsilon, r) \Rightarrow |x_k| < \varepsilon, \quad \forall k \geq r$$

koşulunu sağlayan $\delta(\varepsilon, r) > 0$ varsa ve

(b) her bir $\eta > 0$ için

$$|x_k| < \eta, \quad \forall k \geq r + R(\eta, r), \quad \forall |x_r| < \beta(r)$$

koşulunu sağlayan $R(\eta, r) \in \mathbb{N}$ ve $\beta(r) > 0$ varsa *asimptotik kararlıdır*,

ii. eğer tüm $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı için;

(a) her bir $\varepsilon > 0$ için

$$|x_r| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x_k| < \varepsilon, \quad \forall k \geq r$$

koşulunu sağlayan $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa ve

(b) her bir $\eta > 0$ için

$$|x_k| < \eta, \quad \forall k \geq r + R(\eta), \quad \forall |x_r| < \beta$$

koşulunu sağlayan $R(\eta) \in \mathbb{N}$ ve $\beta > 0$ varsa *düzgün asimptotik kararlıdır*,

iii. eğer tüm $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı için;

(a) her bir $\varepsilon > 0$ için

$$|x_r| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x_k| < \varepsilon, \quad \forall k \geq r$$

koşulunu sağlayan $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa ve

(b) bu $\delta(\varepsilon)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$$

şeklinde seçilebiliyorsa ve

(c) her bir $\eta > 0$ ve $\beta > 0$ için

$$|x_k| < \eta, \quad \forall k \geq r + R(\eta, \beta), \quad \forall |x_r| < \beta$$

koşulunu sağlayan $R(\eta, \beta) \in \mathbb{N}$ varsa *global düzgün asimptotik kararlıdır* denir.

Tanımlardan anlaşılacağı üzere, yerel olarak asimptotik kararlı olan bir denge noktası, global olarak asimptotik kararlı olmayabilir. Ancak, zamanla değişen doğrusal sistemler için globallik doğal olarak gelmektedir. Bu nedenle, bu tür sistemler için denge noktasının asimptotik kararlılığı yerine sistemin asimptotik kararlılığından bahsedilebilir.

Tanım 3.6 (Asimptotik Kararlılık [17, Tanım 22.13]). Zamanla değişen doğrusal (3.2) sistemi;

i. eğer her $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı ve her $x_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumu için;

(a)

$$|x_k| \leq \gamma(r) |x_r|, \quad \forall k \geq r$$

koşulunu sağlayan $\gamma(r) > 0$ varsa ve

(b) her $\alpha > 0$ için

$$|x_k| < \alpha |x_r|, \quad \forall k \geq r + R(\alpha, r)$$

eşitsizliğini sağlayan $R(\alpha, r) \in \mathbb{N}$ varsa *asimptotik kararlıdır*,

ii. eğer her $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı ve her $x_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumu için;

(a)

$$|x_k| \leq \gamma |x_r|, \quad \forall k \geq r$$

koşulunu sağlayan $\gamma > 0$ varsa ve

(b) her $\alpha > 0$ için

$$|x_k| < \alpha |x_r|, \quad \forall k \geq r + R(\alpha)$$

eşitsizliğini sağlayan $R(\alpha) \in \mathbb{N}$ varsa *global düzgün asimptotik kararlıdır* denir.

Lyapunov anlamında kararlılık için benzer şekilde yukarıdaki tanım, zamanla değişen doğrusal sistemler için Tanım 3.5 ile denktir. Bu durum aşağıdaki teoremler ile üç parçada kanıtlanmıştır.

Teorem 3.3. *Zamanla değişen doğrusal (3.2) sistemi için Tanım 3.5-i ve Tanım 3.6-i birbirine denktir.*

Kanıt. Tanım 3.5-i-(a) ve Tanım 3.6-i-(a) denkliği Teorem 3.1 ile gösterilmiştir. O halde, Tanım 3.5-i-(b) ve Tanım 3.6-i-(b) denkliğini göstermek yeterlidir.

($\Leftarrow$) Tanım 3.6-i-(b) koşulu sağlansın. Özel olarak $|x_r| < 1$ olan başlangıç koşulları için de koşul sağlanır. Verilen bir $\eta > 0$ için $\alpha := \eta$ seçimi yapılsın. O halde,

$$|x_k| < \alpha |x_r| < \alpha = \eta, \quad \forall k \geq r + \tilde{R}(\alpha, r)$$

eşitsizliğini sağlayan $\tilde{R}(\alpha, r) \in \mathbb{N}$ vardır. Demek ki $\beta(r) := 1$ ve $R(\eta, r) := \tilde{R}(\alpha, r)$ seçimleriyle Tanım 3.5-i-(b) koşulu sağlanır.

($\Rightarrow$) Tanım 3.5-i-(b) koşulu sağlansın. O halde, keyfi seçilen bir $r \in \mathbb{N}$ için koşulun sağlandığı bir $\beta(r) > 0$ vardır. Verilen bir $\alpha > 0$ için $\eta := \alpha\beta(r)/2$ seçimi yapılsın. Yine bu seçim için Tanım 3.5-i-(b) koşulunu sağlayan bir $\tilde{R}(\eta, r) \in \mathbb{N}$ vardır. Sabit ve keyfi bir $s \in \mathbb{N}$, $s \geq r + \tilde{R}(\eta, r)$ için $\tilde{x}_r$,

$$|\Phi(s, r)\tilde{x}_r| = \|\Phi(s, r)\| |\tilde{x}_r| \quad \text{ve} \quad |\tilde{x}_r| = \beta(r)/2$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde seçilsin. İndüklenmiş matris normu için böyle bir seçim her zaman yapılabilir. O halde,

$$|x_s| = |\Phi(s, r)\tilde{x}_r| = \|\Phi(s, r)\| |\tilde{x}_r| = \|\Phi(s, r)\| \beta(r)/2 < \eta = \alpha\beta(r)/2$$

ve eşdeğer olarak $\|\Phi(s, r)\| < \alpha$ elde edilir. Her $s \geq r + \tilde{R}(\eta, r)$ seçimi için bu eşitsizlik geçerli olacağından, keyfi bir $x_r \in \mathbb{R}^n$ için $R(\alpha, r) := \tilde{R}(\eta, r)$ seçimi ile

$$|x_k| \leq \|\Phi(k, r)\| |x_r| < \alpha |x_r|, \quad \forall k \geq r + R(\alpha, r)$$

eşitsizliği gösterilebilir. Bu da kanıtı tamamlar. □

Teorem 3.4. *Zamanla değişen doğrusal (3.2) sistemi için Tanım 3.5-ii ve Tanım 3.6-ii birbirine denktir.*

Kanıt. Teorem 3.3 ile birebir aynı biçimde kanıtlanabilir. $\square$

Teorem 3.5. *Zamanla değişen doğrusal (3.2) sistemi için Tanım 3.5-iii ve Tanım 3.6-ii birbirine denktir.*

Kanıt. Tanım 3.6-ii-(a) $\Rightarrow$ Tanım 3.5-iii-(a) önermesi Teorem 3.1 ile gösterilmiştir. Teorem 3.1'in kanıtında bir $\gamma > 0$ seçimi için $\delta(\varepsilon) := \varepsilon/\gamma$ şeklinde seçildiğinden Tanım 3.6-ii-(a) $\Rightarrow$ Tanım 3.5-iii-(b) önermesi de kanıtlanmış olur.

Tanım 3.6-ii-(b) $\Rightarrow$ Tanım 3.5-iii-(c) önermesini kanıtlamak için verilen $\eta > 0$ ve $\beta > 0$ için $\alpha := \eta/\beta$ seçimi yapılsın. Özel olarak $|x_r| < \beta$ başlangıç koşulları için

$$|x_k| < \alpha |x_r| < \alpha\beta = \eta, \quad \forall k \geq r + \tilde{R}(\alpha)$$

eşitsizliğini sağlayan $\tilde{R}(\alpha) \in \mathbb{N}$ vardır. Demek ki $R(\eta, \beta) := \tilde{R}(\eta/\beta)$ seçimiyle önerme kanıtlanmış olur.

Tanım 3.5-iii-(a) $\Rightarrow$ Tanım 3.6-ii-(a) önermesi Teorem 3.1 ile gösterilmiştir.

Tanım 3.5-iii-(c) $\Rightarrow$ Tanım 3.6-ii-(b) önermesi ise Teorem 3.3 kanıtına benzer biçimde yapılabilir. Tek fark $\beta > 0$ 'ın keyfi seçilebilmesidir. $\square$

Yukarıdaki teoremlerden anlaşılacağı üzere, zamanla değişen doğrusal sistemler için düzgün asimptotik kararlılık ile global düzgün asimptotik kararlılık birbirine denktir.

Bir önceki bölümdekine benzer şekilde, yukarıdaki tartışmaların tamamı özel bir $\mathcal{H} := \{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ seçimi için düzensiz örneklemeli (3.3) sistemi için de geçerlidir. Ancak, tüm olası $\mathcal{H}$ seçimleri için sistemin kararlılığı istenebilir. Bu nedenle, keyfi örnekleme altında asimptotik kararlılık kavramı tanımlanmaktadır.

Tanım 3.7 (Keyfi Örnekleme Altında Asimptotik Kararlılık). Verilen bir $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ ve tüm $\mathcal{H} := \{h_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}}$ örnekleme aralığı dizileri için elde edilen (3.3) formundaki sistemlerin tamamı asimptotik kararlıysa, (3.3) sistemi *keyfi örnekleme altında global düzgün asimptotik kararlıdır* denir.

3.1.3 Üstel kararlılık

Asimptotik kararlılık çözümlerin yeterince büyük zaman sonra denge noktasına yaklaşacağını garantilese de bu yaklaşımın nasıl bir hızda olacağı hakkında bir sınırlamada bulunmaz. Çözümlerin üstel olarak azalan bir zarf içinde kalarak denge noktasına yaklaştığını göstermek için üstel kararlılık tanımı verilmektedir.

Literatürde [40] gibi bazı örnekler dışında genelde sadece düzgün üstel kararlılık tanımları verilmektedir. Bu çalışmada da sadece düzgün üstel kararlılık üzerinde durulacaktır.

Tanım 3.8 (Düzgün Üstel Kararlılık [39, Tanım 5.3]). Zamanla değişen doğrusal olmayan (3.1) sisteminin 0 denge noktası, tüm $r \in \mathbb{N}$ başlangıç zamanı ve tüm $|x_r| < \beta$ koşulunu sağlayan başlangıç durumları için

$$|x_k| \leq \gamma \lambda^{k-r} |x_r|, \quad \forall k \geq r \quad (3.15)$$

koşulunu sağlayan $\beta, \gamma > 0$ ve $0 \leq \lambda < 1$ sayıları varsa *düzgün üstel kararlıdır* denir. Eğer, (3.15) koşulu tüm $x_r \in \mathbb{R}^n$ için sağlanıyorsa 0 denge noktası *global düzgün üstel kararlıdır* denir.

Üstel kararlılık tanımı, zamanla değişen doğrusal sistemler için de aynı şekilde verilmektedir. Ancak, diğer kararlılık tanımlarına benzer şekilde, bu sistemler için globallik doğal olarak gelmektedir. Bu durum, geçiş matrisi üzerinden üstel kararlılık koşulu veren aşağıdaki teoremin bir sonucu olarak kolayca görülebilmektedir. Bu nedenle "0 denge noktasının kararlılığı" yerine "sistemin kararlılığı" kavramı tanımlanmadan kullanılmıştır.

Teorem 3.6 ([17, Teorem 22.7]). Zamanla değişen doğrusal (3.2) sisteminin düzgün üstel kararlı olması için gerek ve yeter koşul, tüm $k, r \in \mathbb{N}$ için

$$\|\Phi(k, r)\| \leq \gamma \lambda^{k-r}, \quad \forall k \geq r \quad (3.16)$$

eşitsizliğini sağlayan sonlu $\gamma > 0$ ve $0 \leq \lambda < 1$ sayılarının olmasıdır.

Kanıt. $(\Leftarrow)$ (3.16) eşitsizliğini sağlayan sonlu $\gamma > 0$ ve $0 \leq \lambda < 1$ sayıları var olsun.

Keyfi $r \in \mathbb{N}$ ve $x_r \in \mathbb{R}^n$ için

$$|x_k| \leq \|\Phi(k, r)\| |x_r| \leq \gamma \lambda^{k-r} |x_r|, \quad \forall k \geq r$$

elde edilir. Demek ki, herhangi bir $\beta > 0$ seçimi ile sistemin üstel kararlı olduğu gösterilmiş olur.

($\Rightarrow$) Sistem düzgün üstel kararlı olsun. Keyfi bir $k, r \in \mathbb{N}, k \geq r$ için $\tilde{x}_r$,

$$|\Phi(k, r)\tilde{x}_r| = \|\Phi(k, r)\| |\tilde{x}_r| \quad \text{ve} \quad |\tilde{x}_r| = \beta/2$$

olacak şekilde seçilsin. İndüklenmiş matris normu için böyle bir seçim her zaman yapılabilir. O halde tanım gereği,

$$|x_k| = |\Phi(k, r)\tilde{x}_r| = \|\Phi(k, r)\| |\tilde{x}_r| \leq \gamma \lambda^{k-r} |\tilde{x}_r| \Rightarrow \|\Phi(k, r)\| \leq \gamma \lambda^{k-r}$$

elde edilir. Her k için bu eşitsizlik geçerli olduğundan kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Yukarıdaki kanıtın ilk kısmında başlangıç durumları keyfi seçilebildiği için sistemin global düzgün üstel kararlı olduğu da gösterilmiştir.

Üstel kararlı bir sistemin aynı zamanda asimptotik kararlı olacağına sezgisel olarak ikna olunabilir. Benzer şekilde asimptotik kararlı bir sistemin, üstel kararlı olamayabileceği düşünülebilir. Nitekim, Örnek 3.2’de verilen sistem asimptotik kararlı olmasına rağmen üstel kararlı değildir. Çünkü; eğer sistem üstel kararlı olsaydı, $r = 1$ için

$$\frac{1}{k} \leq \gamma \lambda^{k-1}, \quad \forall k \geq r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\gamma} \leq k \lambda^{k-1}, \quad \forall k \geq r$$

eşitsizliğini sağlayan $\gamma > 0$ ve $0 \leq \lambda < 1$ olması gerekirdi. Ancak, eşitsizliğin sağ tarafı k büyüdükçe sifıra yaklaştığından, eşitsizliği sağlayan sonlu bir γ yoktur.

Ne var ki, zamanla değişen doğrusal sistemler için asimptotik kararlılık eğer düzgünse, üstel kararlılığa denktir. Bu ilginç sonuç aşağıdaki teorem ile kanıtlanabilir.

Teorem 3.7 ([17, Teorem 22.14]). *Zamanla değişen doğrusal (3.2) sisteminin global düzgün üstel kararlı olması için gerek ve yeter koşul sistemin global düzgün asimptotik kararlı olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) (3.2) sistemi global düzgün üstel kararlı olsun. O halde, her $r \in \mathbb{N}$ ve her $x_r \in \mathbb{R}^n$ için

$$|x_k| \leq \gamma \lambda^{k-r} |x_r|, \quad \forall k \geq r$$

koşulunu sağlayan $\gamma > 0$ ve $0 \leq \lambda < 1$ sayıları vardır. Bunun sonucu olarak $|x_k| \leq \gamma |x_r|$ elde edilir ve Tanım 3.6-ii-(a) koşulu sağlanmış olur. Verilen bir $\alpha > 0$ için $\lambda^{R(\alpha)} < \alpha/\gamma$

olacak şekilde bir $R(\alpha) \in \mathbb{N}$ seçilebilir. $0 \leq \lambda < 1$ olduğundan böyle bir seçim her zaman vardır. O halde

$$|x_k| \leq \gamma \lambda^{k-r} |x_r| \leq \gamma \lambda^{R(\alpha)} |x_r| < \alpha |x_r|, \quad \forall k \geq r + R(\alpha)$$

eşitsizliği ile Tanım 3.6-ii-(b) koşulu da sağlanmış olur.

($\Leftarrow$) (3.2) sistemi global düzgün asimptotik kararlı olsun. Tanım gereği, sistem aynı zamanda Lyapunov anlamında düzgün kararlıdır. O halde, Teorem 3.2 gereği tüm $k, r \in \mathbb{N}$ için

$$\|\Phi(k, r)\| \leq \tilde{\gamma}, \quad \forall k \geq r \quad (3.17)$$

koşulunu sağlayan sonlu bir $\tilde{\gamma} > 0$ vardır. $\alpha := 1/2$ seçilsin. O halde, her $r \in \mathbb{N}$ ve her $x_r \in \mathbb{R}^n$ için

$$|x_k| < \frac{1}{2} |x_r|, \quad \forall k \geq r + R$$

eşitsizliğini sağlayan bir $R \in \mathbb{N}$ vardır. Keyfi bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$|\Phi(r + R, r)\tilde{x}_r| = \|\Phi(r + R, r)\| |\tilde{x}_r| \quad \text{ve} \quad |\tilde{x}_r| = 1$$

olacak şekilde $\tilde{x}_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumu seçilsin. İndüklenmiş matris normu için böyle bir seçim her zaman yapılabilir. O halde,

$$|x_{r+R}| = |\Phi(r + R, r)\tilde{x}_r| = \|\Phi(r + R, r)\| < \frac{1}{2} \quad (3.18)$$

elde edilir. r 'nin seçimi keyfi olduğundan yukarıdaki eşitsizlik tüm $r \in \mathbb{N}$ için geçerlidir.

(3.17) ve (3.18) eşitsizliklerindeki üst sınırlar kullanılarak

$$\begin{aligned} \|\Phi(k, r)\| &\leq \tilde{\gamma}, \quad k = r, \dots, r + R - 1 \\ \|\Phi(k, r)\| &\leq \|\Phi(k, r + R)\| \|\Phi(r + R, r)\| \\ &\leq \frac{\tilde{\gamma}}{2}, \quad k = r + R, \dots, r + 2R - 1 \\ \|\Phi(k, r)\| &\leq \|\Phi(k, r + 2R)\| \|\Phi(r + 2R, r + R)\| \|\Phi(r + R, r)\| \\ &\leq \frac{\tilde{\gamma}}{2^2}, \quad k = r + 2R, \dots, r + 3R - 1 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde her $r, q \in \mathbb{N}$ için

$$\|\Phi(k, r)\| \leq \frac{\tilde{\gamma}}{2^q}, \quad k = r + qR, \dots, r + (q + 1)R - 1 \quad (3.19)$$

elde edilir. O halde $\gamma := 2\tilde{\gamma}$ ve $\lambda := (1/2)^{1/R}$ seçimleriyle

$$\|\Phi(k, r)\| \leq \frac{\tilde{\gamma}}{2^q} = \gamma (1/2)^{q+1} = \gamma \lambda^{(q+1)R} \leq \gamma \lambda^{k-r}, \quad k = r + qR, \dots, r + (q + 1)R - 1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik tüm $r, q \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan Teorem 3.6 gereği kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Yukarıdaki kanıt ile asimptotik kararlılığın düzgün olmasının önemi ortaya çıkmaktadır. Çünkü, eğer asimptotik kararlılık düzgün olmasaydı kanıtta kullanılan R , r 'den bağımsız olarak seçilemeyeceğinden (3.18) eşitsizliğine ulaşılamazdı.

Yukarıdaki tartışmaların tamamı özel bir $\mathcal{H} := \{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ seçimi için düzensiz örneklemeli (3.3) sistemi için de geçerlidir. Tüm olası $\mathcal{H}$ seçimleri için sistemin üstel kararlı olması istenebilir. Bu nedenle, keyfi örnekleme altında üstel kararlılık kavramı tanımlanmaktadır.

Tanım 3.9 (Keyfi Örnekleme Altında Üstel Kararlılık). Verilen bir $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ ve tüm $\mathcal{H} := \{h_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}}$ örnekleme aralığı dizileri için elde edilen (3.3) formundaki sistemlerin tamamı düzgün üstel kararlıysa, (3.3) sistemi *keyfi örnekleme altında global düzgün üstel kararlıdır* denir.

3.1.4 Sonuçlar

Literatürde birçok kaynakta verilmiş olan kararlılık tanımları bu bölümde özetlenmiş ve özel durumlar için bu tanımların denklikleri verilmiştir. Bu tanımlar haricinde ele alınan probleme uygun olan daha birçok farklı kararlılık tanımı literatürde verilmektedir [41].

Bu çalışma kapsamında, zamanla değişen doğrusal sistemlerin özel bir hali olan düzensiz örneklemeli sistemler ile ilgilenilmektedir. Bu nedenle, çalışmanın geri kalanında düzensiz örneklemeli doğrusal sistemler için *sistemin kararlılığı* kavramı, sistemin *keyfi örnekleme altında global düzgün üstel kararlı* olduğunu ifade edecektir. Benzer şekilde çalışmanın geri kalanında zamanla değişen doğrusal sistemler için *sistemin kararlılığı* kavramı, sistemin *global düzgün üstel kararlı* olduğunu ifade edecektir.

3.2 Kararlılık Koşulları

Bu bölümde zamanla değişen doğrusal sistemler ve düzensiz örneklemeli doğrusal sistemler için kararlılık koşullarından bazıları özetlenecektir. Yani, bir $r \in \mathbb{N}$ başlangıç

zamanı için, $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ bir matris dizisi olmak üzere

$$x_{k+1} = F_k x_k, \quad \forall k \geq r \quad (3.20)$$

şeklinde verilmiş olan sistemler ile $h_{\max} \geq h_{\min} > 0$, $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ ve $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ matris değerli pürüzsüz (smooth) bir fonksiyon olmak üzere

$$x_{k+1} = F(h_k)x_k, \quad \forall k \geq r \quad (3.21)$$

şeklinde verilmiş olan sistemler için hem gerek ve yeter, hem de sadece yeter kararlılık koşulları verilecektir.

Zamanla değişmeyen doğrusal sistemler için sistem matrisinin özdeğerlerinin birim çember içinde olması, kararlılık için gerek ve yeter bir koşuldur. Literatürde iyi bilinen bu koşul, aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.8 ([17, Teorem 22.11]). $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere $F_k := F$, $\forall k \in \mathbb{N}$ sabit matris dizisi ele alınsın. O halde (3.20) sisteminin kararlı olmasının gerek ve yeter koşulu, F matrisinin tüm özdeğerlerinin birim çember içinde olmasıdır, yani $\lambda_i \in \lambda(F)$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $|\lambda_i| < 1$ olmasıdır. Başka bir deyişle F matrisinin spektral yarıçapı 1'den küçük olmalıdır, yani $\rho(F) := \max_i |\lambda_i| < 1$ olmalıdır.

Ancak, zamanla değişen doğrusal sistemler ve düzensiz örneklemeli sistemler için bu koşul yeterli değildir. Bu durumu gösteren bazı ilginç örnekler [5,19,34] çalışmalarında bulunabilir.

3.2.1 Gerek ve yeter kararlılık koşulları

Bu bölümde (3.20) ve (3.21) sistemlerinin kararlılığı için bazı gerek ve yeter koşullar verilecektir. Literatürde klasik olarak verilen gerek ve yeter koşullar durum geçiş matrisinin normu ve Lyapunov fonksiyonu üzerinden verilmektedir [17,31]. Bu çalışmada da bu koşullar kanıtları ile verilecektir.

Yukarıda bahsedilen klasik koşulların haricinde ayrık doğrusal parametre ile değişen (linear parameter-varying, LPV) sistem yaklaşımı ile geliştirilmiş daha birçok gerek ve yeter kararlılık koşulu literatürde mevcuttur [5]. Bu koşulların hepsindeki ana fikir, örnekleme zamanının bir fonksiyonu olan sistem matrislerinin kümesini içeren, sonlu sayıda matrisin dışbükey örtüsünün (convex hull) kararlılığını incelemektir [42].

Doğrusal fark kapsamasının (linear difference inclusion, LDI) kararlılık problemi olarak da bilinen bu problemin çözümü için birçok gerek ve yeter koşul geliştirilmiştir. Bu koşullardan birisi matrislerin tüm olası sonsuz çarpımlarının özdeğerlerini inceleyen birleşik spektral yarıçap (joint spectral radius) koşuludur [43]. Ayrıca bu probleme özel geliştirilmiş olan yarı-karesel (quasi-quadratic) [42], parametre bağımlı (parameter dependent) [44], yol bağımlı (path dependent) [35] ve birleşik karesel (composite quadratic) [45] Lyapunov fonksiyonu koşulları da mevcuttur. Daha detaylı bilgi için [46] ve [47] gibi kaynaklar incelenebilir.

Durum geçiş matrisinin normunu kullanan koşullardan biri Teorem 3.6 ile verilmişti. Bütünlük oluşturma açısından aynı teorem burada da kanıtsız biçimde verilecektir.

Teorem 3.9 ([17, Teorem 22.7]). *Zamanla değişen doğrusal (3.20) sisteminin (düzgün üstel) kararlı olması için gerek ve yeter koşul, tüm $k, r \in \mathbb{N}$ için*

$$\|\Phi(k, r)\| \leq \gamma \lambda^{k-r}, \quad \forall k \geq r \quad (3.22)$$

eşitsizliğini sağlayan sonlu $\gamma > 0$ ve $0 \leq \lambda < 1$ sayılarının olmasıdır.

Zamanla değişen doğrusal sistemler için Lyapunov eşitsizliği kullanan gerek ve yeter bir koşul aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.10 ([17, Teorem 23.3]). *Zamanla değişen doğrusal (3.20) sisteminin (düzgün üstel) kararlı olması için gerek ve yeter koşul, tüm $k \in \mathbb{N}$ için*

$$\eta I \leq P_k \leq \rho I \quad (3.23)$$

$$F_k^T P_{k+1} F_k - P_k \leq -\nu I \quad (3.24)$$

matris eşitsizliklerini sağlayan $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ simetrik $n \times n$ matris dizisi ve sonlu sabit $\eta, \rho, \nu > 0$ sayılarının var olmasıdır.

Kanıt. ($\Leftarrow$) Yukarıdaki eşitsizlikleri sağlayan $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ve $\eta, \rho, \nu > 0$ var olsun. Keyfi bir başlangıç zamanı $r \in \mathbb{N}$ seçilsin. (3.24) matris eşitsizliği gereği her $x_k \in \mathbb{R}^n$ için

$$x_k^T F_k^T P_{k+1} F_k x_k - x_k^T P_k x_k \leq -\nu x_k^T x_k, \quad \forall k \geq r$$

$$x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} - x_k^T P_k x_k \leq -\nu |x_k|^2, \quad \forall k \geq r$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. (3.23) eşitsizliği kullanılarak

$$x_k^T P_k x_k \leq \rho x_k^T x_k, \quad \forall k \geq r$$

$$-|x_k|^2 \leq -\frac{1}{\rho} x_k^T P_k x_k, \quad \forall k \geq r$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlik birleştirilirse,

$$\begin{aligned} x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} - x_k^T P_k x_k &\leq -\frac{\nu}{\rho} x_k^T P_k x_k, \quad \forall k \geq r \\ x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} &\leq \left(1 - \frac{\nu}{\rho}\right) x_k^T P_k x_k, \quad \forall k \geq r \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. Her durumda $F_k^T P_{k+1} F_k \geq 0$ olduğundan (3.23) ve (3.24) kullanılarak $\rho \geq \nu$ eşitsizliği görülebilir. Demek ki

$$0 \leq 1 - \frac{\nu}{\rho} < 1$$

olur. O halde $\lambda^2 := 1 - \nu/\rho$ seçimi ile (3.25) tekrar tekrar kullanılarak

$$x_k^T P_k x_k \leq \lambda^{2(k-r)} x_r^T P_r x_r, \quad \forall k \geq r$$

elde edilir. Tekrar (3.23) eşitsizliği kullanılarak

$$\eta |x_k|^2 \leq \rho \lambda^{2(k-r)} |x_r|^2, \quad \forall k \geq r$$

elde edilir. Her iki tarafın kare kökü alınırsa, $\gamma := \sqrt{\rho/\eta}$ seçimi ile Tanım 3.8 gereği sistemin kararlı olduğu gösterilmiş olur.

($\Rightarrow$) Sistem düzgün üstel kararlı olsun. O halde, Teorem 3.9 gereği tüm $s, k \in \mathbb{N}$ için

$$\|\Phi(s, k)\| \leq \gamma \lambda^{s-k}, \quad \forall s \geq k$$

eşitsizliğini sağlayan sonlu $\gamma > 0$ ve $0 \leq \lambda < 1$ sayıları vardır.

$$P_k := \sum_{s=k}^{\infty} \Phi^T(s, k) \Phi(s, k) \quad (3.26)$$

şeklinde tanımlanan matris dizisinin (3.23) ve (3.24) eşitsizliklerini sağladığı gösterilerek kanıt tamamlanacaktır. Tüm $k \in \mathbb{N}$ için P_k 'nin simetrik olduğu açıktır. $\lambda^2 < 1$ olduğundan, tüm $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|P_k\| \leq \sum_{s=k}^{\infty} \|\Phi(s, k)\|^2 \leq \sum_{s=k}^{\infty} \gamma^2 \lambda^{2(s-k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \gamma^2 \lambda^{2q} = \frac{\gamma^2}{1 - \lambda^2}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde, P_k iyi tanımlıdır, yani sonsuz toplam yakınsaktır. Ayrıca $\rho := \gamma^2/(1 - \lambda^2)$ şeklinde seçilebilir. Ek olarak,

$$P_k = I + \sum_{s=k+1}^{\infty} \Phi^T(s, k) \Phi(s, k)$$

şeklinde yazılabileceğinden tüm $k \in \mathbb{N}$ için $P_k \geq I$ olduğu açıktır. O halde, $\eta := 1$ seçilebilir. Son olarak, Teorem 2.2-ii ile verilen özellik kullanılarak

$$\begin{aligned} F_k^T P_{k+1} F_k &= \sum_{s=k+1}^{\infty} F_k^T \Phi^T(s, k+1) \Phi(s, k+1) F_k \\ &= \sum_{s=k+1}^{\infty} \Phi^T(s, k) \Phi(s, k) \\ &= P_k - I \end{aligned}$$

eşitliği kullanılarak

$$F_k^T P_{k+1} F_k - P_k = -I$$

elde edilir. O halde, $\nu := 1$ seçimi ile kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Yukarıdaki teoremden (3.23) ve (3.24) şeklinde verilmiş olan Lyapunov eşitsizlikleri, zamanla değişen sistemler için bu forma gelmektedir. Bu form, sistem çözümlerinin "düzgün" bir biçimde denge noktasını varmasını garantilemektedir. Bu duruma bir örnek, bir sonraki teoremden sonra verilecektir.

Zamanla değişen benzerlik dönüşümü kullanılarak yukarıdaki teoreme denk bir koşul aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.11. *Zamanla değişen doğrusal (3.20) sisteminin (düzgün üstel) kararlı olması için gerek ve yeter koşul, tüm $k \in \mathbb{N}$ için*

$$\|T_k\| \leq \alpha \text{ ve } \|T_k^{-1}\| \leq \beta \quad (3.27)$$

$$\|T_{k+1} F_k T_k^{-1}\| \leq \kappa \quad (3.28)$$

eşitsizliklerini sağlayan $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tersinir $n \times n$ matris dizisi, sabit sonlu $\alpha, \beta > 0$ ve sabit $\kappa < 1$ sayılarının var olmasıdır.

Kanıt. Verilen eşitsizliklerin Teorem 3.10'da verilen (3.23) ve (3.24) eşitsizliklerine denk olduğunu göstermek kanıt için yeterlidir.

($\Rightarrow$) (3.27) ve (3.28) eşitsizliklerini sağlayan T_k matrisleri ve α, β, κ sayıları var olsun. $P_k := T_k^T T_k$ seçilsin. Açıkça görülebileceği gibi P_k matrisleri tüm $k \in \mathbb{N}$ için simetrik ve pozitif tanımlıdır. (3.27) eşitsizliği ile

$$T_k^T T_k \leq \alpha^2 I \text{ ve } T_k^{-T} T_k^{-1} \leq \beta^2 I \Rightarrow \frac{1}{\beta^2} I \leq T_k^T T_k$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlik birleştirildiğinde

$$\frac{1}{\beta^2}I \leq P_k \leq \alpha^2 I$$

elde edilir. O halde $\eta := 1/\beta^2$ ve $\rho := \alpha^2$ tanımları ile (3.23) sağlanır. Benzer şekilde (3.28) eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} T_k^{-T} F_k^T T_{k+1}^T T_{k+1} F_k T_k^{-1} &\leq \kappa^2 I \\ F_k^T T_{k+1}^T T_{k+1} F_k &\leq \kappa^2 T_k^T T_k \\ F_k^T P_{k+1} F_k &\leq \kappa^2 P_k \\ F_k^T P_{k+1} F_k - P_k &\leq (\kappa^2 - 1) P_k \\ F_k^T P_{k+1} F_k - P_k &\leq -\frac{1 - \kappa^2}{\beta^2} I \end{aligned}$$

elde edilir. $\kappa^2 < 1$ olduğundan $\nu := (1 - \kappa^2)/\beta^2 > 0$ seçimi ile kanıt tamamlanır.

($\Leftarrow$) (3.23) ve (3.24) eşitsizliklerini sağlayan P_k matrisleri ve $\eta, \rho, \nu > 0$ sayıları var olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için P_k simetrik pozitif tanımlı olduğu için $P_k = T_k^T T_k$ eşitliğini sağlayan ve tersi olan T_k matrisleri bulunabilir. O halde, yukarıdakine benzer biçimde

$$T_k^T T_k \leq \rho I \quad \text{ve} \quad T_k^{-T} T_k^{-1} \leq \frac{1}{\eta} I$$

olduğundan $\alpha := \sqrt{\rho}, \beta := \sqrt{1/\eta}$ tanımları ile (3.27) elde edilir.

Ayrıca, (3.23) kullanılarak $-(1/\rho)P_k \geq -I$ olduğu kolayca görülebilir. O halde,

$$\begin{aligned} F_k^T P_{k+1} F_k - P_k &\leq -\nu I \\ F_k^T P_{k+1} F_k - P_k &\leq -\frac{\nu}{\rho} P_k \\ F_k^T T_{k+1}^T T_{k+1} F_k &\leq \left(1 - \frac{\nu}{\rho}\right) T_k^T T_k \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.10'un kanıtında da gösterildiği gibi $\rho \geq \nu$ eşitsizliği açıktır.

Demek ki $0 \leq 1 - \nu/\rho < 1$ olur. O halde, $\kappa := \sqrt{1 - \nu/\rho} < 1$ seçimi ile

$$\begin{aligned} T_k^{-T} F_k^T T_{k+1}^T T_{k+1} F_k T_k^{-1} &\leq \kappa^2 I \\ \|T_{k+1} F_k T_k^{-1}\| &\leq \kappa \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da kanıtı tamamlar. □

Yukarıdaki teoremlerde verilen (3.23) ve (3.27) koşulları yerine tüm $k \in \mathbb{N}$ için $0 < P_k$ ya da $\|T_k^{-1}\| < \infty$ koşullarının yeterli olacağı düşünülebilir. Ancak, aşağıdaki örnekten anlaşılacağı gibi, bu koşullar yeterli değildir.

Örnek 3.3. Skaler $x_{k+1} = x_k$ sistemi ele alınsın. $T_k := e^{-k}$ seçilsin. O halde, tüm $k \in \mathbb{N}$ için $P_k = e^{-2k} > 0$ ve $\|T_k^{-1}\| = e^k < \infty$ geçerlidir. Ayrıca,

$$\|T_{k+1}F_kT_k^{-1}\| = \|e^{-(k+1)}e^k\| = e^{-1} := \kappa < 1$$

olduğundan (3.28) sağlanır. Ancak, açıkça görüldüğü gibi sistem (üstel) kararlı değildir.

Benzer şekilde yukarıdaki teoremlerde verilen (3.24) ve (3.28) koşulları yerine tüm $k \in \mathbb{N}$ için $F_k^T P_{k+1} F_k - P_k < 0$ ya da eşdeğer olarak $\|T_{k+1}F_kT_k^{-1}\| < 1$ koşullarının yeterli olacağı düşünülebilir. Ancak, aşağıdaki örnekten anlaşılabileceği gibi, bu koşullar yeterli değildir.

Örnek 3.4. Örnek 3.2’de de verilen

$$x_{k+1} = \frac{k}{k+1}x_k$$

skaler sistemi ele alınsın. $T_k := 1$ seçilsin. O halde (3.27) koşulu sağlanır. Ayrıca, tüm $k \in \mathbb{N}$ için $\|T_{k+1}F_kT_k^{-1}\| = k/(k+1) < 1$ olur. Ancak, Örnek 3.2’de gösterildiği gibi sistem (düzgün asimptotik) kararlı değildir.

3.2.2 Yeter kararlılık koşulları

Birçok gerek ve yeter kararlılık koşulu var olsa da, pratikte bu koşulları sağlayan matrislerin bulunması oldukça zordur [19,35,36]. Bu nedenle pratikte uygulanabilir birçok yeter koşul literatürde verilmiştir [5,22]. Bu yöntemler en genel halde sürekli zaman ve ayrık zaman yöntemleri olarak ikiye ayrılabilir [6].

Sürekli zaman yöntemlerine örnek olarak giriş gecikmesi (input delay) yöntemi [48,49,50,51,52], küçük kazanç (small gain) yöntemi [53,54], dürtüsel sistem (impulsive system) yöntemi [23,55] ve döngülü fonksiyonel (looped functional) yöntemi [56,57,58,59] verilebilir. Bu yöntemlerin çoğunda sistemin sürekli modeli için özel formda verilmiş Lyapunov fonksiyonları kullanılarak kararlılığın sağlandığı gösterilmektedir.

Sistemin ayrık zaman modelini kullanan kararlılık koşulları için ortak karesel Lyapunov fonksiyonundan türetilen yöntemler sıklıkla kullanılmaktadır [6]. Bunlara örnek olarak ızgaralama (gridding) yöntemi [28,60], dayanıklı kontrol (robust control) yöntemi [27,61] ve integral karesel kısıt (integral quadratic constraint) yöntemi [62,63]

verilebilir. Ayrıca, sistem matrislerini ortak bir benzerlik dönüşümü ile üst üçgen hale getiren yöntemler de mevcuttur [64].

Bu bölümde, bir önceki bölümde verilen gerek ve yeter koşullar gevşetilerek kararlılık için bazı yeter koşullar verilecektir. Bu koşullardan biri iyi bilinen ortak karesel Lyapunov fonksiyonunun varlığı koşuludur. Bir diğeri ise buna eşdeğer olarak bu çalışmada geliştirilen ortak benzerlik dönüşümü koşuludur.

Teorem 3.10 ve Teorem 3.11’de verilen gerek ve yeter koşullardaki matrisleri sabit seçerek zamanla değişen doğrusal (3.20) sistemi için yeter kararlılık koşulları aşağıdaki iki teoremle verilebilir.

Teorem 3.12. *Eğer tüm $k \in \mathbb{N}$ için*

$$F_k^T P F_k - P \leq -\nu I$$

eşitsizliğini sağlayan bir simetrik, pozitif tanımlı $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi ve sonlu bir $\nu > 0$ varsa, (3.20) sistemi (düzgün üstel) kararlıdır.

Kanıt. Teorem 3.10’da $P_k := P$ seçilsin. $P = P^T > 0$ sabit olduğu için (3.23) koşulu halihazırda sağlanır. (3.24) koşulu da bu teoremin koşulu ile aynı olacağından kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 3.13. *Eğer tüm $k \in \mathbb{N}$ için*

$$\|T F_k T^{-1}\| \leq \kappa$$

eşitsizliğini sağlayan bir tersi olan $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi ve bir $\kappa < 1$ sayısı varsa, (3.20) sistemi (düzgün üstel) kararlıdır.

Kanıt. Teorem 3.11’de $T_k := T$ seçilsin. T sabit ve tersinir olduğu için (3.27) koşulu halihazırda sağlanır. (3.28) koşulu da bu teoremin koşulu ile aynı olacağından kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Aynı yeter koşullar düzensiz örneklemeli doğrusal sistemler için biraz daha gevşetilebilir. Düzensiz örneklemeli doğrusal (3.21) sistemi için yeter kararlılık koşulları aşağıdaki iki teoremle verilebilir.

Teorem 3.14. *Eğer tüm $h \in \mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ için*

$$\|TF(h)T^{-1}\| < 1$$

eşitsizliğini sağlayan bir tersi olan $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi varsa, (3.21) sistemi (düzensiz örnekleme altında düzgün üstel) kararlıdır.

Kanıt. Yukarıda verilen $\|TF(h)T^{-1}\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu $[h_{\min}, h_{\max}]$ kapalı aralığında süreklidir [65, Bölüm 4.2]. O halde, Uç Değer Teoremi'ne göre bu fonksiyonun bir maksimumu vardır [66, Bölüm 4, Teorem 1]. Bu maksimum değer

$$\kappa := \max_{h \in \mathbb{H}} \|TF(h)T^{-1}\|$$

şeklinde tanımlansın. Demek ki $\kappa < 1$ olmalıdır. Keyfi bir örnekleme aralığı dizisi $\mathcal{H} := \{h_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}}$ seçilsin. Bu seçim için $F_k := F(h_k)$ tanımı yapılarak tüm $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|TF_k T^{-1}\| \leq \kappa < 1$$

eşitsizliği sağlanır. O halde, $\mathcal{H}$ seçimi için sistem kararlıdır. Ancak bu seçim keyfi olduğundan tüm örnekleme aralık dizileri için de kararlılık sağlanır. O halde Teorem 3.13 gereği (3.21) sistemi kararlıdır. $\square$

Teorem 3.14 kullanılarak literatürde iyi bilinen ortak karesel Lyapunov fonksiyonu koşulunun bir başka kanıtı da bu çalışmada aşağıdaki gibi türetilmiştir.

Teorem 3.15 (Ortak Karesel Lyapunov Fonksiyonu [6, Teorem 8]). *Eğer tüm $h \in \mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ için*

$$F(h)^T P F(h) - P < 0$$

eşitsizliğini sağlayan bir simetrik, pozitif tanımlı $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi varsa, (3.21) sistemi (düzensiz örnekleme altında düzgün üstel) kararlıdır.

Kanıt. Verilen eşitsizliği sağlayan $P = P^T > 0$ var olsun. O halde, $P = T^T T$ olan tersinir bir $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vardır. Demek ki tüm $h \in \mathbb{H}$ için

$$F(h)^T P F(h) - P < 0$$

$$F(h)^T T^T T F(h) - T^T T < 0$$

$$T^{-T} F(h)^T T^T T F(h) T^{-1} - I < 0$$

$$\|TF(h)T^{-1}\|^2 < 1$$

elde edilir. Teorem 3.14 kullanılarak kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Dikkat edilecek olursa Teorem 3.14 ve Teorem 3.15 birbirine denktir. Yani birisi için bulunan matris $P = T^T T$ eşitliği ile diğesinde de kullanılabilir. Bu çalışma kapsamında Teorem 3.14 ile verilen koşulu sağlayan benzerlik dönüşüm matrisi T 'nin bulunması üzerinde durulacaktır.

Daha sonraki bölümlerde T 'nin bulunması için geliştirilen yöntemler P 'nin bulunması için de doğrudan kullanılabilir. Bilindiği kadarıyla ortak karesel Lyapunov fonksiyonunun bulunması için bu şekilde bir yaklaşım literatürde bulunmamaktadır.



4. ERİŞİLEBİLİRLİK VE GÖZLENEBİLİRLİK

Bir sistemin erişilebilir olması sezgisel olarak sistem durumlarının, sistem girişleri tarafından etkilenebileceği anlamına gelmektedir. Benzer şekilde bir sistemin gözlenebilir olması sezgisel olarak sistem durumlarının, sistem çıkışlarını etkilediği anlamına gelmektedir [17].

Doğrusal sürekli sistemler için erişilebilirlik (reachability) ve gözlenebilirlik (observability) kavramları ile ilgili sonuçlar literatürde iyi bilinmektedir [17,31,33]. Ayrık zamanlı doğrusal sistemler için eğer sistem matrislerinden bazılarının tersi yoksa *orijine erişilebilirlik* ve *geçmiş çıkışlar ile gözlenebilirlik* kavramları farklılık göstermektedir [67]. Bu kavramlar literatürde sırasıyla *kontrol edilebilirlik* (controllability) ve *inşa edilebilirlik* (constructability) olarak bilinmektedir [68].

Doğrusal zamanla değişmeyen sürekli ve ayrık zaman sistemler için erişilebilirlik (kontrol edilebilirlik) ve gözlenebilirlik (inşa edilebilirlik) kavramları birbirlerinin dualidir [69]. Yani bir kavram ile ilgili verilen sonuçlar diğer kavram için de kullanılabilir. Bu dualite, doğrusal zamanla değişen sürekli sistemler için de kolaylıkla gösterilebilmektedir [33, Teorem 5-10]. Ancak, doğrusal zamanla değişen ayrık sistemler için dual sistemin nasıl oluşturulacağı açık değildir [70]. Literatüre özgün bir katkı olarak bu sistemler için dual sistem oluşturmaya yönelik iki farklı yöntem [71]'deki çalışmamızda verilmiştir.

Erişilebilir olan doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin kapalı çevrim özdeğerleri uygun bir durum geri beslemesi kazancı kullanılarak istenen yerlere atanabilmektedir [33, Teorem 7-7]. Benzer şekilde, erişilebilir olan doğrusal zamanla değişen sistemler için sistem durumlarının azalma hızını (decay rate) istenen değere getiren durum geri beslemesi kontrolörü bulunabilmektedir [17, Teorem 28.8]. Ayrıca, erişilebilirliğin düzgün (uniform) olması varsayımı altında sistem Lyapunov üsleri (exponent) keyfi biçimde atanabilmektedir [72,73,74].

Sistemin erişilebilir olması durumunda özdeğerlerin, azalma hızının ya da Lyapunov üslerinin uygun seçimi ile kararlılığın sağlanabileceği kolayca görülmektedir. Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için atanamayan özdeğerler kararlıysa, sistemin kararlılığını sağlayan bir durum geri besleme kazancı bulmak hâlâ mümkün olmaktadır [33]. Bu fikre paralel olarak zamanla değişen sistemlerin kararlı kılınabilirliği de literatürde incelenmiştir [72,75,76].

Birinci ve ikinci alt bölümlerde $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $J_k \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_k x_k + G_k u_k \\ y_k &= H_k x_k + J_k u_k \end{aligned} \quad (4.1)$$

biçiminde verilmiş olan sistemlerin sırasıyla erişilebilirlik ve gözlenebilirlik özellikleri ile ilgili temel bilgiler verilecektir. Üçüncü alt bölümde ise erişilebilirlik ve gözlenebilirlik kavramlarının dualitesi üzerinde durulacaktır. Dördüncü alt bölümde doğrusal zamanla değişmeyen sürekli sistemlerin kararlı kılınabilirliği ile ilgili temel bilgiler özetlenecektir. Beşinci alt bölümde ise, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ve $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

biçiminde verilen sürekli ve zamanla değişmeyen sistemlerin düzensiz örnekleme altındaki ayrık modeli olan

$$F(h) := e^{Ah}, \quad \Gamma(h) := \int_0^h e^{A\tau} d\tau \quad \text{ve} \quad G(h) := \Gamma(h)B \quad (4.3)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F(h_k)x_k + G(h_k)u_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned} \quad (4.4)$$

biçimindeki sistemlerin erişilebilirlik ve gözlenebilirlik özelliklerinin hangi koşullar altında korunduğu incelenecektir. Son olarak düzensiz örnekleme sistemleri için literatürde olan tanımlardan farklı bir atanabilirlik kavramı bu çalışma kapsamında tanıtılacak ve tek girişi olan bir sistemin atanabilir olması için yeter bir koşul verilecektir.

Tezin bu bölümündeki özgün katkılar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Doğrusal zamanla değişen ayrık sistemler için sistem matrislerinin tersi olmasa da geçerli olan, erişilebilirlik (kontrol edilebilirlik) ve gözlenebilirlik (inşa edilebilirlik) dualitesine sahip bir sistem oluşturulmuştur (Teorem 4.7).

- Sistem matrislerinin tersi olduğu durumda daha basit hale dönüşen bir dual sistem oluşturulmuştur (Teorem 4.8).
- Düzensiz örneklemeli sistemler için yeni bir atanabilirlik kavramı tanıtılmış (Tanım 4.7) ve bir girişe sahip sistemin atanabilir olması için yeter koşul verilmiştir (Teorem 4.11). Burada verilen kavramlar Bölüm 5.1.3'te kararlı kılan kontrolörün bulunmasında kullanılmıştır.

Bu bölümdeki özgün katkıların çıktıları aşağıdaki uluslararası hakemli konferansta yayınlanmış ve sözlü olarak bildirilmiştir:

- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2014). Controllability, Observability and Eigenvalue Assignment on Isolated Time Scales, *19th IFAC World Congress*, Cape Town, s.3815–3820.

4.1 Erişilebilirlik ve Kontrol Edilebilirlik

Zamanla değişen sistemler için giriş işaretinin durumlara olan etkisi de zamanla değişebilir. Bu nedenle zamanla değişmeyen sistemlerin aksine, ancak belli bir zaman aralığında erişilebilirlik ve kontrol edilebilirlik kavramlarından bahsedilebilir.

Tanım 4.1 (Erişilebilirlik [17, Tanım 25.1]). Verilen $r, f \in \mathbb{N}$, $f > r$ için durumları keyfi bir $\tilde{x}_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumundan keyfi bir $\tilde{x}_f \in \mathbb{R}^n$ durumuna getiren $\{u_k\}_{k=r}^{f-1}$ giriş işaret dizisi bulunabiliyorsa (4.1) sistemi $[r, f]$ aralığında erişilebilirdir denir.

Teorem 4.1 ([17, Teorem 25.3]). (4.1) sisteminin $[r, f]$ aralığında erişilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu erişilebilirlik matrisi olarak tanımlanan

$$R(f, r) := [\Phi(f, r+1)G_r \quad \Phi(f, r+2)G_{r+1} \quad \dots \quad G_{f-1}] \in \mathbb{R}^{n \times nm} \quad (4.5)$$

matrisi için $\text{Im } R(f, r) = \mathbb{R}^n$ ya da eşdeğer olarak $\text{rank } R(f, r) = n$ olmasıdır.

Kanıt. Teorem 2.3 gereği (4.1) sisteminin çözümü bir $x_r \in \mathbb{R}^n$ ve $k = f > r$ için

$$x_f = \Phi(f, r)x_r + \sum_{i=r}^{f-1} \Phi(f, i+1)G_i u_i$$

şeklindedir. Bu çözüm aynı zamanda

$$x_f - \Phi(f, r)x_r = \begin{bmatrix} \Phi(f, r+1)G_r & \Phi(f, r+2)G_{r+1} & \dots & G_{f-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_{r+1} \\ \vdots \\ u_{f-1} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. O halde $u^T := [u_r^T \dots u_{f-1}^T]$ olmak üzere keyfi $\tilde{x}_f$ ve $\tilde{x}_r$ için

$$\tilde{x}_f - \Phi(f, r)\tilde{x}_r = R(f, r)u$$

eşitliğini çözen u vektörünün bulunması gerekmektedir. Bu u vektörünü bulmanın gerek ve yeter koşulu $\text{Im } R(f, r) = \mathbb{R}^n$ olması olduğundan kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Yukarıdaki kanıttan görülebileceği gibi $\tilde{x}_r = 0$ seçimi genelliği bozmaz. Bu nedenle bazı kaynaklarda $\tilde{x}_r = 0$ için tanım verilmektedir.

Zamanla değişmeyen ayrık bir sistem erişilebilir ise Cayley-Hamilton Teoremi gereği en fazla n adım sonra istenilen duruma erişilebilir. Bu durumda erişilebilirlik r ve f seçimlerinden bağımsız olur. Yani, $F_k = F$, $G_k = G$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olduğunda erişilebilirlik matrisi daha bilindik

$$R := R(r+n, r) = \begin{bmatrix} F^{n-1}G & F^{n-2}G & \dots & FG & G \end{bmatrix}$$

haline dönüşür.

Zamanla değişmeyen sürekli bir sistem için de erişilebilirlik tanımını birebir aynı biçimde yapılabilir. Hatta (4.2) sistemi için erişilebilirlik matrisi

$$R := \begin{bmatrix} A^{n-1}B & A^{n-2}B & \dots & AB & B \end{bmatrix}$$

şeklinde olup Teorem 4.1 geçerlidir [31, Teorem 11.3.5].

Sistemin erişilebilirliği için bir başka gerek ve yeter koşul erişilebilirlik Gramian matrisi üzerinden aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 4.2 ([17, Teorem 25.4]). (4.1) sisteminin $[r, f]$ aralığında erişilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu erişilebilirlik Gramian matrisi olarak tanımlanan

$$W_R(f, r) := \sum_{i=r}^{f-1} \Phi(f, i+1)G_i G_i^T \Phi^T(f, i+1) \quad (4.6)$$

matrisinin tersinin olmasıdır.

Kanut. $(\Rightarrow)$ $W_R(f, r)$ matrisinin tersi olsun. Genelliği kaybetmeden $\tilde{x}_r = 0$ seçilsin.

Keyfi verilen $\tilde{x}_f \in \mathbb{R}^n$ için

$$u_k := G_k^T \Phi^T(f, k+1) W_R^{-1}(f, r) \tilde{x}_f, \quad k = r, r+1, \dots, f-1$$

şeklinde seçilirse

$$\begin{aligned} x_f &= \sum_{i=r}^{f-1} \Phi(f, i+1) G_i u_i \\ &= \sum_{i=r}^{f-1} \Phi(f, i+1) G_i G_i^T \Phi^T(f, i+1) W_R^{-1}(f, r) \tilde{x}_f \\ &= W_R(f, r) W_R^{-1}(f, r) \tilde{x}_f \\ &= \tilde{x}_f \end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{x}_f$ keyfi seçildiğinden sistem erişilebilirdir.

$(\Leftarrow)$ Sistem erişilebilir olsun. Bir çelişki elde etmek için $W_R(f, r)$ matrisinin tersinin olmadığı varsayalım. $W_R(f, r)$ simetrik olduğundan $w^T W_R(f, r) w = 0$ yapan bir $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$ vektörü vardır. O halde,

$$\begin{aligned} 0 &= w^T W_R(f, r) w \\ &= \sum_{i=r}^{f-1} w^T \Phi(f, i+1) G_i G_i^T \Phi^T(f, i+1) w \\ &= \sum_{i=r}^{f-1} |G_i^T \Phi^T(f, i+1) w| \end{aligned}$$

elde edilir. Norm özelliklerinden dolayı

$$w^T \Phi(f, i+1) G_i = 0, \quad i = r, r+1, \dots, f-1$$

olur. Sistem erişilebilir olduğundan, $\tilde{x}_r = 0$ ve $\tilde{x}_f = w$ seçilirse

$$w = \sum_{i=r}^{f-1} \Phi(f, i+1) G_i u_i$$

eşitliğini sağlayan $\{u_i\}_{i=r}^{f-1}$ giriş işaretleri dizisi vardır. O halde

$$|w| = w^T w = \sum_{i=r}^{f-1} w^T \Phi(f, i+1) G_i u_i = 0$$

olmalıdır. Bir çelişki elde edildiğinden $W_R(f, r)$ matrisinin tersi olmalıdır. $\square$

Erişilmek istenen son durum orijin noktası olduğunda erişilebilirlik koşulları biraz daha gevşetilebilir. Literatürde bu durum *kontrol edilebilirlik* adı altında yeni bir kavram olarak verilmektedir.

Tanım 4.2 (Kontrol Edilebilirlik [77, 8d.11]). Verilen $r, f \in \mathbb{N}$, $f > r$ için durumları keyfi bir $\tilde{x}_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumundan $x_f = 0$ durumuna getiren $\{u_k\}_{k=r}^{f-1}$ giriş işaret dizisi bulunabiliyorsa (4.1) sistemi $[r, f]$ aralığında *kontrol edilebilirdir* denir.

Teorem 4.3 ([77, Teorem 8d.24]). (4.1) sisteminin $[r, f]$ aralığında *kontrol edilebilir* olmasının gerek ve yeter koşulu Teorem 4.1’de tanımlanan erişilebilirlik matrisi $R(f, r)$ için

$$\text{Im } \Phi(f, r) \subseteq \text{Im } R(f, r) \quad (4.7)$$

olmasıdır.

Kanıt. Teorem 4.1’in kanıtındaki tanımlar kullanılarak $\tilde{x}_f = 0$ seçilsin. O halde, keyfi bir $\tilde{x}_r \in \mathbb{R}^n$ için

$$-\Phi(f, r)\tilde{x}_r = R(f, r)u$$

eşitliğini çözen u vektörünün bulunması gerekmektedir. Bu u vektörünü bulmanın gerek ve yeter koşulu $\text{Im } \Phi(f, r) \subseteq \text{Im } R(f, r)$ olması olduğundan kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Dikkat edilecek olursa eğer $\Phi(f, r)$ matrisinin tersi varsa (4.7) koşulunun sağlanması için $\text{Im } R(f, r) = \mathbb{R}^n$ olması gerekir. Yani, bu durumda kontrol edilebilirlik ve erişilebilirlik eşdeğerdir. Bu nedenle, zamanla değişmeyen sürekli sistemler için bu kavramlar sıklıkla birbirinin yerine kullanılmaktadır.

4.2 Gözlenebilirlik ve İnşa Edilebilirlik

Zamanla değişen sistemler için durumların çıkış işaretine olan etkisi de zamanla değişebilir. Bu nedenle zamanla değişmeyen sistemlerin aksine, ancak belli bir zaman aralığında gözlenebilirlik ve inşa edilebilirlik kavramlarından bahsedilebilir.

Tanım 4.3 (Gözlenebilirlik [17, Tanım 25.8]). Verilen $r, f \in \mathbb{N}$, $f > r$ ve keyfi bir $\{u_k\}_{k=r}^{f-1}$ giriş dizisi için, her $x_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumu, $\{y_k\}_{k=r}^{f-1}$ çıkış dizisi kullanılarak tek bir biçimde elde edilebiliyorsa (4.1) sistemi $[r, f]$ aralığında *gözlenebilirdir* denir.

Teorem 4.4 ([17, Teorem 25.9]). (4.1) sisteminin $[r, f]$ aralığında gözlenebilir olmasının gerek ve yeter koşulu gözlenebilirlik matrisi olarak tanımlanan

$$O(f, r) := \begin{bmatrix} H_r \\ H_{r+1}\Phi(r+1, r) \\ \vdots \\ H_{f-1}\Phi(f-1, r) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n} \quad (4.8)$$

matrisi için $\text{Im } O^T(f, r) = \mathbb{R}^n$ ya da eşdeğer olarak $\text{rank } O(f, r) = n$ olmasıdır.

Kanıt. Teorem 2.3 gereği bir $x_r \in \mathbb{R}^n$ için (4.1) sisteminin çözümü kullanılarak

$$y_k = H_k\Phi(k, r)x_r + \sum_{i=r}^{k-1} H_k\Phi(k, i+1)G_i u_i + J_k u_k$$

elde edilir. Çıkışlar $k = r, r+1, \dots, f-1$ için alt alta yazılırsa

$$\begin{bmatrix} y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_{f-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_r \\ H_{r+1}\Phi(r+1, r) \\ \vdots \\ H_{f-1}\Phi(f-1, r) \end{bmatrix} x_r + \underbrace{\begin{bmatrix} J_r & 0 & \dots & 0 \\ H_{r+1}G_r & J_{r+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{f-1}\Phi(f-1, r+1)G_r & H_{f-1}\Phi(f-1, r+2)G_{r+1} & \dots & J_{f-1} \end{bmatrix}}_{:=M(f, r)} \begin{bmatrix} u_r \\ u_{r+1} \\ \vdots \\ u_{f-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Şimdi $y^T := [y_r^T \ \dots \ y_{f-1}^T]$ ve $u^T := [u_r^T \ \dots \ u_{f-1}^T]$ tanımlarıyla

$$y - M(f, r)u = O(f, r)x_r$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten verilen y ve u için x_r 'yi tek bir biçimde elde edebilmenin gerek ve yeter koşulu $\text{Im } O^T(f, r) = \mathbb{R}^n$ olduğundan kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Yukarıdaki kanıttan görülebileceği gibi $\{u_k\}_{k=r}^{f-1} \equiv 0$ ya da $\{J_k\}_{k=r}^{f-1} \equiv 0$ seçimi genelliği bozmaz. Bu nedenle bazı kaynaklarda bu varsayım altında tanımlar verilmektedir.

Zamanla değişmeyen ayrık bir sistem gözlenebilir ise Cayley-Hamilton Teoremi gereği en fazla n çıkış ölçümünden sonra başlangıç değeri tek bir biçimde elde edilebilir. Bu durumda gözlenebilirlik r ve f seçimlerinden bağımsız olur. Yani, $F_k = F$, $H_k = H$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olduğunda gözlenebilirlik matrisi daha bilindik

$$O := O(f, r) := \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

haline dönüşür.

Zamanla değişmeyen sürekli bir sistem için de gözlenebilirlik tanımı birebir aynı biçimde yapılabilir. Hatta (4.2) sistemi için gözlenebilirlik matrisi

$$O := O(f, r) := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde olup Teorem 4.4 geçerlidir [31, Teorem 11.4.4].

Sistemin gözlenebilirliği için bir başka gerek ve yeter koşul gözlenebilirlik Gramian matrisi üzerinden aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 4.5 ([17, Teorem 25.10]). (4.1) sisteminin $[r, f]$ aralığında gözlenebilir olmasının gerek ve yeter koşulu gözlenebilirlik Gramian matrisi olarak tanımlanan

$$W_O(f, r) := \sum_{i=r}^{f-1} \Phi^T(i, r) H_i^T H_i \Phi(i, r) \quad (4.9)$$

matrisinin tersinin olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $W_O(f, r)$ matrisinin tersi olsun. Genelliği kaybetmeden $\{u_k\}_{k=r}^{f-1} \equiv 0$ ve $\{J_k\}_{k=r}^{f-1} \equiv 0$ varsayılabilir. Bir $x_r \in \mathbb{R}^n$ için

$$y_k = H_k \Phi(k, r) x_r, \quad k = r, r+1, \dots, f-1$$

elde edilir. Demek ki

$$\begin{aligned} \Phi^T(k, r) H_k^T y_k &= \Phi^T(k, r) H_k^T H_k \Phi(k, r) x_r \\ \sum_{k=r}^{f-1} \Phi^T(k, r) H_k^T y_k &= \sum_{k=r}^{f-1} \Phi^T(k, r) H_k^T H_k \Phi(k, r) x_r \\ \sum_{k=r}^{f-1} \Phi^T(k, r) H_k^T y_k &= W_O(k, r) x_r \\ W_O^{-1}(k, r) \sum_{k=r}^{f-1} \Phi^T(k, r) H_k^T y_k &= x_r \end{aligned}$$

işlemleri ile x_r , $\{y_k\}_{k=r}^{f-1}$ çıkış dizisi kullanılarak tek bir biçimde elde edilebilir, yani sistem gözlenebilirdir.

$(\Leftarrow)$ Sistem gözlenebilir olsun. Bir çelişki elde etmek için $W_O(f, r)$ matrisinin tersinin olmadığı varsayalım. $W_O(f, r)$ simetrik olduğundan $v^T W_O(f, r) v = 0$ yapan bir $v \in$

$\mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ vektörü vardır. O halde,

$$\begin{aligned} 0 &= v^T W_O(f, r) v \\ &= \sum_{k=r}^{f-1} v^T \Phi^T(k, r) H_k^T H_k \Phi(k, r) v \\ &= \sum_{k=r}^{f-1} |H_k \Phi(k, r) v| \end{aligned}$$

elde edilir. Norm özelliklerinden dolayı

$$H_k \Phi(k, r) v = 0, \quad k = r, r+1, \dots, f-1$$

olmalıdır. O halde, bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $x_r = \alpha v$ seçilirse $\{y_k\}_{k=r}^{f-1} \equiv 0$ elde edilir. Her α için bu doğru olduğundan, başlangıç durumu tek bir biçimde elde edilemez. Bu da gözlenebilirlik varsayımıyla çelişir. Demek ki $W_O(f, r)$ matrisinin tersi olmalıdır. $\square$

Çıkış dizisi kullanılarak elde edilmek istenen durum, başlangıç durumu değil de o andaki durum olduğunda gözlenebilirlik koşulları biraz daha gevşetilebilir. Literatürde bu durum *inşa edilebilirlik* adı altında yeni bir kavram olarak verilmektedir.

Tanım 4.4 (İnşa Edilebilirlik [77, 8d.33]). Verilen $r, f \in \mathbb{N}$, $f > r$ ve keyfi bir $\{u_k\}_{k=r}^{f-1}$ giriş dizisi ve her $x_r \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durumu için, x_f durumu $\{y_k\}_{k=r}^{f-1}$ çıkış dizisi kullanılarak tek bir biçimde elde edilebiliyorsa (4.1) sistemi $[r, f]$ aralığında *inşa edilebilirdir* denir.

Teorem 4.6 ([77, 8d.37]). (4.1) sisteminin $[r, f]$ aralığında inşa edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu Teorem 4.4'te tanımlanan gözlenebilirlik matrisi $O(f, r)$ için

$$\text{Im } \Phi^T(f, r) \subseteq \text{Im } O^T(f, r) \quad (4.10)$$

olmasıdır.

Kanıt. Verilen koşula eşdeğer olan

$$\ker O(f, r) \subseteq \ker \Phi(f, r)$$

ilişkisini göstermek kanıt için yeterlidir. Keyfi bir $x_r \in \mathbb{R}^n$ için Teorem 4.4'ün kanıtındaki tanımlar kullanılarak

$$y - M(f, r)u = O(f, r)x_r$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $\{y_k\}_{k=r}^{f-1}$ ve $\{u_k\}_{k=r}^{f-1}$ dizileri kullanılarak ancak

$$x_r + \ker O(f, r) := \{x_r + z \mid z \in \ker O(f, r)\}$$

kümesindeki elemanlar bulunabilir. Yani verilen bir giriş dizisi için çıkış dizisine bakarak bu kümedeki durumlar arasında bir ayrım yapılamaz. Teorem 4.1'in kanıtındaki tanımlar kullanılarak

$$x_f = \Phi(f, r)x_r + R(f, r)u$$

eşitliği elde edilir. Keyfi seçilen $z \in \ker O(f, r)$ için

$$\tilde{x}_f = \Phi(f, r)(x_r + z) + R(f, r)u = x_f + \Phi(f, r)z$$

elde edilir. O halde sistemin inşa edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu $\forall z \in \ker O(f, r)$ için $\tilde{x}_f = x_f$, yani $\Phi(f, r)z = 0$ olmasıdır. Bu da $\ker O(f, r) \subseteq \ker \Phi(f, r)$ koşuluna eşdeğer olduğundan kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Dikkat edilecek olursa eğer $\Phi(f, r)$ matrisinin tersi varsa (4.10) koşulunun sağlanması için $\text{Im } O^T(f, r) = \mathbb{R}^n$ olması gerekir. Yani, bu durumda inşa edilebilirlik ve gözlenebilirlik eşdeğerdir. Bu nedenle, zamanla değişmeyen sürekli sistemler için bu kavramlar sıklıkla birbirinin yerine kullanılmaktadır.

4.3 Erişilebilirlik ve Gözlenebilirlik Dualitesi

Tanımlardan açıkça ortaya çıkmasa da erişilebilirlik ve gözlenebilirlik birbirleriyle yakından ilişkili, hatta dual kavramlardır [69]. Yani, uygun koşullarda bu kavramlar birbirlerine dönüştürülebilirler. Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için dual sistemin oluşturulması kolay [33] olsa da, doğrusal zamanla değişen ayrık sistemler için çeşitli varsayımlar altında birçok dual sistem tanıtılmıştır [70,75,77]. Bu bölümde tanıtılacak dual sistemler literatüre özgün bir katkı olarak bu çalışmada geliştirilmiş ve [71]'de yayınlanmıştır.

Teorem 4.7. (4.1) sisteminin $[r, f]$ aralığında (erişilebilir, gözlenebilir, kontrol edilebilir, inşa edilebilir) olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\tilde{F}_k := F_{f-1-k+r}^T, \quad \tilde{G}_k := H_{f-1-k+r}^T \text{ ve } \tilde{H}_k := G_{f-1-k+r}^T, \quad k = r, r+1, \dots, f-1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \tilde{F}_k x_k + \tilde{G}_k u_k \\ y_k &= \tilde{H}_k x_k \end{aligned} \quad (4.11)$$

sisteminin $[r, f]$ aralığında (gözlenebilir, erişilebilir, inşa edilebilir, kontrol edilebilir) olmasıdır.

Kanıt. Daha önce tartışıldığı üzere $J_k = 0$ seçimi genelliği bozmaz. O halde tüm $s = r, r+1, \dots, f$ için (4.11) sisteminin durum geçiş matrisi

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{F}}(s, r) &= \tilde{F}_{s-1} \tilde{F}_{s-2} \dots \tilde{F}_r = F_{f-s+r}^T F_{f-s+r+1}^T \dots F_{f-1}^T = \Phi_F^T(f, f-s+r) \\ \Phi_{\tilde{F}}(f, s) &= \tilde{F}_{f-1} \tilde{F}_{f-2} \dots \tilde{F}_s = F_r^T F_{r+1}^T \dots F_{f-1-s+r}^T = \Phi_F^T(f-s+r, r) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar. Demek ki (4.11) sisteminin erişilebilirlik matrisi

$$\begin{aligned} \tilde{R}(f, r) &:= [\Phi_{\tilde{F}}(f, r+1)\tilde{G}_r \quad \Phi_{\tilde{F}}(f, r+2)\tilde{G}_{r+1} \quad \dots \quad \tilde{G}_{f-1}] \\ &= [\Phi_F^T(f-1, r)H_{f-1}^T \quad \Phi_F^T(f-2, r)H_{f-2}^T \quad \dots \quad H_r^T] \end{aligned}$$

olur. Yine (4.11) sisteminin gözlenebilirlik matrisi

$$\tilde{O}(f, r) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_r \\ \tilde{H}_{r+1}\Phi_{\tilde{F}}(r+1, r) \\ \vdots \\ \tilde{H}_{f-1}\Phi_{\tilde{F}}(f-1, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{f-1}^T \\ G_{f-2}^T\Phi_F^T(f, f-1) \\ \vdots \\ G_r^T\Phi_F^T(f, r+1) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Açıkça görülebileceği gibi

$$\text{Im } \tilde{R}(f, r) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{Im } O^T(f, r) = \mathbb{R}^n$$

$$\text{Im } \tilde{O}^T(f, r) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{Im } R(f, r) = \mathbb{R}^n$$

$$\text{Im } \Phi_{\tilde{F}}(f, r) \subseteq \text{Im } \tilde{R}(f, r) \Leftrightarrow \text{Im } \Phi_F^T(f, r) \subseteq \text{Im } O^T(f, r)$$

$$\text{Im } \Phi_{\tilde{F}}^T(f, r) \subseteq \text{Im } \tilde{O}^T(f, r) \Leftrightarrow \text{Im } \Phi_F(f, r) \subseteq \text{Im } R(f, r)$$

olduğundan kanıt tamamlanmış olur. □

Dikkat edilecek olursa yukarıdaki teoremden F_k matrislerinin tersinin olma şartı yoktur. Ancak bu matrislerin tersi varsa dual sistem daha basit bir hale gelmektedir.

Teorem 4.8. $\det F_k \neq 0, k = r, r+1, \dots, f-1$, yani matrislerin tersi olsun. O halde (4.1) sisteminin $[r, f]$ aralığında (erişilebilir, gözlenebilir) olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\tilde{F}_k := F_k^{-T}, \quad \tilde{G}_k := F_k^{-T} H_k^T \quad \text{ve} \quad \tilde{H}_k := G_k^T F_k^{-T}, \quad k = r, r+1, \dots, f-1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \tilde{F}_k x_k + \tilde{G}_k u_k \\ y_k &= \tilde{H}_k x_k \end{aligned} \quad (4.12)$$

sisteminin $[r, f]$ aralığında (gözlenebilir, erişilebilir) olmasıdır.

Kanıt. Daha önce tartışıldığı üzere $J_k = 0$ seçimi genelliği bozmaz. O halde tüm $s = r, r+1, \dots, f$ için (4.12) sisteminin durum geçiş matrisi

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{F}}(s, r) &= \tilde{F}_{s-1} \tilde{F}_{s-2} \dots \tilde{F}_r = F_{s-1}^{-T} F_{s-2}^{-T} \dots F_r^{-T} = \Phi_F^{-T}(s, r) \\ \Phi_{\tilde{F}}(f, s) &= \tilde{F}_{f-1} \tilde{F}_{f-2} \dots \tilde{F}_s = F_{f-1}^{-T} F_{f-2}^{-T} \dots F_s^{-T} = \Phi_F^{-T}(f, s) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar. Demek ki (4.12) sisteminin erişilebilirlik matrisi

$$\begin{aligned} \tilde{R}(f, r) &= [\Phi_{\tilde{F}}(f, r+1)\tilde{G}_r \quad \Phi_{\tilde{F}}(f, r+2)\tilde{G}_{r+1} \quad \dots \quad \tilde{G}_{f-1}] \\ &= [\Phi_F^{-T}(f, r+1)F_r^{-T}H_r^T \quad \Phi_F^{-T}(f, r+2)F_{r+1}^{-T}H_{r+1}^T \quad \dots \quad F_{f-1}^{-T}H_{f-1}^T] \\ &= [\Phi_F^{-T}(f, r)H_r^T \quad \Phi_F^{-T}(f, r+1)H_{r+1}^T \quad \dots \quad \Phi_F^{-T}(f, f-1)H_{f-1}^T] \\ &= \Phi_F^{-T}(f, r) [H_r^T \quad \Phi_F^T(r+1, r)H_{r+1}^T \quad \dots \quad \Phi_F^T(f-1, r)H_{f-1}^T] \\ &= \Phi_F^{-T}(f, r)O^T(f, r) \end{aligned}$$

olur. Yine (4.12) sisteminin gözlenebilirlik matrisi

$$\begin{aligned} \tilde{O}(f, r) &= \begin{bmatrix} \tilde{H}_r \\ \tilde{H}_{r+1}\Phi_{\tilde{F}}(r+1, r) \\ \vdots \\ \tilde{H}_{f-1}\Phi_{\tilde{F}}(f-1, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_r^T F_r^{-T} \\ G_{r+1}^T F_{r+1}^{-T} \Phi_F^{-T}(r+1, r) \\ \vdots \\ G_{f-1}^T F_{f-1}^{-T} \Phi_F^{-T}(f-1, r) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_r^T \Phi_F^{-T}(r+1, r) \\ G_{r+1}^T \Phi_F^{-T}(r+2, r) \\ \vdots \\ G_{f-1}^T \Phi_F^{-T}(f, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_r^T \Phi_F^T(f, r+1) \\ G_{r+1}^T \Phi_F^T(f, r+2) \\ \vdots \\ G_{f-1}^T \end{bmatrix} \Phi_F^{-T}(f, r) \\ &= R^T(f, r) \Phi_F^{-T}(f, r) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\Phi_F(f, r)$ matrisinin tersi olduğundan

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{R}(f, r) &= \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{Im } O^T(f, r) = \mathbb{R}^n \\ \text{Im } \tilde{O}^T(f, r) &= \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{Im } R(f, r) = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

olmalıdır. Bunun sonucu olarak kanıt tamamlanmış olur. $\square$

4.4 Kararlı Kılınabilirlik

Kararlı kılınabilirlik kavramı bir sistemi tüm başlangıç durumları için kararlı kılan bir giriş işaretinin varlığı ile ilgilidir. Bu kavram, zamanla değişmeyen doğrusal sürekli ve ayrık sistemler için detaylı biçimde incelenmiştir [31,33,78,79].

Tanım 4.5 (Kararlı Kılınabilirlik [79, Bölüm 2.5]). Zamanla değişmeyen doğrusal sürekli (4.2) sistemi, $A + BL$ matrisini Hurwitz yapan, yani matrisin tüm özdeğerlerini karmaşık sayılar düzleminde sol yarı düzleme getiren, bir $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi bulunabiliyorsa *kararlı kılınabilir* denir.

Bu tanıma göre sistemi kararlı kılan giriş işareti $u(t) := Lx(t)$ biçiminde bir durum geri beslemesidir. Sistem erişilebilir olduğunda $A + BL$ matrisinin özdeğerlerinin keyfi biçimde atanabileceği literatürde iyi bilinmektedir [79, Teorem 2.9]. Bu nedenle, sistemin atanamayan özdeğerlerinin kararlı, yani sol yarı düzlemde olması kararlı kılınabilirlik için gerek ve yeter bir koşuldur [33, s. 339].

Bu çalışma kapsamında kararlı kılınabilir sürekli sistemlerin düzensiz örnekleme altında kontrolü incelenecektir. Bu nedenle zamanla değişen sistemler için kararlı kılınabilirlik sonuçları bu çalışmanın kapsamı dışındadır. Bu konuda detaylı bilgi için [72,73,74,75,76,80] ve bunlar içindeki kaynaklar incelenebilir.

4.5 Örnekleme Altında Erişilebilirlik ve Gözlenebilirliğin Korunması

Doğrusal zamanla değişmeyen sürekli bir sistem erişilebilir (gözlenebilir) değilse, bu sistemin ayrık modelinin de erişilebilir (gözlenebilir) olamayacağı sezgisel olarak görülebilir. Nitekim [3, Teorem 3.2.2] ile bu durum kanıtlanmıştır. Ancak, erişilebilir (gözlenebilir) bir sürekli sistemin örnekleme altında erişilebilirliğini (gözlenebilirliğini) hangi koşullarda koruyacağı incelenmesi gereken bir sorudur. Bu sorunun bilinen ilk yanıtı literatürde *Kalman-Ho-Narendra kriteri* olarak bilinmektedir [17, Not 25.5].

Kalman-Ho-Narendra kriteri, örnekleme altında erişilebilirliğin (gözlenebilirliğin) korunması için yeter bir koşul vermektedir. Literatürde bu koşul genişletilerek bazı gerek ve yeter koşullar da elde edilmiştir [81,82,83]. Ancak bu koşullar bu çalışma kapsamında ele alınmayacaktır.

Kalman-Ho-Narendra kriterinin bu çalışmaya uyarlanmış hali Teorem 4.9 ile verilecektir. Ancak, öncelikle literatürde sıklıkla yapılan *patolojik örnekleme* (pathological sampling) tanımının verilmesi yerinde olur.

Tanım 4.6 (Patolojik Örnekleme [3, Tanım 3.2.1]). Bir $\tilde{h} > 0$ örnekleme zamanı; verilen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin $\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ eşitliğini sağlayan özdeğerleri için

$$\tilde{h} (\operatorname{Im} \lambda_i - \operatorname{Im} \lambda_j) = 2z\pi \quad (4.13)$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tamsayısı varsa *patolojik örneklemedir* denir.

Dikkat edilecek olursa eğer tüm $i, j = 1, 2, \dots, n$ ve $i \neq j$ için $\operatorname{Re} \lambda_i \neq \operatorname{Re} \lambda_j$ olursa hiçbir $\tilde{h} > 0$ örnekleme patolojik değildir. Spektral Haritalama Teoremi, Teorem A.1 gereği ayrıklaştırılmış sistem matrisinin özdeğerleri $\lambda \mapsto e^{\lambda h}$ dönüşümü ile elde edilebilir. Üstel fonksiyonun karmaşık sayılardaki periyodik özelliğinden dolayı, eğer h patolojik bir örnekleme ise sürekli sistemin farklı özdeğerleri ayrık sistem için aynı özdeğerlere dönüşür [33, s. 561]. Bu da ayrıklaştırılmış sistemin erişilebilirliğini (gözlenebilirliğini) kaybetmesine neden olabilmektedir. Bu durumu gösteren ilginç bir örnek [3, Örnek 3.2.2]'de bulunabilir.

Teorem 4.9 ([33, Teorem D-1]). *Zamanla değişmeyen doğrusal sürekli (4.2) sistemi erişilebilir olsun. Eğer $\tilde{h} > 0$ patolojik değilse*

$$R(h) := \begin{bmatrix} G(h) & F(h)G(h) & \dots & F^{n-1}(h)G(h) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

biçiminde tanımlanmış erişilebilirlik matrisi için $\operatorname{rank} R(\tilde{h}) = n$ olur. Ayrıca, sistemin bir girişi varsa, yani $m = 1$ ise bunun tersi de geçerlidir.

4.6 Düzensiz Örneklemeli Sistemlerde Atanabilirlik

Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistem erişilebilir ise, kapalı çevrim sistem matrisinin özdeğerleri istenen yere atanabilir [33,78,79]. Özdeğerleri istenen yerlere atayan durum geri beslemesi kazancının bulunması literatürde *kutup yerleştirme* (pole placement) ya da *özdeğer atama* (eigenvalue assignment) problemi olarak bilinmektedir.

Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için özdeğer atama problemini çözen birçok yöntem önerilmiştir. Literatürdeki klasik olarak bilinen yöntemler için [33, Bölüm 7.3],

[78, Bölüm 9.5] ve [84, Bölüm 7.3] gibi kaynaklar incelenebilir. Tek girişli sistemler için özdeğerleri istenen yerlere atayan durum geri beslemesi kazancı tektir [78, s. 322] ve bu kazanç *Ackermann formülü* ile doğrudan hesaplanabilmektedir [85].

Doğrusal zamanla değişen sistemler için özdeğer atama probleminin paraleli olarak Lyapunov üslerini (exponent) atama problemi tanımlanmıştır. Bu sistemler için eğer erişilebilirlik düzgün (uniform) ise Lyapunov üslerini keyfi atayabilen kontrolörlerin varlığı gösterilebilmektedir [72,73,74,86,87]. Ayrıca zamanla değişen sistemler için özdeğer tanımının genişletilmesi fikri kullanılarak atama probleminin çözümü için geliştirilen yöntemler de mevcuttur [88].

Tezin bu bölümünde düzensiz örneklemeli bir sistem için örnekleme aralığı ile değişen sistem matrisinin noktasal olarak (pointwise) özdeğerlerinin atanması ile ilgilenilecektir. Düzensiz örneklemeli sistemler için benzer bir özdeğer atama yöntemi literatürde bilinmemektedir. Bunun bir nedeni, Bölüm 3'te tartışıldığı üzere, en genel halde bu sistemler için noktasal özdeğerlerin birim çember içinde olmasının kararlılığı garantilemiyor olması olabilir. Ancak, düzensiz örneklemeli sistemler için atanabilirlik varsayımı altında sistemin kararlılığını garantileyen ve özdeğerleri istenen yerlere atayan bir kontrolörün bulunması için bir yöntem Bölüm 5.1.3'te verilecektir. Bu nedenle bu çalışmada özgün bir *atanabilirlik* tanımı verilmiş ve sistemin tek girişi olduğu durumda atanabilir olması için yeter bir koşul kanıtlanmıştır. Bu bölümdeki çalışmalar [71]'de yayınlanmıştır.

Tanım 4.7 (Atanabilirlik). Verilen $0 < h_{\min} \leq h_{\max}$ için $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ kapalı aralığında tanımlanan $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ pürüzsüz matris tanımlı fonksiyonları verilsin. Keyfi seçilen $a_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ pürüzsüz fonksiyonları için

$$p(s, h) := s^n + a_{n-1}(h)s^{n-1} + \dots + a_1(h)s + a_0(h) \quad (4.15)$$

değişken katsayılı polinomunu tüm $h \in \mathbb{H}$ için $F(h) + G(h)K(h)$ matrisinin karakteristik polinomu, yani

$$\det(sI - [F(h) + G(h)K(h)]) = p(s, h), \quad \forall h \in \mathbb{H} \quad (4.16)$$

yapan $K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ pürüzsüz matris tanımlı fonksiyonu varsa $[F(h), G(h)]$ çifti $[h_{\min}, h_{\max}]$ aralığında *atanabilirdir* denir.

Dikkat edilecek olursa atanabilirlik kavramı sistemler için değil, matris çiftleri için verilmiştir. Bunun sebebi bu kavramla ilgili verilecek sonuçlarda sürekli ve ayrık sistemler arasında bir ayrım olmamasıdır. Tahmin edileceği gibi bir sistemin atanabilir olması, o sistemi tanımlayan sistem ve giriş matris çiftinin atanabilir olması anlamına gelir.

Zamanla değişmeyen doğrusal sistemler için erişilebilirlik ve atanabilirlik eşdeğer kavramlardır. İyi bilinen bu durum aşağıdaki teorem ile kanıtlanmadan verilmiştir.

Teorem 4.10 ([78, Teorem 9.3.1]). *Verilen bir $\tilde{h} > 0$ için $h_{\min} = h_{\max} = \tilde{h}$ olsun. Bu durumda $F := F(\tilde{h}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $G := G(\tilde{h}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ olarak tanımlanan sabit matrisler için $[F, G]$ matris çiftinin atanabilir olmasının gerek ve yeter koşulu $x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$ sisteminin erişilebilir olmasıdır. Ayrıca, sistemin tek bir girişi varsa, yani $m = 1$ ise özdeğer atamasını yapan $K := K(\tilde{h}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi tektir [78, s. 322].*

Yukarıdaki teoremde $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$ sisteminin erişilebilir olması da gerek ve yeter koşul olarak kullanılabilir. Bu iki sistem için erişilebilirlik matrisleri aynı olduğundan kanıt aynı şekilde verilir.

Verilen bu teorem gereği $F + GK$ matrisinin özdeğerleri, karmaşık eşlenik olarak seçilmesi şartıyla istenen yerlere taşınabilir. Özel olarak sürekli sistem için $\text{Re}\{\lambda_i(F + GK)\} < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ ve ayrık sistem için $|\lambda_i(F + GK)| < 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$ seçilerek kararlılık sağlanabilir. Yani, erişilebilir olan ve zamanla değişmeyen bir sistem aynı zamanda kararlı kılınabilir.

Düzensiz örneklemeli bir sistem erişilebilir olsa bile bu sistemin atanabilir olmayabileceği sezgisel olarak görülebilir [24, Örnek 9.6]. Ne var ki, bunun tersi de geçerli değildir, yani atanabilir bir sistem erişilebilir olmayabilir.

Tek bir girişi olan düzensiz örneklemeli bir sistemin atanabilir olması için bir yeter koşul aşağıdaki teoremle verilmiştir. Çok girişli sistemler için bu teoremin geçerli olup olmadığı bilinmemektedir. Teorem 4.10'un kanıtında klasik olarak kullanılan yöntem, çok girişli sistemi öncül bir geri besleme ile tek girişli sisteme dönüştürmektir [78, Önsav 9.4.4]. Ancak bu yöntemin düzensiz örneklemeli sistemler için geçerliliği açık değildir. Aşağıdaki teoremin çok girişli sistemler için kanıtı açık bir problem olarak gelecekteki çalışmaların konusu olabilir.

Teorem 4.11. *Zamanla değişmeyen doğrusal sũrekli (4.2) sistemi için $F(h)$ ve $G(h)$, (4.3)'teki gibi tanımlanmış olsun. Ayrıca sistemin tek bir girişi, yani $m = 1$ olsun. Verilen $0 < h_{\min} \leq h_{\max}$ ve $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ için hiçbir $h \in \mathbb{H}$ patolojik değilse ve (4.2) sistemi erişilebilir ise $[F(h), G(h)]$ çifti $[h_{\min}, h_{\max}]$ aralığında atanabilir.*

Kanıt. Hiçbir $h \in \mathbb{H}$ patolojik olmadığından Teorem 4.9 gereği (4.14) ile tanımlanan $R(h)$ matrisinin tũm $h \in \mathbb{H}$ için tersi vardır. O halde, (4.15) biçiminde keyfi verilen kapalı çevrim karakteristik polinomu $p(s, h)$ için Ackermann formũlũ [85, Sonuç 1]

$$K(h) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} R^{-1}(h) p(F(h), h)$$

ile elde edilen $K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$ kontrolũrũ kullanılarak

$$\det(sI - [F(h) + G(h)K(h)]) = p(s, h), \quad \forall h \in \mathbb{H}$$

olduğu gũsterilir. Bu da kanıtı tamamlar. □



5. KARARLI KILAN KONTROLÖRLER

Bu bölümde zamanla değişmeyen doğrusal bir sistemin, düzensiz örnekleme altında, durum geri beslemesi kontrol kazancı ile kararlı kılınması ve kontrolü problemleri incelenecektir. Düzensiz örnekleme sistemleri için kararlı kılan kontrolörlerin bulunması problemi hala aktif bir araştırma konusudur [6]. Literatürde bu problemin çözümü için birçok farklı yaklaşım sunulmaktadır [5]. Bu yaklaşımlar en genel haliyle sürekli zaman ve ayrık zaman yöntemleri olarak ikiye ayrılabilir [6].

Sürekli zaman yaklaşımları arasında en yaygın kullanılanlardan birisi giriş gecikmesi (input delay) yaklaşımıdır [48,49,50,51,52]. Bu yaklaşımda, sıfırıncı derece tutucu zamanla değişen bir giriş gecikmesi biçiminde modellenmiştir [7]. Bu modelleme sonucu olarak zaman gecikmeli sistemlerin geniş literatüründen faydalanan kararlı kılan kontrolörler bulunabilmektedir [89,90,91,92].

Bir diğer yaklaşım dayanıklı kontrol kuramından gelen küçük kazanç (small gain) yaklaşımıdır [53,54]. Bu yaklaşımda nominal bir örnekleme zamanı seçilip, değişken örnekleme bir sistem belirsizliği olarak modellenmektedir [5]. Bu modelleme sonucu olarak dayanıklı kontrol literatürü kullanılarak kararlı kılma problemi çözülebilmektedir [91,93].

Karma (hybrid) sistem, anahtarlama (switching) sistem ve dürtüsel (impulsive) sistem biçiminde modelleme de yaygın olarak kullanılmaktadır [22,23,34,55]. Bu yaklaşımlarda, her örneklemede sistemin anlık olarak farklı bir dinamiğe geçiş yaptığı göz önünde bulundurularak modelleme yapılmaktadır [5]. Bunlar dışında daha birçok sürekli sistem yaklaşımı mevcuttur [6].

Ayrık zaman yaklaşımında ise düzensiz örnekleme sisteminin ayrık sistem modeli elde edilerek kararlı kılan kontrolör aranmaktadır. Elde edilen ayrık model örnekleme aralığına bağlı olduğundan zamanla değişen ya da parametre ile değişen sistem kuramındaki sonuçlar bu probleme uygulanabilmektedir [42,44,45].

Ayrık zaman yaklaşımlarının en erken örneklerinden biri küçük örnekleme aralığı yaklaşıklık yöntemi [94]. Bu yöntemde kararlılık için sürekli bir kontrolör kullanılmış, ancak seçilecek örnekleme aralığı kararlılık analizi sonunda bulunmuştur.

Bir diğer yaklaşım dijital yeniden tasarım (digital redesign) ve durum eşleme (state matching) yaklaşımlarıdır [1,95,96,97,98]. Bu yaklaşımda kapalı çevrim ayrık zaman durum yanıtı, kapalı çevrim sürekli zaman durum yanıtına eşitlenmeye çalışılmaktadır [99,100]. Bunlar dışında ortak karesel (quadratic) Lyapunov fonksiyonu bulma [28,60], çoklu Lyapunov-benzeri (multiple Lyapunov-like) fonksiyonlarla kararlı kılma [22,101], ortak üçgenleştirme [64] gibi daha birçok yaklaşım mevcuttur [5,34].

Yukarıda verilen yaklaşımların birçoğu halihazırda seçilmiş olan kontrolör için kararlılığın garantilendiği maksimum örnekleme aralığını bulmaya yönelik analiz yöntemleridir [6]. Ancak, aynı anda hem kontrolör inşa edip, hem de örnekleme aralığı bulmaya çalışan yöntemler de mevcuttur [27,28,60,61]. Bu çalışma kapsamında geliştirilen yöntemler ikinci türdendir.

Bu bölümde incelenecek olan problem kapsamında, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ve $\text{rank } B = m \leq n$ olmak üzere

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

biçimindeki kararlı kılınabilir sistem ele alınsın. Verilen bir $\mathcal{T} := \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ örnekleme zamanı dizisi için her t_k anında sistem durumlarının, yani $x(t_k)$ değerlerinin, ölçülebilir ya da kestirilebilir [84, Bölüm 7.5] olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım altında $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ olmak üzere $K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ için

$$u(t) := K(h_k)x(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.2)$$

biçiminde sıfırıncı dereceden tutucu ile kontrol işareti oluşturulabilir. Sonuçta elde edilen kapalı çevrim sistem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BK(h_k)x(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.3)$$

biçimindedir. Bu sistemin durum yanıtı ile

$$F(h) := e^{Ah}, \quad \Gamma(h) := \int_0^h e^{A\tau} d\tau \quad \text{ve} \quad G(h) := \Gamma(h)B \quad (5.4)$$

olmak üzere

$$x_{k+1} = [F(h_k) + G(h_k)K(h_k)] x_k, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.5)$$

sisteminin durum yanıtlarının aynı olduğu $u_k := K(h_k)x_k$ seçimi ile Teorem 2.1'den kolayca görülebilir. Elde edilen (5.5) sistemini, tüm olası $\mathcal{H} := \{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ seçimleri için kararlı kılan $K(h)$ kontrolörünün bulunması bu tezin temel problemidir.

Dikkat edilecek olursa bir t_k anında $u_k := K(h_k)x_k$ şeklindeki kontrol işaretinin hesaplanabilmesi için örnekleme aralığı h_k 'nın ve dolayısıyla $h_k := t_{k+1} - t_k$ olduğundan, bir sonraki örnekleme zamanının ne olacağının bilinmesi gerekmektedir. Eğer bu bilgi biliniyorsa, literatürde buna *kontrolör güdümlü örnekleme* (*controller-driven sampling*) adı verilmektedir [102,103].

Pratikte kontrolör güdümlü örnekleme kapsamına giren birçok uygulama bulunmaktadır. Örneğin bir ağ kontrol sisteminde merkezi bir kontrolör uydu cihazların örnekleme zamanını akıllıca seçerek bant genişliği kullanımını azaltabilir [6]. Bir başka örnek olarak ortak kontrol görevleri için optimal bir zamanlama (scheduling) yöntemi kullanılarak işlemci yükünün azaltılması verilebilir [9]. Bir diğer örnek enerji tasarrufu sağlamak için bir sonraki örneklemesini değişken bir şekilde seçerek uykuya geçen bir Nesnelerin İnterneti (Internet of Things) cihazı olabilir [13,104]. Bölüm 5.1.5'te verilen uygulamada ise ortak bir böleni bulunmayan farklı durum ölçüm gecikmelerine sahip sistemler için kontrolör güdümlü örnekleme kullanılmıştır.

Ne var ki, bazı durumlarda bir sonraki örneklemenin ne olacağı bilinmemektedir. Örneğin haberleşme sırasında veri kaybı yaşayan sistemlerin kontrolünde örneklemenin ne olacağı bilinmemektedir [7]. Bir diğer örnek ise butona basılması ya da hareket algılanması gibi önceden kestirilemeyen harici bir olay olduğunda örnek alan sistemler olabilir [13]. Bir sonraki örnekleme aralığının bilinmediği durumlarda bile kontrolör güdümlü örnekleme için geliştirilen bir kontrolörün, nominal bir örnekleme aralığı civarından seçilen düzensiz örnekleme aralığı dizileri için sistemi kararlı kılabilceği Bölüm 5.2'de gösterilmiştir.

Bu bölümde kontrolör güdümlü örnekleme altında özgün olan üç farklı kararlı kılma ve kontrol yöntemi önerilmiştir. Bu yöntemler (1) dijital yeniden tasarım (digital redesign), (2) özdeğer atama (eigenvalue assignment) ve (3) tekil değer atama (singular value assignment) yöntemleridir. Yine özgün bir çalışma olarak farklı durum ölçüm gecikmelerine sahip bir sistemin kontrolü için düzensiz bir örnekleme şeması önerilmiş ve yukarıda sıralanan yöntemlerin bu probleme uygulanabileceği gösterilmiştir. Son

olarak yukarıdaki yöntemlerin $K(h) = K, \forall h \in \mathbb{H}$ biçimindeki sabit kontrolörlere genişletilebilmesi için literatürde bilinen bir yöntem özetlenmiştir.

Tezin bu bölümündeki özgün katkılar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Düzensiz örneklemeli sistemler için kararlı kılan kontrolörün varlığı ile ilgili literatürde olan bir sonuç genişletilmiştir (Teorem 5.2).
- Bu genişletme yapılırken elde edilen kanıt yöntemi (Önsav 5.1), ayrıca $h_{\max}$ için hesaplanabilir bir üst sınır vermektedir.
- Bu kanıt yöntemi diğer bölümlerde geliştirilen kontrolörlerin kararlılık analizinde kullanılarak yöntemin genelliği ortaya konmuştur.
- Kapalı çevrim sistemin kararlılık analizinde kullanılacak olan benzerlik dönüşüm matrisinin bulunması ile ilgili üç farklı yöntem geliştirilmiştir (Yöntem 5.1 - 5.3). Bu yöntemler, ortak karesel Lyapunov fonksiyonunun bulunması için de kullanılabilir.
- Literatürde dijital yeniden tasarım olarak bilinen bir yöntem, düzensiz örneklemeli sistemlerin kontrolü için genişletilmiş (Teorem 5.3) ve $h_{\max}$ için bazı üst sınırlar bulunmuştur (Teorem 5.4 ve 5.5).
- Daha önce ele alınmamış bir yöntem olarak kapalı çevrim sistem matrisinin özdeğerlerini her $h \in \mathbb{H}$ için uygun değerlere getiren kontrolörün kararlılığı garanti edildiği kanıtlanmıştır (Teorem 5.6).
- Literatürde bir ilk olarak kapalı çevrim sistem matrisinin tekil değerlerini uygun yerlere atayan kontrolör ile kararlılık sağlanmıştır (Teorem 5.8). Ayrıca bu yöntem için bir $h_{\max}$ üst sınırı verilmiştir (Önsav 5.3).
- Literatürde zor bir problem olarak bilinen, rasyonel bağımlılığı olmayan çoklu durum ölçüm gecikmesine sahip sistemlerin kontrolü için bir düzensiz örnekleme şeması önerilmiştir. Önerilen şema kullanılarak düzensiz örneklemeli sistemlerin kontrolü için geliştirilen herhangi bir kontrolörün bu problemin çözümünde de kullanılabileceği gösterilmiştir.

Bu bölümdeki özgün katkıların çıktıları aşağıdaki uluslararası hakemli konferanslarda yayınlanmış ve sözlü olarak bildirilmiştir:

- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2016). Stabilization of Controller-Driven Nonuniformly Sampled Systems via Digital Redesign, *6th IFAC Symposium on System Structure and Control*, Istanbul, 49(9), 142–145.
- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2014). Controllability, Observability and Eigenvalue Assignment on Isolated Time Scales, *19th IFAC World Congress*, Cape Town, s.3815–3820.
- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2012). Eigenvalue assignment for systems with multiple measurement delays on isolated time scales, *10th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Boston, cilt 10, s.156–160.

5.1 Kontrolör GÜDÜMLÜ ÖRNEKLEME ALTINDA KONTROL

Kontrolör güdümlü örnekleme altında kontrol ile ilgili literatürde mevcut olan çalışmalar limitli sayıdadır. [102] ve [103] çalışmalarında ayrık sistem matrislerini ortak bir benzerlik dönüşümü ile üçgenleştirme yöntemi kullanılarak sistemi kararlı kılan bir durum geri beslemesi kontrolörü önerilmiştir. İki çalışmada da örnekleme aralıklarının alması gereken değerlerin sonlu bir kümeden seçilmesi gerekmektedir. [102] çalışmasında bu küme büyüdükçe verilen yöntemin sonuç üretmediği gözlemlenmiştir. Ayrıca, [103] çalışmasında önerilen yöntem yalnızca giriş sayısı, sürekli sistem matrisinin kararsız özdeğer sayısından bir eksik olan sistemler için geçerli olmaktadır. Bu bölümde verilecek olan yöntemlerin hiçbirisi yukarıda bahsedilen kısıtlamalara sahip değildir.

Birinci alt bölümde küçük örnekleme zamanı yaklaşıklığı kullanılarak kararlı kılan kontrolörün varlığı için bir limit koşul verilecektir. Bu koşul ile aynı zamanda $h_{\max}$ için bir üst sınır verilmektedir. Ayrıca, bu koşulda kullanılan benzerlik dönüşüm matrisinin bulunması için üç farklı yöntem önerilecektir.

Birinci alt bölümde verilecek olan kararlılık koşulu kullanılarak ikinci alt bölümde dijital yeniden tasarım yöntemi ile sistemin kararlı kılınabileceği gösterilecektir. Ayrıca, bu yöntem için $h_{\max}$ üst sınırları bulunacaktır.

Yine aynı koşul kullanılarak üçüncü alt bölümde kapalı çevrim sistem özdeğerlerini her $h \in \mathbb{H}$ için uygun değerlere atayan kontrolörün kararlılığı sağladığı gösterilecektir.

Dördüncü alt bölümde ise literatürde ilk kez bu çalışmada kullanılan tekil değer atama yöntemi ile kontrol ele alınacaktır. Bu yöntemde kapalı çevrim sistem matrisini tüm $h \in \mathbb{H}$ için bir daralma (contraction) yapan kontrolörün ve benzerlik dönüşümünün var olduğu gösterilerek kararlılık da garantilenecektir. Ayrıca, tekil değer atama için $h_{\max}$ üst sınırı verilecektir.

Son olarak beşinci alt bölümde yukarıda geliştirilen kontrol yöntemlerinin zaman gecikmeli sistemler için bir uygulaması ele alınacaktır. Rasyonel bağımlılığı olmayan çoklu durum ölçüm gecikmesine sahip sistemlerin özel bir düzensiz örnekleme kullanılarak kontrolü sağlanacaktır.

5.1.1 Kararlı kılan kontrolörün varlığı

Öncelikle (5.5) sistemini kararlı kılan kontrolörün ve kapalı bir örnekleme aralığı kümesi $\mathbb{H}$ 'nin varlığı ile ilgili analiz yapılacaktır. Bu konudaki bilinen ilk çalışmalardan biri olan [94]'te aşağıda verilen teorem kanıtlanmıştır.

Teorem 5.1 ([94, Teorem 1]). *Verilen (5.1) sistemi $u(t) := Lx(t)$ sürekli kontrol işareti için kararlı olsun. O halde tüm $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}] \subset (0, \bar{h})$ için*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BLx(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

sistemini kararlı yapan bir $\bar{h} > 0$ vardır.

Teoremin orijinalinde sonuç tüm $h_k < \bar{h}$ için verilmiştir. Ancak, teoremin kanıtı detaylı incelendiğinde aslında kararlılığın $[h_{\min}, h_{\max}] \subset (0, \bar{h})$ olan bir kapalı aralıkta garantilendiği ortaya çıkmaktadır.

Yukarıdaki teorem süreklilikten dolayı sezgisel olarak beklenen bir sonuçtur. Bu teoremin genişletilmiş bir hali Teorem 5.2 ile bu çalışmada üretilmiştir. Ancak, bu teoremi vermeden önce birçok farklı kontrolör bulma yöntemi için kararlılığı kanıtlamakta kullanılacak bir önsav aşağıdaki gibi verilecektir.

Önsav 5.1. *Verilen (5.1) sistemi için $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A + BL$ matrisini Hurwitz yapan bir matris ve $K : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ pürüzsüz (smooth) matris tanımlı bir fonksiyon olsun. Tersine olan bir $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ için*

$$S := T(A + BL)T^{-1} \tag{5.6}$$

tanımlansın. Eğer

$$S + S^T < 0 \text{ ve } \lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) = L \quad (5.7)$$

oluyorsa (5.3) sisteminin kararlı olduğu $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ kapalı aralığı vardır.

Kanıt. Önsavda verilen özellikleri sağlayan T matrisi ve $K(h)$ kontrolörü için

$$\|T [F(h) + G(h)K(h)] T^{-1}\| < 1, \quad \forall h < \bar{h} \quad (5.8)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\bar{h} > 0$ var olduğu gösterilecektir. Bunun sonucu olarak Teorem 3.14 gereği sistemin kararlı olduğu $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}] \subset (0, \bar{h})$ kapalı aralığının varlığı kanıtlanmış olacaktır.

Önsav B.3 gereği

$$F(h) = I + \Gamma(h)A$$

ve S 'nin tanımı gereği

$$\hat{A} := TAT^{-1} = S - TBLT^{-1}$$

eşitlikleri geçerlidir. O halde Önsav B.2 kullanılarak

$$\hat{\Gamma}(h) := T\Gamma(h)T^{-1} = \int_0^h e^{TAT^{-1}\tau} d\tau = \int_0^h e^{\hat{A}\tau} d\tau$$

tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} \Psi(h) &:= T [F(h) + G(h)K(h)] T^{-1} \\ &= T [I + \Gamma(h)A + \Gamma(h)BK(h)] T^{-1} \\ &= T [I + \Gamma(h)(A + BK(h))] T^{-1} \\ &= I + T\Gamma(h)T^{-1}T(A + BK(h))T^{-1} \\ &= I + \hat{\Gamma}(h) (TAT^{-1} + TBK(h)T^{-1}) \\ &= I + \hat{\Gamma}(h) (S - TBLT^{-1} + TBK(h)T^{-1}) \\ &= I + \hat{\Gamma}(h) (S + TB[K(h) - L]T^{-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Önsav B.1 gereği $\hat{\Gamma}(h)$ için Taylor serisi açılımı

$$\hat{\Gamma}(h) = hI + \frac{h^2}{2!}\hat{A} + \frac{h^3}{3!}\hat{A}^2 + \dots$$

biçimindedir. Ayrıca,

$$\Lambda(h) := S + TB[K(h) - L]T^{-1} \text{ ve}$$

$$\Theta(h) := \frac{\widehat{\Gamma}(h) - hI}{h^2} = \frac{1}{2!}\widehat{A} + \frac{h}{3!}\widehat{A}^2 + \dots$$

tanımları yapılsın. O halde,

$$\Psi(h) = I + \widehat{\Gamma}(h)\Lambda(h) = I + h\Lambda(h) + h^2\Theta(h)\Lambda(h)$$

elde edilir. Demek ki, (5.8) koşulunu göstermek için

$$\|\Psi(h)\| = \lambda_{\max} \left(\Psi(h)\Psi^T(h) \right) < 1, \quad \forall h < \bar{h}$$

eşitsizliğini sağlayan $\bar{h} \in \mathbb{R}^{>0} \cup \{\infty\}$ olduğu gösterilmelidir. O halde,

$$\begin{aligned} \Psi(h)\Psi^T(h) &= [I + h\Lambda(h) + h^2\Theta(h)\Lambda(h)] [I + h\Lambda^T(h) + h^2\Lambda^T(h)\Theta^T(h)] \\ &= I + h [\Lambda(h) + \Lambda^T(h)] \\ &\quad + h^2 [\Theta(h)\Lambda(h) + \Lambda^T(h)\Theta^T(h) + \Lambda(h)\Lambda^T(h)] \\ &\quad + h^3 [\Lambda(h)\Lambda^T(h)\Theta^T(h) + \Theta(h)\Lambda(h)\Lambda^T(h)] \\ &\quad + h^4 \Theta(h)\Lambda(h)\Lambda^T(h)\Theta^T(h) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} R(h) &:= [\Theta(h)\Lambda(h) + \Lambda^T(h)\Theta^T(h) + \Lambda(h)\Lambda^T(h)] \\ &\quad + h [\Lambda(h)\Lambda^T(h)\Theta^T(h) + \Theta(h)\Lambda(h)\Lambda^T(h)] \\ &\quad + h^2 \Theta(h)\Lambda(h)\Lambda^T(h)\Theta^T(h) \end{aligned}$$

tanımı yapılırsa

$$\Psi(h)\Psi^T(h) = I + h [\Lambda(h) + \Lambda^T(h)] + h^2 R(h) \quad (5.9)$$

elde edilir. Kolayca görülebileceği gibi $R(h)$ her yerde analitik (entire) ve simetriktir.

O halde

$$\lambda_{\max} \left(\Psi(h)\Psi^T(h) \right) \leq 1 + h\lambda_{\max} \left([\Lambda(h) + \Lambda^T(h)] \right) + h^2\lambda_{\max} (R(h))$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} E(h) &:= [\Lambda(h) + \Lambda^T(h)] - (S + S^T) \\ &= TB [K(h) - L] T^{-1} + T^{-T} [K(h) - L]^T B^T T^T \end{aligned}$$

tanımı yapılırsa

$$\lambda_{\max} \left(\Psi(h) \Psi^T(h) \right) \leq 1 + h \lambda_{\max} \left(S + S^T \right) + h \lambda_{\max} (E(h)) + h^2 \lambda_{\max} (R(h)) < 1$$

eşitsizliğinin sağlanması kanıt için yeterlidir. Yani, eşdeğer olarak

$$h \lambda_{\max} (R(h)) < -\lambda_{\max} \left(S + S^T \right) - \lambda_{\max} (E(h))$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. $\lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) = L$ ve $S + S^T < 0$ olduğundan

$$-\lambda_{\max} \left(S + S^T \right) > \lambda_{\max} (E(h)), \quad \forall h < h_e$$

eşitsizliğini sağlayan bir $h_e \in \mathbb{R}^{>0} \cup \{\infty\}$ vardır. Bu h_e için

$$\eta := \sup_{h \in (0, h_e)} \lambda_{\max} (E(h)) \text{ ve } \gamma := \sup_{h \in (0, h_e)} \lambda_{\max} (R(h))$$

olsun. O halde,

$$\bar{h} := \begin{cases} h_e & \gamma \leq 0 \text{ ise} \\ \min \left(h_e, \frac{-\lambda_{\max} (S + S^T) - \eta}{\gamma} \right) & \gamma > 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (5.10)$$

seçimi ile kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Bu önsav kullanılarak hesaplanan $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ aralığında bir patolojik örnekleme (Tanım 4.6) $h_p \in \mathbb{H}$ var olabilir. Ancak, bu durumda bile (5.8) eşitsizliğinin sağlanması kararlılığın garantilenmesi için yeterlidir. Eğer bir h_p için $[F(h_p), G(h_p)]$ sabit matris çiftinin atanamayan bir özdeğeri kararsız olsaydı

$$1 \leq \rho (\Psi(h_p)) \leq \|\Psi(h_p)\|$$

olacağından (5.8) koşulu da sağlanmazdı ve $h_p \notin \mathbb{H}$ olurdu. Yani, patolojik örnekleme için (5.8) haricinde başka bir koşul göz önünde bulundurmaya gerek yoktur.

Teorem 5.2. Verilen (5.1) sistemi için $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A + BL$ matrisini Hurwitz yapan bir matris olsun. Eğer $K : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ şeklinde tanımlanmış pürüzsüz matris tanımlı fonksiyon için

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) = L$$

oluyorsa (5.3) sisteminin kararlı olduğu $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ kapalı aralığı vardır.

Kanıt. $A + BL$ Hurwitz olduğundan Lyapunov teoremi gereği her $Q > 0$ için

$$(A + BL)^T P + P(A + BL) = -Q \quad (5.11)$$

matris eşitliğini sağlayan bir $P = P^T > 0$ vardır. $P > 0$ olduğundan $P = T^T T$ eşitliğini sağlayan ve tersi olan $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi vardır. Şimdi,

$$S := T(A + BL)T^{-1} \text{ ve } \widehat{Q} := T^{-T}QT^{-1}$$

tanımları yapılsın. (5.11) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} (A + BL)^T T^T T + T^T T(A + BL) &= -Q \\ T^{-T}(A + BL)^T T^T + T(A + BL)T^{-1} &= -T^{-T}QT^{-1} \\ S^T + S &= -\widehat{Q} \end{aligned}$$

elde edilir. T 'nin tersi olduğundan $\widehat{Q} > 0$ ve dolayısıyla $S^T + S < 0$ olur. O halde Önsav 5.1 gereği kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Dikkat edilecek olursa Teorem 5.2'de $K(h) = L$, $\forall h > 0$ seçimi yapılırsa Teorem 5.1 de kanıtlanmış olur. Yani, Teorem 5.2 ile literatürde var olan sonuçlar genişletilmiştir.

Yukarıda verilen teorem ve önsav süreklilikten dolayı sezgisel olarak şaşırtıcı değildir. Ancak, ilerideki bölümlerde görüleceği gibi Önsav 5.1 ile farklı yöntemlerle bulunan kontrolörler için çatı oluşturacak bir varlık koşulu verilmiştir. Ayrıca $h_{\max}$ üst sınırı için yapıcı bir kanıt verilmiştir.

Benzerlik dönüşüm matrisi T 'nin seçimine göre $h_{\max}$ değeri büyük farklılıklar gösterebilir. Ancak, T 'nin nasıl seçileceği aşıkardır. Aşağıda, (5.6)'da tanımlanan S için $S^T + S < 0$ eşitsizliğini sağlayan T 'nin seçimi için farklı yöntemler önerilmiştir.

Yöntem 5.1. $A + BL$ matrisini Hurwitz yapan bir L bulunur. Bir $Q > 0$ seçilerek

$$(A + BL)^T P + P(A + BL) + Q = 0 \quad (5.12)$$

Lyapunov eşitliğini sağlayan $P = P^T > 0$ bulunur. $P = T^T T$ yapan T seçilir.

Yukarıdaki yöntem kullanılarak seçilen T ile $S^T + S < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı Teorem 5.2'nin kanıtında gösterilmiştir.

Yöntem 5.2. Bir $Q > 0$ ve $R > 0$ seçilerek

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (5.13)$$

Riccati eşitliğini sağlayan $P = P^T > 0$ bulunur. $L = -R^{-1}B^T P$ ve $P = T^T T$ yapan T seçilir.

Yukarıda seçilen L , (5.13) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= A^T P + PA + PBL + Q \\ &= L^T B^T P + A^T P + PA + PBL + Q - L^T B^T P \\ &= (A + BL)^T P + P(A + BL) + Q + PBR^{-1}B^T P \end{aligned}$$

elde edilir. $R > 0$ olduğundan $PBR^{-1}B^T P \geq 0$ olur ve $Q > 0$ olduğundan

$$\tilde{Q} := Q + PBR^{-1}B^T P > 0$$

elde edilir. O halde, (5.11) eşitliğinde Q yerine $\tilde{Q}$ kullanılırsa yukarıdaki yöntem kullanılarak seçilen T ile $S^T + S < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı Teorem 5.2'nin kanıtındaki gibi gösterilir.

Yöntem 5.3. $A + BL$ matrisini Hurwitz yapan bir L bulunur. Eğer $A + BL$ köşegenleştirilebilir ise

$$S := T(A + BL)T^{-1} = \text{diag}\{\mathcal{J}(\lambda_i)\}$$

matrisini gerçel blok köşegen forma (Bölüm 2.1) getiren T seçilir. Eğer $A + BL$ köşegenleştirilebilir değilse bir $\delta > 0$ seçilerek

$$S := T(A + BL)T^{-1} = \text{diag}\{\mathcal{J}(\lambda_i, \delta)\}$$

matrisini gerçel Jordan blok formuna (Bölüm 2.1) getiren T seçilir. Bu durumda $S + S^T < 0$ sağlanması için n_i Jordan bloğunun boyutu olmak üzere

$$\text{Re } \lambda_i < -\delta \cos(\pi/(n_i + 1)) \quad (5.14)$$

koşulu sağlanmalıdır.

$A + BL$ Hurwitz olduğundan matrisin tüm özdeğerleri için $\text{Re } \lambda_i < 0$ sağlanmalıdır. $A + BL$ köşegenleştirilebilir olduğunda eğer λ_i gerçel ise $\mathcal{J}(\lambda_i) = \lambda_i < 0$ olur. Eğer

λ_i karmaşık eşlenik ise $\mathcal{J}^T(\lambda_i) + \mathcal{J}(\lambda_i) = 2 \operatorname{Re} \lambda_i I_2$ elde edilir. Demek ki $S^T + S = 2 \operatorname{diag}\{\operatorname{Re} \lambda_i\} < 0$ olur. $A + BL$ köşegenleştirilebilir değilse ve λ_i gerçel ise Önsav A.2’de tanımlanan M için

$$\mathcal{J}^T(\lambda_i, \delta) + \mathcal{J}(\lambda_i, \delta) = 2\lambda_i I_{n_i} + \delta M \quad (5.15)$$

elde edilir. O halde Önsav A.2 gereği (5.15) matrisinin özdeğerleri

$$2\lambda_i + 2\delta \cos(q\pi/(n_i + 1)), \quad q = 1, 2, \dots, n_i$$

biçimindedir. Bu özdeğerler en büyük değerini $q = 1$ için alacağından ve negatif olmaları gerektiğinden (5.14) eşitsizliğine ulaşılır. Eğer λ_i karmaşık ise uygun bir permutasyon matrisi P için

$$\mathcal{J}^T(\lambda_i, \delta) + \mathcal{J}(\lambda_i, \delta) = 2 \operatorname{Re} \lambda_i I_{2n_i} + \delta P \operatorname{blkdiag}\{M, M\} P^T \quad (5.16)$$

elde edileceğinden yine (5.14) eşitsizliğine ulaşılır.

Dikkat edilecek olursa eğer bir T için (5.8) eşitsizliği sağlanıyorsa, V ortogonal bir matris olmak üzere $\tilde{T} := VT$ için de eşitsizlik sağlanır. Hatta, Önsav 5.1’in kanıtından görülebileceği gibi $\tilde{T}$ için bulunacak olan $\bar{h}$ da aynıdır. Bu nedenle QR ayrıştırması gereği sadece üst üçgen biçimindeki T ’leri göz önünde bulundurmak genelliği bozmaz.

Bu bölümde kararlı kılan kontrolör $K(h)$ ’nın varlığı için oldukça genel bir koşul verilmiştir. Ancak, özel olarak bu $K(h)$ ’nın nasıl bulunacağı sonraki bölümlerde detaylı biçimde incelenecektir.

5.1.2 Dijital yeniden tasarım ile kontrol

Sürekli sistemlerin ayrık kontrolör kullanılarak kararlı kılınması ve kontrolü için yaygın kullanılan bir yöntem, sürekli kapalı çevrim durumları ile örneklemeli sistem kapalı çevrim durumlarını birbirine eşitlemeye çalışmaktır. Bu yöntem literatürde *dijital yeniden tasarım (digital redesign)* ya da *durum eşleme (state matching)* olarak adlandırılır [1,95,96,97,98].

Bu bölümde [1]’de verilen dijital yeniden tasarım fikri düzensiz örneklemeli sistemlere genişletilmiştir. Bu bölümdeki sonuçlar "IFAC System Structure and Control 2016" konferansında "Stabilization of Controller-Driven Nonuniformly Sampled Systems via Digital Redesign" isimli çalışma ile yayınlanmıştır [105].

Zamanla değişmeyen doğrusal sũrekli (5.1) sistemini kararlı kılan bir $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ statik durum geri beslemesi kontrolũrũ seşilmiş olsun. Bu durumda, bir örnekleme zamanı dizisi $\mathcal{T} := \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ve verilmiş olan bir başlangış durumu $x(0) = x_0$ için

$$\dot{x}(t) = (A + BL)x(t) \quad (5.17)$$

sisteminin durum yanıtı ile (5.3) sisteminin durum yanıtını eşleyen $K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ matris fonksiyonu bulunmalıdır. Yani Teorem 2.1 gereği (5.5) ayrık sisteminin durumları ile (5.17) sisteminin her $k \in \mathbb{N}$ için t_k anındaki durumlarının eşitlenmesi gerekmektedir. O halde, eğer bir $k \in \mathbb{N}$ için $x(t_k) = x_k$ ise

$$x(t_{k+1}) = x_{k+1} = e^{(A+BL)h_k} x_k = [e^{Ah_k} + G(h_k)K(h_k)] x_k \quad (5.18)$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu eşitlik tũm $k \in \mathbb{N}$ ve olası $x_k \in \mathbb{R}^n$ için sağlanması gerektiğinden $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ olmak ũzere

$$G(h)K(h) = e^{(A+BL)h} - e^{Ah}, \quad \forall h \in \mathbb{H} \quad (5.19)$$

eşitliği sağlanmalıdır. Ancak, çoğu zaman $\text{rank } G(h) \leq m < n$ olduğundan bu eşitliği tam olarak sağlayan bir $K(h)$ en genel halde bulunmamaktadır. Yani iki sistemin durumları tam olarak eşitlenemez.

Ne var ki, durumlar tam olarak eşitlenemese bile kısmi olarak eşitlenebilir. Bunun için bir $W : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ pũrũzsũz matris tanımlı fonksiyonu hangi durumların ne lũde eşleneceğinin ağırlıklandırması için kullanılabilir. Yani, (5.19) eşitliğini soldan $W(h)$ ile çarparak

$$W(h)G(h)K(h) = W(h) \left(e^{(A+BL)h} - e^{Ah} \right), \quad \forall h \in \mathbb{H} \quad (5.20)$$

elde edilirse tam eşitlik sağlanabilir. Eğer $W(h)G(h)$ matrisinin tũm $h \in \mathbb{H}$ için tersi varsa bu eşitliği sağlayan kontrolör

$$K(h) = [W(h)G(h)]^{-1} W(h) \left(e^{(A+BL)h} - e^{Ah} \right) \quad (5.21)$$

biçiminde bulunabilir.

Öncelikle ağırlık matrisi $W(h)$ 'nın etkisi incelenecek olursa, (5.20) ve (5.18) kullanılarak

$$z(t_{k+1}) := W(h_k)x(t_{k+1}) = W(h_k)x_{k+1} \in \mathbb{R}^m$$

eşitliği elde edilir. Yani t_{k+1} anında ancak iki sistemin durumlarının

$$z_i(t_{k+1}) = \sum_{j=1}^n W_{ij}(h_k) x_j(t_{k+1}) = \sum_{j=1}^n W_{ij}(h_k) x_{k+1}^{(j)}$$

biçimindeki ağırlıklı toplamları birbirine eşit olacak şekilde eşleme yapılabilir. Ancak, $W(h)$ matrisinin nasıl seçilmesi gerektiği açık değildir [1].

Eşitlik (5.21) ile verilen kontrolörün var olması için gerek ve yeter koşul, $W(h)G(h)$ matrisinin tüm $h \in \mathbb{H}$ için tersi olacak şekilde bir $W(h)$ matrisi bulunmasıdır. Bunun için gerek ve yeter koşulu ise $G(h) := \Gamma(h)B$ matrisinin tüm $h \in \mathbb{H}$ için tam ranklı olmasıdır. O halde, problem tanımı varsayımı dolayısıyla $\text{rank } B = m$ olduğundan Önsav A.1 gereği

$$\text{Im } B \cap \ker \Gamma(h) = \{0\}, \quad \forall h \in \mathbb{H} \quad (5.22)$$

olmalıdır. Bu bölümün geri kalanında $\Gamma(h)$ matrisinin tüm $h \in \mathbb{H}$ için tersi olduğu varsayılacaktır. Bu durumda $\ker \Gamma(h) = \{0\}$, $\forall h \in \mathbb{H}$ olacağından (5.22) koşulu da sağlanır.

Önsav B.4 gereği $\Gamma(h)$ matrisinin tersi olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin tüm $h \in \mathbb{H}$ ve sıfırdan farklı tüm $\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tamsayıları için $j := \sqrt{-1}$ olmak üzere $\lambda(A) = 2\mu\pi j/h$ biçiminde özdeğeri bulunmamasıdır. Eğer bir $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ için A 'nın $\lambda := \alpha j$ biçiminde bir özdeğeri varsa $h_{\max} < 2\pi/\alpha$ seçimi ile $\Gamma(h)$ matrisinin tersi olması garantilenebilir.

Periyodik örneklemeli sistemler için [1] çalışmasında $\Gamma(h)$ matrisinin tersi olma koşulu olmadan dijital yeniden tasarım yöntemi başarı ile uygulanmıştır. Ancak, bilindiği kadarıyla düzensiz örneklemeli sistemler için benzer bir çalışma literatürde bulunmamaktadır.

Yukarıdaki tartışma ve varsayımlar altında bu çalışmada bir $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sabit matrisi için $W(h) := X\Gamma^{-1}(h)$ şeklinde seçilecektir. Bu durumda (5.21) eşitliği

$$K(h) = (XB)^{-1}X\Gamma^{-1}(h) \left(e^{(A+BL)h} - e^{Ah} \right) \quad (5.23)$$

biçimine dönüşür. Öncelikle bu kontrolör ile sistemi kararlı kılan bir $\mathbb{H}$ olduğu gösterilmelidir.

Teorem 5.3. (5.23) kontrolörü ile (5.3) sisteminin kararlı olduğu bir $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ kapalı aralığı vardır.

Kanut. Teorem 5.2 gereği $\lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) = L$ olduğunu göstermek yeterlidir. Önsav B.1 kullanılarak

$$\Theta(h) := \frac{1}{h} \Gamma(h) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^q h^q}{(q+1)!} = I + \frac{A}{2!} h + \frac{A^2}{3!} h^2 + \dots$$

tanımı yapılsın. $\Gamma(h)$ 'nin tersi olduğundan $\Theta(h)$ matrisinin de tersi vardır. Ayrıca, $\Theta(0) = I$ tersi olan bir matris olduğundan bir $\{\Omega_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ matris dizisi için

$$\Theta^{-1}(h) := \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_q h^q = \Omega_0 + \Omega_1 h + \Omega_2 h^2 + \dots$$

seri açılımı vardır [106]. O halde,

$$\begin{aligned} I &= \Theta(h) \Theta^{-1}(h) \\ &= \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^q h^q}{(q+1)!} \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \Omega_q h^q \right) \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^q \frac{A^i \Omega_{q-i}}{(i+1)!} \right) h^q \\ &= \Omega_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\Omega_q + \sum_{i=1}^q \frac{A^i \Omega_{q-i}}{(i+1)!} \right) h^q \end{aligned}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Demek ki $\Omega_0 = I$ olmak üzere

$$\Omega_q = - \sum_{i=1}^q \frac{A^i \Omega_{q-i}}{(i+1)!}$$

tekrarlamalı eşitlikleriyle $\Theta^{-1}(h)$ elde edilir. Bu eşitlik $K(h)$ tanımında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (XB)^{-1} X \Gamma^{-1}(h) \left(e^{(A+BL)h} - e^{Ah} \right) \\ &= (XB)^{-1} X \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \Theta^{-1}(h) \left(e^{(A+BL)h} - e^{Ah} \right) \\ &= (XB)^{-1} X \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} I + \sum_{q=1}^{\infty} \Omega_q h^{q-1} \right) \left(e^{(A+BL)h} - e^{Ah} \right) \\ &= (XB)^{-1} X \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(e^{(A+BL)h} - e^{Ah} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa limitte 0/0 belirsizliği vardır. Ancak; limit, skalerle çarpım ve türev işlemlerinin hepsi matrisin her bir elemanı için ayrı ayrı tanımlandığından L'Hôpital kuralı geçerlidir. O halde,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) = (XB)^{-1} X \lim_{h \rightarrow 0^+} \left((A+BL)e^{(A+BL)h} - Ae^{Ah} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (XB)^{-1}XBL \\
&= L
\end{aligned}$$

elde edilerek kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Verilen bu teoremle $K(h)$ kontrolörünün uygun $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ seçimiyle sistemin kararlılığını garantileyeceği gösterilmiştir. Ayrıca, Önsav 5.1 ile $h_{\max}$ için bir üst sınır da elde edilebilir. Ancak, $K(h)$ 'nın özel biçiminden dolayı daha iyi bir $h_{\max}$ üst sınırı elde edilebilir. Öncelikle,

$$\begin{aligned}
\Gamma(h) &:= \int_0^h e^{A\tau} d\tau & \Gamma_c(h) &:= \int_0^h e^{(A+BL)\tau} d\tau \\
\Theta(h) &:= \frac{1}{h}\Gamma(h) & \Theta_c(h) &:= \frac{1}{h}\Gamma_c(h)
\end{aligned}$$

tanımları yapılsın. Bu tanımlar yerine yazılarak Önsav B.3 ile

$$\begin{aligned}
&F(h) + G(h)K(h) \\
&= e^{Ah} + \Gamma(h)B(XB)^{-1}X\Gamma^{-1}(h) \left(e^{(A+BL)h} - e^{Ah} \right) \\
&= I + \Gamma(h)A + \Gamma(h)B(XB)^{-1}X\Gamma^{-1}(h) [I + \Gamma_c(h)(A + BL) - I - \Gamma(h)A] \\
&= I + \Gamma(h) \left\{ A + B(XB)^{-1}X\Gamma^{-1}(h) [\Gamma_c(h)(A + BL) - \Gamma(h)A] \right\} \\
&= I + \Gamma(h) \left\{ A + B(XB)^{-1}X [\Gamma^{-1}(h)\Gamma_c(h)(A + BL) - A] \right\} \\
&= I + h\Theta(h) \left\{ A + B(XB)^{-1}X [\Theta^{-1}(h)\Theta_c(h)(A + BL) - A] \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan sonra

$$Z(h) := \Theta^{-1}(h)\Theta_c(h) - I \quad (5.24)$$

tanımı yapılarak işlemlere devam edilirse

$$\begin{aligned}
&F(h) + G(h)K(h) \\
&= I + h\Theta(h) \left\{ A + B(XB)^{-1}X [(I + Z(h))(A + BL) - A] \right\} \\
&= I + h\Theta(h) \left\{ A + B(XB)^{-1}X [BL + Z(h)(A + BL)] \right\} \\
&= I + h\Theta(h) [A + BL + B(XB)^{-1}XZ(h)(A + BL)] \\
&= I + h\Theta(h) [I + B(XB)^{-1}XZ(h)] (A + BL) \\
&= I + h\Theta_c(h) [I + Z(h)]^{-1} [I + B(XB)^{-1}XZ(h)] (A + BL)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan sonra

$$E(h) := [I + Z(h)]^{-1} [I + B(XB)^{-1}XZ(h)] - I \quad (5.25)$$

tanımı yapılarak işlemlere devam edilirse

$$\begin{aligned} F(h) + G(h)K(h) &= I + h\Theta_c(h) [I + E(h)] (A + BL) \\ &= e^{(A+BL)h} + h\Theta_c(h)E(h)(A + BL) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$= e^{(A+BL)h} + \left(\int_0^h e^{(A+BL)\tau} d\tau \right) E(h)(A + BL) \quad (5.27)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 5.3'ün kanıtındaki aynı sebeplerden dolayı L'Hôpital kuralı kullanılarak $\lim_{h \rightarrow 0^+} \Theta(h) = I$ olduğu görülebilir. O halde, herhangi bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ için uygun h seçimi ile $\Theta(h)$ matrisi birim matrise istenildiği kadar yaklaştırılabilir. Yani, h 'nin uygun seçimiyle $Z(h)$ matrisi 0'a istenildiği kadar yaklaştırılabilir. Bu da (5.25)'ten görülebileceği gibi $E(h)$ 'nin 0'a yakın elde edilmesini sağlar. Sonuçta sezgisel olarak $h_{\max}$ 'ın uygun seçimiyle ayrık zaman kapalı çevrim sistem matrisi $F(h) + G(h)K(h)$ 'nin, sürekli zaman kapalı çevrim sistem matrisi $e^{(A+BL)h}$ 'ya yakınlaştırılabileceği görülür.

Bu tartışmalardan sonra (5.23) ile verilen kontrolör için kararlılığın sağlandığı $h_{\max}$ seçimine dair bazı yeter koşullar verilecektir.

Teorem 5.4. $A + BL$ matrisi, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ benzerlik dönüşüm matrisi ile

$$\mathcal{J} := T(A + BL)T^{-1}$$

biçiminde Jordan gerçel blok formuna getirilsin. O halde, $\widehat{\Theta}_c(h) := T\Theta_c(h)T^{-1}$ olmak üzere tüm $h \in \mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ için

$$\|TE(h)T^{-1}\| < \frac{1 - \|e^{\mathcal{J}h}\|}{h \|\widehat{\Theta}_c(h)\| \|\mathcal{J}\|} \quad (5.28)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (5.3) sistemi karardır.

Kanıt. (5.28) koşulu sağlanıyorsa olsun. O halde, (5.26) ve Önsav B.2 kullanılarak

$$\|T [F(h) + G(h)K(h)] T^{-1}\| = \|Te^{(A+BL)h}T^{-1} + hT\Theta_c(h)E(h)(A + BL)T^{-1}\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| e^{\mathcal{J}h} + h\widehat{\Theta}_c(h)TE(h)T^{-1}\mathcal{J} \right\| \\
&\leq \left\| e^{\mathcal{J}h} \right\| + h \left\| \widehat{\Theta}_c(h) \right\| \left\| TE(h)T^{-1} \right\| \left\| \mathcal{J} \right\| \\
&< 1
\end{aligned}$$

elde edildiğinden Teorem 3.14 gereği kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Eğer $A + BL$ matrisin karmaşık özdeğerleri varsa, matris köşegenleştirilebilir olduğunda bile (5.28) ifadesi daha fazla sadeleştirilemez. Ancak, $A + BL$ matrisi köşegenleştirilebilir ve gerçel özdeğerlere sahipse daha sade bir koşul verilebilir.

Teorem 5.5. $A + BL$ matrisi köşegenleştirilebilir ve tüm özdeğerleri gerçel olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
\delta &:= \min\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(A + BL)\} \quad \text{ve} \\
\rho &:= \max\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(A + BL)\}
\end{aligned}$$

olmak üzere tüm $h \in \mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ için

$$\left\| T^{-1}E(h)T \right\| < \frac{\delta}{\rho} \quad (5.29)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (5.3) sistemi karardır.

Kanıt. $\mathcal{D} := T(A + BL)T^{-1}$ köşegen matris olsun. O halde, $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, $A + BL$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere,

$$\widehat{\Theta}_c(h) := T\Theta_c(h)T^{-1} = \frac{1}{h} \int_0^h e^{\mathcal{D}\tau} d\tau = \text{diag} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h e^{\lambda_i \tau} d\tau \right\} = \text{diag} \left\{ \frac{e^{\lambda_i h} - 1}{\lambda_i h} \right\}$$

elde edilir. $A + BL$ matrisi Hurwitz ve tüm özdeğerleri gerçel olduğundan $\lambda_i < 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ olur. O halde, Önsav B.6 gereği $\theta(\lambda) := (e^{\lambda h} - 1)/\lambda h$ fonksiyonu λ üzerinden monoton artandır. Demek ki, $\gamma := \max\{\lambda : \lambda \in \lambda(\mathcal{D})\} < 0$ olmak üzere

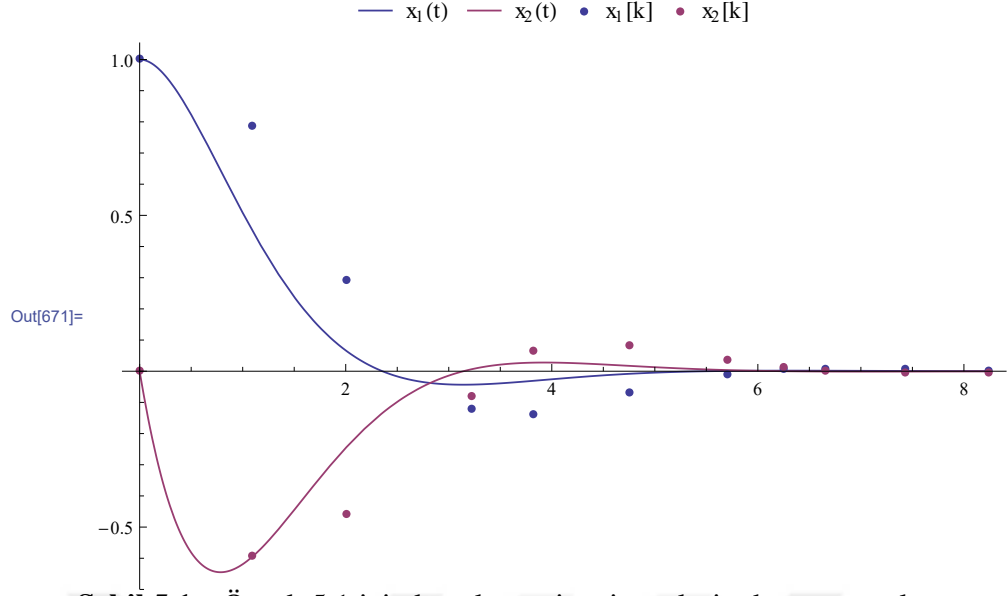
$$\frac{1 - \left\| e^{\mathcal{D}h} \right\|}{h \left\| \widehat{\Theta}_c(h) \right\| \left\| \mathcal{D} \right\|} = \frac{1 - e^{\gamma h}}{h \left| \frac{e^{\gamma h} - 1}{\gamma h} \right| \rho} = \frac{|\gamma|}{\rho} = \frac{\delta}{\rho}$$

eşitliği geçerlidir. Teorem 5.4 gereği kanıt tamamlanır. $\square$

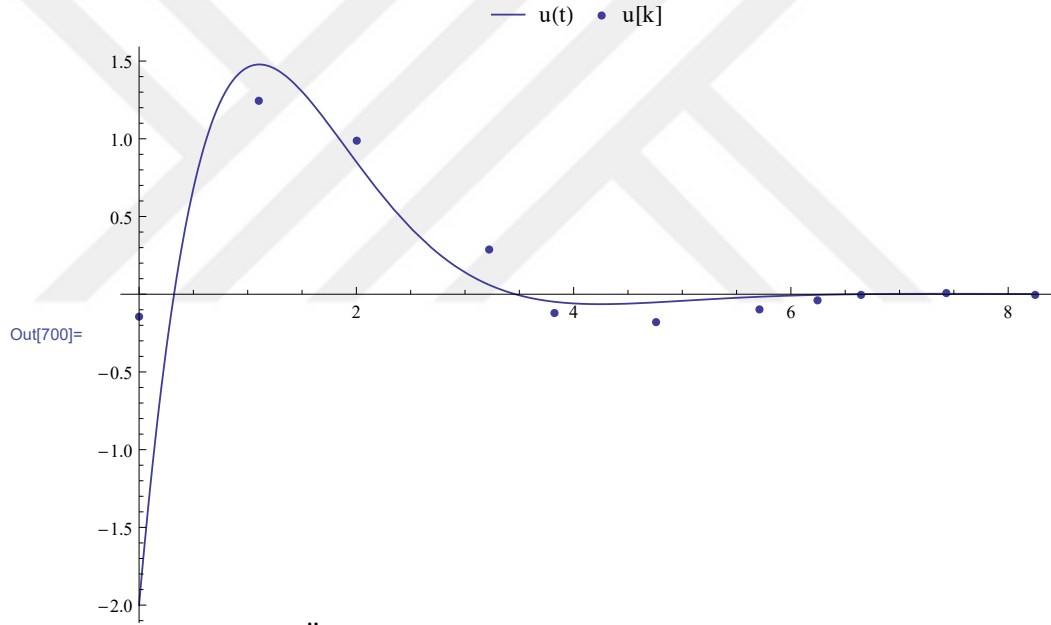
Örnek 5.1. Aşağıdaki sistem ele alınsın.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Bu sistemin kapalı çevrim özdeğerleri $-1 \mp i$ olur. $X = B^T$ seçildiğinde nümerik arama yöntemleri kullanılarak (5.28) koşuluyla $h_{\max} = 1.21938$ olarak bulunur. Rastgele $h_k \in [0.01, 1.21]$ seçilirse durum yanıtı ve kontrol işaretleri aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.1 : Örnek 5.1 için kapalı çevrim sistemlerin durum yanıtları



Şekil 5.2 : Örnek 5.1 için sürekli ve ayrık kontrol işaretleri

5.1.3 Özdeğer atama ile kontrol

Sürekli kapalı çevrim durumları ile örneklemeli sistem kapalı çevrim durumları birbirlerine tam olarak eşitlenemese de bu iki sistemin kapalı çevrim matrislerinin özdeğerleri birbirine eşitlenebilir. Bu yöntemin aynı zamanda iyi bir kontrol performansı gösterdiği gözlemlenmiştir. Bu bölümdeki sonuçlar "IFAC World Congress 2014" konferansında "Controllability, Observability and Eigenvalue Assignment on Isolated Time Scales" adıyla yayınlanmıştır [71].

Bu bölümde (5.1) sisteminin erişilebilir ve (5.4) biçiminde tanımlanmış olan $[F(h), G(h)]$ çiftinin $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ aralığında atanabilir olduğu varsayılacaktır. Teorem 4.11 gereği $\mathbb{H}$ aralığında patolojik bir örnekleme yoksa sistem atanabilirdir. Eğer A matrisinin iki özdeğeri $\alpha, \beta, \eta \in \mathbb{R}, \beta \neq \eta$ gerçel sayıları için $\lambda := \alpha + \beta j$ ve $\gamma := \alpha + \eta j$ biçimindeyse Tanım 4.6 gereği $h_{\max} < 2\pi/|\beta - \eta|$ seçilerek atanabilirlik sağlanabilir.

Eğer sistemin birden fazla girişi varsa, özdeğerleri istenen yerlere atayan kontrolör tek değildir [78]. Bu durumda kontrolör, sistemin bazı özvektörlerini istenen yerlere atama ya da bozuculara ve bilinmezliklere olan dayanıklılığını artırmak için kullanılabilir [107]. Ancak bu çalışmada tek girişli sistemler için sonuçlar verilecektir. Bilindiği kadarıyla düzensiz örneklemeli sistemlerin kontrolü için bu yöntemi kullanan başka bir çalışma literatürde bulunmamaktadır.

Eğer (5.1) sistemini kararlı kılan bir $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ statik durum geri beslemesi kontrolörü seçilmişse, atanabilirlik varsayımı altında tüm $h \in \mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ için

$$\det(sI - [F(h) + G(h)K(h)]) = \det(sI - e^{(A+BL)h}) \quad (5.30)$$

eşitliğini sağlayan $K(h)$ kontrolörü sistemi kararlı kılmak için kullanılacaktır. Tek giriş durumunda, yani $m = 1$ ise, bu kontrolör ile kararlılığın garantilendiği bir $\mathbb{H}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için öncelikle $K(h)$ 'nin bir limiti olduğu gösterilmelidir.

Önsav 5.2. *Eğer (5.3) sisteminin tek bir girişi varsa, yani $m = 1$ ise, (5.30) eşitliğini sağlayan $K(h)$ kontrolörünün $h \rightarrow 0^+$ için limiti vardır.*

Kanıt. (5.30) eşitliğindeki karakteristik polinom $a_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$p(s, h) := \det(sI - e^{(A+BL)h}) = s^n + a_{n-1}(h)s^{n-1} + \dots + a_0(h)$$

biçiminde tanımlansın. Ackermann formülü gereği (5.30) eşitliğini sağlayan $K(h)$ yatay vektörü

$$K(h) = -[0 \ 0 \ \dots \ 1] [G(h) \ F(h)G(h) \ \dots \ F^{n-1}G(h)]^{-1} p(F(h), h)$$

biçiminde bulunabilir [85].

$$\mathcal{A}(h) := [G(h) \ F(h)G(h) \ \dots \ F^{n-1}G(h)]$$

biçiminde tanımlanmış olan matris $\mathcal{A}(0)$ için tekil olduğundan bu matrisin tersinin 0 civarındaki seri açılımı bir $r \in \mathbb{N}$ ve $\{\Omega_q\}_{q \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dizisi için

$$\mathcal{A}^{-1}(h) = h^{-r} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_q h^q$$

biçimindedir [106]. Ayrıca Cayley-Hamilton teoremi gereği her matris kendi karakteristik polinomunu sağlar, yani $p(e^{(A+BL)h}, h) = 0, \forall h \in \mathbb{H}$ olur. O halde, $e_n^T := [0 \ 0 \ \dots \ 1]$ ve $a_n(h) := 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} e_n^T \mathcal{A}^{-1}(h) \left[p(e^{(A+BL)h}, h) - p(F(h), h) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} e_n^T \left(h^{-r} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_q h^q \right) \left(\sum_{i=0}^n a_i(h) \left[(e^{(A+BL)h})^i - (e^{Ah})^i \right] \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} e_n^T \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_i(h) \Omega_q h^{q-r} [e^{i(A+BL)h} - e^{iAh}] \end{aligned}$$

elde edilir. Determinant matris elemanlarının sürekli bir fonksiyonu olduğundan ve determinant içindeki matrisin limiti olduğundan, $p(s, h)$ tanımında limit determinant içine alınabilir. O halde,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} p(s, h) = \det \left(sI - \lim_{h \rightarrow 0^+} [e^{(A+BL)h}] \right) = \det((s-1)I) = (s-1)^n$$

elde edilir. Demek ki, $\bar{a}_i := \lim_{h \rightarrow 0^+} a_i(h), i = 0, 1, \dots, n$ limitleri vardır. O halde,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) &= e_n^T \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_q h^{q-r} [e^{i(A+BL)h} - e^{iAh}] \\ &= e_n^T \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{q=0}^{r-1} \Omega_q \frac{1}{h^{r-q}} [e^{i(A+BL)h} - e^{iAh}] \end{aligned}$$

elde edilir. Limit, türev ve skalerle çarpım matris elemanları üzerinden tanımlandığından, L'Hôpital kuralı geçerlidir. O halde, bu kural gerektiğinde tekrar tekrar uygulanarak

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) = e_n^T \sum_{i=1}^n \sum_{q=0}^{r-1} \frac{\bar{a}_i}{(r-q)!} \Omega_q ([i(A+BL)]^{r-q} - (iA)^{r-q}) \quad (5.31)$$

elde edilir. Eşitlikteki tüm değerler sabit ve toplamalar sonlu olduğundan kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 5.6. *Eğer (5.3) sisteminin tek bir girişi varsa, yani $m = 1$ ise, (5.30) eşitliğini sağlayan $K(h)$ kontrolörü ile sistemin kararlı olduğu bir $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ kapalı aralığı vardır.*

Kanıt. Eğer $K(h)$, (5.30) eşitliğini sağlıyorsa tüm $h \in \mathbb{H}$ için

$$\det \left(sI - \frac{1}{h} [F(h) + G(h)K(h) - I] \right) = \det \left(sI - \frac{1}{h} [e^{(A+BL)h} - I] \right)$$

eşitliği de sağlanıyor olmalıdır. Bu durum, (5.30)'da $\tilde{s} := (s-1)/h$ değişken dönüşümü yapılarak kolayca görülebilir. Sistemin tek bir girişi olduğundan Önsav 5.2 gereği $K(h)$ 'nın bir limiti vardır. O halde,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [F(h) + G(h)K(h) - I] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \Gamma(h) [A + BK(h)] \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \Gamma(h) \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} [A + BK(h)] \right) \\ &= A + B \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [e^{(A+BL)h} - I] = A + BL$$

olarak elde edilir. Determinant matris elemanlarının sürekli bir fonksiyonudur. Ayrıca, determinant içindeki matrislerin limiti olduğundan, limit determinant içine alınabilir. O halde,

$$\det \left(sI - \left[A + B \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) \right) \right] \right) = \det (sI - (A + BL))$$

eşitliği sağlanmalıdır. Sistemin tek bir girişi olduğundan Teorem 4.10 gereği karakteristik polinomu istenen değere atayan $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tektir. O halde,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} K(h) = L$$

olmalıdır. Teorem 5.2 gereği kanıt tamamlanmış olur. $\square$

5.1.4 Tekil değer atama ile kontrol

Düzensiz örneklemeli bir sistemin kararlılığının sağlanması için kapalı çevrim sistem matrisinin tekil değerlerinin 1'den küçük olması yeter bir koşuldur. Bu nedenle, sistemin tekil değerlerinin atanması ile kararlılık sağlanabilir. Bilindiği kadarıyla literatürde tekil değer atama ile kararlı kılma yöntemi ilk kez bu çalışma kapsamında ele alınmıştır.

Durum geri beslemesi ile tekil değer atama için gerek ve yeter koşullar [108]'de aşağıdaki teoremle verilmiştir. Ayrıca, aynı çalışmada durum geri beslemesi kontrolörünün hesaplanması için bir algoritma da verilmiştir.

Teorem 5.7 ([108, Teorem 2.7]). $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $1 \leq m \leq n$ olmak üzere tam ranklı $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ verilmiş olsun.

$$(I - B(B^T B)^{-1} B^T)A \quad (5.32)$$

matrisinin tekil değerleri

$$0 = a_1 = \dots = a_m \leq a_{m+1} \leq \dots \leq a_n$$

olsun. Keyfi verilen

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$$

değerleri için $A + BL$ matrisinin tekil değerlerini $\{s_1, \dots, s_n\}$ yapan bir $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olmasının gerek ve yeter koşulu tüm $i = 1, \dots, n$ için

$$a_i \leq s_i \leq a_{i+m} \quad (5.33)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada $i > n$ ise $a_i = \infty$ kabul edilmiştir.

Yukarıdaki teorem, bir $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ aralığındaki tüm $h \in \mathbb{H}$ için (5.4) ile tanımlanmış $F(h)$ ve $G(h)$ matrislerine uygulanarak kararlılık sağlanabilir. Teoremin uygulanabilmesi için, $G(h)$ matrisinin tüm $h \in \mathbb{H}$ için tam ranklı olduğu ve $\bar{\sigma}(\cdot)$ en büyük tekil değeri ifade etmek üzere

$$\bar{\sigma} \left(\left\{ I - G(h) [G^T(h)G(h)]^{-1} G^T(h) \right\} F(h) \right) < 1, \quad \forall h \in \mathbb{H} \quad (5.34)$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $\mathbb{H}$ var olmalıdır. Uygun bir benzerlik dönüşümüyle (5.34) eşitsizliğini sağlayan bir $\mathbb{H}$ 'nin her zaman var olduğu gösterilebilir.

Uygun bir benzerlik dönüşüm matrisi $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ için

$$\widehat{F}(h) := T e^{Ah} T^{-1}, \quad \widehat{\Gamma}(h) := T \left(\int_0^h e^{A\tau} d\tau \right) T^{-1} \quad \text{ve} \quad \widehat{G}(h) := \widehat{\Gamma}(h) T B$$

tanımları yapılarak

$$\bar{\sigma} \left(\left\{ I - \widehat{G}(h) [\widehat{G}^T(h)\widehat{G}(h)]^{-1} \widehat{G}^T(h) \right\} \widehat{F}(h) \right) < 1, \quad \forall h \in \mathbb{H} \quad (5.35)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa Teorem 5.7'de $a_n \leq s_n < 1$ seçimi ile

$$\bar{\sigma} \left(\widehat{F}(h) + \widehat{G}(h) \widehat{K}(h) \right) = \|T [F(h) + G(h)K(h)] T^{-1}\| < 1, \quad \forall h \in \mathbb{H}$$

eşitsizliğini sağlayan $\widehat{K}(h) = K(h)T^{-1}$ kontrolörü [108]'de verilen algoritma kullanılarak bulunabilir. O halde, Teorem 3.14 gereği $K(h) := \widehat{K}(h)T$ kontrolörü sistemi kararlı kılar. (5.35) eşitsizliğinin sağlanmasıyla ilgili önsav aşağıda verilmiştir.

Önsav 5.3. Verilen (5.1) sistemi için $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A + BL$ matrisini Hurwitz yapan bir matris olsun. Tersi olan bir $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ için

$$S := T(A + BL)T^{-1}$$

tanımlansın. Eğer

$$S + S^T < 0$$

oluyorsa $G(h)$ matrisinin tam ranklı olduğu ve (5.35) eşitsizliğinin sağlandığı bir $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ kapalı aralığı vardır.

Kanıt. Verilen T matrisi için (5.35) eşitsizliğini sağlayan ve $G(h)$ matrisinin tam ranklı olduğu bir $\bar{h} > 0$ var olduğu gösterilecektir. Bunun sonucu olarak eşitsizliğin sağlandığı $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}] \subset (0, \bar{h})$ kapalı aralığının varlığı kanıtlanmış olacaktır.

(5.1) sürekli sisteminin tanımındaki varsayımdan dolayı rank $B = m$ olduğundan Önsav A.1 gereği

$$\text{Im } B \cap \ker \Gamma(h) = \{0\}, \quad \forall h \in \mathbb{H} \quad (5.36)$$

olmalıdır. Eğer $\Gamma(h)$ matrisinin tüm $h \in \mathbb{H}$ için bir tersi varsa $\ker \Gamma(h) = \{0\}$, $\forall h \in \mathbb{H}$ olacağından (5.36) koşulu da sağlanır. Önsav B.4 gereği $j := \sqrt{-1}$ olmak üzere, eğer $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ için A 'nın $\lambda_i = j\alpha_i$ biçiminde özdeğerleri varsa $\tilde{h}_i := 2\pi/|\alpha_i|$ için $\Gamma(h)$ matrisinin tersi yoktur. Bu $\tilde{h}_i$ 'ler arasından (5.36) koşulunu sağlamayan en küçük olanı

$$h_g := \min_i \left\{ \tilde{h}_i \mid \text{Im } B \cap \ker \Gamma(\tilde{h}_i) \neq \{0\} \right\} \quad (5.37)$$

biçiminde tanımlansın. Eğer (5.36) koşulunu sağlamayan bir $\tilde{h}_i$ yoksa $h_g = \infty$ olur. $h_g > 0$ olduğundan $\bar{h} = h_g$ seçimiyle $G(h)$ 'nin tam ranklı olduğu garantilenir.

S 'nin tanımı kullanılarak

$$\hat{A} := TAT^{-1} = S - TBLT^{-1}$$

tanımı yapılırsa Önsav B.3 gereği

$$\begin{aligned} \hat{F}(h) &= I + \hat{\Gamma}(h)\hat{A} \\ &= I + \hat{\Gamma}(h)(S - TBLT^{-1}) \\ &= I + \hat{\Gamma}(h)S - \hat{G}(h)LT \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. O halde,

$$\left\{ I - \widehat{G}(h) \left[\widehat{G}^T(h) \widehat{G}(h) \right]^{-1} \widehat{G}^T(h) \right\} \widehat{F}(h) = \left\{ I - \widehat{G}(h) \left[\widehat{G}^T(h) \widehat{G}(h) \right]^{-1} \widehat{G}^T(h) \right\} \left[I + \widehat{\Gamma}(h) S \right]$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafındaki matris ortogonal bir projeksiyon matrisi olduğundan en büyük tekil değeri her zaman 1'dir. Demek ki bir $\bar{h} > 0$ için

$$\bar{\sigma} \left[I + \widehat{\Gamma}(h) S \right] < 1, \quad \forall h < \bar{h} \quad (5.38)$$

olduğunu göstermek, (5.35) eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için yeterlidir. Önsav B.1 kullanılarak

$$\Theta(h) := \frac{\widehat{\Gamma}(h) - hI}{h^2} = \frac{1}{2!} \widehat{A} + \frac{h}{3!} \widehat{A}^2 + \dots$$

tanımı yapılsın. O halde,

$$\Psi(h) := I + \widehat{\Gamma}(h) S = I + hS + h^2 \Theta(h) S$$

elde edilir. Demek ki, (5.38) koşulunu göstermek için

$$\|\Psi(h)\| = \lambda_{\max} \left(\Psi(h) \Psi^T(h) \right) < 1, \quad \forall h < \bar{h}$$

eşitsizliğini sağlayan $\bar{h} \in \mathbb{R}^{>0} \cup \{\infty\}$ olduğu gösterilmelidir. O halde,

$$\begin{aligned} \Psi(h) \Psi^T(h) &= [I + hS + h^2 \Theta(h) S] [I + hS^T + h^2 S^T \Theta^T(h)] \\ &= I + h \left(S + S^T \right) + h^2 [\Theta(h) S + S^T \Theta^T(h) + S S^T] \\ &\quad + h^3 [S S^T \Theta^T(h) + \Theta(h) S S^T] + h^4 \Theta(h) S S^T \Theta^T(h) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} R(h) &:= [\Theta(h) S + S^T \Theta^T(h) + S S^T] \\ &\quad + h [S S^T \Theta^T(h) + \Theta(h) S S^T] + h^2 \Theta(h) S S^T \Theta^T(h) \end{aligned}$$

tanımı yapılsa

$$\Psi(h) \Psi^T(h) = I + h \left(S + S^T \right) + h^2 R(h) \quad (5.39)$$

elde edilir. Kolayca görülebileceği gibi $R(h)$ her yerde analitik (entire) ve simetriktir.

O halde

$$\lambda_{\max} \left(\Psi(h) \Psi^T(h) \right) \leq 1 + h \lambda_{\max} \left(S + S^T \right) + h^2 \lambda_{\max} \left(R(h) \right) < 1$$

eşitsizliğinin sağlanması kanıt için yeterlidir. Yani, eşdeğer olarak

$$h\lambda_{\max}(R(h)) < -\lambda_{\max}(S + S^T)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Keyfi bir $h_g \geq h_r > 0$ seçilsin. Bu h_r için

$$\gamma := \sup_{h \in (0, h_r)} \lambda_{\max}(R(h))$$

olsun. O halde, $S + S^T < 0$ olduğundan

$$\bar{h} := \min\left(h_r, \frac{-\lambda_{\max}(S + S^T)}{\gamma}\right) \quad (5.40)$$

seçimi ile kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Bu önsav kullanılarak bulunan $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ aralığında bir patolojik örnekleme $h_p \in \mathbb{H}$ var olabilir. Ancak, bu durumda bile önsavda istenen koşullar sağlanıyor olabilir. Eğer bir h_p için $[F(h_p), G(h_p)]$ sabit matris çiftinin kararsız bir özdeğeri atanabilir olmasaydı bu özdeğerin yerini değiştirebilecek bir $K(h_p)$ de bulunamazdı. Ayrıca,

$$1 \leq \rho(F(h_p)) \leq \bar{\sigma}(F(h_p))$$

olacağından ve Teorem 5.7 gerek ve yeter koşul verdiğiinden (5.35) koşulu da sağlanmazdı ve $h_p \notin \mathbb{H}$ olurdu. Yani, patolojik örnekleme için Önsav 5.3 için verilen koşullar haricinde başka bir koşul göz önünde bulundurmaya gerek yoktur.

Önceki bölümlerde açıkça gözüken, Önsav 5.3'ün doğrudan bir sonucu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 5.8. *Verilen (5.1) sistemi kararlı kılınabilir olsun. O halde, (5.3) sistemini kararlı kılan bir $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ kapalı aralığı ve $K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ durum geri beslemesi kontrolörü vardır.*

Kanıt. (5.1) sistemi kararlı kılınabilir olduğundan $A + BL$ matrisini Hurwitz yapan bir $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ vardır. O halde, Teorem 5.2'nin kanıtındaki ile aynı biçimde Lyapunov eşitliği kullanılarak $S^T + S < 0$ olan bir T 'nin varlığı gösterilebilir. Önsav 5.3 gereği kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Dikkat edilecek olursa, Önsav 5.1 koşulunu sağlayan benzerlik dönüşüm matrisi $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aynı zamanda Önsav 5.3 koşulunu da sağlamaktadır. Bu nedenle Bölüm 5.1.1'de verilen Yöntem 5.1 - 5.3 tekil değer atama ile kararlı kılma için de kullanılabilir.

Eğer bir T için (5.35) eşitsizliği sağlanıyorsa, V ortogonal bir matris olmak üzere $\tilde{T} := VT$ için de eşitsizlik sağlanır. Hatta, Önsav 5.3'ün kanıtından görülebileceği gibi $\tilde{T}$ için bulunacak olan $\bar{h}$ da aynıdır. Bu nedenle QR ayrıştırması gereği sadece üst üçgen biçimindeki T 'leri göz önünde bulundurmak genelliği bozmaz.

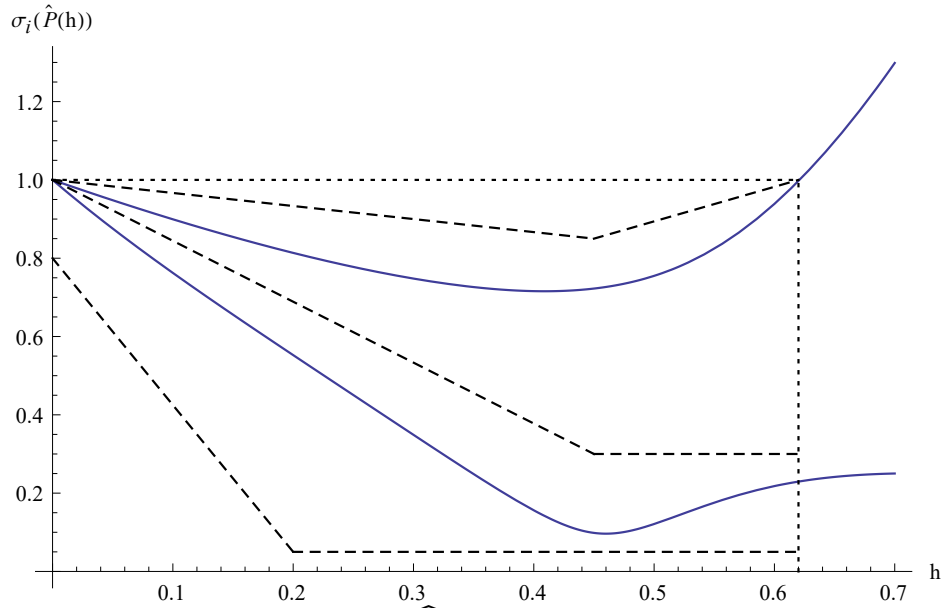
Örnek 5.2. Aşağıdaki sürekli sistemi ele alınsın.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

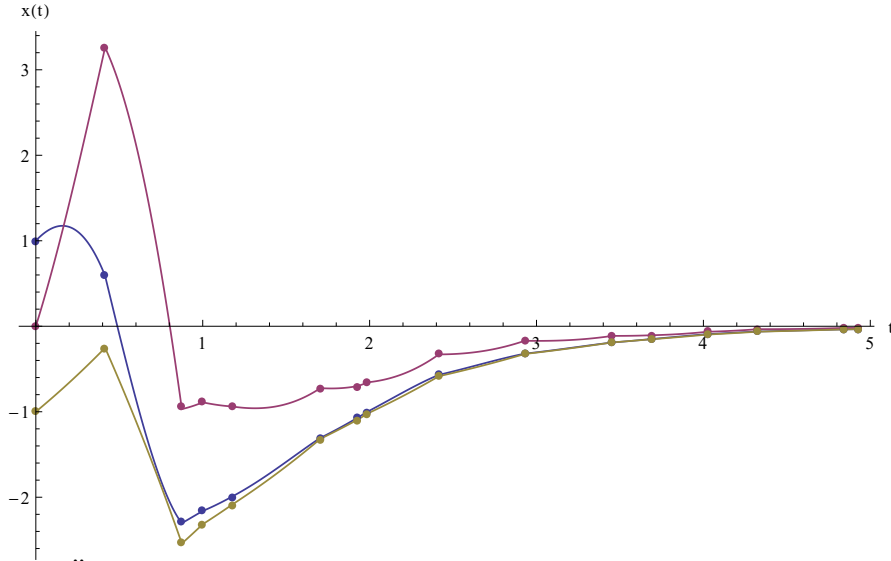
Aşağıdaki durum geri besleme matrisi seçilmiş olsun.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1128}{289} & \frac{-1064}{289} & \frac{-105}{34} \end{bmatrix}$$

$\hat{P}(h) := \left(I - \hat{G}(h) \left[\hat{G}^T(h) \hat{G}(h) \right]^{-1} \hat{G}^T(h) \right) \hat{F}(h)$ matrisinin 0'dan farklı tekil değerleri Şekil 5.3'teki düz çizgiler gibidir. Şekilden görülebileceği gibi $\bar{h} \approx 0.62$ olarak bulunur ve $\hat{F}(h) + \hat{G}(h) \hat{K}(h)$ matrisinin tekil değerleri düz çizgiler arasındaki bölgelere keyfi olarak atanabilir. Bu örnek için şekildeki kesikli çizgili değerler kapalı çevrim tekil değerleri için seçilmiştir. Bu seçimle $\mathbb{H} \subset (0, \bar{h})$ aralığındaki keyfi örnekleme altında kapalı çevrim sistemin kararlılığı garantilenir. Şekil 5.4'te ise rastgele örnekleme altında (5.3) kapalı çevrim sisteminin durum yanıtı verilmiştir.



Şekil 5.3 : Örnek 5.2 için $\hat{P}(h)$ 'nin 0'dan farklı tekil değerleri.



Şekil 5.4 : Örnek 5.2 için rastgele örnekleme altında kapalı çevrim sistemin durum yanıtı.

5.1.5 Zaman gecikmeli sistemlerin kontrolü

Yukarıda verilen kontrol yöntemlerinin zaman gecikmeli sistemlerin kontrolünde kullanılabileceği bu bölümde gösterilecektir. Özellikle sistem durumlarının farklı ve rasyonel bağımlılığı olmayan ölçüm gecikmeleri varsa düzensiz örnekleme altında modelleme kullanışlı olmaktadır. Bu tür gecikmeye sahip sistemlerin kontrolünün zor bir problem olduğu bilinmektedir [89]. Bilindiği kadarıyla düzensiz örnekleme yaklaşımı kullanılarak bu probleme çözüm önerisi getiren başka bir çalışma literatürde bulunmamaktadır.

Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığı ve kontrolü konusunda oldukça geniş bir literatür bulunmaktadır [89,90,109]. Bu bölümde, çoklu ölçüm gecikmesi olan bir sürekli zamanlı sistem ele alınmaktadır. Bu tür sistemler için önerilen bir örnekleme şeması ile özdeğer atama yöntemi kullanılarak sistem kontrol edilmiştir. Ancak, önerilen yöntem genel olup başka kontrolörler için de kullanılabilir.

Bu bölümdeki sonuçlar "2012 IFAC Workshop on Time Delay Systems" konferansında "Eigenvalue assignment for systems with multiple measurement delays on isolated time scales" adıyla yayınlanmıştır [12].

Zamanla değişmeyen doğrusal sürekli (5.1) sisteminin durum ölçümleri birbirinden farklı zaman gecikmelerine sahip olsun. Yani bir $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ statik durum geri beslemesi kontrolörü için $\tau_i \in \mathbb{R}^{>0}$, $i = 1, 2, \dots, n$ sabit zaman gecikmeleri olmak üzere kontrol

işareti

$$u(t) = L \begin{bmatrix} x_1(t - \tau_1) \\ \vdots \\ x_n(t - \tau_n) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

biçiminde olsun. Ayrıca bu ölçüm gecikmelerinin rasyonel bağımlılığı olmasın, yani tüm i, j ve $i \neq j$ için $\tau_i = \mu \tau_j$ eşitliğini sağlayan bir $\mu \in \mathbb{Z}$ tamsayısı bulunmasın.

Yukarıda tanımlanmış olan problem düzensiz örneklemeli sistem bakış açısı ile ele alınabilir. Bunun için verilen bir kontrol ufku $\nu > 0$ olmak üzere örnekleme zamanı dizisi $\mathcal{T}_\nu := \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, eğer $t_k \in \mathcal{T}_\nu$ ve $t_k - \tau_i \geq t_0$ ise $t_k - \tau_i \in \mathcal{T}_\nu$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ biçiminde seçilmiş olsun. Bu seçimi yapabilmek için basit bir yöntem, $\mu_i \in \mathbb{Z}^{>0}$ pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\mathcal{T}_\nu = \left\{ \nu, \nu - \frac{\tau_1}{\mu_1}, \dots, \nu - \frac{\tau_n}{\mu_n}, \nu - \frac{2\tau_1}{\mu_1}, \nu - \frac{\tau_1}{\mu_1} - \frac{\tau_2}{\mu_2}, \dots \right\} \quad (5.42)$$

biçimindeki seçim ile verilebilir. Bu seçimi kullanan bir örnek aşağıdaki gibidir.

Örnek 5.3. $t_0 = 0$, $\tau_1 = \pi$, $\tau_2 = e$ ve $\nu = 5\pi$ olsun. Basitlik olması açısından $\mu_1 = \mu_2 = 1$ olsun. O halde yukarıda verilen yöntemle seçilen örnekleme zamanı dizisi

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\nu = \left\{ 0, \pi - e, 2\pi - 2e, 3\pi - 3e, 4\pi - 4e, 5\pi - 5e, \pi, 2\pi - e, \right. \\ \left. 3\pi - 2e, 4\pi - 3e, 5\pi - 4e, 2\pi, 3\pi - e, 4\pi - 2e, 5\pi - 3e, \right. \\ \left. 3\pi, 4\pi - e, 5\pi - 2e, 4\pi, 5\pi - e, 5\pi \right\} \end{aligned}$$

biçiminde olur.

Dikkat edilecek olursa durum gecikmeleri birbirine rasyonel olarak bağımlıysa kontrol ufku sonsuz seçilebilir.

Yukarıda verilen biçimde bir örnekleme zamanı dizisi ile (5.1) sisteminin düzensiz örneklemeli modeli bir $K(t_k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kontrolörü için

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BK(t_k) \begin{bmatrix} x_1(t_k - \tau_1) \\ \vdots \\ x_n(t_k - \tau_n) \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (5.43)$$

biçiminde olur. Yukarıdaki örnekleme zamanı seçiminden dolayı bir $r_i(k) \in \mathbb{Z}$ için $t_k - \tau_i = t_{r_i(k)}$ olur. O halde, bu sistemin düzensiz örneklemeli ayrık modeli

$$x_{k+1} = F(h_k)x_k + G(h_k)K_k \begin{bmatrix} x_{r_1(k)}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{r_n(k)}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

olarak elde edilir. $K_k := \begin{bmatrix} \xi_k^{(1)} & \dots & \xi_k^{(n)} \end{bmatrix}$ biçiminde $\xi_k^{(i)} \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, n$ sütun vektörlerinden oluşsun. O halde $e_i := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$, i 'inci elemanı 1 ve geri kalan elemanları 0 olan vektör olmak üzere

$$K_k^{(i)} := K_k e_i e_i^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \xi_k^{(i)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

i 'inci sütunu $\xi_k^{(i)}$ ve diğer sütunları 0 olan matrisler olsun. Bu tanım (5.44) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$x_{k+1} = F(h_k)x_k + G(h_k) \sum_{i=1}^n K_k^{(i)} x_{r_i(k)} \quad (5.45)$$

elde edilir. Bu sistemin durum geçiş matrisi bir $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matris dizisi için $\Phi_S(t, r)$ biçiminde olsun. Bu durum geçiş matrisi kapalı çevrim sistem için verildiğinden, daha önceki bölümlerde tartışılan atanabilirlik varsayımı altında S_k matrislerinin tüm $k \in \mathbb{N}$ için tersi olacak biçimde bir kontrolör seçilebilir. O halde,

$$x_{k+1} = S_k x_k = F(h_k)x_k + G(h_k) \sum_{i=1}^n K_k^{(i)} \Phi_S^{-1}(k, r_i(k)) x_k$$

elde edilir. Demek ki

$$S_k := F(h_k) + G(h_k) \sum_{i=1}^n K_k^{(i)} \Phi_S^{-1}(k, r_i(k)) \quad (5.46)$$

özelliğini sağlayan bir matris dizisi ile istenen çözüm elde edilir. Şimdi,

$$\tilde{K}_k := \sum_{i=1}^n K_k^{(i)} \Phi_S^{-1}(k, r_i(k)) \quad (5.47)$$

tanımı yapılırsa $S_k = F(h_k) + G(h_k)\tilde{K}_k$ elde edilir. Demek ki, $\tilde{K}_k$ daha önceki bölümlerde verilen dijital yeniden tasarım, özdeğer atama ya da tekil değer atama yöntemlerinden biriyle tasarlanabilir. Bu tasarım yapılırken S_k matrislerinin tersi olacak şekilde yapılmalıdır. Tanım gereği

$$\tilde{K}_k = K_k \sum_{i=1}^n e_i e_i^T \Phi_S^{-1}(k, r_i(k))$$

elde edilir. O halde,

$$U_k := \sum_{i=1}^n e_i e_i^T \Phi_S^{-1}(k, r_i(k)) \quad (5.48)$$

tanımı yapılırsa $K_k = \tilde{K}_k U_k^{-1}$ olarak bulunur. Dikkat edilecek olursa U_k matrisinin i 'inci satırı, $\Phi_S^{-1}(k, r_i(k))$ matrisinin i 'inci satırıdır. Yapılan simülasyonlarda U_k matrislerinin her zaman tersinin var olduğu gözlemlenmiştir. Ancak, bunun bir kanıtı henüz bulunamamıştır.

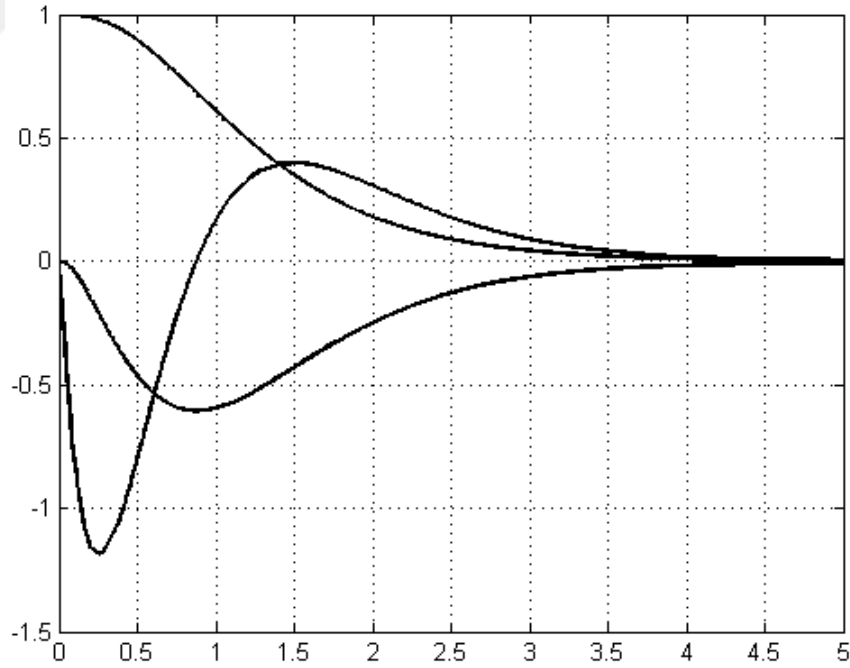
Örnek 5.4. Durumlarının ölçüm gecikmeleri sırasıyla 1.7, 2.3 ve 3.1 saniye olan

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.505 & -1.11 & -0.7 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

sürekli doğrusal sistemi ele alınsın. Bu sistem için kontrol ufku $\nu = 5s$ ve $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$ olacak şekilde seçilmiştir. (5.42) ile tanımlanan yöntem kullanılarak

$$\mathcal{T}_\nu = \{0, 0.017, 0.083, 0.15, 0.2, 0.267, 0.383, 0.4, 0.45, \\ 0.517, 0.567, 0.633, 0.7, 0.75, 0.817, 0.867, 0.933, \\ 1, 1.05, 1.117, 1.233, 1.3, 1.417, 1.55, 1.6, 1.667, \\ 1.783, 1.85, 1.9, 1.967, 2.083, 2.15, 2.267, 2.45, \\ 2.7, 2.817, 2.933, 3, 3.117, 3.3, 3.85, 3.967, 4.15, 5\}$$

değerleri örnekleme zamanı olarak seçilmiştir. S_k matrisinin özdeğerlerini $\{e^{-2h_k}, e^{-2h_k}, e^{-3h_k}\}$ yapan $\tilde{K}_k$ kontrolörü seçilmiştir. Bu seçimlerle yukarıdaki yöntem kullanılarak elde edilen kontrolör ile kapalı çevrim durum yanıtı Şekil 5.5'teki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 5.5 : Örnek 5.4 için kapalı çevrim durum yanıtı

5.2 Sabit Kontrolör ile Kontrol

Bir önceki bölümde örnekleme aralığı ile değişen kontrolörler için bulunan sonuçlar sabit kontrolörlere de uygulanabilir. Bunun için nominal bir örnekleme aralığı $\omega > 0$ seçilsin. Ayrıca $h_k = \omega + \theta_k$ olsun. O halde sabit bir $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ için

$$\begin{aligned}
 F(h_k) + G(h_k)K &= e^{Ah_k} + \left(\int_0^{h_k} e^{A\tau} d\tau \right) BK \\
 &= e^{A(\omega+\theta_k)} + \left(\int_0^{\omega+\theta_k} e^{A\tau} d\tau \right) BK \\
 &= e^{A\omega} e^{A\theta_k} + \left(\int_0^{\omega} e^{A\tau} d\tau + \int_{\omega}^{\omega+\theta_k} e^{A\tau} d\tau \right) BK \\
 &= e^{A\omega} (I + \Gamma(\theta_k)A) + \Gamma(\omega)BK + \left(\int_0^{\theta_k} e^{A(\omega+\eta)} d\eta \right) BK \\
 &= e^{A\omega} + \Gamma(\omega)BK + e^{A\omega} \Gamma(\theta_k)A + e^{A\omega} \Gamma(\theta_k)BK \\
 &= \left(e^{A\omega} + \Gamma(\omega)BK \right) + \Gamma(\theta_k)e^{A\omega}(A + BK)
 \end{aligned}$$

elde edilir [28]. O halde bir $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ benzerlik dönüşüm matrisi için

$$\left\| \widehat{F}(h_k) + \widehat{G}(h_k)\widehat{K} \right\| \leq \left\| e^{\widehat{A}\omega} + \widehat{\Gamma}(\omega)\widehat{B}\widehat{K} \right\| + \left\| \widehat{\Gamma}(\theta_k) \right\| \left\| e^{\widehat{A}\omega}(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{K}) \right\| < 1$$

olması kararlılığı garantilemek için yeterlidir.

Önsav 5.4 ([28, Lemma 3]).

$$\mu(A) := \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^T}{2} \right)$$

olmak üzere

$$\left\| \Gamma(\theta) \right\| = \left\| \int_0^{\theta} e^{A\tau} d\tau \right\| \leq \frac{e^{\mu(A)\theta} - 1}{\mu(A)} \quad (5.49)$$

eşitsizliği sağlanır.

Yukarıdaki önsav gereği

$$\left\| \widehat{\Gamma}(\theta_k) \right\| \leq \frac{e^{\mu(\widehat{A})\theta_k} - 1}{\mu(\widehat{A})} < \alpha := \frac{1 - \left\| e^{\widehat{A}\omega} + \widehat{\Gamma}(\omega)\widehat{B}\widehat{K} \right\|}{\left\| e^{\widehat{A}\omega}(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{K}) \right\|}$$

olması gerektiğinden

$$\theta_k < \bar{\theta} := \frac{\ln(1 + \alpha\mu(\widehat{A}))}{\mu(\widehat{A})}$$

eşitsizliğinin sağlanması kararlılık için yeterlidir. O halde,

$$\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}] \subset (\omega - \bar{\theta}, \omega + \bar{\theta}) \cap (0, \infty)$$

seçimiyle kararlılık garantilenir.

6. ÇOK ETMENLİ SİSTEMLERİN UZLAŞIMI

Bu çalışmanın ana kapsamı olan düzensiz örneklemeli sistemlerin kontrolü için geliştirilen yöntemlerin, çok etmenli sistemlerin uzlaşım problemine de uygulanabileceği fark edilmiştir. Geliştirilen yöntemler, özellikle etmenleri arasında aperiodyik haberleşme olan ve ağ topolojileri zamanla değişen çok etmenli sistemlerin uzlaşım probleminin çözümü için uygun olmaktadır.

Çok etmenli sistemlerin uzlaşım problemi geniş uygulama alanına sahip olduğundan son yıllarda büyük ilgi görmüştür [14]. Bu uygulamalar arasında mobil robot koordinasyonu [110], sensör ağı saat senkronizasyonu [111], mikrogrid frekans senkronizasyonu [112], siber güvenlik saldırılarının giderilmesi [113] ve daha birçok uygulama bulunmaktadır [114]. Genel doğrusal etmen dinamiğine sahip sistemler son zamanlarda ele alınmış olsa da [26,115,116], daha yaygın olarak çift integratör etmen dinamiğine sahip sistemler ele alınmaktadır [16,117,118,119,120,121,122]. Bunun bir nedeni bu tür sistemlerin geniş uygulama alanlarına sahip olmasıdır.

Pratikte ortaya çıkan zorlukların birçok farklı yönü de literatürde yoğun bir şekilde ele alınmıştır. Zamanla değişen topolojiler altında uzlaşım [116], iletişim gecikmeleri altında uzlaşım [122], aperiodyik veri haberleşmesi altında uzlaşım [118], verilerin asenkron güncellenmesi altında uzlaşım [123], olay tetiklemeli (event-triggered) uzlaşım [21], kısmi durum geribeslemesi altında uzlaşım [124], doygun (saturated) giriş altında uzlaşım [125], belirsizlik ve doğrusal olmayış (nonlinearity) altında uzlaşım [126] bunlara örnek olarak verilebilir.

Bu çalışma kapsamında düzensiz örnekleme ve zamanla değişen ağ topolojisi altında uzlaşım problemi ele alınmıştır. Enerji tasarrufu gereksinimleri, sağlıklı olmayan haberleşme bağlantıları ve hareket eden cisimler gibi pratikte karşılaşılabilecek zorluklardan dolayı haberleşme aralıkları ve iletişim topolojileri güvenilir biçimde belirlenemeyebilir. Düzensiz örnekleme veya değişen topoloji altında uzlaşım problemi ile ilgilenen birçok çalışma olmasına rağmen, bu problemlerin ikisini aynı anda ele alan nispeten az sayıda çalışma vardır. [118]'de örnekleme aralıkları iletişim çizgesinin

(graph) maksimum derecesine bağılı olarak belirlenen bir bölge içinde kaldığı sürece uzlaşımın sağlandığı gösterilmiştir. Ancak, çizgenin maksimum derecesi büyüdükçe, uygun örnekleme aralığı bölgesi önemli ölçüde küçülmektedir. [127]'de, lider-takip uzlaşımını sağlamak için ortalama bekleme süresi (dwell time) yaklaşımı kullanılmıştır. Ancak, geçiş yapılabilir iletişim çizgelerinin kümesi önceden bilinmelidir. Bu da özellikle etmen sayısı arttıkça yöntemin kullanılabilirliğini sınırlamaktadır.

Düzensiz örnekleme ve değişen topoloji altında uzlaşım problemini olay tetiklemeli sistem çerçevesi içinde ele almış olan bazı çalışmalar mevcuttur [128,129]. Ancak, bu yöntemler etmenlerin tetikleme koşullarını sürekli olarak izlemesini gerektirmektedir. Bu gereksinim bazı uygulamalar için uygun olmayabilir. Ayrıca, ağ topolojisi büyüdükçe olay tetiklenmeleri arasındaki zaman küçülme eğilimindedir.

Bu çalışmada düzensiz örnekleme ve değişen topoloji kısıtlamalarını aynı anda ele alabilen, çift integratör dinamiği için uzlaşım probleminin çözümü için yeni bir yaklaşım önerilmektedir. Tüm değişen topoloji çizgelerinin her örnekleme için bağılı ve yönsüz olduğu varsayımı altında verilen yöntemin aşağıdaki avantajları bulunmaktadır: (1) minimum ve maksimum örnekleme aralıkları keyfi olarak seçilebilir, (2) değişen ağ topoloji çizgelerinin kendisinin bilinmesi gerekmez, sadece çizgelerin Laplasyen matris özdeğerlerinin seçilmiş bir aralık içinde bulunması yeterlidir, (3) topoloji çizgelerinin Laplasyen matris özdeğer aralığı keyfi olarak seçilebilir, (4) her örnekleme zamanında tüm olası topolojiler arasında geçiş yapmak mümkündür, (5) seçilen örnekleme aralıkları ve Laplasyen matris özdeğer aralığı için her zaman bir durum geribesleme kontrolörü bulunabilmektedir, (6) kontrolör parametreleri için eşitsizlikler analitik olarak verilmiştir. Bilindiği kadarıyla, literatürde bu sonuçlara ulaşan çift integratör uzlaşımı üzerine yapılmış başka bir çalışma bulunmamaktadır.

Genel doğrusal etmen dinamiği için uzlaşım, bir alt sistemin kararlı kılınması probleminin çözümü ile sağlanabilmektedir [26]. Bu nedenle, mevcut kararlı kılma sonuçları, uzlaşım probleminin çözümü için kullanılabilir. Bu çalışmada, çok etmenli sistem matrisini tüm olası örnekleme aralıkları için bir daralma (contraction) haline getiren bir koordinat dönüşümü yöntemi kararlı kılma probleminin çözümü için kullanılmıştır. Ayrıca, bu yaklaşımın yönsüz topoloji çizgeleri için değişen topoloji altındaki sistemlere kolayca genişletilebileceği gösterilmiştir. Genel doğrusal dinamik için elde edilen sonuçlar, çift integratör dinamiği için uzlaşım problemini

özen kontrolör parametrelerinin sınırlarını analitik olarak bulmakta kullanılmıştır. Çift integratör dinamiğı için verilen sonuçlar bir nesnelerin interneti (Internet of Things) ağıının saat senkronizasyonu problemine başarı ile uygulanmıştır.

Birinci alt bölümde çizge kuramına ait temel tanımlar ve bilgiler verilmiştir. İkinci alt bölümde düzensiz örnekleme altında uzlaşım problemi dağıtık yerel durum geribeslemesi kontrol kuralı için tanımlanmıştır. Üçüncü alt bölümde genel doğrusal dinamiğe sahip çok etmenli sistemin uzlaşım probleminin çözümü için yeter koşullar verilmiştir. Bu koşullar dördüncü ve beşinci alt bölümlerde sırasıyla tek ve çift integratör sistemlerin uzlaşımı için kontrolör parametrelerinin bulunmasında kullanılmıştır. Çift integratör dinamiğı için bulunan kontrolör, altıncı bölümde saat senkronizasyonu problemine uygulanmıştır. Son olarak yedinci bölümde sonuçlar verilmiştir. Bu bölümdeki sonuçlar [130] çalışmasında yayınlanmıştır.

Tezin bu bölümündeki özgün katkılar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Düzensiz örnekleme ve sabit ağ topolojisine sahip çok etmenli sistemlerin uzlaşımı için yeni bir yeter koşul geliştirilmiştir (Teorem 6.3).
- Geliştirilen bu koşulun eğer ağ topolojileri yönsüz ise düzensiz örnekleme ve değişken topolojiye sahip çok etmenli sistemlerin uzlaşımı için de kullanılabileceğı kanıtlanmıştır (Teorem 6.4).
- Bu koşullar kullanılarak çift integratör dinamiğe sahip çok etmenli sistemlerin düzensiz örnekleme ve değişken topoloji altında uzlaşımını sağlayan kontrolör eşitsizlikleri elde edilmiştir (Eşitsizlik (6.23) - (6.25)).
- Bulunan kontrolör eşitsizliklerinin tutarlı olması için gerek ve yeter koşullar bulunmuş ve keyfi seçilen Laplasyen matris özdeğer aralığı ve örnekleme aralığı için kontrolörün var olduğu kanıtlanmıştır (Teorem 6.5).
- Bulunan bu kontrolör düzensiz örnekleme ve değişken topolojili bir ağıın saat senkronizasyonu problemine uygulanarak bu problemin çözümü için yeni bir yöntem önerilmiştir (Bölüm 6.6).

Bu bölümdeki özgün katkılarının çıktıları aşağıdaki uluslararası hakemli dergide yayınlanmıştır:

- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2023). Consensus of double integrator multiagent systems under nonuniform sampling and changing topology, *AIMS Mathematics*, 8(7), 16175–16190.

6.1 Çizge Kuramı Temelleri

Çok etmenli sistemlerin ağ topolojisi bir çizge ile modellenmektedir. Bu nedenle çizge kuramına ait sonuçlar çok etmenli sistemlerin uzlaşım problemi için sıklıkla kullanılmaktadır. Bu bölümde çizge kuramına dair temel tanımlar ve bilgiler verilecektir. Daha fazla bilgi için [131] gibi kaynaklar incelenebilir.

6.1.1 Temel tanımlar

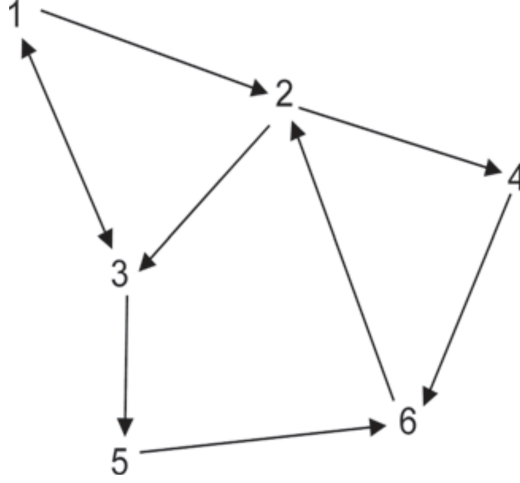
Bu alt bölümde çizgelerle ilgili temel tanımlar ve bunların çok etmenli sistemler için ne anlama geldiği üzerinde durulacaktır.

Tanım 6.1 (Çizge). Bir *çizge*, birbirinden ayırt edilebilen noktalar ve bu noktalar arasındaki bağlantılardan oluşur. Çizgeyi oluşturan noktalara *düğüm* adı verilir. Çizgenin N düğümü varsa, *düğüm kümesi* $\mathcal{V} := \{v_1, \dots, v_N\}$ biçiminde tanımlanır. Düğümler arasındaki bağlantılara *kenar* adı verilir. Çizgenin *kenar kümesi* birbirleri arasında ilişki olan düğüm çiftlerinden oluşur ve $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ olacak şekilde tanımlanır. Bir çizge, düğüm kümesi ve kenar kümesi çifti ile $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ biçiminde ifade edilir.

Düğümler arasındaki ilişkiler genel halde yönlüdür, yani eğer $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ çizgenin bir kenarı ise j düğümünden i düğümü yönünde bir ilişki vardır. Ancak, bunun tersi geçerli olmayabilir. Aşağıda Şekil 6.1 ile verilen çizge için $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $\mathcal{E} = \{(1, 3), (2, 1), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 3), (6, 4), (6, 5)\}$ olur. Dikkat edilecek olursa bir $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ için okun yönü $v_j \rightarrow v_i$ olacak biçimdedir.

Çok etmenli bir sistem, birbiriyle özdeş dinamiğe sahip N etmeden oluşuyorsa, bu sistemin ağ topolojisi N düğümlü bir çizge ile modellenir. Çizgenin bir $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ kenarı etmen j 'den etmen i 'ye yönlü bir bilgi akışının olduğunu ifade eder.

Tanım 6.2 (Yalın Çizge). Bir çizgenin eğer hiçbir düğüm çifti arasında birden fazla kenar yoksa ve hiçbir düğümü için düğümün kendisine bir bağlantı yoksa, yani $(v_i, v_i) \notin \mathcal{E}, \forall i = 1, 2, \dots, N$ oluyorsa bu çizgeye *yalın çizge* adı verilir.



Şekil 6.1 : Örnek bir çizge.

Çok etmenli bir sistemin ağ topolojisi bir haberleşme topolojisi olduğundan bunu modelleyen çizge de yalın bir çizgedir.

Tanım 6.3 (Komşuluk ve Derece). Eğer bir v_i düğümü için $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ ise v_j düğümü, v_i düğümünün bir *komşusudur* denir. Bir v_i düğümünün *komşuluk kümesi*

$$\mathcal{N}_i := \{j \mid (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$$

biçiminde tanımlanmış olan indis kümesidir. Bir v_i düğümünün komşu sayısına *düğümün derecesi* adı verilir ve $d_i := |\mathcal{N}_i|$ olarak gösterilir.

Dikkat edilecek olursa komşuluk ilişkisi genel halde çift yönlü değildir. Bir v_i etmeni için $v_j \rightarrow v_i$ biçiminde yönlü bir bilgi akışı varsa v_j , v_i 'nin komşusu sayılmaktadır. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir. Eğer bunun tersi de doğruysa o zaman çizgenin özel bir adı olmaktadır.

Tanım 6.4 (Yönsüz Çizge). Bir çizgede komşuluk ilişkisi çift yönlüyse, yani

$$(v_i, v_j) \in \mathcal{E} \Rightarrow (v_j, v_i) \in \mathcal{E}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N$$

koşulu sağlanıyorsa bu çizgeye *yönsüz çizge* adı verilir. Aksi halde çizgeye *yönlü çizge* denir.

Yukarıdaki tanım bazen literatürde *ikiyönlü çizge* olarak verilmekte ve yönsüz çizge için farklı bir tanım verilmektedir [131]. Ancak, bu çalışma kapsamında bu farklı tanımlar birbirine denk olmaktadır. Bu nedenle sadece yukarıdaki gibi bir tanım vermek yeterlidir.

Tanım 6.5 (Yönlü Yol ve Bağlı Çizge). Bir düğüm dizisi $\{v_i\}_{i=0}^r := v_0, v_1, \dots, v_r$ için dizideki her düğüm bir sonrakinin komşusuysa, yani $(v_{i+1}, v_i) \in \mathcal{E}, \forall i = 0, 1, \dots, r-1$ oluyorsa $\{v_i\}_{i=0}^r$ dizisine bir *yönlü yol* adı verilir. Bir v_i düğümünden v_j düğümüne bir yönlü yol varsa v_i düğümü v_j düğümüne *bağlıdır* denir. Birbirinden farklı tüm düğüm çiftleri bağlı olan çizgeye *bağlı çizge* adı verilir.

Bu çalışma kapsamında çok etmenli bir sistemin ağ topolojisini ifade eden çizgenin her zaman bağlı olduğu varsayılacaktır. Uzlaşım için topoloji çizgelerinin bağlı olması gerek bir koşul olduğundan [132], bu varsayımı yapmak kısıtlayıcı değildir. Bu nedenle, çalışmanın geri kalanında *çizge* terimi *yalın ve bağlı çizgeler* için kullanılacaktır. Çizgeler aksi belirtilmedikçe yönlü kabul edilecektir.

6.1.2 Çizge matrisleri

Bu bölümde çizgeleri ifade eden matrislerin tanımları ve özellikleri üzerinde durulacaktır.

Tanım 6.6 (Komşuluk Matrisi). Düğüm sayısı N olan bir çizgenin *komşuluk matrisi* $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, elemanları

$$\mathcal{A}_{ij} := \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \text{ ise} \\ 0, & (v_i, v_j) \notin \mathcal{E} \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan matristir.

Komşuluk matrisinin i 'inci satırı, v_i düğümünün komşularını belirtir. Dikkat edilecek olursa komşuluk matrisi bir çizgeyi tek biçimde karakterize eder. Yalınlık varsayımından dolayı komşuluk matrisinin köşegen elemanları her zaman 0'dır, yani $\mathcal{A}_{ii} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, N$ olur. Açıkça görüleceği gibi çizgenin yönsüz olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$, yani komşuluk matrisinin simetrik olmasıdır.

Tanım 6.7 (Derece Matrisi). Düğüm sayısı N olan bir çizgenin *derece matrisi* $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $d_i := |\mathcal{N}_i|$ düğümlerin derecesini belirtmek üzere $\mathcal{D} := \text{diag}\{d_i\}$ biçiminde tanımlanmış köşegen matristir.

Tanım 6.8 (Laplasyen Matris). Bir çizgenin Laplasyen matrisi $\mathcal{L} := \mathcal{D} - \mathcal{A}$ biçiminde tanımlanır.

Çok etmenli sistemlerin analizinde Laplasyen matris sıklıkla kullanılır. Komşuluk matrisine benzer biçimde çizgenin yönsüz olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathcal{L} = \mathcal{L}^T$ olmasıdır.

Şekil 6.1 ile verilen çizgenin derece, komşuluk ve Laplasyen matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Önsav 6.1. $\mathbf{1} := [1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^N$ tüm elemanları 1 olan vektör olmak üzere $\mathcal{L}\mathbf{1} = 0$ olur.

Kanıt. Tanımı gereği Laplasyen matrisin her bir satırının elemanları toplamı 0'dır. O halde, $(\mathcal{L}\mathbf{1})_i := \sum_{j=1}^N \mathcal{L}_{ij} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, N$ olur. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Yukarıdaki önsavın sonucu olarak $\mathcal{L}$ tekil bir matristir, yani Laplasyen matrisin en az bir özdeğeri 0'dır. Laplasyen matrisin 0 olan başka bir özdeğerinin olup olmadığı çizgenin bağlı olmasıyla ilgilidir.

Teorem 6.1 ([131, Teorem 2.1]). *Düğüm sayısı N olan bir çizge bağlıysa Laplasyen matrisinin tek bir 0 özdeğeri vardır, yani $\text{rank } \mathcal{L} = N - 1$ olur.*

Bu çalışma kapsamında çizgelerin her zaman bağlı olduğu varsayıldığından aynı zamanda her çizge için $\text{rank } \mathcal{L} = N - 1$ olduğu da varsayılmaktadır. Gershgorin Çember Teoremi [65, Teorem 2.12], kullanılarak Laplasyen matrisin diğer özdeğerlerinin yerleri hakkında koşullar türetilir.

Önsav 6.2. *Laplasyen matrisin tüm özdeğerleri $d_{\max} := \max_i \{d_i\}$ maksimum düğüm derecesi olmak üzere*

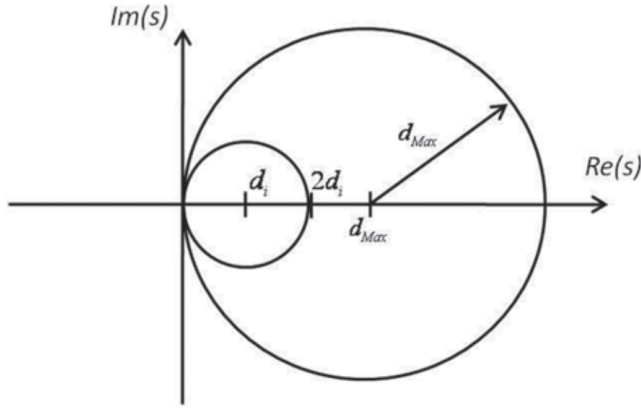
$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - d_{\max}| \leq d_{\max}\}$$

biçiminde tanımlanmış disk içinde bulunur.

Kanıt. Gersgorin Çember Teoremi [65, Teorem 2.12] gereği Laplasyen matrisin özdeğerleri

$$\lambda(\mathcal{L}) \subseteq \bigcup \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathcal{L}_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |\mathcal{L}_{ij}| = d_i \right\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - d_{\max}| \leq d_{\max}\}$$

koşulunu sağlaması gerektiğinden kanıt tamamlanmış olur. $\square$



Şekil 6.2 : Laplasyen matris için Gersgorin çemberleri

Laplasyen matrisin özdeğerlerinin

$$0 = \lambda_1 < |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots \leq |\lambda_N| \leq 2d_{\max} \leq 2N - 2$$

biçiminde sıralı olduğu kabul edilir. Dikkat edilecek olursa $\text{Re } \lambda_i > 0, \forall i = 2, 3, \dots, N$ özelliği sağlanır.

6.2 Düzensiz Örnekleme Altında Uzlaşım Problemi

Birbirlerine eş dinamiğe sahip N etmenli bir sistemin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ve $\text{rank } B = m \leq n$ olmak üzere etmenlerin her birinin dinamik modeli

$$\dot{x}^{(i)}(t) = Ax^{(i)}(t) + Bu^{(i)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.1)$$

biçiminde olsun. Burada $x^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^n$ ve $u^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^m$ sırasıyla etmen i 'nin durumlarını ve girişlerini ifade eder.

Tanım 6.9 (Uzlaşım). Her başlangıç durumu $x^{(i)}(0) := x_0^{(i)} \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x^{(i)}(t) - x^{(j)}(t)) = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

oluyorsa çok etmenli sistem *uzlaşımdadır* denir.

Tanım gereği eğer etmenlerin hepsi kararlıysa sistem uzlaşımdaydır. Ancak, çok etmenli bir sistemin uzlaşımında olması için etmenlerin her birinin kararlı olmasına gerek yoktur. Bu duruma güzel bir örnek Bölüm 6.6’da saat senkronizasyonu problemi ele alınarak verilecektir.

Bu çalışma kapsamında kontrolör olarak

$$u^{(i)}(t) = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x^{(j)}(t_k) - x^{(i)}(t_k)), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.2)$$

biçiminde tanımlanmış dağıtık yerel durum geri beslemesi kontrol kuralı kullanılacaktır. Kontrolörün dağıtık yerel olması, sadece komşularından aldığı bilgileri kullanarak kontrol işareti üretmesi anlamına gelir. Ayrıca, örnekleme aralığına göre değişmeyen, yani sabit bir kontrolör seçilmiştir.

Etmenlerin komşularından düzensiz zaman aralıklarıyla bilgi aldığı kabul edilmiştir. Ayrıca, literatürde genel olarak yapılan, ağdaki tüm etmenlerin komşularından aynı anda bilgi aldığı varsayımı yapılmıştır.

Yukarıda (6.2) ile verilmiş olan kontrolör (6.1) sisteminde yerine yazılırsa her bir $i = 1, 2, \dots, N$ etmeni için

$$\dot{x}^{(i)}(t) = Ax^{(i)}(t) + BK \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x^{(j)}(t_k) - x^{(i)}(t_k)), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (6.3)$$

kapalı çevrim sistemi elde edilir. Komşuluk matrisi $\mathcal{A}$ ’nın ve derece matrisi $\mathcal{D}$ ’nin tanımları kullanılarak aynı sistem $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ için

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(i)}(t) &= Ax^{(i)}(t) + BK \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x^{(j)}(t_k) - BK \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x^{(i)}(t_k) \\ &= Ax^{(i)}(t) + BK \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_{ij} x^{(j)}(t_k) - BK |\mathcal{N}_i| x^{(i)}(t_k) \\ &= Ax^{(i)}(t) + BK \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_{ij} x^{(j)}(t_k) - BK \sum_{j=1}^N \mathcal{D}_{ij} x^{(j)}(t_k) \\ &= Ax^{(i)}(t) + BK \sum_{j=1}^N (\mathcal{A}_{ij} - \mathcal{D}_{ij}) x^{(j)}(t_k) \\ &= Ax^{(i)}(t) - BK \sum_{j=1}^N \mathcal{L}_{ij} x^{(j)}(t_k) \end{aligned} \quad (6.4)$$

elde edilir. Eğer tüm etmenlerin durum vektörleri alt alta yazılırsa çok etmenli sistemin tamamı $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ için

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(N)} \end{bmatrix} (t) = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(N)} \end{bmatrix} (t) - \begin{bmatrix} BK & 0 & \dots & 0 \\ 0 & BK & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11}I_n & \mathcal{L}_{12}I_n & \dots & \mathcal{L}_{1N}I_n \\ \mathcal{L}_{21}I_n & \mathcal{L}_{22}I_n & \dots & \mathcal{L}_{2N}I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{N1}I_n & \mathcal{L}_{N2}I_n & \dots & \mathcal{L}_{NN}I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(N)} \end{bmatrix} (t_k)$$

biçiminde elde edilir. Tüm etmenlerin durumları

$$x := \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(N)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nN}$$

şeklinde tek bir sistem durumu olarak tanımlanırsa Kronecker çarpımı özellikleri kullanılarak [65, Bölüm 4.3] çok etmenli sistemin düzensiz örnekleme altındaki kapalı çevrim modeli $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ için

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (I_N \otimes A)x(t) - (I_N \otimes BK)(\mathcal{L} \otimes I_n)x(t_k) \\ &= (I_N \otimes A)x(t) - (\mathcal{L} \otimes BK)x(t_k) \end{aligned} \quad (6.5)$$

biçiminde elde edilir.

Yukarıda elde edilen kapalı çevrim sistem, sabit ağ topolojisi için verilmiştir. Ancak, ağ topolojisi örnekleme anındaki haberleşmenin durumunu belirttiği için, her örnekleme anında topoloji değişebilir. Bu durumda dahi elde edilen (6.5) sistemi $\mathcal{L}$ yerine her örneklemede değişen $\{\mathcal{L}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ matris dizisinin elemanları yazılarak geçerli olur. Yani değişen topolojili kapalı çevrim çok etmenli sistemi

$$\dot{x}(t) = (I_N \otimes A)x(t) - (\mathcal{L}_k \otimes BK)x(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (6.6)$$

biçiminde yazılabilir. Ağ topolojisi değişiyor olsa dahi bunu modelleyen çizgelerin bağlı olduğu, yani $\text{rank } \mathcal{L}_k = N - 1, \forall k \in \mathbb{N}$ olduğu varsayılmaktadır.

6.3 Genel Doğrusal Dinamik için Uzlaşım

Bu bölümde genel doğrusal dinamiğe sahip etmenlerin düzensiz örnekleme altında uzlaşımı üzerinde durulacaktır. Bu sistemler için uzlaşım, öncelikle sabit topolojiye sahip sistemler için ele alınıp, bulunan yöntemin zamanla değişen yönsüz topolojideki sistemler için de uygulanabilir olduğu gösterilecektir.

$M := \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \bar{M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ matrisinin tersi olacak biçimde bir $\bar{M} \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ sabit matrisi seçilmiş olsun. Önsav 6.1 gereği $\mathcal{L}_k \mathbf{1} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olduğundan bir $\ell_k \in \mathbb{R}^{N-1}$ ve $\bar{\mathcal{L}}_k \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ için

$$M^{-1} \mathcal{L}_k M = \begin{bmatrix} 0 & \ell_k^T \\ 0 & \bar{\mathcal{L}}_k \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

biçiminde olur. O halde, (6.5) sistemi için $z(t) := (M^{-1} \otimes I_n) x(t)$ biçiminde bir değişken dönüşümü tanımlanırsa

$$z = \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ \xi \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \xi := \begin{bmatrix} z^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{bmatrix}$$

olmak üzere kapalı çevrim sistem modeli

$$\dot{z}^{(1)}(t) = A z^{(1)}(t) - (\ell_k^T \otimes BK) \xi(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (6.7)$$

$$\dot{\xi}(t) = (I_{N-1} \otimes A) \xi(t) - (\bar{\mathcal{L}}_k \otimes BK) \xi(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (6.8)$$

biçiminde ayrıştırılabilir. Bu ayrıştırma kullanılarak [26, Önsav 3]'te sabit topoloji altında uzlaşım problemi bir kararlılık problemine dönüştürülmüştür. Ancak, önsavın kanıtı incelendiğinde (6.5) sistemi uzlaşımında ise $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ olduğu gösterilmiştir. Bu da (düzgün asimptotik) kararlılık için yeterli değildir [38, Örnek 5]. Bu nedenle, bu çalışmada önce gerek ve yeter koşul veren bir önsav sonrasında sadece yeter koşul içeren bir teorem verilmiştir.

Önsav 6.3. *Zamanla değişen ağ topolojisine sahip (6.6) sisteminin uzlaşımında olmasının gerek ve yeter koşulu (6.8) sisteminin durumları için $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Leftarrow) \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ olsun. Tanım gereği

$$x(t) = (M \otimes I_n) z(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \bar{M} \end{pmatrix} \otimes I_n \begin{bmatrix} z^{(1)}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \\
&= (\mathbf{1} \otimes I_n) z^{(1)}(t) + (\bar{M} \otimes I_n) \xi(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - (\mathbf{1} \otimes I_n) z^{(1)}(t) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{M} \otimes I_n) \xi(t) = 0$$

olduğundan $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(x^{(i)}(t) - z^{(1)}(t) \right) = 0, i = 1, 2, \dots, N$ olur. Keyfi $i, j \in \mathbb{N}$ seçimi için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(x^{(i)}(t) - x^{(j)}(t) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left[x^{(i)}(t) - z^{(1)}(t) \right] - \left[x^{(j)}(t) - z^{(1)}(t) \right] \right) = 0$$

elde edileceğinden kanıt tamamlanmış olur.

($\Rightarrow$) (6.6) sistemi uzlaşımında olsun. Tanım gereği

$$\begin{aligned}
z(t) - (M^{-1} \mathbf{1} \otimes I_n) x^{(1)}(t) &= (M^{-1} \otimes I_n) x(t) - (M^{-1} \mathbf{1} \otimes I_n) x^{(1)}(t) \\
&= (M^{-1} \otimes I_n) \left[x(t) - (\mathbf{1} \otimes I_n) x^{(1)}(t) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $I_N = M^{-1} M = M^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \bar{M} \end{bmatrix}$ olduğundan $M^{-1} \mathbf{1} = e_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^N$ olmalıdır. O halde,

$$\begin{aligned}
0 &= (M^{-1} \otimes I_n) \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) - x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(N)}(t) - x^{(1)}(t) \end{bmatrix} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[z(t) - (e_1 \otimes I_n) x^{(1)}(t) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{bmatrix} z^{(1)}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Demek ki $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ olması gerekir. Bu da kanıtı tamamlar. $\square$

Teorem 6.2. *Eğer (6.8) sistemi kararlıysa (6.6) sistemi uzlaşımındadır.*

Kanıt. (6.8) sistemi kararlı olduğundan $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ olur. O halde, Önsav 6.3 gereği kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 6.2 ile daha önceki bölümlerde düzensiz örneklemeli sistemlerin kararlı kılınması için geliştirilen kontrol yöntemlerinin, çok etmenli sistemlerin uzlaşımını sağlamak için de kullanılabileceği görülür.

Teorem 6.3. *Sabit ağ topolojisine sahip (6.5) sisteminin Laplasyen matris özdeğerleri $\lambda_i \in \mathbb{C}$ olsun. Verilen bir $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ kapalı aralığı için $\mathcal{S} : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$,*

$$\mathcal{S}(h, \lambda) := e^{Ah} - \lambda \left(\int_0^h e^{A\tau} d\tau \right) BK \quad (6.9)$$

ve $\bar{\sigma}(\cdot)$ en büyük tekil değer olmak üzere

$$\bar{\sigma} \left(T\mathcal{S}(h, \lambda_i)T^{-1} \right) < 1, \quad \forall h \in \mathbb{H}, \quad \forall i \in \{2, \dots, N\} \quad (6.10)$$

koşulunu sağlayan ve tersi olan bir $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi varsa (6.5) sistemi uzlaşımdaydır.

Kanıt. Teorem 6.2 gereği (6.10) koşulu sağlandığında (6.8) sisteminin kararlı olduğunu göstermek kanıt için yeterlidir. Teorem 2.1 kullanılarak (6.8) sistemin ayrık zamanlı modeli $F(h) := e^{Ah}$ ve $G(h) := \int_0^h e^{A\tau} B d\tau$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= e^{(I_{N-1} \otimes A)h_k} \xi_k - \left(\int_0^{h_k} e^{(I_{N-1} \otimes A)\tau} d\tau \right) (\bar{\mathcal{L}}_k \otimes BK) \xi_k \\ &= (I_{N-1} \otimes e^{Ah_k}) \xi_k - \left(I_{N-1} \otimes \left(\int_0^{h_k} e^{A\tau} d\tau \right) \right) (\bar{\mathcal{L}}_k \otimes BK) \xi_k \\ &= \left(I_{N-1} \otimes e^{Ah_k} - \bar{\mathcal{L}}_k \otimes \left(\int_0^{h_k} e^{A\tau} d\tau \right) BK \right) \xi_k \\ &= (I_{N-1} \otimes F(h_k) - \bar{\mathcal{L}}_k \otimes G(h_k)K) \xi_k \end{aligned} \quad (6.11)$$

biçiminde elde edilir. Ağ topolojisi sabit olduğundan $\bar{\mathcal{L}}_k = \bar{\mathcal{L}}, \forall k \in \mathbb{N}$ olur. Verilen T için

$$\widehat{F}(h) := TF(h)T^{-1}, \quad \widehat{G}(h) := TG(h) \quad \text{ve} \quad \widehat{K} := KT^{-1}$$

tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}(h) &:= (I_{N-1} \otimes T) \left(I_{N-1} \otimes F(h) - \bar{\mathcal{L}} \otimes G(h)K \right) (I_{N-1} \otimes T^{-1}) \\ &= I_{N-1} \otimes TF(h)T^{-1} - \bar{\mathcal{L}} \otimes TG(h)KT^{-1} \\ &= I_{N-1} \otimes \widehat{F}(h) - \bar{\mathcal{L}} \otimes \widehat{G}(h)\widehat{K} \end{aligned}$$

kapalı çevrim sistem matrisi elde edilir. Kanıtı tamamlamak için

$$\|\widehat{\Psi}(h)\| = \bar{\sigma}(\widehat{\Psi}(h)) < 1, \quad \forall h \in \mathbb{H}$$

koşulunu sağlayan bir $\bar{M}$ seçiminin var olduğu gösterilecektir. Bunun sonucu olarak Teorem 3.14 gereği (6.8) sisteminin kararlı olduğu ve dolayısıyla (6.5) sisteminin uzlaşımdaya olduğu kanıtlanacaktır.

Değeri daha sonra belirlenecek olan bir $\delta > 0$ için $\bar{\mathcal{L}}$ matrisini gerçel Jordan blok köşegen forma getiren $\bar{M}$ seçilsin. Yani $\bar{\mathcal{L}} = \text{blkdiag}\{\mathcal{J}(\lambda_i, \delta)\}$ biçiminde olsun. O halde,

$$\widehat{\mathcal{F}}(h, \lambda_i) := I_{N_i} \otimes \widehat{F}(h) - \mathcal{J}(\lambda_i, \delta) \otimes \widehat{G}(h)\widehat{K} \quad (6.12)$$

olmak üzere $\widehat{\Psi}(h) = \text{blkdiag}\{\widehat{\mathcal{F}}(h, \lambda_i)\}$ biçiminde yazılabilir. Eğer $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ise

$$\widehat{\mathcal{S}}(h, \lambda) := T\mathcal{S}(h, \lambda)T^{-1} = \widehat{F}(h) - \lambda\widehat{G}(h)\widehat{K} \quad (6.13)$$

olmak üzere

$$\widehat{\mathcal{F}}(h, \lambda_i) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{S}}(h, \lambda_i) & \delta\widehat{G}(h)\widehat{K} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{S}}(h, \lambda_i) & \delta\widehat{G}(h)\widehat{K} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\mathcal{S}}(h, \lambda_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widehat{\mathcal{S}}(h, \lambda_i) \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Önsav C.2 kullanılarak

$$\bar{\sigma}\left\{\widehat{\mathcal{F}}(h, \lambda_i)\right\} \leq \bar{\sigma}\left\{\widehat{\mathcal{S}}(h, \lambda_i)\right\} + \delta\bar{\sigma}\left\{\widehat{G}(h)\widehat{K}\right\}$$

elde edilir. Eğer $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ve $j := \sqrt{-1}$ için $\lambda_i = a_i \mp jb_i \in \mathbb{C}$ ise $\widehat{\mathcal{F}}(h, \lambda_i)$,

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{S}}(h, a_i) & -b_i\widehat{G}(h)\widehat{K} & \delta\widehat{G}(h)\widehat{K} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_i\widehat{G}(h)\widehat{K} & \widehat{\mathcal{S}}(h, a_i) & 0 & \delta\widehat{G}(h)\widehat{K} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\mathcal{S}}(h, a_i) & -b_i\widehat{G}(h)\widehat{K} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_i\widehat{G}(h)\widehat{K} & \widehat{\mathcal{S}}(h, a_i) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \widehat{\mathcal{S}}(h, a_i) & -b_i\widehat{G}(h)\widehat{K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_i\widehat{G}(h)\widehat{K} & \widehat{\mathcal{S}}(h, a_i) \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Önsav C.2 ve Önsav C.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}\left\{\widehat{\mathcal{F}}(h, \lambda_i)\right\} &\leq \bar{\sigma}\left(\begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{S}}(h, a_i) & -b_i\widehat{G}(h)\widehat{K} \\ b_i\widehat{G}(h)\widehat{K} & \widehat{\mathcal{S}}(h, a_i) \end{bmatrix}\right) + \bar{\sigma}\left(\begin{bmatrix} \delta\widehat{G}(h)\widehat{K} & 0 \\ 0 & \delta\widehat{G}(h)\widehat{K} \end{bmatrix}\right) \\ &= \max\left\{\bar{\sigma}\left(\widehat{\mathcal{S}}(h, a_i) - jb_i\widehat{G}(h)\widehat{K}\right), \bar{\sigma}\left(\widehat{\mathcal{S}}(h, a_i) + jb_i\widehat{G}(h)\widehat{K}\right)\right\} \\ &\quad + \delta\bar{\sigma}\left(\widehat{G}(h)\widehat{K}\right) \\ &= \max\left\{\bar{\sigma}\left(\widehat{\mathcal{S}}(h, a_i - jb_i)\right), \bar{\sigma}\left(\widehat{\mathcal{S}}(h, a_i + jb_i)\right)\right\} + \delta\bar{\sigma}\left(\widehat{G}(h)\widehat{K}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, her durumda

$$\bar{\sigma}(\widehat{\Psi}(h)) = \max_i \left\{ \bar{\sigma}(\widehat{\mathcal{F}}(h, \lambda_i)) \right\} \leq \max_i \left\{ \bar{\sigma}(\widehat{\mathcal{S}}(h, \lambda_i)) \right\} + \delta \bar{\sigma}(\widehat{G}(h)\widehat{K})$$

olur. Bir λ_i için $\bar{\sigma}(\widehat{\mathcal{S}}(h, \lambda_i))$ ve $\bar{\sigma}(\widehat{G}(h)\widehat{K})$ fonksiyonları $\mathbb{H}$ kapalı aralığında sürekli olduğundan [65] Uç Değer Teoremi gereği bir maksimumları vardır [66, Bölüm 4, Teorem 1]. O halde,

$$\gamma := \max_i \left\{ \max_{h \in \mathbb{H}} \left[\bar{\sigma}(\widehat{\mathcal{S}}(h, \lambda_i)) \right] \right\} \quad \text{ve} \quad \eta := \max_{h \in \mathbb{H}} \left[\bar{\sigma}(\widehat{G}(h)\widehat{K}) \right]$$

tanımları yapılsın. (6.10) koşulu gereği $\gamma < 1$ olur. Ayrıca, γ ve η değerleri $\bar{M}$ seçiminden bağımsız olduğundan uygun $\bar{M}$ seçimiyle $\delta < (1 - \gamma)/\eta$ elde edilebilir. O halde,

$$\bar{\sigma}(\widehat{\Psi}(h)) \leq \gamma + \delta\eta < 1$$

olduğundan kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Yukarıda sabit ağ topolojisine sahip sistemlerin uzlaşımı için yeter bir koşul verilmiştir. Eğer sistem zamanla değişen ağ topolojisine sahipse ve bu topolojileri modelleyen çizgeler her örnekleme için yönsüz, yani $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k^T$, $\forall k \in \mathbb{N}$ oluyorsa yukarıdaki koşullar bu duruma da uygulanabilir.

Teorem 6.4. *Zamanla değişen ağ topolojisine sahip (6.6) sistemi için topoloji çizgeleri yönsüz, yani $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k^T$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olsun. Laplasyen matrislerin sıralı özdeğerleri için $\lambda_2 := \inf_{k \in \mathbb{N}} \lambda_2(\mathcal{L}_k)$ ve $\lambda_N := \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_N(\mathcal{L}_k)$ tanımları yapılsın. Verilen bir $\mathbb{H} := [h_{\min}, h_{\max}]$ kapalı aralığı için $\mathcal{S} : \mathbb{H} \times [\lambda_2, \lambda_N] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$,*

$$\mathcal{S}(h, \lambda) := e^{Ah} - \lambda \left(\int_0^h e^{A\tau} d\tau \right) BK \quad (6.14)$$

ve $\bar{\sigma}(\cdot)$ en büyük tekil değer olmak üzere

$$\bar{\sigma}(TS(h, \lambda)T^{-1}) < 1, \quad \forall h \in \mathbb{H}, \quad \forall \lambda \in [\lambda_2, \lambda_N] \quad (6.15)$$

koşulunu sağlayan ve tersi olan bir $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi varsa (6.6) sistemi uzlaşımındadır.

Kanıt. Teorem 6.2 gereği (6.15) koşulu sağlandığında (6.11) ile elde edilen

$$\xi_{k+1} = \left(I_{N-1} \otimes F(h_k) - \bar{\mathcal{L}}_k \otimes G(h_k)K \right) \xi_k \quad (6.16)$$

sisteminin kararlı olduğunu göstermek kanıt için yeterlidir. Eğer $\bar{M}^T \bar{M} = I$ ve $\bar{M}^T \mathbf{1} = 0$ olacak biçimde bir seçim yapılırsa

$$M^{-1} \mathcal{L}_k M = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T/N \\ \bar{M}^T \end{bmatrix} \mathcal{L}_k \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T/N \\ \bar{M}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{L}_k \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \mathcal{L}_k \bar{M}/N \\ 0 & \bar{M}^T \mathcal{L}_k \bar{M} \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde $\bar{\mathcal{L}}_k := \bar{M}^T \mathcal{L}_k \bar{M}$ olmalıdır. Ayrıca, $\mathcal{L}_k^T = \mathcal{L}_k$ olduğundan $\bar{\mathcal{L}}_k^T = \bar{\mathcal{L}}_k$ olduğu görülür. O halde, $\Lambda_k := \text{diag}\{\lambda_i(\bar{\mathcal{L}}_k)\}$ olmak üzere $\bar{\mathcal{L}}_k = U_k \Lambda_k U_k^T$ eşitliğini sağlayan $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ ortogonal matris dizisi vardır. Şimdi $\tilde{T} := I_{N-1} \otimes T$, $\tilde{U}_k := U_k \otimes I_n$ ve

$$\Omega_k := I_{N-1} \otimes F(h_k) - \bar{\mathcal{L}}_k \otimes G(h_k)K$$

tanımları yapılsın. Dikkat edilecek olursa $\tilde{U}_k \tilde{U}_k^T = I_{(N-1)n}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olduğundan $\{\tilde{U}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ortogonal bir matris dizisidir. Bir matrisin tekil değerleri ortogonal bir matrisle çarpıldığında değişmeyeceğinden [65] Teorem 6.3'ün kanıtındaki tanımlar kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\tilde{T} \Omega_k \tilde{T}^{-1}) &= \bar{\sigma}(\tilde{U}_k^T \tilde{T} \Omega_k \tilde{T}^{-1} \tilde{U}_k) \\ &= \bar{\sigma}\left(\begin{bmatrix} U_k^T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N-1} \otimes F(h_k) - \bar{\mathcal{L}}_k \otimes G(h_k)K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k & T^{-1} \end{bmatrix}\right) \\ &= \bar{\sigma}\left(I_{N-1} \otimes T F(h_k) T^{-1} - U_k^T \bar{\mathcal{L}}_k U_k \otimes T G(h_k) K T^{-1}\right) \\ &= \bar{\sigma}\left(I_{N-1} \otimes \hat{F}(h_k) - \Lambda_k \otimes \hat{G}(h_k) \hat{K}\right) \\ &= \max_i \left\{ \bar{\sigma}\left(\hat{F}(h_k) - \lambda_i(\bar{\mathcal{L}}_k) \hat{G}(h_k) \hat{K}\right) \right\} \\ &= \max_i \left\{ \bar{\sigma}\left(T S\left(h_k, \lambda_i(\bar{\mathcal{L}}_k)\right) T^{-1}\right) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. En büyük tekil değer matris elemanlarının sürekli bir fonksiyonu olduğundan [65] ve S fonksiyonu kapalı ve sınırlı bir kümede tanımlandığından Uç Değer Teoremi gereği $\bar{\sigma}(T S(h, \lambda) T^{-1})$ fonksiyonunun bir maksimumu vardır [133, Bölüm 14.7, Teorem 8]. O halde,

$$\kappa := \max_{\substack{h \in \mathbb{H} \\ \lambda \in [\lambda_2, \lambda_N]}} \left\{ \bar{\sigma}(T S(h, \lambda) T^{-1}) \right\}$$

olarak tanımlanırsa

$$\bar{\sigma}(\tilde{T} \Omega_k \tilde{T}^{-1}) = \|\tilde{T} \Omega_k \tilde{T}^{-1}\| \leq \kappa, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

elde edilir. (6.15) koşulu nedeniyle $\kappa < 1$ olacağından Teorem 3.13 gereği (6.16) sistemi kararlı olur. Böylece kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Literatürdeki birçok sonucun aksine, yukarıda verilen teorem kullanıldığında değişen tüm ağ topolojilerini bilmeye gerek kalmamaktadır. Yalnızca topoloji çizgelerinin Laplasyen matris özdeğerlerinin sınırlarını bilmek kontrolör tasarımı için yeterli olmaktadır.

6.4 Tek İntegratör Dinamik için Uzlaşım

Ele alınabilecek en basit durum olan tek integratör dinamiği için uzlaşım koşulları kolaylıkla bulunabilir. Tek integratör dinamik için $A = 0$ ve $B = 1$ olduğundan kapalı çevrim etmen dinamiği

$$\dot{x}^{(i)}(t) = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [x^{(j)}(t_k) - x^{(i)}(t_k)], \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (6.17)$$

biçimindedir. O halde (6.6) kapalı çevrim sistemi

$$\dot{x}(t) = -K \mathcal{L}_k x(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (6.18)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (6.14) ile tanımlanan $S(h, \lambda) = 1 - \lambda h K$ olur. Eğer zamanla değişen ağ topoloji çizgeleri yönsüz oluyorsa, Teorem 6.4 gereği tüm $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$ ve tüm $\lambda \in [\lambda_2, \lambda_N]$ için

$$\begin{aligned} |1 - \lambda h K| &< 1 \\ -1 &< 1 - \lambda h K < 1 \\ -2 &< -\lambda h K < 0 \\ \frac{2}{\lambda h} &> K > 0 \end{aligned}$$

olması uzlaşım için yeterlidir. O halde,

$$\frac{2}{\lambda_N h_{\max}} > K > 0 \quad (6.19)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilen bir K uzlaşımı sağlar. Ayrıca, Önsav 6.2 gereği eğer $\lambda_N = 2N - 2$ seçilirse N etmeden oluşan, olası tüm bağlı ve yönsüz topolojilere sahip olabilen, değişken topoloji altındaki tüm sistemler, keyfi örnekleme zamanı altında uzlaşımında olurlar.

6.5 Çift İntegratör Dinamik için Uzlaşım

Teorem 6.3 ve 6.4 kullanılarak genel doğrusal dinamik için uzlaşım problemi çözülebiliyor olsa da en genel halde teoremlerin koşullarını sağlayan T ve K matrislerini bulmak kolay değildir. Ancak, bu çalışmada çift integratör dinamiği için değişen yönsüz topolojiler altında kontrolör parametreleri sınırları türetilmiştir. Bu sınırlar, örnekleme aralığı limitleri $h_{\min}$, $h_{\max}$ ve olası tüm Laplasyen matris özdeğer limitleri λ_2 ve λ_N 'e bağlı ve analitik biçimde verilmiştir. Ayrıca, her $0 < h_{\min} \leq h_{\max}$ ve $0 < \lambda_2 \leq \lambda_N$ seçimi için verilen kontrolörün var olduğu gösterilmiştir.

Verilen $0 < \lambda_2 \leq \lambda_N$ için zamanla değişen ağ topoloji çizgelerinin Laplasyen matrislerinin sıfırdan farklı özdeğerleri $[\lambda_2, \lambda_N]$ aralığında olsun. Etmenler çift integratör dinamiğine sahip olsun, yani

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak seçilsin. $A^2 = A^3 = \dots = 0$ olduğundan

$$e^{Ah} = I + hA = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \int_0^h e^{A\tau} d\tau = \begin{bmatrix} h & \frac{h^2}{2} \\ 0 & h \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. O halde,

$$\mathcal{S}(h, \lambda) := e^{Ah} - \lambda \left(\int_0^h e^{A\tau} d\tau \right) BK = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} K$$

olur. $0 < \mu_1 < \mu_2$ olmak üzere

$$T := \begin{bmatrix} \mu_2 - \mu_1 & -(\mu_2 + \mu_1) \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} \begin{bmatrix} 2 & \mu_2 + \mu_1 \\ 0 & \mu_2 - \mu_1 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

biçimindeki benzerlik dönüşüm matrisi seçilsin. O halde,

$$\gamma := \frac{\mu_1 + \mu_2 + h}{\mu_2 - \mu_1} \text{ ve } \widehat{K} := KT^{-1} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\widehat{\mathcal{S}} := T\mathcal{S}(h, \lambda)T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{h\lambda\gamma k_1}{2} & \frac{2h}{\mu_2 - \mu_1} - \frac{h\lambda\gamma k_2}{2} \\ -\frac{h\lambda k_1}{2} & 1 - \frac{h\lambda k_2}{2} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

elde edilir. Uzlaşım probleminin çözümü için

$$\begin{aligned} s_{11} &:= 1 - \frac{h\lambda\gamma k_1}{2} & s_{12} &:= \frac{2h}{\mu_2 - \mu_1} - \frac{h\lambda\gamma k_2}{2} \\ s_{21} &:= -\frac{h\lambda k_1}{2} & s_{22} &:= 1 - \frac{h\lambda k_2}{2} \end{aligned}$$

olmak üzere, Önsav C.1 kullanılarak

$$\max\{|s_{11}| + |s_{12}|, |s_{11}| + |s_{21}|, |s_{22}| + |s_{12}|, |s_{22}| + |s_{21}|\} < 1 \quad (6.22)$$

sağlanması yeterlidir. O halde, (6.22)'deki her bir toplamın 1'den küçük olması gerektiğinden, sağlanması gereken 4 adet eşitsizlik vardır.

Öncelikle $h, \lambda > 0, \gamma > 1$ ve $\mu_2 > \mu_1 > 0$ olduğu görülür. Ayrıca, $k_1, k_2 > 0$ olmalıdır. Çünkü, aksi halde $s_{11}, s_{22} > 1$ olacağından (6.22) ile verilen eşitsizlikler sağlanamaz.

Ek olarak $s_{11}, s_{22} > 0$ olması istenir. Çünkü aksi halde $2/h\lambda\gamma < k_1$ ve $2/h\gamma < k_2$ olması gerektiğinden h 'nın küçük değerleri için k_1 ve k_2 'nin alt sınırları çok büyük olmakta ve eşitsizlikler sağlanamamaktadır. $s_{12} > 0$ olduğunda eşitsizliklerin tutarsız olacağı gösterilebilir. Bu nedenle $s_{12} < 0$ olmalıdır. Ayrıca, $s_{21} < 0$ olduğundan öncelikle

$$\begin{aligned} s_{11} &= 1 - \frac{h\lambda\gamma k_1}{2} > 0 & \Rightarrow \frac{2}{h\lambda\gamma} > k_1 \\ s_{22} &= 1 - \frac{h\lambda k_2}{2} > 0 & \Rightarrow \frac{2}{h\lambda} > k_2 \\ s_{12} &= \frac{2h}{\mu_2 - \mu_1} - \frac{h\lambda\gamma k_2}{2} < 0 & \Rightarrow k_2 > \frac{4}{\lambda(\mu_1 + \mu_2 + h)} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanmalıdır. O halde, (6.22) ile verilen eşitsizlikler yazılırsa

$$\begin{aligned} |s_{11}| + |s_{21}| &= 1 - \frac{h\lambda(\gamma - 1)k_1}{2} < 1 & \Rightarrow \text{halihazırda sağlanır} \\ |s_{22}| + |s_{21}| &= 1 - \frac{h\lambda}{2}(k_2 - k_1) < 1 & \Rightarrow k_2 - k_1 > 0 \\ |s_{11}| + |s_{12}| &= 1 - \frac{2h}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{h\lambda\gamma}{2}(k_2 - k_1) < 1 & \Rightarrow \frac{4}{\lambda(\mu_1 + \mu_2 + h)} > k_2 - k_1 \\ |s_{22}| + |s_{12}| &= 1 - \frac{2h}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{h\lambda(\gamma - 1)k_2}{2} < 1 & \Rightarrow \frac{4}{\lambda(2\mu_1 + h)} > k_2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanmalıdır. Tüm eşitsizlikler bir araya getirildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{h\lambda(\mu_1 + \mu_2 + h)} &> k_1 > 0 \\ \min \left\{ \frac{2}{h\lambda}, \frac{4}{\lambda(2\mu_1 + h)} \right\} &> k_2 > \frac{4}{\lambda(\mu_1 + \mu_2 + h)} \\ \frac{4}{\lambda(\mu_1 + \mu_2 + h)} &> k_2 - k_1 > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliklerin tüm olası (h, λ) için sağlanması gerekmektedir. Bu nedenle eşitsizliklerin üst sınırını en küçük ve alt sınırını en büyük yapan değerler seçilmelidir. Bu da sol taraflarda $h = h_{\max}$ ve $\lambda = \lambda_N$, sağ taraflarda $h = h_{\min}$ ve $\lambda = \lambda_2$ seçimleriyle sağlanır. O halde,

$$\frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{\lambda_N h_{\max}(\mu_1 + \mu_2 + h_{\max})} > k_1 > 0 \quad (6.23)$$

$$\min \left\{ \frac{2}{\lambda_N h_{\max}}, \frac{4}{\lambda_N(2\mu_1 + h_{\max})} \right\} > k_2 > \frac{4}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2 + h_{\min})} \quad (6.24)$$

$$\frac{4}{\lambda_N(\mu_1 + \mu_2 + h_{\max})} > k_2 - k_1 > 0 \quad (6.25)$$

eşitsizlikleri sağlanmalıdır. Sonuç olarak (6.23)–(6.25) eşitsizlikleri sağlandığında $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} T$ kontrolörü ile çift integratör dinamiğine sahip çok etmenli sistemin $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$ olacak şekilde keyfi örnekleme aralığı seçimi ve $\lambda \in [\lambda_2, \lambda_N]$ olmak üzere değişen yönsüz ağ topolojileri altında uzlaşımının sağlandığı gösterilmiş olur.

Şimdi, bu eşitsizliklerin tutarlılığı incelenmelidir.

Önsav 6.4. $a, b, c, d > 0$ ve

$$a > k_1 > 0$$

$$b > k_2 > c$$

$$d > k_2 - k_1 > 0$$

olsun. O halde, verilen eşitsizliklerin tutarlı olmasının, yani eşitsizlikleri sağlayan k_1, k_2 var olmasının gerek ve yeter koşulu $b > c$ ve $a + d > c$ olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Eşitsizlikler tutarlı olsun. O halde, $b > c$ olacağı açıktır. Birinci ve üçüncü eşitsizlikler toplandığında $a + d > k_2 > c$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $b > c$ ve $a + d > c$ olsun. Eğer $d \geq c$ ise $\min\{a, c\} > \alpha > 0$ olacak şekilde $k_1 = \alpha$ seçilsin. O halde ikinci ve üçüncü eşitsizlikler kullanılarak

$$\min\{d + \alpha, b\} > k_2 > \max\{c, \alpha\} = c$$

elde edilir. $d \geq c$ ve $b > c$ olduğundan eşitsizlikler tutarlı olur.

Eğer $c > d$ ise $a + d - c > \varepsilon > 0$ olacak şekilde $k_2 = k_1 + d - \varepsilon$ seçilsin. O halde, birinci ve ikinci eşitsizlikler kullanılarak

$$\min\{a, b - d + \varepsilon\} > k_1 > \max\{c - d + \varepsilon, 0\} = c - d + \varepsilon$$

elde edilir. $a > c - d + \varepsilon$ ve $b > c$ olduğundan eşitsizlikler tutarlı olur. $\square$

Teorem 6.5. (6.23)–(6.25) eşitsizliklerinin tutarlı olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\frac{\mu_1 + \mu_2 + h_{\min}}{h_{\max} + \max\{2\mu_1, h_{\max}\}} > \frac{\lambda_N}{\lambda_2} \quad (6.26)$$

olmasıdır.

Kanıt. Öncelikle

$$\begin{aligned} a &:= \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{\lambda_N h_{\max}(\mu_1 + \mu_2 + h_{\max})} & b &:= \frac{4}{\lambda_N (h_{\max} + \max\{2\mu_1, h_{\max}\})} \\ c &:= \frac{4}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2 + h_{\min})} & d &:= \frac{4}{\lambda_N(\mu_1 + \mu_2 + h_{\max})} \end{aligned}$$

tanımları yapılsın. Önsav 6.4 gereği (6.23)–(6.25) eşitsizliklerinin tutarlı olmasının gerek ve yeter koşulu $b > c$ ve $a + d > c$ olmasıdır. $b > c$ eşitsizliğinin (6.26) eşitsizliğine denk olduğu açıktır. O halde, $a + d \geq b$ olduğunu göstererek kanıt tamamlanacaktır. Bunun için

$$\begin{aligned} \frac{4h_{\max} + 2(\mu_2 - \mu_1)}{\lambda_N h_{\max}(\mu_1 + \mu_2 + h_{\max})} &\geq \frac{4}{\lambda_N (h_{\max} + \max\{2\mu_1, h_{\max}\})} \\ \max\{2\mu_1, h_{\max}\} &\geq \frac{2h_{\max}(\mu_1 + \mu_2 + h_{\max})}{2h_{\max} + \mu_2 - \mu_1} - h_{\max} \\ &= \frac{h_{\max}(3\mu_1 + \mu_2)}{2h_{\max} + \mu_2 - \mu_1} \end{aligned}$$

olduğu gösterilmelidir. Eğer $h_{\max} \geq 2\mu_1$ ise

$$\begin{aligned} 2h_{\max}^2 &\geq 4\mu_1 h_{\max} \\ 2h_{\max}^2 + \mu_2 h_{\max} - \mu_1 h_{\max} &\geq 3\mu_1 h_{\max} + \mu_2 h_{\max} \\ h_{\max} &\geq \frac{h_{\max}(3\mu_1 + \mu_2)}{2h_{\max} + \mu_2 - \mu_1} \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $2\mu_1 \geq h_{\max}$ ise

$$\begin{aligned} 2\mu_1(\mu_2 - \mu_1) &\geq \mu_2 h_{\max} - \mu_1 h_{\max} \\ 2\mu_1(2h_{\max} + \mu_2 - \mu_1) &\geq \mu_2 h_{\max} + 3\mu_1 h_{\max} \\ 2\mu_1 &\geq \frac{h_{\max}(3\mu_1 + \mu_2)}{2h_{\max} + \mu_2 - \mu_1} \end{aligned}$$

elde edilerek kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Bu teoremin sonucu olarak keyfi seçilen $h_{\max} \geq h_{\min} > 0$ ve $\lambda_N \geq \lambda_2 > 0$ için uzlaşım sağlayan kontrolörün her zaman var olduğu görülür. Kontrolör tasarımında değişen ağ topolojileri için topoloji çizgelerinin kendilerini değil, yalnızca λ_N, λ_2 değerlerini bilmek yeterlidir. Ayrıca, değişken örnekleme aralığı da keyfi olarak seçilebilir.

Keyfi seçilen $h_{\max} \geq h_{\min} > 0$ ve $\lambda_N \geq \lambda_2 > 0$ için uzlaşımı garantileyen bir kontrolör bulma algoritması aşağıdaki gibi verilebilir.

Algoritma 6.1 Uzlaşım sağlayan kontrolör tasarım algoritması

$$\mu_1 \leftarrow h_{\max}/2$$

$$\mu_2 \leftarrow -\mu_1 - h_{\min} + 2h_{\max}\lambda_N/\lambda_2 + 1 \quad \triangleright (6.26)$$

$$a \leftarrow \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{h_{\max}\lambda_N(\mu_1 + \mu_2 + h_{\max})} \quad \triangleright (6.23)$$

$$b \leftarrow \frac{2}{h_{\max}\lambda_N} \quad \triangleright \mu_1 \text{ seçimi ile basitleştirilmiştir (6.24)}$$

$$c \leftarrow \frac{4}{\lambda_2(\mu_1 + \mu_2 + h_{\min})} \quad \triangleright (6.24)$$

$$d \leftarrow \frac{4}{\lambda_N(\mu_1 + \mu_2 + h_{\max})} \quad \triangleright (6.25)$$

$$\Delta k \leftarrow 0.9d$$

$$k_1 \leftarrow (\min\{a, b - \Delta k\} + \max\{0, c - \Delta k\}) / 2$$

$$k_2 \leftarrow k_1 + \Delta k$$

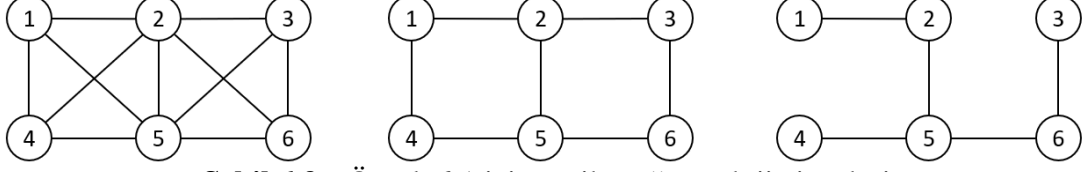
$$T \leftarrow \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} \begin{bmatrix} 2 & \mu_2 + \mu_1 \\ 0 & \mu_2 - \mu_1 \end{bmatrix}$$

$$K \leftarrow \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} T$$

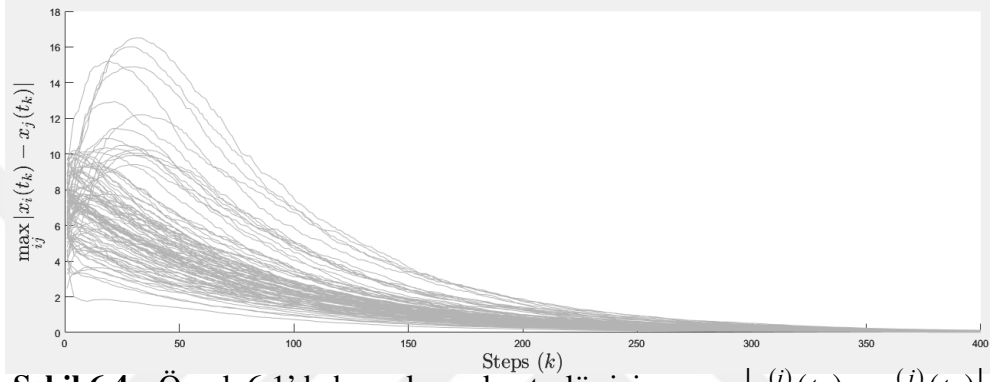
Örnek 6.1. Aşağıda Şekil 6.3 ile verilen topolojiler arasında rastgele geçiş yapan çift integratör dinamiğine sahip çok etmenli sistem ele alınsın. Aşağıdaki tüm çizgelerin sıfırdan farklı Laplasyen matris özdeğerini kapsayacak biçimde $\lambda_2 = 0.3$ ve $\lambda_N = 6$ seçilmiştir. Örnekleme aralıkları $h_k \in [0.1, 3]$ olmak üzere rastgele üretilmiştir. Algoritma 6.1 kullanılarak $K = \begin{bmatrix} 0.0009 & 0.1093 \end{bmatrix}$ kontrolörünün uzlaşım sağlayacağı hesaplanmıştır.

Aşağıda Şekil 6.4 ile verilen grafikteki her bir eğri rastgele seçilmiş örnekleme altında 400 adımlık simülasyonu göstermektedir. Her 50 adımda bir Şekil 6.3 ile verilen topolojilerden biri rastgele seçilerek herhangi bir topoloji için uzlaşımsızlığın olmadığı gösterilmiştir.

Toplamda 100 simülasyon yapılarak tüm etmenlerin durumları arasındaki farkın normunun en büyük değeri, yani $\max_{i,j} |x^{(i)}(t_k) - x^{(j)}(t_k)|$, $i, j = 1, \dots, N$, Şekil 6.4 ile verilen grafikte üst üste çizdirilmiştir.



Şekil 6.3 : Örnek 6.1 için verilen ağ topoloji çizgeleri

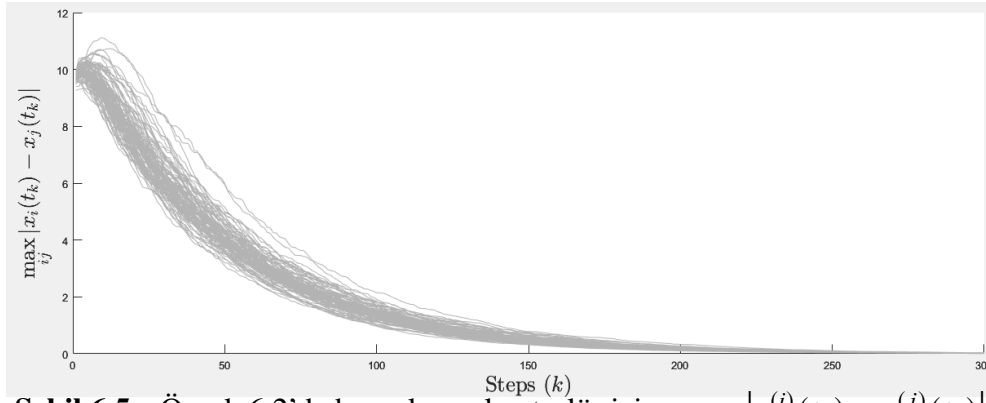


Şekil 6.4 : Örnek 6.1’de hesaplanan kontrolör için $\max_{i,j} |x^{(i)}(t_k) - x^{(j)}(t_k)|$

Örnek 6.2. Çift integratör dinamiğine sahip $N = 100$ etmenli sistem ele alınsın. Sistemin $\lambda_2 = 5$ ve $\lambda_N = 60$ olacak şekilde her adımda rastgele değişen bir topolojisi olduğu varsayılınsın. Örneklem aralıkları $h_k \in [0.1, 1]$ olmak üzere rastgele üretilmiş olsun. O halde, Algoritma 6.1 kullanılarak $K = [0.0013 \ 0.032]$ kontrolörünün uzlaşım sağlayacağı hesaplanmıştır.

Aşağıda Şekil 6.5 ile verilen grafikteki her bir eğri rastgele seçilmiş örneklem altında 300 adımlık simülasyonu göstermektedir. Her 50 adımda bir $\lambda_2 = 5$ ve $\lambda_N = 60$ olacak şekilde rastgele bir topoloji üretilerek herhangi bir topoloji için uzlaşsızlığın olmadığı gösterilmiştir.

Toplamda 100 simülasyon yapılarak tüm etmenlerin durumları arasındaki farkın normunun en büyük değeri, yani $\max_{i,j} |x^{(i)}(t_k) - x^{(j)}(t_k)|$, $i, j = 1, \dots, N$, Şekil 6.5 ile verilen grafikte üst üste çizdirilmiştir.



Şekil 6.5 : Örnek 6.2’de hesaplanan kontrolör için $\max_{i,j} |x^{(i)}(t_k) - x^{(j)}(t_k)|$

6.6 Saat Senkronizasyonu

Bu bölümde, çift integratör dinamiği için geliştirilen kontrol yöntemi, Kablosuz Sensör Ağları (Wireless Sensor Networks) ya da daha geniş tabiriyle Nesnelerin İnterneti (Internet of Things) sistemleri için saat senkronizasyonu uygulamasında kullanılacaktır. Bu uygulama, geliştirilen kontrol yönteminin genelliği ve çift integratör dinamiğinin geniş uygulama alanları için bir örnek teşkil etmektedir.

IoT sistemleri, genellikle enerji ve işlem kısıtları bulunan ve kendi aralarında kablosuz biçimde haberleşen birçok cihazdan meydana gelmektedir. IoT sistemlerini oluşturan cihazlar genelde mobildirler ve haberleşmelerini, bir butona basılması ya da hareket algılanması gibi olaylara bağlı olarak gerçekleştirirler. Bu nedenlerle ağ topolojileri sürekli değişmekte ve haberleşme zamanları aperiodyk olmaktadır. Yani bu ana başlık altında ele alınan problemlerin çözümü, genel olarak IoT uygulamalarında kullanmak için oldukça uygundur.

IoT uygulamalarında saat senkronizasyonunun oldukça önemli olduğu bilinmektedir [134,135]. IoT sistemlerinin saat senkronizasyonu için literatürde onlarca yöntem bulunmaktadır [136,137,138]. Bu yöntemler en temelde merkezi ve dağıtık olmak üzere iki ana grupta toplanabilir [134]. Merkezi yöntemlerde güncel zamanı ağ üzerinde dağıtan tek bir merkez bulunmaktadır. Dağıtık olan yöntemlerde ise ağdaki tüm cihazlar ortak bir zamanda uzlaşarak senkronizasyonu sağlamaktadır. Merkezi yöntemlerin en büyük dezavantajlarından biri, eğer zamanı dağıtan kök düğümü işlevsiz hale gelirse tüm ağın senkronizasyonunu olumsuz etkilemesidir. Dağıtık yöntemler bu problemten etkilenmemektedir [139].

Bu çalışma kapsamında IoT sistemini oluşturan cihazların her birinde kesin maksimum hatası bilinen bir saat olduğu varsayılmaktadır. Ağdaki her cihaz üzerinde bulunan saat

$$\dot{z}^{(i)}(t) = 1 + \Delta^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

biçiminde modellenenebilir. Burada $z^{(i)}(t)$, i 'inci saatin ölçtüğü zaman ve $\Delta^{(i)}$ ise saatin ölçtüğü zaman akış hızının, gerçek zaman akış hızından sapması olarak tanımlanır. Bu sapmanın bir $\gamma > 0$ için

$$\left| \Delta^{(i)} \right| < \gamma, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad \text{ve} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta^{(i)} = 0 \quad (6.27)$$

olacak biçimde olduğu varsayılır. Ayrıca, saat hızındaki sapmaların sabit olduğu varsayılmaktadır. Genelde bu sapmalara sebep olan sıcaklık ve gerilim gibi fiziksel büyüklükler senkronizasyonun sağlandığı zaman ölçeğine göre çok yavaş değiştiğinden [140] bu varsayımı yapmak yanlış olmaz.

Günümüzde elektronik cihazlarda kullanılan tipik bir kuvars (quartz) kristalin mutlak sapması 30-100ppm (parts per million) civarındadır [141]. Yani en iyi ihtimalle $\gamma = 20\text{ppm} = 20 \times 10^{-6}$ seçilirse zaman ölçümünde her saniyede $\pm 20\mu\text{s}$ kayma yaşanmaktadır. Karşılaştırma olması açısından saniyede 1 paket gönderen 200 cihazın birbiriyle çakışmadan veri gönderebilmesi için en azından $(1000\text{ms} / 200\text{cihaz}) / 2 = 2.5\text{ms}$ doğruluğunda bir senkronizasyon sağlanmalıdır. Yani bu iyi durum için bile $2500\mu\text{s} / 20\mu\text{s}/\text{s} = 125\text{s} \approx 2\text{dk}$ içinde senkronizasyon limitlerinin dışına çıkılmaktadır.

Saat sapmalarını gidermek için

$$\dot{z}^{(i)}(t) = u^{(i)}(t) + (1 + \Delta^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.28)$$

biçiminde bir $u^{(i)}(t)$ kontrol işareti sisteme eklenmiştir. Bu modelleme altında saat senkronizasyonunun sağlanması için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| z^{(i)}(t) - z^{(j)}(t) \right| = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

olmalıdır. Yani bu problem tek integratör dinamiğe sahip ve model belirsizliği olan etmenlerden oluşan bir sistemin uzlaşım problemidir.

Sisteme uygulanan kontrol işaretinin, bir etmenin yalnızca komşularından düzensiz zaman aralıklarında aldığı bilgiler kullanılarak oluşturulduğu varsayılmaktadır.

Eğer kontrolör için $K \in \mathbb{R}$ biçiminde bir kazanç kullanılırsa,

$$e^{(i)}(t) := \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [z^{(j)}(t) - z^{(i)}(t)] \quad (6.29)$$

olmak üzere $u^{(i)}(t) = Ke^{(i)}(t_k)$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ olur. Ancak, bu şekilde bir kontrolörün (6.28) biçiminde dinamiğe sahip olan çok etmenli bir sistem için uzlaşım sağlayamayacağı bilinmektedir [111]. Bunun nedeni, klasik teoride iyi bilinen P-tipi kontrolörün tek integratör sistem için bozucu bastırmada başarısız olmasına dayanmaktadır [84, Bölüm 4.3]. Nitekim, Bölüm 6.4'te tek integratör dinamik için verilen kontrolör bu sisteme uygulandığında uzlaşımın sağlanmadığı aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 6.3. (6.28) dinamiği için $N = 100$ etmenli sistem, aralarında rastgele bağlantı çizgeleri oluşacak biçimde simülasyon yapılmıştır. Her bir etmen için $\gamma = 100\text{ppm} = 100 \times 10^{-6}$ olmak üzere $\Delta^{(i)}$ rastgele seçilmiştir. Simülasyonda $h_{\min} = 1\text{s}$ ve $h_{\max} = 30\text{s}$ olacak şekilde rastgele örnekleme aralıkları seçilmiştir. $\lambda_N = 2N - 2 = 198$ olmak üzere $2/(\lambda_N h_{\max}) > K > 0$ koşulunu sağlayan $K = 0.0003$ olarak seçilmiştir. Yapılan simülasyonda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{ij} |z^{(i)}(t) - z^{(j)}(t)| = 19.4\text{ms}$$

elde edilmiştir. Yani, uzlaşım sağlanamamıştır.

Yukarıdaki kontrolör ile uzlaşım sağlanamadığından [111] çalışmasında verilen ayrık zamanlı PI kontrolörden esinlenerek $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$u^{(i)}(t) = \alpha e^{(i)}(t_k) + \beta \int_{t_k}^t e^{(i)}(t_k) = (\alpha + \beta(t - t_k)) e^{(i)}(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (6.30)$$

biçiminde sürekli bir PI kontrolör önerilmiştir.

Yukarıda verilen kontrolör sürekli olsa da etmenler arasında sürekli bir haberleşme gerektirmez. Çünkü dikkat edilecek olursa $[t_k, t_{k+1})$ zaman aralığı boyunca komşulardan alınan bilginin yalnızca t_k anındaki değeri kullanılmaktadır. Yani bu kontrolörün kullanılabilmesi için etmenlerin kendi içinde sürekliye yakın bir kontrol işareti üretebildiğini varsaymak yeterlidir. Bu varsayım örneğin güce bağlı olan ağ geçidi (gateway) cihazlarının kendi aralarındaki saat senkronizasyonu gibi bazı durumlarda gerçekçidir. Özellikle olay tetiklemeli sistem uygulamalarında bu varsayım sıklıkla yapılmaktadır [128,129].

Yukarıdaki tartışmalar ışığında (6.30) ile verilen kontrol işareti sistem dinamiğinde yerine yazılırsa tüm $t \in [t_k, t_{k+1})$ için

$$\begin{aligned}\dot{z}^{(i)}(t) &= q^{(i)}(t) + \alpha e^{(i)}(t_k) + (1 + \Delta^{(i)}) \\ \dot{q}^{(i)}(t) &= \beta e^{(i)}(t_k)\end{aligned}\quad (6.31)$$

biçimindeki çift integratör sistem elde edilir. Bu sistem için $(1 + \Delta^{(i)})$ terimi bozucu olarak değerlendirilirse $b := \alpha/\beta$ ve $x^{(i)} := [z^{(i)} \quad q^{(i)}]^T$, $i = 1, 2, \dots, N$ tanımlarıyla tüm $t \in [t_k, t_{k+1})$ için

$$\dot{x}^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(i)}(t) + \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} [\beta \quad 0] \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x^{(j)}(t_k) - x^{(i)}(t_k)) \quad (6.32)$$

sistemi elde edilir. O halde, Bölüm 6.5'te çift integratör dinamik için elde edilen kontrolör küçük bir değişiklikle bu sisteme de uygulanabilir. $K := [\beta \quad 0]$ olmak üzere yukarı sistem için

$$\mathcal{S}(h, \lambda) := e^{Ah} - \lambda \left(\int_0^h e^{A\tau} d\tau \right) BK = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} hb + \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} K$$

olarak elde edilir. Benzerlik dönüşüm matrisi olarak

$$T := \begin{bmatrix} \mu_2 - \mu_1 & -(\mu_2 + \mu_1) + 2b \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} \begin{bmatrix} 2 & \mu_2 + \mu_1 - 2b \\ 0 & \mu_2 - \mu_1 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

seçilirse

$$\gamma := \frac{\mu_1 + \mu_2 + h}{\mu_2 - \mu_1} \text{ ve } \widehat{K} := KT^{-1} = [k_1 \quad k_2]$$

olmak üzere

$$\widehat{\mathcal{S}} := T\mathcal{S}(h, \lambda)T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{h\lambda\gamma k_1}{2} & \frac{2h}{\mu_2 - \mu_1} - \frac{h\lambda\gamma k_2}{2} \\ -\frac{h\lambda k_1}{2} & 1 - \frac{h\lambda k_2}{2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa bu eşitlik (6.21) ile aynıdır. O halde, (6.23)–(6.25) eşitsizliklerini sağlayan kontrolör bu sistemin uzlaşımı için de kullanılabilir. Ancak sonuçta hesaplanan $K = [k_1 \quad k_2] T$ kontrolörünün ikinci elemanı 0 olacak şekilde bir $b = \alpha/\beta$ seçilmelidir. Yani

$$\begin{aligned}K &= [k_1 \quad k_2] T \\ &= \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} [k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} 2 & \mu_2 + \mu_1 - 2b \\ 0 & \mu_2 - \mu_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} [2k_1 \quad k_1(\mu_2 + \mu_1) - 2k_1b + k_2(\mu_2 - \mu_1)]\end{aligned}$$

olduğundan

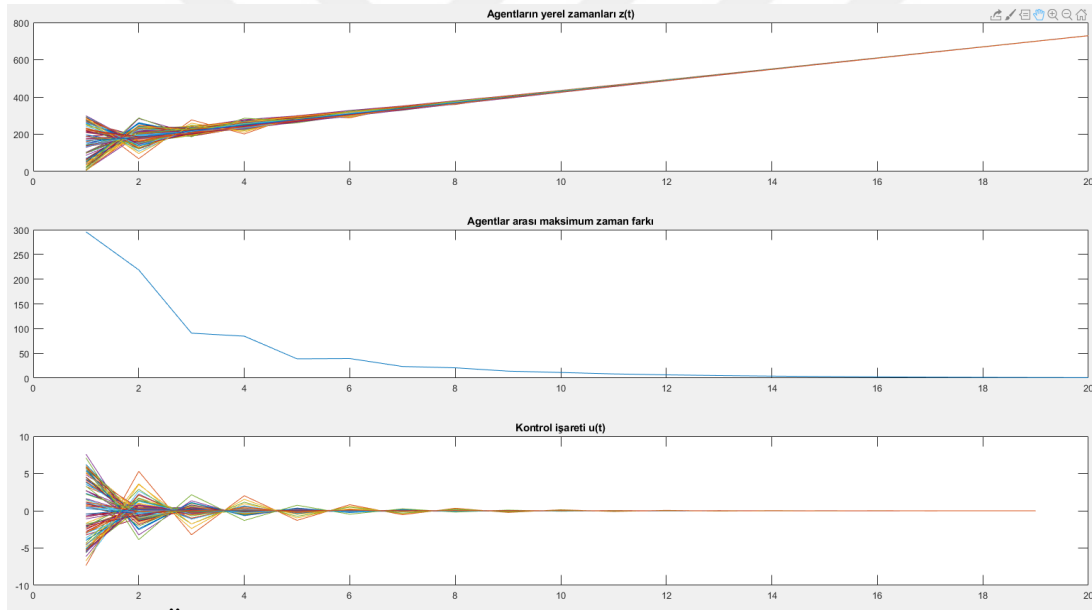
$$\beta := \frac{k_1}{\mu_2 - \mu_1} \text{ ve } b = \frac{k_1(\mu_2 + \mu_1) + k_2(\mu_2 - \mu_1)}{2k_1}$$

seçilmelidir. Bu şekilde seçilen kontrolör Örnek 6.3'teki sisteme uygulandığında Şekil 6.6'daki grafikler elde edilir ve beklendiği gibi uzlaşımın sağlandığı görülür.

Ayrıca, Teorem 6.4'ün kanıtındaki M seçimi dolayısıyla $e_1 := [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ olmak üzere

$$z^{(1)}(t) := \left(e_1^T M^{-1} \otimes I \right) x(t) = \left(\mathbf{1}^T / N \otimes I \right) x(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^{(i)}(t)$$

elde edilir. Önsav 6.3'ün kanıtında görüleceği gibi $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(x^{(i)}(t) - z^{(1)}(t) \right) = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, N$ olduğundan uzlaşımındaki sistemin ortak zaman hız kayması, tüm etmenlerin zaman hız kaymasının ortalaması biçimindedir. Yani uzlaşımındaki çok etmenli sistemin gerçek zamana göre hız kayması $\Delta = \sum_{i=1}^N \Delta^{(i)} / N$ olur. O halde, (6.27) varsayımından dolayı etmen sayısı N büyüdükçe sistemin ortak saat hızı da gerçek zaman hızına yaklaşır. Bu durum simülasyonlarda da gözlemlenmiştir.



Şekil 6.6 : Örnek 6.3 için zaman senkronizasyonu. (a) Etmenlerin yerel saatleri. (b) Etmenler arasındaki zaman farklarının maksimum değeri. (c) Kontrol işareti

6.7 Sonuçlar

Genel doğrusal dinamiğe sahip çok etmenli sistemlerin düzensiz örnekleme altında uzlaşım problemi için bazı yeter koşullar verilmiştir. Bu koşullar, bir alt sistemin kararlı kılınması yöntemine dayanmaktadır. Sistem dinamiğinin durumları bir benzerlik dönüşümü ile başka bir koordinat sistemine taşınarak kapalı çevrim sistem matrisinin bir daralma (contraction) yapılabildiği gösterilmiştir. Yani bu koordinat sisteminde durum vektörünün boyu her örneklemede daha küçük hale gelmektedir. Verilen koşulun

yönsüz çizgeye sahip değişen topolojili sistemlere de kolaylıkla genişletilebildiği gösterilmiştir.

Çift integratör dinamiğine sahip çok etmenli sistemlerin düzensiz örnekleme ve değişen ağ topolojileri altında uzlaşımını sağlayan bir kontrolör için sağlanması gereken basit eşitsizlikler verilmiştir. Bu eşitsizlikler, örnekleme aralıklarının minimum ve maksimum değerlerine ve çizgelerin Laplasyen matris özdeğerlerinin tamamını içeren bir aralığa bağlıdır. Bu nedenle, kontrolör tasarımı için ağ topolojilerinin kendilerini değil, yalnızca Laplasyen matris özdeğer sınırlarının bilinmesi yeterli olmaktadır. Ayrıca, böyle bir kontrolörün çizgeler bağlı olduğu sürece her zaman var olduğu gösterilmiştir. Teorik sonuçların doğruluğunu göstermek için örnekler verilmiştir. Son olarak, çift integratör için verilen kontrolör, IoT sistemlerin zaman senkronizasyon problemine uygulanmıştır.



7. SONUÇLAR

Tez kapsamında düzensiz örneklemeli sistemlerin kararlı kılınması ve kontrolü konusu ele alınmıştır. Düzensiz örneklemeli sistemler; ağ kontrol sistemleri, karma (hybrid) sistemler, olay tetiklemeli sistemler, çok etmenli sistemler gibi pratikte oldukça geniş uygulama alanına sahiptir. Düzensiz örneklemeli sistemlerin kararlı kılınması ve kontrolü hala aktif ve yoğun bir çalışma alanıdır.

Bu tez kapsamında literatürde birçok farklı tanımı olan, ama özel durumlarda birbirine denk olan kararlılık tanımları kapsamlı bir biçimde ele alınmıştır. Özel durumlarda eşdeğer olan tanımların denklik teoremleri verilerek konu derlenmiştir. Kararlılık için verilmiş olan gerek ve yeter koşullar ve yalnızca yeter koşullar özetlenmiş ve tez kapsamını ilgilendiren koşullar kanıtlarıyla verilmiştir. Ayrıca, kararlılık için bir ortak benzerlik dönüşümü koşulu verilmiş ve bu koşulun literatürde iyi bilinen ortak karesel Lyapunov fonksiyonu koşuluna eşdeğer olduğu kanıtlanmıştır.

Kontrol teorisinde önemli bir yere sahip olan erişilebilirlik ve gözlenebilirlik kavramları, ayrık zamanla değişen doğrusal sistemler için özetlenmiş ve bu iki kavram arasında yeni bir dualite teoremi verilmiştir. Düzensiz örnekleme altında erişilebilirlik ve gözlenebilirliğin korunması konusu tartışılmış ve yeni bir atanabilirlik tanımı sunulmuştur. Ayrıca düzensiz örneklemeli bir sistemin atanabilir olması için yeter bir koşul kanıtlanmıştır.

Düzensiz örneklemeli sistemleri kararlı kılan durum geri beslemesi kontrolörünün varlığı ile ilgili literatürde olan bir koşul genişletilmiş ve kararlılığı kanıtlayan benzerlik dönüşüm matrisinin seçimi ile ilgili yeni yöntemler verilmiştir. Bu varlık koşulu kullanılarak dijital yeniden tasarım, özdeğer atama ve tekil değer atama yöntemleri ile kararlı kılan kontrolörler geliştirilmiştir. Son olarak, bulunan bu yöntemler çoklu durum zaman gecikmeli sistemlerin kontrolü problemine uygulanmıştır.

Tez kapsamında geliştirilen kontrolör bulma tekniklerinin düzensiz örneklemeli ve topolojileri zamanla değişen çok etmenli çift integratör sistemlerin uzlaşımı problemine

de uygulanabileceği gösterilmiştir. Bu sistemlerin uzlaşımı için geliştirilen yöntem, literatürdeki diğer yöntemlerin aksine zamanla değişen topolojilerin bilinmesini gerektirmemektedir. Ayrıca, bu yöntem ile verilen kontrolörün her zaman var olduğu kanıtlanmıştır. Son olarak, geliştirilen bu yöntem, düzensiz örneklemeli ve değişken topolojili bir ağıın saat senkronizasyonu problemine uygulanmıştır.

Tezdeki çalışmaların literatüre katkılarına rağmen bazı noktalar hala açık problemler olarak kalmıştır. Kararlılığı gösteren ortak benzerlik dönüşüm matrisi T 'nin seçimi için üç farklı yöntem önerilmiş olsa da T 'nin seçiminin en büyük örnekleme aralığı $h_{\max}$ 'a olan etkileri bilinmemektedir. Bir başka açık konu ise olası en büyük $h_{\max}$ değerini veren T 'nin bulunması problemidir. Benzer şekilde düzensiz örneklemeli kontrolörün türetildiği sürekli sistem durum geri besleme kazancı L 'nin de seçim kriteri açık değildir.

Tez kapsamında geliştirilmiş olan özdeğer atama yönteminin kararlılığı sağladığının kanıtı sadece bir girişi olan sistemler için verilmiştir. Benzer şekilde düzensiz örneklemeli bir sistemin atanabilir olması için geliştirilen yeter koşul bir girişi olan sistemler için geçerlidir. Çok girişli sistemler için bu problemlerin çözümü açık bırakılmıştır.

Kontrolör güdümlü örnekleme altında tasarlanan kontrolörlerin, belli bir nominal örnekleme aralığı için sabit bir şekilde kullanılabileceği gösterilmiştir. Ancak, sabit kontrolörün kararlılığı garantilediği $[h_{\min}, h_{\max}]$ aralığının ne kadar geniş olduğu ya da nasıl genişletilebileceği konusu açık değildir.

Çok etmenli sistemlerin uzlaşımı için önerilen yöntem her ne kadar literatürdeki diğer yöntemlerin kısıtlamalarına sahip olmasa da, tüm etmenlerin aynı anda örnek aldığı varsayımı yapılmaktadır. Bu varsayım pratikteki birçok durumda geçerli olmayabilir. Literatürde "asen kron güncelleme" olarak bilinen bu problem hala aktif bir araştırma konusudur. Bu tez kapsamında geliştirilen yöntemin bir diğer eksikliği de değişen yönlü topolojiler için kullanılamamasıdır.

KAYNAKLAR

- [1] **Kuo, B.C.** (1980). *Digital Control Systems*, HRW series in electrical and computer engineering, Holt, Rinehart and Winston.
- [2] **Franklin, G.F., Powell, J.D. ve Workman, M.L.** (1998). *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: Control engineering, Ellis-Kagle Press, 3 sürüm.
- [3] **Chen, T. ve Francis, B.A.** (1995). *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer London, London.
- [4] **Mustafa, G.** (2012). *Analysis and Synthesis of Nonuniformly Sampled Systems*, Doktora tezi, University of Alberta.
- [5] **Hetel, L., Fiter, C., Omran, H., Seuret, A., Fridman, E., Richard, J.P. ve Niculescu, S.I.** (2017). Recent developments on the stability of systems with aperiodic sampling: An overview, *Automatica*, 76, 309–335.
- [6] **Zhang, X.M., Han, Q.L., Ge, X., Ning, B. ve Zhang, B.L.** (2023). Sampled-data control systems with non-uniform sampling: A survey of methods and trends, *Annual Reviews in Control*, 55(March), 70–91.
- [7] **Hespanha, J.P., Naghshtabrizi, P. ve Xu, Y.** (2007). A Survey of Recent Results in Networked Control Systems, *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 138–162.
- [8] **Wittenmark, B., Nilsson, J. ve Torngren, M.** (1996). Timing problems in real-time control systems, *Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95*, cilt 3, American Autom Control Council, s.2000–2004.
- [9] **Cervin, A., Eker, J., Bernhardsson, B. ve Arzén, K.E.** (2002). Feedback-feedforward scheduling of control tasks, *Real-Time Systems*, 23(1-2), 25–53.
- [10] **Yen, J.Y., Chen, Y.L. ve Tomizuka, M.** (2002). Variable sampling rate controller design for brushless DC motor, *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002., cilt 1, IEEE, s.462–467.
- [11] **Tyler, M.L. ve Morari, M.** (1995). Estimation of cross-directional properties: Scanning vs. Stationary Sensors, *AIChE Journal*, 41(4), 846–854.
- [12] **Sevim, U. ve Sumer-Goren, L.** (2012). Eigenvalue Assignment for Systems with Multiple Measurement Delays on Isolated Time Scales, *IFAC Proceedings Volumes*, 45(14), 156–160.
- [13] **Anastasi, G., Conti, M., Di Francesco, M. ve Passarella, A.** (2009). Energy conservation in wireless sensor networks: A survey, *Ad Hoc Networks*, 7(3), 537–568.

- [14] **Qin, J., Ma, Q., Shi, Y. ve Wang, L.** (2017). Recent Advances in Consensus of Multi-Agent Systems: A Brief Survey, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(6), 4972–4983.
- [15] **Ge, X., Han, Q.L., Ding, D., Zhang, X.M. ve Ning, B.** (2018). A survey on recent advances in distributed sampled-data cooperative control of multi-agent systems, *Neurocomputing*, 275(January), 1684–1701.
- [16] **Lin, P. ve Jia, Y.** (2009). Further results on decentralised coordination in networks of agents with second-order dynamics, *IET Control Theory and Applications*, 3(7), 957–970.
- [17] **Rugh, W.J.** (1996). *Linear System Theory (2nd Ed.)*, Prentice-Hall information and system sciences series.
- [18] **Shamma, J.S.**, (2012). An Overview of LPV Systems, **J. Mohammadpour ve C.W. Scherer**, (düzenleyenler), *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*, bölüm 1, Springer US, Boston, MA, s.3–26.
- [19] **Hetel, L., Kruszewski, A., Perruquetti, W. ve Richard, J.P.** (2011). Discrete and intersample analysis of systems with aperiodic sampling, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(7), 1696–1701.
- [20] **Naghshtabrizi, P., Hespanha, J.P. ve Teel, A.R.** (2006). On the robust stability and stabilization of sampled-data systems: A hybrid system approach, *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, 4873–4878.
- [21] **Zou, L., Wang, Z.D. ve Zhou, D.H.** (2017). Event-based control and filtering of networked systems: A survey, *International Journal of Automation and Computing*, 14(3), 239–253.
- [22] **Lin, H. ve Antsaklis, P.J.** (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2), 308–322.
- [23] **Naghshtabrizi, P., Hespanha, J.P. ve Teel, A.R.** (2008). Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems, *Systems and Control Letters*, 57(5), 378–385.
- [24] **Sevim, U.** (2011). *Zaman Ölçeklemeli Sistemler*, Yüksek lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- [25] **Bohner, M. ve Peterson, A.** (2001). *Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser Boston, Boston, MA.
- [26] **Gao, Y., Liu, B., Zuo, M., Jiang, T. ve Yu, J.** (2013). Consensus of Continuous-Time Multiagent Systems with General Linear Dynamics and Nonuniform Sampling, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1–7.
- [27] **Suh, Y.S.** (2008). Stability and stabilization of nonuniform sampling systems, *Automatica*, 44(12), 3222–3226.
- [28] **Fujioka, H. ve Nakai, T.** (2010). Stabilising systems with aperiodic sample-and-hold devices: state feedback case, *IET Control Theory & Applications*, 4(2), 265–272.

- [29] **Oishi, Y. ve Fujioka, H.** (2010). Stability and stabilization of aperiodic sampled-data control systems using robust linear matrix inequalities, *Automatica*, 46(8), 1327–1333.
- [30] **Phelps, J.M., Kamen, E.W. ve Chaparro, L.F.** (1990). On the relationship between external and internal stability of linear time-varying systems, *Proceedings - IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2(May 1990), 1398–1401.
- [31] **Zadeh, L.A. ve Desoer, C.A.** (1968). *Linear System Theory: The State Space Approach*, McGraw-Hill Series in Systems Science, McGraw-Hill Book Company.
- [32] **Sontag, E.D.** (2008). Input to State Stability: Basic Concepts and Results, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, s.163–220.
- [33] **Chen, C.T.** (1984). *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart, and Winston, 2 sürüm.
- [34] **Liberzon, D. ve Morse, A.S.** (1999). Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control Systems*, 19(5), 59–70.
- [35] **Lee, J.W.** (2006). On uniform stabilization of discrete-time linear parameter-varying control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10), 1714–1721.
- [36] **Blondel, V.D. ve Tsitsiklis, J.N.** (1999). Complexity of stability and controllability of elementary hybrid systems, *Automatica*, 35(3), 479–489.
- [37] **Khalil, H.K.** (2002). *Nonlinear Systems*, Pearson Education, Prentice Hall, 3 sürüm.
- [38] **Lewis, A.D.** (2017). Remarks on Stability of Time-Varying Linear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(11), 6039–6043.
- [39] **Bof, N., Carli, R. ve Schenato, L.** (2018). Lyapunov Theory for Discrete Time Systems.
- [40] **Loría, A. ve Panteley, E.** (2002). Uniform exponential stability of linear time-varying systems: Revisited, *Systems and Control Letters*, 47(1), 13–24.
- [41] **Magiros, D.G.** (1965). On Stability Definitions of Dynamical Systems, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 53(6), 1288–1294.
- [42] **Molchanov, A.P. ve Pyatnitskiy, Y.S.** (1989). Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory, *Systems and Control Letters*, 13(1), 59–64.
- [43] **Blondel, V.D. ve Nesterov, Y.** (2006). Computationally efficient approximations of the joint spectral radius, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(1), 256–272.
- [44] **Daafouz, J. ve Bernussou, J.** (2001). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties, *Systems and Control Letters*, 43(5), 355–359.
- [45] **Hu, T. ve Blanchini, F.** (2010). Non-conservative matrix inequality conditions for stability/stabilizability of linear differential inclusions, *Automatica*, 46(1), 190–196.

- [46] **Daubechies, I. ve Lagarias, J.C.** (1992). Sets of matrices all infinite products of which converge, *Linear Algebra and Its Applications*, 161(C), 227–263.
- [47] **Gurvits, L.** (1995). Stability of Discrete Linear Inclusion, *Linear Algebra and its Applications*, 231(1-3), 47–85.
- [48] **Fridman, E., Seuret, A. ve Richard, J.P.** (2004). Robust sampled-data stabilization of linear systems: An input delay approach, *Automatica*, 40(8), 1441–1446.
- [49] **Gao, H., Chen, T. ve Lam, J.** (2008). A new delay system approach to network-based control, *Automatica*, 44(1), 39–52.
- [50] **Jiang, X., Han, Q.L., Liu, S. ve Xue, A.** (2008). A new H_∞ stabilization criterion for networked control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(4), 1025–1032.
- [51] **Fridman, E.** (2010). A refined input delay approach to sampled-data control, *Automatica*, 46(2), 421–427.
- [52] **Moarref, M. ve Rodrigues, L.** (2013). Exponential stability and stabilization of linear multi-rate sampled-data systems, *2013 American Control Conference*, cilt158, IEEE, s.158–163.
- [53] **Mirkin, L.** (2007). Some Remarks on the Use of Time-Varying Delay to Model Sample-and-Hold Circuits, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(6), 1109–1112.
- [54] **Fujioka, H.** (2009). Stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices, *Automatica*, 45(3), 771–775.
- [55] **Briat, C.** (2013). Convex conditions for robust stability analysis and stabilization of linear aperiodic impulsive and sampled-data systems under dwell-time constraints, *Automatica*, 49(11), 3449–3457.
- [56] **Seuret, A.** (2012). A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings, *Automatica*, 48(1), 177–182.
- [57] **Seuret, A. ve Peet, M.M.** (2013). Stability analysis of sampled-data systems using sum of squares, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(6), 1620–1625.
- [58] **Zheng, M., Yang, H., Song, Y., Deng, J. ve Fei, M.** (2015). Stability of aperiodic sampled-data systems — An augmented looped Lyapunov functional with Wirtinger inequality approach, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 13(3), 773–777.
- [59] **Zeng, H.B., Teo, K.L. ve He, Y.** (2017). A new looped-functional for stability analysis of sampled-data systems, *Automatica*, 82, 328–331.
- [60] **Fujioka, H.** (2009). A discrete-time approach to stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(10), 2440–2445.
- [61] **Oishi, Y. ve Fujioka, H.** (2009). Stability and stabilization of aperiodic sampled-data control systems: An approach using robust linear matrix inequalities, *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, May, IEEE, s.8142–8147.

- [62] **Kao, C.Y. ve Fujioka, H.** (2013). On stability of systems with aperiodic sampling devices, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(8), 2085–2090.
- [63] **Kao, C.Y. ve Wu, D.R.** (2014). On robust stability of aperiodic sampled-data systems - An integral quadratic constraint approach, *2014 American Control Conference*, IEEE, s.4871–4876.
- [64] **Haimovich, H., Braslavsky, J.H. ve Felicioni, F.** (2009). On feedback stabilisation of switched discrete-time systems via Lie-algebraic techniques, *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, IEEE, s.1118–1123.
- [65] **Zhang, F.** (2011). *Matrix Theory*, Universitext, Springer New York, New York, NY.
- [66] **Thomas, G.B., Weir, M.D., Hass, J. ve Giordano, F.R.** (2005). *Thomas' Calculus*, Addison-Wesley, 11 sürüm.
- [67] **Inouye, Y.** (1982). Notes on controllability and constructibility of linear discrete-time systems, *International Journal of Control*, 35(6), 1081–1084.
- [68] **Kailath, T.** (1980). *Linear Systems*, Information and System Sciences Series, Prentice-Hall.
- [69] **Kalman, R.** (1960). On the general theory of control systems, *IFAC Proceedings Volumes*, 1(1), 491–502.
- [70] **Moore, J.B. ve Anderson, B.D.** (1980). Coping with singular transition matrices in estimation and control stability theory, *International Journal of Control*, 31(3), 571–586.
- [71] **Sevim, U. ve Goren-Sumer, L.** (2014). Controllability, Observability and Eigenvalue Assignment on Isolated Time Scales, *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3), 3815–3820.
- [72] **Anderson, B.D., Ilchmann, A. ve Wirth, F.R.** (2013). Stabilizability of linear time-varying systems, *Systems and Control Letters*, 62(9), 747–755.
- [73] **Babiarz, A., Czornik, A., Makarov, E., Niezabitowski, M. ve Popova, S.** (2017). Pole Placement Theorem for Discrete Time-Varying Linear Systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55(2), 671–692.
- [74] **Anh, P.T., Czornik, A., Doan, T.S. ve Suong, N.T.T.** (2024). Assignment of spectrum for time-varying linear control systems via kinematic equivalence, *Systems and Control Letters*, 186(October 2023), 105763.
- [75] **Anderson, B.D.O. ve Moore, J.B.** (1981). Detectability and Stabilizability of Time-Varying Discrete-Time Linear Systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 19(1), 20–32.
- [76] **Babiarz, A. ve Czornik, A.** (2020). Stabilizability of Linear Discrete Time-Varying Systems, *A. Bartoszewicz, J. Kabziński ve J. Kacprzyk, (düzenleyenler), Advanced, Contemporary Control*, Springer International Publishing, Cham, s.1119–1131.
- [77] **Callier, F.M. ve Desoer, C.A.** (1991). *Linear System Theory*, Springer Texts in Electrical Engineering, Springer New York, New York, NY.

- [78] **Polderman, J.W. ve Willems, J.C.** (1998). *Introduction to Mathematical Systems Theory*, cilt 26 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer New York, New York, NY.
- [79] **Zabczyk, J.** (2008). *Mathematical Control Theory*, Birkhäuser Boston, Boston, MA.
- [80] **Weiss, L.** (1972). Controllability, Realization and Stability of Discrete-Time Systems, *SIAM Journal on Control*, 10(2), 230–251.
- [81] **Bar-Ness, Y. ve Langholz, G.** (1975). Preservation of controllability under sampling, *International Journal of Control*, 22(1), 39–47.
- [82] **Gibson, J.A. ve Ha, T.T.** (1980). Further to the preservation of controllability under sampling, *International Journal of Control*, 31(6), 1013–1026.
- [83] **Kimura, M.** (1990). Preservation of stabilizability of a continuous time-invariant linear system after discretization, *International Journal of Systems Science*, 21(1), 65–91.
- [84] **Franklin, G.F., Powell, J.D. ve Emami-Naeini, A.** (2006). *Feedback Control of Dynamic Systems*, Pearson Prentice Hall, 4 sürüm.
- [85] **Ackermann, J.** (1975). On The Synthesis of Linear Control Systems with Specified Characteristics, *IFAC Proceedings Volumes*, 8(1), 295–302.
- [86] **Babiarz, A., Banshchikova, I., Czornik, A., Makarov, E.K., Niezabitowski, M. ve Popova, S.** (2018). Necessary and Sufficient Conditions for Assignability of the Lyapunov Spectrum of Discrete Linear Time-Varying Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(11), 3825–3837.
- [87] **Babiarz, A., Banshchikova, I., Czornik, A., Makarov, E., Niezabitowski, M. ve Popova, S.**, (2020). Assignability of Lyapunov Spectrum for Discrete Linear Time-Varying Systems, *Difference Equations and Discrete Dynamical Systems with Applications*, Springer, Cham, s.133–147.
- [88] **Lee, H.C., Choi, J.W. ve Zhu, J.J.** (2001). Ackerman-like formula for linear time-varying systems, *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)*, cilt 5, IEEE, s.4292–4297.
- [89] **Richard, J.P.** (2003). Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, 39(10), 1667–1694.
- [90] **Gu, K. ve Niculescu, S.I.** (2003). Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 125(2), 158–165.
- [91] **Gu, K., Kharitonov, V.L. ve Chen, J.** (2003). *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser Boston, Boston, MA.
- [92] **Chen, J., Park, J.H., Xu, S. ve Zhang, B.** (2022). A survey of inequality techniques for stability analysis of time-delay systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 32(11), 6412–6440.
- [93] **Dullerud, G.E. ve Paganini, F.** (2000). *A Course in Robust Control Theory*, cilt 36 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer New York, New York, NY.
- [94] **Hsu, P. ve Sastry, S.** (1987). The effect of discretized feedback in a closed loop system, *26th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, s.1518–1523.

- [95] **Shieh, L., Wang, W. ve Appu Panicker, M.** (1998). Design of PAM and PWM digital controllers for cascaded analog systems, *ISA Transactions*, 37(3), 201–213.
- [96] **Chung, C.G., Han, K.W. ve Yeh, H.H.** (1982). Digitalization of continuous-data systems via time-response matching, *Information Sciences*, 26(2), 95–107.
- [97] **Singh, G., Kuo, B.C. ve Yackel, R.A.** (1974). Digital approximation by point-by-point state matching with higher-order holds, *International Journal of Control*, 20(1), 81–90.
- [98] **Yackel, R.A., Kuo, B.C. ve Singh, G.** (1974). Digital redesign of continuous systems by matching of states at multiple sampling periods, *Automatica*, 10(1), 105–111.
- [99] **Mirkin, L.** (2017). Intermittent redesign of analog controllers via the youla parameter, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4), 1838–1851.
- [100] **Gawthrop, P.J. ve Wang, L.** (2010). Intermittent redesign of continuous controllers, *International Journal of Control*, 83(8), 1581–1594.
- [101] **Decarlo, R.A., Branicky, M.S., Pettersson, S. ve Lennartson, B.** (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proceedings of the IEEE*, 88(7), 1069–1082.
- [102] **Haimovich, H., Osella, E.N. ve Braslavsky, J.H.** (2011). On Lie-algebraic-solvability-based feedback stabilization of systems with controller-driven sampling, *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 18(PART 1), 8731–8736.
- [103] **Haimovich, H. ve Osella, E.N.** (2013). On controller-driven varying-sampling-rate stabilization via Lie-algebraic solvability, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 7(1), 28–38.
- [104] **Sarangi, S.R., Goel, S. ve Singh, B.** (2018). Energy efficient scheduling in IoT networks, *Proceedings of the ACM Symposium on Applied Computing*, 733–740.
- [105] **Sevim, U. ve Goren-Sumer, L.** (2016). Stabilization of Controller-Driven Nonuniformly Sampled Systems via Digital Redesign, *IFAC-PapersOnLine*, 49(9), 142–145.
- [106] **Avrachenkov, K.E., Haviv, M. ve Howlett, P.G.** (2001). Inversion of analytic matrix functions that are singular at the origin, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 22(4), 1175–1189.
- [107] **Kautsky, J., Nichols, N.K. ve van Dooren, P.** (1985). Robust pole assignment in linear state feedback, *International Journal of Control*, 41(5), 1129–1155.
- [108] **Martin, C.F. ve Wang, X.A.** (2009). Singular Value Assignment, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(4), 2388–2406.
- [109] **Yi, S., Nelson, P.W. ve Ulsoy, A.G.** (2010). Eigenvalue assignment via the lambert w function for control of time-delay systems, *JVC/Journal of Vibration and Control*, 16(7-8), 961–982.

- [110] **Andreasson, M., Dimarogonas, D.V., Sandberg, H. ve Johansson, K.H.** (2014). Distributed Control of Networked Dynamical Systems: Static Feedback, Integral Action and Consensus, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(7), 1750–1764.
- [111] **Carli, R., Chiuso, A., Schenato, L. ve Zampieri, S.** (2008). A PI Consensus Controller for Networked Clocks Synchronization, *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 10289–10294.
- [112] **Goldin, D.** (2013). Double Integrator Consensus Systems With Application to Power Systems, *IFAC Proceedings Volumes*, 46(27), 206–211.
- [113] **Liu, X., Xie, Y., Li, F. ve Gui, W.** (2022). Consensus Tracking of Singular Multiagent Systems via Sliding Mode Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1–7.
- [114] **Li, Y. ve Tan, C.** (2019). A survey of the consensus for multi-agent systems, *Systems Science and Control Engineering*, 7(1), 468–482.
- [115] **Zhang, X.Y. ve Zhang, J.** (2014). Sampled-data Consensus of Multi-agent Systems with General Linear Dynamics Based on a Continuous-time Model, *Acta Automatica Sinica*, 40(11), 2549–2555.
- [116] **Zhang, X. ve Zhang, J.** (2017). Sampled-data consensus of general linear multi-agent systems under switching topologies: averaging method, *International Journal of Control*, 90(2), 275–288.
- [117] **Jesus, T.A., Pimenta, L.C.A., Tôrres, L.A.B. ve Mendes, E.M.A.M.** (2014). Consensus for double-integrator dynamics with velocity constraints, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 12(5), 930–938.
- [118] **Jingyuan, Z. ve Xiang, L.** (2015). Consensus of multiple double-integrators with aperiodic sampled-data and switching topology, *34th Chinese Control Conference (CCC)*, IEEE, s.7113–7117.
- [119] **Liu, H., Xie, G. ve Wang, L.** (2010). Necessary and sufficient conditions for solving consensus problems of double-integrator dynamics via sampled control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(15), 1706–1722.
- [120] **Cheng, L., Hou, Z.G., Tan, M. ve Wang, X.** (2011). Necessary and Sufficient Conditions for Consensus of Double-Integrator Multi-Agent Systems With Measurement Noises, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(8), 1958–1963.
- [121] **Qin, J. ve Gao, H.** (2012). A Sufficient Condition for Convergence of Sampled-Data Consensus for Double-Integrator Dynamics With Nonuniform and Time-Varying Communication Delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(9), 2417–2422.
- [122] **Seuret, A., Dimarogonas, D.V. ve Johansson, K.H.** (2009). Consensus of double integrator multi-agents under communication delay, *IFAC Proceedings Volumes*, 42(14), 376–381.
- [123] **Gao, Y. ve Wang, L.** (2010). Consensus of multiple double-integrator agents with intermittent measurement, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(10), 1140–1155.

- [124] **Abdessameud, A. ve Tayebi, A.** (2013). On consensus algorithms design for double integrator dynamics, *Automatica*, 49(1), 253–260.
- [125] **Abdessameud, A. ve Tayebi, A.** (2010). On consensus algorithms for double-integrator dynamics without velocity measurements and with input constraints, *Systems and Control Letters*, 59(12), 812–821.
- [126] **Liu, X., Xie, Y., Li, F. ve Gui, W.** (2022). Sliding-Mode-Based Admissible Consensus Tracking of Nonlinear Singular Multiagent Systems Under Jointly Connected Topologies, *IEEE Transactions on Cybernetics*, 52(11), 12491–12500.
- [127] **Ajwad, S.A., Moulay, E., Defoort, M., Menard, T. ve Coirault, P.** (2021). Leader-Following Consensus of Second-Order Multi-Agent Systems With Switching Topology and Partial Aperiodic Sampled Data, *IEEE Control Systems Letters*, 5(5), 1567–1572.
- [128] **Dong, G., Yang, C. ve Zhu, W.** (2020). Event-Triggered Average Consensus of Multiagent Systems with Switching Topologies, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2020, 1–7.
- [129] **Wu, Z.G., Xu, Y., Lu, R., Wu, Y. ve Huang, T.** (2018). Event-Triggered Control for Consensus of Multiagent Systems With Fixed/Switching Topologies, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 48(10), 1736–1746.
- [130] **Sevim, U. ve Goren-Sumer, L.** (2023). Consensus of double integrator multiagent systems under nonuniform sampling and changing topology, *AIMS Mathematics*, 8(7), 16175–16190.
- [131] **Lewis, F.L., Zhang, H., Hengster-Movric, K. ve Das, A.** (2014). *Cooperative Control of Multi-Agent Systems*, Communications and Control Engineering, Springer London, London.
- [132] **Ma, C.Q. ve Zhang, J.F.** (2010). Necessary and Sufficient Conditions for Consensusability of Linear Multi-Agent Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(5), 1263–1268.
- [133] **Stewart, J.** (2010). *Multivariable Calculus, Seventh Edition*, Cengage Learning.
- [134] **Phan, L.A., Kim, T., Kim, T., Lee, J. ve Ham, J.H.** (2019). Performance Analysis of Time Synchronization Protocols in Wireless Sensor Networks, *Sensors*, 19(13), 3020.
- [135] **Balakrishnan, K., Dhanalakshmi, R., Sinha, B.B. ve Gopalakrishnan, R.** (2023). Clock synchronization in industrial Internet of Things and potential works in precision time protocol: Review, challenges and future directions, *International Journal of Cognitive Computing in Engineering*, 4(November 2022), 205–219.
- [136] **Elson, J.E.** (2003). *Time Synchronization in Wireless Sensor Networks*, Doktora tezi, University of California, Los Angeles.
- [137] **Yiğitler, H., Badihi, B. ve Jäntti, R.** (2020). Overview of time synchronization for iot deployments: Clock discipline algorithms and protocols, *Sensors (Switzerland)*, 20(20), 1–58.

- [138] **Youn, S.** (2013). A comparison of clock synchronization in wireless sensor networks, *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2013.
- [139] **Schenato, L. ve Fiorentin, F.** (2011). Average TimeSynch: A consensus-based protocol for clock synchronization in wireless sensor networks, *Automatica*, 47(9), 1878–1886.
- [140] **Allan, D.W.** (1987). Time and Frequency (Time-Domain) Characterization, Estimation, and Prediction of Precision Clocks and Oscillators, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 34(6), 647–654.
- [141] **Sommer, P. ve Wattenhofer, R.** (2009). Gradient clock synchronization in wireless sensor networks, *2009 International Conference on Information Processing in Sensor Networks, IPSN 2009*, (September), 37–48.
- [142] **Qi, L.** (1984). Some simple estimates for singular values of a matrix, *Linear Algebra and Its Applications*, 56(C), 105–119.



EKLER

EK A : Genel Önsav ve Teoremler

EK B : Üstel Matris Özellikleri

EK C : Tekil Değer Sınırları





EK A : Genel Önsav ve Teoremler

Teorem A.1 (Spektral Haritalama Teoremi). *Her yerde analitik (bütün) bir $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, $f_q \in \mathbb{C}$ olmak üzere*

$$\phi(z) := \sum_{q=0}^{\infty} f_q z^q = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots$$

biçimindeki seri açılım ile ifade ediliyor olsun. Bir $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi için

$$\phi(A) := \sum_{q=0}^{\infty} f_q A^q = f_0 + f_1 A + f_2 A^2 + \dots$$

biçiminde tanımlansın. O halde (λ, x) , A 'nın bir özdeğer-özvektör çifti (özçifti) ise $(\phi(\lambda), x)$ de $\phi(A)$ matrisinin bir özçiftidir.

Kanıt. Özçift tanımı gereği $Ax = \lambda x$ olur. O halde,

$$A^q x = \lambda A^{q-1} x = \lambda^2 A^{q-2} x = \dots = \lambda^q x$$

olur. Sonuç olarak,

$$\phi(A)x = \sum_{q=0}^{\infty} f_q A^q x = \sum_{q=0}^{\infty} f_q \lambda^q x = \phi(\lambda)x$$

eşitlikleriyle kanıt tamamlanır. □

Önsav A.1. $m \leq n$ olmak üzere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrisleri için $AB \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrisinin tam ranklı olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\text{rank } B = m \text{ ve } \text{Im } B \cap \ker A = \{0\}$$

olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ AB tam ranklı olsun. Eğer $\text{rank } B < m$ ise $Bx = 0$ olan bir $x \neq 0$ vektörü vardır. O halde, $ABx = 0$ olur ve bir çelişki elde edilir. Şimdi $y \neq 0$ olmak üzere $y \in \text{Im } B \cap \ker A$ olsun. $y \in \text{Im } B$ olduğundan $Bx = y$ olan bir $x \neq 0$ vektörü vardır. $y \in \ker A$ olduğundan $ABx = Ay = 0$ olur ve yine bir çelişki elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $\text{rank } B = m$ ve $\text{Im } B \cap \ker A = \{0\}$ olsun. Bir çelişki elde etmek için $ABx = 0$ olan bir $x \neq 0$ olduğu varsayalım. $\text{rank } B = m$ olduğundan $y := Bx \neq 0$ ve $y \in \text{Im } B$ olur. Ayrıca, $ABx = Ay = 0$ olduğundan $y \in \ker A$ olmalıdır. Bir çelişki elde edildiğinden kanıt tamamlanmış olur. □

Önsav A.2. *Tridiyagonal, simetrik $n \times n$*

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda_i = 2 \cos(i\pi/(n+1))$, $i = 1, 2, \dots, n$ biçimindedir.

Kanıt. M matrisinin bir özvektörü $x^T := [x_1 \ \dots \ x_n]$ olmak üzere $Mx = \lambda x$ olsun. O halde konvansiyon olarak $x_0 = x_{n+1} = 0$ yazılarak

$$x_{k+2} = \lambda x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\text{A.1})$$

elde edilir. Tüm $u \in \mathbb{R}$ için

$$\sin[(k+2)u] = 2 \cos(u) \sin[(k+1)u] - \sin(ku)$$

eşitliğinin sağlandığını göstermek kolaydır. O halde, (A.1) eşitliği

$$x_k := \sin(ku) \text{ ve } \lambda := 2 \cos(u)$$

tanımlarıyla sağlanır. Ayrıca,

$$u := i\pi/(n+1), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

seçilerek $x_{n+1} = \sin[(n+1)u] = 0$ eşitliği sağlanır. Bu da kanıtı tamamlar. $\square$

EK B : Üstel Matris Özellikleri

Tanım B.1 (Üstel Matris). Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi ve $h > 0$ sayısı için üstel matris

$$e^{Ah} := \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^q h^q}{q!} = I + hA + \frac{h^2}{2!} A^2 + \frac{h^3}{3!} A^3 + \dots$$

biçiminde tanımlanır.

Önsav B.1. Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi ve $h > 0$ sayısı için

$$\int_0^h e^{A\tau} d\tau = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^q h^{q+1}}{(q+1)!} = hI + \frac{h^2}{2!} A + \frac{h^3}{3!} A^2 + \dots$$

seri açılımı elde edilir.

Kanıt. Üstel matris tanımı gereği

$$\int_0^h e^{A\tau} d\tau = \int_0^h \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^q \tau^q}{q!} d\tau = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^q}{q!} \int_0^h \tau^q d\tau = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^q}{q!} \frac{h^{q+1}}{q+1} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^q h^{q+1}}{(q+1)!}$$

eşitlikleri ile kanıt tamamlanır. $\square$

Önsav B.2. Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi, $h > 0$ sayısı ve tersi olan bir $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için

$$Te^{Ah}T^{-1} = e^{TAT^{-1}h}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Bir $q \in \mathbb{N}$ için

$$TA^qT^{-1} = (TA^{q-1}T^{-1})(TAT^{-1}) = (TA^{q-2}T^{-1})(TAT^{-1})^2 = \dots = (TAT^{-1})^q$$

olduğundan üstel matris tanımı gereği

$$Te^{Ah}T^{-1} := \sum_{q=0}^{\infty} \frac{TA^qT^{-1}h^q}{q!} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(TAT^{-1})^qh^q}{q!} = e^{TAT^{-1}h}$$

elde edilerek kanıt tamamlanır. $\square$

Önsav B.3. Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi ve $h > 0$ sayısı için

$$e^{Ah} = I + A \left(\int_0^h e^{A\tau} d\tau \right) = I + \left(\int_0^h e^{A\tau} d\tau \right) A$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Önsav B.1 kullanılarak

$$e^{Ah} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^q h^q}{q!} = I + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A^q h^q}{q!} = I + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^{q+1} h^{q+1}}{(q+1)!} = I + A \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^q h^{q+1}}{(q+1)!}$$

eşitlikleri ile kanıt tamamlanır. $\square$

Önsav B.4. Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi ve $h > 0$ sayısı için

$$\int_0^h e^{A\tau} d\tau$$

matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşul, tüm $j := \sqrt{-1}$ olmak üzere

$$\lambda_i(A)h \neq 2z\pi j, \quad \forall z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{B.1})$$

olmasıdır.

Kanıt. Verilmiş olan $h > 0$ için her yerde analitik bir $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu Önsav B.1 kullanılarak

$$\phi(\lambda) := \int_0^h e^{\lambda\tau} d\tau = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\lambda^q h^{q+1}}{(q+1)!} = h + \frac{h^2}{2!}\lambda + \frac{h^3}{3!}\lambda^2 + \dots$$

biçiminde tanımlansın. Spektral Haritalama Teoremi, Teorem A.1 gereği eğer λ , A 'nın bir özdeğeri ise $\phi(\lambda)$ da $\phi(A)$ 'nın bir özdeğeridir. Yukarıdaki tanımdan eğer $\lambda = 0$ ise $\phi(\lambda) = h \neq 0$ olduğu görülebilir. Önsav B.3 kullanılarak $\lambda \neq 0$ ise

$$\phi(\lambda) = \frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda}$$

olduğu görülebilir. Demek ki $\phi(\lambda) = 0$ olmasının gerek ve yeter koşulu $e^{\lambda h} = 1$ olması, yani eşdeğer olarak $\lambda h = 2z\pi j$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir z tamsayısı olmasıdır. Demek ki (B.1) koşulu sağlanırsa $\phi(\lambda) \neq 0$ olur. Bu durum tüm özdeğerler için geçerli olacağından kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Önsav B.5. Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için $h > 0$ patolojik bir örnekleme (bkz. Tanım 4.6) değilse

$$\int_0^h e^{A\tau} d\tau$$

matrisinin tersi vardır.

Kanıt. Verilen ifadeye eşdeğer olarak, matrisin tersi yoksa örneklemenin patolojik olduğu gösterilecektir. Eğer matrisin tersi yoksa Önsav B.4 gereği A 'nın bir özdeğeri λ için $\lambda h = 2z\pi j$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir z tamsayısı vardır. A matrisi gerçel değerli olduğundan özdeğerleri karmaşık eşlenik şeklindedir. Yani $\bar{\lambda}h = -2z\pi j$ olmalıdır. O halde, $\text{Re } \lambda = \text{Re } \bar{\lambda} = 0$ olduğundan ve

$$h(\text{Im } \lambda - \text{Im } \bar{\lambda}) = 4z\pi$$

olduğundan h örnekleme patolojiktir. Bu da kanıtı tamamlar. $\square$

Önsav B.6. *Negatif sayılar üzerinde tanımlı*

$$\theta(\lambda) := \frac{e^\lambda - 1}{\lambda}$$

fonksiyonu $(-\infty, 0)$ aralığında monoton artandır.

Kanıt. Fonksiyonun türevi

$$\frac{d\theta(\lambda)}{d\lambda} = \frac{e^\lambda \lambda - e^\lambda + 1}{\lambda^2} = \frac{e^\lambda (\lambda - 1 + e^{-\lambda})}{\lambda^2}$$

olarak elde edilir. Tüm $\lambda \in (-\infty, 0)$ için

$$e^{-\lambda} - (1 + (-\lambda)) = \left(1 + (-\lambda) + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(-\lambda)^q}{q!}\right) - (1 + (-\lambda)) = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(-\lambda)^q}{q!} > 0$$

olduğundan $d\theta(\lambda)/d\lambda > 0, \forall \lambda \in (-\infty, 0)$ olur ve kanıt tamamlanır. □



EK C : Tekil Değer Sınırları

Önsav C.1 ([142]). $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olsun. O halde,

$$r_i := \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad c_i := \sum_{j=1}^n |a_{ji}|$$

ve $s_i := \max\{r_i, c_i\}$ olmak üzere

$$\bar{\sigma}(A) \leq \max_i \{s_i\} \quad (\text{C.1})$$

eşitsizliği geçerlidir.

Yukarıda verilen sonuç [142]'deki fikir kullanılarak bu çalışmada blok matrislere genişletilmiştir. Aşağıdaki önsavın kanıtı kullanılarak Önsav C.1 de kanıtlanmış olur.

Önsav C.2. $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}^{nN \times nN}$, her bloğu aynı boyutta olan, yani $A_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olan bir blok matris olsun. O halde,

$$r_i := \sum_{j=1}^n \bar{\sigma}(A_{ij}), \quad c_i := \sum_{j=1}^n \bar{\sigma}(A_{ji})$$

ve $s_i := \max\{r_i, c_i\}$ olmak üzere

$$\bar{\sigma}(A) \leq \max_i \{s_i\} \quad (\text{C.2})$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. A 'nın bir tekil değeri σ olsun. O halde

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} A_{11}^H & \dots & A_{N1}^H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1N}^H & \dots & A_{NN}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

eşitliklerini sağlayan $x_i, y_i \in \mathbb{C}^n, i = 1, \dots, N$ olmak üzere sıfırdan farklı

$$x = [x_1^T \dots x_N^T]^T \in \mathbb{C}^{nN} \quad \text{ve} \quad y = [y_1^T \dots y_N^T]^T \in \mathbb{C}^{nN}$$

vektörleri vardır. $\alpha := \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |y_1|, \dots, |y_N|\}$ olsun. Eğer bir i için $\alpha = |y_i|$ ise

$$\sigma y_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j \quad \text{olduğundan} \quad \sigma \leq \sum_{j=1}^n \bar{\sigma}(A_{ij}) = r_i$$

elde edilir. Eğer bir i için $\alpha = |x_i|$ ise

$$\sigma x_i = \sum_{j=1}^N A_{ji}^H y_j \quad \text{olduğundan} \quad \sigma \leq \sum_{j=1}^n \bar{\sigma}(A_{ji}) = c_i$$

elde edilir. Her iki koşulda da $\sigma \leq \max\{r_i, c_i\} = s_i$ olur. Bu eşitsizlik A 'nın tüm tekil değerleri için geçerli olduğundan kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Önsav C.3. $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve

$$C := \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

olsun. O halde, $j = \sqrt{-1}$ ve $\sigma(\cdot)$ tekil değerler kümesi olmak üzere

$$\sigma(C) = \sigma(A - jB) \cup \sigma(A + jB)$$

olur.

Kanıt. C biçiminde tanımlı matrisler için

$$\det(C) = \det(A - jB) \det(A + jB)$$

olduğu bilinmektedir. CC^T da C ile aynı biçimde olduğundan

$$\begin{aligned} \det(CC^T - \lambda I) &= \det \left(\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & B^T \\ -B^T & A^T \end{bmatrix} - \lambda I \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} AA^T + BB^T - \lambda I & AB^T - BA^T \\ BA^T - AB^T & AA^T + BB^T - \lambda I \end{bmatrix} \\ &= \det \left((AA^T + BB^T - \lambda I) - j(BA^T - AB^T) \right) \\ &\quad \det \left((AA^T + BB^T - \lambda I) + j(BA^T - AB^T) \right) \\ &= \det \left((A - jB)(A^T + jB^T) - \lambda I \right) \\ &\quad \det \left((A + jB)(A^T - jB^T) - \lambda I \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Tekil değer tanımı gereği kanıt tamamlanmış olur. □

ÖZGEÇMİŞ

Adı SOYADI: Ufuk SEVİM

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2009, İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Fakültesi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü
- **Y. Lisans:** 2012, İstanbul Teknik Üniversitesi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

MESLEKİ DENEYİMLER VE ÖDÜLLER:

- 2008-2017 yılları arasında Borda Teknoloji bünyesinde IoT sistemleri geliştirdi.
- 2017 yılından bu yana Eksaş A.Ş.'de tesis otomasyonları yapmaktadır.
- 2019 yılından bu yana Borda Teknoloji'de IoT sistemler için konum bulma algoritmaları geliştirmektedir.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2023). Consensus of double integrator multiagent systems under nonuniform sampling and changing topology, *AIMS Mathematics*, 8(7), 16175–16190.
- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2016). Stabilization of Controller-Driven Nonuniformly Sampled Systems via Digital Redesign, *6th IFAC Symposium on System Structure and Control*, Istanbul, 49(9), 142–145.
- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2014). Controllability, Observability and Eigenvalue Assignment on Isolated Time Scales, *19th IFAC World Congress*, Cape Town, s.3815–3820.
- **Sevim, U.** ve Goren-Sumer, L. (2012). Eigenvalue assignment for systems with multiple measurement delays on isolated time scales, *10th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Boston, cilt 10, s.156–160.