

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMANA BAĞLI KOMPLEKS POTANSİYELE SAHİP ÖZEL
GRADYENT TERİMLİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN
FİNAL KRİTERLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

ASLI ŞAYİR
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

TEMMUZ-2024
KARS



T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**ZAMANA BAĞLI KOMPLEKS POTANSİYELE SAHİP ÖZEL
GRADYENT TERİMLİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN
FİNAL KRİTERLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

**ASLI ŞAYİR
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB**

**TEMMUZ-2024
KARS**

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Aslı Şayır'ın Prof. Dr. Gabil YAGUB danışmanlığında Yüksek lisans tezi olarak hazırladığı “Zamana bağlı kompleks potansiyele sahip özel gradyent terimli Schrödinger denklemi için final kriterli optimal kontrol problemi” adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek ile kabul edilmiştir.

.. / .. / 2024..

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye	: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	
Üye	: Prof. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .. / .. / 2024. . gün ve / sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Vedat ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

ASLI ŞAYİR

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

ZAMANA BAĞLI KOMPLEKS POTANSİYELE SAHİP ÖZEL GRADYENT TERİMLİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN FİNAL KRİTERLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

ASLI ŞAYİR

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Gabil YAGUB

Bu tez çalışmasında, özel gradyent terimli zamana bağlı kompleks potansiyele sahip lineer durgun olmayan bir boyutlu Schrödinger denklemi için final kriterli optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bu problemde kontrol rolünü denklemin ölçülebilir sınır katsayısı olan kompleks potansiyelin reel ve sanal kısımları oynamaktadır. Tezin bulgular bölümü üç alt bölümden oluşmaktadır. Tezin 3.1 alt bölümünde ele alınan optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği teoremi ispatlanmıştır. 3.2 alt bölümünde opimal kontrol probleminin $\alpha \geq 0$ olduğunda en az bir çözüme sahip olduğu gösterilmiştir. Tezin 3.3. alt bölümünde ise söz konusu optimal kontrol probleminde ilk önce yer alan amaç fonksiyonelinin Frechet anlamında diferensiyellenebilir olduğu incelenmiş ve fonksiyonelin gradyenti için formül elde edilmiştir. Bu alt bölümden sonra elde edilen formülde yararlanılarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanmıştır

Anahtar Kelimeler: Durgun olmayan Schrödinger denklemi, optimal kontrol problemi, özel gradyent terim, kompleks potansiyel.

2024, 40 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH FINAL CRITERION FOR A SCHRODINGER EQUATION WITH A SPECIAL GRADIENT TERM AND A TIME-DEPENDENT COMPLEX POTENTIAL

ASLI ŞAYİR

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematic

Supervisor: Prof. Dr. Gabil YAGUB

In this paper, we consider the optimal control problem for a linear nonstationary one-dimensional Schrödinger equation with a special gradient term and complex potential when the performance criterion is final and the role of control is played by limited measurable coefficients. The equation is an equation of real and imaginary parts of the complex potential depending only on the time variable. At the same time, the existence and uniqueness theorems were proven and a necessary condition in the form of variational inequality was established for the solution of the optimal control problem under consideration. To prove the necessary condition, we first construct the gradient formula of the considered functional.

Key Words: Nonstationary Schrödinger equation, optimal control problem, special gradient term, complex potential.

2024, 40 pages

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın yürütülmesi esnasında desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB'a saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmam sırasında desteklerini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY'a ve sayın Doç. Dr. Adem YOLCU'ya teşekkür ederim.

Bu süreçte maddi, manevi her zaman yanımda olan annem, babam ve kardeşlerime desteklerinden dolayı teşekkür ederim. Uzun çalışma sürecinde bana destek olan değerli dostlarım Ceren AYAS'a ve Nurşah ÇELİK'e teşekkür ederim.



Aslı ŞAYİR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	IV
ABSTRACT	V
ÖNSÖZ.....	VI
İÇİNDEKİLER	VII
SİMGELER DİZİNİ	VIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Kuramsal Temeller.....	3
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	11
2.1. Optimal Kontrol Probleminin Konulması.....	11
3. BULGULAR.....	14
3.1. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği.....	14
3.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı.....	18
3.3. Fonksiyonelin diferansiyellenebilirliği ve optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart.....	24
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	35
ÖZGEÇMİŞ.....	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	: Herhangi
$\forall^0$	: Hemen hemen her yerde
$i = \sqrt{-1}$	: Sanal sayı
$t \in [0, T]$	: Zaman değişkeni
$x \in [0, l]$	Uzay değişkeni
B	: Banach uzayı
H	: Hilbert uzayı
$L_p(\Omega)$	: Ω bölgesinde $p \geq 1$ dereceden mutlak değeriyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı
$L_\infty(\Omega)$	: Ω bölgesinde ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar uzayı
$W_p^{k,m}(\Omega)$	: Ω bölgesinde kendisinin ve k . mertebeden x değişkenine göre türevlerinin, m . mertebeden t değişkenine göre türevlerinin $p \geq 1$ dereceden mutlak değeriyle Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonların Sobolev uzayı
$\varphi(x)$	: Kompleks değerli fonksiyon
$f(x, t)$	: Kompleks değerli fonksiyon
$y(x)$	: Kompleks değerli fonksiyon

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri için optimal kontrol problemleri genellikle kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte, fiziğin ve teknolojinin çeşitli çağdaş alanlarında ortaya çıkar ve bu problemin incelenmesi gerek teori, gerekse de pratik önem arz eder [1–3]. Böyle problemlerinden biri yüklü parçacıkların hareketi problemidir ki, bu problemde potansiyel bilinmeyen olur ve onun bulunması gereksinimi ortaya çıkar. Bilindiği üzere, yüklü parçacıklar sabit homojen manyetik alanda hareket ediyor ve manyetik alanın yönü z eksenini boyunca ise, bu taktirde böyle parçacıkların hareketi $(x, y) \in E_2$ düzleminde gerçekleşir ve bu hareket genellikle özel gradyent terim içeren iki boyutlu lineer Schrödinger denklemi ile tanımlanır (bkz: [1], sayfa 182). Özel gradyent terim içeren lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri için benzer optimal kontrol problemleri önceden [4,5] çalışmalarında ele alınmıştır. Söylemek gerekir ki, özel gradyent terim içermeyen lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri için optimal kontrol problemleri önceden [6–15] ve diğer çalışmalarda ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ancak özel gradyent terim içeren lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal problemleri oranla az incelenmiş problemlerdendir. Söylememiz gerekir ki, özel gradyent terim içeren lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal problemleri önceden [16–23] çalışmalarında ele alınmıştır. Tüm bu çalışmalarda kontroller ya ancak uzay değişkenine bağlı olan, ya da gerekse uzay, gerekse de zaman değişkenine bağlı, ya da ancak zaman değişkenine bağlı ölçülebilir sınırlı fonksiyonlardır. Kontroller zaman değişkenine bağlı ölçülebilir fonksiyonlar olduğunda bu kontrollerden zamana göre türevlenebilirlik şartı talep edilmiştir. Ancak kontroller sadece zamana bağlı ölçülebilir fonksiyonlar olduğunda özel gradyent terim içeren lineer Schrödinger denklemi için final kriterli optimal kontrol problemleri oldukça az incelenmiştir. Bu nedenle sunulan tez çalışmasının konusunun güncel olduğu ve çalışmanın gerek teorik, gerekse de pratik açıdan önem arz ettiği görülmektedir.

Bu tez çalışmasında, özel gradyent terimli zamana bağlı kompleks potansiyele sahip lineer durgun olmayan bir boyutlu Schrödinger denklemi için final kriteri optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bu problemde kontrol rolünü denklemin ölçülebilir sınır katsayısı olan kompleks potansiyelin reel ve sanal kısımları oynamaktadır. Tezin bulgular bölümü üç alt bölümden oluşmaktadır. Tezin 3.1 alt bölümünde ele alınan optimal kontrol probleminin çözümünü varlığı ve tekliği teoremi ispatlanmıştır. 3.2 alt bölümünde opimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğu gösterilmiştir. Tezin 3.3. alt bölümünde ise söz konusu optimal kontrol probleminde ilk önce yer alan amaç fonksiyonelinin diferensiyellenebilir olduğu incelenmiş ve fonksiyonelin gradyenti için formül elde edilmiştir. Bu alt bölümde sonra elde edilen formülden yararlanılarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanmıştır.

1.2. Kuramsal Temeller

Burada tüm çalışmalarımız tamamında yararlanacağımız teorem ve tanımları inceleyeceğiz [24 – 27].

Tanım 1.2.1: $L_2(0, l)$, Hilbert uzayı olup elemanları $(0, l)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u, v \rangle = \int_0^l u(x) \bar{v}(x) dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0, l)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(0, l)}}$$

Burada $\bar{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$ fonksiyonun kompleks eşleniğidir.

Tanım 1.2.2: $L_2(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \psi(x, t) \bar{\phi}(x, t) dx dt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{L_2(\Omega)}}$$

Tanım 1.2.3: $L_{\infty}(0, l)$, Banach uzayı olup, $(0, l)$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|u\|_{L_{\infty}(0, l)} = \text{vrai sup}_{x \in (0, l)} |u(x)| = \text{ess sup} \{|u(x)| : x \in (0, l)\}$$

normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 1.2.4: $L_{\infty}(\Omega)$, Banach uzayı olup Ω bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_{\infty}(\Omega)} = \text{vrai sup}_{(x, t) \in (\Omega)} |\psi(x, t)|$$

normuna sahip $\psi = \psi(x, t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 1.2.5: $C^0([0, T], B)$, Banach uzayı olup elemanları $[0, T]$ aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0, T], B)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_B$$

burada $B \equiv \mathbb{R}$ alınırsa $C[0, T] \equiv C^0([0, T], \mathbb{R})$ elde edilir.

Tanım 1.2.6: $L_2([0, T], B)$, Banach uzayı olup elemanları $[0, T]$ aralığında ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyon uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{L_2([0, T], B)} = \left[\int_0^T \|u(., t)\|_B^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Tanım 1.2.7: $W_2^1(0, l)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(0, l)} = \int_0^l \left(\psi(x) \bar{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0, l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(0, l)}}$$

$W_2^0(0, l)$ uzayı $W_2^1(0, l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0, l)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 1.2.8: $W_2^2(0, l)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x) \bar{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \frac{d^2\bar{\phi}(x)}{dx^2} \right) dx$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^2(0,l)}}$$

$$W_2^{2,0}(0,l) \equiv W_2^2(0,l) \cap W_2^{1,0}(0,l)$$

Tanım 1.2.9: $W_2^{1,0}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların x değişkenine göre 1. mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\psi(x,t) \bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial x} \right) dx dt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}$$

Tanım 1.2.10: $W_2^{0,1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup bu uzayda Ω 'nın sınırında sıfıra dönüşen düzgün fonksiyonlar her yerde yoğundur.

Tanım 1.2.11: $W_2^{0,1}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\psi(x,t) \bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dx dt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}$$

Tanım 1.2.12: $W_2^{2,1}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların x değişkenine göre ikinci mertebeye, t değişkenine göre birinci mertebeye kadar

genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} &= \int_{\Omega} \left(\psi(x, t) \bar{\phi}(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x, t)}{\partial x^2} \right) dx dt \\ &\quad + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial t} \right] dx dt \\ \|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} &= \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}} \end{aligned}$$

ve

$$W_2^{0,2,1}(\Omega) = W_2^{2,1}(\Omega) \cap W_2^{0,1,0}(\Omega)$$

dır.

Tanım 1.2.13: Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in B^*$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle c, u_k \rangle = \langle c, u \rangle$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada B^* uzayı B 'nin eşlenik uzayıdır.

Tanım 1.2.14: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Tanım 1.2.15: Diyelim ki B herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u, \gamma) = \{v : v \in B, \|v - u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \rightarrow 0} \frac{o(h, u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle_B + o\langle h, u \rangle$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilir. Burada B^* uzayı B 'nin eşlenik uzayıdır.

Teorem 1.2.1: Diyelim ki U, B Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_* = \{u \in U : J(u) = J_* = \inf_u J(u)\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu taktirde $\forall u^* \in U_*$ için $\langle J'(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ şartı sağlanır.

Teorem 1.2.2. (Weierstrass Teoremi): U, B Banach uzayının zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli olsun. Bu taktirde $J_* = \inf_u J(u) > -\infty$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ zayıf kompakttır ve U 'dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktalar kümesine zayıf yakınsar.

Teorem 1.2.3. (Goebel Teoremi): Kabul edelim ki, X düzgün konveks uzay, U kümesi X uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $a > 0, \beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu taktirde X uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi vardır ki $\forall \omega \in G$ için

$$J_a(v) = I(v) + \alpha \|v - \omega\|_X^\beta$$

Fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_a(v)$ fonksiyoneli için en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır.

Lemma 1.2.1. (Gronwall Lemması): Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \leq g(t) \leq K + L \int_{t_0}^t g(s) ds$$

Eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde

$$0 \leq g(t) \leq K \exp(L(t-t_0))$$

dır. Burada K ve L negative olmayan sabitlerdir.

Lemma 1.2.2. (Cauch-Bunjakovskii eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left| \int_{\Omega} u \bar{v} dx d\tau \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 1.2.4. (Sobolev Gömme Teoremi): Farz edelim ki D, R^n öklid uzayında bölge olsun. $D_r, \bar{D}$ 'nin kapanışa dahil olan r boyutlu düzlem kesiti olsun. Bu taktirde $W_p^l(D)$ 'den $L_q(D_r)$ 'e gömme operatörü, $n > lp, r > n - lp$ ve $q \leq \frac{pr}{n - lp}$

için sınırlı operatördür. $q < \frac{pr}{n - lp}$ için tamamen sürekli operatördür (kompakt operatör).

Bu operatör $n = lp$ olduğundan sonlu q sayısı içinde tamamen sürekli operatördür. $n < lp$ olduğunda $\alpha \leq \frac{lp - n}{p}$ için $W_p^l(D)$ 'den $H^\alpha(\bar{D})$ uzayına gömme

operatörü sınırlı operatördür. Bu operatör $\alpha < \frac{lp - n}{p}$ için tamamen sürekli

operatördür. O zaman $l \geq 1, \alpha < 1$ sayılır. Bu teorem $W_p^l(D)$ uzayına ait olan $u = u(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizliklerin geçerli olduğunu hükmeder:

$$\|u\|_{L_p(D_r)} \leq c_0 \|u\|_{W_p^l(D)} \quad (2.1)$$

$$\|u\|_{H^a(\bar{D})} \leq c_1 \|u\|_{W_p^l(D)} \quad (2.2)$$

Söylememiz gerekir ki (2.1) eşitsizliği $n > pl$ olduğunda $q \leq \frac{pr}{n-pl}$ şartını sağlayan

q lar için ve $n = pl$ olduğunda istenen sonlu q sayısı için geçerlidir. (2.2)

eşitsizliği $n < lp$, $\alpha \leq \frac{pl-n}{n}$, $\alpha < 1$ için geçerlidir. Burada c_0, c_1 sabitleri

n, p, l, r, q, D, D_r 'e genelde bağımlıdır ancak, $u = u(x)$ 'den bağımsızdır.

Şimdi başlangıç sınır değer problemlerinin çözümleri için aprior kestirimlerinin elde edilmesinde önemli rol oynayan aşağıdaki gömme teoremini verelim:

Teorem 1.2.5. (Gömme Teoremi): $\forall m \geq 1, r \geq 1$ sayıları ve $\forall u \in W_m^0(D)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\|u\|_{L_q(D)} \leq \beta \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_m(D)}^\alpha \|u\|_{L_r(D)}^{1-\alpha} \quad (2.3)$$

Burada

$$\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{1}{r} \right)^{-1} \quad (2.4)$$

dir ve

1. $m \geq n = 1$ olduğunda q sayısı $[r, \infty]$ aralığından olan herhangi sayı

$\beta = \left(1 + \frac{m-1}{m} r \right)^a$ dir. q sayısı r 'den ∞ 'a kadar değiştiğinde a sayısı 0'dan

$\frac{m}{m+r(m-1)}$ 'e kadar değişir ve iki ucu da içerir.

2. $n > 1$ ve $m < n$ olduğunda eğer $r \leq \frac{nm}{n-m}$ ise q sayısı $\left[r, \frac{nm}{n-m} \right]$ aralığında olan

herhangi sayıdır; eğer $r \geq \frac{nm}{n-m}$ ise, q sayısı $\left[\frac{nm}{n-m}, r \right]$ aralıktan olan herhangi

sayıdır ve $\beta = \left(1 + \frac{m-1}{m} r \right)^a$ dir. $q \in \left[r, \frac{nm}{n-m} \right]$ olduğunda $a \in [0,1]$ olur.

3. $n > 1$ ve $m \geq n$ olduğunda q sayısı $[r, \infty]$ aralığından olan herhangi sayı

$\beta = \max \left\{ q \frac{n-1}{n}; 1 + \frac{m-1}{m} r \right\}^a$ dir. q sayısı r 'den ∞ 'a kadar değiştiğinde

$a \in \left[0, \frac{nm}{nm + r(m-n)} \right]$ olur. Eğer $m > n$ ise (2.3) eşitsizliği $q = \infty$ içinde geçerlidir.

Farz edelim ki $u = u(x, t)$ fonksiyonu $\overset{0}{W}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayında olup sonlu

$$\max_{x \in D} \|u(., t)\|_{L_2(D)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)} < +\infty, \forall t \in (0, T)$$

Normuna sahip fonksiyon olsun. Bu taktirde $\forall t \in (0, T)$ için $m = r = 2$ olduğunda (2.3) eşitsizliği aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\|u(., t)\|_{L_q(D)} \leq \beta \left\| \frac{\partial u(., t)}{\partial x} \right\|_{L_2(D)}^a \|u(., t)\|_{L_2(D)}^{1-a} \quad (2.5)$$

Burada $n \geq 3$ olduğunda $q \in \left[2, \frac{2n}{n-2} \right]$, $n = 2$ olduğunda $q \in [2, +\infty]$ ve $n = 1$

oldüğunda $q \in [2, +\infty]$, β ise n ve q 'ya bağımlıdır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Optimal Kontrol Probleminin Konulması

Aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım. Farz edelim ki,

$$J_a(v) = \|\psi(., T) - y\|_{L_2(0, l)}^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (2.1.1)$$

fonksiyonelinin

$$V = \left\{ v = v(t) = (v_0(t), v_1(t)), v_s \in L_2(0, T), |v_s(t)| \leq b_s, s = 0, 1, \forall t \in (0, T) \right\}$$

kümesinde üzerinde:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + v_0(t) \psi + i v_1(t) \psi = f(x, t), (x, t) \in \Omega \quad (2.1.2)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), x \in (0, l) \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, \forall t \in (0, T) \quad (2.1.4)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekiyor olsun. Burada $i = \sqrt{-1}$; $l > 0, T > 0$, $a_0 > 0, b_s > 0, s = 0, 1, a \geq 0$ verilen sayılar; $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$, $\Omega_l \equiv (0, l) \times (0, t)$, $\Omega = \Omega_T$; $a(x), a_1(x, t)$ reel değerli ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup aşağıdaki şartları sağlar:

$$\mu_0 \leq a(x) \leq \mu_1, \left| \frac{da(x)}{dx} \right| \leq \mu_2, \left| \frac{d^2 a(x)}{dx^2} \right| \leq \mu_3, \forall x \in (0, l),$$

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 = \text{sabit} > 0; \quad (2.1.5)$$

$$|a_1(x,t)| \leq \mu_4, \left| \frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x} \right| \leq \mu_5, \left| \frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial x^2} \right| \leq \mu_6, \forall (x,t) \in \Omega, \\ a_1(0,t) = a_1(l,t) = 0, \mu_4, \mu_5, \mu_6 = \text{sabit} > 0; \quad (2.1.6)$$

$\varphi(x), f(x,t), y(x)$ fonksiyonları kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup aşağıdaki şartları sağlar:

$$\varphi \in W_2^2(0,l), \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0; \quad (2.1.7)$$

$$f \in W_2^{2,0}(\Omega), \frac{\partial f(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(l,t)}{\partial x} = 0, t \in (0,T); \quad (2.1.8)$$

$$y \in L_2(0,l) \quad (2.1.9)$$

$\omega \in H$ verilen eleman, $H \equiv L_2(0,T) \times L_2(0,T)$ 'dir.

Her bir $v \in V$ için (2.1.2)-(2.1.4) şartlarından $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi özel gradyent terimli lineer durgun olmayan Schrödinger denklemi için ikinci çeşit başlangıç-sınır değer problemidir.

Tanım 2.1.1: Her bir $v \in V$ için (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü dendiğinde $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan, hemen hemen $(x,t) \in \Omega$ için (2.1.2) denklemini, hemen hemen $x \in (0,l)$ için (2.1.3) başlangıç değer şartını ve hemen hemen $t \in (0,T)$ için (2.1.4) sınır değer şartlarını sağlayan $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonunu anlayacağız.

Özel gradyent terim içermeyen lineer, lineer ve durgun olmayan Schrödinger denklemleri için başlangıç sınır değer problemleri daha önce, örneğin, [6–11, 24, 26, 29, 30] ve diğer çalışmalarda ele alınmıştır. Özel gradyent terimli Schrödinger denklemleri için ise başlangıç sınır değer problemleri daha önce, örneğin, [4, 5, 19–22, 31–36] ve diğer çalışmalarda incelenmiştir. Tüm bu

çalışmalarda Schrödinger denkleminin zaman değişkenine bağlı katsayılarından zaman değişkenine göre türevlenebilir olması istenmiştir. Söylememiz gerekir ki, denklemin katsayıları yalnızca zamana bağlı ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olduğunda gradyent terim içermeyen durgun olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri daha önce [11] çalışmasında ele alınmıştır. Diğer taraftan, kuantum mekanik potansiyel sadece zaman değişkenine bağlı değerli ölçülebilir sınırlı fonksiyon olması halinde özel gradient terimli durgun olmayan Schrödinger denklemi için ikinci çeşit başlangıç sınır değer problem [36] çalışmasında incelenmiş ve aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.1: Farz edelim ki, $a(x), a_1(x, t), \varphi(x), f(x, t)$ fonksiyonları (2.1.5)-(2.1.8) şartlarını sağlasın. Bu taktirde her bir $v \in V$ için (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right). \quad (2.1.10)$$

Burada $c_0 > 0$ sabiti φ, f 'ye bağlı değildir.

Bu teoremden ve Gömme teoreminden (bknz. [25, sayfa.98]) elde edilen $W_2^{2,1}(\Omega) \subset C^0([0, T], L_2(0, l))$ gömme bağıntısından (2.1.1) fonksiyonelinin $W_2^{2,1}(\Omega)$ çözümler sınıfında anlamlı olduğu çıkar.

3. BULGULAR

3.1. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini inceleyeceğiz.

Teorem 3.1.1: Farz edelim ki, $a(x), a_1(x, t), \varphi(x), f(x, t), y(x)$ fonksiyonları (2.1.5)-(2.1.9) şartlarını sağlasın. Ek olarak $\omega \in H = L_2(0, T) \times L_2(0, T)$ olsun. Bu taktirde H uzayında her yerde yoğun bir G alt kümesi vardır ki, herhangi $\omega \in G$ için $\alpha > 0$ olduğunda (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin tek bir çözümü vardır.

İspat: İlk önce, $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. (2.1.1) formülüne göre $J_0(v)$ fonksiyonelinin aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$J_0(v) = \|\psi(., T) - y\|_{L_2(0, l)}^2. \quad (3.1.1)$$

Burada $\delta v \in B = L_\infty(0, T) \times L_\infty(0, T)$ artışı herhangi $v \in V$ elemanına $v + \delta v \in V$ olacak şekilde verilen artıştır ve $\delta \psi = \delta \psi(x, t) \equiv \psi(x, t; v + \delta v) - \psi(x, t; v)$ 'dir, $\psi(x, t; v)$ ise (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ 'ye karşılık gelen çözümüdür. (2.1.2)-(2.1.4) şartlarından $\delta \psi = \delta \psi(x, t)$ fonksiyonunun aşağıdaki problemin çözümü olduğu açıktır:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} - a(x) \delta \psi + (v_0(t) + \delta v_0(t)) \delta \psi \\ + i(v_1(t) + \delta v_1(t)) \delta \psi = -\delta v_0(t) \psi(x, t) - i \delta v_1(t) \psi(x, t), (x, t) \in \Omega, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\delta\psi(x,0)=0, x \in (0,l), \frac{\partial\delta\psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial\delta\psi(l,t)}{\partial x} = 0, t \in (0,T). \quad (3.1.3)$$

Burada $\psi_\delta = \psi_\delta(x,t) \equiv \psi(x,t; v + \delta v)$ fonksiyonu $v + \delta v \in V, \delta v \in B$ için (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür.

(3.1.2)-(3.1.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümü için kestirim elde etmeye çalışalım. Bu amaçla (3.1.2) denkleminin her iki yanını $\delta\bar{\psi}(x,t)$ ile çarpalım ve elde edilen eşitliği Ω_t alanı üzerinden integralleyelim. Bu taktirde kısmi integrasyon formülünü ve (3.1.3) sınır değer şartlarını kullanarak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial\delta\psi}{\partial t} \delta\bar{\psi} - a_0 \left| \frac{\partial\delta\psi}{\partial x} \right|^2 + ia_1(x,\tau) \frac{\partial\delta\psi}{\partial x} \delta\bar{\psi} - a(x) |\delta\psi|^2 \right. \\ & \quad \left. + (v_0(\tau) + \delta v_0(\tau)) |\delta\psi|^2 + i(v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) |\delta\psi|^2 = \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) \psi \delta\bar{\psi} dx d\tau - i \int_{\Omega_t} \delta v_1(\tau) \psi \delta\bar{\psi} dx d\tau, \forall t \in [0, T] \right. \end{aligned}$$

Bu eşitlikten, kompleks eşleneği çıkararak şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} |\delta\psi|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left(a_1(x,\tau) \frac{\partial\delta\psi}{\partial x} \delta\bar{\psi} + a_1(x,\tau) \frac{\partial\delta\bar{\psi}}{\partial x} \delta\psi \right) dx d\tau \\ & = -2 \int_{\Omega_t} (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) |\delta\psi|^2 dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) \text{Im}(\psi \delta\bar{\psi}) dx d\tau \\ & \quad - 2 \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) \text{Re}(\psi \delta\bar{\psi}) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafına $\int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x} |\delta\psi|^2 dx d\tau$ terimini ekleyerek aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} |\delta\psi|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} (a_1(x,\tau) |\delta\psi|^2) dx d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \int_{\Omega_t} (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) |\delta \psi|^2 dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) \operatorname{Im}(\psi \delta \bar{\psi}) dx d\tau \\
&- 2 \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) \operatorname{Re}(\psi \delta \bar{\psi}) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |\delta \psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

$a_1(x, t)$ için sınır şartları nedeniyle bu eşitliğin solundaki ikinci terim sıfıra eşittir. Bu durumda bu eşitliğin sol tarafındaki ilk terimi dönüştürüp (3.1.3)' ün birinci şartından aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned}
&\int_0^l |\delta \psi(x, t)|^2 dx = -2 \int_{\Omega_t} (v_1(x) + \delta v_1(x)) |\delta \psi|^2 dx d\tau \\
&- 2 \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) \operatorname{Im}(\psi \delta \bar{\psi}) dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} \delta v_1(\tau) \operatorname{Re}(\psi \delta \bar{\psi}) dx d\tau \\
&+ \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |\delta \psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Bu eşitlikten, aşağıdaki eşitsizliği kolaylıkla elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
&\int_0^l |\delta \psi(x, t)|^2 dx \leq 2b_1 \int_{\Omega_t} |\delta \psi|^2 dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} |\delta v_0(\tau)| |\psi| |\delta \psi| dx d\tau \\
&+ 2 \int_{\Omega_t} |\delta v_1(\tau)| |\psi| |\delta \psi| dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \right| |\delta \psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikten $a_1(x, t)$ fonksiyonu için olan şartı kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
&\int_0^l |\delta \psi(x, t)|^2 dx \leq (2b_1 + \mu_5) \int_{\Omega_t} |\delta \psi|^2 dx d\tau \\
&+ 2 \int_{\Omega_t} |\delta v_0(\tau)| |\psi| |\delta \psi| dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} |\delta v_1(\tau)| |\psi| |\delta \psi| dx d\tau, \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini bu eşitsizliğin sağ tarafına uygularsak, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\int_0^l \left| \delta \psi(x, t) \right|^2 dx &\leq (2b_1 + \mu_5 + 2) \int_{\Omega_t} |\delta \psi|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left| \delta v_0(\tau) \right|^2 |\psi|^2 dx d\tau \\
&+ \int_{\Omega_t} \left| \delta v_1(\tau) \right|^2 |\psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

$W_2^{2,1}(\Omega) \subset L_\infty(0, T; W_2^1(0, l)) \subset L_\infty(\Omega)$ gömme bağıntısına (bkz: [24–26,37]) göre aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_1 \|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}. \tag{3.1.5}$$

Bu eşitsizlik ve (2.1.10) kestirimi sayesinde (3.1.4) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliğin geçerliliğini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\|\delta \psi(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 &\leq (2b_1 + \mu_5 + 2) \int_0^t \|\delta \psi(., \tau)\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau \\
&+ c_2 \left(\|\delta v_0\|_{L_2(0, T)}^2 + \|\delta v_1\|_{L_2(0, T)}^2 \right), \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Buna Gronwall lemmasını uygulayarak, aşağıdaki kestirimin geçerliliğini elde ederiz.

$$\|\delta \psi(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_3 \left(\|\delta v_0\|_{L_2(0, T)}^2 + \|\delta v_1\|_{L_2(0, T)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \tag{3.1.7}$$

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin herhangi $v \in V$ elemanı üzerinde artışına bakalım.

(3.1.1) formülünün yardımıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\delta J_0(v) &= J_0(v + \delta v) - J_0(v) = 2 \int_0^l \operatorname{Re} \left[(\psi(x, T) - y(x)) \delta \bar{\psi}(x, T) \right] dx \\
&+ \|\delta \psi(., T)\|_{L_2(0, l)}^2.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

$W_2^{2,1}(\Omega) \subset C^0([0, T], L_2(0, l))$ gömme bağıntısına dayanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\psi(., t)\|_{L_2(0, l)} \leq c_4 \|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \quad (3.1.9)$$

Bu eşitsizlik ve (2.1.10) kestirimi sayesinde (3.1.8) eşitliğinden Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinin ve $t=T$ için (3.1.7) kestiriminin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|\delta J_0(v)| \leq c_5 \left(\|\delta v\|_H + \|\delta v\|_H^2 \right), \forall v \in V. \quad (3.1.10)$$

Bu eşitsizlikten V kümesi üzerinde $J_0(v)$ fonksiyonelinin sürekliliği çıkar. V kümesinin $B = L_\infty(0, T) \times L_\infty(0, T)$ uzayının kapalı sınırlı ve konveks bir küme olduğu açıktır. Ayrıca bu kümenin düzgün konveks $H = L_2(0, T) \times L_2(0, T)$ uzayının [38] kapalı sınırlı konveks kümesi olduğu da kolaylıkla gösterilebilir. O zaman [28] çalışmasından bilinen kuramsal temeller bölümündeki Teorem 1.2.2' den H uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesinin var olduğunu ve herhangi $\omega \in G$ ve herhangi $\alpha > 0$ için (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin tek bir çözüme sahip olduğunu elde ederiz. Teorem 3.1.1 ispatlandı.

3.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı

Bu alt bölümde $a \geq 0$ için (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.2.1: Farz edelim ki, Teorem 3.1.1'in koşulları sağlansın. Bu taktirde herhangi $\alpha \geq 0$ ve herhangi $\omega \in H$ için (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin en az bir çözümü vardır.

İspat: Herhangi bir minimalleştirici $\{v^k\} \subset V$ dizisini alalım:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_a(v^k) = J_{a^*} = \inf_{v \in V} J_a(v).$$

$\psi_k = \psi_k(x, t) \equiv \psi_k(x, t; v^k), k = 1, 2, \dots$ olsun. Teorem 2.1.2'ye göre her bir $v^k \in V$ için (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek ir $\psi_k(x, t)$ çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi_k\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,t)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right), k = 1, 2, \dots \quad (3.2.1)$$

Bu kestirimin sağ tarafı k 'dan bağımsızdır.

V kümesi, $B = L_\infty(0, T) \times L_\infty(0, T)$ Banach uzayının sınırlı bir kümesi olduğundan, $\{v^k\} \subset V$ dizisinden $v \in B$ 'ye (*) zayıf yakınsayan $\{v^{k_p}\}$ alt dizisini seçebiliriz. Bu alt diziyi kolaylık olsun diye yeniden $\{v^k\}$ ile gösterelim. Bu taktirde bu alt dizi için aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz:

$$k \rightarrow \infty \text{ için } v_s^k \rightarrow v_s, s = 0, 1, L_\infty(0, T) ' \text{ de } (*) \text{ zayıf.} \quad (3.2.2)$$

Ayrıca V, B 'de kapalı bir konveks küme olduğundan V (*) zayıf kapalı küme olacaktır, yani $v \in V$.

(3.2.1) kestiriminden $\{\psi_k(x, t)\}$ dizisinin $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının normunda düzgün sınırlı dizi olduğu çıkar. Bu taktirde bu diziden öyle bir $\{\psi_{k_p}(x, t)\}$ alt dizisi seçebiliriz ki, bu alt dizi $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında bir $\psi \in W_2^{2,1}(\Omega)$ fonksiyonuna zayıf yakınsar. Kolay olsun diye yine de bu yakınsayan alt diziyi $\{\psi_k(x, t)\}$ ile gösterelim. Bu taktirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $k \rightarrow \infty$ için

$$\psi_k \rightarrow \psi, L_2(\Omega) ' \text{ de, zayıf,} \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x}, L_2(\Omega)'de, zayıf, \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, L_2(\Omega)'de, zayıf, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t}, L_2(\Omega)'de, zayıf. \quad (3.2.6)$$

$\{\psi_k(x, t)\}$ dizisinin her bir elemanı (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olduğundan $L_2(\Omega)$ ' dan olan herhangi $\eta = \eta(x, t)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi_k}{\partial x} - a(x) \psi_k + v_0^k(t) \psi_k + i v_1^k(t) \psi_k - f(x, t) \right) \bar{\eta}(x, t) dx dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2.7)$$

integral özdeşliğini,

$$\psi_k(x, 0) = \varphi(x), \quad \forall x \in (0, l), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2.8)$$

başlangıç değer şartını ve

$$\frac{\partial \psi_k(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_k(l, t)}{\partial x} = 0, \quad \forall t \in (0, T), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2.9)$$

sınır değer şartlarını sağladığını hükmedebiliriz.

$W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömülmesinden ve (3.2.3)-(3.2.6) limit bağıntılarından aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz:

$$k \rightarrow \infty \text{ için } \|\psi_k - \psi\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (3.2.10)$$

Bunu ve (3.2.2) limit bağıntısını kullanarak herhangi $\eta \in L_2(\Omega)$ fonksiyonu için $k \rightarrow \infty$ olduğunda aşağıdaki limit bağıntısının geçerli olduğunu ispatlayabiliriz:

$$\int_{\Omega} v_s^k(t) \psi_k(x,t) \bar{\eta}(x,t) dx dt \rightarrow \int_{\Omega} v_s^k(t) \psi(x,t) \bar{\eta}(x,t) dx dt, s=0,1, \quad (3.2.11)$$

Gerçekten aşağıdaki eşitliği yazalım:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_s^k(t) \psi_k(x,t) \bar{\eta}(x,t) dx dt &= \int_{\Omega} v_s^k(t) (\psi_k(x,t) - \psi(x,t)) \bar{\eta}(x,t) dx dt + \\ &\int_{\Omega} (v_s^k(t) - v_s(t)) \psi(x,t) \bar{\eta}(x,t) dx dt + \int_{\Omega} v_s(t) \psi(x,t) \bar{\eta}(x,t) dx dt, s=0,1. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

İlk önce bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci terime bakalım. Bu terimi değerlendirirsek, kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v_s^k(t) (\psi_k(x,t) - \psi(x,t)) \bar{\eta}(x,t) dx dt \right| &\leq \int_{\Omega} |v_s^k(t)| |\psi_k(x,t) - \psi(x,t)| |\eta(x,t)| dx dt \leq \\ &\leq \|v_s^k\|_{L_{\infty}(0,T)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \|\psi_k - \psi\|_{L_2(\Omega)} \leq b_s \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \|\psi_k - \psi\|_{L_2(\Omega)}, s=0,1, \forall \eta \in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

(3.2.10) limit bağıntısını dikkatte alarak bu eşitsizliğin her iki tarafında limite geçerse $k \rightarrow \infty$ için aşağıdaki limit bağıntılarının geçerliliğini elde ederiz:

$$\int_{\Omega} v_s^k(t) (\psi_k(x,t) - \psi(x,t)) \bar{\eta}(x,t) dx dt \rightarrow 0, s=0,1, \forall \eta \in L_2(\Omega). \quad (3.2.14)$$

Şimdi (3.2.12) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimini ele alalım.

$g(t) = \int_0^l \psi(x,t) \bar{\eta}(x,t) dx$ fonksiyonunun $L_1(0,T)$ uzayına ait olduğu açıktır.

Gerçekten, de $\psi \in L_2(\Omega), \eta \in L_2(\Omega)$ koşullarından ve Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_1(0,T)} &= \int_0^T |g(t)| dt = \int_0^T \left| \int_0^l \psi(x,t) \bar{\eta}(x,t) dx \right| dt \leq \int_0^T \int_0^l |\psi(x,t) \bar{\eta}(x,t)| dx dt \\ &\leq \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)} < +\infty. \end{aligned}$$

Bunu ve (3.2.2) limit bağıntılarını hesaba katarak, aşağıdaki limit bağıntılarının geçerliliğini kolaylıkla elde ederiz:

$$k \rightarrow \infty \text{ için } \int_{\Omega} (v_s^k(t) - v_s(t)) \psi(x, t) \bar{\eta}(x, t) dx dt \rightarrow 0, s = 0, 1, \forall \eta \in L_2(\Omega) \quad (3.2.15)$$

Böylece (3.2.14). (3.2.15) limit bağıntılarını kullanarak, (3.2.12) eşitliklerinin her iki tarafında $k \rightarrow \infty$ olduğunda limite geçerse, (3.2.11) limit bağıntısının geçerli olduğunu ispatlamış oluruz. Bu taktirde (3.2.3)-(3.2.6), (3.2.11) limit bağıntılarını kullanarak (3.2.7) integral özdeşliğinde $k \rightarrow \infty$ olarak limite geçerse, herhangi $\eta \in L_2(\Omega)$ için aşağıdaki integral özdeşliğinin geçerliliğini elde ederiz:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + v_0(t) \psi + i v_1(t) \psi - f(x, t) \right) \bar{\eta}(x, t) dx dt = 0 \quad (3.2.16)$$

Bu bağıntıdan $\psi(x, t)$ limit fonksiyonun hemen hemen $(x, t) \in \Omega$ için (2.1.2) denklemini sağladığı çıkar.

$W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının $C^0([0, T], L_2(0, l))$ uzayına kompakt gömülmesi nedeniyle aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz:

$$k \rightarrow \infty \text{ için } \|\psi_k(., t) - \psi(., t)\| \rightarrow 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.2.17)$$

Şimdi $\psi(x, t)$ limit fonksiyonunun (2.1.3) başlangıç değer şartını sağladığını gösterelim. (3.2.8) başlangıç değer şartlarını, $t = 0$ için (3.2.17) limit bağıntısını kullanarak

$$\|\psi(., 0) - \phi\|_{L_2(0, l)} \leq \|\psi(., 0) - \psi_k(., 0)\|_{L_2(0, l)} + \|\psi_k(., 0) - \phi\|_{L_2(0, l)}$$

eşitsizliğinin her iki tarafında $k \rightarrow \infty$ olduğunda limite geçelim. Bu taktirde aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\|\psi(.,0) - \varphi\|_{L_2(0,l)} = 0.$$

Buradan, hemen hemen $x \in (0,l)$ için $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1.3) başlangıç şartı sağladığı sonucu çıkar.

Son olarak $\psi(x,t)$ limit fonksiyonun (3.1.4) ikinci çeşit sınır değer şartlarını sağladığını gösterelim. Gerçekten de [25, sayfa98] çalışmasındaki Lemma 3.4'ü ve $\{\psi_k(x,t)\}$ alt dizisinin $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olduğunu dikkate alırsak, aşağıdaki limitin geçerli olduğunu iddia edebiliriz:

$$k \rightarrow \infty \text{ için } \frac{\partial \psi_k(s,t)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi(s,t)}{\partial x}, s = 0, l, L_2(0,T) \text{ 'de, zayıf}. \quad (3.1)$$

Bu taktirde bu limit bağıntılarını ve (3.2.9) sınır değer şartlarını dikkate alıp herhangi $\eta \in L_2(0,T)$ olduğunda $k \rightarrow \infty$ için

$$\int_0^T \frac{\partial \psi(s,t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial \psi(s,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k(s,t)}{\partial x} \right) \bar{\eta}(t) dt + \int_0^T \frac{\partial \psi_k(s,t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt, s = 0, l.$$

özdeşliklerinin her iki tarafında limite geçerse,

$$\frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l,t)}{\partial x} = 0, \forall t \in (0,T).$$

sınır değer şartlarını geçerliliğini elde ederiz.

Böylece, $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ limit fonksiyonuna karşılık gelen çözümü olduğunu ispatladık, yani $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ 'dir. Diğer taraftan, bu fonksiyon için (3.1.10) kestiriminin sağlandığı da elde edilir. Gerçekten, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında normun alttan

zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alıp (3.2.2) kestiriminde zayıf yakınsayan $\{\psi_k(x, t)\}$ alt dizisi üzerinden alt limite geçerse oradan (3.1.10) kestiriminin geçerli olduğunu kanıtlarız. Diğer taraftan, bu limit fonksiyonunun bir tek olduğu teorem 2.1.2 den çıkar. $L_2(0, l), H$ uzaylarının normunun alttan zayıf yarı sürekliliğini ve $k \rightarrow \infty$ için $v_s^k \rightarrow v_s, s = 0, 1, L_2(0, T)$ 'de zayıf, $\psi_k(s, \cdot) \rightarrow \psi(s, \cdot), s = 0, 1, L_2(0, T)$ de güçlü limit bağıntılarını kullanarak, $\forall \alpha \geq 0$ ve $\forall \omega \in H$ için aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz:

$$J_{\alpha^*} \leq J_{\alpha}(v) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} J_{\alpha}(v^k) = \inf_{v \in V} J_{\alpha}(v) = J_{\alpha^*}.$$

Bu, $v \in V$ 'nin $\alpha \geq 0$ ve $\forall \omega \in H$ için (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin bir çözümü olduğu anlamına gelir. Teorem 3.2.1 ispatlandı.

3.3. Fonksiyonelin diferansiyellenebilirliği ve optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart

Bu bölümde, (2.1.1) fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliğini inceleyip onun gradiyenti için formül elde edeceğiz. Bu formülden yararlanarak (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlayacağız. Farz edelim ki, $\Phi = \Phi(x, t)$ fonksiyonu aşağıdaki eşlenik problemin çözümü olsun:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial x} (a_1(x, t) \Phi) - a(x) \Phi + v_0(t) \Phi - i v_1(t) \Phi = 0, (x, t) \in \Omega, \quad (3.3.1)$$

$$\Phi(x, t) = -2i(\psi(x, T) - y(x)), x \in (0, l), \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T). \quad (3.3.3)$$

Burada $\psi = \psi(x, t) \equiv \psi(x, t; v)$ fonksiyonu (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ 'ye karşılık gelen çözümüdür. Bu sınır değer problemini (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol problemine karşılık gelen eşlenik problem olarak adlandıracağız.

Burada $a(x), a_1(x, t), \varphi(x), f(x, t), y(x)$ fonksiyonları (2.1.5)-(2.1.9) koşullarını sağlar. Bu şartlarla birlikte, $a_1(x, t)$ fonksiyonunun aşağıdaki şartı da sağladığını varsayalım:

$$\left| \frac{\partial^3 a_1(x, t)}{\partial x^3} \right| \leq \mu_7, \forall (x, t) \in \Omega, \mu_7 = \text{sabit} > 0 \quad (3.3.4)$$

Tanım 3.3.1: (3.3.1)-(3.3.3) eşlenik probleminin çözümü dendiğinde, $C^0([0, T], L_2(0, l))$ fonksiyonel uzayına ait olan ve $\eta_1(x, 0) = 0, \forall x \in (0, l)$, $\frac{\partial \eta_1(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \eta_1(l, t)}{\partial x} = 0, \forall t \in (0, T)$ şartlarını sağlayan herhangi $\eta_1 \in W_2^{2,1}(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\Phi(x, t) \left(-i \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_1}{\partial x^2} - i a_1(x, t) \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial x} - a(x) \bar{\eta}_1 + v_0(t) \bar{\eta}_1 - i v_1(t) \bar{\eta}_1 \right) \right] dx dt \\ & = -2 \int_0^l (\psi(x, T) - y(x)) \bar{\eta}_1(x, T) dx \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

özdeşliğini sağlayan $\Phi(x, t)$ fonksiyonunu anlayacağız.

Görüldüğü gibi, (3.3.1)-(3.3.3) eşlenik problemi sınır değer şartları homojen olan bir sınır değer problemidir. Bilindiği üzere bu sınır değer problemi $t = T - \tau$ değişken dönüşümünün yardımıyla (2.1.2)-(2.1.4) problemi biçiminde özel gradyent terimli Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemine dönüştürebiliriz. Bu nedenle teorem 3.1.1'in ispat metodüğünü ve verilerin düzgünleştirilmesi yöntemini

kullanarak [22] çalışmasında olduğu gibi aşağıdaki varlık ve teklik teoremini ispatlamak mümkündür:

Teorem 3.3.1: Farz edelim ki, $a(x), a_1(x, t), \varphi(x), f(x, t), y(x)$ fonksiyonları (2.1.5)-(2.1.9), (3.3.4) şartlarını sağlasın ve $v \in V$ olsun. Bu taktirde (3.3.1)-(3.3.3) eşlenik probleminin $C^0([0, T], L_2(0, l))$ uzayına ait olan tek bir çözümü vardır ve bu çözüm aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\Phi(., t)\|_{L_2(0, l)} \leq c_6 \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, l)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|y\|_{L_2(0, l)} \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.6)$$

Burada $c_6 > 0$ sabiti φ, f, y, t ' den bağımsız bir sabittir.

Şimdi, Teorem 3.3.1' in hükmünden yararlanarak ilk önce $J_a(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde diferansiyellebilir olduğunu gösterelim.

Teorem 3.3.2: Farz edelim ki teorem 3.3.1' in şartları sağlansın ve $\omega \in H$ verilen bir eleman olsun. Bu taktirde $J_a(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Fréchet anlamında diferansiyellenebilirdir ve herhangi bir $v \in V$ olduğunda fonksiyonelin gradyenti için aşağıdaki formüller geçerlidir:

$$J_a'(v) = (J_{a_0}'(v), J_{a_1}'(v)), \quad (3.3.7)$$

$$J_{a_0}'(v) = \int_0^l \operatorname{Re}(\psi(x, t) \overline{\Phi(x, t)}) dx + 2a(v_0(t) - \omega_0(t)), \quad (3.3.8)$$

$$J_{a_1}'(v) = - \int_0^l \operatorname{Im}(\psi(x, t) \overline{\Phi(x, t)}) dx + 2a(v_1(t) - \omega_1(t)). \quad (3.3.9)$$

Burada $\psi(x, t) \equiv \psi(x, t; v), \Phi(x, t) \equiv \Phi(x, t; v)$ fonksiyonları sırasıyla (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer , (3.3.1)-(3.3.3) eşlenik problemlerinin $v \in V$ ' ye karşılık gelen çözümleridir.

İspat: Farz edelim ki $\delta v \in B = L_\infty(0, T) \times L_\infty(0, T)$ artışı $v + \delta v \in V$ olacak şekilde herhangi $v \in V$ elemanına verilen bir artış olsun. Bu taktirde $\delta\psi = \delta\psi(x, t) \equiv \psi(x, t; v + \delta v) - \psi(x, t; v)$ fonksiyonunun (3.1.2), (3.1.3) başlangıç sınır değer probleminin bir çözümü olacağı açıktır. Burada $\psi(x, t; v)$ fonksiyonu (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ ' ye karşılık gelen çözümüdür.

Herhangi $v \in V$ elemanı üzerinde $J_a(v)$ fonksiyonelinin artışına bakalım. (2.1.1) ve (3.1.8) formüllerinin yardımıyla aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \delta J_a(v) &= J_a(v + \delta v) - J_a(v) = 2 \int_0^l \operatorname{Re} \left[(\psi(x, T) - y(x)) \delta \bar{\psi}(x, T) \right] dx \\ &\quad + 2a \int_0^T (v_0(t) - \omega_0(t)) \delta v_0(t) dt + 2a \int_0^T (v_1(t) - \omega_1(t)) \delta v_1(t) dt \\ &\quad + \|\delta\psi(., T)\|_{L_2(0l)}^2 + a \|\delta v\|_H^2. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Şimdi bu formülün sağ tarafındaki ilk terimi dönüştürelim .

(3.1.2)-(3.1.3) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü olan $\delta\psi \in W_2^{2,1}(\Omega)$ fonksiyonunun $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ için aşağıdaki integral özdeşliğini sağladığı açıktır:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[i \frac{\partial \delta\psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} - a(x) \delta\psi + (v_0(t) + \delta v_0(t)) \delta\psi \right. \\ &\quad \left. + i(v_1(t) + \delta v_1(t)) \delta\psi \right] \bar{\eta}(x, t) dx dt \\ &= - \int_\Omega \delta v_0(t) \psi(x, t) \bar{\eta}(x, t) dx dt - \int_\Omega i \delta v_1(t) \psi(x, t) \bar{\eta}(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Bu integral özdeşlikte, test fonksiyonu olan $\eta \in L_2(\Omega)$ yerine (3.3.1)-(3.3.3) eşlenik problemin çözümü olan $\Phi \in C^0([0, T], L_2(0, l))$ fonksiyonunu alalım. O zaman aşağıdaki eşitliğin geçerliliğini elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[i \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} - a(x) \delta \psi + (v_0(t) + \delta v_0(t)) \delta \psi \right. \\ & \quad \left. + i(v_1(t) + \delta v_1(t)) \delta \psi \right] \bar{\Phi}(x, t) dx dt \\ & = - \int_{\Omega} \delta v_0(t) \psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t) dx dt - \int_{\Omega} i \delta v_1(t) \psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t) dx dt \end{aligned}$$

Şimdi, eşlenik problemin $\Phi \in C^0([0, T], L_2(0, l))$ çözümü için olan (3.3.5) integral

özdeşliğinde $\eta_1(x, 0) = 0, \forall x \in (0, l), \frac{\partial \eta_1(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \eta_1(l, t)}{\partial x} = 0, \forall t \in (0, T)$ şartlarını

sağlayan $\eta_1 \in W_2^{2,1}(\Omega)$ test fonksiyonu yerine $\delta \psi(x, 0) = 0, \forall x \in (0, l),$

$\frac{\partial \delta \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \delta \psi(l, t)}{\partial x} = 0, \forall t \in (0, T)$ şartlarını sağlayan $\delta \psi \in W_2^{2,1}(\Omega)$

fonksiyonunu alalım. O zaman aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\left(-i \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta \bar{\psi}}{\partial x^2} - i a_1(x, t) \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} - a(x) \delta \bar{\psi} + v_0(t) \delta \bar{\psi} - i v_1(t) \delta \bar{\psi} \right) \Phi \right] dx dt \\ & = -2 \int_0^l (\psi(x, T) - y(x)) \delta \bar{\psi}(x, T) dx. \end{aligned}$$

Bu eşitliğin kompleks eşleniğini yazalım:

$$\int_{\Omega} \left[\left(i \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} - a(x) \delta \psi + v_0(t) \delta \psi + i v_1(t) \delta \psi \right) \bar{\Phi} \right] dx dt$$

$$= -2 \int_0^l \left(\bar{\psi}(x, T) - \bar{y}(x) \right) \delta \psi(x, T) dx. \quad (3.3.12)$$

(3.3.11) eşitliğinden (3.3.12) eşitliğini taraf tarafa çıkarırsak, aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^l \left(\bar{\psi}(x, T) - \bar{y}(x) \right) \delta \psi(x, T) dx = \\ &= \int_{\Omega} \delta v_0(t) \psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t) dx dt + \int_{\Omega} i \delta v_1(t) \psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t) dx dt \\ &+ \int_{\Omega} \delta v_0(t) \delta \psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t) dx dt + \int_{\Omega} i \delta v_1(t) \delta \psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Bu eşitliğin kompleks eşleniğini yazalım:

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^l \left(\psi(x, T) - y(x) \right) \delta \bar{\psi}(x, T) dx \\ &= \int_{\Omega} \delta v_0(t) \bar{\psi}(x, t) \Phi(x, t) dx dt - \int_{\Omega} i \delta v_1(t) \bar{\psi}(x, t) \Phi(x, t) dx dt \\ &+ \int_{\Omega} \delta v_0(t) \delta \bar{\psi}(x, t) \Phi(x, t) dx dt - \int_{\Omega} i \delta v_1(t) \delta \bar{\psi}(x, t) \Phi(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

(3.3.13) ve (3.3.14) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^l \operatorname{Re} \left[\left(\psi(x, T) - y(T) \right) \delta \bar{\psi}(x, T) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left(\psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t) \right) \delta v_0(t) dx dt - \int_{\Omega} \operatorname{Im} \left(\psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t) \right) \delta v_1(t) dx dt \end{aligned}$$

$$+\int_{\Omega} \operatorname{Re}\left(\delta\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t)\right)\delta v_0(t)dxdt - \int_{\Omega} \operatorname{Im}\left(\delta\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t)\right)\delta v_1(t)dxdt. \quad (3.3.15)$$

Bu eşitliği dikkate alarak, fonksiyonelin artışı için aşağıdaki formülü buluruz:

$$\begin{aligned} \delta J_a(v) &= J_a(v + \delta v) - J_a(v) \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t)\right)\delta v_0(t)dxdt - \int_{\Omega} \operatorname{Im}\left(\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t)\right)\delta v_1(t)dxdt \\ &\quad + 2a \int_0^T (v_0(t) - \omega_0(t))\delta v_0(t)dt + 2a \int_0^T (v_1(t) - \omega_1(t))\delta v_1(t)dt + R(\delta v), \forall v \in V, \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Burada $R(\delta v)$ kalan terimi aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} R(\delta v) &= \int_{\Omega} \operatorname{Re}\left(\delta\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t)\right)\delta v_0(t)dxdt - \int_{\Omega} \operatorname{Im}\left(\delta\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t)\right)\delta v_1(t)dxdt \\ &\quad + \left\|\delta\psi(.,T)\right\|_{L_2(0,T)}^2 + a\left\|\delta v\right\|_H^2. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Şimdi $R(\delta v)$ kalan terimini değerlendirelim. (3.3.17) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} |R(\delta v)| &\leq \int_{\Omega} |\delta\psi(x,t)| |\Phi(x,t)| |\delta v_0(t)| dxdt + \int_{\Omega} |\delta\psi(x,t)| |\Phi(x,t)| |\delta v_1(t)| dxdt \\ &\quad + \left\|\delta\psi(.,T)\right\|_{L_2(0,T)}^2 + a\left\|\delta v\right\|_H^2. \end{aligned}$$

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliği sayesinde aşağıdaki eşitsizliği kolaylıkla elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} |R(\delta v)| &\leq \left\|\Phi\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\delta\psi\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\delta v_0\right\|_{L_{\infty}(0,T)} + \left\|\Phi\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\delta\psi\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\delta v_1\right\|_{L_{\infty}(0,T)} \\ &\quad + \left\|\delta\psi(.,T)\right\|_{L_2(0,T)}^2 + a\left\|\delta v\right\|_H^2. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

(2.1.10), (3.1.7) kestirimlerini ve (3.3.1)-(3.3.3) eşlenik problemin çözümü için olan (3.3.6) kestirimini kullanarak $R(\delta v)$ kalan terimi için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|R(\delta v)| \leq c_7 \|\delta v\|_B^2. \quad (3.3.19)$$

Burada $c_7 > 0$ sabit δv 'ye bağılı değildir. Bu o demektir ki,

$$|R(\delta v)| = o(\|\delta v\|_B). \quad (3.3.20)$$

Bunu fonksiyonelin artış formülünde hesaba katarsak, o zaman aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\begin{aligned} \delta J_a(v) &= J_a(v + \delta v) - J_a(v) = \\ &= \int_0^T \left[\int_0^l \operatorname{Re}(\psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t)) dx + 2a(v_0(t) - \omega_0(t)) \right] \delta v_0(t) dt \\ &+ \int_0^T \left[- \int_0^l \operatorname{Im}(\psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t)) dx + 2a(v_1(t) - \omega_1(t)) \right] \delta v_1(t) dt + o(\|\delta v\|_B), \\ &\quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Fonksiyonellerin Fréchet anlamında diferansiyellenebilirliğinin tanımından ve fonksiyonel uzayların kapalı kümelerinde diferansiyellenebilirliğinin ispat metodüğünü kullanarak (3.3.21) formülünden yararlanarak $J_a(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde Fréchet anlamında diferansiyellenebilir olduğunu ve onun gradyenti için aşağıdaki formülün geçerli olduğunu elde ederiz:

$$J'_a(v) = (J'_{\alpha_0}(v), J'_{\alpha_1}(v)), \quad (3.3.22)$$

Burada

$$J'_{\alpha_0}(v) = \int_0^l \operatorname{Re}(\psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t)) dx + 2\alpha(v_0(t) - \omega_0(t)), \quad (3.3.23)$$

$$J'_{\alpha_1}(v) = - \int_0^l \operatorname{Im}(\psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t)) dx + 2\alpha(v_1(t) - \omega_1(t)) \quad (3.3.24)$$

dir. Buradan teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem 3.3.2 ispatlandı.

Şimdi (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şartı ispatlayalım.

Teorem 3.3.3: Farz edelim ki, Teorem 3.3.2'nin şartları sağlansın ve $v^* \in V$ (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olsun. O zaman herhangi $v \in V$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\int_0^l \operatorname{Re}(\psi^*(x,t) \overline{\Phi^*(x,t)}) dx + 2a(v_0^*(t) - \omega_0(t)) \right] (v_0(t) - v_0^*(t)) dt \\ & + \int_0^T \left[- \int_0^l \operatorname{Im}(\psi^*(x,t) \overline{\Phi^*(x,t)}) dx + 2a(v_1^*(t) - \omega_1(t)) \right] (v_1(t) - v_1^*(t)) dt \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Burada $\psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$, $\Phi^*(x,t) \equiv \Phi(x,t;v^*)$ fonksiyonları sırasıyla (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer ve (3.3.1)-(3.3.3) problemlerinin $v^* \in V$ 'ye karşılık gelen çözümleridir.

İspat: Farz edelim ki, $v^* \in V$ kontrolü (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü, $v \in V$ herhangi kontrol ve $\theta \in [0,1]$ herhangi sayı olsun. V kümesi konveks olduğundan $v^* + \theta(v - v^*) \in V$ olduğunu kontrol etmek kolaydır. Gerçekten herhangi $v^0, v^1 \in V$ ve $\forall \theta \in [0,1]$ için $\theta v^0 + (1-\theta)v^1 \in V$ bağıntısının geçerli olduğunu gösterelim. $L_2(0,T)$ uzayı konveks olduğundan $\theta v_m^0 + (1-\theta)v_m^1 \in L_2(0,T)$, $m=0,1$ elde edilir. Bu durumda herhangi $v^0, v^1 \in V$ ve $\forall \theta \in [0,1]$, $\forall t \in (0,T)$ için aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} & |\theta v_m^0(t) + (1-\theta)v_m^1(t)| \leq |\theta v_m^0(t)| + |(1-\theta)v_m^1(t)| \\ & = \theta |v_m^0(t)| + (1-\theta) |v_m^1(t)| \leq \theta b_m + (1-\theta)b_m = b_m, m=0,1. \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Bu eşitsizliklerden ve V kümesinin yapısından onun konveks olduğu çıkar, yani herhangi $v^0, v^1 \in V$ ve $\forall \theta \in [0,1]$ için $\theta v^0 + (1-\theta)v^1 \in V$ bağıntısının geçerliliğini elde ederiz. Böylece, V kümesinin konveksliği ispatlandı. O zaman $v^* \in V$ ve herhangi $v \in V$ için aşağıdaki bağıntının geçerli olduğu açıktır:

$$v^* + \theta(v - v^*) \in V, \forall \theta \in (0,1). \quad (3.3.27)$$

Şimdi $J_a(v^* + \theta(v - v^*)) - J_a(v^*)$ farkını ele alalım. Bu fark için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$J_a(v^* + \theta(v - v^*)) - J_a(v^*) \geq 0, \forall v \in V. \quad (3.3.28)$$

Teorem 3.3.2 sayesinde, $J_a(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir. Bu taktirde (3.3.28) eşitsizliğinden yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$0 \leq J_a(v^* + \theta(v - v^*)) - J_a(v^*) = \langle J'_a(v^*), \theta(v - v^*) \rangle_B + o(\theta), \forall v \in V. \quad (3.3.29)$$

Burada

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{o(\theta)}{\theta} = 0. \quad (3.3.30)$$

(3.3.29) eşitsizliğinden aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\theta \langle J'_a(v^*), (v - v^*) \rangle_B + o(\theta) \geq 0, \forall v \in V. \quad (3.3.31)$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\theta > 0$ ile bölüp $\theta \rightarrow +0$ için limite geçerse, aşağıdaki eşitsizliğin geçerliliğini elde ederiz:

$$\langle J'_a(v^*), (v - v^*) \rangle_B \geq 0, \forall v \in V.$$

Bu eşitsizlikte, $v = v^*$ olduğunda Teorem 3.3.2' deki $J_a'(v)$ gradyenti için olan formülleri ve $B = L_\infty(0, T) \times L_\infty(0, T)$ uzayındaki fonksiyonelin integral gösterimini kullanarak, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\int_0^T \left[\int_0^l \operatorname{Re}(\psi^*(x, t) \bar{\Phi}^*(x, t)) dx + 2a(v_0^*(t) - \omega_0(t)) \right] (v_0(t) - v_0^*(t)) dt$$

$$+ \int_0^T \left[- \int_0^l \operatorname{Im}(\psi^*(x, t) \bar{\Phi}^*(x, t)) dx + 2a(v_1^*(t) - \omega_1(t)) \right] (v_1(t) - v_1^*(t)) dt \geq 0, \forall v \in V.$$

Burada $\psi^*(x, t) \equiv \psi(x, t; v^*)$, $\Phi^*(x, t) \equiv \Phi(x, t; v^*)$ fonksiyonları sırasıyla (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer ve (3.3.1)-(3.3.3) eşlenik problemlerin $v^* \in V$ 'ye karşılık gelen çözümleridir. Teorem 3.3.3 ispatlandı.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada özel gradyent terimli zamana bağlı kompleks potansiyele sahip lineer durgun olmayan Schrödinger denklemi için final kriterli optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Tezin 3.1 alt bölümünde ele alınan optimal kontrol probleminin çözümünü varlığı ve tekliği teoremi ispatlanmıştır. 3.2 alt bölümünde opimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğu gösterilmiştir. Tezin 3.3. alt bölümünde ise söz konusu optimal kontrol probleminde ilk önce yer alan amaç fonksiyonelinin Frechet anlamında diferensiyellenebilir olduğu incelenmiş ve fonksiyonelin gradyenti için formül elde edilmiştir. Bu alt bölümde sonra elde edilen formülden yararlanılarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanmıştır.

Kontroller zamana bağlı ölçülebilir sınılı fonksiyonlar olduğunda özel gradyent terim içeren lineer durgun olmayan Schrödinger denklemi için final kriterli optimal kontrol problemleri önceden incelenmediğinden sunulan tez çalışmasının konusunun güncel olduğu, çalışmanın gerek teorik gerekse de pratik açıdan önem arz ettiği ve elde edilen sonuçların yeni olduğu ve de bir önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlarla örtüşmediği görülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Butkovsky A.G., Samoylenko Yu.I. (1984) Kuantum mekaniksel süreçlerin kontrolü. M: Nauka, 256 s. (Rusça)
- [2] Vorontsov M.A., Shmalgauzen V.I. (1985) Adaptif optiğin prensipleri. M: Nauka, 366 s. (Rusça)
- [3] Zhuravlev V.M. (2001) Dispersiyonlu çok bileşenli sistemlerde doğrusal olmayan dalgalar ve difüzyon. Ulyanovsk, UIGU, 200 s. (Rusça)
- [4] Akbaba G.D. (2011) Sanal katsayılı gradyent terimli Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli ile optimal kontrol problemi, Yüksek Lisans Tezi, Kars, 71 s.
- [5] Yagubov G., Toyoğlu F., Subaşı M. (2012) An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation // Applied Mathematics and Computation, vol:218, iss.11, pp. 6177-6187.
- [6] Iskenderov A.D., Yagubov G.Ya. (1988) A variational method for solving of the inverse problem of determining the quantum-mechanical potential // Dokl. AN USSR, vol.303, No 5, pp. 1044–1048. (in Russian)
- [7] Iskenderov A.D., Yagubov G.Ya. (1989) Optimal control of non-linear the quantum-mechanical systems // Automatic and telemechanics, No12, pp. 27–38. (in Russian)
- [8] Yagubov G.Ya., Musayeva M.A (1997) On the identification problem for nonlinear Schrödinger equation // Differential equations, vol.3, No 12, pp. 1691–1698. (in Russian)

- [9] Baudouin L., Kavian O., Puel J.P. (2005) Regularity for a Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control // J. DifferentialEquations, 2005, 216, p.188-222.
- [10] Isgandarov A., Yagubov G. (2007) Optimal control problem with unbounded potential for multidimensional, nonlinear and nonstationary Schrodinger equation. //Proceeding of the Lankaran State University, Natural sciences series, pp.3-56.
- [11] İskenderov A.D., Yagubov G.Ya., (2012) Musaeva M.A. Kuantum mekanik potansiyellerin identifikasyonu. Bakü, Çavıroğlu, 548 s.
- [12] Ibragimov N.S. (2010) On the existence of a solution to the identification problem based on the final observation for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation. Nauchnye Trudy, Azerb. Tech. Univ., Ser. Fundamental Sciences, No.2, pp.75-83. (in Russian)
- [13] Ibragimov N.S. (2011) On one identification problem for a one-dimensional nonlinear stationaryquasi-optic equation. Tavricheskiy Vestnik Informatiki i Matematiki, No.2, pp.17-29.(in Russian)
- [14] Ibragimov N.S. (2012) The identification problem based on the final observation for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. Problems of Control and Informatics, No.4, pp.15-27.(in ussian)
- [15] Paşayev A.M., İskenderov A.D., Yagubov G.Y., Musaeva M.A. (2020) Variation method solving of the inverse problems for Schrödinger-type equation // J. Inverse Ill Posed Probl.,doi.org/10.1515/jiip-2020-0095, 12 p.
- [16] Iskenderov A.D., Yagub G., Y. Aksoy N. (2015) An optimal control problem for a two-dimensional nonlinear Schrödinger requation with a spesial gradient terms//

Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15, pp.27-28.

- [17] İskenderov A.D., Yagub G., Zengin M. (2016) Optimal control problem for nonlinear Schrödinger equation with spesial gradient terms. Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27, pp.79-80.
- [18] Yagub G., İbrahimov N., Musayeva M. Zengin M. (2017) Lineer olmayan kısımda kompleks katsayı olan lineer ve durgun olmayan Schrödinger denkleminde kuantum potansiyelinin bulunması hakkında ters problemin çözümünün varyasyon yöntemi // Lankaran Devlet Universitesinin Haberleri, Doğa bilimleri, Seri 2, s. 7-30.
- [19] İskenderov A.,Yagub G., Salmanov V., Aksoy Y.N. (2019) Optimal control problem for a nonlinear Schrödinger equation with a special gradient term and with complex potential // Scientific Works of Nakhchivan State University, series of physical mathematical and technical sciences, No: 4(101), s. 32-44.
- [20] M. Zengin, N.S. İbrahimov, G. Yagub (2021) Existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem with boundary functional for nonlinear stationary quasi-optical equation with a special gradient term // Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Naturl sciences series, № 1, pp. 27-42.
- [21] G.Yakub, N.S. İbrahimov, M.Zengin (2021) Optimal control problem for the stationary quasi-optics equation with a special gradient term // Advanced Mathematical Models and Applications, Vol. 6, № 3, pp. 252-265.
- [22] Zengin M. (2021) Özel gradyant terimli lineer ve lineer olmayan çok boyutlu Schrödinger denklemleri için sınır fonksiyonelli optimal kontrol problemlerinin iyi konulması ve çözümü için gerek şart, Doktora Tezi, Kars, 263 s.

- [23] N.Y. Aksoy, E. Celik, and M. Zengin (2022) On optimal control of a charged particle in a varying electromagnetic field // Waves in Random and Complex Media, DOI:10.1080/17455030.2022.2142695, 16 p.
- [24] Ladyzhenskaya O.A. (1973) Matematiksel fiziğin sınır değer problemleri. M: Nauka, 1973, 408 s. (Rusça)
- [25] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. (1967) Lineer ve kuazi lineer paraoluk denklemler. M: Nauka, 736 s.(Rusça)
- [26] Lions J.-L., Magenes E. (1972) Non-homogeneous boundary value problems and applications -vol. 2. Berlin, 307 p.
- [27] Vasilyev F.P. (1981) Ekstremal problemlerin çözüm yöntemleri. M.: Nauka, 1981, 400 s. (Rusça)
- [28] Goebel M. (1979) On existence of optimal control // Math. Nachr.,vol. 93, p. 67-73.
- [29] Ibragimov N.S. (2010) Solvability of initial-boundary value problems for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. News of Baku State University, Ser. Phys. Math. Sciences, No.3, pp.72-84. (in Russian).
- [30] Ibragimov N.S. (2010) Solvability of initial-boundary value problems for a linear stationary equation of quasi-optics // International Journal of Caucasian University, Mathematics and Informatics, Vol.1, No.29, pp.61-70. (in Russian).
- [31] Yagub G., Ibrahimov N.S, Zengin M. Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with a spesial gradient terms // Abstracts of the XXVInternational Conference Problemsof Decision Making

under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15, 2015-pp.53-54.

- [32] Yagub G., İbrahimov N.S., Aksoy N.Y. (2016) On the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with special gradient terms // Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27, pp.170-171.
- [33] Yagub G., Salmanov V., Yagubov V., Zengin M. (2017) Lineer olmayan iki boyutlu Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümü // Nakhçıvan Devlet Üniversitesinin Bilimsel Eserleri. Fizik-Matematik ve Teknik Bilimler Serisi, № 4(85), s. 7-21. (Rusça)
- [34] Yagub G., İbrahimov N.S. and Zengin M. (2018) The solvability of the initial-boundary value problems for a nonlinear Schrodinger equation with a special gradient term // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, № 2, pp. 214-232.
- [35] İskenderov A., Yagub G., Salmanov. V (2018) Özel bir gradyan terimli ve kompleks potansiyelli lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıçsınır değer probleminin çözülebilirliği // Nahçıvan Devlet Üniversitesinin Bilimsel Eserleri, Fizik, Matematik ve Teknik Bilimler Serisi, Sayı 4 (93), s. 28-43 (Rusça)
- [36] Yagub G., Ibrahimov N., Suleymanov N.(2022)The second initial-boundary value problem for a linear one-dimensional Scrhödinger equation with a special gradient term and time dependent measurable boundary complex potential // Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Natural sciences series, 1, pp. 13-30. (Rusça)
- [37] Lions J.-L. (1987) Dağılmış parametrelili singular sistemlerin kontrolü. M.: Mir, 308 s. (Rusça)

[38] Yosida K. (1967) Fonksiyonel analiz. Moskova: Mir, 624 s. (Rusça)

