



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**TÜMEL MANİFOLDU YEREL KONFORMAL KAEHLER
MANİFOLD OLAN KISMİ-EĞİK ALTDALDIRMALAR**

Deniz ULUSOY

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

Mayıs, 2024

İSTANBUL

Bu çalışma 28.05.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Fatma KARACA
Beykent Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Sibel GERDAN AYDIN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda destek olan, bilgi birikimiyle yoluma ışık saçı saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN'a sevgi ve saygılarımı sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca desteklerini esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Beran PİRİNÇÇİ'ye ve Dr. Öğr. Üyesi Sibel GERDAN AYDIN hocalarıma, birlikte dayanışma içerisinde çalıştığım arkadaşım Araş. Gör. Çağrıhan ÇİMEN'e teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan, beni her konuda destekleyen sevgili babam Cengiz ULUSOY'a ve sevgili annem Elif ULUSOY'a teşekkür ederim.

Üniversitemin bana kattığı, omuz omuza çalıştığım, her zaman yanımda olan ve beni cesaretlendiren sevgili arkadaşlarım, Ahmet Emre KAYNAR'a, Havva Nur ÖZTÜRK'e, Araş. Gör. Seren UÇAR'a ve Seyit KOCA'ya teşekkür ederim.

Bu tezi 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı gereğince destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na teşekkür ederim.

Mayıs, 2024

Deniz ULUSOY

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	x
1 GİRİŞ	1
2 GENEL KISIMLAR	2
2.1 RIEMANNİYEN MANİFOLDLAR	2
2.1.1 Riemanniyen Altmanifoldlar	4
2.2 KAEHLERİYEN MANİFOLDLAR	8
2.2.1 Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar	8
2.2.2 Kaehleriyen Altmanifoldlar	10
2.2.3 Kahleriyen Manifoldların Kısmi-Eğik Altmanifoldları	11
2.3 YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLDLAR	11
2.4 ALTDALDIRMALAR	14
2.4.1 Riemmaniyen Altdaldırmalar	14
2.4.2 Kısmi-Eğik Altdaldırmalar	15
3 MALZEME VE YÖNTEM	21
4 BULGULAR	22
4.1 TÜMEL MANİFOLDU YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLD OLAN KİSMİ-EĞİK ALTDALDIRMALAR	22
4.2 CLAIRAUT KİSMİ-EĞİK ALTDALDIRMALAR	38
4.3 CHEN-RICCI EŞİTSİZLİĞİ	41
5 TARTIŞMA VE SONUÇ	46
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	51

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{R}^m$	: m boyutlu Öklid uzayı
M_1	: Diferansiyellenebilir manifold
$T_p M_1$	: p noktasındaki teğet uzay
I	: Özdeşlik dönüşümü
C^∞	: Her mertebeden diferansiyellenebilirlik sınıfı
$\mathfrak{X}(M_1)$	: M_1 üzerinde tanımlı vektör alanlarının kümesi
∇	: Manifold üzerindeki koneksiyon
π	: Dönüşüm
π_*	: Türev dönüşümü
$\mathcal{C}ek\pi_*$	: π Dönüşümünün dikey dağılımı
$(\mathcal{C}ek\pi_*)^\perp$	: π Dönüşümünün yatay dağılımı
$\mathcal{D}^\theta$	: Eğik dağılım
$\mathcal{D}^\perp$	: Ters-değişmez dağılım
J	: Hemen hemen kompleks yapı
R	: Riemann eğrilik tensörü
$\hat{R}$	: Yatay dağılım $(\mathcal{C}ek\pi_*)^\perp$ üzerindeki Riemann eğrilik tensörü
S	: Ricci tensörü
τ	: Skaler eğrilik

Kısaltmalar	Açıklama
$y.k.K$	: yerel konformal Kaehler
$g.k.K$	: global konformal kaehler
$h.h.H$	: hemen hemen Hermityen
$h.h.k$	: hemen hemen kompleks
$g.y.k$	: gerek ve yeter koşul

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TÜMEL MANİFOLDU YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLD OLAN KİSMİ-EĞİK ALTDALDIRMALAR

Deniz ULUSOY

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

Bu tezin amacı tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmaların geometrisini incelemektir.

Bu tez beş ana bölümden oluşmakla beraber, ikinci ve dördüncü ana bölümlerde alt bölümler bulunmaktadır. Birinci bölümde bu tez için gerekli olan ve sıkça kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmektedir.

İkinci bölümde bu tezin yapı taşlarını oluşturan yapılar beş alt bölüm ile verilmiştir. Birinci alt bölümde Riemanniyen manifoldlar teorisinin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Bu bölümde Riemanniyen altmanifoldlardan bahsedilmiştir. İkinci alt bölümde Kaehleriyen manifoldların temel tanım ve teoremleri verildikten sonra hemen-hemen kompleks manifoldlardan, Kaehleriyen altmanifoldlardan ve tezin odak noktası olan kısmi-eğik altmanifoldlardan bahsedilmiştir. Daha sonra, üçüncü alt bölümde tezin ana kısmının tümel uzayı olan yerel konformal Kaehler manifoldlar hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü alt bölümde ise odak noktamız olan kısmi-eğik altdaldırmalar için Riemanniyen altdaldırmalardan ve tümel manifoldu Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar hakkında temel kavramlar verilmiş ve bu konularda daha önce üzerine çalışılmış tanım ve teoremler verilmiştir. Son alt bölümde kısaca Chen-Ricci eşitsizliğinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, bu tezi yazmak için kullanılan yöntemler ve faydalandığımız kaynaklardan bahsedilmiştir.

Tezin ana kısmını oluşturan dördüncü bölümde, tümel uzayı yerel konformal Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar çalışılmıştır. Eğik dağılımın, ters-değişmez dağılımın, yatay ve dikey dağılımların integrallenebilirliği ve jeodezikliği için koşullar verilmiştir. Daha sonrasında bir kısmi-eğik altdaldırmanın Clairaut olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Son olarak ise tümel manifoldu Hopf uzay form olan bir kısmi-eğik altdaldırma için Chen-Ricci eşitsizliği inşa edilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde, bu tezin değerlendirilmesi yapılmaktadır.

Mayıs 2024, 62 sayfa.

Anahtar kelimeler: yerel konformal Kaehler manifold, kısmi-eğik altdaldırma, yatay dağılım, dikey dağılım, ters-değişmez dağılım, eğik dağılım.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

HEMI-SLANT SUBMERSIONS WHOSE TOTAL MANIFOLDS ARE LOCALLY CONFORMAL KAEHLER MANIFOLDS

Deniz ULUSOY

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

The aim of this thesis is to study the geometry of hemi-slant submersions whose total manifold is a locally conformal Kaehler manifold.

This thesis consists of five main chapters, with subsections within the second and fourth chapters. The first chapter gives the essential definitions and concepts frequently used in this thesis.

In the second chapter, the structures of this thesis are presented in five subsections. The first subsection introduces the fundamental definitions and theorems of Riemannian manifolds, including discussions on Riemannian submanifolds. The second subsection discusses the basic definitions and theorems of Kaehler manifolds, followed by discussions on almost complex manifolds, Kaehlerian submanifolds and the focal point of this thesis, hemi-slant submanifolds. Subsequently, the third subsection provides information on locally conformal Kaehler manifolds, which are the total space of the thesis. In the fourth subsection, foundational concepts for hemi-slant submersions are discussed, including Riemannian submersions and hemi-slant submersions whose total manifold is a Kaehler manifold, along with previously studied definitions and theorems in these areas. The final subsection briefly mentions the Chen-Ricci inequality.

In the third chapter, the methods employed in writing this thesis and the sources utilized are discussed.

The fourth chapter, which constitutes the main part of the thesis, focuses on hemi-slant submersions whose total manifold is a locally conformal Kaehler manifolds. Conditions are provided for the integrability and geodesicity of the slant distribution, anti-invariant distribution, horizontal and vertical distributions. Subsequently, a necessary and sufficient condition is given for a hemi-slant submersion to be Clairaut. Finally, the Chen-Ricci inequality is developed for a partial slant submersion whose total manifold is in the form of a Hopf space.

Lastly, in the fifth chapter, an evaluation of this thesis is presented.

May 2024, 62 pages.

Keywords: local conformal Kaehler manifold, hemi-slant submersion, horizontal distribution, vertical distribution, anti-invariant distribution, slant distribution.

1 GİRİŞ

Diferansiyel geometride popüler olan altmanifoldlar teorisinin önemli alt dallarından birisi Riemanniyen altdaldırmalardır. Bu altdaldırmalar altmanifoldlar arası ilişkiyi geometrik olarak inceleyebilmemize olanak sağlar.

En temel altdaldırma tipi olan Riemanniyen altdaldırmalar ilk kez O'Neill [11] ve Gray [8] tarafından tanımlanmış, Watson [25] tarafından hemen hemen Hermityen manifoldlar üzerinde Riemanniyen altdaldırmalar çalışmıştır. Özel olarak bu altdaldırmalara hemen hemen Hermiyen altdaldırmalar demiştir. Bu altdaldırma tipinin en karakteristik özelliği yatay ve dikey vektör alanları, altdaldırmalarının tümel manifoldunun kompleks yapı altında değişmez kalmasıdır.

Tümel manifoldun yerel konformal Kaehler manifold olarak değişmesiyle elde edilmiş olan yerel konformal Kahler altdaldırmalar Marrero ve Rocha [10] tarafından çalışılmıştır.

Daha sonra hemen hemen Hermityen altdaldırma tipleri ters-değişmez altdaldırma, yarı-değişmez altdaldırma, eğik altdaldırma, yarı-eğik altdaldırma, kısmi-eğik altdaldırma ve kapsamlı altdaldırma çeşitleri olarak çalışılmıştır. Bu altdaldırma tiplerinde Şahin tarafından ters değişmez altdaldırma [16], yarı değişmez altdaldırma [19] ve eğik altdaldırma [17] tipleri çalışılmıştır. Park ve Prasad [13] yarı-eğik altdaldırmaları, Taştan ve diğ. [21] kısmi-eğik altdaldırmalar ve Sayar ve diğ. [20] kapsamlı altdaldırma için bir çalışma yapmıştır.

Bu tezde geometrisini incelediğimiz altdaldırma tipi ise tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalardır.

2 GENEL KISIMLAR

2.1 RIEMANNİYEN MANİFOLDLAR

Bu kısımda tezin yapı taşları olan Riemanniyen manifoldlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.1.1. [18] M_1 bir m boyutlu manifold olsun. $\mathfrak{X}(M_1)$, M_1 manifoldunun teğet vektör alanlarının kümesi olmak üzere,

$$g : \mathfrak{X}(M_1) \times \mathfrak{X}(M_1) \rightarrow C^\infty(M_1)$$

$(0,2)$ -tipinden bir tensör alanı olmak üzere, g metriği

a) $g(G, Z) = g(Z, G),$

b) $g(G, G) \geq 0$ ve $g(G, G) = 0 \Leftrightarrow G = 0,$

koşullarını sağlıyorsa, yani simetrik ve pozitif tanımlı ise g tensör alanına *Riemanniyen metrik* veya *metrik tensör* adı verilir, burada herhangi $G, Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ vektör alanlarıdır. Bu durumda (M_1, g) ikilisine bir *Riemanniyen manifold* denir.

Tanım 2.1.2. [18] (M_1, g) bir Riemanniyen manifold olmak üzere, M_1 üzerinde tanımlı bir ∇ koneksiyonu, M_1 manifoldu üzerindeki herhangi G, Z ve Y vektör alanları için,

$$G[g(Z, Y)] = g(\nabla_G Z, Y) + g(Z, \nabla_G Y) \quad (2.1)$$

koşulunu gerçeklerse, bu ∇ koneksiyonuna g ile uyumlu koneksiyon denir.

Lemma 2.1.3. [12] (M_1, g) bir Riemanniyen manifold olsun. Herhangi bir $E \in \mathfrak{X}(M_1)$ için,

$$G^*(F) = g(G, F)$$

koşulunu sağlayan bir 1- form olsun. Böylece $E \rightarrow G^*$ in, $\mathfrak{X}(M_1)$ den $\mathfrak{X}^*(M_1)$ ye giden bir $\mathfrak{F}(M_1)$ - lineer izomorfizm olduğu aşıkardır.

Teorem 2.1.4. [12] (M_1, g) bir Riemanniyen manifold olsun. $\forall G, Z \in \mathfrak{X}(M_1)$,

$$[G, Z] = \nabla_G Z - \nabla_Z G \quad (2.2)$$

ve

$$G[g(Z, Y)] = g(\nabla_G Z, Y) + g(Z, \nabla_G Y) \quad (2.3)$$

eşitliklerini sağlayan sadece bir ∇ koneksiyonu vardır ve bu ∇ koneksiyonuna M_1 manifoldunun *Levi-Civita* ya da *Riemann koneksiyonu* denir. Dahası bu ∇ koneksiyonu aşağıda verilen Koszul formülü ile irdelenebilir.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_G Z, Y) = & Eg(Z, Y) + Zg(Y, G) - Yg(G, Z) \\ & - g(G, [Z, Y]) + g(Z, [Y, G]) + g(Y, [G, Z]). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Tanım 2.1.5. [12] (M_1^m, g_M) bir Riemanniyen manifold ve ∇ , M_1 manifoldu üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olsun. M_1 manifoldu üzerinde herhangi $G, Z, Y \in \mathfrak{X}(M_1)$ için

$$R(G, Z)Y = \nabla_G \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_G Y - \nabla_{[G, Z]} Y \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanan $R : \mathfrak{X}(M_1) \times \mathfrak{X}(M_1) \times \mathfrak{X}(M_1) \rightarrow \mathfrak{X}(M_1)$ olmak üzere $(1, 3)$ -tipindeki tensör alanına *Riemann eğrilik tensörü* denir.

Teorem 2.1.6. [12] (M_1, g) bir Riemanniyen manifold olsun. R , ∇ koneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörü olmak üzere,

- a) $R(w, u) + R(u, w) = 0$,
- b) $R(w, u; z, v) + R(w, u; v, z) = 0$,
- c) $R(w, u)z + R(u, z)w + R(z, w)u = 0$,
- d) $R(w, u; z, v) = R(z, v; w, u)$,

sağlanır, burada $R(w, u; z, v) = g(R(w, u)z, v)$, $p \in M_1$ ve $w, u, z, v \in T_p M_1$ dir.

Tanım 2.1.7. [24] (M_1, g) bir Riemanniyen manifold olsun. Bu durumda

$$S(Z, Y) = \sum_{i=1}^m g(R(G_i, Z)Y, G_i) \quad (2.6)$$

$(0, 2)$ -tipinden bir simetrik tensör alanıdır ve M_1 manifoldunun *Ricci tensörü* denir. Bu tensörü kullanarak,

$$\tau = \sum_{i=1}^m S(G_i, G_i) \quad (2.7)$$

M_1 manifoldunun *skaler eğriliğini* tanımlayabiliriz, burada $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$, M_1 üzerindeki yerel ortonormal çatı alanıdır.

Tanım 2.1.8. [24] (M_1, g) bir Riemanniyen manifold olsun. G ve Z vektör alanları ile gerilen düzlem kesiti için M_1 manifoldunun *kesitsel eğriliği*

$$K(G, Z) = \frac{R(G, Z; Z, G)}{g(G, G)g(Z, Z) - g^2(G, Z)} \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Eğer tüm düzlem kesitleri için kesitsel eğrilik k sabitine eşit ise M_1 manifolduna *sabit eğrilikli uzay* ya da *reel uzay form* denir ve $M_1(k)$ ile gösterilir. Burada G ve Z lineer bağımsız vektör alanıdır.

2.1.1 Riemanniyen Altmanifoldlar

Bu bölümde Riemannian manifoldlarının altmanifoldları için temel tanımlar ve teoremler gösterilecektir.

Tanım 2.1.9. [18] (M_1, g) ve $(\bar{M}_1, \bar{g})$ Riemanniyen manifoldlar olsun. Herhangi $p \in M_1$ için $\varphi : M \rightarrow \bar{M}_1$ dönüşümü $\forall G_p, Z_p \in T_p M_1$ olmak üzere,

$$g(G_p, Z_p) = \bar{g}(d\varphi_p(G), d\varphi_p(Z))$$

koşulunu sağlıyorsa φ ye *izometrik dönüşüm* denir. Bu durumda,

a) Eğer $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} \bar{M}_1$ injektifse, φ 'ye bir *daldırma* denir.

b) Eğer φ daldırması injektif ise φ 'ye bir *gömme* denir.

c) Eğer φ biyektif ve φ^{-1} düzgün ise φ 'ye bir *diffeomorfizm* denir.

Tanım 2.1.10. [12] M_1 ve $\bar{M}_1$ birer Riemanniyen manifold olsun. Eğer,

a) M_1 , $\bar{M}_1$ manifoldunun topolojik bir altuzayı,

b) $\varphi : M_1 \rightarrow \bar{M}_1$ dönüşümü diferansiyellenebilir ve keyfi $p \in M_1$ noktasında diferansiyel dönüşümü injektif ise M_1 manifoldunun $\bar{M}_1$ manifoldunun *diferansiyellenebilir altmanifoldu* denir.

Tanım 2.1.11. [18] (M_1, g) , $(\bar{M}_1, \bar{g})$ manifoldunun bir altmanifoldu, $j : M_1 \rightarrow \bar{M}_1$ içerme fonksiyonu ve $\bar{\mathcal{O}}$, $\bar{M}_1$ nin bir civarı (komşuluğu) olsun. $\mathcal{O} = M_1 \cap \bar{\mathcal{O}}$ olmak üzere, M_1 deki herhangi bir p için $di_p(V) = \bar{V}_p$ koşulunu gerçekleyen $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{\mathcal{U}})$ vektör alanına $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{O})$ alanının *diferansiyellenebilir genişlemesi* denir.

$p \in M_1$ noktasında M_1 altmanifoldunun teğet uzayı $T_p M_1$ ile, $\bar{M}_1$ manifoldunun teğet uzayı da $T_p \bar{M}_1$ ile gösterilsin. $T_p M_1$ uzayı $T_p \bar{M}_1$ uzayının alt uzayıdır. $T_p \bar{M}_1$ uzayının dik tamlayan uzayına $T_p M_1^\perp$ *normal uzay* bu uzayın ortaya çıkarttığı demete de *normal demet* denir. $T_p \bar{M}_1$ uzayı için,

$$T_p \bar{M}_1 = T_p M_1 \oplus T_p M_1^\perp \quad (2.9)$$

olacak şekilde direkt toplamı olarak yazabiliriz ya da

$$T \bar{M}_1 = T M_1 \oplus T M_1^\perp \quad (2.10)$$

olarakta yazabiliriz.

$T_p M_1^\perp$ den aldığımız vektörlere *normal vektör* denir. Normal vektörler birim vektör ise bu vektörlere de *birim normal vektör* denir. Normal vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}(M_1)^\perp$ ile gösterilir.

$\bar{M}_1$ manifoldunun üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ile gösterilsin. Manifoldun teğet vektör alanlarına dik olan vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}(M_1)^\perp$ olmak üzere, keyfi $G, Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ ve $N \in \mathfrak{X}(M_1)^\perp$ vektör alanları için,

$$(\bar{\nabla}_G Z)^T = \nabla_G Z \quad (2.11)$$

ve

$$(\bar{\nabla}_G Z)^\perp = (\nabla_G N)^\perp \quad (2.12)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $(\bar{\nabla}_G Z)^T$, $(\bar{\nabla}_G Z)$ nin teğet, $(\nabla_E F)^\perp$ de $(\nabla_G N)$ nin normal bileşenidir. Şimdi (2.11) ve (2.12) eşitliklerini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$\bar{\nabla}_G Z = \nabla_G Z + h(G, Z) \quad (2.13)$$

ve

$$\bar{\nabla}_G N = -A_N G + (\nabla_G N)^\perp, \quad (2.14)$$

(2.13) eşitliğine *Gauss formülü*, (2.14) eşitliğine de *Weingarten formülü* denir. Burada $h(G, Z) = (\bar{\nabla}_G Z)^\perp$ ve $(\nabla_G N)^T = -A_N G$ ile tanımlanır ve $h : \mathfrak{X}(M_1) \times \mathfrak{X}(M_1) \rightarrow \mathfrak{X}(M_1)^\perp$ tensörü (0,2)-tipinde simetrik ve bilineer tensör alanı olup M_1 nin *ikinci temel formu*, $A_N : \mathfrak{X}(M_1) \rightarrow \mathfrak{X}(M_1)$ dönüşümü (1,1)-tipinde tensör alanı olup *şekil operatörü* olarak adlandırılır.

A şekil operatörü h ikinci temel formu ile aşağıdaki gibi ilişkilendirilebilir.

$$g(A_N G, Z) = g(h(G, Z), N). \quad (2.15)$$

Tanım 2.1.12. [24] $(\bar{M}_1, \bar{g})$ manifoldunun eğrilik tensörü $\bar{R}$, (M_1, g) manifoldunun eğrilik tensörü de R olsun. $G, Z, Y \in \mathfrak{X}(M_1)$ olmak üzere,

$$(\nabla_G h)(Z, Y) = (\nabla_G^\perp)(h(Z, Y)) - h(\nabla_G Z, Y) - h(Z, \nabla_G Y) \quad (2.16)$$

dir ve Weingarten A_N tensörünü de

$$(\nabla_G A_N)Z = \nabla_G(A_N Z) - A(\nabla_N)^\perp Z - A_N \nabla_G Z \quad (2.17)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan Gauss ve Weingarten formüllerini kullanarak

$$\bar{R}(G, Z)Y = R(G, Z)Y - A_{h(G, Z)}G + A_{h(G, Y)}Z + (\nabla_G h)(Z, Y) - (\nabla_Z h)(G, Y) \quad (2.18)$$

ve (2.13) denklemi, (2.18) ile birlikte,

$$g(\bar{R}(G, Z)Y, V) = g(R(G, Z)Y, V) - g(h(G, V), h(Z, Y)) + g(h(Z, V), h(G, Z)) \quad (2.19)$$

herhangi bir V vektör alanı için tanımlanır ve bu denkleme *Gauss denklemi* denir. (2.18) denkleminin normal bileşenlerini alırsak

$$(\bar{R}(G, Z)G)^\perp = (\nabla_G h)(Z, Y) - (\nabla_Z h)(G, Y) \quad (2.20)$$

denklemi elde edilir ve bu denkleme *Codazzi denklemi* denir. (M_1, g) manifoldunun normal demetinin eğrilik tensörü $R^\perp$ olsun,

$$R^\perp(G, Z)N = \nabla_G^\perp \nabla_Z^\perp N - \nabla_Z^\perp \nabla_G^\perp N - \nabla_{[G, Z]} N \quad (2.21)$$

iken yine (2.13) ve (2.14) denklemlerini kullanarak,

$$\bar{R}(G, Z)N = R^\perp(G, Z)N - h(G, A_N Z) + h(Z, A_N G) - (\nabla_G A_N)Z + (\nabla_Z A_N)G \quad (2.22)$$

yazılabilir. Şimdi W , (M_1, g) manifolduna normal bir vektör alanı, $[A_W, A_N] = A_W A_N - A_N A_W$ olmak üzere,

$$g(\bar{R}(G, Z)N, W) = g(R^\perp(G, Z)N, W) + g([A_W, A_N]G, Z) \quad (2.23)$$

elde edilir ve bu denkleme *Ricci denklemi* denir.

Şimdi gerekli tanımları verelim;

Tanım 2.1.13. [24] (M_1, g) manifoldu, $(\bar{M}_1, \bar{g})$ manifoldunun m_1 boyutlu bir altmanifoldu olsun. M_1 manifolduna teğet ortonormal çatı alanı $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ ve h de M_1 manifoldunun ikinci temel formu olmak üzere,

$$H = \frac{1}{m_1} \text{iz}(h) = \sum_{i=1}^{m_1} h(G_i, G_i) \quad (2.24)$$

vektör alanına *ortalama eğrilik vektör alanı* denir. Eğer $h = 0$ ise (M_1, g) manifolduna *tümel jeodezik*, $H \equiv 0$ ise (M_1, g) manifolduna *minimal altmanifold* denir. $h(G, Z) = g(G, Z)H$ ise de M_1 ye *tümel umbilik altmanifold* denir, burada $G, Z \in TM_1$ dir.

Tanım 2.1.14. [18] M_1 bir manifold olsun. M_1 manifoldu üzerindeki her x noktasına $T_x M_1$ teğet uzayının k_1 -boyutlu bir $\mathcal{D}_{k_1}$ altuzayına tanımlayan $\mathcal{D}$ dönüşümüne M_1 manifoldu üzerinde bir *dağılım* denir. Keyfi $y \in M_1$ için, M_1 manifoldu bir $\mathcal{O}$ civarına sahip olup bu civarındaki y noktasında $\mathcal{D}_y$ altuzayının bazı olarak tanımlayabileceğimiz $U_1, U_2, \dots, U_{k_1}$ düzgün vektör alanları var ise $\mathcal{D}$ altuzayına k_1 -boyutlu bir *diferansiyellenebilir dağılım* denir. Her x noktası için U_x , $\mathcal{D}_x$ dağılımının elemanı ise U vektör alanı $\mathcal{D}$ dağılımına aittir denir. Herhangi $U, V \in \mathcal{D}$ için, $[U, V] \in \mathcal{D}$ oluyorsa $\mathcal{D}$ dağılımına *involutif* denir.

Tanım 2.1.15. [18] (M_1, g) , boyutu m_1 olan Riemanniyen manifold ve $\mathcal{D}_{k_1}, M_1$ manifoldunun k_1 -boyutlu bir dağılımı olsun. N_1, M_1 Riemanniyen manifoldunun bir altmanifold olmak üzere, keyfi bir $y \in N_1$ için $T_y N_1$ ile $\mathcal{D}_{k_1}$ dağılımı eşit ise, N_1 altmanifolduna $\mathcal{D}$ dağılımının *integral manifoldu* denir. Aynı zamanda N_1 altmanifoldu $\mathcal{D}$ nin tek integral manifoldu ise o halde N_1 altmanifolduna $\mathcal{D}$ dağılımının *maksimal integral manifoldu* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.16. [18] (M_1, g) , boyutu m_1 olan Riemanniyen manifold ve N_1, M_1 Riemanniyen manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer $y \in N_1$ için $\mathcal{D}$ dağılımının y noktasını içeren bir maksimal integral manifoldu varsa, $\mathcal{D}$ dağılımına *integrallenebilirdir* denir.

Teorem 2.1.17. (Frobenius Teoremi)[5] Bir M_1 manifoldunun üzerindeki $\mathcal{D}$ dağılımının integrallenebilir olması için g.y.k $\mathcal{D}$ dağılımının involutif olmasıdır.

M_1 manifoldu üzerindeki her x_1 noktası için, $\mathcal{D}$ dağılımını $T_{x_1} M_1$ tamamlayan dağılım $\mathcal{D}_x^\perp : x_1 \rightarrow \mathcal{D}_{x_1}^\perp \in T_{x_1} M_1$ biçiminde tanımlanır ve $\mathcal{D}$ nin tümleyen ortogonal dağılımı olarak adlandırılır.

2.2 KAEHLERİYEN MANİFOLDLAR

Bu bölümde Kaehleriyen manifoldlar için temel tanımlar ve teoremler sunulacaktır.

2.2.1 Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar

(M_1, g) bir m_1 boyutlu Riemanniyen manifold olsun. Keyfi $p \in M_1$ ve $F_p \in T_p M_1$ için

$$J_p^2(F_p) = -F_p \quad (2.25)$$

ile tanımlanan J endomorfizmine *hemen hemen kompleks yapı* denir. (M_1, g) manifoldu üzerinde bu yapıyı tanımlarsak bu manifoldda *hemen hemen kompleks manifold* denir ve (M_1, J, g) şeklinde gösterilir [24]. (2.25) ten dolayı J kompleks yapısının matrisini (J_i^j) ile gösterirsek $|(J_i^j)^2| = (-1)^m$ olur. Yani, (M_1, g) üzerinde h.h.k. yapının olması için g.y.k M_1 manifoldunun boyutunun çift olmasıdır [9].

Şimdi M_1 manifoldu üzerinde h.h.k yapı ile birlikte bir metrik tanımı verelim.

Tanım 2.2.1. [24] M_1 manifoldu üzerinde, J h.h.k. yapısı ve

$$g(JG, JZ) = g(G, Z) \quad (2.26)$$

koşulunu sağlayan herhangi G, Z vektör alanları için g Riemanniyen metriği tanımlansın. Bu metriğe *Hermityen metrik*, M_1 manifolduna *hemen hemen Hermityen manifold* denir.

Bir sonraki verilecek teoremde J h.h.k yapısının bazı özellikleri verilecektir.

Teorem 2.2.2. [24] (M_1, J, g) h.h.H manifold olsun. Herhangi $G, Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ olmak üzere, J h.h.k yapısı,

$$\mathbf{a)} \quad (\nabla_G J)Z = \nabla_G JZ - J\nabla_G Z$$

$$\mathbf{b)} \quad (\nabla_G J)JZ = -J(\nabla_G J)Z$$

$$\mathbf{c)} \quad g((\nabla_G J)Z, Y) = -g((\nabla_G J)Y, Z)$$

özelliklerini sağlar.

Tanım 2.2.3. [24] (M_1, J, g) h.h.H manifold olsun. Keyfi $G, Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ için,

$$\Phi(G, Z) = g(G, JZ) \quad (2.27)$$

olarak verilen yapıya (M_1, J, g) manifoldunun *temel formu* denir. Buradan,

$$\Phi(JG, JZ) = \Phi(G, Z) \quad (2.28)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi bu bu hemen hemen Hermityen manifoldu üzerinde tensör tanımlayacağız.

Tanım 2.2.4. [24] (M_1, J, g) h.h.H manifold olsun. Keyfi $G, Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ olmak üzere,

$$N(G, Z) = [JG, JZ] - J[G, JZ] - J[JG, Z] - [G, Z] \quad (2.29)$$

eşitliğine M_1 manifoldunun *Nijenhuis tensörü* adı verilir.

Tanım 2.2.5. [24] (M_1, J, g) h.h.H manifold olsun. Keyfi $G, Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ için,

$$(\nabla_G J)Z = 0 \quad (2.30)$$

eşitliği sağlanıyor ise yani, J paralel ise (M_1, J, g) manifolduna *Kaehleriyen manifold* denir.

Tanım 2.2.6. [7] (M_1, J, g) h.h.H manifoldu üzerinde tanımlanan N Nijenhuis tensörü özdeş olarak sıfıra eşitse yani herhangi $G, Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ için $N(G, Z) = 0$ ise bu hemen hemen Hermityen manifoldda *Hermityen manifold* denir.

2.2.2 Kaehleriyen Altmanifoldlar

Tanım 2.2.7. [24] $(\bar{M}_1, J, g)$ bir h.h.H manifold ve $M_1, \bar{M}_1$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall p \in M_1, T_p M_1$ teğet uzayı J h.h.k yapısı altında değişmezse, yani $J(T_p M_1) \subset T_p M_1$ oluyorsa, M_1 manifolduna $\bar{M}_1$ manifoldunun *değişmez altmanifoldu* denir.

Tanım 2.2.8. [24] $\forall p \in M_1, J(T_p M_1) \subset T_p M_1^\perp$ ise M_1 manifolduna $\bar{M}_1$ manifoldunun *ters-değişmez altmanifoldu* ya da *tümel gerçel altmanifoldu* denir.

Tanım 2.2.9. [3] M_1 manifoldu üzerinde bir p noktası için M_1 manifolduna teğet bir G vektör alanı olmak üzere JG ile $T_p M_1$ tanjant uzayı arasındaki açı $\theta(G)$ ile gösterilir. Bu oluşan açığa G nin *Wirtinger açısı* olarak adlandırılır ve $Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ için

$$\cos(\theta(G)) = \frac{|g(JG, Z)|}{|JG||Z|} \quad (2.31)$$

ile tanımlanır. Sıfırdan farklı G vektör alanı için Wirtinger açısı sabit ise bu durumda M_1 manifolduna $\bar{M}_1$ manifoldunun bir *eğik altmanifoldu* denir.

Yukarıdaki tanımla birlikte holomorfik ve ters-holomorfik altmanifoldların bir genellemesi yapılmaktadır. Wirtinger açısı $\theta = 0$ ise M_1 manifoldu *değişmez altmanifold*, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise *ters-değişmez altmanifold*dur. Eğer eğik altmanifold holomorfik altmanifold ya da ters-değişmez altmanifold değilse bu altmanifoldda *has altmanifold* denir.

2.2.3 Kahleriyen Manifoldların Kısmi-Eğik Altmanifoldları

M_1 manifoldu, $(\bar{M}_1, J, g)$ h.h.H manifoldunun bir altmanifoldu ve $\mathcal{D}$, M_1 manifoldu üzerinde bir dağılım olsun. $G \in \mathcal{D}$ olmak üzere, eğer JG ile $\mathcal{D}_p$ arasındaki açı sabit ve M üzerindeki p noktalarından ile E vektör alanlarından bağımsız ise $\mathcal{D}$ dağılımına *eğik dağılım* denir. $\mathcal{D}^\theta$ dağılımındaki θ sabit açısına da $\mathcal{D}$ dağılımının *eğik açısı* denir. Özel olarak, $\theta = 0$ ise *değişmez*, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise *ters değişmez* dağılım denir.

Tanım 2.2.10. [15] $(\bar{M}_1, J, g)$ h.h.H manifoldunun bir M_1 altmanifoldu aşağıdaki özellikleri sağlarsa bu altmanifolda *kısmi-eğik altmanifold* denir;

- a) $TM = \mathcal{D}^\perp \oplus \mathcal{D}^\theta$ olarak yazılabilir,
- b) $J\mathcal{D}^\perp \subseteq TM^\perp$ tir, yani $\mathcal{D}^\perp$ ters-değişmez dağılımdır,
- c) $\mathcal{D}^\theta$, eğik açısı θ olan bir eğik dağılımdır.

2.3 YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLDLAR

Bu bölümde, tezin dördüncü bölümünde geometrisini incelediğimiz kısmi-eğik altdaldırmaların tümel manifoldu için kısa bir özet yapılacaktır.

Tanım 2.3.1. [6] (M_1, J, g) bir Hermityen manifold olsun. Eğer M_1 nin $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ olacak şekilde bir açık örtüsü var ve $\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonları için

$$g_i = e^{-\sigma_i} g|_{\mathcal{O}_i} \quad (2.32)$$

metrikleri Kaehler metrik ise $(\bar{M}_1, J, g)$ manifolduna *yerel konformal Kaehler manifold* denir.

Burada $\mathcal{O}_i = M_1$ ise (M_1, J, g) manifolduna *global konformal Kaehler manifold* denir.

Ω ve Ω_i sırasıyla (J, g) ve (J, g_i) yapılarının Kaehler formları olsun. Böylece (2.32) den

$$\Omega_i = e^{\sigma_i} \Omega|_{\mathcal{O}_i} \quad (2.33)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 2.3.2. [6] (M_1, J, g) h.h.H manifold olsun. Bu manifoldun yerel konformal Kaehler manifold olması için g.y.k M_1 manifoldu üzerinde tanımlı

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega \quad (2.34)$$

ve

$$d\omega = 0 \quad (2.35)$$

koşullarını sağlayan bir ω 1-formunun var olmasıdır.

Tanım 2.3.3. [6] (M_1, J, g) manifoldu y.k.K manifold olsun. Herhangi bir $G \in \mathfrak{X}(M_1)$ vektör alanı için,

$$g(G, B) = \omega(G) \quad (2.36)$$

olarak tanımlanan B vektör alanına *Lee vektör alanı* denir.

Teorem 2.3.4. [6] (M_1, J, g) y.k.K manifold olsun. ∇ , g metriğinden türeyen Levi-Civita koneksiyonu ve D^i , $\{g_i\}_{i \in I}$ yerel Kaehler metriklerinin Levi-Civita koneksiyonları olmak üzere, keyfi $G, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanları için,

$$D_G Z = \nabla_G Z - \frac{1}{2} \left\{ \omega(G)Z + \omega(Z)G - g(G, Z)B \right\} \quad (2.37)$$

olarak ifade edilen global tanımlı D torsiyonsuz lineer koneksiyonu D^i koneksiyonlarının genelleştirilmesidir ve

$$Dg = \omega \otimes g \quad (2.38)$$

sağlanır. Buradaki D koneksiyonuna *Weyl koneksiyonu* denir.

Teorem 2.3.5. [6] (M_1, J, g) bir Hermityen manifold olsun. Bu manifoldun yerel konformal Kahler manifold olması için g.y.k M_1 manifoldu üzerinde kapalı bir ω 1-formu vardır ki (2.37) de verilen D koneksiyonu ile birlikte J kompleks yapısının paralel olmasıdır, yani

$$DJ = 0 \quad (2.39)$$

eşitliğinin gerçekleşmesidir.

(2.37) ve (2.39) eşitliklerinden aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

Sonuç 2.3.6. [6] (M_1, J, g) bir Hermityen manifold olsun. Bu manifoldun yerel konformal Kahler manifold olması için g.y.k herhengi $G, Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ için,

$$\nabla_G JZ = J\nabla_G Z + \frac{1}{2} \left\{ \omega(JZ)G - \omega(Z)JG - g(G, JZ)B + g(G, Z)JB \right\} \quad (2.40)$$

olmasıdır.

Ortalama eğrilik vektör alanı H ise,

$$H = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \mathcal{T}_{U_i} U_i \quad (2.41)$$

olarak tanımlanır. Burada $Boy(\mathcal{C}ek\pi_*) = r$ dir.

$M_1(c)$ yerel konformal uzay formun eğrilik tensörü,

$$\begin{aligned} 4R(G, F, Z, U) = & c \left\{ g(G, U)g(F, Z) - g(G, Z)g(F, U) + g(JG, U)g(JF, Z) \right. \\ & \left. - g(JG, Z)g(JF, U) - 2g(JG, F)g(JZ, U) \right\} + 3 \left\{ P(G, U)g(F, Z) \right. \\ & \left. - P(G, Z)g(F, U) + g(G, U)P(F, Z) - g(G, Z)P(F, U) \right\} \\ & + \left\{ -P(JG, U)g(JF, Z) + P(JG, Z)g(JF, U) - g(JG, U)P(JF, Z) \right. \\ & \left. - g(JG, U)P(JF, Z) + g(JG, Z)P(JF, U) \right\} \\ & + 2 \left\{ P(JG, F)g(JZ, U) + g(JG, F)P(JZ, U) \right\}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

şeklinde tanımlanır [2]. Burada $P(G, F) = -(\nabla_G \omega)F - \omega(G)\omega(F) + \frac{1}{2}||B||^2 g(G, F)$ dir.

Uyarı 2.3.7. Bu tezde artık yerel konformal Kaehler manifoldlar ω Lee formu ile birlikte (M_1, J, g, ω) olarak gösterilecektir.

Tanım 2.3.8. [22] (M_1, J, g, ω) y.k.K manifoldundaki ω Lee formu paralel ise yani,

$$\nabla \omega = 0 \quad (2.43)$$

koşulu gerçekleşiyorsa, (M_1, J, g, ω) manifolduna bir *Hopf manifold* denir. Böylece

$$P(G, F) = -\omega(G)\omega(F) + \frac{1}{2}\|B\|^2 g(G, F) \quad (2.44)$$

olarak tanımlanır.

2.4 ALTDALDIRMALAR

Bu bölümde tezin ana kısmını oluşturmak için gerekli altdaldırmalar verilecektir.

2.4.1 Riemmaniyen Altdaldırmalar

Bu bölümde Riemmaniyen altdaldırmalar için gerekli tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.4.1. [11] (M_1, g) ve (N_1, g') Riemmaniyen manifoldlar ve $\text{boy}(M_1) > \text{boy}(N_1)$ olsun. $\pi : (M_1, g) \rightarrow (N_1, g')$ dönüşümü aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa π dönüşümüne *Riemmaniyen altdaldırma* denir.

i) π maksimal rank'a sahiptir,

$y \in N$ için $\pi^{-1}(y)$, M_1 nin k -boyutlu bir altmanifoldudur ve bu altmanifolda M_1 nin *lifleri* denir ve $k = \text{boy}(M_1) - \text{boy}(N_1)$ dir. M_1 üzerinde aldığımız herhangi vektör alanları liflere her zaman teğet ise bu vektör alanlarına *dikey*, liflere ortogonal ise bu vektör alanlarına *yatay* vektör alanları denir. M_1 manifoldu üzerinden alınan herhangi bir Y vektör alanı eğer $\forall p \in M_1, \pi_* Y_p = Y_{\pi_*(p)}$ oluyorsa bu Y vektör alanına *temel vektör alanı* denir. Çek π_* dikey dağılımları, $(\text{Çek}\pi_*)^\perp$ ile yatay dağılımları göstereceğiz. Böylece M_1 manifoldu üzerinde herhangi bir G vektör alanını $G = G^v + G^h$ olarak tek biçimde yazabiliriz. Burada G^v , G vektör alanının dikey parçası, G^h de G vektör alanının yatay parçasıdır.

ii) $\pi_*|_{(\text{Çek}\pi_*)^\perp}$, bir lineer izometridir.

Bu, $(\text{Çek}\pi_*)^\perp$ uzayındaki her G, Z vektör alanı için, $g_p(G, Z) = g'_{\pi(p)}(\pi_* G, \pi_* Z)$ anlamına gelir.

Riemmaniyen altdaldırmalar $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{T}$, O'Neill tensörleri ile aşağıdaki gibi karakterize edilir:

$$\mathcal{T}_G Z = (\nabla_{G^v} Z^h)^v + (\nabla_{G^v} Z^v)^h, \quad (2.45)$$

$$\mathcal{A}_G Z = (\nabla_{G^h} Z^h)^v + (\nabla_{G^h} Z^v)^h, \quad (2.46)$$

burada $G, Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ keyfi vektör alanları ve ∇, g metriğinin Levi-Civita koneksiyonudur.

$\mathcal{T}_G$ ve $\mathcal{A}_G$ tensörlerinin M_1 manifoldunun teğet demetleri üzerinde ters-simetrik tensörlerdir. Şimdi bu tensörlerin bazı özelliklerini verelim. $U, V \in \text{Çek}\pi_*$ ve $\xi, \eta \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ olmak üzere,

$$\mathcal{T}_U V = \mathcal{T}_V U \quad (2.47)$$

$$\mathcal{A}_\xi \eta = -\mathcal{A}_\eta \xi = \frac{1}{2}[\xi, \eta]^v \quad (2.48)$$

ve (2.45) ile (2.46) kullanılarak

$$\nabla_U V = (\nabla_U V)^v + \mathcal{T}_U V, \quad (2.49)$$

$$\nabla_U \xi = \mathcal{T}_U \xi + (\nabla_U \xi)^h, \quad (2.50)$$

$$\nabla_\xi U = (\nabla_\xi U)^v + \mathcal{A}_\xi U, \quad (2.51)$$

$$\nabla_\xi \eta = \mathcal{A}_\xi \eta + (\nabla_\xi \eta)^h, \quad (2.52)$$

elde edilir. Eğer, ξ bir temel vektör alanı ise $(\nabla_U \xi)^h = \mathcal{A}_\xi U$ sağlanır.

2.4.2 Kısmi-Eğik Altdaldırmalar

Bu alt bölümde tümel manifoldu Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar için gerekli tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.4.2. [16] (M_1^{2m}, J, g) h.h.H manifold olsun. $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ Riemanniyen altdaldırması eğer $\text{Çek}\pi_*, J$ yapısı altında ters-değişmez ise yani başka bir deyişle $J\text{Çek}\pi_* \subseteq (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ ise π dönüşümüne bir *ters-değişmez altdaldırma* denir.

Tanım 2.4.3. [16] (M_1^{2m}, J, g) h.h.H manifold olsun. $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ Riemanniyen altdaldırması eğer JV ile $\text{Çek}\pi_*$ arasındaki $\theta(V)$ açısı sabit ise π ye *eğik altdaldırma* denir.

Tanım 2.4.4. [21] (M_1^{2m}, J, g) h.h.H manifold olsun. $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ Riemanniyen altdaldırması eğer $\text{Çek}\pi_*$ dikey dağılımı, $\mathcal{D}^\theta$ ve $\mathcal{D}^\perp$ olacak şekilde ortogonal bileşenlerine ayrılıyorsa bu altdaldırmaya *kısmi-eğik altdaldırma* denir. Başka bir deyişle

$$\text{Çek}\pi_* = \mathcal{D}^\theta \oplus \mathcal{D}^\perp \quad (2.53)$$

dir ve bu θ açısına altdaldırmanın *kısmi-eğik açısı* denir. Burada $\mathcal{D}^\theta$ eğik, $\mathcal{D}^\perp$ ters değişmez dağılımdır.

Kısmi-eğik altdaldırmalar aslında ters değişmez, yarı-değişmez ve eğik altdaldırmaların bir doğal genellemesidir. $\mathcal{D}^\perp$ ve $\mathcal{D}^\theta$ dağılımlarının boyutları sırasıyla m_1 ve m_2 olsun. Bu durumda,

- a) Eğer $m_2 = 0$ ise M_1 ters değişmez altdaldırmadır,
- b) Eğer $m_1 = 0$ ve $\theta = 0$ ise M_1 değişmez altdaldırmadır,
- c) Eğer, $m_1 = 0$ ve $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise M_1 has eğik altdaldırmadır,
- d) Eğer, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise M_1 ters değişmez altdaldırmadır.

Örnek 2.4.5. [21] $\pi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$, altı boyutlu Öklid uzayından üç boyutlu Öklid uzayına giden ve $(x_1, \dots, x_6)$, $\mathbb{R}^6$ nın doğal koordinatları olmak üzere, $\pi(x_1, \dots, x_6) = (\frac{x_1 - x_4}{\sqrt{2}}, x_2, x_5)$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun. π dönüşümü bir has kısmi-eğik altdaldırmadır. Burada $\text{Çek}\pi_* = \mathcal{D}^\theta \oplus \mathcal{D}^\perp$ dir ve $\mathcal{D}^\theta = \text{ger}\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + \partial_4), \partial_3\}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ ve $\mathcal{D}^\perp = \text{ger}\{\partial_6\}$ dir. Dahası $(\text{Çek}\pi_*)^\perp = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - \partial_4), \partial_2, \partial_5\}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ dir.

Şimdi kısmi-eğik altdaldırmalar için gerekli notasyonları verelim.

Herhangi $V \in \text{Çek}\pi_*$ için,

$$V = PV + QV, \quad (2.54)$$

burada $PV \in \mathcal{D}^\theta$ ve $QV \in \mathcal{D}^\perp$ dir.

$$JV = \phi V + \psi V, \quad (2.55)$$

burada $\phi V \in \text{Çek}\pi_*$ ve $\psi V \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ dir. $\xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ için

$$J\xi = \mathfrak{B}\xi + \mathfrak{C}\xi, \quad (2.56)$$

burada $\mathfrak{B}\xi \in \text{Çek}\pi_*$ ve $\mathfrak{C}\xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ dir.

Böylece, $(\text{Çek}\pi_*)^\perp$ yatay dağılımını,

$$(\text{Çek}\pi_*)^\perp = J\mathcal{D}^\perp \oplus \psi\mathcal{D}^\theta \oplus \mu \quad (2.57)$$

biçiminde yazabiliriz, burada $\mu, J\mathcal{D}^\perp \oplus \psi\mathcal{D}^\theta$ dağılımının ortogonal tümleyenidir ve J yapısı ile birlikte $(\text{Çek}\pi_*)^\perp$ dağılımına göre invaryanttır.

Herhangi $V \in \text{Çek}\pi_*$ için, (2.54) ve (2.55) den aşağıdaki eşitlik yazılabilir,

$$JQV + \psi PV = \psi V. \quad (2.58)$$

Lemma 2.4.6. [21] $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Bu durumda,

- a) $\phi\mathcal{D}^\theta = \mathcal{D}^\theta$
- b) $\phi\mathcal{D}^\perp = \{0\}$
- c) $\mathfrak{B}\psi\mathcal{D}^\theta = \mathcal{D}^\theta$
- d) $\mathfrak{B}J\mathcal{D}^\perp = \mathcal{D}^\perp$

özellikleri sağlanır.

Diğer taraftan (2.55) ve (2.56) denklemleri ve $J^2 = -I$ olduğu kullanılarak aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 2.4.7. [21] $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Bu durumda,

- a) $\phi^2 + \mathfrak{B}\psi = -I$
- b) $C^2 + \psi\mathfrak{B} = -I$
- c) $\phi\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0$
- d) $\psi\phi + \mathfrak{C}\psi = 0$

özellikleri sağlanır.

Teorem 2.4.8. [21] $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ bir Riemanniyen altdaldırma olmak üzere π nin bir kısmi eğik altdaldırma olabilmesi için g.y.k

a) $\mathcal{D} = \{V \in \mathcal{Cek}\pi_* \mid \phi^2 V = \lambda V\}$

b) $\mathcal{D}$ dağılımına ortogonal herhangi bir $V \in \mathcal{Cek}\pi_*$ için, $\phi V = 0$,

olacak şekilde $\lambda \in [-1, 0]$ sabiti ve $\mathcal{D} \in \mathcal{Cek}\pi_*$ olmasıdır.

Eğer θ eğik açısı için, $\lambda = -\cos^2 \theta$ olduğu durumda, $Z \in \mathcal{D}^\theta$,

$$\phi^2 Z = -\cos^2 \theta Z \quad (2.59)$$

olduğu Teorem 2.4.8 den kolayca görülür. Diğer taraftan herhangi $Z, W \in \mathcal{D}^\theta$ ve (2.55), (2.59) denklemleri kullanılarak,

$$g(\phi Z, \phi W) = \cos^2 \theta g(Z, W) \quad (2.60)$$

elde edilir. Aynı şekilde, (2.55), Teorem 2.4.8-(a)) ve (2.59) kullanılarak,

$$g(\psi Z, \psi W) = \sin^2 \theta g(Z, W) \quad (2.61)$$

dir.

Şimdi (M_1, J, g) Kaehler manifoldu ve (N_1, g') Riemanniyen manifoldu olmak üzere $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ kısmi-eğik altdaldırmasının M_1 manifoldu üzerinde Kaehler yapıları ile birlikte, $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ tensör alanlarını inceleyelim.

Lemma 2.4.9. [21] $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun,

$$\mathcal{T}_U \psi V + (\nabla_U \phi V)^v = \mathfrak{B} \mathcal{T}_U V + \phi(\nabla_U V)^v \quad (2.62)$$

$$\mathcal{T}_U \phi V + (\nabla_U \psi V)^h = \mathfrak{C} \mathcal{T}_U V + \psi(\nabla_U V)^v \quad (2.63)$$

$$\mathcal{T}_U \mathfrak{B} \eta + (\nabla_U \mathfrak{C} \eta)^h = \psi \mathcal{T}_U \eta + \mathfrak{C}(\nabla_U \eta)^h \quad (2.64)$$

$$\mathcal{T}_U \mathfrak{C} \eta + (\nabla_U \mathfrak{B} \eta)^v = \phi \mathcal{T}_U \eta + \mathfrak{B}(\nabla_U \eta)^h \quad (2.65)$$

$$\mathcal{A}_\eta \mathfrak{B} \xi + (\nabla_\eta \mathfrak{C} \xi)^v = \psi \mathcal{A}_\eta \xi + \mathfrak{C}(\nabla_\eta \xi)^h \quad (2.66)$$

$$\mathcal{A}_\eta \mathfrak{C} \xi + (\nabla_\eta \mathfrak{B} \xi)^v = \phi \mathcal{A}_\eta \xi + \mathfrak{B}(\nabla_\eta \xi)^h \quad (2.67)$$

$\forall U, V \in \mathcal{Cek}\pi_*$ ve $\forall \eta, \xi \in (\mathcal{Cek}\pi_*)^\perp$ olmak üzere bu eşitlikler gerçekleşir.

ϕ ve ψ için,

$$(\nabla_U \phi)V = (\nabla_U \phi V)^v - \phi(\nabla_U V)^v \quad (2.68)$$

ve

$$(\nabla_U \psi)V = (\nabla_U \psi V)^h - \psi(\nabla_U V)^v \quad (2.69)$$

$U, V \in \text{Çek}\pi_*$ olmak üzere yukarıdakileri tanımlayalım. Böylece (2.62) ve (2.63) eşitliklerinden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.4.10. [21] $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Bu durumda,

$$\phi \text{ paralel ise, i.e., } \nabla \phi \equiv 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_U \psi V = \mathfrak{B} \mathcal{T}_U V \quad (2.70)$$

ve

$$\psi \text{ paralel ise, i.e., } \nabla \psi \equiv 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_U \phi V = \mathfrak{C} \mathcal{T}_U V \quad (2.71)$$

dir. Burada $U, V \in \text{Çek}\pi_*$ dir.

Teorem 2.4.11. [21] (M_1, J, g) Kaehler manifoldtan (N_1, g') Riemanniyen manifolduna giden π bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Eğik dağılım $\mathcal{D}^\theta$ nın integrallenebilir olması için g.y.k

$$g((\nabla_Z \psi W)^h - (\nabla_W \psi Z)^h, JX) = g(\mathcal{T}_z \psi \phi W - \mathcal{T}_W \psi \phi Z, X) \quad (2.72)$$

olmasıdır. Burada $Z, W \in \mathcal{D}^\theta$ ve $X \in \mathcal{D}^\perp$ dir.

Sonuç 2.4.12. [21] (M_1, J, g) Kaehler manifoldundan (N_1, g') Riemanniyen manifolduna giden π bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Eğer,

$$(\nabla_Z \psi W)^h - (\nabla_W \psi Z)^h \in \mu \oplus \psi \mathcal{D}^\theta$$

ve

$$\mathcal{T}_z \psi \phi W - \mathcal{T}_W \psi \phi Z \in \mathcal{D}^\theta$$

ise, $\mathcal{D}^\theta$ eğik dağılımı integrallenebilir.

Teorem 2.4.13. [21] $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. $\mathcal{D}^\perp$ ters değişmez dağılımı daima integrallenebilir.

Teorem 2.4.14. [21] π bir has kısmi-eğik altdaldırma olsun. Yatay dağılımın tümel jeodezik olması için g.y.k

$$g(\mathcal{A}_\xi \eta, PV) = \sec^2 \theta \{g((\nabla_\xi \eta)^h, \psi \phi PV) - g(\mathcal{A}_\xi \mathfrak{B} \eta + (\nabla_\xi \mathfrak{C} \eta)^h, \psi V)\} \quad (2.73)$$

olmasıdır. Burada $\xi, \eta \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ ve $V \in \text{Çek}\pi_*$ dir.

Teorem 2.4.15. [21] π bir has kısmi-eğik altdaldırma olsun. Dikey dağılımın tümel jeodezik olması için g.y.k

$$g(\mathcal{T}_U PV, \xi) = \sec^2 \theta \{g((\nabla_U \psi \phi PV)^h, \xi) - g(\mathcal{T}_U \psi V, \mathfrak{B} \xi) - g(\nabla_U \psi V)^h, \mathfrak{C} \xi)\} \quad (2.74)$$

olmasıdır. Burada $\xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ ve $V, U \in \text{Çek}\pi_*$ dir.

Teorem 2.4.16. [21] $\pi : (M_1, J, g) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. $\mathcal{D}^\perp$ ters değişmez dağılımının tümel jeodezik olması için g.y.k

$$g((\nabla_X \psi Y)^h, \psi Z) = g(\mathcal{T}_X Y, \psi \phi Z) \quad (2.75)$$

ve

$$g(\psi \mathcal{T}_X JY, \xi) = g((\nabla_X JY)^h, \mathfrak{C} \xi) \quad (2.76)$$

olmasıdır. Burada $X, Y \in \mathcal{D}^\perp$, $Z \in \mathcal{D}^\theta$ ve $\xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$.

3 MALZEME VE YÖNTEM

Bu tezde tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar için, Riemanniyen manifoldların temel kavramları verilmiş, altdaldırma teorisini oluşturan yapılardan bahsedilip daha önce çalışılmış, tümel manifoldu hemen hemen Hermityen manifold olan altdaldırmalardan ve tümel manifoldu Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar sunulmuştur.

Bu tezin oluşması için diferansiyel geometri tarihinde altdaldırmalar teorisinde çalışılmış, kabul görmüş yayınlar, makaleler ve kitaplar, kütüphane ve internet aracılığı ile literatür taranmış ve incelenmiştir. Tezin yazım sürecinde $\text{\LaTeX}$ programı kullanılıp tez döküman haline getirilmiştir.

4 BULGULAR

4.1 TÜMEL MANİFOLDU YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLD OLAN KİSMİ-EĞİK ALTDALDIRMALAR

Önceki bölümlerde bu tez için gerekli bilgiler verildi. Tümel manifoldu Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar için tanımlar ve teoremler verildi. Şimdi ise bu bölümde tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar incelenmiştir.

Lemma 4.1.1. (M_1, J, g, ω) y.k.K manifold ve (N_1, g') Riemanniyen manifold olmak üzere, $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_U \phi V + (\nabla_U \psi V)^h = & \mathfrak{C} \mathcal{T}_U V + \psi (\nabla_U V)^v - \frac{1}{2} \left\{ \omega(V) \psi U + g(U, \phi V) B^h \right. \\ & \left. - g(U, V) \mathfrak{C} B^h - g(U, V) \psi B^v \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_U \psi V + (\nabla_U \phi V)^v = & \mathfrak{B} \mathcal{T}_U V + \phi (\nabla_U V)^v + \frac{1}{2} \left\{ \omega(JV) U - \omega(V) \phi U \right. \\ & \left. - g(U, \phi V) \mathfrak{B}^v + g(U, V) \mathfrak{B} B^h + g(U, V) \phi B^v \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\mathcal{T}_U \mathfrak{B} \eta + (\nabla_U \mathfrak{C} \eta)^h = \psi \mathcal{T}_U \eta + \mathfrak{C} (\nabla_U \eta)^h - \frac{1}{2} \left\{ \omega(\eta) \psi U - g(U, \mathfrak{B} \eta) B^h \right\}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_U \mathfrak{C} \eta + (\nabla_U \mathfrak{B} \eta)^v = & \phi \mathcal{T}_U \eta + \mathfrak{B} (\nabla_U \eta)^h \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \omega(J\eta) U - \omega(\eta) \phi U - g(U, \mathfrak{B} \eta) B^v \right\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\eta \phi V + (\nabla_\eta \psi V)^h = & \mathfrak{C} \mathcal{A}_\eta V + \psi (\nabla_\eta V)^v \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \omega(JV) \eta - \omega(V) \mathfrak{C} \eta - g(\eta, \psi V) B^h \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{A}_\eta \psi V + (\nabla_\eta \phi V)^v = \mathfrak{B} \mathcal{A}_\eta V + \phi (\nabla_\eta V)^v - \frac{1}{2} \left\{ \omega(V) \mathfrak{B} \eta + g(\eta, \psi V) B^v \right\}, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\eta \mathfrak{B} \xi + (\nabla_\eta \mathfrak{C} \xi)^h = & \psi \mathcal{A}_\eta \xi + \mathfrak{C} (\nabla_\eta \xi)^h + \frac{1}{2} \left\{ \omega(J\xi) \eta - \omega(\xi) \mathfrak{C} \eta \right. \\ & \left. - g(\eta, \mathfrak{C} \xi) B^h + g(\eta, \xi) \mathfrak{C} B^h + g(\eta, \xi) \psi B^v \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\eta \mathfrak{C}\xi + (\nabla_\eta \mathfrak{B}\xi)^v &= \phi \mathcal{A}_\eta \xi + \mathfrak{B}(\nabla_\eta \xi)^h - \frac{1}{2} \left\{ \omega(\xi) \mathfrak{B}\eta - g(\eta, \mathfrak{C}\xi) B^v \right. \\ &\quad \left. + g(\eta, \xi) \mathfrak{B}B^h + g(\eta, \xi) \phi B^v \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

dir. Burada $U, V \in \text{Çek}\pi_*$ ve $\xi, \eta \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ dir.

İspat 4.1.2. (4.1) ve (4.2) denklemleri için, (2.40) denkleminde (2.55) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \nabla_U \phi V + \nabla_U \psi V - \mathfrak{B} \mathcal{T}_U V - \mathfrak{C} \mathcal{T}_U V - \phi(\nabla_U V)^v - \psi(\nabla_U V)^v &= \frac{1}{2} \left\{ \omega(JV)U \right. \\ &\quad \left. - \omega(V)[\phi U + \psi U] - g(U, JV)[B^v + B^h] + g(U, V)[JB^h + JB^v] \right\} \end{aligned}$$

dir. (2.49) olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_U \phi V + (\nabla_U \phi V)^v + \mathcal{T}_U \psi V + (\nabla_U \psi V)^h \\ - \mathfrak{B} \mathcal{T}_U V - \mathfrak{C} \mathcal{T}_U V - \phi(\nabla_U V)^v - \psi(\nabla_U V)^v &= \frac{1}{2} \left\{ \omega(JV)U - \omega(V)\phi U - \omega(V)\psi U \right. \\ &\quad \left. - g(U, \phi V)[B^v + B^h] - g(U, \psi V)[B^v + B^h] + g(U, V)[\mathfrak{B}B^h + \mathfrak{C}B^h] + g(U, V)[\phi B^v + \psi B^v] \right\} \end{aligned}$$

olur. Daha sonra bu elde edilen eşitliğin yatay ve dikey parçalarını ayırırsak (4.1) ve (4.2) denklemleri elde edilir. Şimdi bu işlemleri (4.7) ve (4.8) denklemleri için yapalım. (2.40) denklemde (2.56) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \nabla_\eta \mathfrak{B}\xi + \nabla_\eta \mathfrak{C}\eta - \phi \mathcal{A}_\eta \xi - \psi \mathcal{A}_\eta \xi - \mathfrak{B}(\nabla_\eta \xi)^h - \mathfrak{C}(\nabla_\eta \xi)^h &= \frac{1}{2} \left\{ \omega(J\xi)\eta \right. \\ &\quad \left. - \omega(\xi)[\mathfrak{B}\eta + \mathfrak{C}\eta] - g(\eta, J\xi)[B^v + B^h] + g(\eta, \xi)[JB^h + JB^v] \right\} \end{aligned}$$

dir. (2.52) olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\eta \mathfrak{B}\xi + (\nabla_\eta \mathfrak{B}\xi)^v + \mathfrak{C} \mathcal{A}_\eta \xi + (\nabla_\eta \mathfrak{C}\eta)^h - \\ \phi \mathcal{A}_\eta \xi - \psi \mathcal{A}_\eta \xi - \mathfrak{B}(\nabla_\eta \xi)^h - \mathfrak{C}(\nabla_\eta \xi)^h &= \frac{1}{2} \left\{ \omega(J\xi)\eta - \omega(\xi)[\mathfrak{B}\eta + \mathfrak{C}\eta] \right. \\ &\quad \left. - g(\eta, J\xi)[B^v + B^h] + g(\eta, \xi)[JB^h + JB^v] \right\} \end{aligned}$$

Daha sonra bu elde edilen eşitliğin yatay ve dikey parçalarını ayırırsak (4.7) ve (4.8) denklemleri elde edilir. □

Aynı yöntemleri kullanarak diğer eşitliklerde kolayca gösterilebilir.

Sonuç 4.1.3. (M_1, J, g, ω) y.k.K manifold ve (N_1, g') Riemanniyen manifold olmak üzere, $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Lee vektör alanı B yatay ise, Lemma 4.1.1 şu hali alır;

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_U \phi V + (\nabla_U \psi V)^h &= \mathfrak{C} \mathcal{T}_U V + \psi (\nabla_U V)^v - \frac{1}{2} \left\{ g(U, \phi V) B^h \right. \\ &\quad \left. - g(U, V) \mathfrak{C} B^h - g(U, V) \psi B^h \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{T}_U \psi V + (\nabla_U \phi V)^v = \mathfrak{B} \mathcal{T}_U V + \phi (\nabla_U V)^v + \frac{1}{2} \left\{ \omega(JV)U + g(U, V) \mathfrak{B} B^h \right\}, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{T}_U \mathfrak{C} \eta + (\nabla_U \mathfrak{B} \eta)^v = \phi \mathcal{T}_U \eta + \mathfrak{B} (\nabla_U \eta)^h + \frac{1}{2} \left\{ \omega(J\eta)U - \omega(\eta) \phi \right\}, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{A}_\eta \phi V + (\nabla_\eta \psi V)^h = \mathfrak{C} \mathcal{A}_\eta V + \psi (\nabla_\eta V)^v + \frac{1}{2} \left\{ \omega(JV)\eta - g(\eta, \psi V) B^h \right\}, \quad (4.12)$$

$$\mathcal{A}_\eta \psi V + (\nabla_\eta \phi V)^v = \mathfrak{B} \mathcal{A}_\eta V + \phi (\nabla_\eta V)^v, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\eta \mathfrak{B} \xi + (\nabla_\eta \mathfrak{C} \xi)^v &= \psi \mathcal{A}_\eta \xi + \mathfrak{C} (\nabla_\eta \xi)^h + \frac{1}{2} \left\{ \omega(J\xi)\eta - \omega(\xi) \mathfrak{C} \eta \right. \\ &\quad \left. - g(\eta, \mathfrak{C} \xi) B^h + g(\eta, \xi) \mathfrak{C} B^h \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\mathcal{A}_\eta \mathfrak{C} \xi + (\nabla_\eta \mathfrak{B} \xi)^v = \phi \mathcal{A}_\eta \xi + \mathfrak{B} (\nabla_\eta \xi)^h - \frac{1}{2} \left\{ \omega(\xi) \mathfrak{B} \eta + g(\eta, \xi) \mathfrak{B} B^h \right\}, \quad (4.15)$$

dır. Burada $U, V \in \text{Çek}\pi_*$ ve $\xi, \eta \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ dir.

İspat 4.1.4. B Lee vektör alanını yatay kabul ettiğimizde B^v vektör alanları sıfırlanacağından yukarıdaki denklemler elde edilmiş olur. $\square$

Lemma 4.1.5. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun.

$$\begin{aligned} \phi \text{ paralel ise, i.e., } \nabla \phi \equiv 0 &\Leftrightarrow \mathcal{T}_U \psi V = \mathfrak{B} \mathcal{T}_U V + \frac{1}{2} \left\{ \omega(JV)U - \omega(V) \phi U \right. \\ &\quad \left. - g(U, \phi V) B^v + g(U, V) \mathfrak{B} B^h + g(U, V) \phi B^v \right\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \psi \text{ paralel ise, i.e., } \nabla \psi \equiv 0 &\Leftrightarrow \mathcal{T}_U \phi V = \mathfrak{C} \mathcal{T}_U V - \frac{1}{2} \left\{ \omega(V) \psi U + g(U, \phi V) B^h \right. \\ &\quad \left. - g(U, V) \mathfrak{C} B^h + g(U, V) \psi B^v \right\}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

burada $U, V \in \text{Çek}\pi_*$ dir.

İspat 4.1.6. (4.1) ve (4.2) denklemlerinde ϕ ve ψ paralel olduğu kabul edildiğinde (4.16) ve (4.17) eşitlikleri bulunur. $\square$

Şimdi eğik ve ters-değişmez dağılım için integrallenebilirlik koşullarını inceleyeceğiz.

Teorem 4.1.7. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Eğik dağılım $\mathcal{D}^\theta$ nın integrallenebilir olması için g.y.k

$$\begin{aligned}
 g(\mathcal{T}_X \psi \phi Y - \mathcal{T}_Y \psi \phi X, Z) = & g((\nabla_X \psi Y)^h - (\nabla_Y \psi X)^h, JZ) \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(Y) \psi X - \omega(X) \psi Y, JZ) \right\} \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(\phi Y) \phi X - \omega(\phi X) \phi Y, Z) \right\} \\
 & + g(X, \phi Y) g(B, JZ) \\
 & + g(\phi (\nabla_X \psi Y)^v - \phi (\nabla_Y \psi X)^v, Z),
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

olmasıdır. Burada $X, Y \in \mathcal{D}^\theta$ ve $Z \in \mathcal{D}^\perp$ dir.

İspat 4.1.8. $Z \in \mathcal{D}^\perp$ ve $X, Y \in \mathcal{D}^\theta$ olsun. Eğer $g([X, Y], Z) = 0$ ise $\mathcal{D}^\theta$ integrallenebilirdir. Bu durumda, (2.26) olduğundan

$$g([X, Y], Z) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = g(J\nabla_X Y - J\nabla_Y X, JZ) = g(J\nabla_X Y, JZ) - g(J\nabla_Y X, JZ)$$

dir. (2.40) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 g([X, Y], Z) = & g(\nabla_X Y - \frac{1}{2} \{ \omega(JY)X - \omega(Y)JX - g(X, JY)B + g(X, Y)JB \}, JZ) \\
 & - g(\nabla_Y X - \frac{1}{2} \{ \omega(JX)Y - \omega(X)JY - g(Y, JX)B + g(X, Y)JB \}, JZ).
 \end{aligned}$$

Bu denklemlerde (2.55) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
 g([X, Y], Z) = & g(\nabla_X \phi Y + \nabla_X \psi Y - \nabla_Y \phi X - \nabla_Y \psi X \\
 & + \frac{1}{2} \{ \omega(Y) [\phi X + \psi X] + g(X, \phi Y + \psi Y) [B^h + B^v] \}, JZ) \\
 & + g(\frac{1}{2} \{ \omega(X) [\phi Y + \psi Y] - g(Y, \phi X + \psi X) [B^h + B^v] \}, JZ) \\
 = & g(\nabla_X \phi Y + \nabla_X \psi Y - \nabla_Y \phi X - \nabla_Y \psi X \\
 & + \frac{1}{2} \{ \omega(Y) \psi X - \omega(X) \psi Y + g(X, \phi Y) B^h - g(Y, \phi X) B^h \}, JZ)
 \end{aligned}$$

olur. Şimdi (2.49) ~ (2.52) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
g([X, Y], Z) &= g(\mathcal{T}_X \phi Y + (\nabla_X \phi Y)^v + \mathcal{T}_X \psi Y + (\nabla_X \psi Y)^h \\
&\quad - \mathcal{T}_Y \phi X - (\nabla_Y \phi X)^v - \mathcal{T}_Y \psi X - (\nabla_Y \psi X)^h \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ \omega(Y) \psi X - \omega(X) \psi Y + g(X, \phi Y) B^h - g(Y, \phi X) B^h \}, JZ) \\
&= g(\mathcal{T}_X \phi Y + (\nabla_X \psi Y)^h - \mathcal{T}_Y \phi X - (\nabla_Y \psi X)^h \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ \omega(Y) \psi X - \omega(X) \psi Y + g(X, \phi Y) B^h - g(Y, \phi X) B^h \}, JZ) \\
&= g(\mathcal{T}_X \phi Y, JZ) - g(\mathcal{T}_Y \phi X, JZ) + g((\nabla_X \psi Y)^h - (\nabla_Y \psi X)^h, JZ) \\
&\quad + \frac{1}{2} g(\omega(Y) \psi X - \omega(X) \psi Y, JZ) + g(X, \phi Y) g(B^h, JZ)
\end{aligned}$$

olur. $g(\mathcal{T}_X \phi Y, JZ)$ ve $g(\mathcal{T}_Y \phi X, JZ)$ parçalarına J kompleks yapısını uygulayalım,

$$\begin{aligned}
g([X, Y], Z) &= -g(J \mathcal{T}_X \phi Y, Z) + g(J \mathcal{T}_Y \phi X, Z) + g((\nabla_X \psi Y)^h - (\nabla_Y \psi X)^h, JZ) \\
&\quad + \frac{1}{2} g(\omega(Y) \psi X - \omega(X) \psi Y, JZ) + g(X, \phi Y) g(B^h, JZ),
\end{aligned}$$

ve (2.56) denklemini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
g([X, Y], Z) &= -g(\mathfrak{B} \mathcal{T}_X \phi Y + \mathfrak{C} \mathcal{T}_X \phi Y, Z) + g(\mathfrak{B} \mathcal{T}_Y \phi X + \mathfrak{C} \mathcal{T}_Y \phi X, Z) \\
&\quad + g((\nabla_X \psi Y)^h - (\nabla_Y \psi X)^h, JZ) \\
&\quad + \frac{1}{2} g(\omega(Y) \psi X - \omega(X) \psi Y, JZ) + g(X, \phi Y) g(B^h, JZ) \\
&= -g(\mathfrak{B} \mathcal{T}_X \phi Y, Z) + g(\mathfrak{B} \mathcal{T}_Y \phi X, Z) + g((\nabla_X \psi Y)^h - (\nabla_Y \psi X)^h, JZ) \\
&\quad + \frac{1}{2} g(\omega(Y) \psi X - \omega(X) \psi Y, JZ) + g(X, \phi Y) g(B^h, JZ)
\end{aligned}$$

olur. Burada Lemma 4.1.1 in (4.2) eşitliğinde $U = X$ ve $V = \phi Y$ alınarak,

$$\begin{aligned}
g([X, Y], Z) &= -g(\mathcal{T}_X \psi \phi Y + (\nabla_X \phi^2 Y)^v - \phi(\nabla_X \phi Y)^v \\
&\quad - \frac{1}{2}\{\omega(J\phi Y)X - \omega(\phi Y)\phi X - g(X, \phi^2 Y)B^v + g(X, \phi Y)\mathfrak{B}B^h + g(X, \phi Y)\phi B^v\}, Z) \\
&\quad + g(\mathcal{T}_Y \psi \phi X + (\nabla_Y \phi^2 X)^v - \phi(\nabla_Y \phi X)^v \\
&\quad - \frac{1}{2}\{\omega(J\phi X)Y - \omega(\phi X)\phi Y - g(Y, \phi^2 X)B^v + g(Y, \phi X)\mathfrak{B}B^h + g(Y, \phi X)\phi B^v\}, Z) \\
&\quad + g((\nabla_X \psi Y)^h - (\nabla_Y \psi X)^h, JZ) + \frac{1}{2}g(\omega(Y)\psi X - \omega(X)\psi Y, JZ) + g(X, \phi Y)g(B^h, JZ) \\
&= -g(\mathcal{T}_X \psi \phi Y - \mathcal{T}_Y \psi \phi X, Z) + g((\nabla_X \psi Y)^h - (\nabla_Y \psi X)^h, JZ) + g(\omega(Y)\psi X - \omega(X)\psi Y, JZ) \\
&\quad + g(X, \phi Y)g(B^h, JZ) + \cos^2 \theta g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) + g(\phi(\nabla_X \phi Y)^v + \phi(\nabla_Y \phi X)^v, Z) \\
&\quad - \frac{1}{2}g(\omega(\phi Y)\phi X + \omega(\phi X)\phi Y, Z)
\end{aligned}$$

olur. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ nedeniyle,

$$\begin{aligned}
g([X, Y], Z) &= g((\nabla_X \psi Y)^h - (\nabla_Y \psi X)^h, JZ) - g(\mathcal{T}_X \psi \phi Y - \mathcal{T}_Y \psi \phi X, Z) \\
&\quad + \cos^2 \theta g([X, Y], Z) + \frac{1}{2}g(\omega(Y)\psi X - \omega(X)\psi Y, JZ) \\
&\quad - \frac{1}{2}g(\omega(\phi Y)\phi X + \omega(\phi X)\phi Y, Z) + g(X, \phi Y)g(B^h, JZ) \\
&\quad + g(\phi(\nabla_X \phi Y)^v + (\phi \nabla_Y \phi X)^v, Z)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla istenilen gösterilmiş olur. $\square$

Teorem 4.1.9. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. $\mathcal{D}^\perp$ ters-değişmez dağılımı daima integrallenebilirdir.

İspat 4.1.10. $X \in \mathcal{D}^\theta$ ve $Z, W \in \mathcal{D}^\perp$ olsun. $[Z, W] \in \mathcal{D}^\perp$ ise $\mathcal{D}^\perp$ ters-değişmez dağılımı integrallenebilirdir. Yerel konformal Kaehler manifoldların $d\Omega = \omega \wedge \Omega$ ve $d\omega = 0$ koşullarını sağladığını biliyoruz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \Omega &= \omega(Z)\Omega(W, X) + \omega(W)\Omega(X, Z) + \omega(X)\Omega(Z, W) \\
&= \omega(Z)g(W, JX) + \omega(W)g(X, JZ) + \omega(X)g(Z, JW) \\
&= \omega(Z)g(W, JX) = \omega(Z)g(W, \phi X + \psi X) = \omega(Z)g(W, \phi X)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
3d\Omega(Z, W, X) &= Z\Omega(W, X) + W\Omega(X, Z) + X\Omega(Z, W) \\
&\quad - \Omega([Z, W], X) - \Omega([W, X], Z) - \Omega([X, Z], W) \\
&= Zg(W, JX) + Wg(X, JZ) + Xg(Z, JW) \\
&\quad - g([Z, W], JX) - g([W, X], JZ) - g([X, Z], JW) \\
&= -g([Z, W], JX) = g(J[Z, W], X) \\
&= g(\phi[Z, W], X) + g(\psi[Z, W], X) \\
&= g(\phi[Z, W], X).
\end{aligned}$$

$d\Omega = \omega \wedge \Omega$ olduğundan,

$$\omega(Z)g(W, \phi X) = g(\phi[Z, W], X)$$

ve $X \in \mathcal{D}^\theta$ yani $\phi X \in \mathcal{D}^\theta$ olduğundan $\omega(Z)g(W, \phi X) = 0$ dır. Bu durumda $g(\phi[Z, W], X) = 0$ dır. Dolayısıyla $g(\phi[Z, W], X) = g(J[Z, W], X) = -g([Z, W], JX) = -g([Z, W], \phi X) = 0$ olup $[Z, W] \in \mathcal{D}^\perp$ dir. Yani $\mathcal{D}^\perp$ ters-değişmez dağılımı daima integrallenebilir. $\square$

Şimdi yatay dağılımın ve dikey dağılımın tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşulları elde edeceğiz.

Teorem 4.1.11. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Yatay dağılımın tümel jeodezik ve eşdeğer olarak integrallenebilir olması için g.y.k

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{A}_\xi \eta, PV) &= \sec^2 \theta \left\{ g((\nabla_\xi \eta)^h, \psi \phi PV) - g(\mathcal{A}_\xi \mathfrak{B} \eta + (\nabla_\xi \mathfrak{C} \eta)^h, \psi V) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)\mathfrak{C}\xi \right. \\
&\quad \left. \left. - g(\mathfrak{C}\eta, \xi)B^h + g(\eta, \xi)[\psi B^v + \mathfrak{C}B^h], \psi V \right\} \right\},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olmasıdır. Burada $\eta, \xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ ve $V \in \text{Çek}\pi_*$ dir.

İspat 4.1.12. Eğer $g(\nabla_\xi \eta, V) = 0$ olduğunu gösterirsek yatay dağılımın integrallenebilir

olduğunu göstermiş oluruz. (2.54) özelliğini kullanarak,

$$g(\nabla_{\xi}\eta, V) = g(\nabla_{\xi}\eta, PV + QV) = g(\nabla_{\xi}\eta, PV) + g(\nabla_{\xi}\eta, QV)$$

yazabiliriz. Bu durumda

$$g(\nabla_{\xi}\eta, V) = g(J\nabla_{\xi}\eta, JPV) + g(J\nabla_{\xi}\eta, JQV)$$

olur. Şimdi (2.55) ve (2.40) eşitliklerini kullanalım.

$$\begin{aligned} & g(J\nabla_{\xi}\eta, JPV) + g(J\nabla_{\xi}\eta, JQV) \\ &= g(\nabla_{\xi}J\eta - \frac{1}{2}\{\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB\}, \phi PV + \psi PV) \\ &+ g(\nabla_{\xi}J\eta - \frac{1}{2}\{\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB\}, JQV) \\ &= g(\nabla_{\xi}J\eta, \phi PV) + g(\nabla_{\xi}J\eta, \psi PV) + g(\nabla_{\xi}J\eta, JQV) \\ &- \frac{1}{2}\{g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, \phi PV + \psi PV) \\ &+ g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, JQV)\} \\ &= g(J\nabla_{\xi}\eta + \frac{1}{2}\{\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB\}, \phi PV) \\ &+ g(\nabla_{\xi}J\eta, \psi PV) - \frac{1}{2}\{g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, \psi PV)\} \\ &+ g(\nabla_{\xi}J\eta, JQV) - \frac{1}{2}\{g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, JQV)\}. \end{aligned}$$

Bu eşitliklerde biraz daha düzenleme yaparsak,

$$\begin{aligned} &= g(J\nabla_{\xi}\eta, \phi PV) + g(\nabla_{\xi}J\eta, \psi PV) + g(\nabla_{\xi}J\eta, JQV) \\ &- \frac{1}{2}\{g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, \psi PV) \\ &+ g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, JQV)\} \end{aligned}$$

bulunur. $g(J\nabla_{\xi}\eta, \phi PV)$ parçasına J kompleks yapısını uygulayalım.

$$\begin{aligned} &= -g(\nabla_{\xi}\eta, \phi^2 PV) - g(\nabla_{\xi}\eta, \psi\phi PV) + g(\nabla_{\xi}J\eta, \psi PV) + g(\nabla_{\xi}J\eta, JQV) \\ &- \frac{1}{2}\{g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, \psi PV) \\ &+ g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, JQV)\}. \end{aligned}$$

(2.60) ve (2.56) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \theta g(\nabla_\xi \eta, PV) - g((\nabla_\xi \eta)^h, \psi \phi PV) + g(\nabla_\xi \mathfrak{B} \eta, \psi PV) + g(\nabla_\xi \mathfrak{C} \eta, \psi PV) \\
&\quad + g(\nabla_\xi \mathfrak{B} \eta, JQV) + g(\nabla_\xi \mathfrak{C} \eta, JQV) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, \psi PV) \right. \\
&\quad \left. + g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, JQV) \right\}
\end{aligned}$$

olur. (2.52) den dolayı,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_\xi \eta, V) &= \cos^2 \theta g(\nabla_\xi \eta, PV) - g((\nabla_\xi \eta)^h, \psi \phi PV) + g(\mathcal{A}_\xi \mathfrak{B} \eta, \psi PV) \\
&\quad + g((\nabla_\xi \mathfrak{C} \eta)^h, \psi PV) + g(\mathcal{A}_\xi \mathfrak{B} \eta, JQV) + g((\nabla_\xi \mathfrak{C} \eta)^h, JQV) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, \psi PV) \right. \\
&\quad \left. + g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, JQV) \right\}
\end{aligned}$$

olur. $g(\nabla_\xi \eta, V) = 0$ olması için ve $\psi PV + JQV = \psi V$ olduğundan [21],

$$\begin{aligned}
\cos^2 \theta g(\mathcal{A}_\xi \eta, PV) &= g((\nabla_\xi \eta)^h, \psi \phi PV) - g(\mathcal{A}_\xi \mathfrak{B} \eta + (\nabla_\xi \mathfrak{C} \eta)^h, \psi V) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(J\eta)\xi - \omega(\eta)J\xi - g(\xi, J\eta)B + g(\xi, \eta)JB, \psi V) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen bulunmuş olur. $\square$

Teorem 4.1.13. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Dikey dağılımın tümel jeodezik olması için g.y.k

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{T}_U PV, \xi) &= \sec^2 \theta \left\{ g((\nabla_U \psi \phi PV)^h, \xi) - g(\mathcal{T}_U \mathfrak{B} \xi - (\nabla_U \psi V)^h, \mathfrak{C} \xi) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JPV)U - \omega(PV)\phi U - \omega(PV)\psi U \right. \\
&\quad \left. - g(U, \phi PV)B + g(U, PV)JB, J\xi) \right. \\
&\quad \left. + g(\omega(JQV)U - \omega(QV)\phi U - \omega(QV)\psi U \right. \\
&\quad \left. - g(U, \phi QV)B + g(U, QV)JB, J\xi) \right. \\
&\quad \left. + g(\omega(\phi PV)\psi U + \cos^2 \theta g(U, PV)B - g(U, \phi PV)JB, \xi) \right\} \Bigg\},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olmasıdır. Burada $U, V \in \text{Çek}\pi_*$ ve $\xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ dir.

İspat 4.1.14. $g(\nabla_U V, \xi) = 0$ olması durumunda dikey dağılım tümel jeodeziktir. Bu durumda, (2.54) ve (2.40) kullanılarak, $\forall U, V \in \text{cek}\pi_*$ ve $\xi \in (\text{cek}\pi_*)^\perp$,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_U V, \xi) &= g(\nabla_U PV, \xi) + g(\nabla_U QV, \xi) = g(J\nabla_U PV, J\xi) + g(J\nabla_U QV, J\xi) \\
&= g(\nabla_U JPV - \frac{1}{2}\{\omega(JPV)U - \omega(PV)JU - g(U, JPV)B + g(U, PV)JB\}, J\xi) \\
&\quad + g(\nabla_U JQV - \frac{1}{2}\{\omega(JQV)U - \omega(QV)JU - g(U, JQV)B + g(U, QV)JB\}, J\xi) \\
&= g(\nabla_U \phi PV, \xi) + g(\nabla_U \psi PV, \xi) + g(J\nabla_U JQV, J\xi) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{g(\omega(JPV)U - \omega(PV)JU - g(U, JPV)B + g(U, PV)JB, J\xi) \right. \\
&\quad \left. + g(\omega(JQV)U - \omega(QV)JU - g(U, JQV)B + g(U, QV)JB, J\xi)\right\}
\end{aligned}$$

olur ve,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_U V, \xi) &= -g(J\nabla_U \phi PV, \xi) + g(\nabla_U \psi PV, \xi) + g(J\nabla_U JQV, J\xi) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{g(\omega(JPV)U - \omega(PV)JU - g(U, JPV)B + g(U, PV)JB, J\xi) \right. \\
&\quad \left. + g(\omega(JQV)U - \omega(QV)JU - g(U, JQV)B + g(U, QV)JB, J\xi)\right\},
\end{aligned}$$

dir. (2.40) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_U V, \xi) &= -g(\nabla_U J\phi PV - \frac{1}{2}\{\omega(J\phi PV)U - \omega(\phi PV)JU - g(U, J\phi PV)B + g(U, \phi PV)JB\}, J\xi) \\
&\quad + g(\nabla_U \psi PV, \xi) + g(J\nabla_U JQV, J\xi) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{g(\omega(JPV)U - \omega(PV)JU - g(U, JPV)B + g(U, PV)JB, J\xi) \right. \\
&\quad \left. + g(\omega(JQV)U - \omega(QV)JU - g(U, JQV)B + g(U, QV)JB, J\xi)\right\},
\end{aligned}$$

olup düzenlemeye devam edersek,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_U V, \xi) &= -g(\nabla_U \phi^2 PV, \xi) - g(\nabla_U \psi \phi PV, \xi) + g(\nabla_U \psi PV, \mathfrak{B}\xi) + g(\nabla_U \psi PV, \mathfrak{C}\xi) \\
&+ g(\nabla_U JQV, \mathfrak{B}\xi) + g(\nabla_U JQV, \mathfrak{C}\xi) \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(J\phi PV)U - \omega(\phi PV)JU - g(U, J\phi PV)B + g(U, \phi PV)JB, \xi) \right\} \\
&- \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JPV)U - \omega(PV)JU - g(U, JPV)B + g(U, PV)JB, J\xi) \right. \\
&\quad \left. + g(\omega(JQV)U - \omega(QV)JU - g(U, JQV)B + g(U, QV)JB, J\xi) \right\}
\end{aligned}$$

(2.60) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_U V, \xi) &= \cos^2 \theta g(\nabla_U PV, \xi) - g((\nabla_U \psi \phi PV)^h, \xi) + g(\nabla_U \psi PV, \mathfrak{B}\xi) \\
&+ g(\nabla_U \psi PV, \mathfrak{C}\xi) + g(\nabla_U JQV, \mathfrak{B}\xi) + g(\nabla_U JQV, \mathfrak{C}\xi) \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(J\phi PV)U - \omega(\phi PV)JU - g(U, J\phi PV)B + g(U, \phi PV)JB, \xi) \right\} \\
&- \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JPV)U - \omega(PV)JU - g(U, JPV)B + g(U, PV)JB, J\xi) \right. \\
&\quad \left. + g(\omega(JQV)U - \omega(QV)JU - g(U, JQV)B + g(U, QV)JB, J\xi) \right\} \\
&= \cos^2 \theta g(\nabla_U PV, \xi) - g((\nabla_U \psi \phi PV)^h, \xi) + g(\mathcal{T}_U \psi V, \mathfrak{B}\xi) + g((\nabla_U \psi V)^h, \mathfrak{C}\xi) \\
&+ g(\nabla_U JQV, \mathfrak{B}\xi) + g(\nabla_U JQV, \mathfrak{C}\xi) \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(J\phi PV)U - \omega(\phi PV)JU - g(U, J\phi PV)B + g(U, \phi PV)JB, \xi) \right\} \\
&- \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JPV)U - \omega(PV)JU - g(U, JPV)B + g(U, PV)JB, J\xi) \right. \\
&\quad \left. + g(\omega(JQV)U - \omega(QV)JU - g(U, JQV)B + g(U, QV)JB, J\xi) \right\}
\end{aligned}$$

olur ve istenilen elde edilmiş olur. $\square$

Vilms [23], bir Riemanniyen altdaldırmanın tümel jeodezik olması için g.y.k'nın $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}'$ 'nin her ikisinin de özdeş olarak sıfıra eşit olduğunu gösterdi. Bu sonucu kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.15. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. π nin tümel jeodezik olması için g.y.k (4.19) ve (4.20) eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Teorem 4.1.16. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. $\mathcal{D}^\perp$

ters-değişmez dağılımın tümel jeodezik olması için g.y.k

$$g(\nabla_X \psi Y)^h, \psi Z) = g(\mathcal{T}_X Y, \psi \phi Z) - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(Y) \psi X - g(X, Y) [\psi B^v + \mathfrak{C} B^h], \psi Z) \right\}, \quad (4.21)$$

ve

$$g(\psi \mathcal{T}_X JY, \xi) = g((\nabla_X JY)^h, \mathfrak{C} \xi) + \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JY) X - g(X, Y) [\psi B^v + \mathfrak{C} B^h], \mathfrak{B} \xi) - g(\omega(Y) \psi X + g(X, Y) [\psi B^v + \mathfrak{C} B^h], \mathfrak{C} \xi) \right\}, \quad (4.22)$$

olmasıdır. Burada $Z \in \mathcal{D}^\theta$, $X, Y \in \mathcal{D}^\perp$ ve $\xi \in (\mathfrak{C} \text{ek} \pi_*)^\perp$ dir.

İspat 4.1.17. Eğer $g(\nabla_X Y, Z) = 0$ ise ters-değişmez dağılımın tümel jeodezik olduğunu göstermiş oluruz. (2.55) ve (2.40) kullanılarak, $Z \in \mathcal{D}^\theta$ ve $\forall X, Y \in \mathcal{D}^\perp$,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= g(J \nabla_X Y, JZ) = g(J \nabla_X Y, \phi Z) + g(J \nabla_X Y, \psi Z) \\ &= g(\nabla_X JY - \frac{1}{2} \{ \omega(JY) X - \omega(Y) JX - g(X, JY) B + g(X, Y) JB \}, \phi Z) \\ &\quad + g(\nabla_X JY - \frac{1}{2} \{ \omega(JY) X - \omega(Y) JX - g(X, JY) B + g(X, Y) JB \}, \psi Z) \\ &= g(J \nabla_X Y, \phi Z) + g(J \nabla_X Y, \psi Z) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JY) X - \omega(Y) JX - g(X, JY) B + g(X, Y) JB, \phi Z) \right. \\ &\quad \left. + g(\omega(JY) X - \omega(Y) JX - g(X, JY) B + g(X, Y) JB, \psi Z) \right\}, \end{aligned}$$

tekrar (2.40) kullanılarak ve birbirinin zıt işaretlisi olan aynı terimler yok edilerek,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Y, Z) &= g(J\nabla_X Y, \phi Z) + g(\nabla_X JY, \psi Z) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JY)X - \omega(Y)JX - g(X, JY)B + g(X, Y)JB, \psi Z) \right\} \\
&= -g(\nabla_X Y, J\phi Z) + g(\nabla_X \phi Y, \psi Z) + g(\nabla_X \psi Y, \psi Z) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JY)X - \omega(Y)JX - g(X, JY)B + g(X, Y)JB, \psi Z) \right\} \\
&= -g(\nabla_X Y, \phi^2 Z) - g(\nabla_X Y, \psi \phi Z) + g(\mathcal{T}_X \phi Y, \psi Z) + g((\nabla_X \psi Y)^h, \psi Z) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JY)X - \omega(Y)JX - g(X, JY)B + g(X, Y)JB, \psi Z) \right\} \\
&= \cos^2 \theta g(\nabla_X Y, Z) - g(\mathcal{T}_X Y, \psi \phi Z) + g((\nabla_X \psi Y)^h, \psi Z) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JY)X - \omega(Y)JX - g(X, JY)B + g(X, Y)JB, \psi Z) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) &= \cos^2 \theta g(\nabla_X Y, Z) - g(\mathcal{T}_X Y, \psi \phi Z) + g((\nabla_X \psi Y)^h, \psi Z) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JY)X - \omega(Y)JX - g(X, JY)B + g(X, Y)JB, \psi Z) \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $\xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ için,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, \xi) &= g(J\nabla_X Y, J\xi) \\
&= g(\nabla_X JY, J\xi) - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JY)X - \omega(Y)JX - g(X, JY)B + g(X, Y)JB, B\xi + C\xi) \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, \xi) &= g(\mathcal{T}_X JY, \mathfrak{B}\xi) + g((\nabla_X JY)^h, \mathfrak{C}\xi) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JY)X - \omega(Y)JX - g(X, JY)B + g(X, Y)JB, B\xi + \mathfrak{C}\xi) \right\}
\end{aligned}$$

olup, $-g(\mathcal{T}_X JY, B\xi) = g(\psi \mathcal{T}_X JY, \xi)$ olduğundan istenilenler elde edilmiş olur. $\square$

Teorem 4.1.18. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. Eğik dağılım

$\mathcal{D}^\theta$ nın tümel jeodezik olması için g.y.k

$$\begin{aligned}
 g(\mathcal{T}_Z \psi \phi W, X) = & g((\nabla_Z \psi W)^h, \psi X) - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(\phi W) \phi Z \right. \\
 & - g(Z, \phi W) [\phi B^\nu + \mathfrak{B} B^h], X) \\
 & + g(\omega(W) \psi Z + g(Z, JW) B^h \\
 & \left. + g(Z, W) [\psi B^\nu + \mathfrak{C} B^h], JX) \right\},
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

ve

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_Z \psi \phi Z)^h, \xi) = & g((\nabla_Z \psi W)^h, \mathfrak{C} \xi) + g(\mathcal{T}_Z \psi W, \mathfrak{B} \xi) - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(\phi W) \mathfrak{C} Z \right. \\
 & - g(Z, \phi W) [\psi B^\nu + \mathfrak{C} B^h], \xi) - g(\omega(W) JZ \\
 & \left. - g(Z, JW) B - g(Z, W) JB, J\xi) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

olmasıdır. Burada $Z, W \in \mathcal{D}^\theta$, $X \in \mathcal{D}^\perp$ ve $\xi \in (\text{Çek} \pi_*)^\perp$ dir.

İspat 4.1.19. Bir önceki teorem gibi benzer işlemler yaparak bu teoremi ispatlayabiliriz.
 $\forall Z, W \in \mathcal{D}^\theta$ ve $X \in \mathcal{D}^\perp$,

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_Z W, X) &= g(J \nabla_Z W, JX) \\
 &= g(\nabla_Z JW - \frac{1}{2} \{ \omega(JW)Z - \omega(W)JZ - g(Z, JW)B + g(Z, W)JB \}, JX) \\
 &= g(\nabla_Z \phi W, JX) + g(\nabla_Z \psi W, JX) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \{ g(\omega(JW)Z - \omega(W)JZ - g(Z, JW)B + g(Z, W)JB, JX) \} \\
 &= -g(J \nabla_Z \phi W, X) + g(\nabla_Z \psi W, JX) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \{ g(\omega(JW)Z - \omega(W)JZ - g(Z, JW)B + g(Z, W)JB, JX) \} \\
 &= -g(\nabla_Z J \phi W - \frac{1}{2} \{ \omega(J \phi W)Z - \omega(\phi W)JZ - g(Z, J \phi W)B + g(Z, \phi W)JB \}, X) \\
 &\quad + g(\nabla_Z \psi W, JX) - \frac{1}{2} \{ g(\omega(JW)Z - \omega(W)JZ - g(Z, JW)B + g(Z, W)JB, JX) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -g(\nabla_Z \phi^2 W, X) - g(\nabla_Z \psi \phi W, X) + g(\nabla_Z \psi W, JX) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(J\phi W)Z - \omega(\phi W)JZ - g(Z, J\phi W)B + g(Z, \phi W)JB, X) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JW)Z - \omega(W)JZ - g(Z, JW)B + g(Z, W)JB, JX) \right\} \\
&= \cos^2 \theta g(\nabla_Z W, X) - g(\nabla_Z \psi \phi Z, X) + g(\mathcal{T}_Z \psi W + (\nabla_Z \psi W)^h, JX) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(J\phi W)Z - \omega(\phi W)JZ - g(Z, J\phi W)B + g(Z, \phi W)JB, X) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JW)Z - \omega(W)JZ - g(Z, JW)B + g(Z, W)JB, JX) \right\}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $X = \xi$ alalım. $\forall \xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$,

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta g(\nabla_Z W, \xi) &= g((\nabla_Z \psi W)^h, J\xi) - g(\mathcal{T}_Z \psi \phi Z, \xi) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(J\phi W)Z - \omega(\phi W)JZ - g(Z, J\phi W)B + g(Z, \phi W)JB, \xi) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ g(\omega(JW)Z - \omega(W)JZ - g(Z, JW)B + g(Z, W)JB, J\xi) \right\}
\end{aligned}$$

olur ve istenilenler elde edilmiş olur. $\square$

M_1 ve N_1 sırasıyla $\mathcal{D}^{M_1}$ ve $\mathcal{D}^{N_1}$ ortogonal dağılımlarının integral manifoldları olmak üzere, Ponge ve Reckziegel [14], $M_1 \times N_1$ iki manifoldun direkt çarpımı olması için g.y.k $\mathcal{D}^{M_1}$ ve $\mathcal{D}^{N_1}$ dağılımlarının tümel jeodezik olduğunu gösterdi. Böylece, aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.20. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan bir kısmi-eğik altdaldırma olsun. M_1^θ ve $M_1^\perp$ sırasıyla $\mathcal{D}^\theta$ ve $\mathcal{D}^\perp$ dağılımlarının integral manifoldları olmak üzere, $M_1^\theta \times M_1^\perp$ nin bir direkt çarpım olması için g.y.k (4.21) $\sim$ (4.24) eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.1.21. $\mathbb{R}^6$, altı boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, $x_1, \dots, x_5$ ve x_6 elemanlarından oluşan $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ küme bu Öklid uzayının bir bazı olsun. Şimdi $\mathbb{R}^6$ uzayında bileşenlerinden herhangi ikisi sıfırdan farklı olan elemanlarının oluşturduğu kümeyi $\hat{\mathbb{R}}^6$ ile gösterelim yani,

$$\hat{\mathbb{R}}^6 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 : x_1, x_2 \neq 0\}.$$

g_6 metriği $\mathbb{R}^6$ üzerinde bir Öklid metriği ve J_6 kanonik hemen hemen kompleks bir yapı olsun. $\hat{g}_6 = e^\gamma g_6$ metriği, J_6 kompleks yapısı ile $\hat{\mathbb{R}}^6$ uzayının oluşturduğu $(\hat{\mathbb{R}}^6, J_6, \hat{g}_6)$ uzayı

bir global konformal Kaehler manifold oluşturur burada $e^\gamma = (x_1 x_2)^2$ dir.

$\mathbb{R}^3$, üç boyutlu Öklid uzayı ve x_1, x_2, x_3 doğal koordinatları olmak üzere,

$$\hat{\mathbb{R}}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \neq 0\}.$$

olsun ve $\mathbb{R}^3$ uzayının standart (Öklid) metriği g_3 olmak üzere $\hat{\mathbb{R}}^3$ uzayının metriğini $\hat{g}_3 = e^\gamma g_3$ olarak tanımlayalım, burada yine $e^\gamma = (x_1 x_2)^2$ dir. Bu durmuda $(\hat{\mathbb{R}}^3, \hat{g}_3)$ bir Riemanniyen manifold olur.

Bu tanımlamalar ile birlikte, $\pi(x_1, \dots, x_6) = \left(\frac{x_1 - x_4}{\sqrt{2}}, x_3, x_6\right)$ olacak şekilde bir

$\pi : (\hat{\mathbb{R}}^6, J_6, \hat{g}_6) \rightarrow (\hat{\mathbb{R}}^3, \hat{g}_3)$ dönüşümü tanımlayalım.

Bu dönüşümün Jakobiyeen matrisi,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. $rank \pi_* = 3$ olduğundan dolayı π bir altdaldırmadır.

Dikey dağılım,

$$\text{Çek} \pi_* = ger \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_5} \right\}$$

ve

yatay dağılım,

$$(\text{Çek} \pi_*)^\perp = ger \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_6} \right\} \text{ dir.}$$

Yatay dağılım ile Jakobiyeen matrisi arasında bir izometri olduğunu gösterirsek, π altdaldırmasının bir Riemanniyen altdaldırma olduğunu göstermiş oluruz. Böylece,

$$\hat{g}_3 \left(\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right), \pi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \right) = \hat{g}_3 \left(\frac{\partial}{\partial w_2}, \frac{\partial}{\partial w_2} \right) = e^\gamma = \hat{g}_6 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right),$$

$$\hat{g}_3 \left(\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right), \pi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right) = \hat{g}_3 \left(\frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_1} \right) = e^\gamma = \hat{g}_6 \left(\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}_3\left(\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_6}\right), \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_6}\right)\right) &= \hat{g}_3\left(\frac{\partial}{\partial w_3}, \frac{\partial}{\partial w_3}\right) = e^\gamma = \hat{g}_6\left(\frac{\partial}{\partial x_6}, \frac{\partial}{\partial x_6}\right), \\
\hat{g}_3\left(\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right), \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right) &= \hat{g}_3\left(\frac{\partial}{\partial w_2}, \frac{\partial}{\partial w_1}\right) = 0 = \hat{g}_6\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right), \\
\hat{g}_3\left(\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right), \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_6}\right)\right) &= \hat{g}_3\left(\frac{\partial}{\partial w_2}, \frac{\partial}{\partial w_3}\right) = 0 = \hat{g}_6\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_6}\right), \\
\hat{g}_3\left(\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_6}\right)\right) &= \hat{g}_3\left(\frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_3}\right) = 0 = \hat{g}_6\left(\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_6}\right),
\end{aligned}$$

olur ve yatay vektör alanlarının π_* dönüşümü altında boyları korunduğundan π bir Riemanniyen altdaldırmadır diyebiliriz. Şimdi bu altdaldırmanın bir kısmi-eğik altdaldırma olduğunu gösterelim.

Eğik dağılım $\mathcal{D}^\theta = \text{ger}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + \partial_4), \partial_2\right\}$ ve ters-değişmez dağılım $\mathcal{D}^\perp = \text{ger}\{\partial_5\}$ olmak üzere $\text{Çek}\pi_* = \mathcal{D}^\theta \oplus \mathcal{D}^\perp$ dır.

(2.31) den dolayı,

$$\cos\theta = \frac{\hat{g}_6\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}\right), \frac{\partial}{\partial x_2}\right)}{\left\|\frac{\partial}{\partial x_2}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}\right\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olup, $\theta = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

Dolayısıyla π , tümel manifoldu global konformal Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmadır.

4.2 CLAIRAUT KISMİ-EĞİK ALTDALDIRMALAR

Bu bölümde π kısmi-eğik altdaldırmanın Clairaut olması için gerek ve yeter koşulları vereceğiz. İlk olarak, Clairaut altdaldırma tanımını verelim.

$\rho(p)$, $\mathbb{R}^3$ içinde bir dönel yüzey üzerindeki bir p noktasından bu yüzeyin dönme eksenine olan uzaklık ve α bu yüzeydeki bir jeodezik olsun. Clairaut teoremi, $\dot{\alpha}(s)$ hız vektörü ile $\alpha(s)$ meridyeni arasındaki $\theta(s)$ açısı için, $(\rho \sin \theta)(s)$ sabittir.

Tanım 4.2.1. [1] Eğer M_1 üzerindeki herhangi bir jeodezik α için $\rho \sin \theta$ fonksiyonu sabit olacak şekilde M_1 üzerinde pozitif bir ρ fonksiyonu varsa, bir $\pi : (M_1, g) \rightarrow (N_1, g')$

Riemanniyen altdaldırmasına *Clairaut altdaldırma* denir, burada θ , $\dot{\alpha}$ ile M_1 'nin her noktasındaki yatay dağılım arasındaki açıdır.

Teorem 4.2.2. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi eğik altdaldırma olsun. α , M üzerinde bir eğri olmak üzere η ve V sırasıyla teğet vektör alanının yatay ve dikey bileşenleri olsun. α eğrisinin ∇ Levi-Civita koneksiyonuna göre jeodezik olması için g.y.k

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\dot{\alpha}} \psi PV)^h + (\nabla_{\dot{\alpha}} C\eta)^h + (\nabla_{\dot{\alpha}} JQV)^h + \mathcal{A}_{\eta} \phi PV + \mathcal{A}_{\eta} \mathfrak{B}\eta + \mathcal{T}_V \phi PV + \mathcal{T}_V \mathfrak{B}\eta \\ & - \frac{1}{2} \{ \omega(\dot{\alpha}) \mathfrak{C}\eta + \omega(\dot{\alpha}) \psi V + \omega(J\dot{\alpha})\eta + \|\dot{\alpha}\|^2 (\psi PB^v + JQB^v + \mathfrak{C}B^h) \} = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

ve

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\dot{\alpha}} \phi PV)^v + (\nabla_{\dot{\alpha}} \mathfrak{C}\eta)^v + \mathcal{A}_{\eta} \psi V + \mathcal{A}_{\eta} \mathfrak{C}\eta + \mathcal{T}_V \psi V + \mathcal{T}_V C\eta \\ & - \frac{1}{2} \{ \omega(\dot{\alpha}) \mathfrak{B}\eta + \omega(\dot{\alpha}) \phi PV + \omega(J\dot{\alpha})V + \|\dot{\alpha}\|^2 (\phi PB^v + \mathfrak{B}B^h) \} = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

olmasıdır.

İspat 4.2.3. $\dot{\alpha}$ jeodezik olduğundan dolayı $\nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} = 0$ dir. Dolayısıyla,

$$(\nabla_{\dot{\alpha}} J)\dot{\alpha} = \nabla_{\dot{\alpha}} J\dot{\alpha} - J\nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}$$

olduğundan

$$(\nabla_{\dot{\alpha}} J)\dot{\alpha} = \nabla_{\dot{\alpha}} J\dot{\alpha}$$

sağlanır. (2.40) eşitliğinde E ve F vektör alanları yerine $\dot{\alpha}$ yazılırsa ve $V \in \text{Çek}\pi_*$, $\eta \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ olacak şekilde $\dot{\alpha}$ eğrisini $\dot{\alpha} = V + \eta$ biçiminde ve (2.54) ile (2.58) eşitliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ \omega(J\dot{\alpha})\dot{\alpha} - \omega(\dot{\alpha})J\dot{\alpha} - g(\dot{\alpha}, J\dot{\alpha})B + g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})JB \} \\ & = (\nabla_{\eta} \phi PV + \nabla_{\eta} \psi PV + \nabla_{\eta} JQV + \nabla_{\eta} \mathfrak{B}\eta + \nabla_{\eta} \mathfrak{C}\eta \\ & \quad \nabla_V \phi PV + \nabla_V \psi PV + \nabla_V JQV + \nabla_V \mathfrak{B}\eta + \nabla_V \mathfrak{C}\eta) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitlik yatay ve dikey parçalara ayrılırsa (4.25) ve (4.26) bulunmuş olur.

Teorem 4.2.4. $\pi : (M_1, J, g, \omega) \rightarrow (N_1, g')$ bir kısmi eğik altdaldırma olsun. π nin bir $\rho = e^\gamma$

ile birlikte Clairaut altaldırma olması için g.y.k

$$\begin{aligned}
& g(\dot{\alpha}, \text{grad}\gamma)g(V, V) - g((\nabla_{\dot{\alpha}}\mathfrak{B}\eta)^v, \phi PV + \mathcal{A}_\eta \mathfrak{C}\eta + \mathcal{T}_U \mathfrak{C}\eta, \phi PU) \\
& + \frac{1}{2} \{ \omega(\dot{\alpha})\mathfrak{B}\eta + \omega(\dot{\alpha})\phi PU + \omega(J\dot{\alpha})U + \|\dot{\alpha}\|^2(\phi PB^v + \mathfrak{B}B^h) \}, \phi PU \\
& - g((\nabla_{\dot{\alpha}}\mathfrak{C}\eta)^h + \mathcal{A}_\eta \phi PU + \mathcal{A}_\eta \mathfrak{B}\eta + \mathcal{T}_U \phi PU + \mathcal{T}_U \mathfrak{B}\eta, \psi U) \\
& + \frac{1}{2} \{ \omega(\dot{\alpha})\mathfrak{C}\eta + \omega(\dot{\alpha})\psi U + \omega(J\dot{\alpha})\eta + \|\dot{\alpha}\|^2(\psi PB^h + JQB^v + \mathfrak{C}B^h) \}, \psi U = 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

olmasıdır.

İspat 4.2.5. $g(\eta, \eta) = \cos^2\theta$ ve $g(U, U) = \sin^2\theta$ eşitlikleri $\|\dot{\alpha}\| = 1$ iken yazabiliriz. (2.37) ve (2.38) kullanılarak, $\nabla_{\dot{\alpha}}g(U, U) = 2g(\nabla_{\dot{\alpha}}JU, JU)$ olduğu görülür.

$\nabla_{\dot{\alpha}}g(U, U) = \frac{d}{dt}\sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$ eşitliği yazılabilir.

π altaldırmasının Clairaut olması için gerek ve yeter koşul $\frac{d}{dt}(e^\gamma\sin\theta) = 0$ olduğundan, ve bu fonksiyonun türevi alınırsa,

$$g(U, U)g(\text{grad}\gamma, \dot{\alpha}) + g(\nabla_{\dot{\alpha}}JU, JU) = 0$$

olur. Şimdi $g(\nabla_{\dot{\alpha}}JU, JU)$ terimini açalım.

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{\dot{\alpha}}JU, JU) &= g(\nabla_\eta \phi PV + \nabla_\eta \psi PV + \nabla_\eta JQV + \nabla_\eta \mathfrak{B}\eta + \nabla_\eta \mathfrak{C}\eta \\
&\quad \nabla_V \phi PV + \nabla_V \psi PV + \nabla_V JQV + \nabla_V \mathfrak{B}\eta + \nabla_V \mathfrak{C}\eta) \\
&= g((\nabla_\eta \phi PU)^v, \phi PU) + g((\nabla_U \phi PU)^v, \phi PU) \\
&\quad + g(\mathcal{A}_\eta \psi PU, \phi PU) + g(\mathcal{T}_U \psi PU, \phi PU) \\
&\quad + g((\mathcal{A}_\eta JQU, \phi PU) + g(\mathcal{T}_U JQU, \phi PU) \\
&\quad + g((\mathcal{A}_\eta \phi PU, \psi PU) + g(\mathcal{T}_U \phi PU, \psi PU) \\
&\quad + g((\nabla_\eta \psi PU)^h, \psi U) + g((\nabla_U \psi PU)^h, \psi U) \\
&\quad + g((\nabla_\eta JQU)^h, \psi U) + g((\nabla_U JQU)^h, \psi U)
\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeleri yaparak ve (4.25) ile (4.26) eşitlikleri kullanılarak (4.27) elde edilmiş olur.

4.3 CHEN-RICCI EŞİTSİZLİĞİ

Literatürde bir altmanifoldun Ricci eğriliği ve ikinci temel formunun normunun karesi arasındaki ilişkiyi veren ve Chen-Ricci eşitsizliği olarak bilinen bir eşitsizlik ilk olarak [4] de verilmiştir. Bu bölümde, tümel manifoldu Hopf uzay form olan kısmi-eğik altdaldırmanın lifleri için bu eşitsizliğe benzer bir eşitsizlik elde edeceğiz.

$\pi, (M_1(c), J, g, \omega)$ Hopf uzay formundan (N_1, g') Riemanniyen manifolduna giden bir has kısmi-eğik altdaldırma olsun.

$\forall p \in M$ olmak üzere,

$$\{U_1, U_2, \dots, U_{k_1}, U_{k_1+1}, \dots, U_{k_1+2k_2-1}, U_{k_1+2k_2}\}$$

Çek π_* dağılımının bir ortonormal bazı, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ yatay dağılım $(\text{Çek}\pi_*)^\perp$ nin bir ortonormal bazı, ters-değişmez dağılım $D^\perp$ nin bir ortonormal bazı $\{U_1, U_2, \dots, U_{k_1}\}$ ve

$$\{U_{k_1+1}, U_{k_1+2} = \sec\theta\phi U_{k_1+1}, \dots, U_{k_1+2k_2-1}, U_{k_1+2k_2} = \sec\theta\phi U_{k_1+2k_2-1}\}$$

de eğik dağılım $\mathcal{D}^\theta$ nın bir ortonormal bazı olsun. Böylece,

$$g^2(JU_i, U_{i+1}) = \begin{cases} 0, & i \in \{1, \dots, k_1 - 1\} \text{ için} \\ \cos^2\theta, & i \in \{k_1 + 1, \dots, k_1 + 2k_2 - 1\} \text{ için} \end{cases}$$

ve

$$\sum_{i,j=1}^r g^2(JU_j, U_{i+1}) = 2k_2 \cos^2\theta. \quad (4.28)$$

Teorem 4.3.1. $\pi : M_1(c) \rightarrow N$, (M_1, J, g, ω) Hopf uzay formundan (N, g') Riemanniyen manifoldda giden bir kısmi-eğik bir altdaldırma olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \widehat{Ric}(U, V) \geq & \frac{c}{4}(r-1+3\cos^2\theta)g(U, V) - rg(\mathcal{T}_U V, H) \\ & + \frac{3}{4}\left\{(3-r)\omega(U)\omega(V) + \omega(JU)\omega(JV)\right. \\ & \left. + (r-2)\|B\|^2g(U, V) - \|B^V\|^2g(U, V)\right\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

dir. burada $r = 2k_2$ ve herhangi $U, V \in \mathcal{D}^\theta$ ve

$$\widehat{Ric}(U, V) = \sum_{i=1}^{2n} \hat{R}(U, U_i, U_i, V)$$

dir.

İspat 4.3.2. O'Neill'in [11] makalesinde Teorem 1-0 ve (2.42) kullanarak, $\nabla \omega = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} R(U, U_i, U_i, V) &= \sum_{i=1}^{2n} \left\{ \frac{c}{4} \left\{ g(U, V)g(U_i, U_i) - g(U, U_i)g(U_i, V) \right. \right. \\ &\quad + g(JU, V)g(JU_i, U_i) - g(JU, U_i)g(JU_i, V) \\ &\quad \left. \left. - 2g(JU, U_i)g(JU_i, V) \right\} \right. \\ &\quad + \frac{3}{4} \left\{ P(U, V)g(U_i, U_i) - P(U, U_i)g(U_i, V) \right\} \\ &\quad + g(U, V)P(U_i, U_i) - g(U, U_i)P(U_i, V) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ -P(JU, V)g(JU_i, U_i) + P(JU, U_i)g(JU_i, V) \right. \\ &\quad \left. - g(JU, V)P(JU_i, U_i) + g(JU, U_i)P(JU_i, V) \right\} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left\{ P(JU, U_i)g(JU_i, V) + P(JU_i, V)g(JU, U_i) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Şimdi ifadeleri biraz daha açalım. (2.44) eşitliğini kullanarak yukarıdaki ifadeyi ırdeleyebiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} R(U, U_i, U_i, V) &= \frac{c}{4} \left\{ rg(U, V) - g(U, V) + 3\cos^2 \theta g(U, V) \right\} \\
&+ \sum_{i=1}^{2n} \left[\frac{3}{4} \left\{ r \left[-\omega(U)\omega(V) + \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U, V) \right] \right. \right. \\
&- g(U_i, V) \left[-\omega(U)\omega(U_i) + \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U, U_i) \right] \\
&+ g(U, V) \left[-\omega(U_i)\omega(U_i) + \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U_i, U_i) \right] \\
&- g(U_i, U) \left[-\omega(U_i)\omega(V) + \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U_i, V) \right] \left. \right\} \\
&+ \frac{1}{4} \left\{ g(JU_i, V) \left[-\omega(U_i)\omega(JU) + \frac{1}{2} \|B\|^2 g(JU, U_i) \right] \right. \\
&+ g(JU, U_i) \left[-\omega(JU_i)\omega(V) + \frac{1}{2} \|B\|^2 g(JU_i, V) \right] \left. \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ g(JU_i, V) \left[-\omega(U_i)\omega(JU) + \frac{1}{2} \|B\|^2 g(JU, U_i) \right] \right. \\
&+ g(JU, U_i) \left[-\omega(JU_i)\omega(V) + \frac{1}{2} \|B\|^2 g(JU_i, V) \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Düzenleme yaparsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} R(U, U_i, U_i, V) &= \frac{c}{4} \left\{ (r - 1 + 3\cos^2 \theta) g(U, V) \right\} \\
&+ \frac{3}{4} \left\{ r \left[-\omega(U)\omega(V) + \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U, V) \right] \right. \\
&+ \omega(U)\omega(V) - \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U, V) - \|B^v\|^2 g(U, V) \left. \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \|B\|^2 rg(U, V) - \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U, V) + \omega(U)\omega(V) \left. \right\} \\
&+ \frac{1}{4} \left\{ \omega(JU)\omega(JV) - \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U, V) \right. \\
&+ \omega(U)\omega(V) - \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U, V) \left. \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \omega(JU)\omega(JV) - \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U, V) - \frac{1}{2} \|B\|^2 g(U, V) \right\}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}\widehat{Ric}(U, V) = & \frac{c}{4}(r-1+3\cos^2\theta)g(U, V) - rg(\mathcal{T}_U V, H) \\ & + \frac{3}{4}\left\{(3-r)\omega(U)\omega(V) + \omega(JU)\omega(JV) \right. \\ & \left. + (r-2)\|B\|^2g(U, V) - \|B^v\|^2g(U, V)\right\} + \sum_{i=1}^r g(\mathcal{T}_{U_i} V, \mathcal{T}_U U_i)\end{aligned}$$

olduğundan (4.29) sağlanır.

Sonuç 4.3.3. $\pi, (M_1(c), J, g, \omega)$ Hopf uzay formdan (N_1, g') Riemanniyen manifolduna giden bir has kısmi-eğik altdaldırma olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\widehat{Ric}(U) \geq & \frac{c}{4}(r-1+3\cos^2\theta) - rg(\mathcal{T}_U U, H) \\ & + \frac{3}{4}\left\{(3-r)(\omega(U))^2 + r\|B\|^2 + (\omega(JU))^2 - \|B^v\|^2\right\},\end{aligned}\tag{4.30}$$

burada $r = 2k_2$ ve $\forall U \in \mathcal{D}^\theta$.

İspat 4.3.4. Bir önceki teoremden (4.29) eşitsizliğinde $V = U$ alınıp yerine konursa ispat tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned}\widehat{Ric}(U) = & \frac{c}{4}\left(r-1+3\sum_{i=1}^r g^2(JU_i, U_{i+1})\right) - rg(\mathcal{T}_U U, H) + \sum_{i=1}^r \|\mathcal{T}_U U_i\|^2 \\ & + \frac{3}{4}\left\{(3-r)(\omega(U))^2 + r\|B\|^2 + (\omega(JU))^2 - \|B^v\|^2\right\},\end{aligned}\tag{4.31}$$

burada $\forall U \in \mathcal{D}^\theta$,

$$\widehat{Ric}(U) = \sum_{i=1}^r \hat{R}(U, U_i, U_i, U),\tag{4.32}$$

ve

$$\sum_{i=1}^r g^2(JU_i, U) = \cos^2\theta.\tag{4.33}$$

Eşitsizliğin sağlanması için g.y.k $\mathcal{T}_U U_i = 0, i = 1, \dots, r$ sağlanmasıdır. Bu durum her bir lifin jeodezik olması anlamına gelir.

Sonuç 4.3.5. $\pi : M_1(c) \rightarrow N_1, (M_1, J, g, \omega)$ Hopf uzay formdan (N_1, g') Riemanniyen

manifoldda giden bir kısmi-eğik bir atdaldırma olsun. Bu durumda,

$$\hat{\tau} \geq \frac{cr}{4}(r-1+3\cos^2\theta) - r^2\|H\|^2 + \frac{3}{4}\left\{(4-2r)\|B^v\|^2 + \|B\|^2\right\} \quad (4.34)$$

dır.

İspat 4.3.6. (4.29) eşitliğinde $U = V = U_j$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \hat{\tau} = \sum_{j=1}^r \widehat{Ric}(U_j, U_j) &= \sum_{j=1}^r \left[\frac{c}{4}(r-1+3\cos^2\theta)g(U_j, U_j) - rg(\mathcal{T}_{U_j}U_j, H) \right. \\ &\quad + \frac{3}{4}\left\{(3-r)\omega(U_j)\omega(U_j) + \omega(JU_j)\omega(JU_j) \right. \\ &\quad \left. + (r-2)\|B\|^2g(U_j, U_j) - \|B^v\|^2g(U_j, U_j)\right\} \left. \right] \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^r g(\mathcal{T}_{U_i}U_j, \mathcal{T}_{U_j}U_i) \end{aligned} \quad (4.35)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.34) elde edilir.

5 TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezin yapı taşlarını oluşturmak için Riemanniyen manifoldlardan, hemen hemen Hermityen manifoldlardan, Kaehleriyen manifoldlardan, yerel konformal Kaehler manifoldlardan, kısmi-eğik altmanifoldlardan, Riemanniyen altdaldırmalardan ve tümel manifoldu Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalardan bahsedildi.

Dördüncü bölüm olan bulgular kısmında bu temel bilgileri kullanarak tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalardan yeni teoremler, sonuçlar ve eşitsizlikler elde edildi. İlk olarak kısmi-eğik altdaldırmalar için Lemma 4.1.1 de temel eşitlikler ve Lee vektör alanı B yatay olduğunda bu Lemmanın nasıl değiştiğini gösteren Sonuç 4.1.3 verildi. Daha sonra ϕ ve ψ paralel olduğunda bu lemmadaki eşitliklerden ikisinin değişimi verildi. Eğik dağılımın ve ters değişmez dağılımın integrallenebilir olması için g.y.k Teorem 4.1.7 de ve Teorem 4.1.9 de ispatlanmış olup yatay dağılımın daima integrallenebilir olduğu Teorem 4.1.11 de gösterilmiştir. Yatay dağılımın integrallenebilir olması ile tümel jeodezik olmasının eş değer olduğu yine bu teoremle gösterilmiştir. Benzer şekilde dikey dağılımında tümel jeodezik olması için g.y.k verilip aynı metod ile Teorem 4.1.13 te ispatlanmıştır. Bu bulgular ışığında Sonuç 4.1.15 te π kısmi-eğik altdaldırmasının tümel jeodezik olması için g.y.k sunulmuştur. Eğik dağılımın ve ters değişmez dağılımın tümel jeodezik olması için g.y.k Teorem 4.1.16 ve 4.1.18 de verilmiş olup daha önce de Taştan vd. [21] tarafından tümel manifoldu Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar için gösterilmiş bu teoremler ve sonuçların bir genellemesi yapılmıştır. Bu alt bölümde son olarak tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar için bir örnek verilmiştir. İkinci alt bölümde bu altdaldırmanın sözü geçen manifold üzerindeki bir eğrinin jeodezik olması için g.y.k Lemma 4.25 de verilmiş ve bu altdaldırmanın bir Clairaut altdaldırma olması için g.y.k Lemma 4.26 de gösterilmiştir. Son olarak, tümel manifoldu Hopf uzay form olan kısmi-eğik altdaldırmaların lifleri için bir Chen-Ricci eşitsizliği sunulmuştur.

Bu çalışmada tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar sunulmuştur. Daha önce tümel manifoldu Kaehler manifold olan kısmi-eğik altdaldırmalar çalışılmış ve bu tezde genelleştirilmiş hali verilmiştir. Elde edilen sonuçlar

kapsamında üzerinde düşünülebilir ve zenginleştirilebilir hale gelmiştir.



KAYNAKLAR

- [1]. Bishop, R.L., 1972, Clairaut submersions, *Differential Geometry (in Honor of Kentaro Yano)*, Tokyo, Kinokuniya, 21-31.
- [2]. Bonanzinga, V., Matsumoto, K., 2023, Semi-slant submanifolds in a locally conformal Kaehler space form, *Hacet. J. Math. Stat*, Volume 52 (5), 1206 – 1218.
- [3]. Chen, B.Y., 1990, Slant immersions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 41, 135-137.
- [4]. Chen, B.Y., 1999, Relations Between Ricci Curvature and Shape Operator for Submanifolds with Arbitrary Codimensions, *Glasgow Math. J.* 41, 33-41.
- [5]. Chern, S.S., Chen, W.H. and Lam, K.S., 1998, *Lectures on differential geometry*, World Scientific, London, ISBN: 9810234945.
- [6]. Dragomir, S., Ornea, L., 1998, *Locally conformal Kähler geometry*, Birkhauser: Boston, Basel, Berlin.
- [7]. Gray, A., 1965, Minimal varieties and almost Hermitian submanifolds, *Michigan Mathematical Journal*, 12(3), 273-287.
- [8]. Gray, A., 1967, Pseudo-Riemannian Almost Product Manifolds and Submersions, *Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. 16, No.7.
- [9]. Hsiung, C.C., 1995, Almost complex and complex structures, World Scientific, London, ISBN: 981-02-1712-9.
- [10]. Marrero, J. C. and Rocha, J., 1994, Locally conformal Kaehler submersions, *Geom. Dedicata*, 52(3), 231-241.
- [11]. O'Neill, B., 1966, The fundamental equations of a submersion, *Mich. Math. J.*, 13, 458-469.
- [12]. O'Neill, B., 1983, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, London, ISBN: 0-12-526740-1.
- [13]. Park, K.S., Prasad R., 2013, Semi-Slant Submersions, *Bull. Korean Math. Soc.*, 50(3), 951-962.
- [14]. Ponge R., Reckziegel H., 1993, Twisted products in pseudo-Riemannian geometry, *Geom. Dedicata*, 48, 15-25.
- [15]. Şahin, B., 2009, Warped product submanifolds of Kaehler manifolds with a slant factor, *Annales Polonici Mathematici*, 95, 3, 207-226.

- [16]. Şahin, B., 2010, Anti-invariant Riemannian Submersions from almost Hermitian manifolds, *Cent. Eur. J. Math.*, 8(3), 437-447.
- [17]. Şahin, B., 2011, Slant Submersions from almost Hermitian manifolds, *Bull. Math. Roum.*, 54(102), No.1, 93-105.
- [18]. Şahin, B., 2012, *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel, Ankara.
- [19]. Şahin, B., 2013, Semi-invariant submersions from almost Hermitian manifolds, *Canadian Mathematical Bulletin*, 56(1), 173-183.
- [20]. Sayar, C., Özdemir, F., Taştan, H. M., Tripathi, M.M., 2020, Generic Submersions from Kaehler Manifolds, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43, 809–831 (2020). <https://doi.org/10.1007/s40840-018-00716-2>
- [21]. Taştan, H. M., Şahin, B., Yanan, Ş., 2016, Hemi-Slant Submersions, *Mediterr. J. Math.*, 13, 2171-2184.
- [22]. Vaisman, I., 1982, Generalized Hopf manifolds, *Geometry Dedicata*, 13, 233-255.
- [23]. Vilms, J., 1970, Totally geodesic maps, *J. Differential Geom.*, 4, 73-79.
- [24]. Yano, K. and Kon, M., 1984, *Structures on manifolds*, World Scientific, Singapore.
- [25]. Watson, B., 1976, Almost Hermitian submersions, *J. Differ. Geom.*, 11(1), 147–165.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Deniz ULUSOY
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2020

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2024

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Pirinççi, B., Çimen, Ç., Ulusoy, D., 2023,. Clairaut and Einstein conditions for locally conformal Kaehler submersions, <i>Istanbul Journal of Mathematics</i> , 1(1), 28-39. https://doi.org/10.26650/ijmath.2023.00003	
Bildiriler	
Hemi-Slant Submersions from Locally Conformal Kaehler Manifolds - The International Conference Riemannian Geometry and Applications – RIGA 2023	

