

**PARABOLİK TIPTEN BAZI DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI**

Sabahat GÜNEŞ AYGÜN

**HAZİRAN 2024
DİYARBAKIR**

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PARABOLİK TİPTEN BAZI DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI**

Sabahat GÜNEŞ AYGÜN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

HAZİRAN 2024
DİYARBAKIR

**PARABOLİK TIPTEN BAZI DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN
PATLAMASI**

Sabahat GÜNEŞ AYGÜN tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Danışman, **Matematik Bölümü**
Dicle Üniversitesi
Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Danyal SOYBAŞ (*)
Matematik Bölümü, Erciyes Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa MIZRAK
Matematik Bölümü, Şırnak Üniversitesi

ONAY

Savunma Tarihi: 26 / 06 / 2024

(*) Jüri Başkanı

(**) Tez Danışmanı

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Sabahat GÜNEŞ AYGÜN

İmza:

TEŞEKKÜR

Bu tez çalıőmasının tamamlanmasında bana rehberlik eden, bilgi ve deneyimleriyle yolumu aydınlatan değerli danışmanım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN'e en içten teőekkürlerimi sunarım. Kendisi, bu sürecin her aőamasında gösterdiği destek ve sabırla, akademik yolculuğumda büyük bir ilham kaynağı olmuştur.

Ayrıca, bu günlere gelmemde bana güç veren ve sürekli yanımda olan sevgili anneme en derin minnet ve sevgilerimi sunarım. Tez çalıőmam sırasında zamanını, sabrını ve desteğini esirgemeyen sevgili eőim İbrahim Halil AYGÜN'e ve çocuklarıma da sonsuz teőekkürlerimi iletmek istiyorum.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	4
3. ÖN BİLGİLER.....	7
3.1 Diferansiyel Denklemler ile İlgili Bazı Kavramlar	7
3.2 Lebesgue Uzayı	9
3.3 Sobolev Uzayı	10
3.4 Bazı Önemli Eşitlikler ve Eşitsizlikler.....	12
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	14
4.1 Parabolik Tipten Bir Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması.....	14
4.2 Parabolik Tipten m -Laplasyan ve Kirchhoff Terimli Denklemin Çözümünün Patlaması	32
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	42
5.1 Sonuçlar.....	42
5.2 Öneriler	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
R^n	n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	p . mertebeden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	Hilbert Uzayı
∇	Nabla operatörü (Gradyent)
Δ	Laplace operatörü

ÖZET

PARABOLİK TIPTEN BAZI DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

GÜNEŞ AYGÜN, Sabahat
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Haziran 2024, 41 sayfa

Bu tezin ilk bölümünde, diferansiyel denklemler genel hatlarıyla ele alınmıştır. Öncelikle, adi diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler hakkında temel bilgiler verilmiş, ardından kısmi türevli denklemler arasında yer alan parabolik ve hiperbolik denklemlerin özel olarak evolüsyon denklemi olduğu vurgulanmıştır. Bu denklemlerin çeşitli bilim dallarında nasıl analiz edildiği ve matematiksel modellerinin nasıl oluşturulduğu üzerinde durulmuştur. Diferansiyel denklemlerin patlaması ile ilgili bir adi diferansiyel denklem ve bir kısmi diferansiyel denklem örneği verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, çalıştığımız tipten parabolik denklemler ve bunlar ile ilgili literatürde yapılmış çalışmalara yer verilmiştir. Tezin ana amacı olarak, viskoelastik Kirchhoff denklem sistemi ile parabolik tipten m -Laplasyan ve Kirchhoff terimli denklemlerin çözümünün patlamasının araştırması ifade edilmiştir. Son yıllarda yapılan çalışmalar, tarihi gelişimi ile verilmiştir. Üçüncü bölümde, tezin temelini oluşturan bazı uzaylar, tanımlar ve eşitsizlikler sunulmuştur. İlk kısımda, diferansiyel denklemler hakkında genel bilgiler verilmiş; adi diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemlerin tanımları, elde edilmiş yöntemleri ve çözüm teknikleri anlatılmıştır. İkinci kısımda, Lebesgue uzayı tanımlanmış ve bu uzayın özellikleri açıklanmıştır. Üçüncü kısımda ise, Sobolev uzayı ve Sobolev gömülme teoremi hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü kısımda, Cauchy eşitsizliği, Young eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Green özdeşliği gibi tezin temelini oluşturan diğer eşitsizlikler ifade edilmiştir. Dördüncü bölüm, tezin özgün araştırma kısmıdır. Bu bölümde, viskoelastik Kirchhoff denklem sistemi ve parabolik tipten m -Laplasyan ve Kirchhoff terimli denklem üzerinde çalışılmıştır. Denklemlerin çözümünde kullanılan teorem ve lemmalar ifade edilmiş, viskoelastik Kirchhoff denklem sistemi ile m -Laplasyan ve Kirchhoff terimli denklemlerin çözümlerinin patlaması, tezde yer alan teorem ve lemmalar kullanılarak ispatlanmıştır. Beşinci bölümde ise, çalışmanın sonuçları ve gelecekte yapılacak araştırmalar için öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Patlama, Kirchhoff denklemi, m -Laplasyan denklemi, Viskoelastik tipli denklem.

ABSTRACT

BLOW-UP OF SOLUTIONS OF SOME PARABOLIC EQUATIONS

GÜNEŞ AYGÜN, Sabahat

Master of Science in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

June 2024, 41 pages

In the first section of this thesis, differential equations are discussed in general terms. Initially, basic information about ordinary differential equations and partial differential equations is provided, followed by an emphasis on parabolic and hyperbolic equations among partial differential equations, highlighting their role as evolution equations. The analysis of these equations in various scientific fields and the development of their mathematical models are discussed in detail. Examples of an ordinary differential equation and a partial differential equation related to the phenomenon of blow-up in differential equations are presented. In the second section of the thesis, parabolic equations of the type studied and related works in the literature are reviewed. The main objective of the thesis is stated as investigating the blow-up solutions of the viscoelastic Kirchhoff equation system and m -Laplacian equations with Kirchhoff terms of parabolic type. Recent studies, along with their historical development, are provided. In the third section, some fundamental spaces, definitions, and inequalities that form the basis of the thesis are presented. The first part provides general information about differential equations, including the definitions, derivation methods, and solution techniques for ordinary differential equations and partial differential equations. The second part defines the Lebesgue space and explains its properties. The third part provides information about the Sobolev space and the Sobolev embedding theorem. The fourth part discusses other fundamental inequalities such as the Cauchy inequality, Young's inequality, Minkowski inequality, and Green's identity. The fourth section is the original research part of the thesis. In this section, the viscoelastic Kirchhoff equation system and the parabolic type m -Laplacian and Kirchhoff term equations are studied. The theorems and lemmas used in solving these equations are stated, and the blow-up of the solutions of the viscoelastic Kirchhoff equation system and the m -Laplacian and Kirchhoff term equations is proven using the theorems and lemmas presented in the thesis. In the fifth section, the results of the study and recommendations for future research are presented.

Keywords: Blow-up, Kirchhoff equation, m -Laplacian equation, viscoelastic type equations.

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, bir fonksiyonun sonlu mertebeden türevlerini içeren denklemler olarak tanımlanabilir. Fizikten mühendisliğe, ekonomiden biyolojiye kadar pek çok alanda karşımıza çıkan bu denklemler, doğadaki olayların matematiksel modellenmesinde yaygın olarak kullanılır. Newton ve Leibniz'in 17. yüzyılda kalkülüsü geliştirmesiyle birlikte diferansiyel denklemler, matematiğin temel taşlarından biri haline gelmiştir. Newton'un hareket yasaları ve Leibniz'in kalkülüs notasyonu, diferansiyel denklemlerin matematiksel ve uygulamalı bilimlerdeki önemini artırmıştır.

18. ve 19. yüzyıllarda, Euler, Lagrange ve Laplace gibi matematikçiler, diferansiyel denklemler teorisine büyük katkılarda bulunmuşlardır. Euler'in diferansiyel denklemler üzerine yaptığı çalışmalar, bu denklemlerin analitik çözümlerinin geliştirilmesine olanak tanımıştır. Lagrange, mekanik sistemlerde diferansiyel denklemlerin uygulanabilirliğini gösterirken, Laplace ise olasılık ve astronomi alanlarında diferansiyel denklemleri kullanmıştır (Arnold, 2013; Brown ve Churchill, 2011).

19. yüzyılda diferansiyel denklemlerin uygulama alanları daha da genişlemiş ve modern matematiğin merkezi bir unsuru haline gelmiştir. Özellikle, lineer olmayan diferansiyel denklemler ve kaos teorisi üzerine yapılan araştırmalar, bu denklemlerin karmaşık dinamik sistemlerdeki rolünü daha iyi anlamamıza yardımcı olmuştur. Lorenz'in kaos teorisine katkıları, diferansiyel denklemlerin atmosferik modellemede ve öngörülemeyen sistemlerde nasıl kullanılabileceğini göstermiştir. Günümüzde, diferansiyel denklemler mühendislikten biyolojiye, ekonomiden fiziğe kadar birçok alanda geniş uygulama alanlarına sahiptir. Lineer diferansiyel denklemler ve bunların çözümleri, mühendislik sistemlerinin analizinde ve tasarımında yaygın olarak kullanılmaktadır. Matematiksel biyoloji alanında, diferansiyel denklemler popülasyon dinamiklerini modellemek için kullanılmaktadır. Bu denklemler, iki popülasyonun zaman içindeki değişimini modellemekte ve biyolojik sistemlerde denge durumlarının analizini sağlamaktadır (Boyce ve DiPrima, 2009; Blanchard, Devaney ve Hall, 2012).

Bir bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemler, kısmi türevli diferansiyel denklemler olarak adlandırılır. Kısmi türevli diferansiyel denklemler, doğadaki olayların matematiksel modellenmesinde kritik bir rol oy-

nar. Parabolik, hiperbolik ve eliptik olmak üzere üç ana tipe ayrılır. Parabolik ve hiperbolik denklemler zamana bağımlıdır ve evolüsyon denklemleri olarak adlandırılırlar. Bu tür denklemler, hareket, ısı transferi, elektrik devreleri ve kimyasal reaksiyonlar gibi birçok olayın modellenmesinde kullanılır. Bu nedenle bu denklemlerin çözümlerinin bulunması önemlidir. Aslında çoğu zaman çözümün davranışının incelenmesi açık çözümü bulmaktan daha önemli olabilmektedir. Çözüm var mıdır? tek midir? patlama meydana gelir mi? asimptotik davranışı nasıldır? kararlı mıdır? gibi sorular önemlidir (Pişkin, 2021a).

Bu tez, parabolik tipten bazı özel denklemlerin çözümlerinde meydana gelen patlama olgusunu incelemektedir. Patlama, çözümlerin sonlu bir zamanda sonsuza doğru büyümesi veya ani istikrarsız şekilde değişmesi olarak tanımlanabilir.

Bu çalışmanın temel amacı, parabolik tipten viskoelastik Kirchhoff denklem sisteminin ve m-Laplasyan terimli denkleminin patlaması için yeterli koşulları elde etmeyi amaçlamaktadır. Bu denklemler, mühendislik ve uygulamalı bilimlerde sıklıkla karşılaşılan problemlerin matematiksel modelleridir. Bu nedenle, bu denklemlerin çözümlerinin özelliklerini anlamak, ilgili fiziksel sistemlerin davranışlarını kestirmek açısından büyük önem taşır.

Şimdi çözümlerin patlaması durumuna bazı basit örnekler verelim:

Örnek 1: $u = u(t)$ için

$$\begin{cases} u' = u^4 \\ u(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3(2-t)}}$$

dır. Burada $t = 2$ için $u(t) \rightarrow \infty$ olacağından çözüm patlar.

Örnek 2: $u = u(x, t)$ için

$$\begin{cases} u_t + xu_x = u^2 \\ u(x, 0) = \cos x \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(x, t) = \frac{\cos xe^{-t}}{1 - t \cos xe^{-t}}$$

dır. Burada $t = 1$ ve $x = 2\pi e$ için $u(x, t) \rightarrow \infty$ olacağından çözüm patlar.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezin esas amacı dördüncü bölümün birinci kısmında ele alınan parabolik tipten viskoelastik ve Kirchhoff terimli

$$\begin{cases} (1 + |u|^{p-2}) u_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau - \Delta u_t = f_1(u, v) \\ (1 + |v|^{q-2}) v_t - M(\|\nabla v\|^2) \Delta v + \int_0^t h(t - \tau) \Delta v(\tau) d\tau - \Delta v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

denklem sisteminin ve dördüncü bölümün ikinci kısmında ele alınan parabolik tipten m -Laplasyan ve Kirchhoff terimli

$$(1 + |u|^{q-2}) u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) - M(\|\nabla u\|) \Delta u = |u|^{p-2} u$$

denkleminin çözümünün patlamasını incelemektir.

Şimdi bu konu ile ilgili yapılmış çalışmalarını inceleyelim:

Polat (2007)

$$(1 + |u|^{m-2}) u_t - u_{xx} = |u|^{p-2} u$$

denkleminin çözümünün patlamasını çalıştı.

Korpusov ve Sveshnikov (2008)

$$(1 + |u|^{m-2}) u_t - \Delta u - \Delta u_t = u(u - \alpha)(u - \beta)$$

denkleminin çözümünün patlamasına çalıştılar.

Hu, Qi ve Zhang (2014)

$$(1 + |u|^{m-2}) u_t - \Delta u + \int_0^t g(t - s) \Delta u(s) ds = |u|^{p-2} u$$

denkleminin çözümünün patlamasına çalıştılar.

Pang ve Qiao (2015)

$$\begin{cases} (1 + |u|^{m-2}) u_t - \Delta u = f_1(u, v) \\ (1 + |v|^{m-2}) v_t - \Delta v = f_2(u, v) \end{cases}$$

denkleminin çözümünün patlamasına çalıştılar.

Dang, Hu, Xia ve Zhang (2017)

$$(1 + |u|^{k-2}) u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds = |u|^{p-2} u$$

denkleminin çözümünün üstel büyümesini çalıştılar.

Ouaoua ve Maouni (2019)

$$(1 + \omega |u|^{m(x)-2}) u_t - \operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = b |u|^{r(x)-2} u$$

denkleminin çözümünün patlamasına ve üstel büyümesini çalıştılar.

Pişkin ve Ekinci (2019)

$$\begin{cases} (1 + |u|^{q-2}) u_t - \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f_1(u, v) \\ (1 + |v|^{q-2}) v_t - \operatorname{div} (|\nabla v|^{m-2} \nabla v) = f_2(u, v) \end{cases}$$

denkleminin çözümünün patlamasına ve üstel büyümesine çalıştılar.

Ouaoua, Khaldi ve Maouni (2020)

$$(1 + |u|^{m-2}) u_t - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = |u|^{r-2} u$$

denkleminin kararlılığını çalıştılar.

Pişkin ve Ekinci (2020)

$$(1 + |u|^{q-2}) u_t - \Delta u_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u = |u|^{p-2} u$$

denkleminin çözümünün patlamasına ve üstel büyümesine çalıştılar.

Pişkin ve Ekinci (2021)

$$(1 + |u|^{q-2}) u_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds = f(u)$$

denkleminin çözümünün patlamasına ve üstel büyümesine çalıştılar.

Ouaoua ve Boughamsa (2022)

$$\begin{cases} (1 + |u|^{m-2}) u_t - \Delta u - \Delta u_t + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds = f_1(u, v), \\ (1 + |v|^{k-2}) v_t - \Delta v - \Delta v_t + \int_0^t g(t-s) \Delta v(s) ds = f_2(u, v) \end{cases}$$

denkleminin çözümünün üstel büyümesine çalıştılar.

Pişkin ve Butakin (2023)

$$\left(1 + |u|^{p(x)-2}\right) u_t + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u = |u|^{q(x)-2} u$$

denkleminin global varlığına ve enerji azalmasına çalıştılar.

Pişkin ve Ekinci (2023)

$$\begin{cases} (1 + |u|^{q-2}) u_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + \int_0^t w_1(t - \tau) \Delta u(s) ds = f_1(u, v) \\ (1 + |v|^{q-2}) v_t - M(\|\nabla v\|^2) \Delta v + \int_0^t w_2(t - \tau) \Delta v(s) ds = f_2(u, v) \end{cases}$$

denkleminin patlamasına ve üstel büyümesine çalıştılar.

Pişkin ve Demir (2023)

$$\begin{cases} (1 + |u|^{p-2}) u_t - \Delta u_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = f_1(u, v), \\ (1 + |v|^{q-2}) v_t - \Delta v_t - M(\|\nabla v\|^2) \Delta v + \int_0^t h(t - \tau) \Delta v(\tau) d\tau = f_2(u, v) \end{cases}$$

denkleminin üstel büyümesine çalıştılar.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde diferansiyel denklemlerle ilgili bazı temel kavramlar, Lebesgue ve Sobolev uzayı, bazı önemli eşitsizlikler verilmiştir. (Adams and Fournier, 2003; Brezis, 2011; Evans, 1998; Kesevan 2003; Pişkin, 2017a; Pişkin, 2017b; Pişkin, 2021b).

3.1 Diferansiyel Denklemler İle İlgili Bazı Kavramlar

Tanım 3.1.1 Diferansiyel denklemler, bir fonksiyon ile bu fonksiyonun sonlu mertebeden türevlerini içeren denklemler olarak tanımlanır. Bu denklemlerin temel özelliği, bağımlı değişkenin bir veya birden fazla türevinin bulunmasıdır.

Tanım 3.1.2 Diferansiyel denklem, bir bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre türevini içerirse buna adi diferansiyel denklem denir. Bu denklemler genel olarak

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde veya eğer $y^{(n)}$ yalnız bırakılabiliyorsa

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

şeklinde yazılır. Adi diferansiyel denklemler, birçok bilim ve mühendislik alanında ortaya çıkan dinamik sistemlerin modellenmesi ve analizi için kullanılır. Fiziksel sistemlerin, biyolojik süreçlerin, ekonomik modellerin ve mühendislik tasarımlarının davranışlarını incelemek için temel araçlardandır.

Tanım 3.1.3 Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi (basamağı) denir. En yüksek mertebeli türevin cebirsel kuvvetine (üssüne), diferansiyel denklemin derecesi denir. Derece belirlenirken denklem, türevlere göre polinom olarak yazılmalıdır.

Tanım 3.1.4 Bir diferansiyel denklemde, bağımlı değişken ve türevleri yalnız birinci dereceden ve bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorsa denkleme doğrusal (linear) denklem, aksi halde doğrusal olmayan (nonlinear) denklem denir. n . mertebeden en genel doğrusal adi diferansiyel denklem

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x)$$

biçimindedir. Denklem eğer; $b(x) = 0$ ise homojen, $b(x) \neq 0$ ise homojen olmayan denklem olarak adlandırılır.

Ayrıca eğer katsayılar sabit sayılar ise sabit katsayılı diferansiyel denklem, aksi halde değişken katsayılı diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

3.1.1 Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilişi

Diferansiyel denklemlerin elde edilmeleri genel olarak üç kısımda toplanabilir.

i. Bir problem cebirsel olarak ifade edilebilir. İçerisinde keyfi sabitlerin yer aldığı bir cebirsel denklem, düzlem üzerinde bir eğri ailesi oluşturur. Bu cebirsel denklemdeki keyfi sabitler, denklem ve denklemin türevleri arasında ortadan kaldırılarak bir diferansiyel denklem elde edilebilir.

ii. Problemin geometrik özellikleri tanımlanarak, bu özelliklere uyan eğrinin bulunması da diferansiyel denklem verir.

iii. Fizik, kimya, biyoloji, mühendislik gibi uygulamalı bilim dallarında, problemin matematiksel modeli de genel olarak diferansiyel bir denklemdir.

Tanım 3.1.5 Bir bağımlı değişkenin iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere kısmi türevli denklem denir. u bağımlı, x ve y bağımsız değişkenleri için en genel kısmi türevli denklem

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0$$

veya

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \dots\right) = 0$$

dır.

Tanım 3.1.6 Bir kısmi türevli denklemde bağımlı değişken ve türevleri birinci dereceden ise ve bu ifadeler denklemde çarpım halinde bulunmuyorsa denklem lineer (doğrusal) diferansiyel denklemdir. Aksi hâlde lineer olmayan (nonlinear) denklem adını alır.

Lineer olmayan bir kısmi türevli denklemde en yüksek mertebeden türevli terimlerin dereceleri bir ve bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorsa yarı lineer denklem olur. Eğer en yüksek mertebeli terimlerin dereceleri bir ve katsayıları sadece bağımsız

değişkenlerden oluşuyorsa hemen hemen lineer denklemdir. Dolayısıyla yarı lineer ve hemen hemen lineer denklemler lineer olmayan denklemlerin özel halidir.

İki bağımsız ve bağımlı değişken içeren birinci mertebeden en genel lineer, yarı lineer ve hemen hemen lineer denklemler sırasıyla

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = D(x, y),$$

$$A(x, y, u)u_x + B(x, y, u)u_y = D(x, y, u),$$

ve

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y = D(x, y, u),$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.7 Bir kısmi türevli denklemin mertebesi kadar sürekli türevli keyfi fonksiyon içeren ve denklemini sağlayan fonksiyonlara genel çözüm denir. Denklemini sağlayan fakat keyfi sabit, fonksiyon ve parametre içermeyen çözümlere özel çözüm denir.

Genel olarak kısmi türevli denklemlerde; genel çözüm, özel çözüm ve tekil çözüm olmak üzere üç çeşit çözüm ile ilgileniyor olsakta denklemin veya başlangıç sınır koşullarının durumuna göre zayıf çözüm, güçlü çözüm ve yumuşak çözüm,... gibi çözümleri olabilir. Bu nedenle genel ve özel çözümlere klasik çözüm denir.

3.2. Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 3.2.1 Ω , R^n de ölçülebilir bir bölge olsun, u ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise yani,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları p . kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir. Bu şartı sağlayan tüm u fonksiyonlarının uzayına L^p Lebesgue uzayı denir. Burada L^p uzayının elemanları

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfıdır. Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayı bu norm ile Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.2 $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ olsun. $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(a, b)$ şartını sağlayan (a, b) den X e tanımlanmış u fonksiyonlar uzayı $L^p(a, b; X)$ uzayıdır ve bu uzay

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in (a,b)} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.3 $[0, T]$ den X e tanımlanmış m . mertebeden sürekli türevli u fonksiyonlar uzayı $C^m([0, T]; X)$ uzayıdır ve

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup \|D^\alpha u(t)\|_X$$

normu ile Banach uzayıdır.

3.3 Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Tanım 3.3.1 $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu-indisi verilsin. $\forall \gamma \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \gamma v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \gamma dx$$

ise $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u nun α . zayıf türevi denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.3.2 Ω , R^n de bir bölge, $m \in Z^+ \cup \{0\}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, Sobolev uzayı

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzay

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

normları ile Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ dir.

Burada

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.3.3 $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ ve

$W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ dır. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.4 $H_0^1(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

dır ve norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.5 (Sobolev gömülme teoremi). Ω, R^n de koni özelliğine sahip bir açık bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tam sayılar ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda

(i) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

veya $j = 0$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

dır. Ayrıca $p = 1$ ise

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

veya $j = 0$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

dır. Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

dır. $W^{m,p}$ yerine $W_0^{m,p}$ uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın gömülmeler yine geçerli olur.

3.4 Eşitsizlikler

Lemma 3.4.1 (Cauchy eşitsizliği). $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

dır.

Lemma 3.4.2 (Young eşitsizliği). $\varepsilon > 0$, $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}} q^{-1}$ dır.

Lemma 3.4.3 (Minkowski eşitsizliği). $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ ise

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.4.4 (Green özdeşliği). $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ve $v \in C^1(\bar{\Omega})$ için

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada n birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \nabla u$ dır.

Lemma 3.4.5 $a, b, c > 0$ ve $\lambda > 0$ için

$$(a + b + c)^\lambda \leq C (a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda)$$

dır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde (4.1) denklem sisteminin ve (4.33) denkleminin çözümlerinin patlaması ile ilgili teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

4.1. Parabolik Tipten Viskoelastik Kirchhoff Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması

Bu çalışmada, $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$ da

$$\begin{cases} (1 + |u|^{p-2}) u_t - \Delta u_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = f_1(u, v), \\ (1 + |v|^{q-2}) v_t - \Delta v_t - M(\|\nabla v\|^2) \Delta v + \int_0^t h(t - \tau) \Delta v(\tau) d\tau = f_2(u, v), \\ u(x, t) = v(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad (4.1)$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınacaktır. Burada Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. $p, q > 2$ dir. $s \geq 0$ ve $\gamma > 0$ için

$$M(s) = 1 + s^\gamma,$$

C^1 de negatif olmayan bir fonksiyon ve $g : R^+ \rightarrow R^+$ ve $h : R^+ \rightarrow R^+$ çekirdek fonksiyonlarıdır. Ayrıca $f_1(u, v)$ ve $f_2(u, v)$ lineer olmayan fonksiyonları

$$\begin{cases} f_1(u, v) = |u + v|^{2(r+1)} (u + v) + |u|^r u |v|^{r+2}, \\ f_2(u, v) = |u + v|^{2(r+1)} (u + v) + |v|^r v |u|^{r+2} \end{cases} \quad (4.2)$$

dir. Burada r ,

$$\begin{cases} -1 < r, & n = 1, 2, \\ -1 < r \leq \frac{3-n}{n-2}, & n \geq 3 \end{cases} \quad (4.3)$$

koşullarını sağlasın. g ve h fonksiyonlarının sürekli, negatif olmayan, artmayan ve

$$\begin{cases} g(0) \geq 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(\tau) d\tau = l_1 > 0 \\ h(0) \geq 0, \quad 1 - \int_0^\infty h(\tau) d\tau = l_2 > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Ayrıca $\forall \tau > 0$ için

$$g(t) > 0, \quad h(t) > 0 \quad \text{ve} \quad g'(t) \leq 0, \quad h'(t) \leq 0 \quad (4.5)$$

dır. Ayrıca

$$uf_1(u, v) + vf_2(u, v) = 2(r + 2)F(u, v)$$

yazılabilir. Burada

$$F(u, v) = \frac{1}{2(r + 2)} \left[|u + v|^{2(r+2)} + 2|uv|^{r+2} \right] \quad (4.6)$$

ve

$$f_1(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}, \quad f_2(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial v}$$

dır.

Lemma 4.1.1 c_0, c_1 pozitif sayılar olsun. Bu durumda

$$\frac{c_0}{2(r + 2)} (|u|^{2(r+2)} + |v|^{2(r+2)}) \leq F(u, v) \leq \frac{c_1}{2(r + 2)} (|u|^{2(r+2)} + |v|^{2(r+2)})$$

dır (Messaoudi ve Houari 2010).

Lemma 4.1.2 $\forall t \geq 0$ için $E'(t) \leq 0$ dır. Yani enerji fonksiyoneli artmayandır. Burada

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(\tau) d\tau \right) \|\nabla v\|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2} (h \circ \nabla v)(t) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \\ &\quad + \frac{1}{2(\gamma + 1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{2(\gamma + 1)} \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ve

$$(\theta \circ \varphi)(t) = \int_0^t \theta(t - \tau) \int_{\Omega} |\varphi(t) - \varphi(\tau)|^2 dx d\tau \quad (4.8)$$

dır.

İspat: (4.1) denklem sisteminin birinci denklemi u_t ve ikinci denklemi v_t ile çarpılıp, Ω bölgesi üzerinde integrali alınıp taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{\Omega} u_t u_t dx - \int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx}_{G_1} + \underbrace{\int_{\Omega} v_t v_t dx - \int_{\Omega} v_t \Delta v_t dx}_{G_2} \\
& - \underbrace{\int_{\Omega} u_t M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx}_{G_3} - \underbrace{\int_{\Omega} v_t M(\|\nabla v\|^2) \Delta v dx}_{G_4} \\
& + \underbrace{\int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau dx}_{G_5} + \underbrace{\int_{\Omega} v_t \int_0^t h(t-\tau) \Delta v(\tau) d\tau dx}_{G_6} \\
& + \int_{\Omega} u_t |u|^{p-2} u_t dx + \int_{\Omega} v_t |v|^{q-2} v_t dx \\
= & \int_{\Omega} u_t f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v_t f_2(u, v) dx \tag{4.9}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi bu terimleri hesaplayalım: G_1 ifadesinin ikinci terimi için Green özdeşliği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u_t u_t dx - \int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx \\
&= \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde G_2 ifadesi

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} v_t v_t dx - \int_{\Omega} v_t \Delta v_t dx &= \int_{\Omega} v_t^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v_t|^2 dx \\
&= \|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2
\end{aligned}$$

dır. G_3 ifadesi için $M(s) = 1 + s^\gamma$ ve Green özdeşliği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega} u_t M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u M(\|\nabla u\|^2) dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u (1 + \|\nabla u\|^{2\gamma}) dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \|\nabla u\|^{2\gamma+1} dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde G_4 ifadesi

$$- \int_{\Omega} v_t M(\|\nabla v\|^2) \Delta v dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}$$

dır.

G_5 ifadesi için Green özdeşliği kullanılır ve ifadeler düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau dx &= - \int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t g(t-\tau) \nabla u(\tau) d\tau dx \\
&= - \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u_t (\nabla u(\tau) - \nabla u(t) + \nabla u(t)) d\tau dx \\
&= - \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u_t (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) d\tau dx \\
&\quad - \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u(t) d\tau dx \\
&= \int_0^t g(t-\tau) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 d\tau dx \\
&\quad - \int_0^t g(t-\tau) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 d\tau dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 d\tau dx \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 d\tau dx \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\tau) \int_{\Omega} |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 d\tau dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\tau) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 d\tau dx
\end{aligned}$$

olur. (4.8) den G_5 ifadesi son şekliyle

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g \circ \nabla u)(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-\tau) \|\nabla u\|^2 d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\tau) \|\nabla u\|^2 d\tau
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde G_6 ifadesi

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} v_t \int_0^t h(t-\tau) \Delta v(\tau) d\tau dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (h \circ \nabla v)(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} (h' \circ \nabla v)(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t h(t-\tau) \|\nabla v\|^2 d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t h'(t-\tau) \|\nabla v\|^2 d\tau
\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $f_1(u, v)$ ve $f_2(u, v)$ ifadelerinin değerlerinden

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u_t f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v_t f_2(u, v) dx &= \int_{\Omega} \left(u_t |u + v|^{2(r+1)} (u + v) + u_t |u|^r u |v|^{r+2} \right) dx \\
&+ \int_{\Omega} \left(v_t |u + v|^{2(r+1)} (u + v) + v_t |v|^r v |u|^{r+2} \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left[|u + v|^{2r+3} (u_t + v_t) + |uv|^{r+1} (vu_t + uv_t) \right] dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{2(r+2)} \left((u + v)^{2(r+2)} + 2(uv)^{r+2} \right) dx
\end{aligned}$$

dır. $(u + v)^{2(r+2)} + 2(uv)^{r+2} = 2(r+2)F(u, v)$ olduğundan

$$\int_{\Omega} u_t f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v_t f_2(u, v) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u, v) dx$$

bulunur. Bulduğumuz bu ifadeler (4.9) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) \\
&- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-\tau) \|\nabla u\|^2 d\tau \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\tau) \|\nabla u\|^2 d\tau \\
&+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (h \circ \nabla v)(t) - \frac{1}{2} (h' \circ \nabla v)(t) \\
&- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t h(t-\tau) \|\nabla v\|^2 d\tau \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t h'(t-\tau) \|\nabla v\|^2 d\tau \\
&+ \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx + \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u, v) dx
\end{aligned}$$

olur. $\frac{d}{dt}$ parantezine alınarak düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_0^t g(t-\tau) \|\nabla u\|^2 d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t h(t-\tau) \|\nabla v\|^2 d\tau \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2} (h \circ \nabla v)(t) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \right] \\
& = -\|u_t\|^2 - \|\nabla u_t\|^2 - \|v_t\|^2 - \|\nabla v_t\|^2 + \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) \\
& \quad + \frac{1}{2} (h' \circ \nabla v)(t) - \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\tau) \|\nabla u\|^2 d\tau \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_0^t h'(t-\tau) \|\nabla v\|^2 d\tau - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx - \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
E(t) & = \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(\tau) d\tau \right) \|\nabla v\|^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2} (h \circ \nabla v)(t) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \\
& \quad + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

alınırsa

$$\begin{aligned}
E'(t) & = -\|u_t\|^2 - \|\nabla u_t\|^2 - \|v_t\|^2 - \|\nabla v_t\|^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2} (h' \circ \nabla v)(t) \\
& \quad - \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \int_0^t g'(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 \int_0^t h'(\tau) d\tau \\
& \quad - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx - \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Böylece (4.5) ten

$$E'(t) \leq 0$$

olur. Ayrıca bu ifadenin $(0, t)$ aralığında integrali alınır

$$\int_0^t E'(t) dt \leq \int_0^t 0 dt,$$

$$E(t) - E(0) \leq 0,$$

$$E(t) \leq E(0) \tag{4.12}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3 (4.2), (4.3), (4.4) koşulları sağlansın. $u_0, v_0 \in W^{1,2(\gamma+1)}(\Omega)$

ve (u, v) fonksiyonu (4.1) denklem sisteminin bir çözümü olsun. Ayrıca

$$E(0) < 0, \quad 2(r+2) > \max\{p, q\} \quad \text{ve} \quad \min\{k_1, k_2\} \geq \gamma + 1$$

ise (4.1) denklem sisteminin çözümü sonlu bir T^* zamanında patlar.

İspat:

$$H(t) = -E(t) \tag{4.13}$$

ve

$$\Psi(t) = H^{1-\sigma}(t) + \frac{\varepsilon}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2) + \frac{\varepsilon}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \tag{4.14}$$

olsun. (4.12) ve (4.13) den

$$H(t) \geq H(0) > 0 \tag{4.15}$$

olur.

$$\begin{aligned} H(t) - \int_{\Omega} F(u, v) dx &= -\frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \|\nabla u\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(\tau) d\tau \right) \|\nabla v\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2(\gamma+1)} \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

olur. Burada Lemma 4.1.1 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &< H(0) \\ &\leq H(t) \\ &\leq \int_{\Omega} F(u, v) dx \\ &\leq \frac{c_1}{2(r+2)} \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right) \end{aligned} \tag{4.17}$$

olur. (4.14) ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= (1 - \sigma) H^{-\sigma} H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx + \varepsilon \int_{\Omega} vv_t dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx\end{aligned}\quad (4.18)$$

elde edilir. (4.1) denklem sisteminin birinci denklemi u ve ikinci denklemi v ile çarpılıp, Ω bölgesinde integralini alınır ve bulunan ifadeler toplanırsa

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} uu_t dx - \int_{\Omega} u \Delta u_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx - \int_{\Omega} v \Delta v_t dx \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} u M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx}_{G_7} - \underbrace{\int_{\Omega} v M(\|\nabla v\|^2) \Delta v dx}_{G_8} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} u \int_0^t g(t - \tau) \nabla u(\tau) d\tau dx}_{G_9} + \underbrace{\int_{\Omega} v \int_0^t h(t - \tau) \Delta v(\tau) d\tau dx}_{G_{10}} \\ &\quad + \int_{\Omega} |u|^{p-2} uu_t dx + \int_{\Omega} |v|^{q-2} vv_t dx \\ &= \int_{\Omega} u f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx\end{aligned}\quad (4.19)$$

olur. Şimdi bu terimleri hesaplayalım.

$$u f_1(u, v) + v f_2(u, v) = 2(r + 2)F(u, v)$$

olduğundan

$$\int_{\Omega} u f_1(u, v) dx + \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx = 2(r + 2) \int_{\Omega} F(u, v) dx$$

yazılır. Şimdi G_7 yi Green özdeşliği ve $M(s) = 1 + s^\gamma$ ifadesi kullanarak hesaplayalım

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} u M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 (1 + \|\nabla u\|^{2\gamma}) dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \|\nabla u\|^{2\gamma} |\nabla u|^2 dx \\ &= \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde G_8 ifadesi

$$- \int_{\Omega} v M(\|\nabla v\|^2) \Delta v dx = \|\nabla v\|^2 + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}$$

yazılabilir. G_9 ifadesini hesaplayalım

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau dx &= - \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u \nabla u(\tau) dx d\tau \\
&= - \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u (\nabla u(\tau) - \nabla u(t) + \nabla u(t)) dx d\tau \\
&= - \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) dx d\tau \\
&\quad - \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx d\tau \\
&= - \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) dx d\tau \\
&\quad - \|\nabla u\|^2 \int_0^t g(t-\tau) d\tau
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde G_{10} ifadesi

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} v \int_0^t h(t-\tau) \Delta v(\tau) d\tau dx &= - \int_0^t h(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla v (\nabla v(\tau) - \nabla v(t)) dx d\tau \\
&\quad - \|\nabla v\|^2 \int_0^t h(t-\tau) d\tau
\end{aligned}$$

yazılabilir. Hesapladığımız bu ifadeler (4.19) da yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} uu_t dx - \int_{\Omega} u \Delta u_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx - \int_{\Omega} v \Delta v_t dx \\
&= - \|\nabla v\|^2 - \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad + \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) dx d\tau \\
&\quad + \|\nabla u\|^2 \int_0^t g(t-\tau) d\tau \\
&\quad + \int_0^t h(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla v (\nabla v(\tau) - \nabla v(t)) dx d\tau \\
&\quad + \|\nabla v\|^2 \int_0^t h(t-\tau) d\tau \\
&\quad - \int_{\Omega} |u|^{p-2} uu_t dx - \int_{\Omega} |v|^{q-2} vv_t dx + 2(r+2) \int_{\Omega} F(u, v) dx
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olur. (4.20) ifadesi (4.18) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= (1 - \sigma) H^{-\sigma} H'(t) - \varepsilon \|\nabla u\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad - \varepsilon \|\nabla v\|^2 - \varepsilon \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} + \varepsilon 2(r+2) \int_{\Omega} F(u, v) dx \\
&\quad + \varepsilon \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) dx d\tau \\
&\quad + \varepsilon \|\nabla u\|^2 \int_0^t g(t-\tau) d\tau + \varepsilon \|\nabla v\|^2 \int_0^t h(t-\tau) d\tau \\
&\quad + \varepsilon \int_0^t h(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla v (\nabla v(\tau) - \nabla v(t)) dx d\tau \\
&\quad - \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx - \varepsilon \int_{\Omega} |v|^{q-2} v v_t dx
\end{aligned} \tag{4.21}$$

olur. Bu ifadenin son iki terimine Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx &= \int_{\Omega} |u|^{\frac{p-2}{2}} u |u|^{\frac{p-2}{2}} u_t dx \\
&\leq \lambda \int_{\Omega} |u|^p dx + \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |v|^{q-2} v v_t dx &= \int_{\Omega} |v|^{\frac{q-2}{2}} v |v|^{\frac{q-2}{2}} v_t dx \\
&\leq \lambda \int_{\Omega} |v|^q dx + \lambda^{-1} \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx
\end{aligned}$$

yazılır. Bulduğumuz bu eşitsizlikler (4.21) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma) H^{-\sigma} H'(t) - \varepsilon \|\nabla u\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad - \varepsilon \|\nabla v\|^2 - \varepsilon \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} + \varepsilon 2(r+2) \int_{\Omega} F(u, v) dx \\
&\quad + \underbrace{\varepsilon \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) dx d\tau}_{A_1} \\
&\quad + \varepsilon \|\nabla u\|^2 \int_0^t g(t-\tau) d\tau + \varepsilon \|\nabla v\|^2 \int_0^t h(t-\tau) d\tau \\
&\quad + \underbrace{\varepsilon \int_0^t h(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla v (\nabla v(\tau) - \nabla v(t)) dx d\tau}_{A_2} \\
&\quad - \varepsilon \lambda \int_{\Omega} |u|^p dx - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx \\
&\quad - \varepsilon \lambda \int_{\Omega} |v|^q dx - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx
\end{aligned} \tag{4.22}$$

olur.

Cauchy Shwartz ve Young eşitsizlikleri göz önünde bulundurulursa A_1 ifadesi

$$\begin{aligned}
& \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla u |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)| dx d\tau \\
& \leq \int_0^t g(t-\tau) \int_{\Omega} |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 dx d\tau \\
& \quad + \frac{1}{4} \int_0^t g(t-\tau) |\nabla u|^2 dx d\tau \\
& \leq (g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{4} \left(\int_0^t g(t-\tau) d\tau \right) \|\nabla u\|^2
\end{aligned}$$

şeklinde tahmin edilebilir. Benzer şekilde A_2 ifadesi

$$\int_0^t h(t-\tau) \int_{\Omega} \nabla v |\nabla v(\tau) - \nabla v(t)| dx d\tau \leq (h \circ \nabla v)(t) + \frac{1}{4} \left(\int_0^t h(t-\tau) d\tau \right) \|\nabla v\|^2$$

yazılır. Bulduğumuz A_1 ve A_2 ifadeleri (4.22) de yerine yazılır ve ortak parantezlere alınır

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) & \geq (1-\sigma) H^{-\sigma} H'(t) - \varepsilon (\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\
& \quad - \varepsilon \left(1 - \frac{3}{4} \int_0^t g(t-\tau) d\tau\right) \|\nabla u\|^2 - \varepsilon \left(1 - \frac{3}{4} \int_0^t h(t-\tau) d\tau\right) \|\nabla v\|^2 \\
& \quad - \varepsilon [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] \\
& \quad + \varepsilon 2(r+2) \int_{\Omega} F(u, v) dx - \varepsilon \lambda (\|u\|_p^p + \|v\|_q^q) \\
& \quad - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx
\end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklini alır. Şimdi (4.23) de $\eta_1 = 1 - \int_0^t g(t-\tau) d\tau$ ve $\eta_2 = 1 - \int_0^t h(t-\tau) d\tau$ yazalım.

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) & \geq (1-\sigma) H^{-\sigma} (t) H'(t) - \varepsilon (\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\
& \quad - \varepsilon \frac{\left(1 - \frac{3}{4} \int_0^t g(t-\tau) d\tau\right)}{\left(1 - \int_0^t g(t-\tau) d\tau\right)} \eta_1 \|\nabla u\|^2 - \varepsilon \frac{\left(1 - \frac{3}{4} \int_0^t h(t-\tau) d\tau\right)}{\left(1 - \int_0^t h(t-\tau) d\tau\right)} \eta_2 \|\nabla v\|^2 \\
& \quad - \varepsilon [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] + \varepsilon 2(r+2) \int_{\Omega} F(u, v) dx \\
& \quad - \varepsilon \lambda (\|u\|_p^p + \|v\|_q^q) - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx
\end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklini alır. Şimdi de $k_1 = \frac{(1-\frac{3}{4} \int_0^t g(t-\tau) d\tau)}{(1-\int_0^t g(t-\tau) d\tau)}$ ve $k_2 = \frac{(1-\frac{3}{4} \int_0^t h(t-\tau) d\tau)}{(1-\int_0^t h(t-\tau) d\tau)}$ ifadeleri

(4.24) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) - \varepsilon(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\
&\quad - \varepsilon k_1 \eta_1 \|\nabla u\|^2 - \varepsilon k_2 \eta_2 \|\nabla v\|^2 - \varepsilon [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] \\
&\quad + \underbrace{\varepsilon 2(r+2) \int F(u, v) dx}_{A_3} - \varepsilon \lambda (\|u\|_p^p + \|v\|_q^q) \\
&\quad - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx
\end{aligned}$$

olur. Lemma 4.1.1 dikkate alınıp A_3 yerine $\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) - \varepsilon(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\
&\quad - \varepsilon k_1 \eta_1 \|\nabla u\|^2 - \varepsilon k_2 \eta_2 \|\nabla v\|^2 - \varepsilon [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] \\
&\quad + \varepsilon (\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}) - \varepsilon \lambda (\|u\|_p^p + \|v\|_q^q) \\
&\quad - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx
\end{aligned}$$

olur. $-\varepsilon k_1 \eta_1 \|\nabla u\|^2 - \varepsilon k_2 \eta_2 \|\nabla v\|^2$ terimleri $\min \{k_1, k_2\}$ ortak parantezine alınır

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) - \varepsilon(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\
&\quad - \varepsilon \min \{k_1, k_2\} (\eta_1 \|\nabla u\|^2 + \eta_2 \|\nabla v\|^2) - \varepsilon [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] \\
&\quad + \varepsilon (\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}) - \varepsilon \lambda (\|u\|_p^p + \|v\|_q^q) \\
&\quad - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx
\end{aligned}$$

şeklini alır. $\min \{k_1, k_2\} = \kappa$ yazalım ve $\lambda^{-1} = M H^{-\sigma}(t)$ seçelim. Bu durumda $\lambda = M^{-1} H^{\sigma}$ olur. Burada

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) - \varepsilon(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\
&\quad - \varepsilon \kappa (\eta_1 \|\nabla u\|^2 + \eta_2 \|\nabla v\|^2) - \varepsilon [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] \\
&\quad + \varepsilon (\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}) - \varepsilon M^{-1} H^{\sigma} (\|u\|_p^p + \|v\|_q^q) \\
&\quad - \varepsilon M H^{-\sigma}(t) \left(\int_{\Omega} |u|^{p-2} u_t^2 dx - \int_{\Omega} |v|^{q-2} v_t^2 dx \right) \tag{4.25}
\end{aligned}$$

(4.11) ve (4.13) den

$$\begin{aligned}
H'(t) &= \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}(h' \circ \nabla v)(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \int_0^t g'(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t h'(\tau) \|\nabla v\|^2 d\tau \\
&\quad + \int_{\Omega} u_t^2 |u|^{p-2} dx + \int_{\Omega} v_t^2 |v|^{q-2} dx
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$H'(t) - \int_{\Omega} u_t^2 |u|^{p-2} dx - \int_{\Omega} v_t^2 |v|^{q-2} dx \geq 0$$

olduğu görülür. Buradan

$$H'(t) \geq \int_{\Omega} u_t^2 |u|^{p-2} dx + \int_{\Omega} v_t^2 |v|^{q-2} dx$$

olur. Bu ifade (4.25) de yerine yazılır ve ortak paranteze alınırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma - \varepsilon M) H^{-\sigma}(t) H'(t) - \varepsilon (\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\
&\quad - \varepsilon \kappa (\eta_1 \|\nabla u\|^2 + \eta_2 \|\nabla v\|^2) - \varepsilon [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] \\
&\quad + \varepsilon (\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}) - \varepsilon M^{-1} H^{\sigma} (\|u\|_p^p + \|v\|_q^q)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

olur. $H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned}
H(t) &= -\frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau\right)}_{\eta_1} \|\nabla u\|^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \int_0^t h(\tau) d\tau\right)}_{\eta_2} \|\nabla v\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{2(\gamma+1)} \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] + \int_{\Omega} F(u, v) dx
\end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}
\eta_1 \|\nabla u\|^2 + \eta_2 \|\nabla v\|^2 &= -2H(t) - \frac{1}{\gamma+1} \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}\right) \\
&\quad - [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] + 2 \int_{\Omega} F(u, v) dx
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik (4.26) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma - \varepsilon M) H^{-\sigma}(t) H'(t) - \varepsilon (\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\
&\quad - \varepsilon \kappa \left[-2H(t) - \frac{1}{\gamma+1} \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \right. \\
&\quad \left. - [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] + 2 \int_{\Omega} F(u, v) dx \right] \\
&\quad - \varepsilon [(g \circ \nabla u)(t) + (h \circ \nabla v)(t)] + \varepsilon (\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}) \\
&\quad - \varepsilon M^{-1} H^{\sigma} (\|u\|_p^p + \|v\|_q^q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.1.1 dikkate alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma - \varepsilon M) H^{-\sigma}(t) H'(t) + 2\varepsilon \kappa H(t) \\
&\quad + \varepsilon \left[\kappa \frac{1}{\gamma+1} - 1 \right] \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \\
&\quad + \varepsilon (1 - 2\kappa) \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right) \\
&\quad - \varepsilon M^{-1} H^{\sigma} (\|u\|_p^p + \|v\|_q^q)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

olur.

$2(r+2) > p > 2$ olduğundan

$$L^{2(r+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

gömülmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|u\|_p^p &\leq c \|u\|_{2(r+2)}^p \\
&= c \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right)^{\frac{p}{2(r+2)}}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $0 < \frac{p}{2(r+2)} < 1$ olduğundan

$$x^l \leq (x+1) \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)(x+z)$$

cebirsel eşitsizliği uygulamak için seçimler

$$x = \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}, \quad l = \frac{p}{2(r+2)}, \quad z = H(0)$$

şeklinde yapılırsa

$$\begin{aligned}
c \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right)^{\frac{p}{2(r+2)}} &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)} \right) \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(0) \right) \\
&\leq c_1 \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(t) \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde $2(r+2) > q > 2$ olduğundan

$$L^{2(r+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

gömülmesi uygulanırsa,

$$c \left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right)^{\frac{q}{2(r+2)}} \leq c_2 \left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(t) \right)$$

yazılabilir. Taraf tarafa toplanırsa

$$\|u\|_p^p + \|v\|_q^q \leq c_3 (\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}) \quad (4.28)$$

olur. Bu ifade (4.27) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\geq (1 - \sigma - \varepsilon M) H^{-\sigma}(t) H'(t) + 2\varepsilon\kappa H(t) \\ &\quad + \varepsilon \left[\kappa \frac{1}{\gamma + 1} - 1 \right] \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \\ &\quad + \varepsilon (1 - 2\kappa) \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right) \\ &\quad - \varepsilon M^{-1} H^\sigma c_3 (\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(t)) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\geq (1 - \sigma - \varepsilon M) H^{-\sigma}(t) H'(t) + 2\varepsilon\kappa H(t) \\ &\quad + \varepsilon \left[\kappa \frac{1}{\gamma + 1} - 1 \right] \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \\ &\quad + \varepsilon (1 - 2\kappa - M^{-1} H^\sigma c_3) \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right) \end{aligned}$$

yazılır. ε yeteri kadar küçük ve M yeteri kadar büyük seçilirse

$$1 - 2\kappa - M^{-1} H^\sigma c_3 = c_4 > 0,$$

olur.

$$(1 - \sigma - \varepsilon M) H^{-\sigma}(t) H'(t)$$

ifadesi ihmal edilirse son haliyle

$$\Psi'(t) \geq \delta \left(H(t) + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \quad (4.29)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}$ ifadesini hesaplayalım.

$$\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) = \left(H^{1-\sigma}(t) + \frac{\varepsilon}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2) + \frac{\varepsilon}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$(a + b + c)^\lambda \leq C (a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda)$ eşitsizliğinden

$$\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq c \left[H(t) + \|u\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} + \|v\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} + \|\nabla u\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} + \|\nabla v\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} \right] \quad (4.30)$$

olur. $\|\nabla u\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} = \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{(1-\sigma)(\gamma+1)}}$ eşitliğinde $0 < \frac{1}{(1-\sigma)(\gamma+1)} < 1$ olduğundan

$$x = \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}, \quad l = \frac{1}{(1-\sigma)(\gamma+1)}, \quad z = H(0)$$

seçilerek

$$x^l \leq (x + 1) \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)(x + z)$$

cebirsel eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{(1-\sigma)(\gamma+1)}} &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)} \right) \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + H(0) \right) \\ &\leq a \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \end{aligned}$$

yazılabilir. $\|\nabla v\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} = \left(\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{(1-\sigma)(\gamma+1)}}$ eşitliğinde $0 < \frac{1}{(1-\sigma)(\gamma+1)} < 1$ olduğundan

$$x = \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}, \quad l = \frac{1}{(1-\sigma)(\gamma+1)}, \quad z = H(0)$$

seçilerek

$$x^l \leq (x + 1) \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)(x + z)$$

cebirsel eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left(\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{(1-\sigma)(\gamma+1)}} &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)} \right) \left(\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} + H(0) \right) \\ &\leq a \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \end{aligned}$$

yazılabilir. $p > 2$ den $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|u\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} &\leq c \|u\|_p^{\frac{2}{1-\sigma}} \\ &= c \left(\|u\|_p^p \right)^{\frac{2}{(1-\sigma)p}} \end{aligned}$$

olur. $0 < \frac{2}{(1-\sigma)p} < 1$ olduğundan

$$x = \|u\|_p^p, \quad l = \frac{2}{(1-\sigma)p} \quad \text{ve} \quad z = H(0)$$

seçilerek cebirsel eşitsizlik uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left(\|u\|_p^p \right)^{\frac{2}{(1-\sigma)p}} &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)} \right) \left(\|u\|_p^p + H(0) \right) \\ &\leq c \left(\|u\|_p^p + H(t) \right) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $q > 2$ den $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|v\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} &\leq c \left(\|v\|_q^q \right)^{\frac{2}{(1-\sigma)q}} \\ &\leq c \left(\|v\|_q^q + H(t) \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bulduğumuz bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} + \|u\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} + \|\nabla v\|_2^{\frac{2}{(1-\sigma)}} + \|v\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} &\leq c \left(\|u\|_p^p + \|v\|_q^q + H(t) \right) \\ &\quad + a \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} + H(t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.28) den $c \|u\|_p^p + c \|v\|_q^q$ ifadesi yerine $c_3(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)})$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} + \|u\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} + \|\nabla v\|_2^{\frac{2}{(1-\sigma)}} + \|v\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} &\leq c_3 \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + H(t) \right) \\ &\quad + a \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} + H(t) \right) \end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz bu son eşitsizlik (4.30) da yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir

$$\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq c_5 \left[H(t) + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right] \quad (4.31)$$

(4.29) ve (4.31) den

$$\Psi'(t) \geq \beta \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \quad (4.32)$$

yazılır. $\beta > 0$ olmak üzere (4.32) nin $(0, t)$ aralığında integrali alınır

$$\beta \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq \Psi'(t),$$

$$\int_0^t \beta dt \leq \int_0^t \frac{d\Psi(t)}{\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)},$$

$$-\frac{\beta t \sigma}{1-\sigma} \geq \Psi^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(t) - \Psi^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0),$$

$$\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{\Psi^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\beta \sigma t}{1-\sigma}}$$

dır. Bu çözümün sonlu bir $T > 0$ zamanı mevcuttur ve bu zaman

$$T \leq \frac{1 - \sigma}{\Psi^{1-\sigma}(0) \beta \sigma}$$

dır.

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \left(\frac{1}{\Psi^{1-\sigma}(0) - \frac{\beta \sigma t}{1-\sigma}} \right) = \infty$$

olur. Bu sonuç (4.1) denklem sisteminin çözümünün uygun koşullar altında patladığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.



4.2. Parabolik Tipten m-Laplasyon ve Kirchhoff Terimli Denklemin Çözümünün Patlaması

Bu çalışmada, $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$ da

$$\begin{cases} (1 + |u|^{q-2}) u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u = |u|^{p-2} u, \\ u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0, \end{cases} \quad (4.33)$$

başlangıç sınır değerleri problemi çalışılacaktır. Burada Ω , R^n de $\partial\Omega$, düzgün sınırına sahip bir bölgedir ve $p, q, m > 2$ sabit sayılardır. $\gamma > 0$ ve $s > 0$ için

$$M(s) = 1 + s^\gamma$$

dır. m-Laplacian terimi

$$\Delta_m u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u),$$

dır. Ayrıca

$$\begin{cases} 2 < q < p < \infty; & n = 1, 2, \\ 2 < q < p \leq \frac{2(n-1)}{n-2}; & n \geq 3 \end{cases} \quad (4.34)$$

dır.

Lemma 4.2.1 Her $t \geq 0$ için $E'(t) \leq 0$ dır. Yani enerji fonksiyoneli artmayandır.

Burada

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{p} \|u\|_p^p$$

dır.

İspat: (4.33) denklemini u_t ile çarpılıp Ω bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\Omega} u_t u_t dx}_{H_1} - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx}_{H_2} - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) dx}_{H_3} \\ & - \underbrace{\int_{\Omega} u_t M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx}_{H_4} + \int_{\Omega} u_t |u|^{q-2} u dx \\ & = \underbrace{\int_{\Omega} u_t |u|^{p-2} u dx}_{H_5} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Şimdi bu terimleri hesaplayalım.

H_1 ifadesi,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u_t u_t dx &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ &= \|u_t\|^2\end{aligned}$$

olur. H_2 ifadesi için Green özdeşliği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx \\ &= \|\nabla u_t\|^2\end{aligned}$$

olur. H_3 ifadesi için kısmi integrasyon ve sınır değerler dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} u_t \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) dx &= - \int_{\Omega} u_t \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-1}) dx \\ &= \underbrace{-u_t |\nabla u|^{m-1}}_0 + \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_m^m \\ &= \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_m^m\end{aligned}$$

olur. H_4 ifadesin için $M(s) = 1 + s^\gamma$ ve Green özdeşliği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} u_t M(\|\nabla u\|^2) \Delta u dx &= \int_{\Omega} \nabla u_t M(\|\nabla u\|^2) \nabla u dx \\ &= \int_{\Omega} (1 + \|\nabla u\|^{2\gamma}) \nabla u_t \nabla u dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx + \int_{\Omega} \|\nabla u\|^{2\gamma} \nabla u \nabla u_t dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\end{aligned}$$

olur. H_5 ifadesi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u_t |u|^{p-2} u dx &= \int_{\Omega} u_t |u|^{p-1} dx \\ &= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u\|_p^p\end{aligned}$$

olur. Bulunan bu değerler (4.35) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_m^m + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \\ & + \frac{1}{2(\gamma+1)} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \int_{\Omega} u_t |u|^{q-2} u_t dx \\ & = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u\|_p^p \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik aşağıdaki gibi düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{p} \|u\|_p^p \right) \\ & = - \|u_t\|^2 - \|\nabla u_t\|^2 - \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$E(t) = \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{p} \|u\|_p^p \quad (4.36)$$

ve

$$E'(t) = - \|u_t\|^2 - \|\nabla u_t\|^2 - \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx \quad (4.37)$$

elde edilir. $E'(t) \leq 0$ olduğu görülür. Bu ifadenin $(0, t)$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^t E'(t) dt \leq \int_0^t 0 dt,$$

$$E(t) - E(0) \leq 0,$$

$$E(t) \leq E(0). \quad (4.38)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2 (4.34) koşulu sağlansın. $u_0 \in W^{1,m}$ ve u fonksiyonu (4.33) denkleminin bir çözümü olsun.

$$E(0) < 0$$

ve

$$m \geq 2(\gamma+1)$$

ise (4.33) denkleminin çözümü sonlu bir T^* zamanında patlar.

İspat. Şimdi $H(t) = -E(t)$ olarak tanımlayalım.

$$H(t) = -\frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m - \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{p} \|u\|_p^p \quad (4.39)$$

olur.

$$H(t) - \frac{1}{p} \|u\|_p^p = -\frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m - \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}$$

şeklinde düzenlenirse

$$H(t) - \frac{1}{p} \|u\|_p^p \leq 0$$

olduğu görülür. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &< H(0) \\ &\leq H(t) \\ &\leq \frac{1}{p} \|u\|_p^p \end{aligned} \quad (4.40)$$

yazılabilir. $H(t)$ tanımından yola çıkılırsa

$$H'(t) = -E'(t) = \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx \quad (4.41)$$

yazılabilir. Şimdi $\Psi(t)$ fonksiyonunu

$$\Psi(t) = H^{1-\sigma}(t) + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 \quad (4.42)$$

şeklinde seçelim. (4.42) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\Psi'(t) = (1-\sigma)H^{-\sigma}(t) H'(t) + \int_{\Omega} u_t u dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx \quad (4.43)$$

olur. (4.33) denkleminde

$$u_t = -|u|^{q-2} u_t + \Delta u_t + \operatorname{div} (|\nabla u|^{m-2} \nabla u) + M (\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u|^{p-2} u$$

olduğundan bu ifade (4.33) ün ikinci teriminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t) H'(t) \\ &+ \int_{\Omega} [-|u|^{q-2} u_t + \Delta u_t + \operatorname{div} (|\nabla u|^{m-2} \nabla u) \\ &+ M (\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u|^{p-2} u] u dx \\ &+ \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= (1 - \sigma)H^{-\sigma}(t) H'(t) - \int_{\Omega} u |u|^{q-2} u_t dx \\
&\quad + \underbrace{\int_{\Omega} u \operatorname{div} (|\nabla u|^{m-2} \nabla u) dx}_{\dot{I}_1} + \underbrace{\int_{\Omega} u M (\|\nabla u\|^2) \Delta u dx}_{\dot{I}_2} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\Omega} u |u|^{p-2} u dx}_{\dot{I}_3}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edilir. Şimdi bu ifadeleri hesaplayalım. \dot{I}_1 için kısmi integrasyon ve sınır değerlerinin kullanılması ile

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u \operatorname{div} (|\nabla u|^{m-2} \nabla u) dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div} (|\nabla u|^{m-1}) u dx \\
&= - \int_{\Omega} |\nabla u|^m dx \\
&= - \|\nabla u\|_m^m
\end{aligned}$$

olur. \dot{I}_2 ifadesi için $M(s) = 1 + s^\gamma$ ve Green özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u M (\|\nabla u\|^2) \Delta u dx &= - \int_{\Omega} \nabla u (1 + \|\nabla u\|^{2\gamma}) \nabla u dx \\
&= - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \|\nabla u\|^{2\gamma} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
&= - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}
\end{aligned}$$

olur. \dot{I}_3 ifadesi

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u |u|^{p-2} u dx &= \int_{\Omega} |u|^p dx \\
&= \|u\|_p^p
\end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz bu değerleri (4.44) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u u_t dx - \int_{\Omega} u \Delta u dx &= - \|\nabla u\|_m^m - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad - \int_{\Omega} u |u|^{q-2} dx + \|u\|_p^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlik (4.43) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= (1 - \sigma)H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \left[- \|\nabla u\|_m^m - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} u |u|^{q-2} dx + \|u\|_p^p \right]
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafına $m\varepsilon H(t)$ terimini ekleyip-çıkaralım.

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= (1 - \sigma)H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \left[-\|\nabla u\|_m^m - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} u |u|^{q-2} dx + \|u\|_p^p \right] + m\varepsilon H(t) - m\varepsilon H(t)\end{aligned}$$

olur. Şimdi $H(t) = -E(t)$ olduğundan $E(t)$ nin değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= (1 - \sigma)H^{-\sigma}(t) H'(t) + m\varepsilon H(t) - \varepsilon \|\nabla u\|_m^m - \varepsilon \|\nabla u\|^2 \\ &\quad - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \varepsilon \int_{\Omega} u |u|^{q-2} dx + \varepsilon \|u\|_p^p \\ &\quad + \frac{m\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{m\varepsilon}{m} \|\nabla u\|_m^m \\ &\quad + \frac{m\varepsilon}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{m\varepsilon}{p} \|u\|_p^p\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= (1 - \sigma)H^{-\sigma}(t) H'(t) + m\varepsilon H(t) \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \left(\frac{m}{2(\gamma+1)} - 1 \right) \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \left(1 - \frac{m}{p} \right) \|u\|_p^p - \varepsilon \int_{\Omega} u |u|^{q-2} dx\end{aligned}\tag{4.45}$$

şeklini alır. Bu eşitsizliğin son terimine $\lambda > 0$ için, Young eşitsizliği

$$XY \leq \lambda^{-1} X^2 + \lambda Y^2$$

uygulanır ve $X = |u|^{\frac{q-2}{2}} u_t$ ve $Y = |u|^{\frac{q-2}{2}} u$ seçilirse

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t u dx &= \int_{\Omega} |u|^{\frac{q-2}{2}} u_t |u|^{\frac{q-2}{2}} u dx \\ &\leq \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^q dx \\ &\leq \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx + \lambda \|u\|_q^q\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlik (4.45) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma)H^{-\sigma}(t) H'(t) + m\varepsilon H(t) \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \left(\frac{m}{2(\gamma+1)} - 1 \right) \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \varepsilon \left(1 - \frac{m}{p} \right) \|u\|_p^p - \varepsilon \lambda^{-1} \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx - \varepsilon \lambda \|u\|_q^q\end{aligned}\tag{4.46}$$

elde edilir. (4.41) den

$$H'(t) \geq \int_{\Omega} |u|^{q-2} u_t^2 dx\tag{4.47}$$

yazılabilir. Bu ifade (4.46) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + m\varepsilon H(t) \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \left(\frac{m}{2(\gamma + 1)} - 1 \right) \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad + \varepsilon \left(1 - \frac{m}{p} \right) \|u\|_p^p - \varepsilon \lambda^{-1} H'(t) - \varepsilon \lambda \|u\|_q^q
\end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir. $\lambda^{-1} = \delta H^{-\sigma}(t)$ olarak seçilir ise $\lambda = \delta^{-1} H^\sigma(t)$ olur. Bu ifade (4.48) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + m\varepsilon H(t) \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \left(\frac{m}{2(\gamma + 1)} - 1 \right) \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad + \varepsilon \left(1 - \frac{m}{p} \right) \|u\|_p^p - \varepsilon \delta H^{-\sigma}(t)H'(t) - \varepsilon \delta^{-1} H^\sigma(t) \|u\|_q^q
\end{aligned}$$

olur. $H^{-\sigma}(t)H'(t)$ ortak parantezine alınır

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \sigma - \varepsilon \delta)H^{-\sigma}(t)H'(t) + m\varepsilon H(t) \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \left(\frac{m}{2(\gamma + 1)} - 1 \right) \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad + \varepsilon \left(1 - \frac{m}{p} \right) \|u\|_p^p - \varepsilon \delta^{-1} H^\sigma(t) \|u\|_q^q
\end{aligned} \tag{4.49}$$

elde edilir. $p > q > 2$ için $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmesi ve (4.40) dikkate alınır

$$\begin{aligned}
H(t) &\leq \frac{1}{p} \|u\|_p^p, \\
H^\sigma(t) &\leq \left(\frac{1}{p} \|u\|_p^p \right)^\sigma, \\
H^\sigma(t) &\leq c_1 \|u\|_p^{p\sigma}, \\
H^\sigma(t) \|u\|_q^q &\leq c_1 \|u\|_p^{p\sigma} \|u\|_q^q \\
&\leq \|u\|_p^{p\sigma+q}
\end{aligned}$$

yazılabilir. c_1 ve c_2 pozitif sabitler, $0 < \frac{q}{p} < 1$ den

$$x^l \leq (x + 1) \leq \left(1 + \frac{1}{z} \right) (x + z)$$

cebirsal eşitsizliğinde

$$x = \|u\|_p^p, \quad z = H(0), \quad l = \frac{p\sigma + q}{p}$$

seçilirse

$$\begin{aligned} \left(\|u\|_p^p \right)^{\frac{p\sigma+q}{p}} &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)} \right) \left(\|u\|_p^p + H(0) \right) \\ &\leq c_3 \left(\|u\|_p^p + H(0) \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade (4.49) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\geq (1 - \sigma - \varepsilon\delta)H^{-\sigma}(t)H'(t) + m\varepsilon H(t) \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \left(\frac{m}{2(\gamma+1)} - 1 \right) \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \varepsilon \left(1 - \frac{m}{p} \right) \|u\|_p^p - \varepsilon\delta^{-1}c_3 \|u\|_p^p \end{aligned}$$

elde edilir. $\|u\|_p^p$ ortak parantezine alınırsa

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\geq (1 - \sigma - \varepsilon\delta)H^{-\sigma}(t)H'(t) + m\varepsilon H(t) \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \left(\frac{m}{2(\gamma+1)} - 1 \right) \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \varepsilon \left(1 - \frac{m}{p} - \delta^{-1}c_3 \right) \|u\|_p^p \end{aligned}$$

olur.

$$1 - \frac{m}{p} - \delta^{-1}c_3 = c_4$$

yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\geq (1 - \sigma - \varepsilon\delta)H^{-\sigma}(t)H'(t) + m\varepsilon H(t) + \varepsilon \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{m}{2(\gamma+1)} - 1 \right) \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \varepsilon c_4 \|u\|_p^p \end{aligned}$$

olur. δ yeteri kadar büyük ve ε yeteri kadar küçük seçilirse

$$1 - \sigma - \varepsilon\delta > 0$$

ve

$$1 - \frac{m}{p} - \delta^{-1}c_3 = c_4$$

olur. Son haliyle pozitif katsayılar ihmal edilirse eşitsizlik

$$\Psi'(t) \geq c_5 \left(H(t) + \|u\|_p^p + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right) \quad (4.50)$$

şeklini alır. $\Psi(t) > \Psi(0)$, $t > 0$ için, $\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)$ elde etmeye çalışalım. (4.42) den

$$\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) = \left(H^{1-\sigma}(t) + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

yazılabilir. $(a + b + c)^\lambda \leq C (a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda)$ eşitsizliğinden yola çıkılırsa

$$\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq c \left(H(t) + \|u\|^{\frac{2}{1-\sigma}} + \|\nabla u\|^{\frac{2}{1-\sigma}} \right) \quad (4.51)$$

yazılabilir. $p > 2$ için $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \|u\|_2^{\frac{2}{1-\sigma}} &\leq \|u\|_p^{\frac{2}{1-\sigma}} \\ &= c \left(\|u\|_p^p \right)^{\frac{2}{p(1-\sigma)}} \end{aligned}$$

olur.

$$x = \|u\|_p^p > 0, \quad l = \frac{2}{p(1-\sigma)} > 1, \quad z = H(0)$$

seçilerek cebirsel eşitsizlik uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left(\|u\|_p^p \right)^{\frac{2}{p(1-\sigma)}} &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)} \right) \left(\|u\|_p^p + H(0) \right) \\ &\leq a_1 \|u\|_p^p \end{aligned} \quad (4.52)$$

yazılabilir.

$$x = \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}, \quad l = \frac{2}{p(1-\sigma)}, \quad z = H(0)$$

seçilerek cebirsel eşitsizlik uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^{\frac{2}{1-\sigma}} &= \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{(1-\sigma)(\gamma+1)}} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{H(0)} \right) \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + H(0) \right) \\ &\leq c \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (4.53)$$

olur. (4.52) ve (4.53) ifadeleri (4.51) de yerine yazılırsa

$$\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq c \left(H(t) + \|u\|_p^p + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right) \quad (4.54)$$

elde edilir. (4.50) ve (4.54) den

$$\Psi'(t) \geq \beta \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \quad (4.55)$$

yazılabilir. Burada $\beta > 0$ bir sabittir.(4.55) in $(0, t)$ aralığında integrali alınırsa

$$\beta \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq \Psi'(t),$$

$$\beta \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq \frac{d\Psi(t)}{dt},$$

$$\int_0^t \beta dt \leq \int_0^t \frac{d\Psi(t)}{\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)},$$

$$-\beta t \frac{\sigma}{1-\sigma} \geq \Psi^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(t) - \Psi^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0),$$

$$\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{\Psi(0)^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}} - \frac{\beta t \sigma}{1-\sigma}}$$

olur. Bu çözümün sonlu bir $T > 0$ zamanı mevcuttur ve bu zaman

$$T < \frac{1-\sigma}{\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) \beta \sigma}$$

dır.

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \left(\frac{1}{\Psi(0)^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}} - \frac{\beta t \sigma}{1-\sigma}} \right) = \infty$$

olur. Bu sonuç (4.33) denkleminin çözümünün uygun koşullar altında patladığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada parabolik tipten viskoelastik Kirchhoff tipli

$$\begin{cases} (1 + |u|^{p-2}) u_t - \Delta u_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = f_1(u, v), \\ (1 + |v|^{q-2}) v_t - \Delta v_t - M(\|\nabla v\|^2) \Delta v + \int_0^t h(t - \tau) \Delta v(\tau) d\tau = f_2(u, v), \end{cases}$$

denklem sisteminin ve parabolik tipten m-Laplasyan ve Kirchhoff terimli

$$(1 + |u|^{q-2}) u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u = |u|^{p-2} u,$$

denkleminin çözümünün patlaması incelenmiştir.

5.2 Öneriler

Bu problemlerin çözümlerinin üstel büyümesi, enerji azalması gibi matematiksel davranışları da de çalışılabilir. Sınırlı bir Ω bölgesinde yapılan bu çalışmalar sınırsız bölgede de yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Adams, R. A. and Fournier, J. J. (2003). *Sobolev spaces*, Elsevier.
- Arnold, V. I. (2013). *Ordinary differential equations*, Springer Science & Business Media.
- Blanchard, P., Devaney, R. L. and Hall, G. R. (2012). *Differential equations*, Brooks Cole.
- Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2009). *Elementary differential equations and boundary value problems*, Wiley.
- Brezis, H. (2011). *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Springer.
- Brown, J. and Churchill, R. (2011). *Fourier series and boundary value problems*, McGraw-Hill Education.
- Dang, J., Hu, Q., Xia, S. and Zhang, H. (2017). Exponential growth of solution for a class of reaction diffusion equation with memory and multiple nonlinearities. *Research in Applied Mathematics*, 1, 1-9.
- Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics.
- Hu, Q., Qi, L. and Zhang, H. (2014). Blow up solutions for a reaction diffusion equation with memory and multiple nonlinearities. *Journal of Advances in Mathematics*, 6(3), 1050-1055.
- Kesevan, S. (2003). *Topics in functional analysis and applications*, John Wiley Sons.
- Korpusov, M. O. and Sveshnikov, A. G. (2008). Sufficient close-to-necessary conditions for the blowup of solutions to a strongly nonlinear generalized Boussinesq equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 48, 1591-1599.
- Messaoudi, S. A. and Said-Houari, B. (2010). Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 365(1), 277-287.
- Ouaoua, A. and Boughamsa, W. (2022). Exponential growth of solution for a couple of semi-linear pseudo-parabolic equations with memory and source terms. *Journal of Innovative Applied Mathematics and Computational Sciences*, 2(1), 43-52.
- Ouaoua, A., Khaldi, A. and Maouni, M. (2020). Stabilisation of solutions for a Kirchhoff type reaction-diffusion equation. *Canadian Journal of Applied Mathematics*, 2(2), 71-80.
- Ouaoua, A. and Maouni, M. (2019). Blow-up, exponential growth of solution for a nonlinear parabolic equation with $p(x)$ -Laplacian. *International Journal of*

- Analysis and Applications, 17(4), 620-629.
- Pang, J. and Qiao, B. (2015). Blow-up of solution for initial boundary value problem of reaction diffusion equations. Journal Of Advances In Mathematics, 10(1).
- Pişkin, E. (2017a). *Sobolev uzayları*, Seçkin Yayıncılık
- Pişkin, E. (2017b). *Diferansiyel denklemler*, Seçkin Yayıncılık.
- Pişkin, E. (2021a). *Evolüsyon denklemlerin çözümlerinin patlaması*, Pegem Akademi Yayıncılık
- Pişkin, E. (2021b). *Kısmi diferansiyel denklemler*, Seçkin Yayıncılık.
- Pişkin E. and Butakın G. 2023, Existence and decay of solutions for parabolik-type Kirchhoff equation with variable exponents. Journal of Mathematical Sciences and Modelling, 6 (1), 32-41.
- Pişkin, E. and Demir, M. (2023). Growth of solution for a couple of parabolic type Kirchhoff Equations. V. International Turkic World Congress on Science and Engineering 15-17 September 2023, Bishkek – Kyrgyzstan
- Pişkin, E. and Ekinçi, F. (2019). Nonexistence and growth of solutions for a parabolic p-Laplacian system. Sigma, 10(3), 301-307.
- Pişkin, E. and Ekinçi, F. (2020). Blow up and growth of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation with multiple nonlinearities. Konuralp Journal of Mathematics, 8(1), 216-222.
- Pişkin, E. and Ekinçi, F. (2021). Qualitative analysis of solutions for a Kirchhoff-type parabolic equation with multiple nonlinearities. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 50(2), 397-413.
- Pişkin, E. and Ekinçi, F. (2023). Blow up and growth of solutions to a viscoelastic parabolic type Kirchhoff equation. Filomat, 37(2), 519-530.
- Polat, N. (2007). Blow up of solution for a nonlinear reaction diffusion equation with multiple nonlinearities. International Journal of Science & Technolog, 2(2), 123-128.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

GÜNEŞ AYGÜN, Sabahat

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Lisans	Dicle Üniversitesi	2012
Lise	Atatürk Lisesi	2006

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2013-	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Sabahat GÜNEŞ AYGÜN		
Öğrenci No	16804005		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje <input type="checkbox"/>	Yüksek Lisans <input checked="" type="checkbox"/>	Doktora <input type="checkbox"/>
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Erhan PİŞKİN		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Parabolik Tipten Bazı Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	41		
Raporlama Tarihi	04.07.2024		
Benzerlik Oranı (%)	%14		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 41 sayfalık kısmına ilişkin, 04/07/2024 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 14 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç

Kaynaklar hariç

Alıntılar hariç/dâhil

Diğer (Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Tez benzerlik oranı üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı Soyad: Sabahat GÜNEŞ AYGÜN

Tarih: 04/07/2024

İmza:

Danışman Adı, Soyadı: Prof.Dr. Erhan PİŞKİN

Tarih: 05/07/2024

İmza:

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

İmza:

Tarih:
