

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI
MUHASEBE FİNANSMAN BİLİM DALI

**YATIRIM ZAMANLAMA OPSİYONLARI
VE BİR UYGULAMA**

Doktora Tezi

ALPER KARAVARDAR

İstanbul, 2008

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI
MUHASEBE FİNANSMAN BİLİM DALI

**YATIRIM ZAMANLAMA OPSİYONLARI
VE BİR UYGULAMA**

Doktora Tezi

ALPER KARAVARDAR

DANIŞMAN: PROF. DR. GÜREL KONURALP

İstanbul, 2008

Marmara Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğü

Tez Onay Belgesi

İŞLETME Anabilim Dalı MUHASEBE FINANSMAN Bilim Dalı Doktora
öğrencisi ALPER KARAVARDAR'ın YATIRIM ZAMANLAMA OPSİYONLARI
VE BİR UYGULAMA adlı tez çalışması, Enstitümüz Yönetim Kurulunun 07.07.2008
tarih ve 2008-11/9 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile
Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Öğretim Üyesi Adı Soyadı

Tez Savunma Tarihi : 15.07.2008

1) Tez Danışmanı : PROF. DR. GÜREL KONURALP

2) Jüri Üyesi : PROF. DR. DOĞAN ARGUN

3) Jüri Üyesi : PROF. DR. İHSAN ERSAN

4) Jüri Üyesi : PROF.DR.MÜNİR ŞAKRAK

5) Jüri Üyesi : DOÇ.DR.AHMET KÖSE

İmzası

[Handwritten signatures of the jury members and advisor]

ÖNSÖZ

Araştırmada yatırım zamanlama opsiyonları irdelenerek, Türkiye için örnek bir çalışma yapılmıştır. Bu bağlamda uluslararası literatür taranmış, yatırım projelerinin içermiş oldukları gerçek opsiyonlar, faiz oranlarının vade yapısına ilişkin modeller, faiz oranı belirsizliği kavramları ana hatları ile incelenmiştir.

Çalışma sekiz ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde faiz oranı belirsizliğinin yatırım projeleri üzerindeki etkisi açıklanmıştır. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanımlama ve notasyonlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde faiz oranlarını vade yapısına ilişkin modeller incelenmiştir. Dördüncü bölümde binomial ve trinomial ağaçlar kullanarak vade yapısına ilişkin modeller açıklanmış, beşinci bölümde gerçek opsiyon yaklaşımı ve genişletilmiş net bugünkü değer kavramı değerlendirilmiştir. Yedinci bölümde yatırımların optimal zamanlaması ve belirsizliğin değeri üzerinde durulmuştur. Sekizinci bölümde yatırım zamanlama opsiyonlarının genel yapısı üzerindeki değerlendirmeler ele alınmıştır.

Son bölümde, konu ile ilgili olarak bir tekstil işletmesindeki, bir kojenerasyon tesisine yönelik örnek bir uygulamaya yer verilmiştir.

İstanbul, 2008

Alper KARAVARDAR

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	IV
ŞEKİL LİSTESİ	VI
KISALTMALAR	IX
1.GİRİŞ	1
2.FAİZ ORANI BELİRSİZLİĞİNİN YATIRIM PROJELERİ ÜZERİNDEKİ ETKİSİ	3
3.TEMEL TANIMLAMALAR VE NOTASYONLAR	12
3.1.Banka Hesabı.....	12
3.2.Stokastik İndirgeme (İskonto) Faktörü.....	14
3.3.Sıfır Kupon Faizli Bonolar.....	14
3.4.Sıfır Kupon Eğrisi.....	15
3.5.Sıfır Bono Eğrisi.....	15
3.6.Forward Oranlar.....	15
4.FAİZ ORANLARINI VADE YAPISINA İLİŞKİN MODELLER	19
4.1.Tek Faktör Faiz Oranı Modelleri.....	23
4.1.1.Vasicek Modeli – 1977.....	26
4.1.2.Dothan Modeli – 1978.....	29
4.1.3.Cox, Ingersoll ve Ross (CIR) – 1985.....	30
4.1.4.Eksponansiyel Vasicek (EV).....	33
4.1.5.Ho – Lee Modeli – 1986.....	36
4.1.6.Black, Derman ve Toy – 1990.....	39
4.1.7.Hull, White (Genişletilmiş Vasicek) – 1990.....	42
4.1.8.Hull, White (Genişletilmiş CIR) – 1990.....	43
4.1.9.Black, Karasinsky – 1991.....	44
4.2.İki Faktör Faiz Oranı Modelleri.....	46
4.2.1.CIR ++ Modeli – 1998.....	48

4.2.2.Mercurio - Moraleda Modeli – 2000.....	49
4.2.3.Genişletilmiş Exponansiyel Vasicek Modeli – 2001.....	49
5.BİNOMİAL VE TRİNOMİAL AĞAÇLAR KULLANARAK VADE YAPISI MODELLERİ	50
5.1.Binomial Modeller ve Ağaçlar.....	50
5.2.Trinomial Modeller.....	55
6.GERÇEK OPSİYON YAKLAŞIMI VE GENİŞLETİLMİŞ NET BUGÜNKÜ DEĞER KAVRAMI	58
6.1.Gerçek Opsiyonların Genel Düşünce Yapısı.....	63
6.2.Gerçek Opsiyonlar ile Finansal Opsiyonların Farklılıkları ve Benzerlikleri.....	66
6.3.Temel Yönetimsel Opsiyon Türleri.....	70
6.3.1.Erteleme Opsiyonu.....	70
6.3.2.Vazgeçme Opsiyonu	85
6.3.3.Değişim (Esneklik) Opsiyonu.....	88
6.3.4.Genişleme Opsiyonu.....	92
6.3.5.Büyüme Opsiyonu.....	96
6.3.6.Aşama (Birleşik) Opsiyonu.....	100
6.4.Opsiyon Fiyatlamasının Esasları.....	106
6.5.Gerçek Opsiyon Fiyatlamasında Binomial Model.....	117
6.6.Gerçek Opsiyonların Sınırlamaları.....	124
7.YATIRIMLARIN OPTİMAL ZAMANLAMASI VE BELİRSİZLİĞİN DEĞERİ	129
7.1.Pazar Değişkenlik Belirsizliği.....	130
7.2.Alım Opsiyonları İçin Vadeye Olan Süre Belirsizliği... ..	132
7.3.Satım Opsiyonları İçin Vadeye Olan Süre Belirsizliği.....	134
7.4.Teknoloji Belirsizliği	138
8.YATIRIM ZAMANLAMA OPSİYONLARI (YZO)	146

9.BİR UYGULAMA	147
9.1.Kojenerasyon Tesisleri.....	149
9.2.Teknik Değerlendirmeler.....	151
9.3.Finansal Değerlendirmeler.....	156
9.4.Vasicek ve CIR Faiz Oranı Modelleri ve Türkiye Projeksiyonu..	160
9.5.Farklı Vadelere Göre Projenin İçerdiği Yatırım Zamanlama Opsiyonları.....	166
9.6.Vade Haklarına İlişkin Yorumlar.....	171
10.SONUÇ	174
KAYNAKÇA	177

TABLO LİSTESİ

		Sayfa No.
Tablo 1	: Kısa Dönem Faiz Oranı Tek Faktör Modelleri.....	25
Tablo 2	: Üç Risk Yaklaşımı.....	60
Tablo 3	: Finansal ve Gerçek Opsiyonlar.....	66
Tablo 4	: Gerçek Opsiyon Çeşitleri.....	70
Tablo 5	: Yatırımı Şimdi Yapmanın Opsiyon Değeri.....	74
Tablo 6	: Yatırımı Sonra Yapmanın Opsiyon Değeri.....	77
Tablo 7	: Yatırımı Kararı Ertelendiğinde Maliyet Tasarrufları.....	78
Tablo 8	: Yatırım Kararını Ertelemenin Fırsat Maliyeti.....	79
Tablo 9	: Değiştirmenin Varlık Değeri.....	91
Tablo 10	: Değiştirmenin Opsiyon Değeri.....	91
Tablo 11	: Genişlemenin Opsiyon Değeri.....	93
Tablo 12	: İNA Yaklaşımı ve Gerçek Opsiyon Yaklaşımı.....	125
Tablo 13	: Finansal Opsiyon Değerini Yöneten Değişkenler.....	128
Tablo 14	: Zaman Belirsizliği Altında Satım Opsiyonunun Değeri.....	136
Tablo 15	: Artan Zaman Volatilitesi Altında Satım Opsiyonunun Değeri.....	137
Tablo 16	: Ürün 1 İçin Pazar Payları.....	140
Tablo 17	: Ürün 1 İçin Gelir Akış Senaryoları.....	140
Tablo 18	: Ürün 2 İçin Pazar Payları.....	141

Tablo 19	:	Ürün 2 İçin Gelir Akış Senaryoları.....	142
Tablo 20	:	Belirsiz Teknoloji Ulaşma Zamanlaması ve Özel Risk Altında p Risk Yansız Olasılık ve Varlık Değeri.....	143
Tablo 21	:	İki Alternatif CHP Ünitesi İçin Teknik Veriler.....	153
Tablo 22	:	Kojenerasyon Sisteminde Kullanılabilecek Yakıtların Teknik Özellikleri.....	155
Tablo 23	:	Kojenerasyon Sisteminde Kullanılabilecek Yakıtların Fiyatları..	155
Tablo 24	:	Motor Tahrik Yapılı CHP Ünitesinin Sağlaması Planlanan Yıllık Tasarruflar ve Yatırım Maliyetleri.....	158
Tablo 25	:	Türbin Tahrik Yapılı CHP Ünitesinin Sağlaması Planlanan Yıllık Tasarruflar ve Yatırım Maliyetleri.....	159
Tablo 26	:	Proje Alternatiflerine İlişkin Finansal Rasyolar.....	160
Tablo 27	:	Euler Planı İle Tahmin Edilen Değerler.....	162
Tablo 28	:	Vasicek Modeline Göre Opsiyon Değerleri.....	167
Tablo 29	:	CIR Modeline Göre Opsiyon Değerleri.....	167

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1	:	Bir Projenin NBD Ve Projenin Haklarının Değeri.....	9
Şekil 2	:	Proje Haklarının Değeri ve Proje Çoklu Kullanım Bölgeleri.....	10
Şekil 3	:	İki Aşamalı Bir Sıfır Kupon Faizli Tahvilin Fiyat Gelişimi.....	37
Şekil 4	:	BDT Modelinde İndirgeme Oranları Sürecinin Gelişimi.....	40
Şekil 5	:	BDT Modelinde İndirgeme Oranlarının Hesaplanması.....	41
Şekil 6	:	Üç Dönemli Kısa Dönem Faiz Oranı Binomial Ağaç Yapısı.....	53
Şekil 7	:	Dört Dönemli Kısa Dönem Faiz Oranı Binomial Ağaç Yapısı.....	53
Şekil 8	:	Üç Dönemli Yeniden Birleştirilmiş, İkili Gösterime Sahip Kısa Dönem Faiz Oranı Binomial Ağaç Yapısı.....	54
Şekil 9	:	Üç Dönemli Yeniden Birleştirilmiş, İkili Gösterime Sahip Fiyat Binomial Ağaç Yapısı.....	54
Şekil 10	:	Bir Trinomial Ağaç İçin Muhtemel Geometri.....	57
Şekil 11	:	t_i Anında $r_{i,j}$ 'den Başlayan r Sürecinin Evrimi ve Sırasıyla p_u, p_m ve p_d Olasılıklarıyla t_{i+1} Anında $r_{i+1,k+1}$, $r_{i+1,k}$ ve $r_{i+1,k-1}$ 'ye Hareketler.....	58
Şekil 12	:	Yatırım İçin Beklemenin Değeri.....	64
Şekil 13	:	Yatırım İçin Beklerken Kritik Maliyet.....	66
Şekil 14	:	Erteleme Opsiyonun Binomial Varlık Ağacı.....	73

Şekil 15	:	Erteleme Kararı İçin Binomial Varlık Ağacı.....	76
Şekil 16	:	Bir Projeyi Erteleme Opsiyonu.....	81
Şekil 17	:	Vazgeçme Opsiyonun Binomial Varlık Ağacı.....	87
Şekil 18	:	Bir Projeden Vazgeçme Opsiyonu.....	88
Şekil 19	:	Esneklik (değişim) Opsiyonu İçin Binomial Varlık Ağacı.....	90
Şekil 20	:	Genişleme Opsiyonun Binomial Varlık Ağacı.....	93
Şekil 21	:	Bir Proje Genişleme Opsiyonu.....	95
Şekil 22	:	Büyüme Opsiyonun Binomial Varlık Ağacı.....	99
Şekil 23	:	Bileşik Opsiyonun Binomial Varlık Ağacı.....	102
Şekil 24	:	Bileşik Opsiyon Değerinin Hesaplanması.....	104
Şekil 25	:	Binomial Ağaçta Varlık Değerinin Hareketleri.....	118
Şekil 26	:	Binomial Ağaçta Alım Opsiyonun Değeri.....	119
Şekil 27	:	Gerçek Opsiyon Değerini Yöneten Değişkenler.....	129
Şekil 28	:	Belirsiz Teknoloji Ulaşma Zamanlaması ve Özel Risk Altında Alım Opsiyonun Değeri.....	144
Şekil 29	:	Artan Teknoloji Belirsizliği Altında Alım Opsiyonun Değeri.....	145
Şekil 30	:	NBD/YZO ve NBD.....	146
Grafik 1	:	Vasicek ve CIR Modeline Göre On İki Aylık Faiz Oranı Eğrileri...	163
Grafik 2	:	Vasicek Modeline Göre Yapılan Denemelerin Eğrileri	164
Grafik 3	:	Vasicek Modeline Göre 12 Aylık Dönem Faiz Oranları Eğrileri....	164
Grafik 4	:	CIR Modeline Göre Yapılan Denemelerin Eğrileri.....	165

Grafik 5	:	CIR Modeline Göre 12 Aylık Dönem Faiz Oranları Eğrileri.....	165
Grafik 6	:	Vasicek Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Erteleme Opsiyon Değerleri.....	168
Grafik 7	:	Vasicek Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Vazgeçme Opsiyon Değerleri.....	168
Grafik 8	:	CIR Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Vazgeçme Opsiyon Değerleri.....	169
Grafik 9	:	CIR Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Vazgeçme Opsiyon Değerleri.....	169
Grafik 10	:	Vasicek Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Yatırım Zamanlama Opsiyon Değerleri.....	170
Grafik 11	:	CIR Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Yatırım Zamanlama Opsiyon Değerleri.....	170

KISALTMALAR

<i>AOSM</i>	Ağırlıklı Ortalama Sermaye Maliyeti
<i>BK</i>	Black ve Karasinski
<i>BS</i>	Black ve Scholes
<i>BO</i>	Büyüme Opsiyonu
<i>CHP</i>	Combine Heat and Power (Kombine Isı ve Güç Sistemleri)
<i>CIR</i>	Cox, Ingersoll ve Ross
<i>CRR</i>	Cox, Ross ve Rubinstein
<i>EV</i>	Eksponansiyel Vasicek
<i>EO</i>	Esneklik “Değişim” Opsiyonu
<i>GODY</i>	Gerçek Opsiyon Değerleme Yaklaşımı
<i>HL</i>	Ho ve Lee
<i>HW</i>	Hull ve White
<i>IR</i>	Ingersoll ve Ross
<i>İNA</i>	İndirgenmiş Nakit Akımları
<i>NBD</i>	Net Bugünkü Değer
<i>ÖBG</i>	Özkaynakların Beklenen Getirisi
<i>PEO</i>	Parizyen Engel Opsiyonu
<i>YZO</i>	Yatırım Zamanlama Opsiyonları

1. GİRİŞ

Finans yazınında, yatırım projelerinin iktisadi açıdan değerlendirilmesine yönelik yöntemler, temel hatları itibariyle geçen yüzyıldan bu yana pek fazla değişim göstermemiştir. Bu konuda inceleme yapıldığında en büyük bakış açısı değişimi olarak değerlendirilen indirgenmiş nakit akımları (İNA) yaklaşımının halen geçerli olduğu görülmektedir. Yetmişli yılların başlarından bu yana süregelen çalışmalar, bu yönteme alternatif bir bakış açısını üretememekle beraber, söz konusu yöntemin eksiklik ve kusurlarını gidermeye yönelik olmuştur.

İndirgenmiş nakit akımlarına yönelik en büyük eleştiri, bu yöntemin ilerleyen zaman içerisinde yönetime esneklik sağlayamadığına ilişkindir. Gerçek opsiyon yaklaşımı, karar alıcılara daha geniş bir bütünleşik bakış açısını vermekte olup bu sayede ileriye yönelik belirsizliklerin zaman içinde azalmasıyla ortaya çıkan ilave yatırım alternatiflerinin kullanılması imkanı sağlamaktadır. Bu yaklaşım, içermiş olduğu opsiyon bakış açısı dahilinde, indirgenmiş nakit akımları yaklaşımını tamamlamaya yönelik çabaların bir sonucu olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bakış açısı değişikliğinin bir uzantısı olarak, net bugünkü değer kavramı günümüzde yerini, genişletilmiş net bugünkü değer "*projenin net bugünkü değeri + projenin opsiyon değeri*" kavramına bırakmıştır.

Opsiyonlar, doğaları itibariyle geleceğe ilişkin bir dizi tahmin ve değerlendirmenin matematiksel bir ifadesidir. Finansal opsiyonların değerinin hesaplanmasında, 1973 yılından bu yana, yoğun olarak kullanılan Black Scholes modelinin, hipotetik risksiz bir portföye dayalı olması ve kısıtlayıcı varsayımlarının giderilmesine ilişkin gereksinim duyulması, takip eden yıllarda yeni matematiksel bakış açılarının biçimlenmesine neden olmuştur.

Yatırım ortamını etkileyen faktörler çok çeşitli olmakla beraber İNA yaklaşımı çerçevesinde, karar alıcılar için, en önemli faktörlerden birinin, faiz oranları olduğu yadsınamaz bir gerçektir. Projenin ömrü içerisinde, muhtelif nedenlerle değişim gösteren faiz oranları, yatırım kararının alınması esnasında var olan kabullerin, neredeyse tamamını, dolayısıyla kar ya da zarar neticesini etkilemektedir. Faiz oranları

modelleri finans mühendisliğinin önemli bir konusunu oluşturmaktadır. Bir yatırım projesinin planlanması aşamasında, faiz oranlarındaki değişimlerin etkileri dikkate alındığında, yatırım zamanlamasının önemi daha belirgin bir biçimde ortaya çıkmaktadır. Yatırım zamanlama opsiyonları bu çabaların bütününe içeren bir konu başlığıdır. Bu opsiyonlar, yatırımların ertelenmesi ve yatırımlardan vazgeçilmesi sonuçlarının sayısal öngörüsüdür.

Yatırım kararlarının ertelenmesi suretiyle yatırım veriminin artırılması bir başka ifade ile, bekleme suretiyle daha fazla kazanç temin edileceğine ilişkin görüşler kapsamlı olarak J.Ingersoll ve A.R.Ross'un 1992 yılında yayımladıkları "*Waiting to Invest*" adlı çalışmalarında ele alınmıştır. 1997 yılında Moon Hoe Lee "*Valuing Finite-Maturity Investment- Timing Options*", adlı çalışmada, yatırım zamanlama opsiyonları için bir değerlendirme modeli geliştirmiştir.

Yatırım projesinin yaşam süresi içinde faiz oranlarının düşüş göstermesi durumunda yatırımcılar, ertelenebilir nitelikteki yatırım kararlarında, yatırım için beklemek suretiyle, göreceli olarak, yatırımdan elde edilmesi umulan verimi arttırmak imkanına sahiptirler. Türkiye gibi gelişmekte olan ülkelerde geçerli faiz oranlarının, gelişmiş ülke piyasalarındaki faiz oranlarına göre daha yüksek olması bu ülkelerin mali dengelerini olumsuz etkilediğinden ilgili ülkelere faiz oranları orta ve uzun vadede azaltılmaya çalışılmaktadır. Yerel ve uluslararası faiz oranlarını arasındaki bu fark, sadece o ülkede yatırım yapmayı planlayan uluslararası işletmelerin yatırım kararlarını etkilememekte, bunun yanı sıra yurtiçi yatırım planlayan yerel işletmeleri de önemli derecede etkilemektedir.

Bu çalışmanın amacı, Türkiye ölçeğinde hipotetik bir yatırım projesi kararı alınması durumunda faiz oranlarına yönelik geliştirilmiş bir dizi varsayıma dayalı olarak, yatırım zamanlama opsiyonlarının (YZO), ertelene bilinen bir yatırım projesi üzerinde karar alıcılar açısından ne derecede önemli olduğu sorusuna cevap verebilmektir. Çalışmada ayrıca, YZO'nun firma kararı üzerinde nasıl bir etki yaptığı, alternatif projelerin karşılaştırılması esnasında ne derece önem taşıdıkları ve yatırım zamanlamasının neden önemli olduğu, bir uygulama üzerinde gösterilmeye çalışılmıştır.

2. FAİZ ORANI BELİRSİZLİĞİNİN YATIRIM PROJELERİ ÜZERİNDEKİ ETKİSİ

Yatırım projeleri, karar alıcıların gelecekte potansiyel yararlar elde etmek beklentisiyle, iktisadi ömürleri genellikle bir yıldan daha ileriye uzanan varlıkların alımına yönelik harcamaları temsil etmesi bakımından, aslında geleceğe yönelik bir dizi tahmin ve analizin uygulanması ve yönetilmesi sürecidir. Bu süreçte neyin, ne zaman ve nasıl yapılacağı sorularına cevap aranır. Yatırım kararlarının başarısı bu sorulara isabetli ön görüler geliştirilmesiyle doğru orantılıdır. Karar alıcılar sermaye bütçelemesi süreci içinde, geleceğe yönelik çeşitli belirsizlikleri gidermeye çalışırlar. Amaçlanan davranış, sınırları daha kesin hatlarla çizilmiş bir karar evreninde, yatırımcıların servetlerini maksimum ölçüde çoğaltmalarıdır. Risk unsuru yatırım davranışını biçimlendiren önemli bir kavram olarak, yatırım değişkenlerinin gelecekte takip edecekleri seyre ilişkin belirsizlikten kaynaklanır. Belirsizlik altında yatırımcılar karar alırlarken; olasılık dağılımlarından, duyarlılık analizlerinden, proje değişkenlerinin simülasyonlardan ve karar ağaçlarından yararlanırlar.

Yatırım sürecini etkileyen sayısız faktör mevcuttur. Gelecek dönemlerde gerçekleşecek girdi fiyatları, döviz kurları, genel fiyat düzeyindeki değişimler, makro göstergelerdeki değişimler, işçi ücretleri, arz ve talep arasındaki değişimler bunlardan bir kaçıdır. Bu faktörler incelendiğinde, en önemli değişkenlerden birinin faiz oranları olduğu görülür. Faiz oranları yatırımcılar için bir karar kriteri niteliğinde olup risksiz faiz oranları ile birlikte düşünüldüğünde gösterge niteliği taşır. Faiz oranları matematiksel olarak zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Burada, faiz oranlarını etkileyen nedenlerden çok faiz oranlarının gelecekteki seyri yatırımcı açısından daha anlamlıdır. Temelde bu durumun nedeni insanın, sosyal sistemlerin davranışı tam olarak kestirilemez nitelikteki bir elemanı olmasıdır. Bir başka ifade ile sosyal sistemler insan faktörü nedeniyle belirsizlik unsurunu içerirler. Statik bir analizde planlama aşamasında faiz oranı bir veridir. Paranın zaman değeri ve onun bir sonucu olan faiz kavramı, yatırım projelerinin farklı zaman dilimlerine dağılmış proje nakit akımlarının sahip oldukları değer farklılıklarını ortadan kaldırmaya yönelik bir çabadır.

Faiz oranı riski, mevcut faiz oranlarının zaman içinde değişim göstermesi sebebiyle yatırımlardan elde edilecek getiriye etkilemesi bakımından önemli bir değişkendir.

Yatırım projelerinin değerlendirilmesinde kullanılan değerlendirme yöntemleri karar alıcıların kabul ya da red kararları almalarına yön vermeleri bakımından önemli olup, bu yöntemlerin sahip oldukları işleyiş mekanizmalarının ve çalışma özelliklerinin gereğince bilinmemesi, istenmeyen sonuçlara neden olacaktır. Finans yazınında halihazırda başlıca şu yöntemler kullanılmaktadır.¹

1. Geri ödeme süresi yöntemi,
2. Ortalama getiri oranı yöntemi
3. İç verim oranı yöntemi
4. Net şimdiki değer yöntemi
5. Karlılık endeksi yöntemi

Gerçek hayatta sıklıkla karşılaşılan durum çok dönemli proje kararlarıdır. Çok dönemli yöntemlerde proje karı ise, iskonto edilmiş gelirlerin, iskonto edilmiş giderleri aşan kısmı yani net bugünkü değeridir.

Net bugünkü değer yönteminde kullanılan iskonto oranı “sermaye maliyeti” yaklaşım olarak tek bir sayısal değerdir. Sermaye maliyetinin belirlenmesi sermaye kaynaklarının ayrı ayrı değerlendirilmesi gerektirmekte olup, işletme faaliyetlerinin birden fazla kaynaktan finanse edilmesi durumunda ağırlıklı ortalama sermaye maliyeti hesaplanması zorunludur. Bu bakımdan sermayenin kaynağı ister borç, ister hisse senetleri, isterse yedekler olsun sermaye maliyetinin hesaplanmasında anılan kaynakların maliyetleri önemli bir deterministik belirleyicidir. İskonto oranı, projede yer alan nakit giriş ve çıkışlarının net bugünkü değerini hesaplamakta kullanıldığından yatırımcılar açısından, risksiz yatırımlardan elde edilecek prim ile yatırımcının üstlendiği riske karşılık talep ettiği primin kümülatif toplamıdır. Ağırlıklı ortalama

¹ Orhan Göker, **Yatırım Projelerinin Değerlendirilmesi**, Birinci baskı, İstanbul:Atlantis İletişim, 1996, s.65-78

sermaye maliyeti (AOSM) işletmenin tüm menkul kıymetlerini içeren portföyden beklenen getiri oranını temsil etmektedir. AOSM, işletmenin mevcut işiyle aynı riskteki bir projeden istenen getiri oranıdır. İşletmeler AOSM’ni, “ortalama” projeler için iskonto oranı olarak, daha güvenli veya daha riskli projeler için de iskonto oranını tasarlamaya yarayan bir sabit nokta olarak kullanırlar. AOSM, işletme sermaye maliyetini tahmin etmenin bir yolu olup şu şekilde formüle edilir.

$$\begin{aligned}\text{AOSM} &= \text{İşletme varlıklarının beklenen getirisi} \\ &= (\text{Borcun beklenen getirisi} * \text{Borç oranı}) + (\text{Özkaynağın beklenen getirisi} * \text{Özkaynak oranı})\end{aligned}$$

Özkaynakların beklenen getirisi (ÖBG) aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned}\text{ÖBG} &= \text{Varlıkların beklenen getirisi} + [\text{Borç-Özkaynak oranı} * (\text{Varlıkların beklenen getirisi} - \text{Borçların beklenen getirisi})]^2\end{aligned}$$

İndirgenmiş nakit akımları teorisi tanımı gereği bir iskonto oranına, iskonto oranı da yapısı gereği faiz oranlarına bağlıdır. Faiz oranları dışında yatırım analizini etkileyen diğer faktörlerin sabit kaldığı varsayımı altında, faizlerin düşmesi ya da yükselmesi yatırım kararlarının zamanlaması ve yatırımın net bugünkü değeri üzerinde önemli bir etki yaratacağı açıktır. Bunu basit bir örnek ile şu şekilde gösterebiliriz. Bugün 100 YTL gerektiren bir yatırım düşünelim. Bir yıl sonra bize 112 YTL kazandıracak olsun. İskonto oranlarının bir başka deyişle faiz oranlarının % 10 ve % 7 olduğu iki durum söz konusu ise projenin net bugünkü değerleri şu şekilde olacaktır;

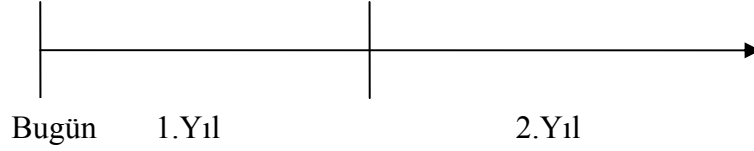
$$\text{NBD}_1 = (112 \text{ YTL} / 1,1) - 100 \text{ YTL} = 1,82 \text{ YTL}$$

$$\text{NBD}_2 = (112 \text{ YTL} / 1,07) - 100 \text{ YTL} = 4,67 \text{ YTL}$$

Basit olarak faiz oranlarının düşmesi yatırımın değerini arttırmaktadır. Örneğimizi genişletebiliriz. Bu yıl faiz oranı tutarının gerçekte % 13 olduğunu, projeyi

² Richard A.Brealey, Steward C.Myers ve Alan J.Marcus, **İşletme Finansının Temelleri**, Ünal Bozkurt, Türkan Arıkan ve Hatice Doğanlı (çev), Birinci baskı, İstanbul; Literatür Yayıncılık, 1977, s.293-294-297-410

bir yıl erteleme imkanımız olduğunu ve bir yıl sonra faiz oranının % 11' e düştüğünü varsayalım;



$$NBD_{\text{bugün}} = (112 \text{ YTL} / 1,13) - 100 \text{ YTL} = -0,89 \text{ YTL}$$

$$NBD_{1.\text{Yıl}} = (112 \text{ YTL} / 1,11) - 100 \text{ YTL} = 0,90 \text{ YTL}$$

Yukarıda da açık bir biçimde görüldüğü üzere faiz oranlarının değişimi kabul ya da red kararını doğrudan etkilemekte olup, faiz oranları üzerindeki belirsizlikler hakkında bir öngörü geliştirilmesi zorunludur. Genel olarak belirsizliğin yüksek olduğu bir ekonomide aynı projenin haklarının değerinin, belirsizliğin düşük olduğu bir diğer ekonomiye kıyasen daha yüksek olduğu söylene bilinir.

Bir çok yazar, projelerdeki belirsizliğin bekleme yoluyla çözümüne yönelik analizler yaptılar. Robert Mc Donald ve Daniel R. Siegel 1986 yılında yayınladıkları "*Yatırım İçin Beklemenin Değeri*" adlı makalelerinde NBD'i maksimize etmeye yönelik olarak bir yatırım projesinin gelecekteki bir tarihte başlanmasına yönelik optimal kuralı göstermişlerdir. 1983 yılında Ben S. Bernanke "*Tek Yönlülük, Belirsizlik ve Çevrimsel Yatırım*" başlıklı çalışmasında opsiyon fiyatlama tekniklerini kullanmaksızın optimal erteleme politikası bulmaya yönelik, nakit akışları üzerindeki bilgi akışını modellemiştir. Sheridan Titman 1985'teki "*Belirsizlik Altında Kentsel Arazi Fiyatları*" adlı çalışmasında boş arazilere yönelik geliştirme opsiyonları üzerine bir dizi analiz yapmıştır. Titman'ın analizi gayri menkullerin geliştirilmesine ilişkin yatırımların neden ertelenebileceğini göstermektedir.

Jonathan E.Ingersoll ve Stephen A.Ross'un (Ingersoll ve Ross) 1992 yılında yayınlamış oldukları "*Yatırım İçin Beklemek:Yatırım ve Belirsizlik*" adlı makalelerinde faiz oranlarının değişiminin yatırım projeleri üzerinde etkilerini açıklamışlardır.

Ingersoll ve Ross faiz oranlarının belirsizliğinin etkisinin her yerde gözlenebileceğini ve makro ekonomik düzeyde yatırımların anlaşılmasında kritik öneme sahip olduğunu vurgulamışlardır. Yazarlar yine bu makalelerinde, faiz oranlarını yöneten stokastik süreçlerin yatırım kararları üzerindeki etkisini keşfetmeye izin veren bazı modelleri geliştirmeye çalışmışlar, yatırım üzerindeki belirsizliğin ölçülebilir olduğunu göstermişlerdir. Ingersoll ve Ross, belirsizlik arttığında bir yatırımın ertelenmiş olması için yeterli koşulların tarifini de yapmışlardır.

Ingersoll ve Ross makalelerinde basit bir örnekten yola çıkmışlardır. Bir proje için 1 YTL yatırıldığı, yatırım anının t , faiz oranının r ile ifade edildiği ve $t + T$ zaman noktasında projenin getirisinin 1 YTL olduğu varsayılırsa projenin NBD'i aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. Analizi basitleştirmek adına yatırımı başka her hangi bir faktörün etkilemediği, başkaca bir maliyetin olmadığı, söz konusu getirinin zamanlaması ve tutarı hakkında bir belirsizlik bulunmadığı varsayılmıştır.

$$P(t) - I \equiv \hat{E} [\exp(- \int_t^{t+T} r(s)ds)] - I$$

Burada $\hat{E}$ risk düzeltmeli stokastik sürece bağlı beklentileri temsil eder. Bu gösterime göre bu projeye yatırım için optimal zamanı şu çözümle göstermemiz mümkündür;

$$\sup \hat{E}([P(\tau) - I] \exp[- \int_0^\tau r(s)ds])$$

Burada vade yapısını yöneten stokastik süreç için rastlantısal bir durma zamanı söz konusudur. Yukarıdaki çözümden yatırımlar hakkında şu çıkarımlar yapılabilir. Stokastik olmayan düz bir verim eğrisi söz konusu olduğunda, yatırımın NBD'i zamana bağlı olarak değişmez ve bir proje eğer negatif NBD'e sahipse (ancak proje pozitif bir NBD'e sahip olduğunda uygulanabilir) projeye yatırım yapılmaz. Eğer stokastik olmayan, ama eğimli bir eğri söz konusu ise ilk notasyon şu şekilde düzeltilebilir;

$$[I / P(t^*)] = [(r(t^* + T)) / (r(t^*))]$$

Bu gösterimin çıkarımı ise; bir verim eğrisinin aşağı doğru düşüş göstermesi durumunda, projeye girildiğinde NBD'in pozitif olması kuralı gereği, bir erteleme koşulunun olduğu şeklindedir. Ingersoll ve Ross, optimal yatırım politikası ve proje

değerini tespit etmek için, ödemelerin gerçekleşmesinden önce ve yatırım tahahüdünün yapılmasından sonra proje değerinin saptanmasının gerekli olduğunu belirtmişlerdir. Ingersoll ve Ross'un analizde karar alıcıların, yatırım tahahüdünün yapıldığı zaman, bir yatırımın bir YTL'lik nominal değere sahip sıfır kupon faizli T dönemli bir bono ile benzer bir pozisyon aldıklarını belirtilmiştir. T dönemli bir proje değeri şu şekilde ifade edilebilir;

$$P(r;T) = e^{-b(T)r}$$

$$b(T) \equiv [2(e^{\gamma T} - 1)] / [(\gamma - \lambda)(e^{\gamma T} - 1) + 2\gamma],$$

$$\gamma \equiv (\lambda^2 + 2\sigma^2)^{1/2}$$

Eğer faiz oranı r ise yatırım kararı verildiği anda projenin değeri $P(r;T) - I$ olur. Projenin haklarının değeri opsiyon mantığı uyarınca en az bu değere eşit ancak çoğunlukla bu değer üzerinde olması gerekmektedir. Burada yatırımcının yatırım karar süreci içerisinde faiz oranından farklı bir kullanım oranını saptaması gerekmektedir. Bu oran bir sınır niteliği taşımakta ve opsiyon değeri maksimize edilmektedir. Kullanım oranı başa baş oranından farklıdır. Sürekliliğin değerini $R(r; T, I)$ ile gösterdiğimizde projenin toplam NBD'i, hakların optimal olduğu noktaya kadar geçerli olan erteleme haklarını da içermekte olup, sınır koşulları $R(r^*) = P(r^*, T) - I$, $\lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0$ ve $R'(r^*) = \partial P(r^*, T) / \partial r$ 'dir. Burada yine Ingersoll ve Ross'a göre $P_t = 0$ için genel çözüm bir eksponansiyel olup şu şekilde gösterilebilir.

$$R(r;T,I) = [(v - b(T)) / vI]^{v/b(T)} [(b(T)I)(v - b(T))]e^{-vr}$$

$$v \equiv (\lambda + \gamma) / \sigma^2$$

Buna göre bir proje kabul edildiği noktada oluşan kabul oranı;

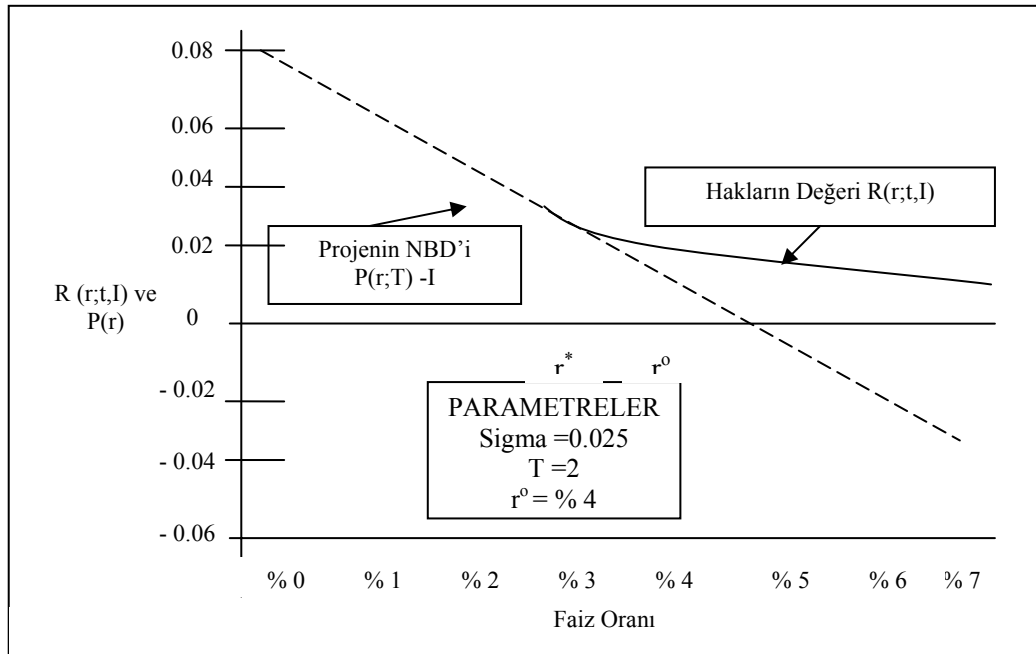
$$r^*(T,I) = (1 / (b(T))) \log [v - b(T) / vI] \text{ olur.}$$

Hakların değerini kullanım oranına bağlı olarak şu şekilde göstermek mümkündür;

$$R(r) = e^{-v(r-r^*)} [e^{-b(T)r^*} - I]$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan ilk terim beklemeye bağlı iskontolamayı ölçmektedir. İkinci terim kabul (r^*) oranından girişilen projenin NBD'ini göstermektedir.

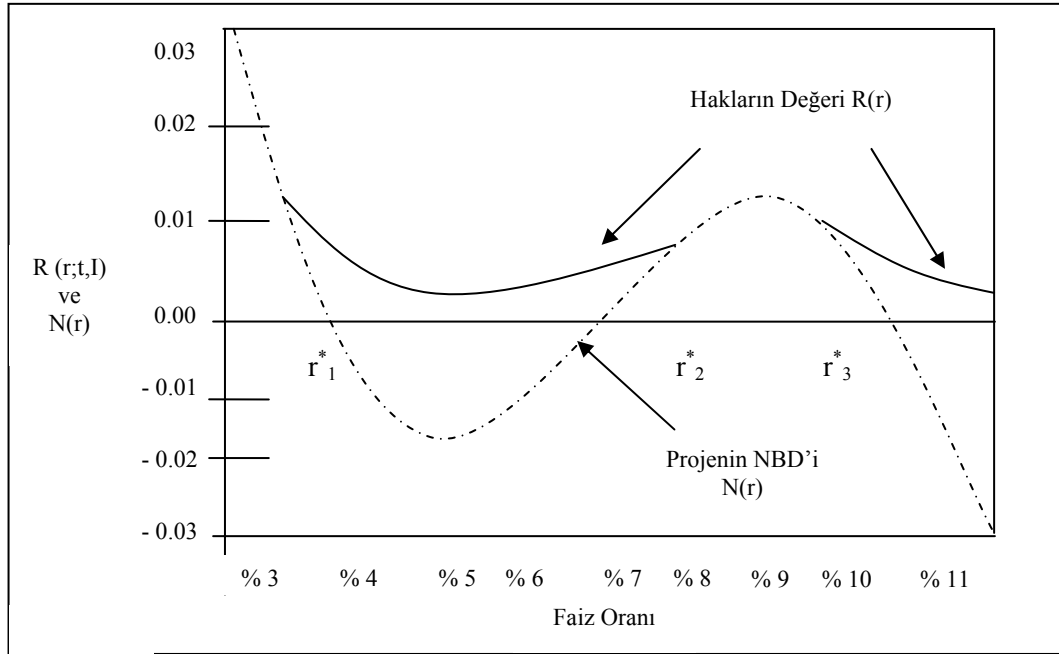
Ingersoll ve Ross bir projenin NBD'ini ve projenin sahip olduğu hakların değerini faiz oranlarının bir fonksiyonu olarak göstermişler, bu iki eğrinin teğet oldukları noktanın kabul oranını verdiğini göstermişlerdir. Burada NBD'in negatif olabilmekle beraber projenin asla bir negatif değere sahip olmadığı görülmektedir. Ingersoll ve Ross çalışmalarını aşağıdaki iki şekil (Şekil 1 ve Şekil 2) ile özetlemişlerdir.³



Şekil 1: Bir Projenin NBD Ve Projenin Haklarının Değeri

Kaynak: Jonathan E. Ingersoll ve Jr. Stephen Ross, “Waiting to Invest: Investment and Uncertainty”, **Journal of Business**, Vol. 65, Issue 1, (Jan. 1992), s.9

³ Jonathan E. Ingersoll ve Jr. Stephen Ross, “Waiting to Invest: Investment and Uncertainty”, **Journal of Business**, Vol. 65, Issue 1, (Jan. 1992), s.9



Şekil 2: Proje Haklarının Değeri ve Proje Çoklu Kullanım Bölgeleri

Kaynak: Jonathan E. Ingersoll ve Jr. Stephen Ross, “Waiting to Invest: Investment and Uncertainty”, **Journal of Business**, Vol. 65, Issue 1, (Jan. 1992), s.22

Ingersoll ve Ross faiz oranlarındaki küçük bir azalmanın projenin NBD’ini nasıl etkilediğini göstererek, bu durumun sermaye bütçeleme kararı üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Ingersoll ve Ross zamanlama kararının yatırım projesi üzerindeki önemine işaret etmişlerdir. Ingersoll ve Ross belirsiz bir ekonomide yatırım projelerinin birçoğunun opsiyon değerine sahip olduğunu belirtmişlerdir. Ingersoll ve Ross’un çalışmaları çeşitli stokastik süreçlere dayalıdır. Bir başka anlatımla yazarlar, faiz oranlarının stokastik süreç tarafından yönlendirildiği varsayımı altında yatırım kararlarını incelemişlerdir. Geleneksel sermaye bütçeleme teorisi yatırımcılara NBD’in sıfır olduğu noktada yatırımın kabul edilmesi gerektiğini ifade eder. Ingersoll ve Ross yukarıda belirtilen varsayımlar altında başabaş noktasında, projenin göreceli olarak küçük sayılabilecek bir hak değeri sahip olduğunu belirtmişlerdir. Kendi çalışmalarında bir yatırımın erteleme yoluyla 1 USD’lik her bir proje ödemesi için (projenin süresine bağlı olarak bu aralık değişir) 1-3 cent aralığında bir kazanç potansiyelinin bulunduğunu göstermişlerdir.

Gelecekte gerçekleşecek olan faiz oranlarının üzerindeki belirsizlik yeni bir bilginin, enformasyon setinin gelişinden etkilendiğinden, proje süresi uzadıkça ve başa baş noktasındaki faiz oranları düştükçe projenin değeri artış göstermektedir. Ingersoll ve Ross' göre başa baş noktası ve kabul oranı arasındaki fark, volatilité ve vadeyle doğru orantılı olacak şekilde artar. Bu doğru orantının yarattığı etkiler ise farklıdır. Düşük volatilitenin varlığı durumunda süre uzandıkça $r^0 - r^*$ farkı çok düşük düzeyde kalmakta, özet olarak σ zamana karşı duyarsız kalmaktadır. Burada önemli olan cari faiz oranlarının volatilitésinin optimal yatırım zamanlaması üzerindeki etkisidir. Bu noktada (λ) vade priminin değeri önemlidir. Bu değerın sıfırdan farklı pozitif bir değeri olması durumunda $r^0 - r^*$ farkı, düşük volatilité düzeylerinde duyarsız, yüksek volatilité durumunda zamana karşı pozitif bir duyarlılık göstermektedir. Ingersoll ve Ross'a göre $\lambda > 0$ 'ın anlamı uzun dönemli faiz oranlarının anlık faiz oranlarına yüksek derecede bağlı olduğu şeklinde değerlendirilir. Hakların vadesi de proje üzerinde benzer etkiye sahiptir. Sıfırdan büyük bir λ değeri gibi yatırım opsiyonun süresi, opsiyon haklarının değerini azaltır. Projenin haklarının geçerli olduğu zaman noktasına kadar kalan zamanı s , kabul oranını $r^*(s)$ ile gösterildiğinde, vadeye kadar olan süre kısa bir zamansa, kabul oranı başa baş oranına yakın olacaktır ($r^*(s) \approx r^0$). Ingersoll ve Ross çalışmalarında yatırım projelerinin içermiş oldukları opsiyon haklarıyla ilgili olarak, yatırım kararları için gerçek hayatta nadiren tam enformasyon durumunun söz konusu olduğunu belirtmişlerdir. Sermaye bütçeleme teorisinde bir projenin ödeme zamanları hakkındaki belirsizlik ödeme tutarları hakkındaki belirsizliğe çevrilir. Ödemeler, bunlara ilişkin zamanlamalar gibi parametrelerin yanlış değerlendirilmesi opsiyon değerini etkileyecektir.

Ingersoll ve Ross çalışmalarında stokastik süreçlerden yararlandığı için stokastik süreçler hakkında bilgi vermek faydalı olacaktır. Finans yazınında pek çok yazar, çeşitli malların fiyat hareketlerinin doğasına yönelik çalışmalar yapmışlardır. Burada ortak soru bu hareketlerin kestirilebilir olup, olmadıklarıdır. Finans teorisinde riskin iki kaynağı vardır; sistematik olmayan (çeşitlendirmeye azaltılabilecek) riskler ve sistematik (çeşitlendirilmeye azaltılamayan) riskler. Belirsizliğin rastlantısallıktan kaynaklanabileceği noktasında, belirsizliğin matematiksel değişkenler vasıtasıyla modellenmesi gündeme gelmiştir. Matematik ve istatistik yazınında stokastik süreçler,

değeri zaman içinde belirsiz bir biçimde değişen her hangi bir rastsal değişkenin izlediği süreç olarak tanımlanmaktadır. Stokastik bir süreçte (bu temelde bir sayı dizilimi ile ifade edilir) ilgili şeyin sonucu sadece olasılık dahilinde tespit edilebilir ki o olasılığı hesaplamak mümkündür. Faiz oranları bu bakımdan sürekli parametrelili bir süreçtir.

Ingersoll ve Ross çalışmalarında faiz oranlarının stokastik bir süreç olarak modellenmesi durumunda, faiz oranlarının gelecekte düşüş göstereceği beklentisine bağlı olarak, yatırım zamanlamasının doğru yapılması yoluyla yatırımdan daha fazla kazanç elde edilebileceğine işaret etmişlerdir. Ingersoll ve Ross yapmış oldukları örnekte faiz oranlarının bir Geometrik Brownian hareket izlediği kabulü altında projenin NBD'i (V) değişken iken yatırımın maliyetinin (I) sabit olduğunu belirtmişlerdir. Brownian hareket, menkul kıymet piyasalarında belirsizliğin modellenmesinde kullanılan stokastik bir süreç olup, bir dizilimde yer alan artışların normal dağılıma uygun gerçekleştiği düşüncesine dayalı bir tanımdır. Ingersoll ve Ross'a göre V 'nin gelecek değerleri bilinmediğinden bugün yatırım yapmanın bir fırsat maliyeti söz konusudur ve $V > I$ kuralı hatalıdır. Ingersoll ve Ross'un varsayımları altında optimal yatırım kuralı, I değerini aşan kritik V^* değeri kadar geniş olan bir V değerinde yatırım yapmayı gerektirir. Ingersoll ve Ross'a göre yatırım projeleri - ekonomik çevrede yer alan belirsizlikler nedeniyle- bazı opsiyon hakları değerine sahip olup, projenin sunduğu getiri oranı ve başa baş noktası değerlendirilirken bu opsiyon değerlerinin de dikkate alınması önemlidir.

3. TEMEL TANIMLAMALAR VE GÖSTERİMLER

Bu bölümde çalışmamızın doğası gereği ilerleyen bölümlerde sıklıkla kullanacağımız bazı kavramlara giriş niteliğinde kısa olarak değinilecektir.

3.1. Banka Hesabı (Bank Account/Money-Market Account)

Banka hesapları finans yazınında bono türünde bir çeşit menkul kıymet olarak görülmekte olan temel bir tanımlamadır. Banka hesaplarında belirsizlik söz konusu değildir. Burada banka hesabı risksiz bir niteliğe işaret etmektedir. $t \geq 0$ zaman noktasında bir banka hesabını $B(t)$ ile t anındaki faiz oranını r_t ile gösterirsek, $B(0) = 1$

varsayımı altında aşağıdaki eşitliğin banka hesaplarının takip ettiği süreci temsil ettiğini söyleyebiliriz;

$$dB(t) = r_t B(t)dt$$

Denklemden de görüleceği üzere faiz zamanın bir pozitif fonksiyonu olup, benzer bir şekilde integral kavramı vasıtasıyla (matematiksel olarak integral kavramı bir eğrinin tanımlanmış iki nokta arasında kalan alanını temsil ettiğinden) banka hesaplarını şu şekilde de gösterebiliriz,

$$B(t) = \exp \left(\int^t r_s ds \right)$$

Anlık faiz oranı, spot faiz oranı ya da kısa dönem faiz oranı olarak da ifade edilebildiğinden, ilk denklemini, zamandaki değişim (Δt) ile göstermek istersek aşağıdaki gösterim uygun olacaktır;

$$B(t + \Delta t) = B(t) (1 + r(t) \Delta t)$$

ya da

$$[B(t + \Delta t) - B(t)] / B(t) = r(t) \Delta t$$

Sıfır zaman noktasında bir banka hesabına A miktarında bir para yatırıldığı takdirde $t > 0$ anında elimize geçecek olan miktar $A*B(t)$ olacaktır. Benzer bir şekilde $t_1 > t_0$ zaman noktasında da yine yatırımcının eline geçecek olan miktar $A*B(t_1)$ olacaktır. t_1 zamanında alınacak tutarın bir olmasının istenmesi durumunda $A*B(t_1) = 1$ ve buna bağlı olarak t_0 anında yatırmamız gereken tutarı $A*B(t_0) = B(t_0) / B(t_1)$ ile temsil edebiliriz.⁴

⁴ Damiano Brigo, Fabio Mercurio, **Interest Rate Models Theory and Practice**, Germany: Springer, 2001, s.2 ve Ömer Önal, **Finans Mühendisliğinde Matematiksel Modelleme**, 1.Baskı, İstanbul:Avciol Basım Yayın, 2004, s3-4

3.2. Stokastik İndirgeme Faktörü (Stochastic Discount Factor)

Stokastik indirgeme faktörü $D(t, T)$, t ve T ile temsil edilen iki zaman noktası arasındaki bir miktar olup, T zamanındaki bir miktar nakite eşit olan t zamanındaki bir tutarı göstermektedir. Buna göre $D(t, T)$ 'yi şu şekilde gösterebiliriz;

$$D(t, T) = B(t) / B(T) = \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right)$$

Pek çok fiyatlama uygulamasında (örneğin Black-Scholes formülü) r 'nin zamanın deterministik bir fonksiyonu olduğu kabul edildiğinden, gelecekteki bir zamandaki banka hesapları ve indirgeme faktörleri zamanın deterministik fonksiyonları olarak kabul edilir.⁵

3.3. Sıfır Kupon Faizli Tahviller (Zero-Coupon Bond/Pure Discount Bond)

Sıfır kupon faizli tahviller, faiz ödemeyen (sıfır faizli) ancak nominal değerinden daha düşük fiyatla satılan bir tahvil türüdür.⁶ Bir T vadeli sıfır kupon faizli (saf indirgeme-iskonto) tahvil ara dönem ödemesi olmayan, T zamanında bir miktar nakit ödemesini sahibine garanti eden bir borç senedidir. $T > t$ anında anlaşmanın değeri $P(t, T)$ ile temsil edilmekte olup, tüm T 'ler için $P(T, T) = 1$ 'dir. t zaman noktasında T vadeli bir sıfır kupon faizli tahvil, T zaman noktasında ödenmiş olacak bir miktar nakitin bugünkü değerini gösteren bir sözleşmedir. Bu bakımdan $D(t, T)$ “eşit miktar parayı”, $P(t, T)$ ise “sözleşmenin değerini” göstermektedir. r 'nin deterministik olması durumunda D 'de deterministik olup, her bir (t, T) için $P(t, T) = D(t, T)$ 'dir. Faiz oranlarının stokastik olması durumunda ise $D(t, T)$, t ve T zaman noktaları arasındaki r , oranların gelecekteki evrimine bağlı t zaman noktasındaki bir rassal niceliktir. $P(t, T)$, t anında bilinmek zorunda olan, T zamanındaki ödemeli bir sözleşmenin t zamanındaki değeridir. $P(t, T)$ ve $D(t, T)$ birbirleriyle yakın bağlantılı olup, $P(t, T)$ bir belirli olasılık ölçümü altında $D(t, T)$ rassal değişkeninin beklentisi olarak gözükür.⁷

⁵ Brigo ve Mercurio, s.3

⁶ Nurgül R.Chambers, **Türev Piyasalar**, 1.Baskı, İstanbul:Avcıol Basım Yayın, 1998, s.240

⁷ Brigo ve Mercurio, s.3-4

3.4. Getiri Eğrisi (Zero-Coupon Curve/Yield Curve/Term Structure of Interest Rates)

Getiri eğrisi, bir tahvilin vadesi ile getirisi arasındaki ilişkiyi temsil eder.⁸ Getiri eğrisi finans yazınında bazen t anındaki faiz oranlarının vade yapısı (faiz oranı ile sıfır kuponlu tahvilin vadesi arasındaki ilişki⁹) olarak da anılmaktadır. Bu eğri temel faiz oranı eğrilerinden birincisi olup, faiz oranları zamanın bir fonksiyonu olarak gösterilir.

Eğri bir yıla kadar ki bütün vadeler için, basit – bileşik (simply-compounded) faiz oranlarının ve bir yıldan uzun T vadeler için yıllık - bileşik (annually compounded) faiz oranlarının t hedef zamanını gösterir. Getiri eğrisi tanımı sıklıkla faiz oranı pazarında sunulan fiyatlardan elde edilen birkaç farklı eğriyi göstermek için kullanılır.¹⁰

3.5. Sıfır Faizli Tahvil Eğrisi (Zero-Bond Curve)

Bu eğrinin gösteriminde iskonto faktörleri zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanır. Sıfır faizli tahvil eğrisi bir t zaman noktası için aşağıdaki gibi bir fonksiyonun grafiği olarak tanımlaya biliriz;

$$T \rightarrow P(t, T), \quad T > t$$

Sıfır bono eğrisi, sıfır kupon eğrisinden daha az bilgi verici olup, faiz oranlarının pozitif yapısı gereği, $P(t, T) = 1$ başlangıç noktasından T anında kadar giderek azalan bir eğri biçimindedir. Bu eğri, iskonto (indirgeme) faktörlerinin eğrisi olarak da adlandırılır.¹¹

3.6. Forward Oranlar (Forward Rates)

Bir malın ya da bir mala dayalı türev ürünlerin fiyatları, zamanın birer fonksiyonu olmaları nedeniyle zaman içinde değişim gösterirler. Bir başka anlatımla ilerleyen zaman içinde fiyat kavramı yerini forward fiyat kavramına bırakır. Fiyatların

⁸ Chambers, s.240

⁹ Chambers, s.239

¹⁰ Brigo ve Mercurio, s.8-9

¹¹ Brigo ve Mercurio, s.9-10

değişimlerine benzer bir şekilde faiz oranları zaman içinde değişim gösterir. Bu noktada ileriki bir zaman noktasında söz konusu olan oranlar forward oranlar olacaktır. Forward oran, bir borçla ilgili forward kontratlarda belirlenen faiz oranı ya da kısa veya uzun süreli faiz oranları arasındaki ilişkiyi yansıtan orandır.¹²

Forward oranlar üç zaman anı (t , T ve S) tarafından tanımlanır. t bugünkü zamanı, T sona erme zamanını, S ise vade (ödenme) zamanını temsil eder ($t \leq T \leq S$). Forward oranlar, gelecekteki bir zaman dönemindeki bir yatırım için bugün saptanabilen ve iskonto faktörlerinin vade yapısıyla (current term structure of discount factors) uygun olarak belirlenen faiz oranlarıdır. Bir forward oran anlaşması (Forward Rate Agreement-FRA) yine benzer bir biçimde, üç zaman noktasını esas alır. (t bugünkü zaman, $T > t$ sona erme zamanı ve $S > T$ vade zamanı). Bu anlaşma sahibine T ve S arasındaki dönem için bir faiz oranı ödemesi verir. S ödeme tarihinde, K sabit orana dayalı bir sabit ödeme, S ödeme tarihli ve T 'de yeniden kurulan $L(T,S)$ spot faizi üzerine kurulu bir değişken ödemeye karşı değiştirilmiştir.

Temel olarak bu kontrat T ve S zamanları arasında bir istenen K değeri üzerinden sabitlenen basit bileşik faizlere izin verir. Biçimsel olarak kontratın nominal değerini N ile gösterirsek, S 'de kontratın değerini aşağıdaki gibi tasvir edilebilir;

$$N\tau(T, S) (K - L(T, S))$$

T tarihinde L , K 'dan daha büyükse kontratın değeri negatif, diğer durumlarda ise pozitif olacaktır. Bu aşamada yukarıdaki gösterimi aşağıdaki şekilde yeniden yazmak mümkündür;

$$N [\tau(T, S)K - (1/P(T, S)) + 1]$$

$A = 1 / P(T,S)$, S tarihinde elde tutulan parayı temsil eder. Onun T 'deki değeri $P(T, S)$ sıfır kupon fiyatıyla, A 'nın çarpımından elde edilir;

$$P(T, S)A = P(T, S)(1/P(T, S)) = 1$$

¹² Chambers, s.235

Buna göre bu terim, T tarihindeki parayı elde tutmaya eşittir. Sıra ile T tarihindeki para, t tarihindeki para $P(T, S)$ değerindedir. Bu nedenle S 'deki $1/P(T, S)$ tutarı, t tarihindeki $P(T, S)$ 'e eşittir. S tarihindeki $B = \tau(T, S)K + 1$, t tarihinde aşağıdaki değerdedir;

$$P(t, S)B = P(t, S) \tau(T, S)K + P(t, S)$$

t tarihinde kontratın toplam değeri ise şu şekilde gösterilir;

$$\mathbf{FRA}(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = N [P(t, S) \tau(T, S) K - P(t, T) + P(t, S)]$$

Basit – bileşik forward faiz oranı (Simply-Compounded Forward Interest Rate) ise, $F(t; T, S)$ ile temsil edilmekte olup, $S > T$ vadesi ve $T > t$ sona erme süresi için t tarihindeki geçerli bir faiz oranıdır. Bu oran t tarihindeki FRA (Fair Contract) haline gelen S vadeli ve T sona erme süreli örnek (prototypical) FRA'daki sabit faiz oranıdır. Bu oran şu şekilde gösterilir;

$$F(t; T, S) = (1 / \tau(T, S)) [(P(t, T) / P(t, S)) - 1]$$

Anlık forward oranlar (Instantaneous Forward Interest Rate) faiz oranları teorisinde temel nicelikler olup $f(t, T)$ notasyonu ile temsil edilirler. Anlık forward faiz oranları, $T > t$ vadesi için t tarihindeki geçerli olan faiz oranıdır. Buna göre $f(t, T)$ ve $(P(t, T))$ aşağıdaki gibi gösterilir;¹³

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t; T, S) = - (\partial \ln P(t, T) / \partial T)$$

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right)$$

Anlık forward oranlar, t tarihindeki getiri eğrisinden görüldüğü üzere T vadesindeki iskonto edilmiş tahvilin t zamanındaki fiyatının logaritmik (eksi) türevine eşittir.¹⁴

¹³ Brigo ve Mercurio, s.11-13

¹⁴ Riccardo Ribonato, **Interest Rate Option Models**, USA: Wiley, 1997, s.5

Bir forward işlemi, bir varlığın gelecekteki bir tarihte alım yada satımı anlaşmasının bugün yapılması olarak tanımlanabilir. Forward getiri eğrisi, vadeye bağlı olarak forward oranları gösteren bir grafikdir. Forward oranlar, spot oranlardan elde edildiğinden forward oranlara sıfır kupon faizli forward oranlar da denilebilmektedir. Aslında, spot oranlar forward oranların geometrik ortalamasıdır.¹⁵

Forward oranların daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki gösterim faydalı olacaktır. $t = 0$ zamanında iki dönem için A_2 YTL yatırıldığı ve ikinci dönemin sonunu $t = t_2 = 2\tau$ ile temsil edildiği varsayılın. Bu yatırım işlemini ya ikinci dönemin sonunda elde edebilecek para miktarı P_2 şeklinde “ $P_2 = A_2 (1 + R_2\tau)^2$ ” ya da ikinci dönemin sonunda elde edilmek istenilen para miktarı için bu gün yatırılması gereken para miktarı A_2 “ $A_2 = P_2 / (1 + R_2\tau)^2$ ” ile gösterilir. Buna göre A_2 , R_2 her dönem bileşik bir spot faiz oranına bağlı olan iki dönem P_2 YTL’nin bugünkü değeri olup, iskonto faktörü “ $1 / (1 + R_2\tau)^2$ ” dir. Bu örneğe yeni senaryolar ilave etmek mümkündür. A_2 YTL’nin bir dönem için R_1 faiz oranından yatırıldığı daha sonra elde edilen paranın tekrar bir dönem daha yatırılarak ilk senaryodaki gelire eşit bir gelir elde etmek istendiği, amacın bunu sağlayacak faiz oranının bulunması olduğu kabul edilsin. İlk dönemin sonunda yatırımcının elinde “ $P_1 = A_2 (1 + R_1\tau)$ ” YTL olacaktır. Bu örnekte ikinci dönemin sonunda geçerli olan eşitlik ise şöyledir;

$$P_1 (1 + r_1\tau) = P_2 = A_2 (1 + R_1\tau)$$

Bu denklem A_2 için şu şekilde yazılır;

$$A_2 = (P_2 / (1 + r_1\tau)) / (1 + R_1\tau)$$

Bu örnekte kullandığımız r_1 her iki senaryo için geçerli olan aynı bugünkü değerdir. r_1 faiz oranı, kısa zaman dönemi için forward oran (the forward rate for the short time period) olarak isimlendirilir. $t = 0$ anında forward oran r_0 ve $r_0 = R_1$ ’dir. r_n

¹⁵ Suat Teker ve Levent Gümüşsoy, “Faiz Oran Eğrisi Tahmini: T.C.Hazine Bonosu ve Eurobonds Üzerine Bir Uygulama”**8.Ulusal Finans Sempozyumu**, 2003, İstanbul, s.6-7

gösterimi, gelecekteki n zaman dönemindeki kısa dönem faiz oranını gösterir. τ notasyonu kısa bir zaman dönemini temsil etmektedir.¹⁶

4. FAİZ ORANLARI VADE YAPISINA İLİŞKİN MODELLER

Finansal matematik yazınında matematiksel modeller faiz oranları gibi bazı kavramların istatistiksel davranışlarını tanımlamaya yönelik çalışmalar olarak kendilerini gösterirler. İlgili finansal varlık ve değişkenlerin istatistiksel davranışları konusunda bazı modellerin yanı sıra arbitraj ve olasılık teorisi gibi çalışmalardan da yararlanır. Örneğin hisse senedi piyasasında rastsal yürüyüş modeli analistlere, hisse senedi fiyatlarındaki günlük değişimlerin birbirlerinden bağımsız olan ve dağılımları normal dağılıma uyan tesadüfi değişkenler olduğunu, (hisse senetlerinin fiyat logaritmalarının zamana göre rastsal olarak değiştiğini) söyler. Buna göre geçmişteki fiyat değişimleri, gelecekteki fiyat değişimlerine ilişkin hiçbir bilgi vermez. Bir menkul kıymetin fiyatındaki dalgalanmaların geometrik Brownian hareket olarak modellenmesi kabul görmüş bir olgudur. Günümüzde opsiyon fiyatlamada esas teşkil eden Black-Scholes modelinde ilgili varlıkların geometrik Brownian hareket izledikleri kabul edilir. Belirsizliğin var olduğu bir ortamda sürekli parametrelili süreç, stokastik diferansiyel denklem kullanılarak tanımlanabilir. Mal fiyatlarının stokastik süreç olarak modellenmesi finans mühendisliğinin ilgi çekici konularından biridir. Stokastik diferansiyel denklemler iki bileşenden oluşurlar. İlki stokastik süreçte değişimin kestirilebilen kısmını, diğeri ise kestirilemeyen kısmını temsil eder. Stokastik diferansiyel denklemlerin başlangıç noktası bir sürekli ekonomide vergi, işlem maliyeti ya da satış kısıtları gibi bazı sınırlayıcı koşulların bulunmadığının kabulüdür. Bir stokastik diferansiyel denklem aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t$$

Burada dS_t ilgili varlığın sürecinde meydana gelen değişimi, $a(S_t, t)dt$ zaman bağılı olarak sürecin takip ettiği trendi (yoğunluk - drift), $b(S_t, t)$ difüzyonu (yayılmayı), dW_t rassallığı kontrol altında tutan terimi göstermektedir. Bu genel gösterim biçimi faiz oranları için düşünüldüğünde, aşağıda yer alan şekli alır.

¹⁶ Gerald W. Buetow ve James Sochacki, **Term Structure Models Using Binomial Trees**, USA: The Research Foundation of AIMR, 2001, s.13-14

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$$

Burada herhangi bir $T \geq 0$ için K bir pozitif sonlu sabit olduğunda üç koşul vardır.

1.Koşul (Lipschitz Koşulu)

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

2.Koşul (Büyüme Koşulu)

$$|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$$

3.Koşul

$$E(r_0^2) < \infty$$

Bu üç koşul yukarıdaki formülün $E(\sup|X_s|) < \infty$ 'u sağlayan bir tek çözümü olduğunu gösterir.¹⁷

Faiz oranlarının süreye bağlı olan yapısı, tahvilin vadesi ile vadeye kadar verimi arasındaki ilişki ilintili olup, bu yapı belirli bir tarihte gözlenen, vadeleri benzer risk sınıfındaki tahvillerin getirilerinden oluşur. Faizin süreye bağlı yapısının bu görüntüsü, farklı zaman kesitlerindeki farklı getiri eğrileri olarak gözlenebilmektedir. Verim eğrilerindeki farklılığı açıklayan dört temel yaklaşım bulunmaktadır;

- *Beklentiler kuramına göre*, faizin süreye bağlı yapısı, yatırımcıların gelecekteki faiz oranları hakkındaki tahminleriyle belirlenir. Buna göre yatırımcılar, genel olarak, faiz oranlarının ileride düşeceğini bekliyorlarsa, verim (getiri) eğrisi aşağıya doğru eğimli, yatırımcılar tersi beklenti içindeyseler yukarıya doğru eğimli, değişiklik beklenmemesi durumunda ise düz bir eğri söz konusu olacaktır.¹⁸ Beklentiler kuramına göre, yatırımcılar vade tercihi olmayan varlıkları ellerinde bulundurdukları sürece kar maksimizasyonu hedefleyen

¹⁷ Yeliz Yolcu, "One-Factor Interest Rate Models: Analytic Solutions And Approximations", (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ Finansal Matematik Bölümü, Jan, 2005), s.17-18

¹⁸ Niyazi Berk, *Finansal Yönetim*, 5.Baskı, İstanbul:Türkmen Kitapevi, 2000, s.351-352

kişilerdir. Belirli bir risk sınıfına ait, vadesi önemsiz, tüm varlıklar birbirine tam ikame olarak kabul edilir. Yatırımcılar için getiri oranı aynı olduğu sürece, 10 yıl vadeli bir varlık almaktansa, iki tane 5'er yıllık birbirini takip eden varlıklar almak veya periyodik olarak birbirini takip eden 1'er yıl vadeli varlıklar almak arasında bir fark yoktur.¹⁹ Beklentiler kuramı, faiz oranlarının gelecekteki değerini, bono sahiplerinin beklentilerinin belirlediği varsayımına dayanır. Bu kuram, aşağıdaki formülasyon yardımıyla ifade edilebilir.

$$[(1 + {}_tR_N)]^N = [(1 + {}_tR_1) (1 + {}_{t+1}f_1) \dots (1 + {}_{t+N-1}f_1)]$$

Bu formülde; ${}_{t+1}f_1$, $t+1$ yılındaki 1 yıl vadeli forward oranı; ${}_tR_N$, N yıl vadeli bononun t yılındaki spot getirisini göstermektedir.²⁰

- *Likidite tercihleri kuramı*, uzun vadeli faiz oranlarının kısa vadeli faiz oranlarına göre daha yüksek olmaları gerektiğini belirtmektedir. Uzun vadeli tahvillerin faiz oranlarına daha duyarlı olması, süre uzadıkça riskin de artacağı düşüncesine dayanır. Tahvillerde sürenin uzaması, artan risk anlamına geldiğinden yatırımcılar uzun vadeli tahvillerde likidite (risk) primi talep edilir.²¹

Bu kuram, uzun vadeli tahvillerin getirisinin kısa vadeli olanlarıkinden daha yüksek olması gerektiğini savunur. Yatırımcıların çok küçük kayıplarla hızla nakde dönmeyi istediklerini, tahvil ihraç edenlerin ise yeniden fonlamanın getireceği maliyetlerden kaçınmak için ekstra prim ödemeye razı olacaklarını varsayar.²² Uzun vadeli yatırımlar genel olarak kısa vadeli yatırımlardan daha riskli değerlendirilmesinin nedeni, uzun vadeli borç borçlanmalarda, borçlunun borcunu ödeyememe durumuna düşme olasılığının (default) daha yüksek olmasıdır. Beklentiler kuramına göre çizilen getiri eğrisi ile gerçek getiri eğrisi arasındaki fark, likidite primi olarak ifade edilebilir. Likiditesi düşük olan varlıkların da yatırımcılar tarafından talep görmesi için, yatırımcıları uzun vadeli

¹⁹ P. S. Rose, **Money And Capital Markets: Financial Institutions And Instruments In A Global Marketplace**, 6. Baskı, Chicago: Irwin, 1997

²⁰ Teker ve Gümüşsoy, s.4

²¹ Berk, s.351-352

²² R. O. Edminster, **Financial Institutions :Markets and Management**, 2. Baskı, New York:McGraw-Hill, 1986

borç vermeye teşvik edecek bir likidite primi ödenmelidir. Likidite primi, aşağıdaki formülasyon ile gösterilebilir.

$$0 = L_1 < L_2 < L_3 < \dots L_n \text{ ve } (L_2 - L_1) > (L_3 - L_2) > (L_4 - L_3) \dots > (L_N - L_{N-1})$$

L_i , vadelere göre likidite primlerini ifade eder ve vadeler arttıkça likidite primi azalan bir oranda artar. Likidite primi dahil edilmiş beklentiler kuramı, şöylece ifade edilebilir.

$$[(1 + {}_tR_N)]^N = [(1 + {}_tR_1) (1 + {}_{t+1}f_1 + L_2) \dots (1 + {}_{t+N-1}f_1 + L_N)]^{23}$$

- *Para ikamesi teorisi*, kısa vadeli getirileri açıklamaya çalışan bir diğer bilim adamı Kessel'in (1965) çalışmalarına dayalıdır. Para ikamesi teorisine göre, kısa vadeli bonolar nakitle eşittir. Bu tür bonoların önemsenmeyecek kadar küçük risklerinin olduğu kabul edilir. Bu nedenle, kısa vadeli bonolara olan talep fazladır ve kısa vadeli bonolar uzun vadeli bonoların altında bir getiri sunar. Diğer taraftan, borç almak isteyenler maliyetlerini minimize etmek için uzun vadeli finansman ararlar. Sonuç olarak, arz fazlası ve düşük likiditeden ötürü uzun vadeli bonolar daha yüksek getiri sunarlar.²⁴
- *Bölünmüş piyasalar teorisi*, değişik yatırımcı grupların vadeleri farklı araçlarla ilgilendiklerini ve vade seçimlerini ihtiyaçlarına göre belirlediklerini vurgularlar. Buna göre yükümlülükleri kısa vadeli olan bankalar kısa vadeli araçları, yükümlülükleri uzun vadeli olan sigorta kurumları ve emekli sandıkları uzun vadeli araçları tercih ederler. Bu duruma ilaveten yatırımcıların farklı vergisel ve yasal yükümlülüklerle sahip olmaları faiz oranlarının farklılaşmasına neden olur. Bu nedenle verim eğrisi her bir piyasada arz ve talep tarafından serbestçe belirlenmekte ve yapısı önceden tahmin edilememektedir. Bu yapı arbitraj fırsatlarına işaret eder.²⁵

Sermaye piyasaları farklı ihtiyaçlara sahip geniş bir kullanıcı kitlesine (ihraç eden ve borç veren) sahiptir. Bir kısım yatırımcılar, kısa vadeli yatırımları tercih ederken, bir kısım orta vadeli yatırımları, diğer bir kısım da uzun vadeli yatırım

²³ Teker ve Gümüşsoy, s.4

²⁴ Teker ve Gümüşsoy, s.4

²⁵ Berk, s.351-352

seçeneklerini tercih eder. Bölünmüş piyasalar teorisi, bu kesimlerin arasında ilişki olmadığını ve kendi içlerindeki arz-talep güçlerinin getiri eğrisinin genel şeklini oluşturmada etkili olduğunu varsayar. Bankalar ve inşaat firmalarının günlük nakit yönetimlerinin bir parçası olarak, büyük oranda eğrinin kısa vadeli bölümüyle ilgilenmesi, bu teoriyi desteklemektedir.²⁶

4.1. Tek Faktör Faiz Oranı Modelleri

Faiz oranı modellemesi teorisi ilk olarak, spot faiz oranı süreci için tek boyutlu dinamiklerin var olduğu varsayımı üzerine kurulmuştur. Burada temel düşünce arbitraj imkanının olmamasıdır. Risk yansız ölçünün varlığı T zamanında H_T ödemeli bir iddiaya bağlı t zamanında arbitrajsız fiyatı gerektirir. Bu durum şu notasyonla ifade edilebilir;

$$H_t = E_t \{D(t, T) H_T\} = E_t \{e^{-\int_t^T r(s)ds} H_T\}$$

Burada E_t ölçü altında t koşullu zamanında koşullu beklentiyi göstermektedir. Buna göre T vadesi için t zamanında sıfır faizli tahvil fiyatını T zamanında kullanılabilir bir nakit miktarı ile temsil edilebilir. Bu nedenle $H_T = 1$ için şu gösterim elde edilir.;

$$P(t, T) = E_t \{e^{-\int_t^T r(s)ds}\}$$

Bu notasyonun çıkarımı şudur; r için seçilmiş dinamikleri, e üzeri integral gösterimi ile bir dağılım şeklinde karakterize edebiliriz. t zamanında kullanılabilir enformasyon koşulu altında P 'yi (bono fiyatını) hesaplayabiliriz.

Finans yazınında faiz oranlarını vade yapısına yönelik ilk çalışma R. Merton tarafından 1973 yılında ($dr_t = \alpha dt + \sigma dW_t$) yapılmış²⁷ daha sonraları Vasicek, Dothan ve diğerler yazarların çalışmaları bunları takip etmiştir. İlk kısa dönem faiz modelleri zaman homojen modeller (time-homogeneous models) olup bunlarda difüzyon katsayısı (diffusion term/coefficient) sabittir. Bu modellerin temel avantajı, bonolar ve bonolara bağlı türev ürünler (opsiyonlar) gibi faiz oranlarına bağlı iddiaların dinamiklerini

²⁶ Teker ve Gümüşsoy, s.4

²⁷ R.Merton, "Theory of Rational Option Pricing", **Bell Journal of Economics and Management Science** 4, (1973), s.141-183

yansıtan analitik tarifler geliştirmesidir. Bir model söz konusu olduğunda amaçlanan, pazardan elde edilen başlangıç sıfır kupon faizli bono eğrisinin modelimizdeki eğri ile birleşmesi bir diğer deyişle pazar eğrisine olabildiğince yakın bir model eğrisi üretmektir. Halbuki incelenen pazar verisi (observed market data), faiz oranlarının başlangıç vade yapısıyla benzemesini gerektirmez. Bunun temel nedeni faiz oranlarının cari vade yapısının ıktıdan ziyade bir girdi olmasıdır. Diğer sebep ise belirli sayıdaki vade için gözlemlenmiş bono ve tahvillerin sınırlı sayıda olmasıdır. Bu modellerin tatmin edici bir başlangıç verim eğrisi üretememeleri bir dezavantaj olarak karşımıza çıkmaktadır ki, bu modellerin içeriden büyüyen yapılarından kaynaklanır. Dışarıya büyüyen (exogenous term structure) vade yapıları bu durumu bir adım ileriye taşır. Zamana bağlı olarak değişen parametreler (time-varying parameters) kullanılarak içeriye doğru büyüyen (endogeneous model) bir model, dışarıya doğru büyüyen bir modele (exogenous model) dönüştürölür.²⁸ Aşağıdaki tabloda literatürde en çok yer bulan tek faktör kısa dönem faiz modelleri yer almaktadır.

²⁸ Yolcu, s.18

Tablo 1
Kısa Dönem Faiz Oranı Tek Faktör Modelleri

Denge Modelleri	Model Denklemi
1977 – Vasicek	$dr_t = \alpha (\beta - r_t)dt + \sigma dW_t$
1978 – Dothan	$dr_t = \sigma r_t dW_t^0$
1985 – Cox, Ingersoll ve Ross	$dr_t = \alpha (\beta - r_t)dt + \sigma r_t^{1/2}dW_t$
Ekspansiyon Vasicek	$dr_t = r_t[\eta_t - \alpha \log r_t] dt + \sigma r_t dW_t$
Arbitrajsız Modeller	Model Denklemi
1986 – Ho Lee	$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t$
1990 – Black, Derman ve Toy	$d(\log r_t) = [\theta_t + (\sigma_t' / \sigma_t) \log r_t] dt + \sigma_t dW_t$
1990 – Hull, White (Genişletilmiş Vasicek)	$dr_t = (\beta_t - \alpha_t r_t)dt + \sigma_t dW_t$
1990 – Hull, White (Genişletilmiş CIR)	$dr_t = (\beta - \alpha_t r_t)dt + \sigma_t r_t^{1/2}dW_t$
1991 – Black, Karasinski	$d(\log r_t) = \varphi_t [\log \mu_t \log r_t]dt + \sigma_t dW_t$

Kaynak: Damiano Brigo, Fabio Mercurio, **Interest Rate Models Theory and Practice**, Germany: Springer, 2001, s.49

Denge modelleri konusundaki ilk çalışma Vasicek’in 1977 yılında yayınladığı çalışmasıdır.²⁹ Vasicek’in modelinden de görüleceği üzere ($dr_t = \alpha (\beta - r_t)dt + \sigma dW_t$) denge modellerin ikinci bölümü (σdW_t) rastsalılık faktörünü temsil etmektedir. Rastsalılık faktörü bazı varsayımlara (Wiener sürecine, Brownian harekete) dayalı olduğundan, model sonuçları bire bir gerçek hayatla uyuşmaz. Denge modelleri kısa vadede faiz oranlarının stokastik bir süreç takip ettiği varsayımıyla, etkin piyasalarla uyumlu teorik bir vade yapısı elde ederler. Çeşitli parametrelerin değiştirilmesi suretiyle bazı bono ve tahvillerin (bonds) vade yapısının gösterimi bu modellerle sağlansa bile, bono ve tahvillerin farklı vadelere sahip olmaları nedeniyle, tümü için geçerli bir vade yapısının sağlanması oldukça zordur.

Gözlenen verilerin denge modellerinin sonuçlarıyla uyumlu olamaya bileceği sonucu arbitrajsız modellerin başlangıç noktası olmuştur. Vasicek’in modelinde olduğu

²⁹ O.Vasicek, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, **Journal of Financial Economics** 5, 1977, s177-188

gibi bugünün mevcut vade yapısı bir çıktıdır. Burada model vasıtasıyla farklı vadelere sahip kısa dönem faizler tahmin edilmeye çalışılır. Vadeye olan sürelerin farklı olması durumu gözlenen verilerle model arasında uyumsuzluğa neden olur. Arbitrajsız modellerde ise cari vade yapısı çıktı değil bir girdidir. Bu modellerde, anlık faiz oranlarının yayılma terimi zamanın bir fonksiyonudur. Denge modellerinin içeriden büyümelerine karşın arbitrajsız modeller dışarıdan büyüyen modellerdir.³⁰ Biz çalışmamızda tüm denge ve arbitrajsız modelleri ele almaktan ziyade, bu modellerden önde gelen bir kaçını daha detaylı bir biçimde ele alacağız.

4.1.1. Vasicek Modeli - 1977

Vasicek, anlık spot faiz oranlarının sabit katsayılı bir Ornstein – Uhlenbeck süreci olarak değiştiğini varsayar. Vasicek 1977 yılında “*Vade Yapısının Bir Denge Niteliği*” adlı makalesinde geliştirdiği modelde, faiz oranlarının aşağıda yer alan stokastik diferansiyel eşitliği karşıladığını varsayar;

$$dr_t = \alpha (\beta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

β parametresi uzun dönemli faiz oranını gösterir. Model kısa dönem faiz oranlarının bu parametreye yakınsayacağı esası üzerine kurulmuştur. $\alpha > 0$ katsayısı, faiz oranlarının cari düzeyini uzun dönem normal düzeye itiş hızını gösterir. $r > \beta$ olduğunda sürüklenme negatif, $r < \beta$ olduğunda sürüklenme pozitif olur. Bu durum faiz oranlarının yükselişte olduğu zamanlarda ekonominin aşağıya doğru yavaşlaması ve fonlara, kredilere olan talebin düşerek faiz oranlarının aşağıya doğru gitme eğilimi göstermesiyle uyumludur.³¹ Vasicek’in modeli bu niteliğinden dolayı ortalamaya dönme (mean reversion) modeli olarak anılır. Bu kavram matematikte çoğunlukla hisse senedi yatırımları için kullanılır. Buna göre hisse senedinin yüksek veya düşük kabul edilen fiyatı geçici bir durumdur ve fiyatlar zaman içinde denge fiyat seviyesine (reversion level) gitme eğilimindedir. Spot piyasada bir tahvilin veya borcun faiz oranını temsil eden spot faizler içinde benzer bir denge söz konusudur.

³⁰ Yolcu, s.17-18-19-34-38

³¹ O.Vasicek, “An Equilibrium Characterization of The Term Structure”, **Journal of Financial Econometrics**, Vol:5 (1977), s.177-188.

Vasicek'in çalışmasının analitik bir tarifini şu şekilde yapabiliriz. $X_t = r_t - \beta$ şeklinde farklı bir süreç tarif edersek X_t için aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemi elde ederiz;

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t$$

dX_t bir ortalamaya dönme (mean-reverting process) sürecidir. Matematik yazınında bu gösterim Ornstein – Uhlenbeck süreci olarak da anılmaktadır. $Y_t = X_t e^{\alpha t}$ tanımıyla formülü kısmi integrasyon vasıtasıyla Y_t 'yi şu şekilde açabiliriz,

$$Y_t = x_0 + \int_0^t X_s d(e^{\alpha s}) + \int_0^t e^{\alpha s} dX_s + \langle X, e^{\alpha \cdot} \rangle_t$$

Her iki tarafın diferansiyeli alındığında,

$$dY_t = \sigma e^{\alpha t} dW_t$$

Buna göre Y_t , X_t ve $r_t - \beta$ 'yi şu şekilde elde ederiz;

$$\begin{aligned} Y_t &= x_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW_s \\ X_t &= x_0 e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \\ r_t - \beta &= (r_0 - \beta) e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \end{aligned}$$

Bu veriler ışığında r_t ile gösterdiğimiz faiz oranı sürecini yeniden gösterebilmemiz mümkündür;

$$r_t = r_0 e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s$$

$t \geq u$ için,

$$\begin{aligned}
r_t &= r_0 e^{-\alpha t} + \beta \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \\
&= r_0 e^{-\alpha t} + \beta \alpha \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} ds + \beta \alpha \int_0^u e^{-\alpha(t-s)} ds \\
&\quad + \sigma \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s + \sigma \int_0^u e^{-\alpha(t-s)} dW_s
\end{aligned}$$

r_u 'yu şu şekilde yazabiliriz,

$$r_u = r_0 e^{-\alpha u} + \beta \alpha \int_0^u e^{-\alpha(u-s)} ds + \sigma \int_0^u e^{-\alpha(u-s)} dW_s$$

Bu gösterim bize şu notasyonu verir,

$$\beta \alpha \int_0^u e^{-\alpha(t-s)} ds + \sigma \int_0^u e^{-\alpha(t-s)} dW_s = e^{\alpha(u-t)} (r_u - r_0 e^{-\alpha u})$$

r_t 'nin u 'ya bağlı tarifini ise şu şekilde yazabiliriz,

$$r_t = r_u e^{-\alpha(t-u)} + \alpha \beta \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} ds + \sigma \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

Vasicek'in geliştirdiği model, basit gösteriminin sağladığı avantaja rağmen bazı dezavantajlara da sahiptir. Vasicek'in modelinde kısa dönem faiz oranları dağılımının normal dağılıma uyduğu kabul edilir. Bu özellik matematiksel olarak modelin negatif faiz oranları üretebileceği sonucunu doğurur ki bu nominal faiz oranları sıfırın altına inmeyeceği gerçeği ile ters düşer. Bu bakımdan negatif faiz oranlarının pozitif olasılığı Vasicek modelinin önemli engellerinden biridir.³²

³² Y.K. Kwok, **Mathematical Models of Financial Derivatives**, USA:Springer, 1998 ve D.Lamberton, B. Lapeyre, **Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance**, First Edition, USA:Chapman and Hall, 1996 ve Don M. Chance, *Teaching Note 97-03:The Vasicek Term Structure Model*, c:/Classes/Teaching Notes/TN97-03.doc, (05 Mayıs 2007)

4.1.2. Dothan Modeli - 1978

Vasicek modelinin negatif faiz oranı sorununu Dothan, faiz oranının bir lognormal dağılıma sahip olması ile çözmeye çalışmıştır. Log normal dağılım r_t 'nin daima her bir t değeri için pozitif olmasını sağlamaya yöneliktir. Dothan'ın modeli literatürde, log normal kısa dönem faiz oranı olarak sıfır kupon faizli tahviller için analitik formüller olarak yer bulmuştur. Dothan 1978 yılında yazdığı çalışmasında, kısa dönem faiz oranı sürecini bir Q_0 amaç olasılık ölçümü altında, sürüklenmenin olmadığı bir geometrik Brownian hareketi başlangıç olarak almıştır.

$$dr_t = \sigma r_t dW_t, r(0) = r_0$$

Bu notasyonda r_0 ve σ pozitif sabitlerdir. Dothan, riskin sabit bir pazar fiyatını olduğunu varsaymıştır. Onun stokastik diferansiyel denklemi risksiz olasılık altında otomatik olarak yukarıda gösterim biçimini alır. r için elde edilen çözümleri şu şekilde göstere biliriz;

$$r_t = r_0 + \int_0^t \sigma r_s dW_s$$

Fonksiyonu, değişkenin logaritması olarak alırsak ve sonrasında Ito'nun Lemmasını uygularsak r_t 'yi şu şekilde gösterebiliriz.

$$f(x) = \log x \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \log r_t &= \log r_0 + \int_0^t \frac{1}{r_s} r_s \sigma dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{r_s^2} r_s^2 \sigma^2 ds \\ &= \log r_0 + \int_0^t \sigma dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 ds \\ &= \log r_0 + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \\ \Rightarrow r_t &= r_0 \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma W_t\right\} \end{aligned}$$

$t \geq u$ için

$$\begin{aligned}
\log r_u &= \log r_0 + \int_0^u \sigma dW_s - \frac{1}{2} \int_0^u \sigma^2 ds \\
\log r_t &= \log r_0 + \int_0^t \sigma dW_s + \int_0^t \sigma dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^u \sigma^2 ds \\
&= \log r_u + \int_u^t \sigma dW_s - \frac{1}{2} \int_u^t \sigma^2 ds \\
&= \log r_u + \sigma(W_t - W_u) - \frac{1}{2} \sigma^2(t - u) \\
\Rightarrow r_t &= r_u \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma^2(t - u) + \sigma(W_t - W_u)\right\}
\end{aligned}$$

Dothan'ın modeli, sürekli-bileşik faiz oranının (the continuously-compounded r) log normal dağıldığı tüm modellerde olduğu gibi, teorik olarak sonsuz para kazanılabileceği sonucunu çıkarır. Buna göre matematiksel olarak bir AvroDolar future sözleşmenin fiyatı sonsuz olabilir. 1997 yılında Sandmann ve Sondermann (SS), log normal faiz oranları modellerinin dengesi üzerine yaptıkları makalelerinde bu konu üzerinde durmuşlardır. SS, log normal olmak yerine, bir kesin pozitif bileşik dönemli faiz oranı modellemesiyle bu sorunun giderilebileceğini göstermişlerdir.³³

4.1.3. Cox, Ingersoll ve Ross (CIR) – 1985

Cox, Ingersoll ve Ross (CIR) 1985 yılında yaptıkları çalışmalarıyla, Vasicek'in gösteriminde yer alan yayılma katsayısının kare kökünü alarak, anlık kısa dönem faiz oranlarının daima pozitif olduğu yeni bir genel denge yaklaşımı geliştirdiler. CIR çalışmalarında faiz oranı dinamiklerini bir yayılma süreci olarak açıklamışlardır. Modelde karekök süreçleri merkezi olmayan x -kare dağılımlarıyla bağlantılıdır. CIR'un gösterimi şu şekildedir;

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma r_t^{1/2} dW_t, \quad r(0) = r_0$$

Notasyondan da görüleceği üzere sürecin sürüklenme (drift term) terimi olarak adlandırılan kısmı $\alpha(\beta - r_t)$, β 'nin bir uzun dönem değerine doğru stokastik faiz oranını çeken bir düzeltici güç niteliğinde olup, sürecin yayılım (diffusion term/coefficient) terimi olarak adlandırılan kısmı $\sigma r_t^{1/2}$ ise faiz oranlarındaki anlık değişimlerin varyansını

³³ L.U. Dothan, "On the Term Structure of Interest Rates", **Journal of Financial Economics**, Vol:6, (1978). s.59-69

göstermektedir. Bu gösterim $2\alpha\beta \geq \sigma^2$ koşulunun pozitif bir r_t 'yi sağlanacağını gösterir. Bir başka deyişle eğer faiz oranları pozitif başlarsa asla negatif olamaz. Eğer faiz oranları sıfır olursa daha sonra pozitif bir değer alabilir. Gelecekteki faiz oranlarının dağılımı beklenen değer ve varyans ile ilişkilidir. Eğer α sonsuza yaklaşırsa uzun dönem ortalama β 'ye ve varyans sıfıra yaklaşır. Buna göre koşullu beklenen değer ve koşullu varyans şu şekilde gösterilir,

$$E^Q\{r_t|\mathcal{F}_u\} = r_u e^{-\beta(t-u)} + \alpha(1 - e^{-\beta(t-u)}),$$

$$Var\{r_t|\mathcal{F}_u\} = r_u \frac{\sigma^2(e^{-\beta(t-u)} - e^{-2\beta(t-u)})}{\beta} + \frac{\alpha\sigma^2(1 - e^{-\beta(t-u)})^2}{2\beta}$$

Bu gösterimleri şu şekilde kanıtlamak mümkündür. Eğer modelin stokastik diferansiyelinin integralini alır

$$\forall u \leq t$$

$$r_t = r_u + \beta \int_u^t (\alpha - r_s) ds + \sigma \int_u^t r_s^{1/2} dW_s$$

ve sonra Ito'yu uygularsak şu sonucu elde ederiz;

$$\begin{aligned} r_t^2 &= r_u^2 + 2\beta \int_u^t (\alpha - r_s) ds + 2\sigma \int_u^t r_s^{3/2} dW_s + \sigma^2 \int_u^t r_s ds \\ &= r_u^2 + (2\beta\alpha + \sigma^2) \int_u^t r_s ds - 2\beta \int_u^t r_s^2 ds + 2\sigma \int_u^t r_s^{3/2} dW_s \end{aligned}$$

Bu noktada faiz oranı sürecini yeniden yazabilmek mümkündür;

$$r_t = r_0 + \beta \int_0^t (\alpha - r_s) ds + \sigma \int_0^t r_s^{1/2} dW_s$$

Bu gösterime Ito uygulandığında,

$$\begin{aligned}
r_t^2 &= r_u^2 + 2\beta \int_u^t (\alpha - r_s) ds + 2\sigma \int_u^t r_s^{3/2} dW_s + \sigma^2 \int_u^t r_s ds \\
&= r_u^2 + (2\beta\alpha + \sigma^2) \int_u^t r_s ds - 2\beta \int_u^t r_s^2 ds + 2\sigma \int_u^t r_s^{3/2} dW_s.
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz ki, faiz oranı süreci aşağıdaki gibi sadeleşebilir;

$$r_t = r_0 + \beta \int_0^t (\alpha - r_s) ds + \sigma \int_0^t r_s^{1/2} dW_s$$

CIR'un çalışmalarında vade yapısı, dayanak varlıklar “underlying assets” değiştirildiği taktirde, verim eğrisi üzerinde etkiyi tahmin edecek bir ekstra bilgi setini kullanıcılara vermektedir. Onların bu çalışmalarında, anlık kısa dönem faiz oranı dinamikleri bir devamlı zaman ilk – düzenli oto regresif sürece bağlıdır. CIR, $2q+2$ güven dereceli, bir merkezi olmayan ki – kare dağılımı “ $\chi^2(2cr_s; 2q + 2, 2u)$ ” sunmuşlardır. Merkezi olmama parametresi $2u$ cari kısa dönem faiz oranı ile orantılı olup, s anındaki faiz oranının olasılık yoğunluğu, t cari anındaki kendi değerine bağlıdır. CIR bu ilişkiyi yoğunluk fonksiyonu ile şu şekilde özetlemişlerdir; (I_q bir Bessel fonksiyonu olarak değiştirilmiştir)

$$f(r_s, s; r_t, t) = ce^{-u-v} \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2(uv)^{\frac{1}{2}})$$

$$\begin{aligned}
c &= \frac{2\beta}{\sigma^2(1 - e^{-\beta(s-t)})}, \\
u &= cr_t e^{-\beta(s-t)}, \\
v &= cr_s, \\
q &= \frac{2\beta\alpha}{\sigma^2} - 1,
\end{aligned}$$

Bu bilgiler ışığında ödememe riski olmayan bir P sıfır kupon faizli tahvil fiyatlayan kısmi diferansiyel eşitliği, sınır koşul $P(r, T, T) = 1$ ile şu şekilde gösteririz;

$$\begin{aligned}
&[\frac{1}{2} \sigma^2 r (\partial^2 P(r)/\partial r^2)] + [(\alpha(\beta - r)) (\partial P(r)/\partial r)] + [\partial P(r)/\partial T] - [\lambda r (\partial P(r)/\partial r)] - \\
&rP(r) = 0
\end{aligned}$$

Burada λ faktörü faiz oranı riskinin fiyatını ya da pazar riskini, λr faktörü optimal yatırım servetindeki yüzdelik değişimlerle faiz oranındaki değişimlerin kovaryansını gösterir. Buna göre sıfır kupon faizli tahvil fiyatı şöyledir;³⁴

$$P(r, T, T) = A(t, T) e^{-B(t, T) r(t)}$$

$$A(t, T) = [(2\omega e^{[(\alpha + \lambda + \omega)(T-t)]/2}) / ((\omega + \alpha + \lambda)(e^{\omega(T-t)} - 1) + 2\omega)]^{2\alpha\beta / \sigma\sigma}$$

$$B(t, T) = [(2e^{\omega(T-t)} - 1) / ((\omega + \alpha + \lambda)(e^{\omega(T-t)} - 1) + 2\omega)]$$

$$\omega = [(\alpha + \lambda)^2 + 2\sigma^2]^{1/2}$$

4.1.4. Eksponansiyel Vasicek (EV)

Eksponansiyel Vasicek modeli aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemi izleyen bir log normal faiz oranı modelidir;

$$dr_t = r_t[\eta_t - a \log r_t] dt + \sigma r_t dW_t$$

Bu gösterimdeki a , σ ve η faktörleri negatif olmayan sabitlerdir. Bir log normal model elde etmenin alternatif bir yolu yukarıda da belirtildiği üzere yetmişli yıllarda “ Q risksiz ölçümü altında, faiz oranlarının logaritmalarının, bir y Ornstein-Uhlenbeck sürecini takip ettiğini varsayımına dayalı olarak” Dothan tarafından ortaya konmuştur. Dothan 1978 yılında geliştirdiği sürecinin aksine, faiz oranının daima ortalamaya geri döndüğü log normal kısa dönem faiz oranı modeli düşüncesini incelemiştir. Aşağıda buna ilişkin olarak y ’nin takip ettiği stokastik diferansiyel eşitlik yer almaktadır,

$$dy_t = [\Theta - ay_t] dt + \sigma dW_t$$

³⁴ N. Ikeda ve S. Watanabe, **Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes**, New York, USA: North-Holland, 1981 ve J.C. Cox, E.J. Ingersoll ve S.A. Ross., “A Theory of The Term Structure of Interest Rates”, **Econometrica**, Vol:53 (1985), s.385-407.

Burada Θ , a ve σ faktörleri pozitif sabitler olup, y_0 bir gerçekte sayıdır ($y(0)=y_0$). Bu formülasyon bir Ornstein-Uhlenbeck süreci elde etmek için uygun olup, $f(x) = \log x$ için Ito Lemma'yı uygulayıp, $y_t = \log r_t$ olarak tanımladığımızda aşağıdaki gösterimi elde ederiz;

$$\begin{aligned}\log r_t &= \log r_0 + \int_0^t \frac{1}{r_s} [\eta - a \log r_s] ds + \sigma dW_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{-1}{r_s}\right) \sigma^2 r_s^2 ds \\ &= \log r_0 + \int_0^t \left[\left(\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - a \log r_s\right] ds + \int_0^t \sigma dW_s\end{aligned}$$

Bu y için şu şekilde düzenlenir,

$$y_t = y_0 + \int_0^t \left[\left(\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - ay_s\right] ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

Bu gösterimi y_t süreci için uyguladığımızda şu gösterimi elde ederiz,

$$dy_t = \left[\left(\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - ay_t\right] dt + \sigma dW_t$$

$\Theta = \eta - \frac{1}{2}\sigma^2$ olarak tanımladığımızda yukarıdaki gösterimin başlangıçta yer verdiğimiz stokastik eşitlik olduğu görülür. $\beta = \Theta/a$, $a = \alpha$ ve $X_t = y_t - \beta$ olarak tanımlarsak şu notasyonu elde ederiz,

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t$$

Bu stokastik diferansiyel eşitliğin çözümü şudur;

$$X_t = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s$$

$$\begin{aligned}
y_t - \beta &= (y_0 - \beta)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \\
y_t &= y_0 e^{-\alpha t} + (1 - e^{-\alpha t})\beta + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s
\end{aligned}$$

y_t yerine r_t yazarak

$$r_t = \exp\{\log r_0 e^{-at} + \frac{\Theta}{a}(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s\}$$

$t \geq u$ için,

$$y_t = y_0 e^{-\alpha t} + \beta \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

$$y_t = y_u e^{-\alpha(t-u)} + \alpha \beta \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} ds + \sigma \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

yine y_t yerine r_t yazarak sırasıyla,

$$r_t = \exp\{\log r_u e^{-\alpha(t-u)} + \alpha \beta \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} ds + \sigma \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\}$$

ve

$$r_t = \exp\{\log r_u e^{-a(t-u)} + \Theta \int_u^t e^{-a(t-s)} ds + \sigma \int_u^t e^{-a(t-s)} dW_s\}$$

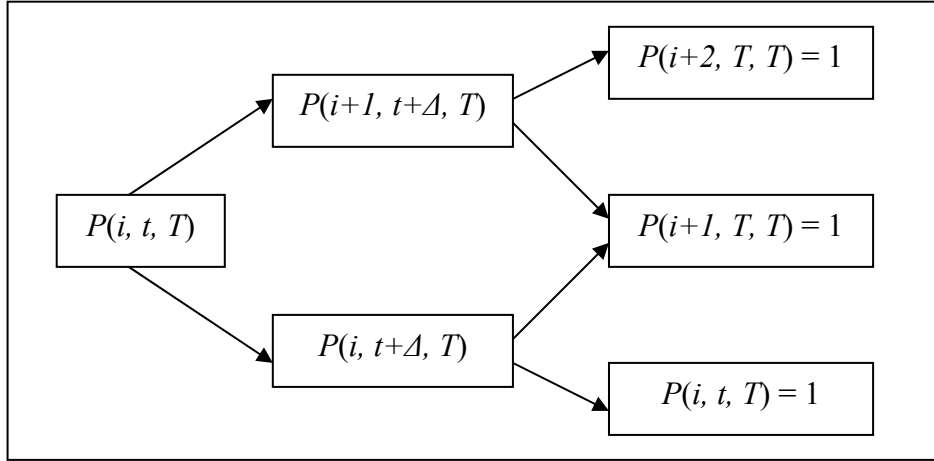
elde ederiz.³⁵

³⁵ Brigo ve Mercurio, s.56-57-58-59

4.1.5. Ho – Lee Modeli - 1986

Denge modellerinin ortaya koyduğu teorik yapının gözlenen gerçek hayat verileriyle bire bir örtüşmemesi daha evvel de kısmen belirtildiği üzere arbitraj imkanı bulunmayan modellere girişi gerektirmiştir. Ho ve Lee (HL) 1986 yılında yayınlamış oldukları “*Term Structure Movements And Pricing Interest Rate Contingent Claims*” adlı çalışmalarında kısa dönem faizler ile ilgili olarak, standart sapma ve riskin pazar fiyatının yer aldığı bir binomial bono fiyatlama ağacını ele aldılar. HL modelinin temel düşüncesi, vade yapısının belirsiz davranışını bir bütün olarak modellemektir. Modelin varsayımlarına göre işlem maliyeti yoktur ve tüm varlıklar bölünebilir. $P(i, t, T)$; t anında, i durumunda, T vade gününde, 1 YTL ödeyen bir sıfır kupon faizli tahvili temsil eder. Vade yapısının bu pozitif fonksiyon ile temsil edilmesi durumunda, tüm t ve i ’ler için matematiksel koşullar $P(i, t, T) = 1$, $\lim_{T \rightarrow \infty} P(i, t, T) = 0$ olarak tanımlanır. π , P ölçümü altında bir binomial ağaç yapısı altında bir yukarı hareketi, Δ eşit zaman aralıklarını temsil eder. $h^k(t, T, (t - \Delta, t))$ zaman aralığında tahvil fiyatındaki değişimin büyüklüğünü gösteren bir fonksiyondur (The state-independent perturbation function). Fonksiyon t anında bir tahvil vadesinin, $k = u$ için yukarı, $k = d$ için aşağı hareketini temsil eder. Buna göre iki aşamalı, bir sıfır kupon faizli tahvil şu şekilde gösterilir;³⁶

³⁶ Zvi Wiener ve Markus Leippold, “Algorithms Behind Term Structure Models of Interest Rates: I. Valuation and Hedging of Interest Rates Derivatives With The Ho-Lee Model”, 2007, The Hebrew University, School of Business, <http://pluto.huji.ac.il/~mswiener/zvi.html> (22 Mayıs 2007)



Şekil 3: İki Aşamalı Bir Sıfır Kupon Faizli Tahvilin Fiyat Gelişimi

Kaynak: Zvi Wiener ve Markus Leippold, “Algorithms Behind Term Structure Models of Interest Rates: I. Valuation and Hedging of Interest Rates Derivatives With The Ho-Lee Model”, 2007, The Hebrew University, School of Business, <http://pluto.huji.ac.il/~mswiener/zvi.html> (22 Mayıs 2007)

Model yukarıdaki basit binomial ağaç yapısından hareketle üç adımlı bir uygulamaya işaret eder. Buna göre öncelikle durum bağımsız sarsım fonksiyonu saptanır sonrasında, risksiz olasılıklar elde edilir. Daha sonra da binomial ağaç içindeki yollar için “bağımsız” zorunlu koşullar belirlenir. HL’nin çalışmaları risksiz ölçüm altında aşağıdaki stokastik diferansiyel denklem biçimini alır;

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t$$

Bu gösterimde yer alan $\theta(t)$ terimi kısa dönem faiz oranlarının t anındaki ortalama yönünü göstermekte olup, model Vasicek’in modelinde yer alan ortalamaya dönüş özelliğini dikkate almamaktadır. HL’nin modeli genellikle, faiz oranlarına dayalı türev ürünlerin fiyatlanmasında kullanılmıştır. HL’nin çalışmalarını analitik olarak tarif edecek olursak aşağıdaki anlatımı izlememiz gerekmektedir. Başlangıç olarak, modelin faiz oranlarının başlangıç vade yapısına uygun hale getirilebilmesi için sıfır kupon faizli bonoların fiyatlarının hesaplanması gereklidir. Bono fiyatlarını kullanarak $\theta(t)$ ’yi hesaplamak için r_t ’yi şu notasyonla gösterebiliriz;

$$\begin{aligned}
r_t &= r_0 + \int_0^t \theta(s)ds + \int_0^t \sigma dW_s \\
&= r_0 + \int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t \\
&= r_u + \int_u^t \theta(s)ds + \sigma[W_t - W_u]
\end{aligned}$$

Bugün T vadeli bir sıfır kupon faizli bono fiyatını $P(0,T)$ ile gösterelim. Bono fiyatı şu denklemler ile temsil edebiliriz,

$$P(0,T) = E^Q(e^{-\int_0^T r_s ds}) \quad y(t) := \int_0^t r_s ds$$

Buna göre bono fiyatı şu şekilde gösterilir;

$$P(0,T) = E^Q(e^{-y(T)})$$

Aşağıdaki süreci basitleştirdiğimizde;

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t r_0 ds + \int_0^t \int_0^s \theta(u) du ds + \int_0^t \int_0^s \sigma dW_u ds \\
&= r_0 t + \int_0^t \int_u^t \theta(u) ds du + \int_0^t \int_u^t \sigma ds dW_u.
\end{aligned}$$

Şu sonuca ulaşmak mümkündür;

$$y(t) = r_0 t + \int_0^t \theta(u)(t-u)du + \int_0^t \sigma(t-u)dW_u$$

$y(t)$ normal dağılıma sahip bir toplam olup sırasıyla ortalama ve varyans

$$m(t) = r_0 t + \int_0^t \theta(s)(t-s)ds$$

$$v(t) = \int_0^t \sigma^2 (t-s)^2 ds = \frac{1}{3} \sigma^2 t^3$$

formülasyonlarıyla gösterilebilir. Bu veriler ışığında Gaussian'ın Laplace dönüşümünden bono fiyatı şu şekilde ifade edilir;

$$\begin{aligned} P(0, T) &= E^Q(e^{-y(T)}) \\ &= \exp(-E^Q(y(T))) + \frac{1}{2} \text{Var}(y(T)) \\ &= \exp(-m(T)) + \frac{1}{2} v(T) \\ &= \exp\left[-r_0 T - \int_0^T \theta(s)(T-s) ds + \frac{1}{6} \sigma^2 T^3\right] \end{aligned}$$

Bu aşamada, bono fiyatına bağlı olan $\theta(t)$ ' yi hesaplamak istediğimizde logaritmalar ve diferansiyeller alındıktan sonra ulaştığımız sonuç ise;

$$\theta(T) = -\frac{\partial^2}{\partial T^2} \log P(0, T) + \sigma^2 T \quad \text{ve} \quad \theta(T) = \frac{\partial f(0, T)}{\partial T} + \sigma^2 T. \quad \text{olacaktır.}^{37}$$

4.1.6. Black, Derman ve Toy – 1990

Black, Derman ve Toy (BDT) 1990 yılında yayınladıkları “*Faiz Oranlarının Bir Faktör Modeli Ve Onun Hazine Bonosu Opsiyonlarına Uygulanması*” adlı makalelerinde bir ayrılmış (devamsız nitelikte) zaman faiz oranı modellemesi yaklaşımı geliştirmişlerdir. Onların geliştirmiş oldukları modelinin basit gösterimi şu şekildedir;

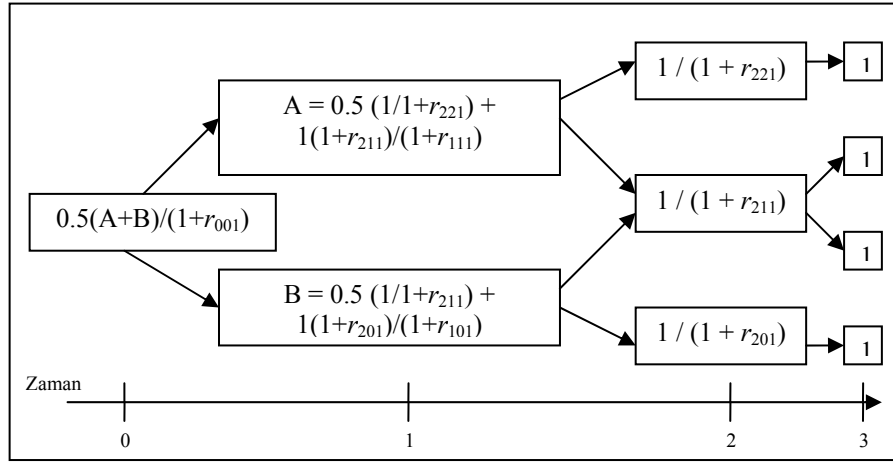
$$d(\log r_t) = \theta(t)dt + \sigma dW_t$$

Bu gösterimde $\theta(t)$ zamanın rassal olmayan bir fonksiyonu olup, σ negatif olmayan bir sabittir. Onların orjinal çalışmasında yer alan modelin stokastik denklemi ise aşağıdaki gibidir;

³⁷ T. Björk, **Arbitrage Theory in Continuous Time**, England:Oxford University Press, 1998 ve S.Y.T. Ho. ve S.Lee, “Term Structure Movements And Pricing Interest Rate Contingent Claims”, **Journal of Finance**, Vol:41, (1986), s.1011-1029.

$$d(\log r_t) = [\theta_t + (\sigma_t' / \sigma_t) \log r_t] dt + \sigma_t dW_t$$

σ_t deterministik bir fonksiyon olup, spot faiz oranlarının vade yapısıyla birleşmiş model yapmak için seçilmiştir. $\log r_t$ ise ortalamaya dönüşü gösterir. BDT modeli cari vade yapısını taklit eden en basit faiz oranı modellerinden biri olarak kabul görmektedir. Modelde faiz oranları bir binomial çatı içinde gelişir ve modeldeki her bir dal bir dönem faiz oranını temsil eder. Bu binomial çatıda her bir durum için model $\frac{1}{2}$ gerçekleşme olasılığı mevcut olup, son aşamada bononun değerinin bir olduğu kabul edilir. BDT modelinin işleyişini aşağıdaki şekille göstermek mümkündür;³⁸

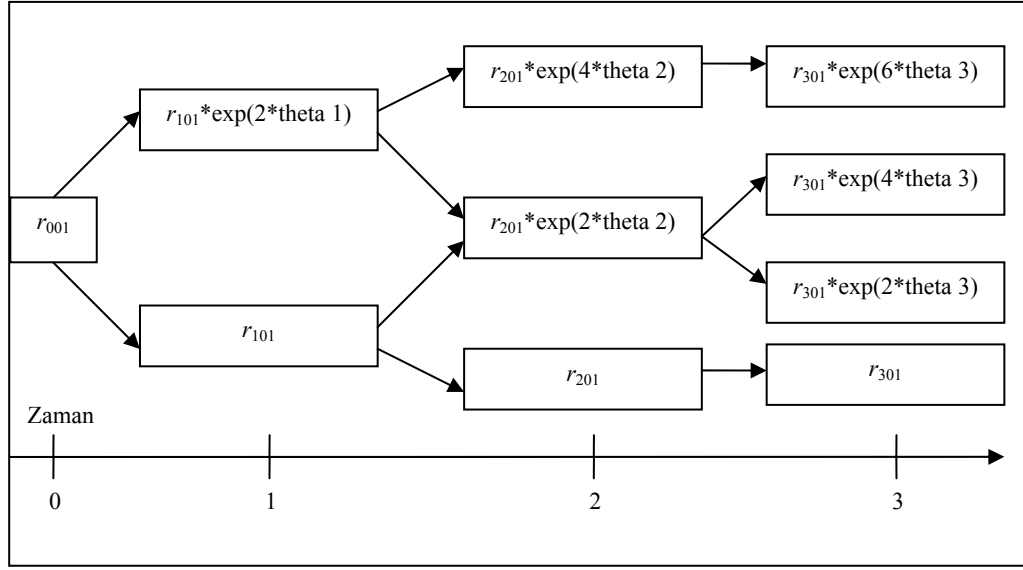


Şekil 4: BDT Modelinde İndirgeme Oranları Sürecinin Gelişimi

Kaynak: Zvi Wiener ve Simon Benninga, “Binomial Term Structure Models”, **Mathematica in Education and Research**, Vol. 7, No: 3, (1998), s.3

BDT modelinde $\theta(t)$ notasyonu, t günündeki bir dönem faiz oranının doğal logaritmasının standart sapmasını göstermektedir. Benzer şekilde $(\psi^2/2)$ notasyonu faiz oranının logaritmasının standart sapmasını temsil etmektedir. Bu nedenle BDT modeline göre $t = 1$ zaman noktasında faiz oranı $r_{111} = r_{101}e^{2\theta_1}$ olmaktadır. Bu bilgiler ışığında BDT’ye göre faiz oranı sürecinin gelişimini aşağıdaki şekildeki gibi açıklamak mümkündür;

³⁸ Zvi Wiener ve Simon Benninga, “Binomial Term Structure Models”, **Mathematica in Education and Research**, Vol. 7, No: 3, (1998), s.2-3



Şekil 5: BDT Modelinde İndirgeme Oranlarının Hesaplanması

Kaynak: Simon Benninga ve Zvi Wiener, “Binomial Term Structure Models”, **Mathematica in Education and Research**, Vol. 7, No: 3, (1998), s.4

BDT modelini analitik olarak tanımlamak istersek, öncelikle $\log r_t$ ele alır daha sonra her iki tarafın logaritmasını aldıktan sonra anlık kısa dönem faizler için aşağıda yer alan çözüme ulaşırız;

$$\begin{aligned}
 \log r_t &= \log r_0 + \int_0^t \theta_s ds + \int_0^t \sigma dW_s \\
 &= \log r_0 + \int_0^t \theta_s ds + \sigma W_t \\
 \Rightarrow \\
 r_t &= r_0 \exp\left\{\int_0^t \theta_s ds + \sigma W_t\right\}
 \end{aligned}$$

Süreci $t \geq u$ için şu şekilde gösterebiliriz;³⁹

³⁹ F. Black, E. Derman ve W. Toy, “A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options”, **Financial Analysts Journal**, Vol:46, (1990), s.33-39 ve J.Hull ve A.White, “Pricing Interest Rate Derivative Securities”, **The Review of Financial Studies**, Vol:3, (1990) s.573-592.

$$r_t = r_u \exp\left\{\int_u^t \theta_s ds + \sigma(W_t - W_u)\right\}$$

4.1.7. Hull, White (Genişletilmiş Vasicek) - 1990

Vasicek'in 1977 yılında ortaya koyduğu tek faktör faiz oranı modeli 1990 yılında Hull ve White (HW) tarafından genişletilmiştir. HW, Vasicek'in stokastik diferansiyel denklemini, kendi denklemleri olan $dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t)dt + \sigma(t) \sqrt{r_t}dW_t$ 'ten hareketle, $\gamma = 0$ ve $\beta_t = \theta_t + \beta\alpha_t$ için aşağıdaki gibi yeniden düzenlemişlerdir;

$$dr_t = (\beta_t - \alpha_t r_t)dt + \sigma_t dW_t$$

Bu gösterimde α_t , σ_t ve β_t zamanın rastsal olmayan deterministik fonksiyonlarıdır. HW, cari getiri eğrilerinin model ile uyuşması ihtiyacından hareketle Vasicek'in modelindeki zamanla değişim gösteren bir parametreye giriş yapmışlardır. Faiz oranlarının mevcut vade yapısını modellemek amacıyla, eşdeğer nitelikte, her bir mümkün vade için, denklemlerin sonsuz sayılı bir sistemini çözmeye yönelik bir çaba olan HW modeli, bu açıdan verilen spot ya da forward faiz oranlarının volatilitelerinin vade yapısıyla ve faiz oranlarının vade yapısıyla uyuşan bir niteliğe sahiptir. HW'nin modelini analitik olarak kavrayabilmek ve yukarıda yer alan denklemin çözümü için şu yolu takip edebiliriz. Bunun için öncelikle $K_t = \int_0^t \alpha_u du$ integralini tanımlamamız gereklidir. Denklemin her iki tarafının e^{K_t} ile çarpıp ve t 'ye göre her iki tarafına Ito diferansiyelini uygularsak şu gösterime ulaşırız,

$$\begin{aligned} d(e^{K_t} r_t) &= e^{K_t} K'_t r_t dt + e^{K_t} dr_t \\ &= e^{K_t} \alpha_t r_t dt + e^{K_t} [(\beta_t - \alpha_t r_t) dt + \sigma_t dW_t] \\ &= e^{K_t} (\beta_t dt + \sigma_t dW_t) \end{aligned}$$

$$e^{K_t} r_t = r_0 + \int_0^t e^{K_s} \beta_s ds + \int_0^t e^{K_s} \sigma_s dW_s$$

$$r_t = e^{-K_t} r_0 + \int_0^t e^{-(K_t - K_s)} \beta_s ds + \int_0^t e^{-(K_t - K_s)} \sigma_s dW_s$$

Her hangi bir $t \geq u$ için bu yukarıdaki sonucu genelleştirmek istendiğinde aşağıda yer alan sonuca ulaşılabacaktır.⁴⁰

$$\begin{aligned}
r_u &= e^{-K_u} r_0 + \int_0^u e^{-(K_u-K_s)} \beta_s ds + \int_0^u e^{-(K_u-K_s)} \sigma_s dW_s \\
r_t &= e^{-K_t} r_0 + \int_0^t e^{-(K_t-K_s)} \beta_s ds + \int_0^t e^{-(K_t-K_s)} \sigma_s dW_s \\
&\quad + \int_u^t e^{-(K_t-K_s)} \sigma_s dW_s + \int_0^u e^{-(K_t-K_s)} \sigma_s dW_s \\
r_t &= e^{-K_t} r_0 + \int_u^t e^{-K_t+K_s} \beta_s ds + \int_u^t e^{-K_t+K_s} \sigma_s dW_s + e^{-K_t+K_u} (r_u - e^{-K_u} r_0) \\
&= e^{-(K_t-K_u)} r_u + \int_u^t e^{-(K_t-K_s)} \beta_s ds + \int_u^t e^{-(K_t-K_s)} \sigma_s dW_s
\end{aligned}$$

4.1.8. Hull, White (Genişletilmiş CIR) - 1990

Hull ve White (HW) aynı makalelerinde Cox, Ingersoll ve Ross'un (CIR) modelini aynı temellerde yeniden yorumladılar. HW, Vasicek'in modelini genişlettikleri gibi CIR'un modellerini zamana bağlı katsayıları dikkate alma düşüncesi üzerinde genişlettiler. HW, yine temel denklem olarak aşağıdaki denklemi aldılar;

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t)dt + \sigma(t)r_t^{1/2}dW_t$$

Bu denklemde $\gamma = 0.5$ ve $\beta_t = \theta_t + \beta\alpha_t$ için CIR'un modellerini aşağıdaki gibi genişlettiler;

$$dr_t = (\beta - \alpha_t r_t)dt + \sigma_t r_t^{1/2}dW_t$$

Onların çalışmalarına göre $T > t$ için sıfır kupon faizli tahvil fiyatını $P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}$ şeklinde gösterebiliriz. Bu gösterimde β bir Riccati denklemini, A bazı sınır koşullarına bağlı bir doğrusal diferansiyel denklemi çözmektedir. Riccati denklemini sadece sabit katsayılar için çözülebildiğinden onların bu çalışmaları analitik olarak kolay işlenir nitelikte değildir. HW'ın modelindeki α ve σ notasyonları pozitif

⁴⁰ Hull ve White, s.573-592 ve J. Hull ve A. White, "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities", **Journal of Financial and Quantative Analysis**, Vol: 28, (1993), s.235-254.

sabitlerdir. β ise başlangıç faiz oranlarının vade yapısı ile uyuşan zamana bağlı fonksiyondur. Bu fonksiyon bir pozitif r garanti etmediğinden difüzyon katsayısı (diffusion term/coefficient) daima çok iyi tanımlanmış olmalıdır.

HW'ın bu modeli kolaylıkla kullanıla bilinir olmadığından 1995 yılında Jamshidian her bir t için β_t/σ_t^2 oranının bir pozitif sabit olan δ 'ye eşit olduğu varsayımı altında, HW'nin modelini analitik olarak kolay kullanıla bilir bir basit versiyonunu oluşturdu. 1995 yılında Rogers ve 1996 yılında Maghsoodi, karekök modellerinin bir özelliğini gösteren, deterministik zaman değişimine uygulanmış sabit katsayılı CIR modelin elde edilmiş basit bir versiyon gösterimi sundular.⁴¹

4.1.9. Black, Karasinski - 1991

Black ve Karasinski'nin (BK) 1991 yılında oluşturdukları model esas itibariyle genelleştirilmiş devamlı zamanlı bir Black, Derman Toy modelidir. Kullanılan denklemlerin matematiksel olarak negatif faiz oranı üretebileceği ancak gerçek hayatta böyle bir durumun söz konusu olamayacağına ilişkin matematik sorun, BK için başlangıç noktası özelliği taşır. BK anlık kısa dönem faiz oranları sürecinin, zamana bağlı katsayılı bir Orstein-Uhlenbeck sürecinin eksponansiyeli olarak değiştiği varsayımı altında, aşağıda yer alan bir ortalamaya dönüş log – normal tek faktör modelini sunmuşlardır;

$$d(\log r_t) = \phi_t[\log \mu_t - \log r_t]dt + \sigma_t dW_t$$

Bu gösterimde μ_t notasyonu hedef faiz oranını, ϕ_t notasyonu geri dönmeyi ve σ_t ise logaritmik r_t sürecinde lokal değişim için anlatımdaki lokal volatilitiyi temsil etmekte olup, t ve σ negatif olmayan sabitlerdir. $\Sigma_t = \phi_t$ ve $\beta_t = \phi_t \log \mu_t$ varsayımı altında yukarıdaki gösterim aşağıdaki halini alır;

$$d\log r_t = (\beta_t - \alpha_t \log r_t) dt + \sigma_t dW_t$$

⁴¹ Brigo ve Mercurio, s.72-73

$Y_t = \log r_t$ olduğunda yeni bir deterministik fonksiyon olan K_t şu şekilde yazılabilir;

$$K_t = \int_0^t \alpha_s ds$$

$\zeta_t = e^{K_t} Y_t$ tanımı yapıldığında;

$$\begin{aligned} d(\zeta_t) &= e^{K_t} K'_t Y_t dt + e^{K_t} dY_t \\ &= e^{K_t} \alpha_t Y_t dt + e^{K_t} ((\beta_t - \alpha_t Y_t) dt + \sigma_t dW_t) \\ &= e^{K_t} (\beta_t + \sigma_t dW_t) \end{aligned}$$

Bu gösterimde her iki tarafı integre edersek,

$$\begin{aligned} e^{K_t} Y_t &= Y_0 + \int_0^t e^{K_s} \beta_s ds + \int_0^t e^{K_s} \sigma_t dW_s \\ \Rightarrow Y_t &= e^{-K_t} Y_0 + \int_0^t e^{-(K_t-K_s)} \beta_s ds + \int_0^t e^{-(K_t-K_s)} \sigma_t dW_s \end{aligned}$$

$t \geq u$ için Y_t 'yi şu şekilde yazabiliriz;

$$Y_t = e^{-(K_t-K_u)} Y_u + \int_u^t e^{-(K_t-K_s)} \beta_s ds + \int_u^t e^{-(K_t-K_s)} \sigma_t dW_s$$

$Y_t = \log r_t$ olarak dikkate aldığımızda notasyon aşağıdaki biçimini alacaktır;

$$\log r_t = e^{-(K_t-K_u)} \log r_u + \int_u^t e^{-(K_t-K_s)} \beta_s ds + \int_u^t e^{-(K_t-K_s)} \sigma_t dW_s$$

BK modeli tahvil fiyatları ve tahvillerle ilişkili opsiyonlarda kullanılmıştır. BK kendi çalışmalarında karekök süreçlerinin negatif faiz oranı sorunu çözmekle beraber, kişilerin nakit bulundurdıkları müddetçe nominal faiz oranlarının sıfırın altına düşmeyeceği gerçeğine işaret ederek, CIR gibi modellerin dez avantajlarına işaret

etmişlerdir. Kare kök modellerinde faiz oranı sıfır iken, log normal modellerde faiz oranlarının sıfır olması gibi bir sıkıntının olmaması ve pazar verilerini modellemek için modelin özelliklerinin elverişli olması BK modelini kullanıcılar için popüler kılmıştır. Faiz oranı sürecinin log normal dağılımının bir sonucu olarak para piyasası hesaplarının beklenen değerinin sonsuz olması sorunu daha sonraları, ağaç yaklaşımı yoluyla kısmen çözülmeye çalışılmıştır.⁴²

4.2. İki Faktör Faiz Oranı Modelleri

Tek faktör modelleri, faiz oranlarının vade yapısının modellenmesinde birinci basamağı temsil etmektedir. Bu modeller, kısa dönem faiz oranlarının fonksiyonları olarak bono getirilerinin tahmini üzerine kurulu olup, bono getirilerinin zaman serileri tarafından gösterilen teorik ortalama getiri eğrisi ve teori uygulandıktan sonra daha iç bükey olan gözlenmiş eğriler arasındaki farklılığın üstesinden gelememişlerdir.⁴³

Bir verilmiş t zamanında, $P(t, T)$ tüm bono fiyatlarından, aynı t zamanındaki sıfır kupon faizli faiz oranı eğrisinin bütünü yeniden kurulabilir. Bu nedenle bütün eğrinin değişimi tek nicelik r 'nin evrimi tarafından tanımlanır. Bununla birlikte r 'nin evrimi için yetersiz bir modelini seçimi, getiri eğrisinin evrimi için yetersiz bir sonuç doğurur. $P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r_t)$ olarak tanımlandığında sürekli bileşik spot faiz oranları $R(t, T) = [\log A(t, T)]/(T-t) + [\log B(t, T)]/(T-t)r_t = a(t, T) + b(t, T)r_t$ olarak yazılabilir. Bu bilgi ışığında, t zamanında faiz oranlarının müşterek dağılımına bağlı bir ödeme söz konusu olduğunu düşünelim. $T_1 = t + 1$ ve $T_2 = t + 10$ yıl olsun. Ödeme t anında bir ve 10 yıllık sürekli bileşik spot faiz oranının müşterek dağılımına bağlı olacaktır. Burada iki faiz oranı arasındaki korelasyon çok önemlidir. Vasicek'in modeli ile son korelasyon şu şekilde hesaplanır;

$$\text{Corr}(R(t, T_1), R(t, T_2)) = \text{Corr}(a(t, T_1) + b(t, T_1)r_t, a(t, T_2) + b(t, T_2)r_t) = 1$$

Böylelikle eğrilerin tüm vadeleri her zaman anında mükemmel derecede korele olmuştur. Örneğin, otuz yıllık faiz oranının üç aylık faiz oranı ile mükemmel derecede

⁴² F. Black ve P. Karasinski, "Bond and Option Pricing When Short Rates are Lognormal", **Financial Analysts Journal**, Vol:47, (1991), s.52-59.

⁴³ Nuno Cassola ve Jorge Barros Luis, **A Two-Factor Model Of German Term Structure Of Interest Rates**, Brussel:European Central Bank Working Papers, No:46, March 2001

korele olmasının anlamı şudur; t zamanında faiz oranı eğrisi için bir şok, tüm vadelere eşit yayılır ve (eğri ilk noktasında (r_t) sarsılır) aynı yönde sertçe hareket eder. Modelin bu mükemmel korelasyonunu kabul etmek zordur. Gerçekte, faiz oranları biraz korele olmama (mükemmel olmayan korelasyon) özelliği sergiler ki bu nedenle eğri evriminin daha tatmin edici bir modeli bulunmuş olmalıdır.⁴⁴

Hull – White, Black – Karasinski, genişletilmiş eksponansiyel Vasicek ve genişletilmiş Cox - Ingersoll – Ross modelleri gibi tek faktör modelleri üretilen fiyatın, farklı faiz oranlarının korelasyonuna bağlı olmadığını, bu hemen hemen doğru olma durumunun yine de, faiz oranlarının özellikle birbirine yakın olan anlardaki ödemeleri müştereken etkilediği durumlarda kabul edilebileceğini değerlendirirler. Birbirine yakın olan faiz oranları (altı aylık ve bir yıllık gibi) arasındaki gerçek korelasyon muhtemelen yüksek olup bu nedenle tek faktör modelleri tarafından sunulan mükemmel korelasyon prensipte kabul edilemez olmayacaktır. Bütün bu nedenlerden dolayı daha gerçekçi korelasyon seyrine izin veren modellere ihtiyaç vardır. Bu çoklu faktör modelleri (özellikle iki faktörlü modeller) ile elde edilebilir. Gaussian Vasicek modelinin varsayımsal iki faktör versiyonu rastsallığın anlık korele edilmiş kaynaklarıyla ($dW_1 dW_2 = \rho dt$), şu şekilde yazabiliriz;

$$r_t = x_t + y_t$$

$$dx_t = k_x (\theta_x - x_t)dt + \sigma_x dW_1(t),$$

$$dy_t = k_y (\theta_y - y_t)dt + \sigma_y dW_2(t),$$

Burada x ve y faktörleriyle tek faktör modeli için paralel nicelikler olup kısa dönem faiz oranını verirler. Bu noktada bono fiyatını ve korelasyonu aşağıdaki gibi temsil edebilmek mümkündür;

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B^x(t, T)x_t - B^y(t, T)y_t)$$

$$\text{Corr}(R(t, T_1), R(t, T_2)) = \text{Corr}(b^x(t, T_1)x_t + b^y(t, T_1)y_t, b^x(t, T_2)x_t + b^y(t, T_2)y_t) = 1^{45}$$

⁴⁴ Brigo ve Mercurio, s.127-128

⁴⁵ Brigo ve Mercurio, s.128-129

Gerçekçi korelasyon eğrileri sunmak ve en somut durumlarda yeterli pazar verisi ile tatmin edici şekilde uyum sağlayacak bir model için, seçilen faktörlerin sayısı önemlidir. Getiri eğrisinin bütününe tarihsel analizi, faktör analizleri ya da bileşen analizleri üzerine kurulu olup, iki bileşenin getiri eğrisindeki değişimlerin % 85 ila % 90'nını açıklayabilmesi arzulanır. 1997 yılında Jamshidian ve Zhu çalışmalarında, Japon yeni, Amerikan doları ve Alman markı verileriyle çalışarak toplam değişimin % 68 ila % 76'sını açıklayan bir bileşeni yine toplam değişimin % 93 ila % 94'ünü açıklayan temel üç bileşeni gösterdiler. Benzer bir çalışmayı Rebonato İngiltere piyasası için yapmış olup toplam varyansın % 92'sini bir bileşen ile, toplam varyansın % 99,1'ini iki bileşenle açıklamıştır. Bu analizlerden iki ya da üç boyutlu süreçlerin sıfır kupon faizli eğrinin bütününe temsili için gerekli olduğu öğrenilmiştir.⁴⁶

Biz çalışmamızda bu modellerden önde gelen bir kaçını daha detaylı bir biçimde ele alacağız.

4.2.1. CIR ++ Modeli – 1998

Bu model CIR (1985) ve genişletilmiş CIR (1990) modellerinin, daha genişletilmiş bir formu olup, modele göre kısa dönem faiz oran dinamikleri aşağıdaki gibi gösterilmektedir;

$$r_t = x_t + \varphi(t)$$

$$dx_t = \alpha(\mu - x_t) dt + \sigma x_t^{1/2} dW_t$$

Modele göre herhangi bir başlangıç vade yapısı ile model aşağıdaki eşitlik vasıtasıyla ulaşılır ki burada eşitliğin sağındaki ilk terim pazar forward faiz oranını, ikinci terim ise model tarafından elde edilen forward faiz oranını göstermektedir.⁴⁷

$$\varphi(t) = f^M(0, t) - f^{CIR}(0, t)$$

⁴⁶ Brigo ve Mercurio, s.129

⁴⁷ D. Brigo and F. Mercurio, “A Deterministic Shift Extension of Analytically Tractable and Time Homogeneous Short Rate Models”, **Finance and Stochastic**, Vol:5, (2001), s.369-387.

4.2.2. Mercurio - Moraleda Modeli – 2000

Mercurio ve Moraleda'nın çalışmalarına göre, anlık spot faiz oranları için, söz konusu dinamikler şu şekilde tarif edilmektedir;

$$dx(t) = [\theta(t) - \beta(t)x(t)] dt + \sigma dW(t)$$

$$\beta(t) = \lambda - [\gamma / (1 + \gamma^t)]$$

$$r^t = e^{x(t)}$$

Bu gösterimde x bir Gaussian sürecini temsil etmektedir. $t \geq s$ için faiz oranı süreci şu şekilde gösterilir;

$$r(t) = \exp \{ \ln r(s)B(s,t) + \int_s^t B(u,t)\theta(u)du + \sigma \int_s^t B(u,t)dW(u) \}$$

Onların çalışmaları, Heath-Jarrow-Morton model çatısındaki tek faktör Gaussian modeli, anlık forward faiz oranların volatilitesi için aşağıda yer alan formu sunmakta olup, buradaki σ , γ ve λ negatif olmayan sabitlerdir.⁴⁸

$$\sigma(t,T) = \sigma [\gamma (T-t) + 1] e^{(-\lambda/2)*(T-t)}$$

4.2.3. Genişletilmiş Exponansiyel Vasicek Modeli – 2001

Modele göre faiz oranı süreci için geçerli olan dinamikler şu şekilde gösterilir;

$$r_t = x_t + \varphi(t)$$

$$dx_t = x_t(\eta - \alpha \log x_t) dt + \sigma x_t dW_t$$

Bu gösterimdeki η , α ve σ negatif olmayan sabitlerdir. İlk notasyonun sağ tarafındaki ikinci terim şu şekilde gösterilir;

$$\varphi(t) = f^M(0,t) - f^{EEV}(0,t)$$

⁴⁸ Brigo ve Mercurio, *Interest Rate Models Theory and Practice*, s.85-181-182

eşitliğin sağındaki ilk terim f^M 'e pazar forward oranını, ikinci terim f^{EEV} 'e ise modelin elde ettiği forward oranı gösterir.⁴⁹

5. BİNOMİAL VE TRİNOMİAL AĞAÇLAR KULLANARAK VADE YAPISI MODELLERİ

Faiz oranlarının vade yapısına ilişkin modellerin temel amacı kullanıcılara gelecekte olması beklenen, muhtemel faiz oranları hakkında bir dizi tahmin sağlamaktır. Forward faiz oran eğrileri (forward rate curves) bu bakımdan, yatırımcılara faiz oranlarının volatiliteleri hakkında görsel bir malzeme verir. Kullanıcılar açısından, kısa dönem faiz oranları ve buna bağlı olarak forward nitelikteki faiz oranlarının modellenmesine yönelik olarak, arbitrajsız modeller, denge modelleri, Markov ve Markov olmayan modellerden herhangi biri matematik yöntem olarak seçilebilir. Burada kullanıcılar açısından her modelin kendine özgü bazı uygulama sorunları söz konusu olacaktır. Bu noktada faiz oranları ağaçlarının kullanımı, kullanıcılara çeşitli kolaylıklar sağlar.

Kısa faiz oranları için bir faiz oranı ağacı, bir stokastik süreç olarak ele alınan faiz oranlarının, bir ayrılmış “devamsız” zaman gösterimidir. Faiz oranı ağaçları, binomial, trinomial ya da daha çoklu modeller şeklinde ele alınır.

5.1. Binomial Modeller ve Ağaçlar

Binomial modeller olasılık tanımının iki yönlü bir gösterimidir. Binomial anlayış sadece faiz oranları için değil hisse senetleri, emtia fiyatları ya da döviz kurları gibi farklı bir çok finansal konu için kullanışlı bir yapıya sahiptir. Binomial modellerin yapısını aşağıdaki gibi basit bir örnekle açıklamak mümkündür. Bir yatırımcının iki dönemli bir yatırım yaptığını varsayalım. Yatırımcımız ikinci dönemin sonunda 100 YTL ödeyecek bir bono satın alıyor olsun. Bononun elde tutulma süresi içinde “örneğin $t = \tau$ anında” pek çok farklı nedenle spot faiz oranları $t = 0$ zaman noktasındaki değerinden farklı olacaktır. $t = \tau$ anında muhtemel faiz oranlarının ne olacağı konusunda yatırımcının basit olarak iki beklenti geliştirdiğini varsayalım. Buna göre bu tarihte faiz

⁴⁹ Brigo ve Mercurio, *Interest Rate Models Theory and Practice*, s.101

oranı başlangıç zamanındaki faiz oranına kıyasen ya yükselecek ya da düşecektir. Bu iki ihtimali sırasıyla u “yükselme durumu”, d “düşme durumu” ve bu durumlara bağlı faiz oranlarını r_u ve r_d notasyonları ile gösterelim. Bu iki durumlu gösterim biçiminde toplam olasılık, olasılık teorisi ve ona bağlı olasılık uzayının tanımından hareketle 1 toplamı ile temsil edilir. Bu açıklamaya uygun olarak q yükselme ihtimalini, $1 - q$ ise düşme ihtimali gösterir. Yatırımcının elinde bulunan bononun değerini $A_2 = 100 \text{ YTL} / (1 + R_2\tau)^2$ ile göstere bilinir. Açık bir biçimde görüleceği üzere burada bononun fiyatını etkileyen kilit değişken faiz oranıdır. Faiz oranının τ zaman döneminde alacağı iki muhtemel sonuç olacağı varsayımı altında bugünkü değer ya $p_u = 100 \text{ YTL} / (1 + r_u\tau)$ ya da $p_d = 100 \text{ YTL} / (1 + r_d\tau)$ şeklinde olacaktır. Böylelikle $t = 0$ zaman noktasında bu günkü değer ya $p_u / (1 + r_0\tau)$ ya da $p_d / (1 + r_0\tau)$ olacaktır. Arbitrajsız bir yapı göz önüne alındığında, yatırım için şu gösterim geçerlidir,

$$A_2 = 100 \text{ YTL} / (1 + R_2\tau)^2 = p_u / (1 + r_0\tau) = [100 \text{ YTL} / (1 + r_u\tau)] / (1 + r_0\tau) \text{ ya da}$$

$$A_2 = 100 \text{ YTL} / (1 + R_2\tau)^2 = p_d / (1 + r_0\tau) = [100 \text{ YTL} / (1 + r_d\tau)] / (1 + r_0\tau) .$$

Yukarıdaki denklemden hareketle bonoyu ihtimallerle ağırlıklandırarak aşağıdaki gibi özetleyebiliriz;

$$\begin{aligned} A_2 &= 100 \text{ YTL} / (1 + R_2\tau)^2 = [q (p_u / (1 + r_0\tau))] + [(1 - q) (p_d / (1 + r_0\tau))] \\ &= [q (100 \text{ YTL} / (1 + r_u\tau)) / (1 + r_0\tau)] + [(1 - q) (100 \text{ YTL} / (1 + r_d\tau)) / (1 + r_0\tau)] \end{aligned}$$

Yukarıdaki birinci ve üçüncü gösterimler birbirlerine eşitlenip denklem sadeleştirildikten sonra şu sonuç elde edilir;

$$A_2(1 + r_0\tau) (1 + r_d\tau) (1 + r_u\tau) - q(1 + r_d\tau) - (1 - q) (1 + r_u\tau) = 0$$

Bir binomial ağaç yapısını ise şu şekilde göstermek mümkündür. Başlangıç noktası olarak nominal kıymeti 100 YTL olan bir sıfır kupon faizli tahvil ele alınır. Yatırımcının r_u ve r_d tahminleri sırasıyla % 8 ve % 6 olsun. $\tau = \tau_1 = 0,5$ yani 6 ay olsun. Müşterek yıllık faiz oranları varsayımımız nedeniyle $q = 0,5$ 'tir. Bu binomial yapı altında geriye dönük süreç takip edildiğinde fiyat ağacının ilk dalında sırasıyla;

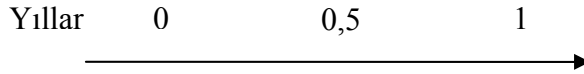
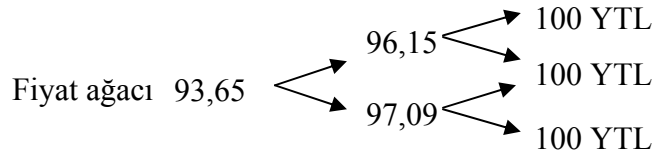
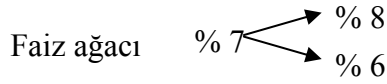
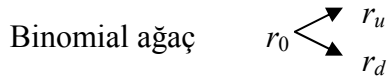
$$96,15 \text{ YTL} = [(0,5*100) + ((1 - 0,5)*100)] / [1 + (0,08*0,5)]$$

$$97,09 \text{ YTL} = [(0,5*100) + ((1 - 0,5)*100)] / [1 + (0,06*0,5)]$$

elde edilir. Buna göre bono fiyatı

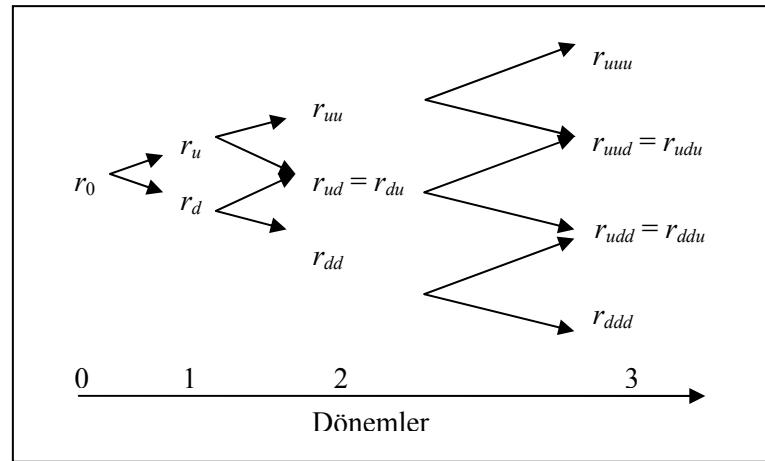
$$= [(q*96,15) + ((1 - q)*97,09)] / [1 + (0,07*0,5)]$$

$$= [(0,5*96,15) + ((1 - 0,5)*97,09)] / [1 + (0,07*0,5)] = 93,65 \text{ YTL olmalıdır.}$$



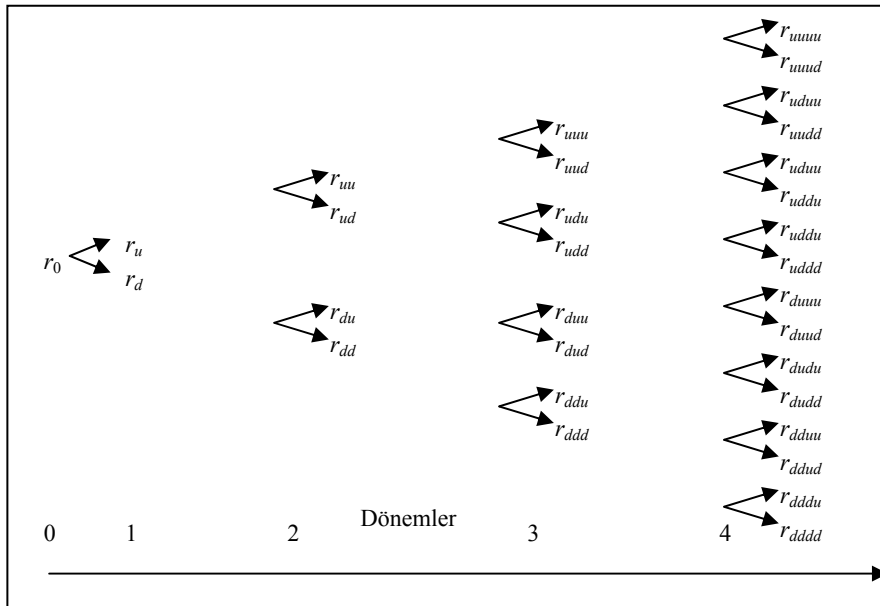
Yukarıda yer alan örnek bir dönemli bir binomial ağaç yapısına tipik bir örnek olmakla beraber, ekseriyetle gerçek hayat, birden fazla dönemi kapsar nitelikte ağaç yapılanmaları gereklidir. İster tek, isterse birden fazla dönemi kapsamış olsun kısa dönem faiz oranları için geçerli olacak bir binomial ağaç yapılanması aynı esaslara sahiptir. Örneğin faiz oranlarında yukarı bir hareketi temsil eden r_u değeri bir önceki dönemdeki benzer bir şekilde ya yukarı " r_{uu} " ya da aşağı yönlü " r_{ud} " bir başka hareket ile takip edilecektir. Faiz oranlarında aşağı yönlü bir hareketi temsil eden r_d içinde bu geçerli olup, onu takip eden dönemde faizler ya yukarıya " r_{du} " ya da aşağıya doğru bir " r_{dd} " başka hareketle takip edilecektir. Bu durum 2^n adet formülün hesaplanmasını gerektirdiğinden, genel olarak süre artışının binomial yapıların kullanımını olumsuz etkilediği söylenebilir. Bu durumda kullanıcılar açısından yeniden birleşme koşulu

faydalı bir araçtır. Binomial ağaç (binomial lattice/tree) yapıları itibariyle belirli noktalarda birbirlerine eşit durumlar yaratırlar. Örneğin, bir yükselişi takip eden bir faiz düşüşü, bir düşüşü takip eden bir faiz oranı yükselişiyle aynı sonucu meydana getirecektir ($r_{ud} = r_{du}$). Bu kısıt her bir zaman dönemi için bir formül hesaplanmasını gerektirir ki bu da n adet zaman dönemi için 2^n değil sadece n adet farklı sonuca işaret eder (Şekil 6 ve 7).



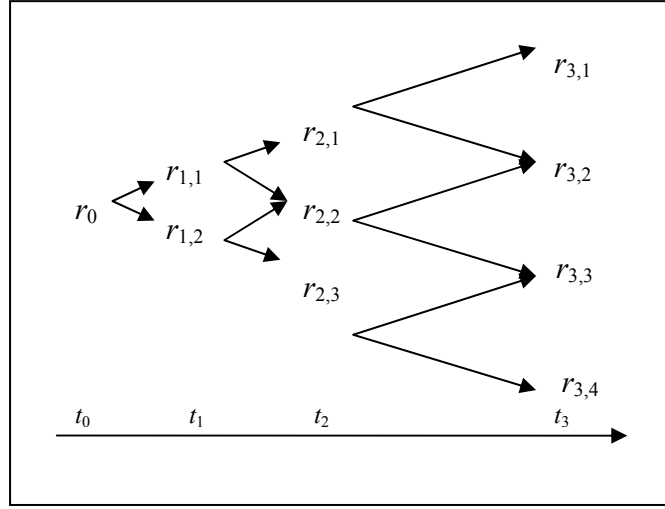
Şekil 6: Üç Dönemli Kısa Dönem Faiz Oranı Binomial Ağaç Yapısı

(Dönemler Eşit Sürelidir)

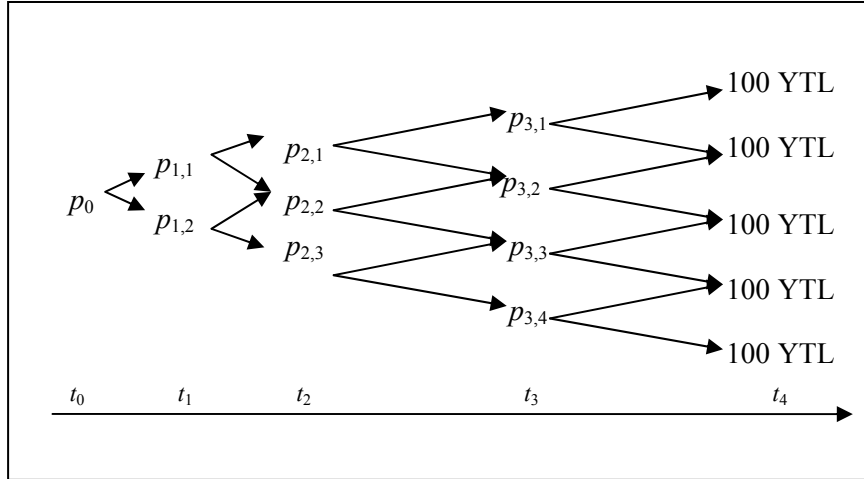


Şekil 7: Dört Dönemli Kısa Dönem Faiz Oranı Binomial Ağaç Yapısı (D.E.S.)

Bu gösterim biçimleri, konunun öğrenilmesi açısından temel izahına uygun olmakla beraber pratikte kullanıcılara fazlaca bir uygulama kolaylığı sağlamaz. Finans yazınında pragmatik olarak ağaçların gösteriminde r_{kj} notasyonu sıklıkla kullanılmakta olup burada, k zaman dönemini, j ise dereceyi temsil etmektedir. Buna göre ilk anlatımda kullanılan $r_0 = r_{0,1}$, $r_u = r_{1,1}$ ve $r_d = r_{1,2}$ ile gösterilmektedir. Benzer bir biçim “ $p_{0,1}$ ” fiyat ağacı içinde geçerlidir (Şekil 8 ve 9).



Şekil 8: Üç Dönemli Yeniden Birleştirilmiş, İkili Gösterime Sahip Kısa Dönem Faiz Oranı Binomial Ağaç Yapısı (Dönemler Eşit Sürelidir)



Şekil 9: Üç Dönemli Yeniden Birleştirilmiş, İkili Gösterime Sahip Fiyat Binomial Ağaç Yapısı (Dönemler Eşit Sürelidir)

Binomial modellerde yapı itibariyle üç dönemli bir faiz oranı ağacı için dört dönemli bir fiyat ağacı kurulmakta olup, fiyatları veren genel formül şu şekildedir;⁵⁰

$$P_{k,j} = [q (P_{k+1,j}) + (1 - q) (P_{k+1,j+1})] / (1 + r_{k,j}^T)$$

5.2. Trinomial Modeller

Yukarıda yer alan senaryoyu biraz değiştirerek tekrar ele alalım. Yatırımcının bu sefer gelecekteki bir zaman noktasında geçerli olan, üç kısa dönem faiz oranı tahminini yaptığını düşünelim. Bunlar sırasıyla r_u , r_d ve r_k olsun. Bu faiz oranlarının olasılıklarını yine sırasıyla q_u , q_d ve q_k ile gösterilebilir. Bu üç ihtimalin toplamı önceki bölümden de hatırlanacağı üzere yine bire eşit olacaktır ($q_u + q_d + q_k = 1$). Bu varsayımlar altında sırasıyla şu sonuca ulaşılabacaktır;

$$A_2 = 100 \text{ YTL} / (1 + R_2\tau)^2 = p_u / (1 + r_0\tau) = [100 \text{ YTL} / (1 + r_u\tau)] / (1 + r_0\tau) \text{ ya da}$$

$$A_2 = 100 \text{ YTL} / (1 + R_2\tau)^2 = p_d / (1 + r_0\tau) = [100 \text{ YTL} / (1 + r_d\tau)] / (1 + r_0\tau) \text{ ya da}$$

$$A_2 = 100 \text{ YTL} / (1 + R_2\tau)^2 = p_k / (1 + r_0\tau) = [100 \text{ YTL} / (1 + r_k\tau)] / (1 + r_0\tau) \text{ ve}$$

$$A_2(1+r_0\tau)(1+r_d\tau)(1+r_u\tau)(1+r_k\tau) - q_u(1+r_d\tau)(1+r_k\tau) - q_d(1+r_d\tau)(1+r_u\tau) - q_k(1+r_d\tau)(1+r_u\tau) = 0$$

Yukarıdaki ilk denklem birinci senaryoya uygun olarak, temelde yatırımcının faiz oranlarının gelecekte takip etmesini umduğu iki farklı durum beklentisine uygun olarak, arbitrajsız bir ortamı temsil etmektedir. İkinci denklem ise aynı esas takip edilerek, üç farklı faiz oranı beklentisi ile oluşturulmuştur. Bu ikili ya da üçlü yapıyı yine toplamı bire eşit olan, ikiden fazla “dörtlü ya da daha çoklu” olasılık modeli biçiminde geliştirmek mümkündür.

Bir r sürecinin evriminin temsil eden bir trinomial ağaç inşası iki aşamalı bir işlemdir. Bu işlem, basit olarak Hull ve White tarafından şu şekilde önerilmiştir. Öncelikle T notasyonunu bir sabit zaman ufku olarak kabul edelim. $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_N = T$ ve her i için $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ olsun. Zaman anıları t_i eşit mesafeye ihtiyaç duymasın.

⁵⁰ Buetow ve Sochacki, s.34-35-36-37-38

Ağaçtaki düğümleri (i, j) notasyonu gösterelim. Burada i , sıfırdan N 'ye zaman indeks sıralanmasını, j $j_i < 0$ 'dan $j_i < 0$ 'a mesafe indeksini gösterebilir. (i, j) üzerindeki süreç değerini $\chi_{i,j}$ ile belirtelim. Her bir t için $\chi(t) = r(t) - a(t)$ ve genişletilmiş Vasicek modelinin varyans ile ilgili formülleri hatırlandığında

$$E\{\chi(t_{i+1}) | \chi(t_i) = \chi_{i,j}\} = \chi_{i,j} e^{-a\Delta t_i} =: M_{i,j}$$

$$Var\{\chi(t_{i+1}) | \chi(t_i) = \chi_{i,j}\} = ((\sigma^2) / 2a) [1 - e^{-2a\Delta t_i}] =: V_i^2$$

$$\chi_{i,j} = j\Delta \chi_i \text{ ve}$$

$$\Delta \chi_i = V_{i-1} \sqrt{3} = \sigma[(3/2a)(1 - e^{-2a\Delta t_{i-1}})]^{1/2}$$

t_{i+1} zaman noktasında sırasıyla p_u, p_m ve p_d olasılıklarıyla, t_i zaman noktasındaki $\chi_{i,j}$ değeri ile birleşmiş süreç $\chi_{i+1, k+1}, \chi_{i+1, k}$ ya da $\chi_{i+1, k-1}$ değerlerine hareket edebilir. bu nedenle t_{i+1} zaman noktasında merkezi düğüm k -th düğüm olup burada k düzeyi seçilmiş olduğundan $\chi_{i+1, k}, M_{i,j}$ 'ye mümkün olduğu kadar yakındır.

$$k = \text{round}(M_{i,j} / \Delta \chi_{i+1})$$

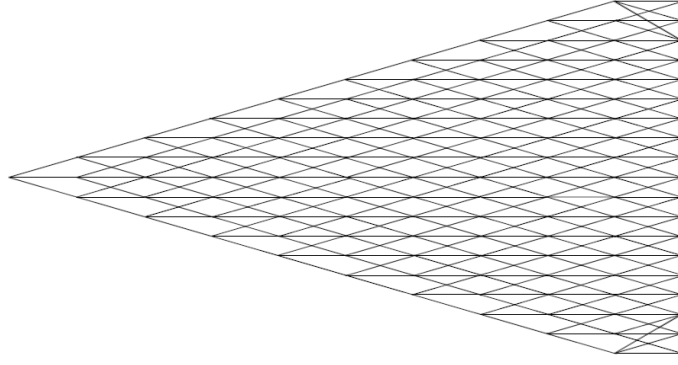
Burada “round (χ)” değeri, χ gerçek sayısına en yakın tam sayıdır. Bu tanımlama χ için bu ilk ağacın geometrisini tam olarak tanımlar. Özellikle her bir i zaman adımında j_i ve j_i^* maksimum ve minimum düzeylerinde tam olarak tanımlanmıştır. Burada p_u, p_m ve p_d olasılıkları ağaç yapısı içerisindeki değişim ve koşullu ortalama gibi elde edilebilir;

$$p_u = (1/6) + (\eta_{j,k}^2 / 6V_i^2) + (\eta_{j,k} / 2\sqrt{3} V_i)$$

$$p_m = (2/3) - (\eta_{j,k} / 3V_i^2)$$

$$p_d = (1/6) + (\eta_{j,k}^2 / 6V_i^2) - (\eta_{j,k} / 2\sqrt{3} V_i)$$

$|\eta_{j,k}| \leq V_i \sqrt{2}$ ve p_m pozitif iken $\eta_{j,k}$ 'nin her değeri için p_u ve p_d pozitiftir. k 'nın tanımlaması $|\eta_{j,k}| \leq V_i \sqrt{3}/2$ yi gerektirir ki bu nedenle de p_m pozitiftir. χ yaklaşması ağaç için bir muhtemel geometriyi şu şekilde çizilebilir;



Şekil 10: Bir Trinomial Ağaç İçin Muhtemel Geometri

Kaynak: Damiano Brigo, Fabio Mercurio, **Interest Rate Models Theory and Practice**, Germany: Springer, 2001, s.71

İnşa prosedürünün ikinci aşaması, r için uygun ağaç elde etmek için ağaç düğümlerinin yerlerini değiştirmesine dayanır. Örneğin, $t = 0$ anında analitik yer değiştirme $\alpha(0) = r(0)$ 'dır, bu nedenle t_1 vadeli sıfır kupon faizli bono fiyatı, ağaçta hesaplandığı üzere, $\exp(-r(0)t_1)$ olur ki o genel t_1 vadesi için sıfır zaman noktasındaki sürekli-bileşik faiz $R(0, t_1)$ 'lı $P^M(0, t_1) = \exp(-R(0, t_1)t_1)$ 'den farklıdır. t_i zamanında yer değiştirmeyi α_i ile gösterilir ki bu tüm (i) düğümler için ortaktır. $Q_{i,j}$ bir enstrüman ödemesinin bugünkü değerini (eğer düğüm bire ulaşırsa, ya da öteki türlü sıfıra ulaşır) gösterir. $Q_{i,j}$ ve α_i , α_0 'dan tekrarlamalı olarak hesaplanır($\alpha_0 = \ln(P^M(0, t_1)) / t_1$). α_i 'in değeri bilinir bilinmez $Q_{i+1,j}$ değerleri “ $j = \underline{j}_{i+1}, \dots, \bar{j}_{i+1}$ ” vasıtasıyla

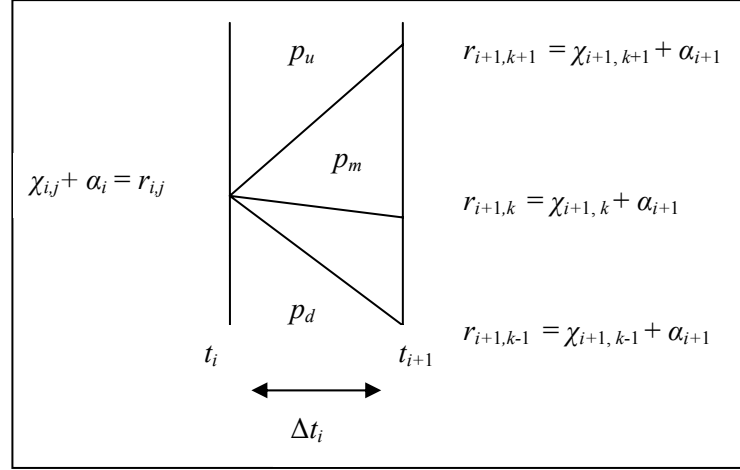
$$Q_{i+1,j} = \sum Q_{i,h} q(h,j) \exp(-(\alpha_i + h\Delta\chi_i) \Delta t_i) \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

Burada $q(h,j)$ (i,h) düğümünden $(i+1,j)$ düğümüne taşınmanın olasılığıdır. Her bir $j = \underline{j}_{i+1}, \dots, \bar{j}_{i+1}$ için $Q_{i,j}$ 'nin değeri elde edildikten sonra α_i 'nin değeri aşağıdaki denklem çözülerek hesaplanır,

$$P(0, t_{i+1}) = \sum Q_{i,j} \exp(-(\alpha_i + j\Delta\chi_i) \Delta t_i) \text{ burada } \alpha_i$$

$$\alpha_i = (1/\Delta t_i) \ln[(\sum Q_{i,j} \exp(-j\Delta\chi_i \Delta t_i)) / (P(0, t_{i+1}))]' \text{ dır}$$

Tüm bu açıklamalar ışığında trinomial ağaç geometrisini aşağıdaki şekil ile özetleyebilmek mümkündür.⁵¹



Şekil 11: t_i Anında $r_{i,j}$ 'den Başlayan r Sürecinin Evrimi ve Sırasıyla p_u , p_m ve p_d Olasılıklarıyla t_{i+1} Anında $r_{i+1,k+1}$, $r_{i+1,k}$ ve $r_{i+1,k-1}$ 'ye Hareketler

Kaynak: Damiano Brigo, Fabio Mercurio, **Interest Rate Models Theory and Practice**, Germany: Springer, 2001, s.72

Trinomial ağaç yapısında yukarıda bahsettiğimiz üç farklı dal yapılanmasına göre farklı p_u , p_m ve p_d olasılıkları hesaplanması mümkündür. Yine kullanılan tek faktör faiz oranı modeline bağlı olarak trinomial ağaç yapısının değişim gösterecektir.

6. GERÇEK OPSİYON YAKLAŞIMI VE GENİŞLETİLMİŞ NET BUGÜNKÜ DEĞER KAVRAMI

Standart indirgenmiş nakit akımları (İNA) teknikleri çoğunlukla, şirketin değerine ilişkin bütün bir yargıya rehberlik eden, geleceğe ilişkin tahmin edilmiş nakit akımlarına uygulanırlar. Burada analistler, işletmenin mali durumunun yanı sıra işletmenin varlık yaratma imkanlarını da araştırırlar. İyi bir analist bir işletmenin gizli değerini ortaya çıkaran kişi olup analistler nadiren şirketlerin spesifik projelerini, mikro düzeyde, derinlemesine analiz ederler. İşletmelerin nasıl sermaye yatırımları yaptıklarının anlaşılması çok önemli olup, İNA değerlendirme yaklaşımı bir sermaye

⁵¹ Brigo ve Mercurio, *Interest Rate Models Theory and Practice*, s.69-72

yatırımının analizinde önemli bir araçtır. Tek bir proje ya da bir bütün işletme girişiminin değerlendirilmesinde, değerlendirme süreci aynıdır. Süreç tipik olarak, gelecekteki, artan nitelikteki, nakit akımlarının tahmin edilmesi, uygun proje sermaye maliyetinin kullanılmasıyla bu akımların indirgenmesi ve yatırım masraflarının bugünkü değeriyle nakit akımlarının bugünkü değerinin karşılaştırılması olarak tarif edilir. İNA genel kabul görmüş bir uygulama olmasına rağmen, bir yatırımın gerçekçi değerlemesini tam olarak, bütünüyle yakalayamaz. Gerçek varlıklar üzerindeki pek çok yatırım, vazgeçme, genişleme ve erteleme gibi, yatırımın gelecekteki nakit akımlarını ve dolayısıyla yatırımın değerini değiştirecek çeşitli fırsatlara sahiptir. Bu opsiyonlar genellikle gelecekteki kararları bir daha gözden geçirebilme esnekliğini içerirler ki bundan dolayı finans yazınında sıklıkla yönetsel esneklik olarak adlandırılırlar. Henüz pazarda bulunmayan ürünlere ilişkin yazılım patentlerine sahip bir teknoloji firmasının değerlendirildiği bir vakada İNA yaklaşımının kullanılması halinde, analistin gelecekteki nakit akımlarını tahmin etmeye çalışması oldukça zor olacaktır. Gerçek opsiyon değerlendirme yaklaşımı (GODY), gerçek varlıklar üzerine yapılan sermaye yatırımlarının değerlendirilmesine opsiyon fiyatlandırma metodlarının uygulanması esasına dayanır. GODY geleneksel İNA yaklaşımının yerine geçen bir yaklaşım değildir. İNA yaklaşımı gerçek opsiyonların tanımlanmasında önemli bir rol oynar.⁵²

Belirsizlikler içsel ya da dışsal kaynaklı olabilir. Bunlar organizasyonel yetenekler, yasal ya da politik belirsizlikler, pazar dinamikleri, bilgi ve rekabetçi çevrenin gelişimini içeren birkaç başlıkta ele alınabilir. Gerçek opsiyon analizlerinde, her organizasyonun özel, içsel ve dışsal belirsizliklerin üstesinden gelme ve yönetme yetenekleri değerlendirilir.

Risk ve belirsizlik kavramları, genellikle birbirlerinin yerlerine kullanılmakla beraber bütünüyle farklı anlamlar içerirler. Kişiler, karar verenler gelecekteki olayların muhtemel sonuçlarını bilmekle birlikte gerçekleşme olasılıkları hakkında herhangi bir nedenle tahminde bulunamazlarsa bu durum belirsizlik olarak nitelendirilir. Risk ise, karar vericilerin olayla ilgili muhtemel tüm sonuçları bilmesi ve bu sonuçların

⁵² Don M. Chance ve Pamela P. Peterson, **Real Options and Investment Valuation**, USA:The Research Foundation of AIMR, 2002, s.1-2

gerçekleşmesi konusunda olasılıkları da tahmin edebilmesidir.⁵³ Kurumsal risk yönetiminde Marion A.Brach'e göre üç esas araç mevcuttur. Bunlar şu şekilde özetlenebilir.

Tablo 2
Üç Risk Yaklaşımı

Metot	Risk Yaklaşımı	Enstrüman
Sermaye bütçelemesi	İndirekt	İndirgeme oranı
Portföy analizi	Nispi	Seviye işareti
Opsiyon fiyatlama	Direkt	Olasılık

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1.Baskı, USA: Wiley, 2003, s.4

Sermaye bütçelemesi metodu, projelerin gelecekte yaratacakları muhtemel nakit akımlarını saptar ve nakit akımlarının algılanan riskini yansıtan, bir proje spesifik iskonto oranından bu akımları bu güne indirger. Risk indirekt (dolaylı) ölçülmüştür. Gerçekteyse, sermayenin fırsat maliyetini gösteren iskonto oranı, proje olarak değerlendirilen, aynı riski taşıyan, işlem gören menkul kıymetlerden bir yatırımcının beklediği getiri oranıdır.⁵⁴ Portföy analizinde bir portföy yöneticisi, portföyünün bütünü üzerindeki risk profiline etki edecek, projenin nisbi (görelî) risk katkısını ve yeni projenin, yeni portföyünü nasıl zenginleştireceğini, yeni projenin risk/getiri profilini tanımlamakla ilgilenir. Portföy analizlerinde, analistler portföy getirisini arttırmak ya da portföy riskini azaltmak ile ilgilenirler. Üç risk yaklaşımı içinde sadece opsiyon fiyatlama, proje bazlı risklerin bir direkt analiziyle ilgilenir ve risk olasılık yoluyla ölçülür. Yatırım opsiyonunun gelecekteki beklenen ödemesi, global iktisat, rekabetçi çevre, ürünün geliştirilmiş rekabet ya da hizmet gücü, pazar dinamiklerinin ihtimali üzerindeki kavrayış ve varsayımları, projeye birleşmiş maliyetlerin olasılık dağılımları biçiminde gösterilir.⁵⁵

⁵³ Ünal Bozkurt, **Menkul Değer Yatırımlarının Yönetimi**, İstanbul:İktisat Bankası Eğitim Yayınları, No:4, 1988, s.82-83

⁵⁴ S.C. Myers ve D.Chew Jr, **Finance Theory and Financial Strategy – The New Corporate Finance**, İkinci Basım, USA: McGraw Hill, 1998, s.119

⁵⁵ Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.3-4

Sermaye bütçeleme kapsamı içinde geleneksel proje ekspertizi, firmanın katı ve değişmez nitelikte bir yol takip ettiğini varsayar. Pazarda meydana gelen değişimler sonucunda düzeltme yapma ihtiyacını dikkate almaz. Bu metot, projenin zaman içinde değişen risk biçimi nedeniyle iskonto oranlarının değiştirilmesi gerekliliğini ihmal eder. Yine bu düşünce gelecekteki belirsizliklere tepki veren yönetsel esnekliğin değerini yok farz eder. Gerçek opsiyon analizi, değerlendirme süreci içindeki esnekliği risk ve belirsizlikle birleştirir. Buna göre gerçek opsiyon analizinde volatilité potansiyel bir yukarı çıkış faktörüdür ve bir değere sahiptir. Net bugünkü değer düşüncesinde beklenen maliyetler ve beklenen gelirler dikkate alınırken gerçek opsiyon analizinde yönetilen maliyetler ve yönetilen gelirler dikkate alınır.⁵⁶

Gerçek opsiyonlar bir düşünce şekli olup, analitik bir düşünce modelidir. Gerçek opsiyonlar finansal opsiyonlarla aynı temel esaslara dayanmaktadır. Gerçek opsiyonlarda dayanak varlık genellikle fabrika, makine, petrol ya da maden sahası yatırımı gibi projelerdir. Finansal opsiyonlarda ise dayanak varlık bono, emtia, döviz, hisse senedi gibi finansal varlıklardır. Finansal opsiyonlarda -örneğin bir menkul kıymet söz konusu olduğunda- geleceğe yönelik olarak ilgili varlığın geçmiş verilerinin varyansı dikkate alınırken, gerçek opsiyonlarda dayanak varlık organize piyasalarda işlem gören bir varlık olmadığından simülasyon tekniği ile varyans tahmini yapılabilir. Finansal opsiyonlarda varlığın getirisi üzerindeki belirsizlik varlığın piyasadaki arz ve talebinden etkilenirken, gerçek opsiyonlarda varlığın getirisi üzerindeki belirsizlik - varlık bir proje olduğundan- projeye ilgili faaliyetlerde bulunan rakiplerden etkilenmektedir.

Kullanım tarihinde bir opsiyonun değeri ilgili dayanak varlığın finansal piyasada kolaylıkla gözlenen değeri tarafından belirlenir. Bir opsiyonun bugünkü fiyatı, varlığın gelecekteki değeri üzerindeki bugünkü beklentiler tarafından saptanır. Finansal opsiyonlar için bu beklentiler, matematiksel olarak hisse senedi fiyatının bir geometrik Brownian hareketi takip ettiği düşüncesi üzerine kurulu Black-Scholes formülü ile ifade edilir. Geçmiş değişkenlik, gelecek değişkenliği gösterir. Buna göre geçmişteki yukarı yönlü artış gelecekteki yine yukarı yönlü bir artışa işaret eder. Hisse senedinin

⁵⁶ Brach, s.4-5

gelecekteki fiyatının tahmin edilebilmesi için fiyatları temsil eden matematiksel stokastik denklemlerden yararlanır. Daha değişken olan bir hisse hareketi, daha yüksek bir yukarı hareket potansiyeline işaret eder. Bu gibi bir durumda kullanım tarihindeki hisse senedinin değerinin, kullanım fiyatından daha yüksek olması ihtimali söz konusudur. Buna göre yatırımcı açısından daha fazla getiri elde edilebilir. Daha düşük değişkenliğe sahip hisse senedi için olasılık ve opsiyon fiyatı daha düşük olacaktır.⁵⁷

Gerçek opsiyonların pek çok farklı türü bulunmaktadır. Bunlar altı başlıkta özetlenebilir;

- Erteleme opsiyonları (The Option to Defer),
- Vazgeçme opsiyonları (The Option to Abandon),
- Esneklik opsiyonları (The Option to Switch),
- Genişleme opsiyonları (The Option to Expand/Contract),
- Büyüme opsiyonları (The Option to Grow),
- Aşama opsiyonları (The Option to Stage),

Gerçek opsiyonları çözümünde ise 3 yol mevcuttur.

1. Karar ağaçları,
2. Binomial–trinomial ağaçlar
3. Etki diyagramları

Opsiyon fiyatlama teknikleri ilgili varlıkların gelecek değerlerini tahmin etmezler. Bunun yerine gelecek değerlerin, iyi tanımlanmış bir süreci takip ettiklerini kabul ederler. Gerçek opsiyonlar, gerçek varlıklar üzerine kurulu olan opsiyonlar olup bu opsiyonlar karar vericiler tarafından bir projenin içerdiği, değişen koşullara yanıt veren bir fırsatlar bütünü olarak basitçe tanımlanabilir. Bu fırsatlar hakları değiştirir

⁵⁷ Brach, s.17

ama mecburiyetleri değiştirmez. Geleneksel yatırım değerleme teknikleri, yatırım için göz önünde tutan fırsatları sınırlar iken, gerçek opsiyonlar fırsatların geniş bir birleşimini takibe imkan veren güçlü mekanizmalar sağlar. Pek çok yatırım senaryosu bu bakımdan opsiyonların setleri olarak düşünölebilir.

6.1.Gerçek Opsiyonların Genel Düşünce Yapısı

Gerçek opsiyon analizi, yönetsel kavrayış ve bunun sonucunda meydana gelen esnekliği değerler. Yöneticiler, pazar koşulları hakkında daha iyi kavrayışlar sunacak kullanılabilir yeni bilgi gelinceye kadar yatırımı erteleyebilirler. Yöneticiler yatırımı genişletebilirler, küçöltebilirler, ölçek değişikliği yapabilirler ya da bütünüyle yatırımdan vazgeçebilirler. Bir ürünü, bir başka ürüne ya da bir enerji kaynağına başkasına tercih ederek kaynakları değiştirmeye karar da verebilirler. Yine yatırımcılar, yatırımın ilerleyen aşamalarında yatırımın biçimine karar verebilirler.⁵⁸ İlk gerçek opsiyon çalışması varlıkların tasfiyesi ve bir projenin terk edilmesi yoluyla yaratılan değer üzerine odaklanmıştır.⁵⁹ Bir proje vazgeçilebilir olduğunda, bir temettü ödeyen hisse senedi üzerine kurulu bir Amerikan tipi put (satım) opsiyonu ile esasen aynı niteliği taşır. Bu durum, her hangi bir zamanda bir hurda değerden varlığı (kullanım fiyatı) satma hakkını (ama zorunluluk değil) yönetime vermekte olup, bir hisse senedi temettüsüne eşit varlık tarafından üretilen nakit akımlarını temsil eder. Bu yönetsel esneklik, bir değere sahip olup, opsiyon fiyatlama teorisi kullanılarak bu değer saptana bilinir. Satımın (put'un) değeri hurda değer eksi opsiyonu kullanmak için girişilen maliyetler olup, bu varlığın satımıyla elde edilen gelirler eksi işlem maliyetleridir.⁶⁰ Gerçek varlıklara dayalı fiyatlanmış ilk alım (call) opsiyonu, bir doğal kaynak projesine (bir madenin ya da bir petrol sahasının keşfi, işletilmesi) yatırım üzerinde ele alındı.⁶¹ Bir maden ocağına sahip olma durumu, sahibine bir alım opsiyonu sunar. Bu durumun bir opsiyon olarak tanımlanmasının nedeni maden aramanın bir zorunluluk değil, bir

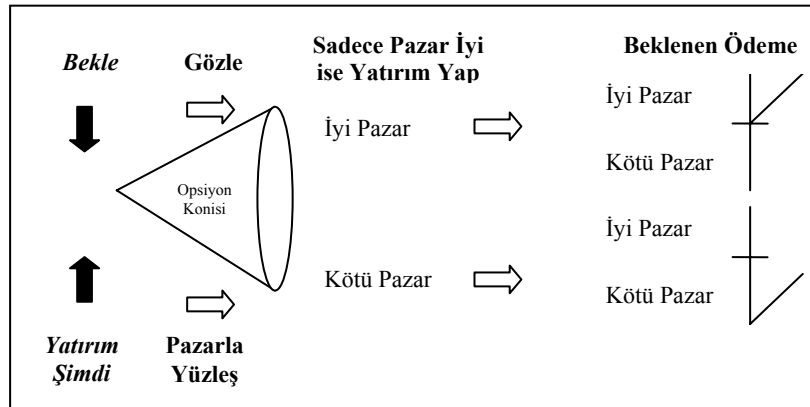
⁵⁸ Brach, s.33

⁵⁹ John Kensinger, **Project Abandonment As a Put Option:Dealing With The Capital Investment Decision and Operating Risk Using Option Pricing Theory**, USA:Cox School of Business, Working paper, October, 1980, s.80-121 ve S.C. Myers ve S.Majd, "Calculating Abandonment Value and Project Life", **Advances in Futures and Option Research**, Vol:4, No:1, (1990)

⁶⁰ Brach, s.33-34

⁶¹ M.Brennan ve E.Schwartz, "Evaluating Natural Resource Investment", **Journal of Business**, 58:135, No:2, (April 1985), s.135 ve D.Siegel, J.Smith and J.Paddock, "Valuing Offshore Oil Properties with Option Pricing Models, **Midland Corporate Finance Journal**, (Spring 1987), sayfa 22.

hak olmasından kaynaklanır. Maden ocağı dayalı alım opsiyonun değeri maliyetlere, istenen kaynaklara ve gelecekte üretilecek gelir akışını bağlıdır. Gerçek opsiyon yaklaşımında yönetimsel esneklik karar alıcıların talebin artması, talebin düşmesi, yüksek arz, ikame mallar gibi gelecekte ortaya çıkacak pazar koşullarına bağlı olarak verecekleri (genişleme, faaliyetleri yavaşlatma, işletmeyi kapatma gibi) bir dizi kararı temsil etmektedir. Yönetimsel esneklik opsiyon konisinin genişliğini etkiler. Bir maden ocağının opsiyon değeri, gelecekteki belirsizlikleri karşılayan, yönetimsel esnekliğin derecesini gösterir. Bu bakış açısının bir başka faydası beklemenin değerine ilişkindir. Geleneksel İNA yöntemi, gelecekte beklenen ödemelerin bugünkü değerinin beklenen maliyetlerinin bugünkü değerinden daha büyük olması durumunda yatırımın kısa bir zamanda yapılmasını gerektirirken, opsiyon analizi dış pazar belirsizliklerini giderecek bilginin yatırımcıya ulaşacağı zaman kadar yatırım kararının ertelenmesi suretiyle bekleyişte bir değer olduğunu tartışır (Şekil 12).



Şekil 12: Yatırım İçin Beklemenin Değeri

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.35

Geleceğin belirsizliğinde (kötü ya da iyi pazar koşulları) yatırım yapmak, ödemeler belirsiz iken kaynakların geri çevrilemez bir şekilde harcanması anlamına gelir. Pazar belirsizliğinin yeniden çözülmesine kadar yatırımın ertelenmesi ve sonra hakkın ya da opsiyonun korunması, pazar koşullarının olumlu olması durumunda yatırım yapılması sonucunu doğurur. Böylelikle kötü pazar koşulları elimine edildikten sonra bunun sonucu olarak riskin aşağı yönlü hareketi esnasında oluşan avantaj, pazarın

yukarı yönlü potansiyelinin kullanılabilmesi anlamına gelir.⁶² Majd ve Pindyck (MP) uzun süreli, aşamalı bir yatırım projesinin gidişatı esnasında yönetsel esneklik tarafından yaratılan değeri içeren bir opsiyon fiyatlama modelini ilk olarak ortaya koymuşlardır.⁶³ Onların çalışmalarında elde edilen ilk kavrayışa göre ardışık bir proje içinde, yatırım programının değeri, tamamlanmış projenin değerinin bir fonksiyonu olarak değişir. Yatırım programının değeri, projeyi tamamlamak için henüz ödenmemiş yatırım maliyeti K 'ya benzer ve uzun bir zaman dönemi olan proje yapım süresi içinde değişir. Buna göre karar alıcılar projenin her aşamasında, bir sonraki aşamaya geçebilmek için gerekli tamamlanmış projenin kritik proje değerini belirlerler. Onların çalışmalarındaki bir diğer düşünce ise tamamlanmış yatırımın kritik yatırım değerinin, paranın fırsat maliyetine bağlı olduğu ve bu değerın tamamlanmış projenin varsayılan volatilitesiyle birlikte arttığı düşüncesidir. MP'e göre inşa süresi, tamamlanma anındaki ödemenin değerini düşürmekte, artan ertelemelerin fırsat maliyeti olarak zararları artırmakta ve yatırım yapmak için kritik değeri yükseltmektedir. Gelecekteki nakit akımlarının belirsizliği veya volatilité yatırım yapmak için gerekli kritik eşiği artırırken, fırsat maliyetinin oranını azaltır. (Şekil 13).

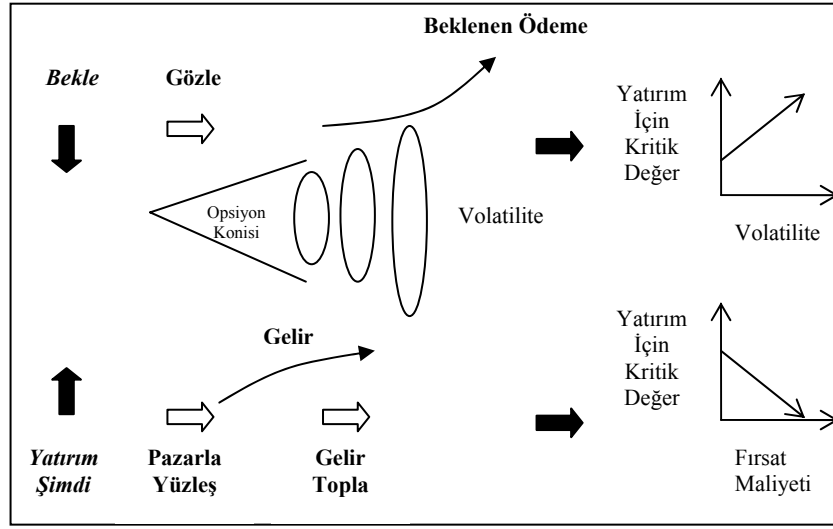
Gerçek opsiyonlarla ilgili olarak özetle şunlar söylenebilir;

1. Yatırımların bugünkü değerini etkileyen volatilité, opsiyonun değerini benzer şekilde artırır.
2. Vadeye olan sürenin uzaması, belirsizliğin artması sonucuna neden olduğundan opsiyon değerini artıran bir faktördür.
3. Yüksek yatırım maliyetleri projenin değerini azaltır. Yatırım maliyetinin erteleme ve paranın zaman değerinin artması, risksiz getiri oranını ve onun sonucu olarak opsiyon değerini artırır.⁶⁴

⁶² Brach, s.34-36

⁶³ S.Majd ve R.S.Pindyck, "Time to Build, Option Value and Investment Decision", **Journal of Industrial Economics**, Vol:18, No:7, (1987)

⁶⁴ Brach, s.35-36-37



Şekil 13: Yatırım İçin Beklerken Kritik Maliyet

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.37

6.2.Gerçek Opsiyonlar ile Finansal Opsiyonların Farklılıkları ve Benzerlikleri

Finansal opsiyonlara ve gerçek opsiyonlar arasındaki kavramsal benzerliklerin doğru anlaşılması özellikle gerçek opsiyonların doğru fiyatlanması ile doğrudan alakalı olup, aşağıdaki tabloda temel opsiyon değişkenlerine yaklaşımları mukayeseli olarak gösterilmiştir.

Tablo 3

Finansal ve Gerçek Opsiyonlar

Finansal Opsiyonlar	Değişken	Yatırım Projesi/Gerçek Opsiyonlar
Kullanım fiyatı	K	Varlığı elde etmek için maliyetler
Varlık fiyatı	S	Varlıktan elde edilecek nakit akımlarının bugünkü değeri
Vadeye olan süre	t	Opsiyon süresinin uzunluğu uygulana bilirdir
Varlık getirilerinin varyansı	σ^2	Varlığın risksizliği, en kötü ve en iyi senaryonun varyansı
Risksiz faiz oranı	r	Risksiz faiz oranı

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1.Baskı, USA: Wiley, 2003, s.43

Finansal opsiyonlar, future kontratlar, değerli metaller, dövizler, hükümet bonoları, hisse senedi endeksleri ve bireysel malların dahil olduğu dayanak varlıkların değişik ve geniş grupları üzerinde kullanılabilir durumda olup buna mukabil olarak gerçek opsiyonlar işletme işlemleri, yatırım kararları ve sermaye bütçelemesiyle uğraşır. Temelde her ikisi de yatırımlarda belirsizlik, geriye dönememe, iki ya da daha fazla alternatif arasında seçim yapma kabiliyeti gibi özelliklere sahiptir. ⁶⁵

Gerçek opsiyonlarda kararlar belirsizliğin tamamı çözülmemiş olsa bile alınmış olmalıdır. Finansal opsiyonlarda buna karşılık olarak bir bilgilendirilmiş karar vermek için gerekli tüm değişkenler bilinir ve opsiyonun hayatı boyunca gerçekleşen hareketler finansal opsiyon sahibince pasif olarak gözlenir. Gerçek opsiyonlarda ise opsiyon sahibi, ilgili varlığın hareketini etkileme ve bu suretle yukarı potansiyelin genişlemesi ya da bu potansiyelin korunması esnasında aşağı yönlü riskin hafifletilmesi esnekliğine ve yeteneğine sahiptir. Finansal opsiyonlar, bilinen bir vadeye olan süreye sahip iken gerçek opsiyonlar çoğunlukla buna sahip değildir. Örneğin bir prototipin gelişiminin ne kadar süre alacağından emin olunamaz. Finansal opsiyonlar ile gerçek opsiyonlar, opsiyon değerinin kaynağı bakımından da farklıdırlar. Finansal opsiyonlar için opsiyon değeri, kullanım fiyatı ve bu fiyatın daha yukarılara çıkma potansiyeli arasındaki sayısal fark olarak basitçe saptanabilir. Gerçek opsiyonlarda ise, değer bir bölümü; marka ismi, teknik uzmanlık, elde edilen bilgi ve deneyim, fikri mülkiyet haklarını içeren muhtemel giriş sınırlamaları, çekirdek becerinin bir sonucu olarak verilmiş firma için doğal olarak yükselir. Sıklıkla değer bir bölümü işletme dışından sağlanan hizmetlere ilişkin anlaşmalar (outsourcing) ya da lisanslama anlaşmaları, kiralamalar, sözleşmeye bağlanmış işler, alt yapı sistemi, teknoloji geliştirme programı ya da fikri haklara yapılan yatırımlar yoluyla alınır. Gerçek ve finansal opsiyonlar belirli parametrelerdeki farklı değişimleri karşılarlar. Örneğin, olgunlaşma süresi finansal opsiyonun değerini artırır. Bunun arkasında yatan sezgi, daha geniş zaman ufku ve belirsizlik nedeniyle kazancın artmasıdır. Gerçek opsiyonların değeri ile vadeye olan süre arasındaki ilişki daha karmaşıktır. ⁶⁶

⁶⁵ Brach, s.44

⁶⁶ Brach, s.44-45

Finansal opsiyonların değeri volatilité ile artar ve yüksek volatilité daha yüksek yukarı potansiyel anlamına gelir. Bu, gerçek opsiyonlar için zorunlu değildir ve pazar volatilitesi opsiyon değerini yükseltebilir. Artan teknik volatilité, gereğinden çok, opsiyon değerini uygun olarak azaltır.⁶⁷ Finansal opsiyonlar bir kaldıraç etkisi yaratabilir fakat gerçek opsiyonlar için bu çok kolay değildir. Finansal opsiyonlar, merkezi pazarlarda işlem görmekte olup likittirler. Hareketleri devamlıdır ve tüm zaman noktalarında katılımcıların tamamı tarafından gözlenebilirler. Bir gerçek varlığın değerinin ise devamlı denetlenmesi zordur. Varlığın geçmişteki hareketleri, gelecekteki değer dağılımlarının göstergesi değildir. Gerçek varlıkların likit olması durumu çok sınırlıdır ve nadiren alınıp satılırlar. Gerçek dünyada opsiyonun değeri, “mevduat hesabı gibi” bir esnek olmayan programdan elde edilen getiriye karşı, bir esnek yatırım programından elde edilen maksimum getiri arasındaki fark olarak tanımlana bilinir.⁶⁸ Finansal opsiyonlar için kullanım fiyatı sabit iken gerçek opsiyonlarda kullanım fiyatı sıklıkla sabit değildir. Gerçek opsiyonların değeri belirsiz gelecek nakit akımları ve belirsiz maliyetler arasında nasıl bir ilişki olduğuna bağlıdır.⁶⁹

Finansal ve gerçek opsiyonlar farklı kullanım kurallarına sahiptir. Örneğin bir temettü ödemeyen hisse üzerine kurulu Amerikan opsiyonu asla kullanılmaz iken gerçek opsiyonlar için kullanım kuralları bir binomial olasılık ağacının dalları olarak tanımlanmıştır. Gerçek opsiyonlarda belirsizliğin ve esnekliğin nasıl tanımlandığı konusu beklenen ödemeleri etkiler. Finansal opsiyonlarda kullanım zamanında varlık değeri açık biçimde gözlenebilir. Vadeye olan süre, kullanım fiyatı tanımlanmıştır. Gerçek opsiyonlar için zaman ufku daha uzun olmaya eğilimlidir. Varlık fiyatı ile kullanım fiyatı vadeye olan süre içinde geliştiklerinden belirsizdirler. Finansal opsiyonlar rasyonel yatırımcılar tarafından kullanılmaya eğilimlidirler. Temel olarak bir opsiyonun fiyatı, kullanım zamanında ilgili varlığın gelecekteki ödemelerini gösterir. Bu ödemeler risksiz faiz oranı vasıtasıyla bugüne indirgenerek opsiyonun bugünkü değeri bulunur. Eğer opsiyon fiyatı gelecek ödemelerin bugünkü değerinden daha

⁶⁷ A.Huchzermeyer ve C.H.Loch, **Evaluating R&D Projects as Learning Options: Why More Variability Is Not Always Better**, in H.Wildemann, ed, Production und Controlling, TCW Transfer Centrum Verlag (Çev), Münih, 1999, s.185-197

⁶⁸ L.G.Chorn ve A.Sharma, “Valuing Investments in Extension to Product Lines and Services Offering When Facing Competitive Entry”, **Fifth Real Option Conference**, USA: 30 Haziran 2001

⁶⁹ Brach, s.44-45

yüksek ya da düşükse, piyasada tanım gereği bulunmayan bir arbitraj fırsatı ortaya çıkar. Bir yeni yatırım projesinin NBD'ni saptamak için projenin iskonto oranını seçerken yöneticiler, yatırımın riskini temsil eden isteğe göre seçilmiş bir risk priminden yararlanırlar. Uygun risk oranı, yatırımcı bakımından projeyle aynı değere ve riske sahip, alım satımı yapılan, benzer nitelikte, (alacak ya da borç garantisi olan hisse senedi ya da tahvil türünden bir kağıt) bir menkul kıymetten beklenen getiri oranıdır.⁷⁰

Projeye ile benzer kabul edilen bir menkul kıymet üzerine kurulu bir opsiyon, risksiz faiz oranından risk yansız düşünce ya da arbitrajsız düşünce üzerine fiyatlanmış olmalıdır. Aksi takdirde bir arbitraj fırsatı ortaya çıkabilir. Bu nedenle gerçek opsiyonların risk yansız ödemeleri için risksiz faiz oranının kullanımı kurumsal finansın uzun süredir kabul gören bir anlayıştır. İNA-NBD anlayışından gerçek opsiyon yaklaşımına geçiş esnasında yönetim mutlaka gelecekteki varlık değeri için olasılık dağılımları elde etmeli, belirsizliğin ana etkenlerini ve riski azaltacak yönetimsel aksiyonları nasıl uygulayabileceğini planlamalıdır. Binomial opsiyon fiyatlama modeli bu çerçevede faydalı bir araçtır.⁷¹

Gerçek opsiyonlar, kararların zaman içinde değişen doğası nedeniyle rastlantısal kararlar olup, stratejik amaçlarla kullanılan bir vasıtaadır. Gerçek opsiyonların ortak bazı özellikleri hakkında şunlar söylenebilir;

1. Opsiyonun değeri, varlığın beklenen değeri eksi opsiyonun elde edilme değeri ve eksi opsiyonun kullanım fiyatıdır.
2. Varlığın değer volatilitesi ile maliyet volatilitesi arasındaki korelasyon opsiyon değerini tanımlar (ikisinden biri bunu tam olarak bunu karşılayamaz)
3. Seçimsellikten gelen maksimum avantaj opsiyon sahibine kendi opsiyonları kullanmak konusunda açık olmayı gerektirir (finansal ve organizasyonel bakımdan)

⁷⁰ R.A.Brealey ve S.C.Myers, **Principles of Corporate Finance**, 6th Ed., USA:McGraw Hill, 1996

⁷¹ Brach, s.46-47

4. Finansal opsiyonlar ayırım yapmazlar. Aynı fiyat ve değer pazardaki her katılımcı için aynıdır. Hak kazanımı, farklı organizasyonlar, yetenekler, kabiliyetler ve bunlardan dolayı gerçekleşen değişik ödemeler, olasılık dağılımları nedeniyle gerçek varlık üzerinde farklı opsiyon değerleri söz konusudur.⁷²

6.3.Temel Yönetimsel Opsiyon Türleri

Gerçek hayatta yer alan tüm yatırım proje ve kararları, farklı yapı ve değerlendirmeleri içerdiğinden, uygulayıcılar açısından karşılaşılan en önemli sorun, öncelikle, yatırım içinde var olan opsiyonun doğru bir biçimde tanımlanmasıdır. Aşağıdaki tabloda temel altı yönetimsel opsiyon formu özet bir biçimde gösterilmiştir,

Tablo 4
Gerçek Opsiyon Çeşitleri

Opsiyon Türü	Açıklama
Erteleme opsiyonu	Pazar belirsizliğini azaltacak yeni bilgi seti gelene kadar bekle
Vazgeçme opsiyonu	Karlı olmayan bir projeden kurtulma
Esneklik opsiyonu	Girdi/çıktı parametrelerini ya da hareket yolunu değiştirme
Genişleme opsiyonu	Pazar koşullarına bağlı kapasiteyi değiştirme
Büyüme opsiyonu	Gelecek ile ilişkili fırsatları göz önünde tutma
Aşama opsiyonu	Artan, koşullara bağlı adımlarda yatırımları kesme

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1.Baskı, USA: Wiley, 2003, s.67

6.3.1.Erteleme Opsiyonu

Erteleme opsiyonu daha önceki bölümlerde de kısaca bahsedildiği üzere Mc Donald ve D.Siegel'in 1985 yılında yayımladıkları çalışmalarında yer alan bir eleştiriye

⁷² Brach, s.48

dayanmaktadır.⁷³ Buna göre yatırım kararlarında geleneksel NBD yaklaşımının kullanılması durumunda, yatırım zamanlamasına ilişkin olarak, sadece pozitif değere sahip projelere yatırım yapılması gerekmekte ancak bu durum belirli olasılıklar kapsamında yatırımın başka bir tarihte yapılmasının sağlayacağı avantajları bir başka deyişle, erteleme opsiyonunu göz ardı etmektedir. Bu opsiyonlarda yatırım projelerinin başlangıç zamanı ertelemektedir. Erteleme opsiyonu temelde bir Amerikan tipi alım opsiyonu olup, opsiyonun kullanım fiyatı yatırım projesine başlamak için yatırılan para miktarıdır.⁷⁴

Erteleme opsiyonu ya da yatırım için bekleme opsiyonu, bir yatırım kararını daha fazla bilgi ulaşıncaya kadar ertelemek suretiyle belirsizliği azaltma düşüncesi üzerine kuruludur. Bir maden için, tescil edilmiş hakkı olan bir maden firması, fiyat belirsizliğine karar verinceye kadar maden aramasını ertelemek isteyebilir. Maden içeriğinin yeniden elde etme maliyeti, metal satışından geleceği umulan gelir akışı ile karşılaştırılır. Maden sahibi, maden için lisans ücreti ya da mülkiyet vergisi -bu opsiyonu canlı tutacak bir fiyattır- öder ve pazar koşulları yukarı yönlü bir kazanç potansiyelini gerçekleştirdiğinde opsiyon kullanılır. Bunu finansal terimlere çevirirsek; maden sahibi bir sürekli alım opsiyonuna sahiptir. Opsiyon sahibi her hangi bir tarihte, hiçbir sona erme tarihi olmaksızın, opsiyonu kullanabilir. Bir araç imalatçısı yeni bir araç için, yeni bir tesis inşaatını ürünün pazar performansını daha iyi anlayıncaya kadar ertelemek isteyebilir. Yöneticiler, finansal opsiyon terminolojisinde bunu Parizyen engel "*Parisian barrier*" opsiyonu olarak adlandırırlar. Parizyen engel opsiyonu (PEO), ilk kez Mark Chesney ve Paris'teki meslektaşları tarafından yaratılmış olup ilk defa 1997 yılında tanımlanmıştır.⁷⁵ Bir engel opsiyonunda opsiyon sahibine yapılan ödemeler, sadece vade tarihinde bir hisse senedi ya da ilgili varlığın değerine bağlı değildir. Ödemeler, varlığın opsiyon ömrü boyunca önceden tanımlanmış eşik(sınır) nitelikte, bir engele ulaşıp ulaşmadığına bağlıdır. Eğer hisse senedi, opsiyonun vade sonu tarihinden önce eşiği geçerse, opsiyon geçersiz hale gelir. Bir PEO ters olarak, eşik

⁷³ R.McDonald ve D.Siegel, "Investment and The Valuation of Firms There is a Option to Shut Down", **International Economic Review**, No:2, (June 1985), s.331-349

⁷⁴ Thomas E.Copeland ve Vilamidir Antikarov, **Real Options, A Practitioner's Guide**, New York, USA: Texere Publishing, 2001, s.12-13

⁷⁵ M.Chesney, M.Jeanblanc-Pique ve M.Yor, "Brownian Exursions and Parisien Barrier Options", **Advances in Applied Probability**, Vol:29, No:165, (1997)

aşılınca kendi değerini kaybetmez. Eğer uzun süreli zaman dönemi için önceden belirlenmiş daha aşağı ya da daha yukarı nitelikteki eşik aşılsa, opsiyon değerini kaybeder ve geçersiz olur. Bir sürekli PEO’na sahip bir araba üreticisi düşünüldüğünde, uzun süreli bir zaman dönemi için, üretim tesisi inşasına yönelik olarak, yeni araba modeli üretimi için eşik araç talebidir. Bu eşik araba talebi aşılsa opsiyon kullanılacaktır. Alternatif olarak, eğer talep bu uzun süreli zaman dönemi içinde, belirlenmiş eşiğin altına düşerse, üretim tesisi inşasına yönelik PEO değersiz olacak ve tesis inşa edilmeyecektir. Bu düşünceye göre, tanımlanmış zaman dönemi “pencere” içinde ilgili varlığın değeri belirlenmiş düzeylerin altına düşerse opsiyon geçersiz olur.

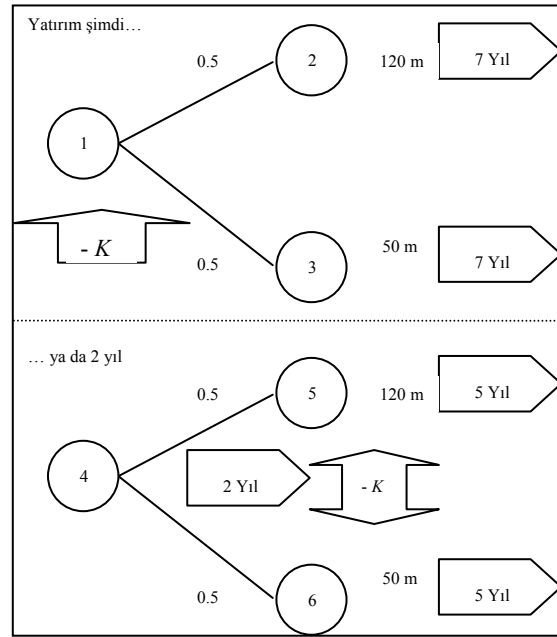
76

Teknik belirsizlik pazar belirsizliğine kıyasen bekleyerek kısmen çözülebilir. Eğer teknik belirsizlik doğası itibariyle bütünüyle özel ise, ilgili firmanın içsel teknik yetenek ve başarı kabiliyeti tarafından yönetilir. Bu durumda belirsizliğin bekleme ile çözülemesi sözkonusu olmaz. Araba üreticisi örneğinde varsayımlar, tesis inşasının maliyetleri için gelecekteki pazar büyüklüğüyle ilişkili yatırım kararını yönetirler. Bu tür bir kararda maliyetlerin fırsat maliyetlerini içerdiği unutulmamalıdır. Buna göre tesis için gerekli olan para, eğer tesis inşa edilmezse en azından faiz kazanabilir. Bu düşünce yine benzer şekilde, alternatif projelerin varlığı durumunda bu projelerin ayrıca dikkate alınması gerekli kılmaktadır. Bu çalışma biçimi interaktif opsiyonlar ve portföy yönetim düşüncesi ile bağlantılıdır. Tesisin inşa edilmemesi üretimin dış kaynaklarla sağlanmasını gerektirdiği hallerde kurum içindekinden daha yüksek değişken maliyetlere neden olur. Örneğimizde, firma yönetimi, bugünden iki yıl sonrasında pazarın daha doğru değerlendirileceğini, bu ilave zamanın yeni aracın talebine bağlı belirsizlikleri gidererek tesis inşası konusunda daha isabetli bir karar verileceğine inanmaktadır. Bu gibi bir durumda yatırım kararının iki yıl için ertelemesinin opsiyon değeri nedir? Daha önemlisi, hangi senaryolar altında opsiyon paradadır (karlıdır) ? Yeni bir tesise için yatırım eşikleri nelerdir ve erteleme opsiyonu ne zaman para dışına (zarar durumuna geçer) hareket eder ? Bu sorulara cevap verebilmek için araba üreticisi örneğimize ilave bazı varsayımları gündeme getirmemiz gerekmektedir. Pratik bir örnek için şu varsayımları yapmak faydalı olacaktır;

⁷⁶ Brach, s.68-69

- Tesis inşası 30 milyon \$ ile 50 milyon \$ arasındadır,
- Fırsat maliyeti % 7'dir,
- Yönetim iki yıl içinde pazar yönünün ileriye gideceğini bilmektedir: en kötü senaryoda ürün yıllık 50 milyon \$'dan daha fazla yapacaktır ve bu tutar en iyi senaryoda 120 milyon \$ kadar çıkmaktadır.
- Ürünün dış kaynak kullanımı (outsourcing), gelirlerin % 10'u ile % 20'si arasında bir ekstra maliyet oluşturacaktır.

Bu varsayımları bir binomial ağaç üzerinde şu şekilde gösterebiliriz. (Şekil 14)



Şekil 14: Erteleme Opsiyonun Binomial Varlık Ağacı

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.71

Yönetim tesisi şimdi inşa edebilir. Bu durumda yedi yıl içinde 50 ila 120 milyon \$ arasında her hangi bir noktadaki tüm gelir akışını elde edecektir. Yönetim iki yıl için tesis inşa kararını erteleyebilir. Buna göre yönetim bu zaman zarfında bazı belirsizlikler ortadan kalkacaktır. Yönetim bu süre içinde ileriye doğru en iyi hareket tarzının ne olduğuna karar verebilmek daha fazla bilgiye sahip olacaktır. Bu durumda

ilgili sürenin sonrasındaki gelir akışı dikkate alınır. Dış kaynaklamaya bağlı olarak, beklenen gelirin bugünkü değeri, tesisin inşası için umulan yatırım maliyetlerinden daha yüksek ise yönetim yatırım yapacaktır. Bu durumda pazar belirsizliği çözülmünceye kadar, iki yıl için kararın ertelemeinin değeri ne olduğu sorusu ortaya çıkacaktır. Yukarıdaki şekilden de anlaşılacağı üzere örnekte varsayımsal olarak en iyi ve en kötü senaryoların gelecekteki nakit akışlarının olasılığı % 50 kabul edilmiştir. Yine ürün için yedi yıllık bir pazar ve % 10 ile % 20 arasında değişen bir dış kaynak kullanım maliyeti varsayımsal olarak kabul edilmiştir. Burada öncelikle, yatırımı hemen yapma seçeneğinin opsiyon değeri hesaplanmalıdır. Beklenen değer için en iyi ve en kötü senaryolar altında dış kaynak kullanımına bağlı olarak yedi yıl içinde elde edilmesi beklenen gelirin 2/3'üncü düğümlerindeki bugünkü değeri saptanır. Yedi yıllık süre içinde elde edilmesi umulan gelirler kurumsal sermaye maliyeti (% 15) dikkate alınarak bugüne indirgenir. Bu veriler Tablo 5'te özetlenmiştir.⁷⁷

Tablo 5
Yatırımı Şimdi Yapmanın Opsiyon Değeri

Pay (%)	Varlığın Bugünkü Değeri		Beklenen Değer (milyon \$)
	50 (milyon \$)	120 (milyon \$)	
10	26.48	63.56	45.02
15	39.72	95.34	67.53
20	52.97	127.12	90.04

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.72

Tesise şimdi yatırım yapma seçeneği, yönetiminin dış kaynak kullanım maliyetlerinden kurtulacaktır. Tesise şimdi yatırım yapmama seçeneği ise, dış kaynak kullanım maliyetlerinin dikkate alındığı gelirler anlamına gelir. Bir alım opsiyonunun değeri, tesise yatırım yapılarak dış kaynak kullanımını üzerinden tasarruf edilen para miktarı tarafından yönetilir. Bu tasarruflar, en iyi ya da en kötü vaka ödeme senaryosu ve yüzde olarak ($x\%$) gösterilen ürünün beklenen dış kaynak kullanım payı olarak

⁷⁷ Brach, s.70-71-72

hesaplanır. Alım opsiyonunun kullanım fiyatı, üretim tesisini inşa için gerekli K yatırım maliyetidir. Alım opsiyonunun değeri sıfırdan ya daha geniştir ya da daima sifıra eşittir.

$$C = \text{Max} [0, ((p \times V_{\max} + (1 - p) \times V_{\min}) / (1 + r_f)^2) - K(1 + r_{AOSM})^2]$$

p açıklandığı üzere, risksiz olasılığı göstermekte olup aşağıdaki formül ile hesaplanır. Burada V_e beklenen varlık değerini, $V_{\min}$ en kötü vaka senaryosunda ulaşılan değeri, $V_{\max}$ en iyi vaka senaryosunda ulaşılan değeri temsil eder.

$$p = [(r_f V_e) - V_{\min}] / (V_{\max} - V_{\min})$$

% 10 dışsal kaynak kullanım payı ve % 7'lik bir risksiz faiz oranı için, p 0.59'dur

$$p = [(1 + \% 7) - 45.02] / (63.56 - 26.48) = 0.59$$

% 10 dış kaynaklama payı için, 30 ya da 50 milyon \$'lık bir K için alım opsiyonunun değeri şu şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} C_{30} &= \text{Max} [0, ((0.59 \times 63.56 + (1 - 0.59) \times 26.48) / (1.07)^2) - 30 \times (1 + \% 7)^2] \\ &= \text{Max} [0, 7.21] = 7.21 \end{aligned}$$

30 milyon \$'lık bir K yatırım maliyeti için değer maksimize kararı, tesisin inşasıdır.

$$\begin{aligned} C_{50} &= \text{Max} [0, ((0.59 \times 63.56 + (1 - 0.59) \times 26.48) / (1.07)^2) - 50 \times (1 + \% 7)^2] \\ &= \text{Max} [0, -10.12] = 0 \end{aligned}$$

50 milyon \$'lık bir K yatırım maliyeti için, değer maksimize kararı tesisin inşa edilmemesidir. Bugün yatırım yapma opsiyonu, eğer tesis maliyeti 50 milyon \$ ve dışsal kaynak kullanım payı % 10 ise para dışındadır (zarardadır). Bugün yatırım yapma opsiyonu, maliyetler 30 milyon \$'a yaklaştığında ya da dış kaynak kullanım payı % 10'nun üzerine çıktığında parada olma (kar) durumuna doğru hareket eder. Bu koşullar altında yatırım için kritik maliyet K^* maliyet olarak tanımlanmıştır. Bu maliyet, para dışındaki (zarardaki) opsiyona hareket eder ve opsiyon değeri sifıra yaklaşır. K^* sifıra

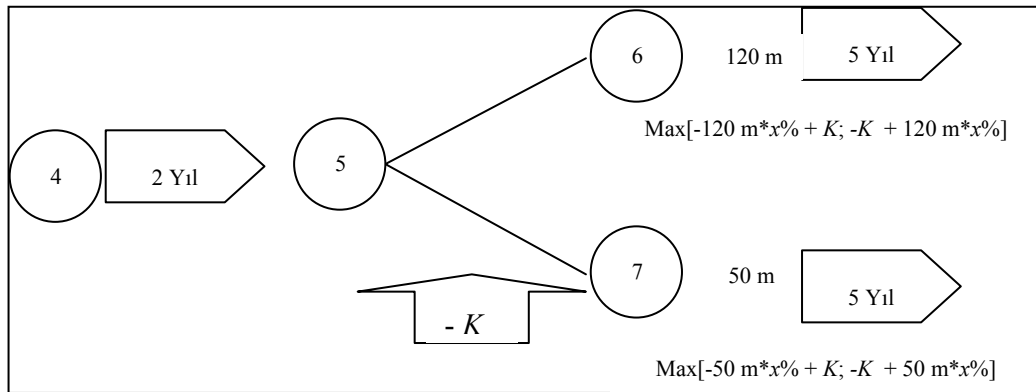
eşit bir alım opsiyonu denklemi vasıtasıyla hesaplanır. (Bu konuda Excel’de hedef arama fonksiyonu ya da çözücü kullanılabilir)

$$C = ((p \times \% V_{max} + (1 - p) \times \% V_{min}) / (1 + r_f)^2) - K^* (1 + r)^2 = 0$$

Örneğin, % 10 dış kaynak kullanım payı için şu denklem elde edilir

$$C = ((0.59 \times 63.54 + (1 - 0.59) \times 26.48) / (1.07)^2) - K^* (1 + \% 7)^2 = 0$$

Bu denklem çözüldüğünde K^* için 36.24 milyon \$ değerine ulaşılır. Eğer yönetim yatırım kararını iki yıllık bir süre için ertelerse, yönetim ürünün pazar kabulünün daha iyi bir kavrayışına sahip olacağından, pazar belirsizliğinin çoğu çözülmüş olacaktır. Böylelikle yönetim sonraki mümkün satış verilerine bağlı olarak tesis inşa edip, etmemeyi daha iyi bilgilendirilmiş bir karar olarak verebilecektir. Eğer iyi senaryo gerçekleşir ve yüksek ürün talebi söz konusu olur ise, yönetim tesisi inşa edecektir. Eğer kötü senaryo gerçekleşir ve düşük ürün talebi söz konusu olursa, yönetim ürünü dış kaynak kullanımı vasıtasıyla üretmeye devam edecek ve yeni tesis inşa fikrinden vazgeçecektir. Bu durumu aşağıdaki şekil ile daha iyi tasvir edebiliriz.



Şekil 15: Erteleme Kararı İçin Binomial Varlık Ağacı

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.75

Eğer bugünden itibaren iki yıl içinde ürün yıllık 120 milyon \$ üretirse (6.düğüm), yönetim bu gelir akışı üzerindeki dış kaynak kullanım pay ödemesinin daha iyi olup olmayacağını ya da K yatırım maliyetini ödeyerek tesis inşasının daha iyi olup olmayacağını karar verecektir. Eğer ürün yıllık 50 milyon \$ gelir üretirse (7.düğüm)

yönetim benzer bir hesaplama yapacak, ileriki değer maksimizasyonu ve maliyet minimizasyonu yolunu saptayacaktır. Aşağıdaki tabloda her bir ödeme senaryosu için % 50 olasılık varsayılarak, farklı senaryolar altındaki 6/7'inci düğümlerde kalan beş yıl için önceden belirlenmiş gelirlerin değerleri gösterilmektedir.⁷⁸

Tablo 6
Yatırımı Sonra Yapmanın Opsiyon Değeri

Pay (%)	Varlığın Bugünkü Değeri		Beklenen Değer
	50 (milyon \$)	120 (milyon \$)	(milyon \$)
10	20.23	48.55	34.39
15	30.34	72.83	51.59
20	40.46	97.10	68.78

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.75

İlgili tesis maliyetinin 5 milyon \$ olacağı varsayımı altında eğer gelir akışı % 15 dağıtım payında 120 milyon \$ ise, önceden belirlenmiş gelirin bugünkü değeri 72.83 milyon \$ olacak olup maliyet minimizasyonu ve değer maksimizasyonu kararı tesisin inşası yönünde olacaktır. Yönetim 50 milyon \$ yatıracak ve dış kaynak kullanım maliyetleri dikkate alındığında 72.83 milyon \$ kazanacaktır ($- 57 \text{ milyon \$} + 72.83 \text{ milyon \$} > - 72.83 \text{ milyon \$} + 50 \text{ milyon \$}$). Eğer, gelirler 50 milyon \$ olursa, önceden belirlenmiş gelirin bugünkü değeri, % 15 dış kaynaklama payında 30.34 milyon \$ olacaktır. Buna göre yönetim tesis için 57 milyon \$ bugünkü değerden daha fazla para harcamayacaktır ($- 57 \text{ milyon \$} + 30.34 \text{ milyon \$} > - 30.34 \text{ milyon \$} + 57 \text{ milyon \$}$). Her bir senaryo için her düğümde optimum karar saptanarak, en iyi ve en kötü vaka senaryolarının eşit olduğu varsayımı altında, maliyet minimizasyonu yoluyla beklenen değer hesaplanır. (Tablo 7)

⁷⁸ Brach, s.72-73-74-75

Tablo 7

Yatırım Kararı Ertelendiğinde Maliyet Tasarrufları

Pay (%)	Temel Vaka Durumu		En Kötü Vaka Durumu		Beklenen Değer	
	$K = 50m$ (\$)	$K = 30m$ (\$)	$K = 50m$ (\$)	$K = 30m$ (\$)	$K = 50m$ (\$)	$K = 30m$ (\$)
10	9.23	13.88	37.55	14.44	23.39	14.16
15	15.05	38.16	27.44	4.33	21.25	21.25
20	39.32	62.43	17.32	5.79	28.32	34.11

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.76

En iyi ve en kötü vaka senaryoları için beklenen değer, her bir senaryo için risksiz olasılık p 'nin hesaplanmasında kullanılır. Bu daha sonra 4.düğümdeki opsiyon değerini hesaplamaya imkan tanır.

$$C = (p \times \% V_{max} + (1 - p) \times \% V_{min}) / (1 + r_f)^2$$

Bu durumdan iki çıkarım yapabilmek mümkündür. İlki iki yıl içinde karar verme opsiyonu daima paradadır (kardadır). Bu sezgi yönetimin, iki yıl içinde daha fazla bilgiye sahip olacağına (daha az belirsizliğin var olacağına) ve değer maksimizasyonunu tanımlamak için daha iyi bir pozisyonun varlığına işaret eder. Bekleme opsiyonunun değeri, daha ileri bilgi setinin elde edilmesinden kaynaklanan sonuçların ödeme asimetriklerinin kökleridir. İkinci olarak, opsiyon değeri düşük maliyet senaryosu altında % 10 dış kaynak kullanım payı için en düşük düzeydedir. Bu senaryoda, en iyi ve en kötü vaka gelir senaryolarındaki iki stratejik yönetimsel opsiyon arasındaki fark en düşük düzeydedir. Opsiyon değeri en düşük tesis maliyeti ve en yüksek dağıtım payı için en yüksek noktadır. İki stratejik opsiyon arasındaki maliyet-tasarruf farkı en geniş düzeydedir ve değeri 56 milyon \$'dır. Bu örnekte yönetimsel

esnekliğe sahip olma, firma için en büyük değerdir. Kararı erteleme yoluyla yönetim tesisi inşa etmeyerek yüksek maliyetlerden tasarruf eder.

Bu noktada şu soru karşımıza çıkar; kararı ertelemenin değeri nedir ? Kararı ertelemenin değeri, iki yıl içinde yatırım yapma opsiyonunun değeri eksi kullanım fiyatıdır. Ertelenebilir kullanım fiyatı, karar zamanı (bu örnekte iki yıllık ertelemedir) için dış kaynak kullanımına bağlı önceden belirlenmiş gelirdir. Örneğin eğer tesis maliyetleri 50 milyon \$ ve dış kaynak kullanım payı % 10 ise şimdi yatırım yapma değeri sıfırdır. İki yıl içinde yatırım yapma opsiyonunun şimdiki değeri 15.24 milyon \$'dır. Erteleme yoluyla beklenen gelir akışının % 10'nu dış kaynak kullanımıdır. Buna bağlı olarak belirlenmiş gelirlerin kaybı iki yıllık bir dönem içinde gerçekleşir. Dördüncü düğümde bu tutar erteleme opsiyonu için kullanım fiyatı 13.82 milyon \$'dır. Kurumsal sermaye maliyetinden iki yıl indirildiğinde bu tutar 10.45 milyon \$ olarak hesaplanır. Erteleme opsiyonunun değeri buna göre 15.24 milyon \$ - 0 milyon \$ -10.45 milyon \$ = 1.42 milyon \$'dır. Tablo 8, farklı dış kaynak kullanım oranları ve gelir senaryoları için yatırımın iki yıl için ertelenebilir olması durumunda dış kaynak kullanımına bağlı önceden belirlenmiş gelirlerin bugünkü değerini özetler.

Tablo 8
Yatırım Kararını Ertelemenin Fırsat Maliyeti

Pay (%)	50 (milyon \$)	120 (milyon \$)	Beklenen (milyon \$)
10	8.13	19.51	13.82
15	12.19	29.26	20.73
20	26.26	39.02	32.64

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.77

Daha düşük maliyet ($K = 30$) için ertelenebilir opsiyon değeri, dış kaynak kullanım oranı artışıyla aynı derecede artar. Burada, kullanım fiyatı dış kaynak kullanım oranı ile aynı derecede artan nitelikteki gelecekteki varlık değerinden daha yavaş artar. Buna zıt olarak, yüksek maliyetli senaryo için, durum tersine döner; burada kullanım fiyatı dış kaynaklama oranı ile aynı derece artan gelecekteki varlık fiyatından daha hızlı

yükselir. Erteleme opsiyonu, yüksek maliyet ve yüksek dış kaynak kullanım oranı için para dışındayken (zararda) diğer tüm koşullar için paradadır (kardadır). Yönetim en muhtemel senaryoların ne olacağını belirlemelidir. Erteleme opsiyonu, altı senaryonun beşinde paradadır (kardadır). Para dışındaki (zarardaki) senaryo olmadıkça, bu durum ileriye dönük değer maksimizasyon yolu olarak görünebilir. Bu analizde sorulabilecek bir diğer soru para dışına ya da içine hareket eden ertelenebilir opsiyon için kritik eşik ne olduğudur? Ertelenebilir opsiyon değeri paradadır, iki değer arasındaki farktır; iki yıl içinde yatırım yapmanın bugünkü değeri C_2 , eksi ertelenebilir dönem boyunca dış kaynak kullanımı vasıtasıyla belirlenmiş gelir BG eşittir bugün yatırım yapmanın opsiyon değerine C_1 . Eğer önceki, sonrakinden daha geniş ise, opsiyon para içine hareket eder. Bu nedenle $C_2 - BG = C_1$ denkleminin çözülmesi gerekir. Şimdi ya da erteleme arasındaki kritik eşikleri tanımlayan bir verilmiş senaryo altındaki dış kaynak kullanımı oranına bakılabileceği gibi dış kaynak kullanımını değiştirmek mümkündür. Yatırımı yapma ile erteleme arasındaki sınırları tanımlayan kritik eşikleri belirleyen K kritik tesis maliyeti için her koşul çözümlenmelidir. Örneğin;⁷⁹

$$P_2 \text{ Max}[10 V_{\max} - K; K - 10 V_{\max}] + (1 - p_2) \text{ Max}[10 V_{\min} - K; K - 10 V_{\min}] \text{ BGBG} =$$

$$P_1 \text{ Max}[10 V_{\max} - K; K - 10 V_{\max}] + (1 - p_1) \text{ Max}[10 V_{\min} - K; K - 10 V_{\min}]$$

Eğer bir proje üzerindeki nakit akışlarının bugünkü değeri volatil ise, zaman üzerinde değişebiliyorsa, bugün negatif net bugünkü değere sahip bir proje gelecekte pozitif bir net bugünkü değere sahip olabilir. Bir firma bugün pozitif net bugünkü değere sahip olan bir proje üzerinde beklemek suretiyle kazanç elde edebilir. Burada bir zaman primine sahip opsiyon, projenin sonraki dönemde kabul edilmesi suretiyle üretilebilecek nakit akışlarını aşar. Projeler tipik olarak, analiz zamanındaki faiz oranları ve projelerin beklenen nakit akışları üzerinde analiz edilirler. Beklenen nakit akımları ve iskonto oranları zaman içinde değişir. Buna bağlı olarak net bugünkü değer de değişir. Gelecekte pozitif net bugünkü değere sahip olabilecek bir proje bugün negatif net bugünkü değere sahip olabilir. Bir projenin yasal kısıtlamalar ya da rakiplerin girişine yönelik diğer engeller nedeniyle, projenin sadece firma tarafından uygulamaya

⁷⁹ Brach, s.77-78-79

alınabileceği bir ortamda, zaman içinde proje değerindeki değişimler bir alım opsiyonun özelliklerini verir.⁸⁰

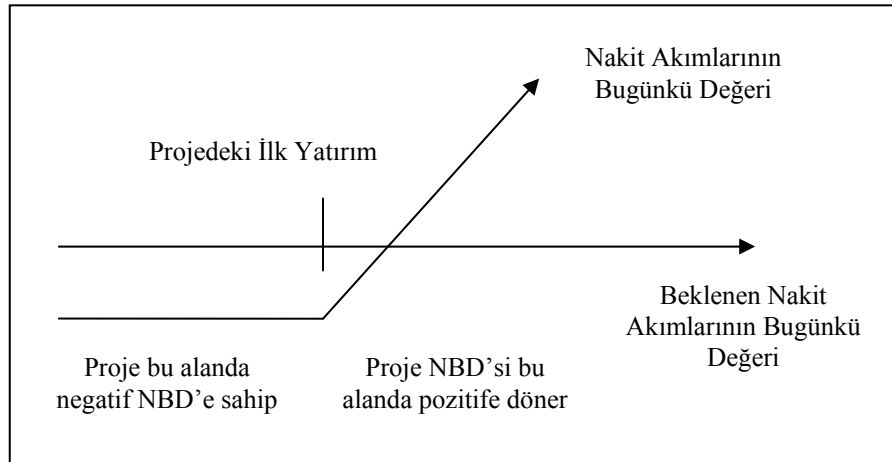
Erteleme opsiyonu üzerindeki ödemeleri şu şekilde de açıklayabilmek mümkündür. Bir projenin yukarı yönlü ilk yatırımını X ile, projeye yatırım yapılmasından başlayarak beklenen nakit akışlarının bugünkü değerini V ile gösterirsek projenin net bugünkü değeri bu iki parametre arasındaki farktır;

$$NBD = V - X$$

Eğer $V > X$ ise projeye yatırım yap: Proje pozitif bir net bugünkü değere sahiptir.

Eğer $V < X$ ise projeye yatırım yapma: Proje negatif bir net bugünkü değere sahiptir.

Aşağıdaki şekilde yukarıdaki ilişki, bir projenin özel haklarına sahip firmanın ilgili dönemin sonuna kadar elinde tuttuğu haklar, projenin nakit akışları bir ödeme diyagramı içinde gösterilmiştir. (Şekil 16)



Şekil 16: Bir Projeyi Erteleme Opsiyonu

Kaynak: Aswath Damadoran, **Investment Valuation**, USA: Wiley, 2001, s.773

Bu diyagram bir alım opsiyonu göstermekte olup, burada ilgili varlık projenin kendisidir. Opsiyonun hedef fiyatı projeyi almak için gerekli olan yatırımdır ve

⁸⁰ Aswath Damadoran, **Investment Valuation**, Second Edition, New York, USA: John Wiley&Sons Inc December 2001, s.772-773

opsiyonun ömrü ise firmanın projenin haklarına sahip olduğu dönemdir. Proje üzerindeki nakit akımlarının bugünkü değeri ve bu beklenen değerdeki beklenen varyans, ilgili varlığın varyansını ve değerini betimler. Bir erteleme opsiyonun değerlendirilmesinde söz konusu olan veriler, herhangi bir opsiyon için geçerli olan verilerden farklı değildir. Bunlar; varlığın değeri, değerdeki varyans, opsiyonun vadesine olan süre, hedef fiyat, risksiz faiz oranı ve temettüdür.

Ürün opsiyonlarında varlığın değeri, söz konusu projeye ilişkin olarak firmanın sahip olduğu haklardır. Varlığın cari değeri, projenin yukarı yönlü yatırımı dahil, projenin başlamasından itibaren elde edilmesi beklenen nakit akışlarının bugünkü değeridir. Bu değer standart bir yatırım analizi yapılarak elde edilebilir. Bununla birlikte nakit akışları tahminlerinde ve bugünkü değerde önemli bir hata miktarı bulunabilir. Bu belirsizlik, proje erteleme opsiyonun bir değere sahip olmasının nedeni olarak görülebilir. Eğer proje üzerindeki beklenen nakit akımları kesinlikle biliniyorsa ve değişmesi de beklenmiyorsa, bir opsiyon fiyatlama kurgusunun kabul edilmesine gerek olmayabilir (opsiyonun değeri olmayabilir). Varlığın değerindeki varyans bir diğer önemli parametredir. Söz konusu proje için nakit akım tahminleri önemli bir miktar belirsizlik ve projenin değerini ölçen bugünkü değer ile birleşmiş olabilir. Bu kısmen ürün için potansiyel pazarın bilinmemesinden kısmen de teknolojik değişimlerin ürün karlılığını ve maliyet yapısını değiştirebilmesinden kaynaklanır. Projenin nakit akımları üzerindeki varyansın tahmin edilebilmesinin üç yolu vardır.

1. Eğer geçmişte benzer projelere yatırım yapıldı ise, bu projelerden elde edilen nakit akımlarının varyansı bir tahmin olarak kullanılabilir.
2. Çeşitli pazar senaryoları için olasılıklar ve her bir senaryo için bugünkü değer saptanabilir. Buna uygun olarak daha sonra bugünkü değerler içinden varyans hesaplanır.
3. Aynı iş alanıyla ilgili firmaların değerindeki varyans, projenin varyansının bir tahmini olarak kullanılabilir.

Bir opsiyonun değeri nakit akımlarındaki varyanstan geniş bir biçimde çıkartılabilir; daha yüksek varyans, daha yüksek bir erteleme opsiyon değeridir. Bu

nedenle durağan bir iş kolunda bir projeye yatırım yapma opsiyonun değeri pazarın, teknolojinin ve rekabetin hızlı bir biçimde değiştiği bir çevreye kıyasen daha az önemli olacaktır. Bir proje erteleme opsiyon üzerindeki kullanım fiyatı, firmanın yatırıma karar vermesine yönelik olarak sahip olduğu haklara işaret eder. Bu ilk yatırımın yapılmasının maliyeti opsiyonun kullanım fiyatıdır. Proje erteleme opsiyonu projenin haklarının yürürlükten kalktığı zaman geçersiz olur. Eğer bir firma proje ya da ürün üzerinde bir rekabet avantajına sahip ise opsiyon vadesi avantajın elde tutulabileceği beklenen süre olarak tanımlanabilir. Erteleme maliyeti dikkate alındığında, Amerikan tipi opsiyonların genellikle vadelerinden evvel kullanılmadıkları dikkate alınmalıdır. NBD pozitifte döndüğü zaman projeye yatırım yapmayı erteleme maliyeti vardır. Eğer ilave bir dönem beklenirse ve bu varyans değerini daha yükseğe çıkarıyorsa (ama ayrıca rekabete karşı korumanın bir dönemini kaybettiriyorsa) belki bir kazanç elde edilebilir. Analiz yapılırken bu maliyet dikkate alınması gerektiğinden, bu unsuru tahmin etmenin iki yolu bilinmelidir. Bunlar şu şekilde özetlenebilir;

1. Eğer nakit akışları zaman içinde düzenli olarak dağılıyorsa örneğin patent süresi n yıl ise yıllık erteleme maliyeti = $1 / n$ 'dir
2. Eğer nakit akışları düzenli değil ise, erteleme maliyeti bugünkü değer yüzdesi olarak bir sonraki dönem içinde meydana gelmesi beklenebilecek nakit akımlarının süresi bağlı olarak daha genel olarak tanımlanabilir.

$$\text{Yıllık erteleme maliyeti} = \text{Nakit akımı}_{\text{sonraki dönem}} / \text{Bugünkü değer}_{\text{şimdi}}^{81}$$

Çeşitli projelere gömülü olan erteleme opsiyonlarının değerlendirilmesinde, opsiyon fiyatlama modelinin kullanımıyla birleşmiş birkaç problem mevcuttur. İlki, proje alınıp satılmıyorsa ilgili varlığın değerinin ve varyansının tahmin edilmesinin zor olmasıdır. Bu değer proje için iskonto oranı ve beklenen nakit akımlarından elde edilerek (fakat hatalı olarak) tahmin edilebilir. Varyansın tahmin edilmesi ise daha zordur. İkinci olarak, zaman üzerindeki fiyatların davranışı, opsiyon fiyatlama modelleri vasıtasıyla varsayılan değerlendirme yöntemi ile uyuşmayabilir. Özellikle, değer takip

⁸¹ Damadoran, *Investment Valuation*, s.774-775-776

ettiği bir difüzyon süreci ve değerdeki varyans, zaman içinde değişmeden kalabilir. Örneğin, ani bir teknolojik değişim projenin değerini ya negatif ya da pozitif olarak değiştirir. Üçüncü olarak, proje haklarına sahip firma için özel bir dönem olmayabilir. Bir patent vakasından farklı olarak, saptanmış bir dönemde patenti alınmış ürün üretimi için firma özel bir hakka sahip olduğundan, kendi grubuna münhasır olma ve zaman hasebiyle firma hakları sıklıkla daha az bir açıklıkla tanımlanmıştır. Perakendecilikte güçlü bir markaya sahip firma buna örnek olabilir. Haklar yasal kısıtlamalar değildir ama zaman içinde yıpranma gösterirler. Bazı durumlarda projenin beklenen yaşam süresi belirsizdir ve sadece bir tahmindir. İronik olarak, opsiyonun süresi hakkındaki belirsizlik bugünkü değerdeki varyansı ve bu suretle projenin haklarının beklenen değerini artırır.⁸²

Bir proje erteleme opsiyonunun analizinde ortaya çıkan birkaç ilgi çekici konu vardır. Öncelikle, proje beklenen nakit akımları temelinde bir negatif değere sahip olmakla birlikte opsiyon hakları halen değerlendirilebilir nitelikte olabilir. İkincisi, bir proje pozitif net bugünkü değere sahip olabilir ama hemen kullanılmayabilir. Bunun nedeni firmanın gelecekteki bir dönemde projeyi kabul etme ya da erteleme suretiyle kazanç elde edebilmesidir. Aynı nedenlerle yatırımcılar paradaki (kardaki) bir opsiyonu kullanmayabilirler. Örneğin bir firma bilgisayar sistemleri için yeni bir tür disk sürücünün üretim patent haklarına sahip olsun. Firma yönetimi bu ürünü üretme amacıyla yeni bir tesis inşa etmek istemektedir. Yapılan analizler sonucunda yatırımın bir pozitif NBD'e işaret ettiğini varsayalım. Eğer disk sürücü üretim teknolojisi değişkense firma yatırımını ileri teknolojinin beklenen nakit akımlarının ve buna bağlı olarak projenin değerinin artacağı bir durumu düşünerek projeyi erteleyebilir. Üçüncü olarak bazen faktörler bir statik analiz içinde (bu analiz projeyi daha değerli yapacak haklar oluşturabilecektir) projeyi daha az çekici yapabilir. Aşırı getirilerin ve potansiyel pazarın büyüklükleri hakkındaki belirsizliğin etkisi buna örnek verilebilir. Statik bir analizde, belirsizliğin artması projenin riskliliğini artırır ve onu daha az çekici hale getirir. Projenin bir opsiyon olarak görülmesi durumunda belirsizlikteki artış opsiyonu belki daha değerli, belki de daha az değerli hale getirir.

⁸² Damadoran, *Investment Valuation*, s.778

Bir projenin ertelemesinin bir alım opsiyonu olarak tanımlanması ve opsiyonu değerlemek için gerekli verilerin saptanması belki önemsiz gibi görülebilir fakat bu opsiyonların değerlendirilmesinde bazı ciddi tahmin meseleleri vardır. Gerçek opsiyon değerlemede binomial model daha genel bir yaklaşım olmakla birlikte bir kısım uygulayıcılar fiyat süreçleri hakkında daha sınırlayıcı varsayımlara sahip olduğu düşünülen Black-Scholes (BS) modelini kullanmaktadır. Gerçek opsiyonlar söz konusu olduğunda adı geçen modellerin aşağıda sayılan özellikleri hatırdta tutulmalıdır;

- Listelenmiş opsiyonlardan farklı olarak, gerçek opsiyonlar eğer parada iseler, daha önce kullanılmaya eğilimlidirler. BS modeli bu erken kullanılmaya izin vermek için uyumlu olabilir iken binomial model daha fazla esnekliğe izin verir.
- Binomial opsiyon fiyatlama modeli, sadece sürekli olmayan ama log normal dağıldığı kabul edilen fiyatlar varsayımına dayalı BS modelinden daha fazla olarak ilgili varlık için fiyat süreçlerinin daha geniş bir alanına izin vermektedir.

Binomial modelle ilgili en büyük problem binomial ağaçta yer alan, her bir düğümdeki fiyatların tahmin edilmek zorunda olmasıdır. Genişleme dönemlerinin bir sayısı olarak bu, hesaplamayı daha zor bir hale getirmektedir.⁸³

6.3.2.Vazgeçme Opsiyonu

Vazgeçme opsiyonu, işletmelerin mevcut pazar koşulları nedeniyle verimsiz olarak görülen projelerin geçici olarak ilgili dönem müddetince durdurulması, pazar koşullarının ileriki dönemlerde değişerek projenin verimli hale gelmesi halinde, yeniden başlatılması düşüncesini yansıtır.⁸⁴ Bu tip opsiyonlar genellikle Amerikan tipi satım

⁸³ Damadoran, s.778-779

⁸⁴ R.McDonald ve D.Siegel, "The Value of Waiting to Invest", *Quarterly Journal of Economics*, No:4, (November 1986), s.707-727 ve Brennan ve Schwartz, s.135-137

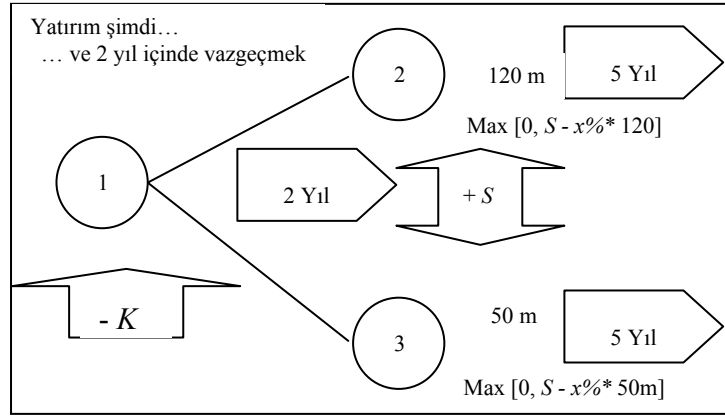
opsiyonları olup, burada yatırım projesinin bir kısmının tespit edilmiş bir fiyattan satılması suretiyle yatırımın ölçek olarak küçültülmesi imkanı söz konusudur.⁸⁵

Vazgeçme opsiyonu bir satım opsiyonu olup, pazar beklentilerinin gerçekleşmemesi ya da pazar koşullarının değişmesi ile hurda değerin yeniden elde edilmesi ve dayanak varlıktan kaçınılması hakkıdır. Esas olarak satım opsiyonu bir ekonomik aşağı yönlü dönüşe (düşüşe) karşı bir korunmadır. Bir projeyi terk etme opsiyonu ve onun varlıklarının tasfiyesi ilk gerçek opsiyonlardan biridir.⁸⁶ Bir varlığın satışı daha değerli gerçek opsiyonlara ya da yeni varlıklara yatırıma izin verir ve kayıpları telafi eder. Örneğin, önceki bölümde yer alan vakayı tekrar dikkate alalım. Araba üreten firma bir tesisi iki yıl sonra 20 milyon \$'a satabildiğini düşünölsün. Yönetim sadece satışlar yavaş olduğunda vazgeçme opsiyonunu kullanacaktır (Şekil 17). 2 ve 3'üncü karar düğümünde yönetim kendi opsiyonlarını karşılaştıracak ve ileride değeri maksimize edecek bir yol seçecektir. Yönetim, ya dış kaynak kullanımından dolayı beklenen gelirleri kabul edecek (ve tesis için hurda değer elde edecektir) ya da tesis korunacak dolayısıyla sözü edilen hurda değerden başka dış kaynak kullanım oranı da korunacaktır. Vazgeçme opsiyonu tüm durumlarda sıfır opsiyon değeriyle değersiz sona erer. Burada dış kaynak kullanım payı nedeniyle önceden bilinen gelir akışının değeri hurda değerden daha genişdir. Gelirler eğer 120 milyon \$'a ulaşırda beklenen 5 yıl için % 10 dağıtım oranı nedeniyle önceden bilinen gelirlerinin değeri 48.55 milyon \$ olacaktır. 25 milyon \$'lık bir hurda değer, önceden bilinen gelirleri geri almayacaktır. Bu durumda yönetim tesisi muhafaza edecek olduğundan vazgeçme opsiyonun değeri sıfır olacaktır. Eğer gelirler 50 milyon \$ olursa, bir % 10 dağıtım oranı nedeniyle beklenen henüz ödenmemiş gelirlerin bugünkü değeri 20.23 milyon \$ olarak hesaplanır.⁸⁷

⁸⁵ A.Damadoran, **The Promise and Peril of Real Options**, USA:Stern School of Business, Working Paper, 2001, s.53

⁸⁶ Kensinger, *Project Abandonment As a Put Option:Dealing With teh Capital Investment Decision and Operating Risk Using Option Pricing Theory*, s.80-121 ve S.C.Myers ve S.Majd, **Calculating Abandonment Value Using Option Pricing**, USA:Sloan School of Management, Working Paper, May 1983

⁸⁷ Brach, s.80-81



Şekil 17: Vazgeçme Opsiyonun Binomial Varlık Ağacı

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.81

Bu senaryoda tesis üzerindeki vazgeçme satım opsiyonu değerinin hesaplama formülü şu şekildedir.⁸⁸

$$P = [(p \max (0, - V_{max} * x\% + S)) + ((1 - p) \max (0, - V_{min} * x\% + S))] / (1 + r_f)^2$$

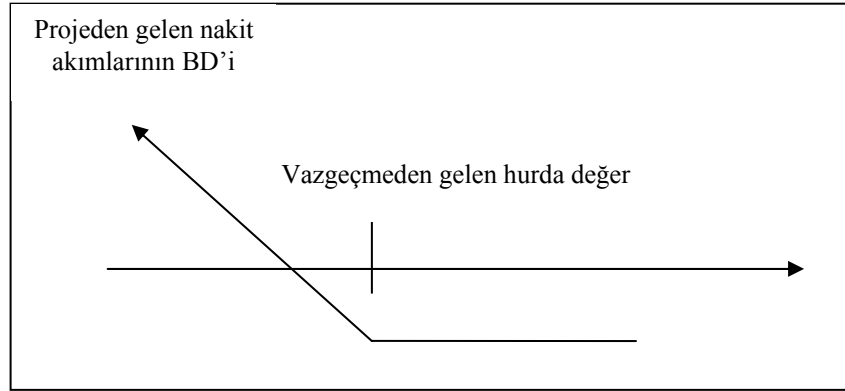
Opsiyon fiyatlama yaklaşımı, vazgeçme değerinin inşasının ve tahmininin genel bir yolunu sunar. Kendi yaşam süresinin sonuna kadar devam eden bir projenin kalan değerini V ile projenin aynı zaman noktasındaki vazgeçme değerini L ile temsil edilsin. Eğer projenin kalan n yılı varsa, devam eden projenin değeri tasfiye (vazgeçme) değeri ile kıyaslanır. Eğer devam eden değer daha yüksek ise vazgeçme opsiyonunun sahibi projeden vazgeçmeyi düşünebilir. Ödemeler şu şekilde yazılacaktır,

$$\begin{aligned} \text{Vazgeçme opsiyonu sahibi olmadan gelen ödeme} &= 0 && \text{eğer } V > L \text{ ise,} \\ &= L - V && \text{eğer } L \geq V \text{ ise}^{89} \end{aligned}$$

Aşağıda vazgeçme opsiyonun özellikleri gösterilmektedir. (Şekil 18)

⁸⁸ Brach, s.82

⁸⁹ Damadoran, *Investment Valuation*, s.811



Şekil 18: Bir Projeden Vazgeçme Opsiyonu

Kaynak: Aswath Damadoran, **Investment Valuation**, USA: Wiley, 2001, s.812

Vazgeçme değeri yukarıdaki şekilden de görüleceği üzere açık bir biçimde tanımlanmıştır ve projenin hayatı boyunca değişmez. Ekseriyetle, vazgeçme opsiyonuna sahip firmalar vazgeçmeden gelen tasfiye değerini sadece tahmin edebilirler. Vazgeçme değeri projenin yaşam süresi içinde değişebilir. Bu durum geleneksel opsiyon fiyatlama tekniklerini uygulamayı zorlaştırır. Böyle bir vazgeçme durumu bir tasfiye değeri getirmeyip onun yerine (bir üretim firmasının işçilere işten çıkarma tazminatı ödemesi gibi) maliyetler de yaratabilir.⁹⁰

6.3.3.Esneklik Opsiyonu

İşletmeler mal ya da hizmet üretim süreçlerinde kullandıkları girdiler ile ürettikleri çıktılar üzerinde değişen pazar koşullarına cevap olarak çeşitli değişikliklere gidebilirler. Değişim/esneklik opsiyonları, işletmelerin bu iç ve dış esneklik kaynaklarını değerlendirmeleri neticesinde yarattıkları tasarruf ve kazançlar üzerine kuruludur. Bir işletmenin üretim sürecinde, muadil iki ya da daha çok alternatif arasından maliyet yapısına uygun ürünü, girdi karışımını seçmesi⁹¹ ya da yeni bir

⁹⁰ Damadoran, *Investment Valuation*, s.813

⁹¹ N.Kulatika, "The Value of Flexibility: The Case of Dual-Fuel Industrial Steam Boiler", **Financial Management**, No:3, (Autumn 1993), s.271-279

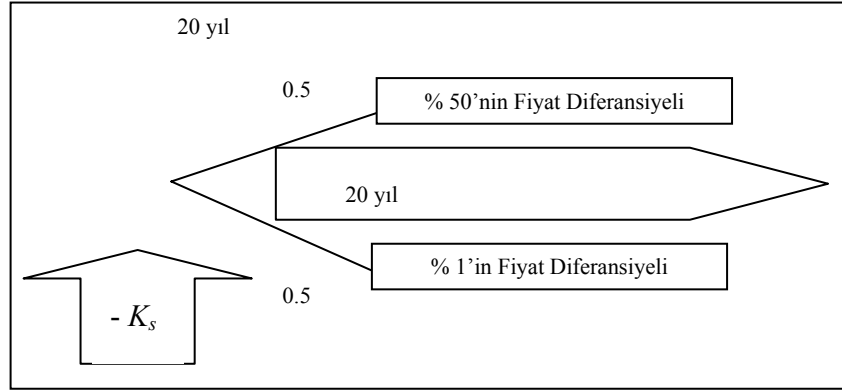
ürünün üretileceği tesis yeri seçimiyle alakalı olarak bir yerine birden fazla tesis kurmayı tercih etmesi⁹² esneklik (değişim) opsiyonu örnek olarak verilebilir.

Bir esneklik (değişim) opsiyonu (EO) dayanak proje üzerindeki tercihlere bağlı bir türevidir. Opsiyon ödemesi, önceden tanımlanmış eşiklere bağlıdır. Burada, varlık eşik değeri ulaştığında opsiyon aktif hale gelir; eğer varlık diğer eşik değerlere ulaşırsa aktif olmayan bir hal alır. Eğer opsiyon kullanım zamanında aktive olmuşsa ilgili varlığın değerinin bir fonksiyonudur. Eğer opsiyon kullanım zamanında aktive olmamışsa ise ilgili varlığın değerinin daha düşük bir fonksiyonudur. EO teorik olarak, asla negatif olmaz ve asla iptal edilmez. EO, işletmenin hareket yolunu değiştirme yönetsel esnekliğini yansıtır ve global lokasyonlar, süreçler, miktarlar, girdi ya da çıktı parametrelerin değiştirilmesi gibi faaliyetleri içerir. EO'nun temel bileşeni, maliyet yönetici operasyonel bir parametrenin değiştirilmesidir. Gelecekteki belirsizlikleri yanıtlama kabiliyetine sahip olma vasıtasıyla ilave nakit akışları üretme ya da maliyet tasarrufları sağlama seçenekleri opsiyon değerini yöneten faktörlerdir. Buna göre kullanım fiyatı örneğin teknolojiye imkan tanıyan, yönetime değişim için izin veren, bugün yapılması gereken ilave bir yatırım olarak tanımlanabilir.

Değişim, esneklik (değişim) opsiyonu ile ilgili olarak basit bir örnek verilmesi yukarıdaki anlatımları daha anlamlı kılacaktır. Bir müteahhit, yapacağı yeni evi gaz ya da benzinle çalışan bir ocak ile teçhiz etmeyi planlamakta olsun. Her iki ocak tipinin maliyetleri eşit varsayalım. Burada maliyet yöneticisi (ev sahibi) için her iki alternatifin gelecekteki fiyatları belirsizdir. Bir ev sahibi 8,000 \$ ilave bir maliyetle her iki yakıtı kullanabilen bir ocağı tercih etme imkanına sahip olduğu düşünölsün. Bu ocağın (esneklik/değişim opsiyonun) beklenen ömrü 20 yıldır. Ev sahibi her iki enerji formunun gelecekteki fiyat volatilitelerinin nasıl davranacağını, bu volatilitelerin birbirlerini nasıl etkileyeceğini ve ortalama yıllık fiyat farklarının en iyi ve en kötü senaryolar çerçevesinde ne olacağını bilmek durumundadır. Eğer gaz ve benzin aynı oranda yukarı çıkarsa esneklik (değişim) opsiyonu çok küçük bir değeri alacak ve bu iki enerji formu arasındaki fiyat farkı sıfır olacaktır. İki enerji formu arasında büyük fiyat farkı olması durumunda ev sahibi her iki enerji formu arasında ucuz olanı tercih

⁹² B.Kogut ve N.Kulatika, "Operation Flexibility, Global Manufacturing and The Option Value of a Multinational Network", **Management Science**, No:1, (January 1993), s.123-129

edecektir. En iyi senaryoda ücret farkının % 50'ye yükseleceğini, en kötü senaryoda ücret farkının % 1'den fazla olmayacağını ve her bir senaryonun eşit olasılığa sahip olduğunu varsayalım ($q= 0.5$). Buna göre vakayı aşağıdaki şekil ile özetleyebiliriz. (Şekil 19)



Şekil 19: Esneklik (değişim) Opsiyonu İçin Binomial Varlık Ağacı

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.89

Enerji formunun ne olduğuna bakılmaksızın, gelecek 20 yıl için yıllık 10,000 ünitelik bir talep olduğunu ve mevcut en ucuz enerji formu için ünite başına cari fiyatın 1.50 \$ olduğunu varsayalım. Esneklik (değişim) opsiyonun değeri, ev sahibinin daima en ucuz enerji formunu seçmesi suretiyle uygulanan maliyet tasarruflarının miktarı tarafından yönetilir. Bu nedenle gelecekteki ortalama fiyat farklarının değerini saptamaya ihtiyaç vardır. Burada ev sahibinin rasyonel davranacağı, daima en ucuz enerji formunu seçeceği ve bu seçenekler arasındaki tercih kullanımının ilave bir maliyeti gerektirmediği dikkate alınmıştır. Esneklik (değişim) opsiyonu için kullanım fiyatı K , 8,000 \$ olup ev sahibi bu primi bütünsel enerji değişim özellikli ocak için ödemek zorundadır. Gelecekteki ortalama fiyat farklarının değeri, tahmin edildiğinden daha zordur. Bu noktada geçmişte her iki enerji fiyatlarının nasıl davrandığının, geçmiş fiyat eğrilerinin bir diğeriyle nasıl korele olduğunun bilinmesi gereklidir. Eğer bir enerji kaynağı diğeriye göre çoğu zaman noktasında daha ucuz olma eğilimine sahip ise ve bir enerji kaynağındaki fiyat düzenli olarak bir diğer enerji kaynağındaki fiyat artışı ile aynı zamanda oluşuyorsa esneklik (değişim) opsiyonu içinde küçük bir değer olabilir. Eğer negatif bir korelasyon var ise (fiyatlar ters yönlü işliyorsa) değişimden bir fayda

sağlama fırsatı olabilir. Burada ev sahibi cari fiyat 1.50 \$'ı kullanarak, en iyi senaryoda % 50 ve en kötü senaryoda % 1'den muhtemel ortalama fiyat farklarının bir aralığını varsayarak analize başlar. 20 yıllık bir zaman dönemi içinde 10,000 ünitelik bir talep olduğunu dikkate alarak, bu fiyat farklılıklarının bugünkü değeri tablo 9'daki gibi hesaplanır. En iyi senaryonun gerçekleşmesi için olasılık q (bu % 50'nin en geniş fiyat farkıdır) ve buna bağlı olarak en kötü senaryo olasılığı $1 - q$ için aralık saptanır (bu sadece % 1'in en küçük fiyat farkıdır). Bu olasılıklar bugün fiyat farklarının beklenen değerini yönetir. Bu risksiz olasılık p 'nin ve 8,000 \$'lık kullanım fiyatı için, esneklik (değişim) opsiyonu üzerindeki alımın hesaplanmasını mümkün kılar. (Tablo 10)

Tablo 9
Değiştirmenin Varlık Değeri

Bugünkü Değer	Fiyat Farkı (%)
79,335.92	50
63,468.74	40
47,601.55	30
31,734.37	20
15,867.18	10
7,933.59	5
1,586.72	1

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.90

Tablo 10
Değiştirmenin Opsiyon Değeri

q	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
Beklenen Değer	40,461 \$	32,686 \$	24,911 \$	17,137 \$	9,362 \$
p	0.536	0.429	0.322	0.215	0.108
Alım	35,294 \$	26,974 \$	18,655 \$	10,336 \$	2,017 \$

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.90

Yukarıdaki bilgilere göre, evsahibi esneklik (değişim) opsiyonu, daha pahalı ocak alımından kendini korumalıdır. Opsiyonun değerini yatırım için kritik maliyet olan K 'yı dikkate alarak şu şekilde gösterebiliriz.⁹³

$$C = [(p V_{max} + (1 - p) V_{min}) / (1 + r)^t] - K = 0$$

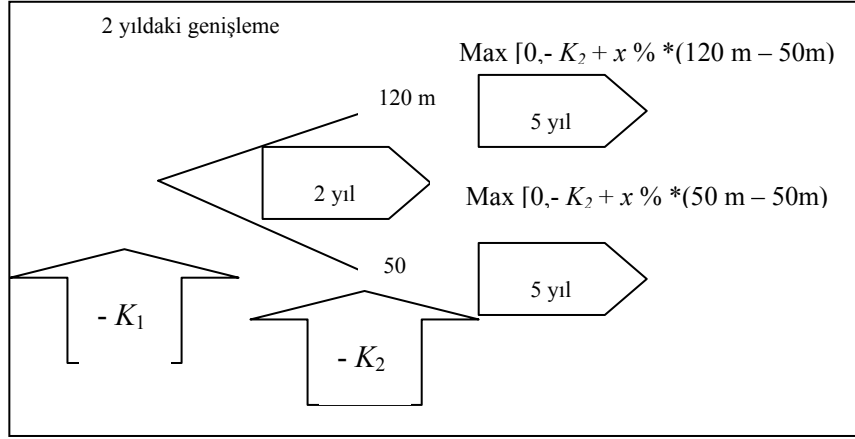
6.3.4. Genişleme Opsiyonu

Genişleme opsiyonları Amerikan tipi alım opsiyonları olup temelde mevcut yatırım projesine ilave bir miktar yatırım yapılması suretiyle yatırım projesinin içerdiği opsiyon değerinin artırılması düşüncesine dayanır.⁹⁴ Ölçek değiştirme olarak da düşünülebilen bu opsiyon, değişen pazar koşullarını yanıtlamak için kapasitenin değiştirilmesinin kabulüne yönelik yönetsel bir esnekliktir. Bu opsiyon projenin ölçeğinin küçültülmesi, genişletilmesi ya da odak noktasının değiştirilmesine rehberlik eder. Örneğin bir hava yolu şirketi kendi mevcut hava yolu ağına yeni ilave edilen bağlantılarla ya da kurulu rotalar üzerindeki uçuşların sıklığını artırmak suretiyle genişleyeceğini düşünebilir. Benzer şekilde bir üretim tesisi müdürü spesifik bir ürün için talep kapasitesinin artma şansına bağlı olarak, kapasiteyi genişletecek yeni bir yatırım üzerinde düşünebilir. Aynı şekilde bir esnek üretim tesisi kapasiteyi azaltma opsiyonuna da sahip olabilir. Bunun için yine araba üreticisi örneğini dikkate alabiliriz. Örneğin yönetim daha düşük bir talep söz konusu olduğunda talebi karşılamaya uygun olacak daha küçük bir tesisin 30 milyon \$'a alımı opsiyonuna sahip olsun. Bu tesis için eğer talep 50 milyon \$ gelir eşiği ve 120 milyon \$'lık miktar seviyesinin üzerine çıkarsa, iki yıl içinde 25 milyon \$'lık bir ilave masraf harcanabilecektir (Şekil 20). Eğer gelirler düşük kalırsa, yönetim tesisi genişletmeyecektir. Bu durumda opsiyon değeri sıfır olacaktır. Bununla birlikte eğer gelirler 50 milyon \$'ın üzerine tırmanırsa, yönetim tesisi genişletmede bir kazanç görebilecektir. Yönetim 50 milyon \$'ın üzerinde bir talep durumunda verilmiş dış kaynak kullanım oranı miktarından dış kaynak temini yoluna gitmek zorunda kalacaktır. Karar iki yıl içinde verilmiş olacaktır. Eğer pazar koşulları kötü ise ve gelirler 50 milyon \$'ı aşamazsa yönetimin bir dış kaynağa ihtiyacı yoktur ve bu nedenle bir dış kaynak kullanım maliyeti de oluşmayacaktır. Eğer pazar koşulları iyi

⁹³ Brach, s.87-88-89-90-91

⁹⁴ Copeland ve Antikarov, s.13

ise yönetim 50 milyon \$'ı ve dış kaynak kullanımı ötesinde bunu aşan talep gözlerse, ürün için 5 yıllık ömür üzerinde kalan bir dış kaynak kullanım maliyeti oluşacaktır. Bu maliyetlerin bugünkü değeri dış kaynak kullanım oranlarının bir aralığı için hesaplanır. Beklenen dış kaynak kullanım maliyetinin bugünkü değeri pazar riskini yansıtır. Bu bilgilere göre örneği aşağıdaki şekil ve tablo ile özetleyebiliriz.



Şekil 20: Genişleme Opsiyonun Binomial Varlık Ağacı

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.85

Tablo 11
Genişlemenin Opsiyon Değeri

Pay (%)	Varlığın Bugünkü Değeri		Beklenen Değer (milyon \$)
	50 (milyon \$)	120 (milyon \$)	
10	0.00	28.32	14.16
15	0.00	42.48	21.24
20	0.00	56.64	28.32

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.86

Büyümenin biçimlendirdiği maksimum değer ürün hayatının kalan beş yılı için dış kaynak sağlama yoluyla olmayan maliyet tasarrufudur ve iki yıllık bir dönemde varlık değerinde olacağı düşünülen değer genişliği 28.32 milyon \$ ve 56.64 milyon \$ arasındadır. Minimum değer sıfırdır ve beklenen değer aralığı 14.16 milyon \$ ile 28.32 milyon \$ arasında değişmektedir. Bu veriler tüm üç senaryo için 0.5375 risksiz faiz

oranı olasılığı artışını verir. Her bir senaryo için yönetim değer maksimizasyonu ya da maliyet minimizasyonu yolunu belirleyecektir. Örneğin, 30 milyon \$'lık genişleme maliyeti ve % 10 dış kaynak kullanım oranı için genişleme opsiyonu üzerindeki alımın değeri şu şekildedir;

$$\begin{aligned} C_{10\%} &= 0.5375 * \text{Max}(0, 28.32 - 30) + (1 - 0.5375) * \text{Max}(0, 0 - 30) \\ &= 0.5375 * \text{Max}(0, -1.68) + 0.4625 * \text{Max}(0, -30) \\ &= 0.5375 * 0 + 0.4625 * 0 = 0 \end{aligned}$$

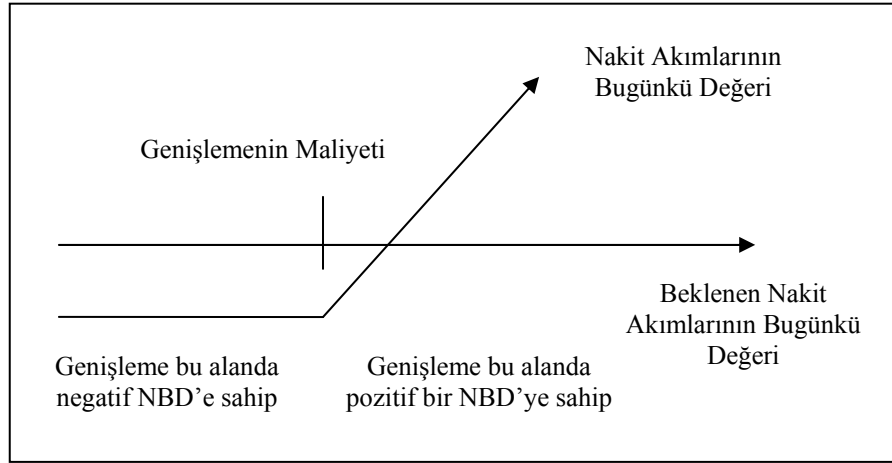
Farklı dış kaynak kullanım oranları için alım opsiyonun formülü şu şekildedir;⁹⁵

$$C = [p \max [0, x\% * (V_{max}) - K2] + (1 - p) \max [0, x\% * (V_{min}) - K2]] / (1 + r_f)^2$$

Bir projenin firmaya bir genişleme hakkını verdiğini ve gelecekte yeni bir projeye yatırım hakkı tanıdığı düşünölsün. Bu tür konuda iki değör üzerinde durulur. Bunlar gelecekteki projeye yatırımdan elde edilecek nakit akımlarının beklenen bugünkü değörleri ile bu proje için gerekli toplam yatırımdır. Firma sabit bir zaman ufkuna ve bu sürenin sonunda gelecek yatırımı yapıp yapmama kararına sahiptir. Bu durumu aşğıdaki şekil ile özetlemek mümkündür;⁹⁶ (Şekil 21)

⁹⁵ Brach, s.85-86

⁹⁶ Damadoran, *Investment Valuation*, s.796



Şekil 21: Bir Proje Genişleme Opsiyonu

Kaynak: Aswath Damadoran, **Investment Valuation**, USA: Wiley, 2001, s.797

Şekilden de görüleceği üzere vade tarihinde eğer beklenen nakit akımlarının bugünkü değeri genişleme maliyetini aşarsa firma yeni projeye başlayacaktır. Genişleme opsiyonun değerinin nasıl tahmin edileceğini anlamak için, bu opsiyonu yöneten projeleri tanımlamak gerekir. İlk proje, genellikle negatif bir NBD'e sahiptir ve firma ona yatırım yapsa bile verimsiz bir yatırım olarak tanınır. İkinci proje ilk proje ile başarılı olan genişlemeye yönelik olan ikinci projedir. Burada aşağıdaki tespitleri yapmak faydalı olacaktır;

- Nakit akımlarının bugünkü değeri, eğer opsiyon fiyatlama modelindeki (S) ilgili varlığın değeri olan, bugün ikinci projeye (genişleme opsiyonu) yatırım yapılırsa üretilecektir.
- Eğer genişleme potansiyeli hakkında önemli bir belirsizlik var ise, bugünkü değer muhtemelen volatil olur ve zaman içinde değişir. Projeler alınıp satılmazlar bu nedenle uygulacılar ticareti yapılan firma değerlerindeki varyansı kullanmak ya da simülasyonlardan bu varyansı tahmin etmek zorundadırlar.

- Eğer genişlemeye bugün yatırım yapılırsa, maliyet hedef fiyata eşit olur. Opsiyonun yaşam süresini adil bir biçimde tanımlamak oldukça zordur ve genellikle harici olarak zorla konulan bir kullanım dönemi bulunmaz.
- Genişleme opsiyonunun yapılabilir hale geldiği anda beklemenin bir maliyeti olabilir.⁹⁷

Genişleme opsiyonunun değerini tahmin etme ile alakalı pratik sorunlar erteleme opsiyonunun değerlendirilmesiyle alakalı olan sorunlara benzer. Pek çok durumda genişleme opsiyonuna sahip firmalar, bu kararı vermeye sahip oldukları spesifik bir zaman ufkuna sahip değildir. Firma ürün için ölçek ve potansiyel pazar bilgilerine sahip olsa da bunların tahmin edilmesi sorunlu olabilir. Gerçek hayatta örneğin ilk mağazasını açacak bir firma içinde benzer bir durum söz konusudur.⁹⁸

Genişleme opsiyonun bir değere sahip olduğunun tespiti için karar vericiler şu üç temel soruyu kendilerine sorabilirler;

1. İlk yatırım sonraki yatırım/genişleme için bir zorunluluk mudur ? Eğer değilse, sonraki yatırım/genişleme için ilk yatırım ne kadar gereklidir ?
2. Firma sonraki yatırım/genişleme için özel bir hakka sahip midir ? Eğer değilse, söz konusu yatırım firmaya müteakip yatırımlarda belirgin rekabet avantajları vermekte midir ?
3. Rekabet avantajları kuvvetli midir?

Yukarıda yer alan sorulara verilen yanıtlar evet ise karar vericiler açısından genişleme opsiyonun değerlendirilebilir nitelikte olduğu kabul edilir.⁹⁹

6.3.5.Büyüme Opsiyonu

S.C.Myers 1977 yılında yayımladığı makalesinde büyüme opsiyonunu (BO), olumlu pazar koşullarının varlığı halinde, işletmenin büyüme fırsatlarını değerlendirerek

⁹⁷ Damadoran, *Investment Valuation*, s.797

⁹⁸ Damadoran, *Investment Valuation*, s.801

⁹⁹ Damadoran, *Investment Valuation*, s.804-805

mevcut yatırım projesini daha yüksek seviyeye taşıma imkanı veren, bir yatırım fırsatı olarak tanımlamıştır.¹⁰⁰ BO geleneksel NBD analizinin negatif değer verdiği bazı durumlarda, yatırımın pozitif bir değer üretebileceği anlayışına dayalı olup N.Kulatika ve E.Perotti 1992 yılında bu opsiyonları mükemmel olan ve olmayan rekabet ortamlarında incelemişlerdir.¹⁰¹

İşletmeler yeni bir teknoloji, yeni bir ürün hattı ya da yeni bir pazarda, bir başlangıç yatırımı yapmak suretiyle bir büyüme opsiyonu elde eder. Bu gibi bir yatırım sıklıkla beklenen gelirden daha büyük gider gerektirir. Bir başka deyişle NBD negatif bir sonuç verir. Bununla birlikte yatırım fırsatının değeri, gelecekteki büyüme fırsatlarının biçimlendirilmesinden gelir. Eğer yeni pazar karlı bulunursa, başlangıç masrafı daha geniş bir coğrafi alana yayılabilir. Eğer yeni ürün hattı bir pilot pazar alanında başarılı ise üretim ve plan genişletilebilir. Eğer yeni bir üretim teknolojisi ile pilot tesisteki başlangıç deneyim maliyetleri azaltıyor ve verimliliği arttırıyorsa, teknoloji başından sonunda kadar bütün işletme girişimine uygulanabilir. Büyüme opsiyonları gelecekteki genişleme için altyapı sistemlerini, fırsatları ve bundan dolayı stratejik değeri tasarlar. Bu opsiyonlar her endüstri için söz konusu olmakla birlikte özellikle ileri teknoloji, yüksek riskli çabalar için daha önemlidir. BO'ları oyun teorisi üzerinde tasarlanan rekabetçi senaryoların göz önüne alınması dahil¹⁰² bio teknoloji firmaları için¹⁰³ yeni yazılım geliştirilmesi ve kurulması için¹⁰⁴ ya da tüm bir bilgi teknoloji alt yapısı için halihazırda kullanılmaktadır. Benaroch and Kauffman bir bilgi teknolojisi yatırımı değerlemesinde Black Scholes ve binomial modelleri kullanmışlar.¹⁰⁵ Bir işletmenin sipariş sistemini, envanter ve üretim ile bütünleştirecek kendisini hızlandırıcı, basitleştirici, geliştirici kılacak yeni bir yazılıma yatırım yapma fırsatı olduğunu varsayalım. Yeni sistemin entegrasyonu devam eden operasyonlar için

¹⁰⁰ S.C.Myers, "Determinants of Corporate Borrowing", **Journal of Financial Economics**, No:2, (November 1977), s.147-176

¹⁰¹ N.Kulatika ve E.Perotti, **Strategic Investment Timing Under Uncertainty**, USA:Boston University, Working Paper, 1992, s.14

¹⁰² K.X.Zhu, "Strategic Investment in Information Technologies: A Real Options and Game-Theoretic Approach", (**Yayınlanmamış Doktora Tezi**, Stanford University, USA, 1999)

¹⁰³ R.E.Otto, "Valuation of Internal Growth Opportunities: The Case of Biotech Company", **Quarterly Review of Economics and Finance**, Vol:38, No: 615, (1995)

¹⁰⁴ H.Erdoğan, "Management Licence Cost Uncertainty in Software Development: A Real Option Approach", **Fifth Real Option Conference**, Los Angeles, USA: 2001

¹⁰⁵ M.Benaroch ve R.J.Kauffman, "A Case for Using Real Options Pricing Analysis to Evaluate Information Technology Project Investments", **Information Systems Research**, Vol:10, No:70, (1999)

önemli maliyet tasarrufları sağlamakta fakat bu tasarruflar entegrasyon maliyetleri karşısında yetersiz kalmaktadır. Diğer taraftan ilave bir yatırımla, müşteri ara yüzü bir üst seviyeye çıkartabilecek ve Internet üzerinden sipariş verilmesi ya da müşterilere kendi siparişlerini web tabanlı tarama imkanı sunulabilecektir. Böyle bir hizmet işletmeye güçlü bir rekabet avantajı sunarak, bakımda yardım sağlayacak ve hatta müşteri tabanını arttıracaktır. Bu faaliyetler alt yapı yatırımını haklı çıkaracak niteliktedirler. Bu proje çalışmasında pilot yatırımın maliyetinin 30 milyon \$ olduğu varsayılın. Bahsi geçen tutar tam ölçekli projede 250 milyon \$ olup pilot projenin başarılı olması halinde iki yılda 40 milyon \$ tasarruf sağlanacağı, tersi durumda ise 15 milyon \$'dan daha fazla tasarruf sağlanamayacağı beklenmektedir. Yönetim projenin başarı şansını % 70, başarısızlık şansını % 30 olarak belirlemiştir. Eğer pilot proje başarılı bir sonuç elde ederse, firma tam ölçekli yazılım uygulaması için 220 milyon \$ daha ödeyecek olup bu çalışma üç yıllık bir süreyi ön görmektedir. Tam ölçekli bir uygulamada firma temel vaka senaryosunda 400 milyon \$, en kötü vaka senaryosunda ise 80 milyon \$ tasarruf sağlamayı planlamaktadır. Firma benzer şekilde iyi senaryo için % 70 kötü senaryo için % 30 başarı olasılığı ön görmektedir. Bu projenin NBD analizi çerçevesinde finansal değerlendirmesi şu şekilde olacaktır.

$$\text{Pilot Proje} \quad : [(0.7 \cdot 40 + 0.3 \cdot 15) / (1.15^2)] - 30 = -5.43 \text{ milyon \$}$$

$$\text{Tam Ölçekli Proje} \quad : [(0.7 \cdot 400 + 0.3 \cdot 80) / (1.15^3)] - 220 = -20.12 \text{ milyon \$}$$

$$\text{Birleştirilmiş NBD} \quad : (-5.43) + (-20.12) = -24.15 \text{ milyon \$}$$

Yukarıda görüldüğü üzere geleneksel NBD anlayışı açıkça projeyi reddetmeyi tavsiye eder. Gerçek opsiyon analizi ise burada farklı bir perspektife işaret etmektedir. Aşağıdaki şekilde binomial varlık ağacının kullanıldığı bir değerlendirme gösterilmiştir. (Şekil 22). Yönetim hatırlanacağı üzere sadece pilot proje başarılı olduğu takdirde devam etme kararı alacaktır. Eğer proje beklenen maliyet tasarrufları 80 milyon \$'i aşmayacağını görürse ilave 220 milyon \$ yatırım yapma opsiyonu kullanmayacaktır. Bu durumda dördüncü zaman düğümünde, takip eden projenin beklenen değeri V_{E4} şu şekilde hesaplanacaktır;

$$V_{E4} \quad : (0.7 \cdot 400 + 0.3 \cdot 80) = 304 \text{ milyon \$}$$

Bu nedenle dördüncü zaman düğümünde p risksiz olasılığı

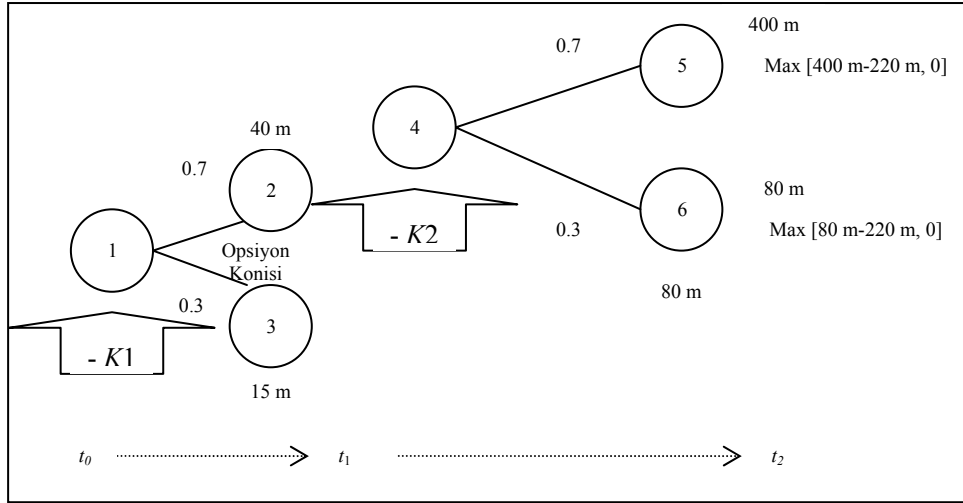
$$P = ((1 + \% 7) * 304 - 80) / (400 - 80) = 0.7665 \text{’dir}$$

Dördüncü zaman düğümünde bir % 7 risksiz faiz oranından alımın değeri

$$C_4 = [((0.7665 * 400) + ((1 - 0.7665) * 80)) / (1.07^3)] - 220$$

$$= [(306.06 + 18.69) / (1.07^3)] - 220$$

$$= 265.53 - 220 = 45.53 \text{ milyon \$ olacaktır.}$$



Şekil 22: Büyüme Opsiyonun Binomial Varlık Ağacı

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.94

% 70 başarı olasılığı ile, işletme ikinci düğüme ulaşacak ve bu suretle alım opsiyonu elde edecektir. Dördüncü düğümden başlamak, işletmenin bütününe yazılım uygulamasının genişletilmesi anlamında olup burada opsiyon değeri 45.53 milyon \$’dır. % 30 başarı olasılığı ile, pilot aşamadaki maliyet tasarrufları 15 milyon \$’ı aşmayacaktır ve yazılımın geniş uygulaması sürdürülmeyecektir. Bu nedenle pilot projeye yatırım yapılarak, yönetim bir negatif NBD proje değeri (-5.43 milyon \$) kabul eder ama ayrıca 45.53 milyon \$ değerinde bir genişleme opsiyonu kazanır. Bunun neticesinde genişletilmiş NBD 40.10 milyon \$ olarak hesaplanır ve bu açıkça pozitif bir değerdir. Bu durumda yönetim devam etmeli ve pilot projeye başlamalıdır. Opsiyon perspektifi

yönetime anahtar bir kavrayış sunar. Burada yönetim t_1 zaman noktasında pilot proje esnasında kazanılan deneyimi yanıtlayan bir esnekliğe sahiptir. Eğer pilot proje başarılı olmazsa projeye devam edilmeyecek ve bundan dolayı aşağı yönlü risk (zarar) sınırlı olacaktır.¹⁰⁶

6.3.6.Aşama (Bileşik) Opsiyonu

Aşama opsiyonu, işletmelerin ilerleyen zaman içerisinde belirsizliğin azalması sayesinde devam etmekte olan yatırım projelerinin değerlerini göz önüne alarak ilgili projenin sonraki aşamalarında edinilen bilgidan faydalanılarak yatırım projesini revize etme suretiyle proje değerinin arttırılması fikrine dayanmaktadır.

Pek çok proje sıklıkla sonradan ortaya çıkan adımların bir serisi biçimindedir. Burada her bir adım bir öncekinin başarısına dayalıdır ve her ardışık adımda yönetim projeyi değerlendirerek opsiyon devam ettirir. Büyüme opsiyonundan farklı olarak, bir bileşik (*compound option*) opsiyon için ödeme sadece tüm adımların tamamlanmasından sonra gerçekleşir. Teknoloji platformlarına yatırımlar yeni prototip ya da yeni teknolojilerdeki yatırımlar gibi aşamalı araştırma projelerine ve prototip geliştirme gibi geç aşamalı Ar&Ge'ye yatırım bir bileşik opsiyon için çok iyi uyan durumlardır. Yeni bir bilgi teknolojisine, yeni bir dağıtım ağına ve e-ticaret stratejisine yatırım ideal olarak bir bileşik opsiyon olarak değerlendirilir. Bir bileşik opsiyon, bir opsiyon üzerindeki bir başka opsiyondur. Yönetim her bir aşamayı tamamlayarak ve yatırım yaparak opsiyon satın alır ancak bu bir sonraki aşama için bir zorunluluk değildir. Geske ilk olarak bir bileşik opsiyonu fiyatlayan kişidir.¹⁰⁷ Geske, bir hisse üzerindeki alım opsiyonunu firmanın varlıklarının alım opsiyonu üzerindeki bir başka alım opsiyonu olarak değerlendirmiştir. Geske'nin analizi önemli bir gelişim sunmuş olup, değişen hisse senedi volatilitesi için bir alım opsiyonu fiyatlamayı mümkün hale getirmiştir. Hisse senedinin değişen volatilitesi ilgili varlığın volatilitesini değiştirmekten ya da firmanın kaldıracını değiştirmekten meydana gelebilir. Rubenstein, Geske'nin bileşik opsiyon konseptini bir satım opsiyonu üzerindeki alım opsiyonu ve bir satım opsiyonu üzerindeki bir başka satım opsiyonu fiyatlanmasına izin

¹⁰⁶ Brach, s.93-94-95

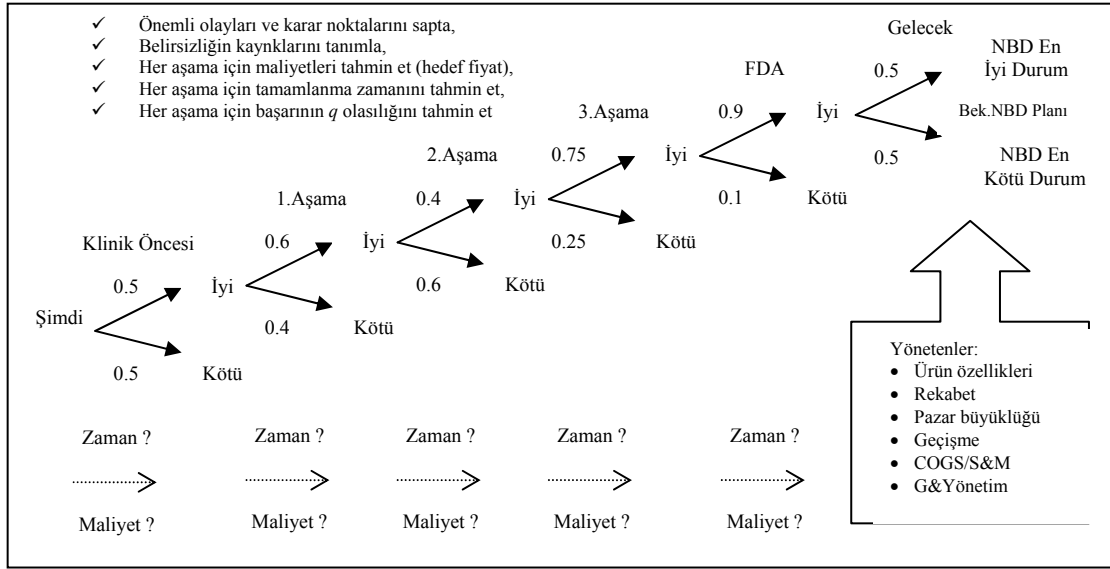
¹⁰⁷ R.Geske, "The Valuation of Compound Options", **Journal of Financial Economics**, Vol:7, No:63, (1979)

verecek şekilde genelleştirerek bir formül geliştirmiştir. Rubenstein ayrıca varlıklar üzerindeki devamlı harcama (para sarf etme) durumunu dikkate almıştır.¹⁰⁸ Cortazar ve Schwartz bileşik opsiyon konseptini gerçek varlıklara uygulamak için -bir imalat vakasıyla bağlantılı olarak- izlenecek en iyi prosedürü saptamışlardır.¹⁰⁹ Farmakolojik ilaç geliştirme programı gerçek dünyada bileşik opsiyona iyi bir örnektir. Genellikle bu tarz bir çalışma, bir molekülü üretecek klinik öncesi araştırma yatırımı ile başlar. Bu adımın başarı ile tamamlanması opsiyon sahibi açısından bir zorunluluk değil, bir haktır. Bunu takip eden aşamada geliştirilen molekül gönüllülerin bulunduğu başlangıç nitelikteki bir klinik denemeye tabi tutulur. Bu birinci aşamadır. Bu adımın başarı ile tamamlanması, molekülün güvenli olduğunu göstererek opsiyon sahibine sonraki aşamaya geçme izni verir. İkinci aşamada klinik deneme ve sonrasında molekül, ilgili hükümet birimi tarafından (bu birim ABD’de Amerikan Federal İlaç Dairesi kısaca FDA’dır) onaylanacaktır. Bu tür bir yatırım programı yönetime her bir adımda sonraki adım için programa devam edip etmeme esnekliğini verir. Bu çeşit bir esneklik, bir diğeri üzerine inşa edilen alım opsiyonlarının bir serisini gösterir ve iyi bir ardışık opsiyon ya da bileşik opsiyon biçiminde değerlendirilir. Aşağıda bu örnek için binomial ağaç gösterimi yer almaktadır. (Şekil 23)¹¹⁰

¹⁰⁸ M.Rubenstein, “Double Trouble”, **Risk Magazine**, Vol:4, No:73, (1992)

¹⁰⁹ G.Cortazar ve E.S.Schwartz, “A Compound Option Model of Production and Intermediate Inventories”, **Journal of Business**, Vol:66, No:517, (1993) ve H.Herath ve C.S.Park, “Multi-Stage Capital Investment Opportunities as Compound Real Options”, **Engineering Economist**, Vol:47, No:27, (2002)

¹¹⁰ Brach, s.95-96-97

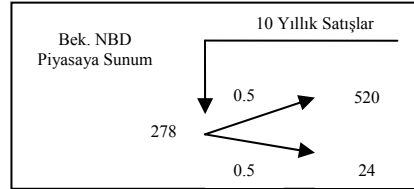


Şekil 23: Bileşik Opsiyonun Binomial Varlık Ağacı

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.98

Programın aşamaları binomial ağaç üzerindeki karar noktaları olup her bir nokta için başarı olasılığı q aşama için gerekli olan zaman ve beklenen maliyet değerlerinin biçimlendirilmesini gerektirir. Programın ilerliyişi esnasında tüm zaman noktalarında varlık değerini bulmak için en son düğümden başlanmalıdır. Bu örnek için bu düğüm noktası ilacın onaylanmasıdır. Sadece bu aşamada ürün pazara ulaşır ve ilacın değeri net bir hale gelir. Genel pazar büyüklüğü, pazar geçişi, maliyetler ve fiyatlandırma gibi parametreler senaryo analizini, en iyi ve en kötü vaka senaryosunu, yönetir. Bu senaryoların gerçekleşmesi için olasılıkların atanır ve bu uygulamada en iyi ve en kötü vaka senaryoları için olasılıklar % 50 olarak varsayılmıştır. Binomial ağacın sonunda yer alan değer bir zaman noktasındaki gelecek varlık akışlarının bugünkü değeridir. Bu kalıp bugünden başlayarak önceki tüm düğümlerden geriye doğru giden varlık değerini belirlediği gibi ayrıca binomial ağaçta tüm düğümlerdeki opsiyon değerini de biçimlendirir. Başarı olasılıklarının tahminini kullanarak, ağırlıklı ortalama sermaye maliyetini yansıtan uygun bir kurumsal indirgeme oranından iskonto yapmak suretiyle, ağaç üzerindeki her bir düğümden beklenen varlık değeri geriye dönük olarak hesaplanır. Bu prosedürün mantığı şu şekildedir; pazara girdikten sonra varlığın gelecek değeri pazar riski tarafından yönetilir. Bu nedenle, sermayenin kurumsal maliyetinden

bugüne kadar tüm geliştirme programı varlık değerini iskontolamak için uygundur. Geliştirme esnasında gelecek varlık değeri teknik belirsizliğe ilave bir konu olup ilaç geliştirmede firma özel riskle karşı karşıya gelir. Bu örnek için opsiyon fiyatlama prosedürünün kullanımı aşağıdaki şekil ile gösterilmiştir. (Şekil 24) En iyi vaka senaryosunda toplam ilaç satışlarının piyasaya sunum aşamasında 10 yıllık ömür tahmini üzerinden 520 milyon \$'lık bir NBD üreteceği varsayılmaktadır. En kötü vaka senaryosunda ise ilaç 24 milyon \$'dan daha fazla gelir üretmeyecektir. Yönetim her bir senaryonun eşit olasılığa sahip olduğunu düşünmektedir. Bu durumda piyasaya sunum zamanında 272 milyon \$'lık bir beklenen değer ortaya çıkar.



	Opsiyon Değeri	q	Varlık Değeri	Zaman /Maliyetler	p
Opsiyonun Sunumunun Değeri $[(0.54*520+0.46*24) / 1.07^1] - 10 = 281$	281	1 	NBD_{max} 520 Bek. NBD_{max} 272 NBD_{min} 24	1 Yıl / 10 milyon \$	0.538
NDA Opsiyonun Değeri $[(0.50*458+0.50*0) / 1.07^1] - 6 = 209$	209	0.9 	NBD_{max} 458 Bek. NBD_{max} 216 NBD_{min} 0	1 Yıl / 6 milyon \$	0.504
Opsiyonun 3.Aşamasının Değeri $[(0.38*356+0.42*0) / 1.07^2] - 40 = 94$	94	0.75 	NBD_{max} 356 Bek. NBD_{max} 126 NBD_{min} 0	2 Yıl / 40 milyon \$	.0.378
Opsiyonun 2.Aşamasının Değeri $[(0.15*276+0.85*0) / 1.07^2] - 20 = 25$	25	0.4 	NBD_{max} 276 Bek. NBD_{max} 39 NBD_{min} 0	2 Yıl / 20 milyon \$	0.151
Opsiyonun 1.Aşamasının Değeri $[(0.09*243+0.91*0) / 1.07^1] - 10 = 15$	15	0.6 	NBD_{max} 243 Bek. NBD_{max} 21 NBD_{min} 0	1 Yıl / 10 milyon \$	0.090
Klinik Öncesi Opsiyonun Değeri $[(0.04*214+0.96*0) / 1.07^1] - 5 = 6$	6	0.5 	NBD_{max} 214 Bek. NBD_{max} 9 NBD_{min} 0	1 Yıl / 5 milyon \$	0.045

Şekil 24: Bileşik Opsiyon Değerinin Hesaplanması

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.98

Sondan bir önceki düğümde beklenen değer ürünün sonraki aşamada tamamlanma olasılığı yani FDA tarafından onaylanmasıdır. Bu onaylanmadan sonra (% 90 başarı olasılığıyla) beklenen varlık değeri 272 milyon \$'dır. Bu tutar dönemin tahmini uzunluğu dikkate alınarak % 13.5 iskonto oranından indirildiğinde 216 milyon \$'dır. Sondan bir önceki düğümde maksimum varlık değeri, FDA'nın onay verdiği tarihten geriye doğru gidilerek ilacın piyasaya sunumundan sonraki maksimum varlık değeri olarak tanımlanır. En iyi vaka senaryosunda en iyi pazar senaryosu için teknik başarı olasılığı % 100 olarak varsayılmış olup bu nedenle bir yıl için % 13.5'tan 520 milyon \$'ı iskontolandığında 458 milyon \$ elde edilir. FDA onay aşamasında ve önceki tüm aşamalarda minimum varlık değeri sıfırdır. Bu noktalarda, ürünü piyasaya sunmaya engel olacak bir teknik hata olasılığı vardır. Programın her bir noktasında opsiyon değerini saptamak için, aşağıdaki denklem kullanılarak risksiz olasılıkların hesaplanması gerekmektedir.

$$p = [(1+r) V_e - V_{min}] / (V_{max} - V_{min})$$

V_e beklenen değeri, V_{max} ve V_{min} sırasıyla maksimum ve minimum değeri gösterir. Örneğin bu örnekte klinik öncesi program aşamasında varlığın beklenen değeri 9 milyon \$'dır. Maksimum varlık değeri 214 milyon \$ % 100 teknik başarıyı ve en iyi vaka pazar senaryosunu temsil eder. Klinik öncesi programın tamamlanmasından sonra minimum varlık değeri sıfır olup bu durum araştırmanın başarısız olduğu anlamına gelmektedir. Bu nedenle bir nolu düğümde risksiz olasılık şu şekilde hesaplanır;

$$p = [(1.07) * 9 - 0] / (214 - 0) = 0.045$$

Her bir düğümde alım opsiyonun değeri aşağıdaki formül ile hesaplanacaktır;¹¹¹

$$C = [(p V_{max} + (1 - p) V_{min}) / (1 + r_f)^t] - K$$

¹¹¹ Brach, s.98-99-100-101

6.4.Opsiyon Fiyatlamasının Esasları

Gerçek opsiyonların fiyatlanması finansal opsiyonların fiyatlanması ile benzer olup aynı temellere dayanmaktadır. Gerçek opsiyonların fiyatlanması konusunu kavrayabilmek için öncelikle finansal opsiyon fiyatlamasının tarihsel gelişimini incelemek gerekir. Genel olarak -binomial anlayış ya da Black-Scholes modeli kullanmaksızın- bir opsiyon fiyatı ilgili varlığın beklenen değerinin varlığın fiyatındaki değişkenliği yansıtan, isteğe göre seçilmiş, risk primini temsil eden bir iskonto faktörü ile iskontolanması suretiyle belirlenir. Modern opsiyon fiyatlama bu temele dayalı olarak varlığın gelecekteki değerinin olasılık dağılımlarına işaret eden bir stokastik hesaplama kullanır. Buradaki temel düşünce, gelecekteki mal fiyatlarının bilinmesini gerektirmez. Bunun yerine ilgili varlığın cari fiyatını ve varlığın gelecekteki değerini yöneten parametrelerin izledikleri kabul edilen matematiksel stokastik süreç üzerinde durur. Bu özellik matematik ve istatistik yazınında Markov özelliği olarak anılır.¹¹²

Markov rassal yürüyüş kavramının öncüsü olup ona göre, rassal değişkenlerin bir zinciri, bir önceki değişkene bağlı olarak şekillenir. Burada önceki değişken diğerlerinden bütünüyle bağımsızdır. Markov stokastik süreçler teorisinin kurucu babası olarak görülür. Her bir değer olasılığı önceki adımdaki sayının değerine bağlıdır. Her adım öncekine bağlı olup adımlar arasındaki ilişki, geçiş olasılığı tarafından saptanır. Geçiş olasılığı, adım B'nin kendisinden önceki adım olan A'nın gerçekleşme olasılığına bağlı olan olasılığı temsil eder.

Markov süreçleri modern finans yazınında önemli bir yere sahiptir. Stokastik süreçler teorisinin iki temel kavramından biri olan Markov özelliği, zaman içinde dinamik olarak değişen durumların rassal belirsizliğini modellemeye imkan veren süreçlerdir. Buna göre bir Markov sürecinin olasılıksal davranışı sürecin mevcut duruma bağlı olup süreç matematiksel olarak birinci dereceden otoregresif bir süreçtir. Durum uzayı sonlu ya da sayılabilir, parametre uzayı kesikli olan bir değişken markov sürecine Markov zinciri denir. Stokastik modelleme teorisi, bir süreç içindeki durumların geçmiş dönemleri içerecek şekilde tanımlanması şartıyla her sürecin bir

¹¹² Brach, s.20

Markov süreci olarak ele alınabileceğini ifade eder.¹¹³ Duffie ve Geman arbitrajın olmadığı bir piyasa ortamında hisse senedi fiyatı ve kar paylarını menkul kıymet piyasasının durumlarının bir fonksiyonu olarak ele alarak menkul kıymetin cari fiyatına karşı gelen bir Markov süreci kurmuşlardır.¹¹⁴

Norbert Wiener bu düşünceye önemli bir katkı yapmıştır. Wiener, Markov özelliğini bir devamlı sürece dönüştürmüştür. Bu stokastik süreç finans yazınında Wiener süreci ya da Brownian hareket olarak yer alır. Wiener süreci, Markov özelliğini karşılayan bir devamlı yapı olup bu özelliği normal dağılım düşüncesiyle bir araya getirir. Buna göre her hareket sadece önceki duruma bağlıdır. Wiener süreci matematiksel olarak artan bir sürüklenmeye sahiptir. Buna göre, yukarı ve aşağı yönlü eğilim çizgisi (trend line) zaman içinde yukarı yöne gitme eğilimi taşır. Brownian hareketin varyans ya da volatilitesi zaman aralığıyla lineer olarak artar.¹¹⁵

Brownian hareket birçok temel sürecin kesişim kümesinde yer alan bir stokastik süreçtir. Matematiksel olarak sürekli martingale, Gaussian süreç, bağımsız artmalı süreç aynı zamanda da sürekli zamanlı bir Markov süreci olarak tanımlanır.¹¹⁶ $B = \{B(t): t \geq 0\}$ için bir Wiener süreci tanımlandığında üç açıklama yapılabilir. İlk olarak sürecin $(t, t + \Delta t)$ zaman aralığında durumundaki değişim, t zamanında ne olduğundan bağımsızdır. İkinci olarak $B(t + \Delta t) - B(t)$ rassal değişkenlerinin dağılımı zamandan bağımsızdır. Üçüncü olarak $\varepsilon > 0$ için $\lim p(|B(t + \Delta t) - B(t)| \geq \varepsilon) = 0$ olup, $B(t)$ Brownian hareketi, μt ortalamalı $\sigma^2 t$ varyanslı bir normal dağılıma sahiptir. Brownian hareket menkul kıymetlerde belirsizliğin modellenmesinde kullanılan önemli bir stokastik süreç olup, bu konuda ilk çalışma Bachelier tarafından yapılmıştır. Bachelier zaman içinde fiyat değişimlerinin normal dağılımı düşüncesine giriş yapmıştır. Bachelier 1900 yılında “*Spekülasyon Teorisi*” adlı çalışmasında hisse senetlerinin fiyat dalgalanmaları için (1884-1898 yıllarını esas alarak), $t \geq 0$ koşuluyla $X_t = x + \sigma w_t + \mu$ şeklinde bir lineer model kullanmıştır. Bachelier çalışmasında zamanın kare kökü ile

¹¹³ H.M.Taylor, **Martingales and Random Walks, Stochastic Models**, USA:Heyman Sobels eds, Handbook in Or and MS Vol 2, Elsevier Science, 1990, s.126

¹¹⁴ D.Duffie ve M.B. Geman, **Intertemporal Arbitrage and Markov Valuation of Securities**, USA: Stanford Graduate School of Business, Working Paper, 1985

¹¹⁵ Brach, s.21

¹¹⁶ D.Revuz and M.Yor, **Continuous Martingales and Brownian Motion**, Almanya:Springer-Verlag, Berlin Heilderberg, 1994, s.382

artan bir yayılım için matematiksel bir ispat göstermiştir. Çalışmasında Brownian hareketten söz etmemekle beraber opsiyon fiyatlama tekniğinde Brownian hareket ile aynı düşünceyi kullanmıştır. Brownian hareket atomların anlık hareketlerini temsil eder. Bu harekete adına veren bilim adamı İskoçyalı botanist Robert Brown olup çalışmasının kökeninde su içindeki çiçek polenlerinin düzensiz hareketi yatmaktadır. Brownian hareketin iki boyutlu gösterimi hisse senetlerinin iki davranışa sahip olması ile uyumlu görülmüş olup buna göre hisse senetleri ya yukarı ya da aşağı doğru hareket edebilirler. Yukarı ya da aşağı hareketlerin genişlemesi hisse senedinin volatilitesi belirler ve bu her bir hisse senedi için farklıdır. Binomial düşünce de benzer bir mantıkla değerlendirilir. Eğer hisse senedi fiyatlarının matematiksel anlamda bir devamlı yol takip ettiği kabul edilirse, bir döneme ait getiriler sonraki dönemdeki getirilerden bağımsız olurlar ve getirilerin dağılımının normal dağılıma uygun olduğu kabul edilir.¹¹⁷ Bachelier hisse senetleri için uygun stokastik süreç olarak bir log-normal dağılım sunmuştur. Bir menkul kıymetin fiyatındaki dalgalanmaların bir geometrik Brownian hareket olarak modellenmesi genel kabul görmüş bir düşünce olup bu düşünce, F. Black ve M.Scholes'un opsiyon fiyatlama çalışmalarında da temel olarak kabul edilmiştir. Bachelier 'in formülü iki kritik varsayım açısından eksiklik taşır. Bunlar sıfır faiz oranı ve sürecin bir negatif hisse senedi fiyatına izin vermesidir.¹¹⁸

Bir stokastik süreç, olasılık kanunları tarafından belirlenen olayların bir zincirini tanımlar. Stokastik süreç görünüşte rastsal gerçekleşen olayların olasılığını tahmin etmeye izin verir. Güvenilir bir stokastik sürece sahip olmak varlığın gelecekteki muhtemel hareketlerinin bir dağılımını dikkate almak anlamını taşır. Burada süreç her harekete bir olasılığa atfeder, açık olasılıklarla gelecekteki hisse fiyatlarını tahmin için karar vericiye imkan sağlar. Hisse senedinin gelecekteki fiyatını ve buna ilişkin riskin belirlenmesi hisse senedine dayalı opsiyonun arbitrajsız fiyatlanmasına imkan verir.¹¹⁹

¹¹⁷ P.Cootner, **The Random Character of Stock Market Prices**, Cambridge: MIT Pres, 1964, s.17-78 ve L.Bachelier, "Theorie de la Speculation", (**Matematik Doktora Tezi**, Annales Scientifiques De l'Ecole normale Supérieure III-17:21(86), 1900. (Thesis for the doctorate in Mathematical sciences defended March 29, 1900)) Reprinted Editions Jacques Gabay, Paris, 1995)

¹¹⁸ Brach, s.23

¹¹⁹ Ömer Önal, "Hisse Senetleri Fiyat Değişimlerinin Stokastik Süreç Olarak Analizi", (**Yayınlanmamış Doktora Tezi**, Marmara Üniversitesi S.B.E., 1996), s.1-2-7-17-20

1962 yılında A.James Boness “*Hisse Senedi Opsiyon Değerinin Ölçümü ve Teori*” adlı tezinde paranın zaman değeri kavramını, kendi opsiyon analizinde kullanarak, bugünden geriye doğru bir iskonto oranından beklenen son hisse değerini (expected terminal stock price) indirgemıştır.¹²⁰ Boness bu çalışmasında iskonto oranı olarak hisse senedinin beklenen getirisini kullanmıştır. Boness bugün evrensel olarak kabul gören -opsiyon fiyatlamada anahtar niteliğinde olan- üç varsayıma değinmiştir. Bunlarda ilki, hisse değerinin pozitif olmasını garantileyen hisse senetlerinin normal dağılımı düşüncesidir. İkincisi faiz oranının sıfır olmaması, üçüncüsü ise yatırımcıların riske isteksiz olduğu düşünceleridir. Fisher Black ve Myron Scholes (BS) ileriki yıllarda bu düşünceleri geliştirerek yatırımcıların risk tercihleri üzerindeki varsayımları elimine etmişler ve matematiksel olarak doğru iskonto faktörünün risksiz faiz oranı olduğunu ispat etmişlerdir. Onların ürettikleri denklem Merton’ın Finansal Varlıkları Fiyatlama Modeline dayanmaktadır. Riskli varlıkların risklerinin bir fonksiyonu olarak beklenen getiri hesaplamaktadır. BS’un formülü bir devamlı zaman stokastik süreç için analitik bir çözüm teklif etmektedir.

Cox, Ross ve Rubinstein (CRR) binomial opsiyon fiyatlama modelini 1979’da yayınlamışlardır. CRR bir ayrılmış zaman stokastik süreç için, matematiksel bir çözüm ortaya koymuşlardır. Bu konuda finansal opsiyon fiyatlamasının iki anahtar varsayıma dayandığını belirtmek faydalı olacaktır. İlk varsayım arbitraj bulunmayıştır. Arbitraj yatırımcıya, bir başlangıç nakit masrafı olmaksızın ödeme zamanlarında kesin bir pozitif nakit akımı yaratabilecek bir ticaret stratejisi sunmakta olup etkin pazarlarda arbitraj imkanı bulunmaz. Risksiz kar elde etmek fırsatı bulunur bulunmaz pazardaki pek çok oyuncu varlığa bir fiyat biçerler ve bu durum varlığın fiyatında harekete neden olarak arbitraj olanağını ortadan kaldırır. Finansal opsiyon fiyatlamada ikinci temel varsayım, opsiyonun bir devamlı risksiz korunma, hedge işlemidir. Hedge kavramı, yatırımcının opsiyon yada futures piyasada bulunduğu pozisyona karşıt bir pozisyon alarak spot piyasadaki risklerden korunma anlamını taşır.¹²¹ Risk, iskonto oranı içinde kabul edilmemiştir ama varlığın gelecekteki değerinin olasılık dağılımının içinde kabul edilmiştir. Olasılık dağılımlarının doğası, finansal opsiyonlara karşı olarak gerçek

¹²⁰ T.O’Brien ve M.J.P.Selby,” Option Pricing Theory and Asset Expectations: A Review and Discussion in Tribute to James Boness”, **Financial Review**, (November 1986), s.399-418

¹²¹ Chambers, s.236

opsiyonlarda çok farklı olabilir. Finansal opsiyonlarda Black-Scholes fiyatlama metodu bir devamlı zaman çatısı içinde gelecekteki getirilerin log normal dağıldığını varsayar. Bir difüzyon süreci sürekliliği kapsar ve bilginin akıcı gelişi ya sabit ya da değişen varyans ile devamlı fiyat değişimlerine neden olur. Bu fiyat değişimleri normal ya da log normal dağılır. Getirilerin bu log normal davranışı hisse senedi fiyatlarıyla uygundur. Diğer opsiyon fiyatlama formülleri sıçramalar gibi farklı stokastik hareketleri takip eden getirilerle uğraşarak geliştirilmiştir.¹²²

Bir sıçrama süreci (jump process) bilginin devamlı olmayan gelişine işaret etemete olup bu durum varlık değerini aniden yükseltir. Bu süreçler istatistikte Poisson dağılımı tarafından çok iyi tanımlanmıştır. Difüzyon ve sıçrama süreçlerinin her ikisi de opsiyon fiyatlama modellerinde bütünleşmiştir; bir saf-sıçrama modeli (a pure jump model),¹²³ birleştirilmiş sıçrama difüzyon modeli (combined jump diffusion model), değişken varyans difüzyonu(changing variance diffusion)¹²⁴ ya da sıçrama sürecini (jump porcess) log-normal bütünleştirir¹²⁵ ve volatilité değişimlerinin sabit olduğunu varsayar. Margrabe bir döviz opsiyonu (exchange option) için bir fiyatlama modeli geliştirmiş olup, seçilmiş varlık ve varlığın teslimi için bir log normal difüzyon sürecini ele almıştır.¹²⁶ Onun çalışması -BS ile karşılaştırıldığında- gerçek opsiyonlar için, varlığın gelecekteki değerine ilave olarak maliyetlerin de stokastik olduğu varsayımına dayalıdır.¹²⁷

Bütün bu analitik modellere rağmen, finansal opsiyonlar için pek çok değerlendirme modeli halen -Amerikan satım opsiyonu gibi- tanınmış bir analitik çözüme sahip değildir. Analitik modeller bir stokastik diferansiyel denklemi çözerek beklenen değere ulaşırlar. Bunu yapmak için, varlıkların hareketlerine uyan stokastik süreçlerin doğasını bilmeye ihtiyaç vardır. Bu finansal varlıklar için bile zordur ve gerçek varlıklar için belirsizlik önemli bir sorundur. Bu noktada beklenen değer ulaşmak hususunda

¹²² Brach, s.24-25-26

¹²³ J.C.Cox ve S.A.Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", **Journal of Financial Economics**, Vol:3, No:145, (1976)

¹²⁴ Geske, s.16

¹²⁵ R.C.Merton, "Option Pricing Where the Underlying Stock Returns are Discontinuous", **Journal of Financial Economics**, Vol:3, No:449, (1974)

¹²⁶ W.Margrabe, "The Valuation of Compound Options", **Journal of Financial Economics**, Vol:7, No:63, (1979)

¹²⁷ Brach, s.25-26

Monte Carlo metodu gibi diğer bazı metotlar kullanılabilir. Monte Carlo simülasyonu gibi sayısal metotlar varlıkların gelecekteki değerleri hakkında kullanıcılara bilgi verirler. Monte Carlo simülasyonu 1977 yılında Phelim Boyle tarafından geliştirilmiş olup Boyle bugün ve vade tarihi arasında varlık değeri hareketlerini yöneten süreçler tarafından saptanmış bir dağılım kavrayışı geliştirmiştir. Teorik olarak bu tarz bir süreç matematiksel olarak açıkça tanımlanabilir ise bilgisayarlar vasıtasıyla varlık değerinin takip edeceği süreç simüle edilerek vade tarihinde bir varlık değeri üretilebilir. Binlerce simülasyon gelecekteki hisse değerlerinin bir dağılımını atar ve vade tarihinde hisse senedinin beklenen değerinin olasılık dağılımı hesaplanabilir. Daha fazla simülasyon, metodun daha doğruluk derecesini yükseltecektir.¹²⁸

Monte Carlo yöntemi, istatistik teknikler kullanarak bir deneyi ya da olayı sayısal olarak taklit etmekte olup, metodun bir probleme uygulanması, problemin tesadüfi sayılar kullanarak defalarca simülasyon edilip, hesaplanmak istenen parametrelerin simülasyon sonuçlarına bakılarak yaklaşık olarak hesaplanması fikrine dayanmaktadır. Analitik yaklaşımların aksine simülasyon modelleri, karmaşık problemlerin modellenmesi ve çözümünde daha başarılı olurlar. Bu yöntemde, belirli bir ölçü ya da deneyde bulunabilecek değerler kümesi bir geliş güzel sayı kümesi oluşturur. Geliş güzel sayılar kümesinde her hangi bir sayının gelme olasılığı ötekilerden farklı olabilir. Olasılıklar aynı ise böyle bir kümeye düzgün dağılımlı geliş güzel sayılar kümesi denir. Sayısal olarak bir deneyi ya da olayı taklit etmek için temel araç 0-1 arasında değerler alan düzgün dağılımlı sayılardır. Bu sayılar (q ile temsil edilirse) bilgisayar ile üretilebilir olup, yatay ekseninde geliş güzel sayıların olduğu dikey düzlemde ise gelme sayıların (frekans) olduğu bir gösterimde bu sayıların dağılımı yatay, düz bir çizgi olacaktır. Belirli bir deney ya da ölçme olay olarak adlandırılırsa her hangi bir olayın belirli olasılıklarla meydana gelen çeşitli sonuçları vardır ve bu sonuçlar da ayrı birer olay gibi düşünülebilir. n tane sonucu ve bu sonuçların meydana gelme olasılıkları $P_1, P_2, \dots, P_n$ olan bir olay düşünüldüğünde, olayı geliş güzel sayılarla taklit etmek istediğimiz zaman, geliş güzel sayı eksenini n adet bölgeye ayırır. Her bir sonuç bölgesinin genişliği o sonucun ortaya çıkma olasılığı kadar olursa, P_1 notasyonu geliş güzel sayıların P_1 olasılıkla belirlenen 1. sonucu gösterir. Böylece

¹²⁸ Brach, s.26-27

belirtilen bir geliş güzel sayı hangi sonuç bölgesine düşerse olayda o sonuç meydana gelmiş olur. Örneğin $0 < q < P_1$ ise sonuç 1, $P_1 \leq q$, P_2 ise sonuç 2, $P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} \leq q < 1$ ise n.sonuç gelmiştir.¹²⁹

Binomial metot ise 1978 yılında William Sharpe¹³⁰ tarafından sunulmuş olup daha sonraları Cox, Ross ve Rubenstein'in 1979 yılındaki çalışmalarıyla ünlü hale gelmiştir.¹³¹ Binomial modelde hisse senedinin gelecekteki fiyatının olasılık dağılımı, zamandaki her bir ayrılmış yukarı ya da aşağıya yönlü hareketlerin büyüklüğü tarafından saptanır. Bu hareketlerin büyüklüğü hisse fiyatlarının geçmişteki volatilitelerini gösterir. Adım sayısına bağlı olarak, opsiyon konisi her bir düğümde beklenen hisse fiyatını vererek gelişir. Binomial ağaçlar opsiyonun vadesi ve bugünü arasındaki zamanı düğümlerle (nodes) ayrılmış zaman aralıklarına böler. Her bir aralık ya da her bir düğümde hisse senedi bir q olasılığıyla yukarı ya da aşağıya hareket eder. Bu adımlar gelecekteki hisse fiyatının bir kafesini, ağacını (tree lattice) biçimlendirir. Ağaçta fiyatların gideceği düğüm o anki zaman noktasında belirli olup sadece iki seçimli bir alternatif söz konusudur. Bir başka anlatımla bir fiyat, bir zaman noktasında aşağıya doğru hareket ettikten sonra ya aynı şekilde yukarıya ya da ters olarak hareket edebilir. Örneğin hisse senedinin fiyatını temsil eden bir binomial ağaçta bir hisse senedinin ikinci zaman noktasındaki her iki muhtemel durumu da ilk zaman noktasındaki konumuna bağlıdır fakat takip eden durumdan farklıdır. Bu Markov özelliğidir. Markov özelliğine göre her bir adım bir öncekine koşulludur. Binomial ağaçta zaman ilerledikçe, adımlar arttıkça volatiliteler ya da varyans artar ve sonuç olarak opsiyon konisi gittikçe genişler. Opsiyon konisi opsiyon fiyatının alt ve üst değerleri arasında kalan alandır. Varyans her adımda sayısı gittikçe artan düğümler arasındaki farktır. Binomial yaklaşım risksiz faiz oranından opsiyon fiyatlamak için kullanılan arbitrajsız argümanın açık bir gösterimidir. Ayrılmış zaman yaklaşımlı binomial model bir analitik çözüm sunmamakla birlikte kullanıcılar açısından basit matematikden daha ileri bir matematik bilgisi gerektirmez. Bu nedenlerden dolayı opsiyon fiyatlamaya çok

¹²⁹ Başar Şarer, Aybaba Hançerlioğulları ve Mustafa Übeyli, "Nükleer Hesaplamalarda Monte Carlo Yönetiminin Kullanımı", **Gazi Üniversitesi Dergisi**, (2006), sayfa 1-3

¹³⁰ W.F.Sharpe, **Investments**, USA:Prentice Hall, 1978

¹³¹ J.C.Cox, S.A.Ross ve M.Rubenstein "Option Pricing: A Simplified Approach", **Journal of Financial Economics**, Vol:7, No:229, (1979)

yararlı bir alternatiftir. Binomial opsiyon modelinin belirgin avantajları şu şekilde özetlenebilir;

1. Sezgisel ve şeffaftır,
2. Karmaşık değerlendirme problemlerinin basit devamlı zaman sayısal tahminine izin verir,
3. Opsiyon yatırımcının öznel risk tercihi olmaksızın fiyatlanır.¹³²

Triantis ve Borison 2001 yılında yayınladıkları çalışmalarında gerçek opsiyon analizi yapan uygulacılar arasında bir araştırma yapmışlardır. Bu çalışmada gerçek ve finansal opsiyonlar arasındaki farklılıklardan hareketle, uygulayıcıların bir çoğu BS formülünü kullanmama konusunda aşağıdaki nedenleri saymışlardır;

- Gerçek opsiyonlar mutlaka, belirlenmiş bir kullanım gününe sahip avrupa tipi opsiyon şeklinde olmak zorunda değildirler.
- Gerçek varlıklar üzerindeki getirilerin log normal dağıldığı temel ve esas varsayımı, pek çok varlık için uygulanabilir değildir.
- BS formülü yöneticiler tarafından bir kara kutu olarak görülmekte olup projenin yöneten değerini anlamayı zorlaştırmaktadır. Bu nedenle elde edilen “hak” volatilité uğraştırıcı bir konudur.¹³³

BS formülünün neden gerçek opsiyonlar için uygun olmadığına ilişkin olarak Brach şunları söylemektedir;

1. Proje volatilitesi zaman üzerinde sabit değildir,
2. Opsiyonun sona erme süresi kesin değildir,
3. Kullanım fiyatı (=geliştirme maliyetleri) gibi varlık değeri de stokastik davranır,

¹³² Brach, s.27-28

¹³³ A.Triantis ve A.Borison, “Real Options:State of the Practice”, **Journal of Applied Corporate Finance**, Vol:14, No:8, (2001)

4. Getiriler normal dağılmaz

5. Gerçek varlıkların rassal yürüyüşü simetrik değildir, burada sıçramalar mevcuttur.¹³⁴

Gerçek opsiyonlarda çoğunlukla ilgili varlığın volatilitesi bilinmez ve bu parametre hakkında varsayım yapmak zordur. Mukayese edilebilir bir kurum için benzer işletmelerin hisse senedi volatilitesi yeterli olabilir ve bu değer projenin volatilitisini saptamakta kullanılabilir. Bu yaklaşım bazı durumlar için makul görülmekle beraber genel bir kural değildir. Varlığın volatilitesinin opsiyonun değerini nasıl etkileyeceği konusu bu noktada önemli bir tartışmaya neden olur. Örneğin pazar belirsizliğinin opsiyon değerini yükselteceği söylenebilirken, teknik belirsizlik söz konusu olunca bunu söylemek kesinkes mümkün değildir. BS formülünün kullanımında, volatilitede küçük değişimler olması halinde bile bu durum opsiyonun değerinde önemli bir etkiye sahip olma eğilimindedir. Bunlara ek olarak gerçek opsiyonlar üzerine kurulu yatırımlar varlık volatilitesinin yanı sıra maliyet volatilitesinden de etkilenirler. Bununla birlikte BS formülü maliyetlerin sabit olduğunu, her hangi bir risk ya da belirsizliğe sahip olmadığını varsayar. Gerçek opsiyonlar için bu iki kavram arasındaki korelasyon, kendi tam sayılarından daha çok, opsiyon değerini saptamaya eğilimlidir ve bu nedenle kritik proje değeri (bir opsiyonla ilgili varlığın fiyatının, opsiyonun kullanım fiyatına eşit olduğu, parasal bir getiri ve ya kaybın olmadığı) başa baş durumu korumayı gerçekleştirmelidir. Daha düşük bir maliyet belirsizliği için korelasyon faktörünün etkisi, daha yüksek maliyet volatilitesi için olandan daha farklıdır. Bir başka anlatımla maliyet ve varlık volatiliteleri arasındaki korelasyon mükemmel ise bu durumda kritik proje değeri, iki değişken arasında korelasyonun olmadığı durumdaki kritik proje değerine kıyasen daha düşük olacaktır. Maliyet ve varlık belirsizliğinin kritik proje değeri üzerindeki etkisi farklıdır. Varlık belirsizliği aynı derece gelecek nakit akımlarını daha belirsiz yaparak yatırım tetiğini (investment trigger) arttırırken, maliyet belirsizliği bunu azaltır. Daha yüksek maliyet volatilitesiyle beklenenden daha düşük olabilecek maliyetlerde daha yukarı bir potansiyel mevcuttur. Her ikisinin kusursuz korele olması durumunda yatırım tetiği

¹³⁴ Brach, s.48-49

üzerindeki birleşik etkisi ikisinden daha geniş olana bağlı olacaktır. Eğer maliyet volatilitesi varlık volatilitelerinden daha küçük ise kusursuz korelasyon parasız koruma için gerekli kritik proje değerini artırır. Eğer maliyet volatilesi varlık volatilitelerinden daha büyük ise kusursuz korelasyon kritik proje değerini azaltır. Pozitif bir korelasyon bir hedge (yatırımcının opsiyon ya da futures piyasalarda, spot piyasada bulunduğu karşıt bir pozisyon olarak, spot piyasadaki risklerden korunma işlemi)¹³⁵ sunar, tüm volatiliteleri ve bu nedenle opsiyon değerini azaltır. Bu durum ayrıca stokastik süreçler üzerine kurulmuş olan denklemlerde yer alan parametrelerin ve bu parametreler arasındaki korelasyonların kullanıcılar tarafından çok iyi anlaşılmasını gerektirir. BS formülü kullanımı dayanak varlığın bir sürekli stokastik hareketi izlemesini gerektirir ve bu süreç içinde sıçramalar bulunmaz.¹³⁶

BS sadece volatilitenin bilgisini gerektirmez. Formül bunun yanısıra volatilitenin zaman içinde değişmediğini varsayar. Bu varsayım yatırım fırsatı kendi risk davranışını değiştirdiğinden genellikle gerçek dünyada mevcut değildir. Carr model gibi diğer opsiyon fiyatlama modelleri varyans değişimine izin verir ve bu durum gerçek opsiyonların fiyatlaması için kullanım bakımından daha uygun olabilir.¹³⁷ BS'un Avrupa alım tipi opsiyonları için fiyatlama metodu olarak basit uygulamasında kullanım zamanları sabittir ve doğrudan doğrudur. Formül zamandaki bir anı tam olarak saptayabilir. Yönetimsel esnekliğin anahtarı ise opsiyon kullanımının zaman alabileceğine ilişkindir ve sıklıkla zaman mesafesi bilinmez. Örneğin yeni bir tesisten elde edilen nakit akımlarını kavramak için tesisin inşasına ihtiyaç vardır ve inşaatın tamamlanma zamanı belirsizdir. BS varlık değerinin log normal dağılıma sahip olduğunu varsayar ama bu varsayım gerçek opsiyonlar için varlığın ürettiği nakit akımlarının stokastik seyirlerini doğru bir biçimde göstermez. BS ayrıca varlığın gelecekteki değerini yöneten kurlar, talep davranışı, ürünün yaşam süresiyle ilişkili belirsizlik ya da işletmenin ürün geliştirme yeteneği gibi tüm belirsizliklere de benzememektedir.¹³⁸

¹³⁵ Chambers, s.231

¹³⁶ Brach, s.50-51

¹³⁷ J.Lee ve D.A.Paxson, "Valuation of R&D Real American Sequential Exchange Options", **R&D Management**, Vol:31, No:191, (2001)

¹³⁸ Brach, s.51

Aralarında korelasyon bulunan iki varlığa dayalı birkaç farklı opsiyon değerinin bulunması amacıyla matematiksel olarak üç boyutlu binomial ağaç yapısı kullanılabilir.¹³⁹ Bir binomial piramit esas olarak birbirlerinden bağımsız fakat aralarında korelasyon bulunan iki geometrik Brownian hareketi bir araya getirmektedir. Bir projeye yatırımın gelecekte birbirlerinden bağımsız nakit akımlar üretecek iki farklı varlık yaratacağı bir senaryo binomial piramitlerin kullanımına örnek olarak verilebilir. Bu tarz bir senaryoda her iki varlıkta farklı müşteri segmentlerine hitap edebilir. Burada varlıkların karşı karşıya kaldıkları pazar riskleri aynı pazar içinde bulunmaları nedeniyle benzer nitelikte olacağından varlıkların sahip oldukları ödemelerin aralarında korele olduğu söylenebilir. Buna göre bu senaryo iki varlıktan sadece birinin seçilmesi durumunda -maksimum ödemeli varlık- iki dayanak varlık üzerine kurulu bir opsiyonun varlığını gösterir.¹⁴⁰

Opsiyon fiyatlama modeli olarak yapay sinir ağları kullanımı BS modeline bir alternatif oluşturmaktadır. Yapay sinir ağları BS modelinin önemli bir eksikliğine atıfta bulunur. Getirilerin log-normal dağılıma sahip olması, hisse senetlerinin devamlı alınıp satılmak zorunda olmaları ve ilgili varlıkların volatilitésinin zaman içinde sabit kalması bu sınırlamalardan birkaçıdır. Buna göre BS modelinin sınırlamaları sadece gerçek opsiyonların fiyatlanması için geçerli değildir. Bu sınırlamalar aynı zamanda finansal opsiyonların fiyatlanması içinde geçerlidir. Yapay sinir ağları memeli hayvanların beyin ve sinir sistemlerinin özelliklerinden bir kısmını taklit eden matematiksel modeller kurarlar. Memeli hayvan beyni, karışık ve eksik informasyonlu geniş veri setlerini işleyebilme yeteneğine sahip olup bu arzu edilebilir bir özelliktir. Memeli hayvan beyni çevresindeki değişimlere çok kolay adapte olur. Yapay zeka ağları da benzer bir biçimde öğrenebilme yeteneğine sahiptir. Sinir ağlarının kullanımı gerçek opsiyonları değerlendirme konusunda alternatif bir düşünce biçimidir. Yapılan çeşitli çalışmalar neticesinde finansal opsiyonların fiyatlamasında BS modelinden daha yüksek bir doğruluk sağladıkları görülmüştür.¹⁴¹

¹³⁹ E.G.Haug, *3-Dimensional Lattice Models*, <http://home.online.no/-espehaug/3DLattice.html>, (05.05.2006)

¹⁴⁰ Brach, s.328-329

¹⁴¹ H.Amilon, **A Neutral Networks Versus Black Scholes. A Comparison pf Pricing and Hedging Performance**, Sweden: University of Lund, Working Paper, 2001 ve A. Taudes, M.Natter ve M.Tracka,

Gerçek opsiyonlar üzerine yapılan pek çok akademik çalışma maliyetler ve varlık değerinin gelecekteki stokastik davranışını açıklamaya yönelik modelleme için geometrik Brownian hareketlere dayanmaktadır. Bu yaklaşımda geçmiş volatiliteler gelecek volatiliteler için bir göstergedir ve gelecek basitçe geçmişin kullanımıyla tahmin edilir. Bu varsayım genellikle kurumsal yöneticiler arasında kaygılara neden olmaktadır. Bulanık sayı “fuzzy number” düşüncesi bu konuda yeni bir alternatif olarak göze çarpmaktadır. Bulanık sayılar finansal matematiğe 1987 yılında girmiş olup çeşitli çalışmalarda gerçek opsiyonların değerlendirilmesinde bir yöntem olarak kullanılmışlardır.¹⁴² Bulanık sayıların gerçek opsiyonların değerlendirilmesi konusunda kullanımı temel olarak dayanak varlığın gelecekte üretmesi beklenen nakit akımlarının ya da bu nakit akımlarının olasılık dağılımlarının bir bulanık sayı ailesi olarak düşünülmesine dayanmaktadır.^{143 144}

6.5.Gerçek Opsiyon Fiyatlamasında Binomial Model

Black Scholes modelinin ardından 1979 yılında Cox, Ross ve Rubenstein (CRR) opsiyon fiyatlamada kullanılmak üzere basit bir binomial fiyatlama modeli oluşturmuşlardır.¹⁴⁵ Binomial opsiyon modeli zamanın bir sonraki döneminde varlığın değerinin yukarı ya da aşağıya doğru hareket edeceğini varsayarak her bir duruma q ve $1 - q$ olasılık değeri vermektedir. Buna göre varlık üzerindeki bir alımın (call) değerinin; yukarı hareket durumunda $u S_0 - K$, aşağı hareket durumunda $d S_0 - K$ olarak temsil edilmektedir. (Şekil 25)

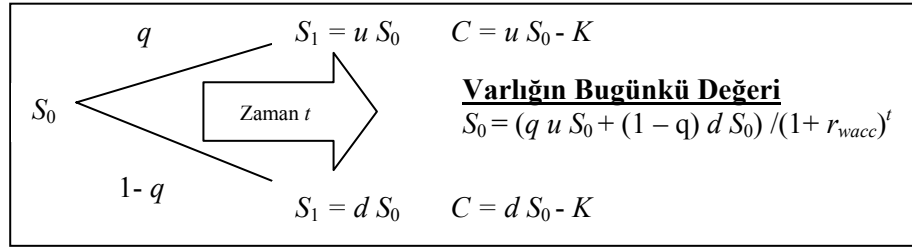
“Real Option Valuation with Neutral Networks”, **International Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management**, Vol:7, No:1, (1998) ve R.Gencay ve M.Qi, “Pricing and Hedging Derivative Securities with Neutral Networks: Bayesian Regularization, Early Stopping and Bagging”, **IEEE Transactions on Neural Networks**, Vol:12, No:726, (2000) ve E.W.Saad, D.V.Prokhorov ve D.C.Wunsch, “Comparative Study of stock Trend Prediction Using Time Delay, Recurrent and Probabilistic Neutral Networks”, **IEEE Transactions on Neural Networks**, Vol:9, No:145, (1998)

¹⁴² J.J.Buckley, “The Fuzzy Mathematics of Finance”, **Fuzzy Sets and Systems**, Vol:21, No:257, (1987) ve L.Calzi, “Towards a General Setting for the Fuzzy Mathematics of Finance” **Fuzzy Sets and Systems**, Vol:35, No:265, (1990) ve Zdenek Zmeskal, “Application of the Fuzzy-Stochastic Methodology to Appraising the Firm Value as a European Call Option”, **European Journal of Operational Research**, Vol:135, No:303, (2001) ve C.Carlsson ve R.Fuller, “Project Scheduling with Fuzzy Real Options”, **Cybernetics and Systems**, Vol:33, No:511, (2002)

¹⁴³ D.Dubois ve H.Prade, **Possibility Theory**, New York, USA: Plenum Press, 1988

¹⁴⁴ Brach, s.330

¹⁴⁵ J.C.Cox, S.A.Ross ve M.Rubenstein, *Option Pricing:A Simlified Approach*, s.15



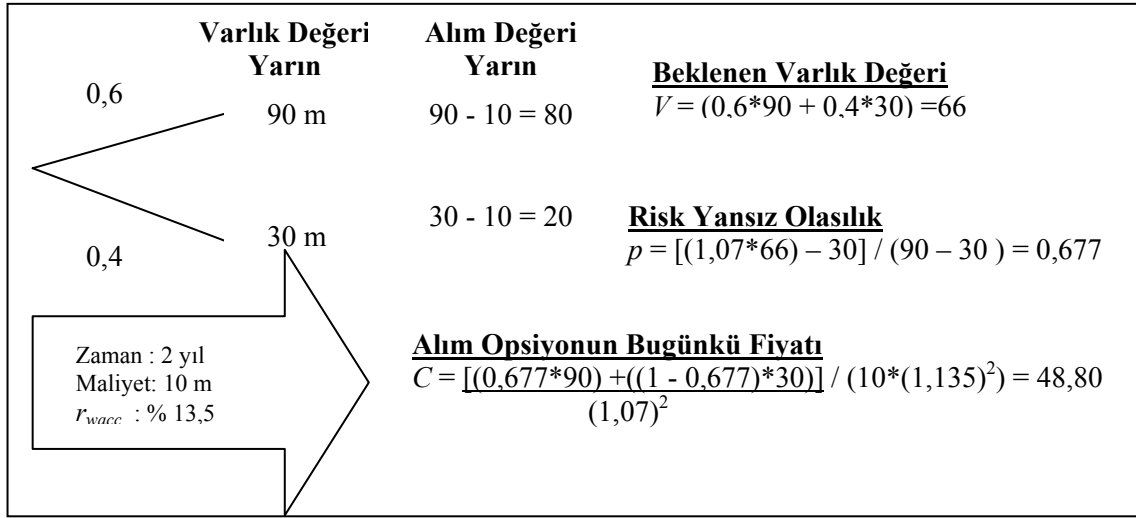
Şekil 25: Binomial Ağaçta Varlık Değerinin Hareketleri (Wacc:Ağır.Ort.Ser.)

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.53

Bir alım opsiyonun değeri ilgili varlık üzerindeki hakka bağlı olarak tespit edilen bugünkü değer olup bu değer ilgili varlığın volatilitesi tarafından biçimlendirilir. Varlığın değeri en iyi senaryonun gerçekleşmesi durumunda q , en kötü senaryonun gerçekleşmesi durumunda $1 - q$ olasılığının bir fonksiyonu olup sırasıyla $u S_0$ ve $d S_0$ ile gösterilir.

$$V = [q u S_0 + (1 - q) d S_0]$$

En iyi durumda 90 milyon \$, en kötü durumda 30 milyon \$ nakit akışı üretecek bir varlığa yatırım imkanı bulunduğu bir örnekte en iyi durumun gerçekleşme olasılığının % 60, en kötü durumun gerçekleşme olasılığının % 40 ile temsil edildiğini kabul edelim. Burada dayanak varlık basit anlamda varlığın kendisi olup nakit akışları iki pazar araştırmasının sonuçlarını yansıtmaktadır. Varlığın inşasının iki yıl alacağını, varlığı meydana getirmek için 10 milyon \$ maliyet söz konusu olduğunu düşünelim. Böyle bir durumda varlığa dayalı alım opsiyonun gelecek bir tarihteki değeri en iyi durumda 80 milyon \$, en kötü durumda 20 milyon \$ olacaktır. Kullanım zamanında beklenen değer ise her bir durumun gerçekleşme ihtimallerine bağlı olarak 66 milyon \$ olarak gerçekleşecektir. Bu örneği aşığıdaki şekil ile özetlemek mümkündür (Şekil 26).



Şekil 26: Binomial Ağaçta Alım Opsiyonun Değeri (m:milyon)

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.53

Alım opsiyonun bugünkü değeri böyle bir vakada muhtemel her iki nakit akımına bağlıdır. Opsiyon fiyatlamada projenin riskleri ve ödemelerini tam olarak yansıtan pazarda mevcut, benzer nitelikte “ikiz” bir menkul kıymetin var olduğu ve risksiz korunmaya izin verdiği varsayımı dikkate alınır. Aynı varsayımsal düşünce projenin riskini yansıtan iskonto oranından (risk primi) gelecekteki nakit akımlarının indirgenmesini gerektirir. Bu seçilmiş iskonto oranı yatırımcının proje olarak aynı risk ve ödemeye sahip alım satımı yapılan, benzer nitelikteki menkul kıymetten beklediği getiriyi yansıtmaktadır. Bu nedenle eğer alım-satımı yapılan menkullerin bir portföyünden bir risksiz korunmaya sahip olunacaksa, beklenen ödemeleri saptamak için risk yansız olasılıklarla çalışılmalı ve risksiz iskonto oranını kullanılarak beklenen ödemeler bugünkü değerlerine indirgenmelidir. Bu düşünce biçimi opsiyon fiyatını vermekte olup, risksiz olasılık kavramı bugünkü kar değerinin bir fonksiyonudur. Risksiz olasılık hesaplamasının matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir;¹⁴⁶

$$P = [(r_f S_{\text{beklenen}}) - S_{\min}] / (S_{\max} - S_{\min})$$

Bu gösterimde r_f risksiz faiz oranını (hazine bonosu için geçerli oran), S_{beklenen} gelecekte varlığın beklenen değerini (örneğimizde 66 milyon \$), $S_{\max}$ sonraki dönemin

¹⁴⁶ Brach, s.53-54

sonunda umulan maksimum varlık değerini ve $S_{\min}$ sonraki dönemin sonunda umulan minimum varlık değerini temsil etmektedir. Risksiz olasılık p bu nedenden dolayı pazar belirsizliğine (maksimum ve minimum varlık değeri) bağlı olup varlık değerini biçimlendiren q gerçek olasılığı için, S_{beklenen} 'nin hesaplamasını desteklemektedir. CRR p 'yi benzer bir biçimde tanımlamışlardır: $p = (r_f - d) / (u - d)$. Onlar bu denklemi opsiyonu kopyalayan bonolar ve hisse senetlerini içeren bir risksiz arbitrajsız portföy oluşturduktan sonra elde etmişlerdir. Risksiz arbitrajsız portföy riskten bağımsız opsiyon yapar ve bu nedenle risksiz değerlemeye izin verir. CRR'ye göre p daima sıfırdan büyük ve birden küçüktür. Bu nedenle bir olasılığın özelliklerine sahiptir. Diğer bir ifade ile p , q değerleri risk yansız dünyada bir dengeye sahiptir. Bu anlayışta yukarı hareket için u , aşağı hareket için d kullanımı yerine, takip eden dönemin sonunda beklenen maksimum ve minimum varlık değerleri kullanılmaktadır. Yukarıdaki örnekte risksiz olasılık p 0,6770'dir. p aşağıdaki formül vasıtasıyla alım opsiyonun bugünkü değerini saptamaya yardımcı olan bir ifade niteliğindedir.

$$C = [(p S_{\max} + (1 - p) S_{\min}) / (1 + r_f)] - (K r^t_c)$$

Bu hesaplama biçiminde maliyet K değeri dışında bu paranın bankaya konması halinde faiz kazanılacağı ya da bu yatırım amacıyla sermayenin ortak maliyeti üzerinden borç alındığı varsayılarak paranın fırsat maliyeti de hesaplama dahil edilmelidir. Yukarıda yer alan örnekte fırsat maliyeti olarak r_c sermayenin ortak maliyetini kullanılmış olup, buna göre alım opsiyonunun cari değeri 48.80 milyon \$ hesaplanmaktadır.

Bu fırsata yatırım yapmak için kritik maliyetin ne olduğu düşünüldüğünde bu maliyetin paradaki opsiyon için yatırılması gerekli olan bir miktar nakit olarak tanımlandığı görülür. Eğer yatırım için kritik maliyet aşılmışsa, opsiyon para dışına çıkacaktır. Yatırım için kritik maliyet buna göre aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$C = [(p S_{\max} + (1 - p) S_{\min}) / (1 + r_f)] - (K r^t_c) = 0$$

Örnekte yatırım için kritik değer, verilen varsayımlar altında 47.85 milyon \$'dır. Eğer daha fazla yatırılırsa sermayenin ortak maliyetinde, opsiyon para dışındadır. Opsiyon değeri maksimum değerdeki değişimlere en yüksek ve minimum değerdeki

değişimlere karşı en düşük hassasiyeti göstermekte olup ayrıca başarıdaki olasılık q 'daki değişimlere de duyarlılık gösterir. Bu noktada bir opsiyon uzayından bahsedebilmek mümkündür. Opsiyon uzayındaki sınırlar içinde ilgili varlıktaki (verilmiş kesin) değişim görülebilir. Opsiyon uzayı, her bir parametrenin mevcut varsayımın belirli bir oranından (örneğin % 20 oranında) değiştirilmesi durumunda, ortaya çıkan yeni (yukarı ve aşağı yönlü) opsiyon değerlerinin oluşturduğu dairesel alandır. Yatay düzlemde oransal sapmanın, dikey düzlemde opsiyonun düzleminin bulunduğu bir koordinat sisteminde, potansiyel opsiyon değerlerinin alabileceği noktaların çevrelediği, bu tasvir biçimi uygulayıcılara muhtemel opsiyon değeri hakkında genel bir değerlendirme imkanı sağlar.

Binomial modelin getiri (R) ve riske nasıl baktığı opsiyon değeri ile yakından ilişkilidir. İyi senaryoda bir sonraki dönemin sonundaki getiri ilgili varlığın cari değerinin bir katsayısı olacaktır. Ters durumda kötü senaryoda ise getiri R düşecektir ve ilgili cari değer bir kesri olacaktır $1/R$. Bu durumu şu şekilde açıklamak mümkündür,

$$\text{Yukarı durum için getiri} : R = S_1^+ / S_0$$

$$\text{Aşağı durum için getiri} : 1/R = S_1^- / S_0$$

Kapsanan volatilité CRR binomial modelde şu şekilde gösterilir;¹⁴⁷

$$\sigma_1 = (\ln R_1) / \sqrt{t_1}$$

Beklenen getiri ve risk arasındaki doğal ilişki kısaca şu şekilde özetlenebilir: başarının risksiz olasılığının artışıyla beklenen getiri azalırken, artan volatilité beklenen getiriyi artırır. Binomial model bir projenin her aşaması için kapsanan volatilitenin (σ) hesaplamasına izin vermektedir. Özdeş olmayan risk profillerine tabi bireysel aşamalı ardışık projeler için bu bir avantajdır. Binomial modelde risk iskonto oranı tarafından düzeltilmez. Bu risk model içinde matematiksel olarak başarının olasılığı tarafından düzeltilmektedir. Binomial model bir ayrılmış zaman modelidir. Bu nedenle oyun teorisi için geçerli olan geriye yönelmiş tümevarım prensibi (backward induction

¹⁴⁷ Brach, s.54-56-57

principle) binomial model için de geçerlidir. Model her adımda opsiyon sahibinin ne yaptığını ve ortamda neler olacağını izlenmeyi kolaylaştıran bir anlayışa sahiptir. Bu bakımdan binomial modeller rekabetçi senaryoların analizinde kullanılmak üzere mükemmel bir anlayıştır. Stokastik modeller üzerine kurulu diğer opsiyon fiyatlama modelleri ise dışsal model sıçramalarına dayalıdır. Binomial model bazı önemli kavrayışlar sağlar. İlk olarak model yatırım için kritik değeri anlatır. Bu değer yatırım kararı için bir tetik nokta olup başarı olasılığı, gelecekteki varlık değeri ve tamamlanma zamanı parametrelerinin arasındaki ilişkinin bir fonksiyonudur.¹⁴⁸

İkinci olarak, opsiyon analizi karar alıcılara opsiyon değerini ve maliyetler, tamamlanma zamanı, başarı olasılığı gibi varlık değeri üzerindeki anahtar varsayımlardaki değişimleri gösterir. Opsiyon uzayındaki sınırları tanımlayan varsayımların bir sahasını tasvir eder. Yatırım kuralı, tüm mümkün opsiyonların dikkatli bir karşılaştırılması yapıldıktan sonra en yüksek değeri sunan opsiyonlara yatırım yapılması şeklindedir. Binomial opsiyon değerlendirme modeli kullanıcılara basit olarak bir risk getiri ilişkisi sunmaktadır. Binomial model üzerine kurulu bir gerçek opsiyon fiyatlama anlayışı gelecek hakkındaki beklentileri yansıtmamanın bir yoludur. Gerçek opsiyonların fiyatlanmasında binomial modelin kullanımı risk ve belirsizlik ile birleşmiş bir beklenen değer düşüncesine dayanmaktadır. Binomial anlayıştaki bu beklenen değer kavramı NBD analizinde yer alan çeşitli varsayımlar (en iyi ve en kötü senaryo, beklenen ya da en çok istenen senaryo için) üzerine kuruludur. Binomial model değerlemede yönetsel esnekliği dikkate alan bir anlayıştır. Model “git” ya da “gitme” şeklindeki çoklu karar noktalı artan proje değerlendirilmelerine izin vermektedir. Binomial opsiyon modelleri beklenen zamanın opsiyon değeri üzerindeki etkisini gösteren bir düşünce şeklidir. Bu değerlendirme biçimi dayanak varlığın minimum ve maksimum değerleriyle bunlara ilişkin başarı olasılığının opsiyon değeri üzerindeki etkilerini göstermektedir. Bu nedenle gerçek opsiyon analizinde binomial modelin kullanımı yönetime opsiyon uzayındaki en geniş etkilere sahip parametrelerin saptaması, belirsizliğin nasıl biçimlendiğinin daha iyi bir şekilde anlaşılması fırsatını verir. Gerçek opsiyon düşünce yapısı bu faydaların yanı sıra yatırım yapmak için gerekli olan kritik değer gibi önemli bazı kırmızı bayrakları kaldırarak karar alıcıları uyarır. Analiz

¹⁴⁸ Brach, s.58

yönetime, kapatma ya da ölçek azaltma suretiyle yatırım maliyetlerinin tasarrufu yoluyla ya da genişleyen büyüme fırsatlarına yatırım yaparak, başarı olasılığının genişletilmesi suretiyle ve daha fazla kaynak vaat ederek, projeyi hızlandırarak ya da geciktirerek opsiyon değerini azaltacak ya da genişletecek yönetsel aksiyomların nasıl olduğunun araştırma imkanı verir. Binomial model zaman adımlarının küçülmesi ve bu adımların sayılarının artması durumunda matematiksel olarak BS modeliyle bir noktada birleşir. Adım sayısının sonsuz olması durumunda varlık hareketinin volatilitesi zaman üzerindeki adımların sayısı ve her bir dönem için yukarı hareketin büyüklüğü üzerine hesaplanır. BS modeli binomial modelden farklı olarak u “yukarı hareket” ve d “aşağı hareket” hareketlerinin her bir dönemde daima aynı olduğu varsayımına dayanmaktadır.¹⁴⁹

Gerçek opsiyonların değerlendirilmesi üzerine yapılan pek çok çalışma çeşitli varsayımlar üzerine kurulmuştur. Bu varsayımlara örnek olarak dayanak varlığın gelecekte elde etmesi beklenen getirilerin pozitif sürüklenmeli bir log-normal dağılım olan Wiener süreci ile temsil edilmesi verilebilir. Gerçek opsiyon değerlemesinde matematiksel denklemlerin kullanımı pratikte kullanıcılar açısından kullanılan parametreler hakkında çoklu varsayımlar gerektirmesi nedeniyle kompleks hesaplamalar gerektirir. Opsiyon değerini etkileyen parametrelerin doğru bir biçimde hesaplanması ve bu değerler üzerinde bir mutabakata varılması organizasyonlar için uğraştırıcı bir meseledir. Yönetim pratikte karşılaşılan bu tür problemlerin çözülmesi amacıyla Monte Carlo simülasyonu kullanımı ya da kıyaslanabilir firmaların tarihsel getirilerinin kullanımını tercih edebilir. BS değerlendirme metodu volatiliteye karşı yüksek derece hassasiyet göstermektedir. Buna göre kısmi diferansiyel denklemler genelde bireysel volatilitelere, denklemlerin gerektirdiği volatiliteler arasındaki korelasyon kadar yüksek derecede hassasiyet eğilimi gösterirler. Burada opsiyon değerini yöneten maliyetler ve ödeme volatiliteleri arasında nasıl bir korelasyon olduğu incelenir. Gerçek opsiyonlarda varlık volatilitesi ya da onun belirsizliği elde edilen bilginin yönetim kabiliyetiyle yakından ilişkili olup burada amaç esnekliği yitirmeden onun riskini azaltmaktır. Eğer yönetim değişen pazar koşullarını karşılayan esnekliğe sahip değilse, burada bir opsiyon değerinden bahsedilemez. Binomial model daha önce de belirtildiği

¹⁴⁹ Brach, s.59

üzere çeşitli sınırlamalara sahiptir. Kullanılan varsayımlar çoklu zaman dönemlerinde, çoklu belirsizlik kaynaklarını gerektirdiğinden, proje ile alakalı birden çok gerçek opsiyon bulunması durumunda belirsizliği etkileyen kaynaklar arasındaki etkileşimlerin dikkate alınması gerekir. Gerçek opsiyon fiyatlamada binomial model kullanımı finansal opsiyon fiyatlamayla benzer köklere sahiptir. Bu noktada uygulayıcılar açısından üzerinde durulması gereken bir diğer husus karar analizleridir. Karar analizi (Decision analysis) ve binomial modelin her ikisi de genel yapı içinde çok benzerdir ve her ikisi de projenin beklenen değerini saptamayı amaçlarlar. Her ikisi de belirsizlikler ve opsiyonların tamamını planlamaya dayanır. Yine benzer bir şekilde her ikisi de senaryo ve hassasiyet analizlerinden objektif fayda olasılık ölçümleriyle çalışmayı, enformasyon toplanmasını ve bu bilgi setinin işlenmesini gerektirir. Her ikisi de ayrılmış dağılımlarla çalışır ve yine her ikisinde de geriye dönük işleyiş vardır. Burada yatırım projesi değerlendirmesinde karar analizi yaklaşımını daha yapılabilir kılan ve bu analizi binomial modelden ayıran bazı önemli özellikler de mevcuttur. Karar ağacı analizi sabit bir iskonto oranı olarak ortalama ortak sermaye maliyetini ya da spesifik bir proje iskonto oranını kullanılır. Buna mukabil binomial model risk yansız olasılıklar ile çalışır. Burada ilgili varlığın risk profilinin zaman içinde sabit olmadığı kabul edilir. Yönetimsel aksiyonlar bu riskleri azaltmak için kullanılabilir. Binomial opsiyon ağacı, asimetrik ödemeler üzerine kurulu iken, karar ağacı asimetrik ödemeler üzerine kurulu değildir.¹⁵⁰

6.6.Gerçek Opsiyonların Sınırlamaları

Gerçek opsiyon düşüncesi NBD esasına dayalı statik İNA süreçleri ile karşılaştırıldığında yatırım kararlarının değerlendirilmesine yönelik olarak bazı avantajlara sahiptir. Bu avantajlar kısaca şu şekilde özetlenebilir;

¹⁵⁰ Brach, s.60-61-62

Tablo 12

İNA Yaklaşımı ve Gerçek Opsiyon Yaklaşımı

Geleneksel – İNA Yaklaşımı	Gerçek Opsiyon Yaklaşımı
Operasyonel kararlar gelecekte değişmez	Yönetimsel değişimler, yeni bilgi setinin gelişine bağlı olarak değişir
Temel vaka beklenen nakit akımları bir setidir	Nakit akımları, gelecekteki belirsiz koşullara bağlıdır
Statik hassasiyet ve senaryo analizleri söz konusudur	Değişen koşullara tepki gösteren yönetimsel esneklik dikkate alınır

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.331

Yukarıda sayılan avantajlarına rağmen gerçek opsiyon kavrayışı bazı güçlüklerle ve kusurlara sahiptir. Daha önceki bölümlerde de belirtildiği üzere gerçek opsiyon fiyatlamasında BS modelinin kullanımını engelleyen birkaç neden vardır. Örneğin BS modeline göre varsayımsal olarak dayanak varlığı ilişkin getiriler mutlaka log-normal dağılmalı, ilgili varlığın alım satımının devamlı olduğu ve opsiyonların sınırlı olmadığı tam bir piyasa mevcut olmalıdır. Gerçekte ise pek çok gerçek opsiyon için getiriler eksponansiyeldir; bazen yukarı ve bazen aşağı yönlü sıçrama yaparlar. Kısa bir hayat döngüsü olan ürünler için log-normal dağılım bütünüyle konu dışındadır.¹⁵¹ BS modeli menkul kıymetlerin birimlerinin ya da bu birimlerin kesirlerinin alınıp satılabilmesini gerektirmektedir. Yatırım projeleri söz konusu olduğunda ilgili varlığın birimlerden bahsedilemez. Bir başka anlatımla projenin bir parçasının satılabilmesi imkanı yoktur. Bu hadise Brooklyn Köprüsü “Brooklyn Bridge” olarak adlandırılır.¹⁵² 1987 yılındaki borsa krizi sonrasında hisse senedi piyasasında volatilité gülüşü “volatility smile” olarak adlandırılan merkezi problem BS modelinin kullanımında giderek artan bir biçimde göze çarpmaya başlamıştır. Bu deyim, zaman içinde volatilitenin değişmediği varsayımı için kullanılmıştır. Bu varsayımın sonucu olarak aynı varlık üzerindeki tüm opsiyonların BS dünyasının aynı anlama gelen volatilitéye sahip olduğu sonucuna ulaşılır. Halbuki BS, vadeye olan zamana ve ayrıca

¹⁵¹ N.P.B.Bollen, “Real Options and Product Life-Cycle”, **Management Science**, Vol:45, No:670, (1999)

¹⁵² G.K.Turnbull ve C.F.Sirmans, “Vacant Land Options:A Theoretical Analysis”, **Regional Science and Urban Economics**, Vol:20, No:213, (1990)

kullanım fiyatına bağılı çeşitli eğilimlere sahip volatiliteleri kapsar. Bu durum 1987 yılındaki hisse senedi piyasası krizinde belirgin olarak ortaya çıkmıştır. Binomial opsiyon değerkleme modelinin bir büyük avantajı sabit kalan bir volatilitmeyi gerektirmemesidir. BS modelinden farklı olarak binomial model projenin her aşaması için volatilitmeyi değıştirmeye imkan sağlar ve bu durumda proje bir bileşik opsiyon olarak değerklendirilir.¹⁵³

Gerçek opsiyonların sınırlamaları incelendiğinde Heisenberg'in çalışmalarının dikkate alınması faydalı olacaktır. Heisenberg'in gerçek opsiyonlar ile ilişkili çalışmalarından biri Heisenberg belirsizlik prensibidir. Heisenberg'e göre bir işletme pazarda her hangibir adım iseter atsin ister atmasın Pazar dengesinin bütünü üzerinde bir etkiye sahip olup yönetim verdiği ya da vermediği kararlarla rakiplerinin hareketlerini etkiler. Heisenberg 1927 yılında belirsizlik üzerine yayınladığı çalışmasında "daha kesin pozisyon belirlenendir, daha az kesin momentum bilinendir" diyerek bir parçanın devinimini ve pozisyonunu saptamaya girişildiğinde, bir ölçünün kendiliğinden yapılmış olacağına işaret etmektedir. Heisenberg'im bu kavramsal ifadesinin gerçek opsiyon değerkleme ve stratejik kurumsal yatırımlar konusundaki yansması basittir. Heisenberg'e göre bir işletme yatırım kararını, kusursuz biçimde uyuşan "alınıp satımı yapılan" bir menkul kıymetle kopyalar. İşletme gerçek opsiyonun değerkini fiyatlamak için aynı menkul kıymetin momentumunu, gerçek opsiyonu kullanarak ve onun ürünüyle piyasaya girerek değıştirir. Örneğin bir işletme yeni bir petrol sahasının keşfine dayanan gerçek bir opsiyonu değerklemek istediğinde bu opsiyonun kopyalan petrol fiyatlarını, petrol fiyat future'larını ya da petrol firmalarının hisse senetlerinin volatilitelerini kullanır. Firma opsiyonu kullandığında, opsiyon ile aynı özelliklere sahip olduğu kabul edilen ikiz menkul kıymeti etkileyen dinamikleri dikkate almış olur. Diğer gerçek opsiyonlar için farklı senaryolar söz konusu olabilir. Örneğin, giyilebilir bir bilgisayarın geliştirilmesi söz konusu olduğunda bahsi geçen projenin özelliklerini yansıtan bir emsalden bahsedebilmek mümkün olmayacaktır. Bu durumda projeyi yansıtan halihazırda menkul kıymet piyasalarında işlem gören, ikiz nitelikte bir menkul kıymet olmadığından yatırımın yukarıda anılan şekilde modellenmesi imkansız hale gelecektir. Bu tür bir durumda yatırım projesini işlem gören menkul kıymetlerden

¹⁵³ Brach, s.331 - 332

oluşan bir portföyle taklit etmeye çalışmak yerine ürünün geleceğine ilişkin tahminlerde kullanılmak üzere geçmiş pazar deneyimlerinden yararlanılabilir. Böyle bir senaryoda pazar araştırmaları üzerine kurulu muhtemel pazar davranışlarını yansıtan olasılıkların matematiksel modeller ile temsil edilmesi kullanıcılar açısından faydalı sonuçlar üretecektir. Matematiksel olarak bu tarz bir yolun tercih edilmesi durumunda bulanık sayıların kullanımı uygulayıcılar açısından önemli bir alternatiftir.^{154 155}

Finansal opsiyon fiyatlama ilgili varlığın gelecekteki değerlerini stokastik süreçlere dayalı olarak tahmin eder. Gelecek hakkındaki tahminler geçmiş deneyim üzerine kurulu olup bir organizasyonel ve kültürel yapı içinde oluşturulmuşlardır. Senaryo planlama ve senaryo öğrenme gerçek opsiyonlar için kullanışlı bir araçtır. Gerçek opsiyon analizi için senaryo planlama, finansal opsiyon fiyatlama için volatilitenin ne olduğunu tahmin eder. Senaryo planlama konusunda uygulayıcılar açısından üç sıkıntı kaynağı mevcut olup bunlar belirsizlik, karmaşıklık ve paradigma değişiklikleridir.¹⁵⁶ Senaryo planlama çoğunlukla organizasyonel öğrenme hakkındadır.¹⁵⁷ Bu nedenle gerçek opsiyon analizi çeşitli senaryolar altında opsiyonu betimlemekte olup senaryo planlama opsiyonların zamanlaması ve değerlendirilmesi konusunda karar alıcılara yardımcı olur.¹⁵⁸

Senaryo planlama opsiyonu etkileyen çeşitli değişkenleri ve bu değişkenler arasındaki ilişkileri göstermek bakımından faydalı bir düşünce şeklidir. Opsiyon fiyatını etkileyen değişkenler opsiyonun türüne bağlı olarak farklı sonuçlar doğururlar. Örneğin bir finansal opsiyonun kullanım fiyatının artması satım opsiyonunun değerini artırırken alım opsiyonunun değerini azaltmaktadır. Finansal opsiyonlar için çeşitli girdi parametreleri ile opsiyon değeri arasındaki ilişki aşağıdaki tabloda özet olarak gösterilmiştir.

¹⁵⁴ Brach, s.332 - 333

¹⁵⁵ A.A.Abel, A.K.Dixit, J.C.Elberly ve R.S.Pindyck, "Options, The Value of Capital Investment", **Quarterly Journal of Economics**, Vol:111, No:753, (1996)

¹⁵⁶ P.J.H.Schoemaker, "Scenario Planning:A Tool for Strategic Thinking" , **Sloan Management Review**, (Winter, 1995), s.25

¹⁵⁷ K.Van Der Heijden, **Scenarios:The art of Strategic Conversation**, USA:Wiley, 1995

¹⁵⁸ Brach, s.333

Tablo 13
Finansal Opsiyon Değerini Yöneten Değişkenler

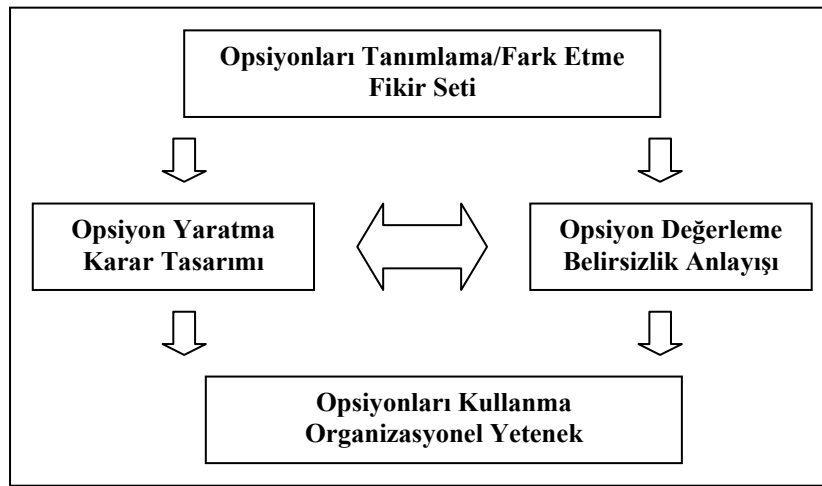
		Alım	Satım
Kullanım Fiyatı	+	-	+
Varlık Değeri	+	+	-
Volatilite	+	+	+
Faiz Oranı	+	+	-
Vadeye Olan Süre	+	+	+

Kaynak:Marion A. Brach, **Real Options in Practice**,1.Baskı, USA: Wiley, 2003, s.335

Gerçek opsiyonlar için bu ilişkiler daha karmaşıktır. Vadeye olan süre gerçek opsiyon değerini belirlenen gelir akışlarının zaman değeri ve rekabetçi tehditler nedeniyle arttırmaz. Belirsizliğin ve volatilitenin farklı kaynakları gerçek opsiyonların değerini yönetir ve gerçek opsiyon tümünün değerini arttırmaz. Burada bu durumu özetleyen bir kaç tespit yapabilmek mümkündür. İlk olarak riskler ve belirsizlikler opsiyon değerini azaltır.¹⁵⁹ İkinci olarak, karışık sinyallerden kaynaklanan belirsizlik tümünde değersiz olup belirsizlik yönetsel kabiliyetin çok iyi bilgilendirilmiş kararlar vermesini engeller. Üçüncüsü, gerçek opsiyonlar belirsizliği değerlemezler. Gerçek opsiyonlar belirsizliği yanıtlayan esneklik değerini değerlerler. Finansal opsiyonlar, ilgili hisselerin gözlenebilir fiyatları altında kullanılırlar. Gerçek opsiyonlar buna zıt olarak ilgili varlığın gelişimi devam ederken kullanılmaya ihtiyaç duyar. Finansal opsiyonlar belirsizlikten fayda sağlamakta olup burada belirsizlikten kasıt volatilitenin kensidir. Artan nitelikteki bir volatilitate aşağı yönlü riskler sınırlı kaldığında daha yüksek bir yukarı harekete yol açar. Gerçek opsiyonlarda esneklik operasyonel esneklik ve belirsizlikle ilgili ilişkili olarak tanımlanır. Operasyonel belirsizlik esnekliği ve gerçek opsiyon değerini azaltır. Eğer operasyonel belirsizlik gerçek opsiyonun kullanılmasından önce çözülebilirse, gerçek opsiyon değerini etkileyecektir. Bununla birlikte operasyonel belirsizlik sadece karar verildikten ve kaynaklar üstlenildikten

¹⁵⁹ Huchzermeier ve Loch, s.185-197

sonra çözülür ise, operasyonel belirsizlik gerçek opsiyon değerini ve esnekliği azaltır.¹⁶⁰ Operasyonel nitelikteki belirsizlikler bütçe kısıtlamaları, gelecekteki pazar ödemeleri, ürün performansı ile alakalı özel riskler ve rekabet eden ürünlerin performansı ile alakalı pazar riskini içermektedir. Oragnizasyonların karar alabilme yetenekleri gerçek opsiyonların değerlerini biçimlendiren önemli bir faktördür. Buna göre ancak karar alabilme yetenekleri var olan organizasyonlar için bir gerçek opsiyon değerinden bahsedilebilir. Aşağıda gerçek opsiyonların değerini biçimlendiren değişkenler gösterilmiştir.¹⁶¹ (Şekil 27)



Şekil 27: Gerçek Opsiyon Değerini Yöneten Değişkenler

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.338

7.YATIRIMLARIN OPTİMAL ZAMANLAMASI VE BELİRSİZLİĞİN DEĞERİ

Finansal opsiyonlar söz konusu olduğunda vega, delta, theta, rho ve xi gibi kökenleri Yunanca olan bazı anahtar nitelikte değişkenlerin opsiyonların hassasiyetlerini anlamakta ve tanımlamakta kullanıldıkları görülür. Bu parametreler, vadeye olan sürede belirsizliğe karşı opsiyon hassasiyeti, ilgili varlığın gelecekteki değerinin değişen volatilitesi, kullanım fiyatı, risksiz faiz oranı ya da varlığın tarihsel

¹⁶⁰ A.Huchzermeier ve C.H.Loch, “Project Management Under Risk:Using Real Options Approach to Evaluate Flexibility in R&D”, **Management Science**, Vol:47, No:85, (2001)

¹⁶¹ Brach, s.335 - 336 - 337

fiyat volatilitesi gibi bazı kavramları yansıtmaktadırlar. Temelde bu kavramlar, opsiyonun değerini şekillendiren değişkenlerdeki değişimlerden kaynaklanan riski minimize etmeye yönelik korunma stratejilerini biçimlendirmektedirler. Gerçek opsiyonlar için opsiyon değeri ve belirsizlik arasındaki ilişki daha az açıktır. Genel olarak belirsizlik ve risk gerçek opsiyonların değerini azaltırlar. Bu bakımdan projenin teknik başarısındaki belirsizliğin artması açık bir biçimde ilgili gerçek opsiyon değerini düşürür. Gerçek opsiyonlardaki belirsizliğin çoklu yönetici unsurları mevcuttur ve opsiyon her birinin farklı hassasiyetlerini yansıtmaktadır. Belirsizliğin kaynaklarına bağlı olarak opsiyonun değeri değişmekte olup gerçek opsiyonlarda belirsizlik konusunda dört kaynaktan bahsedebilmek mümkündür.

1. Pazar değişkenlik belirsizliği
2. Vadeye olan süre belirsizliği
3. Sona eriş zamanı belirsizliği
4. Teknolojik belirsizlik

7.1.Pazar Değişkenlik Belirsizliği

Huchzermeier ve Loch (H&L) yapmış oldukları çalışmalarla, finansal opsiyonlardan farklı olarak volatilitedeki bir artışın gerçek opsiyon değerinde kendiliğinden bir artış anlamına gelmeyeceğini göstermişlerdir.¹⁶² Bir firma, yeni bir ürün ya da hizmet programına başladığında özel ya da teknik belirsizliğin bir derecesi ile karşı karşıya gelir. Bu belirsizliğin yanında firma nihai ürün ya da hizmetin performans özelliklerinin ne olduğu hususunda da bir başka belirsizlik ile de ileride karşılaşmak durumundadır. Yönetimin, mühendis ve pazarlama personelin kanaatleri ürün ya da hizmetin performanslarının farklı düzeylerine erişen olasılıklar olarak ifade edilir. Özel ya da teknik belirsizliğin derecesi, ürün performans belirsizliğinin derecesi ve pazar talep belirsizliğinin derecesi, son ödeme fonksiyonun biçimini yöneten değişkenlerdir. Yüksek pazar belirsizliği daha kesin olmayan ve volatil ödeme

¹⁶² Huchzermeier ve Loch, *Evaluating R&D Projects as Learning Options: Why More Variability Is Not Always Better*, s.185-197

fonksiyonu sonucunu ortaya koyar. Pazar değişkenliğinin belirsizliği modellenmesi hususunda binomial model kullanılabilir. Örneğin, bir ilaç firmasının dört farklı hastalığa yönelik dört farklı klinik öncesi üründen oluşan bir ürün portföyünün olması durumunda, her bir ilaç için farklı senaryolar ve bu senaryolar ışığında farklı pazar talep gereksinim olasılıkları söz konusu olacaktır. Böyle bir örnekte her ilaç için en iyi ve en kötü vakalar ve ilaçların üretim aşamaları dikkate alındığında, her ürün için pazar gereksinim değişkenliği daha açık ve farklı bir biçimde ortaya çıkar. Bu tür bir durumda başlama anındaki beklenen değer her üretim senaryosu için farklıdır ve pazar değişkenliği üzerindeki varsayımları yansıtır. Beklenen pazar değeri en iyi ve en kötü senaryo varsayımları ile her bir durumun meydana gelme hadisesine bağlı olan olasılıklar üzerine kuruludur. Başlama anındaki beklenen ürün değerine ulaşmak için beklenen pazar değeri tamamlanan ürün özelliğinin teknik olasılığı ile bu ürün özelliğine atanmış, elde edilmesi beklenen pazar paylarının çoklu çarpımı ile çarpılır. Bir başka anlatımla beklenen pazar değerinin 255 milyon \$ olarak atandığı bir sayısal örnekte beş aşamalı üretim süreci içinde % 20 başarı şansı ve sırasıyla % 8, % 12, % 22, % 38, % 100 pazar payı öngüldüğü bir vakada ürün için beklenen pazar değeri 91.91 milyon \$ olacaktır.

$$\begin{aligned} \text{Beklenen ürün değeri (BÜD)} &= 255 \text{ milyon \$} * (0.2*0.08+0.2*0.12+0.2*0.38+0.2*1) \\ &= 91.91 \text{ milyon \$} \end{aligned}$$

Yukarıdaki varsayımsal durum temel bileşik opsiyon modeli olup her bir aşama için opsiyon değeri $p = [(1+r)*BÜD - V_{\min}] / [V_{\max} - V_{\min}]$ formülü ile hesaplanacaktır. Yukarıdaki sayısal örnekte olduğu gibi her aşamada ürünün pazar payından alması umulan payın, bir önceki aşamadan daha yukarı yönde arttığı durumlarda opsiyon değeri artan bir eğime sahip bir eğri biçimini kazanmaktadır.¹⁶³

Bu analizdeki temel kavrayış, pazar gereksinim değişkenliğinin yatırım opsiyonun değerini azalttığıdır. Buna göre daha yüksek varyans daha düşük opsiyon değeri demektir. Bu etki daha çok birden fazla ürünün varlığı durumunda ürünlerin opsiyon değerleri arasında yapılmış bir kıyaslamada ortaya çıkar. En yüksek opsiyon

¹⁶³ Brach, s.105-106-107-108-109-110

değeri pazar değişkenliğinin eksikliğinde görülür. Bu notasyon belirsizlik artışının opsiyon değerini arttırdığına ilişkin genel varsayımın tersidir. Bu durum, varlık ve opsiyon değeri ile bunlara bağlı belirsizlik kaynakları arasında ayırım yapılmasının önemine işaret eder. HL'nin de belirttiği gibi arttırılmış pazar ödeme belirsizliği, opsiyonun değerini arttırırken gereksinim değişkenliğini arttırmaz. Parada bulunan bir yatırım opsiyonu için, pazar belirsizliğinin çözümü çok kritik değildir. Ancak başa baş durumdaki bir opsiyon için, pazar gereksinim değişkenliğini çevreleyen belirsizliğin azaltılması kullanıcı açısından daha önemlidir. Eğer pazar ürün gereksinim değişkenliği yüksek olarak algılanıyorsa; yönetim, öğrenmedeki kaynaklara yatırım yapmayı ve pazar değişkenliğini tanımlamayı, özellikle parada olan yatırım opsiyonları için isteyebilir.¹⁶⁴

7.2.Alım Opsiyonları İçin Vadeye Olan Süre Belirsizliği

Finansal opsiyonlardan ziyade gerçek opsiyonlar, yatırımın vadeye olan süresinin rassal doğasından dolayı sıkıntı çeker. Farklı yapıda olan projelerin tamamlanma süreleri tahmin edilemediği için bunlara ilişkin gelir akışları da belirsizlik gösterir. Benzer şekilde gerçek opsiyonların çoğu için, potansiyel rakiplerin piyasaya girişleri ve gelecekteki teknolojik gelişmelerin henüz belirsiz olması nedeniyle, ne kadar karlı bir gelir akışını üretebilecekleri de net değildir. Genel olarak kullanım gününün daha ileri bir tarihe işaret etmesi finansal opsiyonu daha değerli hale getirir. Bu durum gerçek opsiyonlar için geçerli değildir. Vadeye olan süre uzadıkça ilgili varlığın yaratacağı nakit akımları daha uzun bir süreye yayılır ve böylece cari değer düşer. Bu durum basitçe paranın zaman değeri isimlendirilir. Finansal opsiyonlarla gerçek opsiyonlar arasındaki en önemli fark, finansal opsiyonların tekel (monopol) nitelikte opsiyonlar olmasıdır. Buna mukabil, gerçek opsiyonlar tekel nitelik taşımazlar. Piyasaya rekabetsel nitelikteki bir giriş gerçek opsiyonu erken sonlandırabilir. Gerçek opsiyonlar için vadeye olan süre tam olarak bilinemez. Burada vadeye olan sürenin opsiyon üzerinde nasıl bir etkiye sahip olduğu ve gerçek bir alım opsiyonunun değerinin zaman volatilitesine ne kadar duyarlı olduğu soruları uygulayıcıların karşısına çıkmaktadır. Temettü ödemeli hisse senedi üzerine kurulu bir alım opsiyonu şu karar

¹⁶⁴ Brach, s.110-111-112

senaryosunu temsil eder; alım opsiyonu sahibine sadece opsiyonu kullandığında temettü elde etmeyi ve hisse edinmeyi sağlar. Amerikan alım opsiyonu sahibi için kullanma tavsiyesi, eğer opsiyonun üzerinde bulunduğu hisse senedi bir temettü öder ise değişir. Temettü ödemeli hisse senedi üzerine kurulu bir Amerikan alım opsiyonu için en iyi kullanım anı, temettü hakkının önceki günüdür.¹⁶⁵

Gerçek opsiyon dünyasında vade özeldir ve bir korunma söz konusu değildir. Finansal opsiyonlarda bilinmeyen vade problemiyle ilgili geline son nokta rasgele vadeli bir Amerikan alım opsiyonudur. Burada opsiyon değeri, daima bir standart Amerikan alım opsiyonun ağırlıklı ortalama değerinden daha küçüktür. Bu kavrayış Peter Carr'ın 1998'te yayınladığı çalışmasında ortaya konmuştur.¹⁶⁶ Carr'ın yargısının arkasındaki sezgi, rasgele vadeli bir Amerikan opsiyonunun, farklı vadeli çoklu alım opsiyonlarının bir portföyünden başka bir şey olmadığıdır. Opsiyon sahibi aynı kullanım zamanında bütün portföyü değerlendirecektir. Bu nedenle alım değeri yatırım için kritik değer yüksek olduğunda, rastgele bir opsiyona göre daha az değerli olmalıdır. Rastlantısal vade opsiyon değerini azaltır, tetik değerini düşürür.¹⁶⁷ Gerçekte vadeye olan süre belirsiz hale geldikçe yatırım için kritik eşik kar getirecek bir NBD analiz düzeyine yaklaşır ve beklemenin opsiyon değer etkisini yok eder. Vadenin belirsiz olmasının yarattığı etki, vadenin, ortalamanın ve varyansın dağılımına bağlıdır. Volatilite yükseldikçe yani vadeye olan süre belirsizleştikçe, opsiyon uzayının sınırları bir NBD sayısında birleşir. Vade zamanının belirsizliğine ilişkin kaynaklar çok çeşitli olup bunlardan en belirgin olanı rekabetsel nitelikteki girişlerdir. Buna göre gerçek opsiyonlarda opsiyon değeri piyasaya rakiplerin girmesi nedeniyle değersiz hale gelebilir. Örneğin, bir işletme yönetiminin bir üretim hattına 100 milyon \$ yatırım yapma fırsatına sahip olduğunu, bu yatırımın % 50 olasılıkla ürünün sunulduğu zamanda beklenen yaşam süresi için 500 milyon \$'lık bir bugünkü değerli nakit akışı yaratacağını varsayalım. En kötü senaryoda ürünün sunum zamanında gelir akışlarının bugünkü değerinin 200 milyon \$ olması beklenmektedir. Yönetimin yeni ürün hattının tamamlanma zamanları ve bunların olasılıkları üzerine dört farklı senaryo geliştirdiği

¹⁶⁵ Brach, s.113-114

¹⁶⁶ Peter Carr, "Randomization and Amerikan Put", **Review of Financial Studies**, Vol:11, No:597, (1998)

¹⁶⁷ T.Berrada, "Valuing Real Options when Time to Maturity Is Uncertain", **Third Real Option Conference**, USA, 1999

varsayımı altında pazara en çabuk ulaşan ürünün daha fazla nakit akımı üreteceği açıktır. Birinci senaryoda beş değişik tamamlanma süresi öngörülmüş olup bunlar sırasıyla, iki, üç, dört, beş ve altı yıl olarak planlanmıştır. Her bir tamamlanma süresinin olasılığı % 20'dir. AOSM (WACC)'i % 13,50, risksiz faiz oranı % 7, q 0.5, beklenen değer 350 milyon \$, maksimum değer 500 milyon \$, minimum değer 200 milyon \$, maliyet 100 milyon \$, p 0.5816 ve t dört yıl olarak planlanmıştır. Zaman belirsizliğinin etkisini araştırmak için üretilen nakit akışlarının miktarının, ürünün sunum zamanlamasının bir fonksiyonu olarak değişmeyeceğini varsaymak gerekir. Dört farklı senaryo için opsiyon değeri şu şekilde hesaplanır;

$$C_x = [pV_{\max} + (1 - p) V_{\min}] / [q_{t2x} (1 + r)^2 + q_{t3x} (1 + r)^3 + q_{t4x} (1 + r)^4 + q_{t5x} (1 + r)^5]$$

Yukarıdaki veriler ışığında alım opsiyonun birinci senaryoya göre değeri 184.40 milyon \$ olacaktır. Bu örnekte dört farklı senaryodan sadece birine ait veriler (Bu senaryoda tamamlanma olasılıkları eşit kabul edilmiştir.) verilmiş olmakla beraber diğer üç senaryoda farklı yıllarda, farklı tamamlanma zamanlarının, farklı opsiyon değerine işaret edeceği açıktır. Bu durum farklı zamanlama senaryolarının opsiyon değeri üzerindeki etkisine işaret etmektedir.¹⁶⁸

Vadeye olan süre sadece opsiyon değerini etkilemez; ayrıca yatırım için kritik maliyet değeri üzerinde de etkilidir. Vadeye olan süre ya da projenin tamamlanmasına ilişkin belirsizlik arttıkça kritik varlık değerine olan ihtiyaç yükselir. Daha yüksek varlık değeri opsiyonu para dışına taşımaksızın beklenen maliyetlere yatırım yapmayı haklı çıkarır. Eğer bir yönetim kritik maliyetten daha fazla yatırım yapmışsa, yatırım opsiyonu para dışına hareket eder. Zaman belirsizliğinin kontrol edilmesi ve anlaşılması, başa baş durumdaki bir opsiyon için, paradaki bir alım opsiyona göre, daha önemlidir.¹⁶⁹

7.3. Satım Opsiyonları İçin Vadeye Olan Süre Belirsizliği

Pazar koşullarının kötüye gitmesi durumunda bir varlığın sahibi için, bir gerçek satım opsiyon zamanının uzunluğu vadeye olan sürenin belirsizliğine işaret eder.

¹⁶⁸ Brach, s.115-116

¹⁶⁹ Brach, s.117-120

Örneğin bir rakibin piyasaya ani girişi, var olan varlıktan gelen cari nakit akımlarını belirgin olarak azaltır ya da sona erdirir. Bu durum temettü ödemeli hisse üzerine kurulu bir Amerikan satım opsiyonu ile karşılaştırılabilir. Bir şirket sabit bir temettü alır, yani varlık tarafından üretilen nakit akımlar elde eder. Burada vadeye olan süresi bilinmeyen ya da süresi çok belirsiz olan gerçek satım opsiyonları nasıl değerlendirilir sorusu uygulayıcıların karşına çıkmaktadır. Bu soruya sağlıklı bir cevap verilebilmesi için basit bir örnek üzerinde sorunun düşünülmesi daha faydalı olacaktır. Bir işletme yönetiminin elinde 200 milyon \$ değer yaratacak bir varlığın olduğunu, yönetimin bir rakip girişinin gerçekleşeceğine inanmakla beraber bunun ne zaman gerçekleşeceğini bilmediği varsayılmaktadır. İşletme bu durumda, söz konusu varlıktan en iyi senaryoda 200 milyon \$, en kötü senaryoda 30 milyon \$ elde edeceğini beklemektedir. Buna uygun olarak her iki olayın gerçekleşme olasılıkları % 50 olarak kabul edilmektedir. Bir rakibin piyasaya girişi kesinleşir kesinleşmez, yönetim sabit varlıklarla ilişkili ürününden, 130 milyon \$'lık bir hurda değer karşılığında vazgeçebilmektedir. Buna göre söz konusu satım opsiyonunun değeri şu şekilde hesaplanır;

$$P = [S_v - (p K_{max} + (1 - p) K_{min})] / (1 + r)^t$$

Bu gösterimde S_v 130 milyon \$'lık hurda değeri, K_{max} ve K_{min} varlık üzerindeki satım opsiyonunun kabul edildiği andaki beklenen maksimum ve minimum gelir akışlarını göstermektedir. AOSM (WACC) % 13,50, risksiz faiz oranı % 7, q 0.5, beklenen değer 115 milyon \$, K maksimum maliyeti 200 milyon \$, K minimum maliyeti 30 milyon \$, hurda değer 130 milyon \$, p 0.54735 ve t 4 yıl olarak belirlendiğinde opsiyon fiyatı 5.30 milyon \$ olarak elde edilir. Vadeye olan süre belirsizliğinin opsiyon fiyatı üzerindeki etkisini şu şekilde açıklamak mümkündür. Vadeye olan süre belirsizliğini tanımlamak için satım opsiyonunun değeri, (önceki bölümde yer alan alım opsiyonu örneğinde ele alındığı gibi), aşağıda yer alan formül kullanılarak t_2 'den t_5 'e kadar her bir senaryo için q olasılığıyla birleşmiş şekilde hesaplanır.

$$P = [S_v - p K_{max} + (1 - p) K_{min}] / [q_{t2} (1 + r)^2 + q_{t3} (1 + r)^3 + q_{t4} (1 + r)^4 + q_{t5} (1 + r)^5]$$

Yukarıda yer alan formül farklı zamanlama koşulları altında satım opsiyonu için aşağıda yer alan değerlerin hesaplanmasına olanak tanımaktadır.

Tablo 14**Zaman Belirsizliği Altında Satım Opsiyonun Değeri**

Vadenin Beklenen Süresi (Expected Time of Maturity)				Vadeye Olan Beklenen Süre (Expected Time to Maturity)				
1.Yıl	2.Yıl	3.Yıl	4.Yıl	1.Yıl	2.Yıl	3.Yıl	4.Yıl	5.Yıl
4.00	3.98	2.63	5.37	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
Satım Opsiyonun Değeri				Satım Opsiyonun Değeri				
1.Yıl	2.Yıl	3.Yıl	4.Yıl	1.Yıl	2.Yıl	3.Yıl	4.Yıl	5.Yıl
5.28	5.31	5.80	4.82	5.28	5.30	5.29	5.27	5.30

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.122

Bu örnekte varlık değeri (hurda değer) ve kullanım fiyatı (gelir akışının bugünkü değeri) zaman belirsizliğine tabidir. Yönetim, rakibin piyasaya girdiği anda projeden vazgeçme kararı verecek olup, bu zaman noktası belirsizdir. Kullanım fiyatının zamanlaması (bu yatırım maliyetlerinin, K 'nın üstlenilmesidir) sabittir ve belirsizliğe açık değildir. Yukarıdaki tablodan da görüleceği üzere bu senaryoda zaman belirsizliği, kullanım fiyatı ve varlık değeri için aynıdır ve bu nedenle aralarında pozitif bir korelasyon vardır. Pozitif bir korelasyon sahibi açısından bir korunma sağlar ancak bu durum genel volatiliyeyi ve bu nedenle opsiyon değerini azaltır. Vade zamanlamasındaki belirsizlik bir alım opsiyonu ile bir satım opsiyonu üzerinde aynı etkiye sahiptir. Yukarıdaki tabloda yer alan beşinci senaryo gibi daha açık, belirli bir zaman, daha yüksek bir satım opsiyon değeri demektir. Senaryo dörtteki gibi zaman dalgalandıkça satım opsiyon değeri düşer.¹⁷⁰

Kullanım fiyatının vadeye olan süre belirsizliğine tabi olduğu hususu bir örnekle açıklanabilir. İşletme yönetiminin bugün 130 milyon \$'lık hurda değer karşılığı varlıktan vazgeçme opsiyonuna sahip olduğu varsayılmaktadır. Yönetim, piyasaya bir rakip girişinin gerçekleşeceğine ve bunun ilgili varlık değerini azaltacağına inanmaktadır. Burada rakibin piyasaya tam olarak ne zaman gireceği konusunda bir belirsizlik bulunmaktadır. Yukarıda yer alan alım opsiyonu örneğinde olduğu gibi, bu

¹⁷⁰ Brach, s.121-122

satım opsiyonunun değerlemesindeki zamanlama belirsizliğini pazar belirsizliğinden ayırt etmek için, gelir akışı üzerindeki belirsiz zamanlama etkisi göz ardı edilecektir. Bu varsayımlar ışığında satım opsiyonun değeri aşağıdaki formül ile hesaplanacaktır;

$$P = S_v - [(p K_{max} + (1 - p) K_{min}) / (1 + r)^t]$$

Yukarıdaki sayısal örneğin verileri aynen alındığında aynı opsiyon değerinin bu kez değeri 36.13 milyon \$ olarak hesaplanır. Vadeye olan zaman belirsizliğinin etkisi aşağıdaki formül ile genişleterek incelenebilir;

$$P = S_v - [p K_{max} + (1 - p) K_{min}] / [q_{t2} (1 + r)^2 + q_{t3} (1 + r)^3 + q_{t4} (1 + r)^4 + q_{t5} (1 + r)^5]$$

Yönetimin alım opsiyonunda daha evvel gösterildiği gibi aynı zamanlama senaryolarını esas aldığı düşünülürse opsiyon değerleri şu şekilde gerçekleşecektir.

Tablo 15

Artan Zaman Volatilitesi Altında Satım Opsiyonun Değeri

Vadenin Beklenen Süresi (Expected Time of Maturity)				Vadeye Olan Beklenen Süre (Expected Time to Maturity)				
1.Yıl	2.Yıl	3.Yıl	4.Yıl	1.Yıl	2.Yıl	3.Yıl	4.Yıl	5.Yıl
4.00	3.98	2.63	5.37	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
Satım Opsiyonun Değeri				Satım Opsiyonun Değeri				
1.Yıl	2.Yıl	3.Yıl	4.Yıl	1.Yıl	2.Yıl	3.Yıl	4.Yıl	5.Yıl
36.55	36.06	27.33	44.68	36.55	36.20	36.34	36.76	36.13

Kaynak:Marion A. Brach, **Real Options in Practice**,1.Baskı, USA: Wiley, 2003, s.124

Zaman volatilitesinin etkisi açısından bu satım opsiyonu örneği alım opsiyonu örneğinin tersidir. Zamanlamanın volatilitesi arttıkça satım opsiyonun değeri de artış gösterir. Yukarıdaki tablodan da görüleceği üzere dördüncü senaryo en yüksek opsiyon değerine sahiptir. Bu senaryo en yüksek dalgalanmayı içeren zamanlama varsayımlarını

yakalamıştır. Alım opsiyonu ters yönde hareket eder: vadeye olan zamanlamanın daha az dalgalanma göstermesi alım opsiyonu değerinde daha fazla artış yaratır.¹⁷¹

7.4.Teknoloji Belirsizliği

Pek çok firma yeni ürün geliştirme yatırımlarının büyüklüğünü ve zamanlasını sorgulamakla kalmaz ayrıca hızlı ilerleme geçiren teknolojilerde hangi teknolojiye yatırım yapacağını da dikkatli bir biçimde incelemek zorundadır.

Bir bilgisayar üreticisi işletme üretmeyi planladığı son model bilgisayarlarda hangi teknolojiyi kullanacağını ve kendi ürünleri için kullanılabilir hale gelecek daha iyi bir teknoloji gelene kadar bir ya da iki yıl beklemenin daha iyi olup olmadığını düşünmek zorundadır. Diğer taraftan, teknolojik keşifler rasgele gerçekleşir ve araştırmaya ayrılan kaynaklar ile karlı bir nakit akışı ile sonuçlanacak bir varlığın tasarımı arasında düzgün bir korelasyon ya çok düşüktür ya da yoktur. H. Weeds 1999 yılında hazırladığı çalışmasında işletmenin araştırma yatırım opsiyonu kullanarak ikinci bir opsiyon kazanacağını belirtmiştir. Weeds burada kullanım zamanının firma tarafından seçilen bir tarihten ziyade rasgele bir zaman olduğuna işaret eder.¹⁷² Bu teknik belirsizlik durumu yatırımı erteleme suretiyle yatırımcı açısından ek bir avantaj sağlayabilir. Bu örnekte firma ürünlerinin sonraki jenerasyonuna var olan bir teknolojinin uygulanması ya da henüz bilinmeyen bir zamanda yeni teknolojilerin keşfine kadar üretimin erteleme kararları arasında seçim yapmak zorundadır. Böyle bir senaryoda mevcut teknolojinin uygulanmasında durumunda işletme söz konusu yeni teknolojiyi belirli bir süre için kullanamayacaktır. Söz konusu süre işletmenin rekabetçi bir piyasada ürün yaşam beklentisi ile ürün geliştirme süresi hakkındaki varsayımları yansıtır. Mevcut teknolojinin yeni ürünler için kullanımının seçimi durumunda her hangi bir teknik risk söz konusu değildir. Yeni teknolojinin yeni ürünler için seçimi durumunda bu teknolojinin uygulanması hakkında bazı belirsizlikler söz konusudur. Teknoloji seçimi hususunda işletmeyi etkileyen çeşitli parametreler vardır. Bunlar kısaca şu şekilde sıralanabilir;

¹⁷¹ Brach, s.123-124

¹⁷² H.Weeds, **Reverse Hysteresis: R&D Investments with Stochastic Innovation**,USA: Working Paper, 1999

1. Mevcut pazar payının devam ettirilmesi yada pazar payının artırılması konusunda yeni teknolojinin önemi,
2. Yeni teknolojinin uygulanmasının zamanlaması ve maliyeti,
3. Yeni teknolojinin uygulanmasında başarılı olma olasılığı q ,
4. Mevcut teknoloji uygulanmayıp yeni teknolojinin beklenmesi durumunda ortaya çıkan fırsat maliyeti

Yönetim böyle bir durumda muhtemelen yatırım kararı için çevresel koşulları daha iyi tanımlamak ve rekabet şartlarını tespit etmek amacıyla birincil, ikincil pazar araştırmaları yaparak pazarlama takımları, ürün geliştirme takımları, mühendisler ve bilim adamlarıyla yoğun bir içsel tartışmaya girecektir. Yönetim yeni teknolojinin gelişine ilişkin farklı olasılık dağılımları geliştirebilir. Yönetim, henüz belirsiz maliyetlerle yeni teknolojiyi kazanma opsiyonuna sahip olacaktır. Yeni teknolojinin uygulanmasının başarılması durumunda gelecekteki pazar ödemesini gösteren farklı olasılık dağılımları geliştirilecektir. Muhtemelen ilk teknolojinin uygulanması daha az rekabetçi olmakla birlikte ürünlerin pazara daha hızlı getirilmesi ve daha hızlı geliştirilmesi suretiyle yeni teknolojiye kıyasen daha ucuz olacaktır.

Konuyu sayısal bir örnek üzerinde açıklamak daha yararlı olacaktır. Mevcut teknolojinin uygulanma maliyetinin 50 milyon \$ olacağını düşünmektedir. Bu teknoloji seçimi nedeniyle her hangi bir teknik risk olmayacağı için q (teknoloji olasılığı % 100'dür) bir olarak kabul edilir. Ürünün geliştirilmesi ve piyasaya sunulması bir yıl içinde gerçekleştirilecektir. Yönetim mevcut teknolojinin kullanımıyla üretilen ürünlerin piyasaya sunumları ve pazar paylarıyla ilgili olarak üç temel senaryoya sahiptir (her biri için q 'lar eşittir; $q = 0.333$). Bu senaryolar basit olarak talebi etkileyen genel global ekonomik durum ve rekabetçi çevre gibi diğer belirsizlikler tarafından yönetilirler. Yönetim ürünün piyasada en üst düzeye altı yıl içinde ulaşacağını ve bunu takip eden dönemde ürünün düşüşe geçeceğini düşünmektedir. Pazar büyüklüğü çerçevesinde ürün için en kötü gelir senaryosu 200 milyon \$ ($q = 0.3$), en iyi gelir senaryosu 500 milyon \$ ($q = 0.7$) olarak ifade edilmiştir. Mevcut teknoloji ve buna bağlı

ürün için gelir akış senaryoları, yıllara bağlı pazar payları ve alım opsiyonuna ilişkin diğer veriler aşağıdaki tablodaki gibidir.¹⁷³

Tablo 16
Ürün 1 İçin Pazar Payları

Piyasaya Giriş Zamanı (Yıllar)	1.Senaryo (%)	2.Senaryo (%)	3.Senaryo (%)
1	5	3	1
2	8	5	2
3	15	8	4
4	20	10	8
5	27	15	10

Kaynak:Marion A. Brach, **Real Options in Practice**,1.Baskı, USA: Wiley, 2003, s.127

Tablo 17
Ürün 1 İçin Gelir Akış Senaryoları

En İyi Durum						
Senaryo	Yıl 2	Yıl 3	Yıl 4	Yıl 5	Yıl 6	q
1	25	40	75	100	135	0.333
2	15	25	40	50	75	0.333
3	5	10	20	40	50	0.333
En Kötü Durum						
Senaryo	Yıl 2	Yıl 3	Yıl 4	Yıl 5	Yıl 6	q
1	10	16	30	40	54	0.333
2	6	10	16	20	30	0.333
3	2	4	8	16	20	0.333

Kaynak:Marion A. Brach, **Real Options in Practice**,1.Baskı, USA: Wiley, 2003, s.127

Yukarıda verilen bilgiler ışığında birinci yılda varlıktan elde edilmesi beklenen değer, bu gelir akışlarının meydana gelme olasılıklarıyla (en iyi senaryo (Eİ) için 0.7, en

¹⁷³ Brach, s.125-126-127

kötü senaryo (EK) için 0.3) söz konusu pazar paylarının gerçekleşme olasılıklarının (her biri için 0.333: S1, S2, S3) ağırlıklandırıldığı bugünkü değerdir. Buna göre firmanın birinci ürün için beklenen değeri şu şekilde hesaplanır:

$$V_{\text{bek}} = [0.7 (0.333 Eİ - S_1 + 0.333 Eİ - S_2 + 0.333 Eİ - S_3) + 0.3 (0.333 EK - S_1 + 0.333 EK - S_2 + 0.333 EK - S_3)]$$

Yukarıdaki gösterime göre; teknik başarı olasılığı % 100, beklenen değer 90.96 milyon \$, V_{max} 129.95 milyon \$, V_{min} 51.98 milyon \$, p 0.58167 ve alım opsiyonunun değeri 20.60 milyon \$'dır.

Yönetim yeni teknolojinin gelişiyle alakalı olarak benzer şekilde üç farklı senaryoya sahiptir. Yeni teknolojinin ulaşma olasılığının y ekseninde, yeni teknolojinin ulaşma zamanının x ekseninde gösterildiği bir koordinat sisteminde her bir senaryo farklı eğim ve dağılıma sahip üç farklı eğri ile temsil edilebilir. Yönetim yeni teknolojinin uygulanmasındaki başarı olasılığını % 50 - % 85 arasında öngörmektedir. Yeni teknoloji ürün için gelir akışları ve pazar payları senaryoları aşağıdaki gibi verilmektedir.

Tablo 18
Ürün 2 İçin Pazar Payları

Piyasaya Giriş Zamanı (Yıllar)	1.Senaryo (%)	2.Senaryo (%)	3.Senaryo (%)
1	15	5	3
2	25	10	5
3	35	15	8
4	45	25	12
5	50	35	18

Kaynak: Marion A. Brach, *Real Options in Practice*, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.129

Tablo 19
Ürün 2 İçin Gelir Akış Senaryoları

En İyi Durum						
Senaryo	Yıl 2	Yıl 3	Yıl 4	Yıl 5	Yıl 6	q
1	75	125	175	225	250	0.333
2	25	50	75	125	175	0.333
3	15	25	40	60	90	0.333
En Kötü Durum						
Senaryo	Yıl 2	Yıl 3	Yıl 4	Yıl 5	Yıl 6	q
1	30	50	70	90	100	0.333
2	10	20	30	50	70	0.333
3	6	10	90	24	36	0.333

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, 1. Baskı, USA: Wiley, 2003, s.129

Yukarıda yer alan V_{bek} formülü firmanın ikinci ürünü için de geçerlidir. Yeni teknolojiyle üretilen varlığın beklenen değeri, yeni teknolojinin olasılığı, onun uygulanmasındaki teknik başarı, pazar ödeme senaryoları ve zamanlamanın fonksiyonudur. Yukarıdaki formülde hesaplandığı gibi beklenen değer teknik ulaşma olasılığıyla çarpılır ve yeni teknolojiye ulaşma olasılık dağılımı kurumsal sermaye maliyeti (1.135) ile indirgenir. Buna göre beklenen değer % 100 teknik başarı olasılığıyla 206.83 milyon \$'dır. Senaryo birde bir yıl içinde ve iki yıl içinde yeni teknolojiye ulaşma olasılıkları sırasıyla % 90 ve % 10'dur. Beklenen değer şu şekilde hesaplanır;

$$EV_1 = [(0.9 \cdot 206.83) / 1.135^1] + [(0.1 \cdot 206.83) / 1.135^2] + [(0 \cdot 206.83) / 1.135^3] + [(0 \cdot 206.83) / 1.135^4]$$

$$= 180.06 \text{ milyon \$}$$

Genel piyasa büyüklüğünün en iyi senaryo olduğu varsayımından hareketle elde edilen en yüksek varlık değeri 500 milyon \$'dır. Yeni teknolojiye ulaşılması ve bu teknolojinin yeni ürünlere uygulanması iki yıl içinde gerçekleşeceği düşünülmektedir. Uygulama teknik olasılığı % 100 olarak kabul edilmiştir. En kötü piyasa büyüklüğü

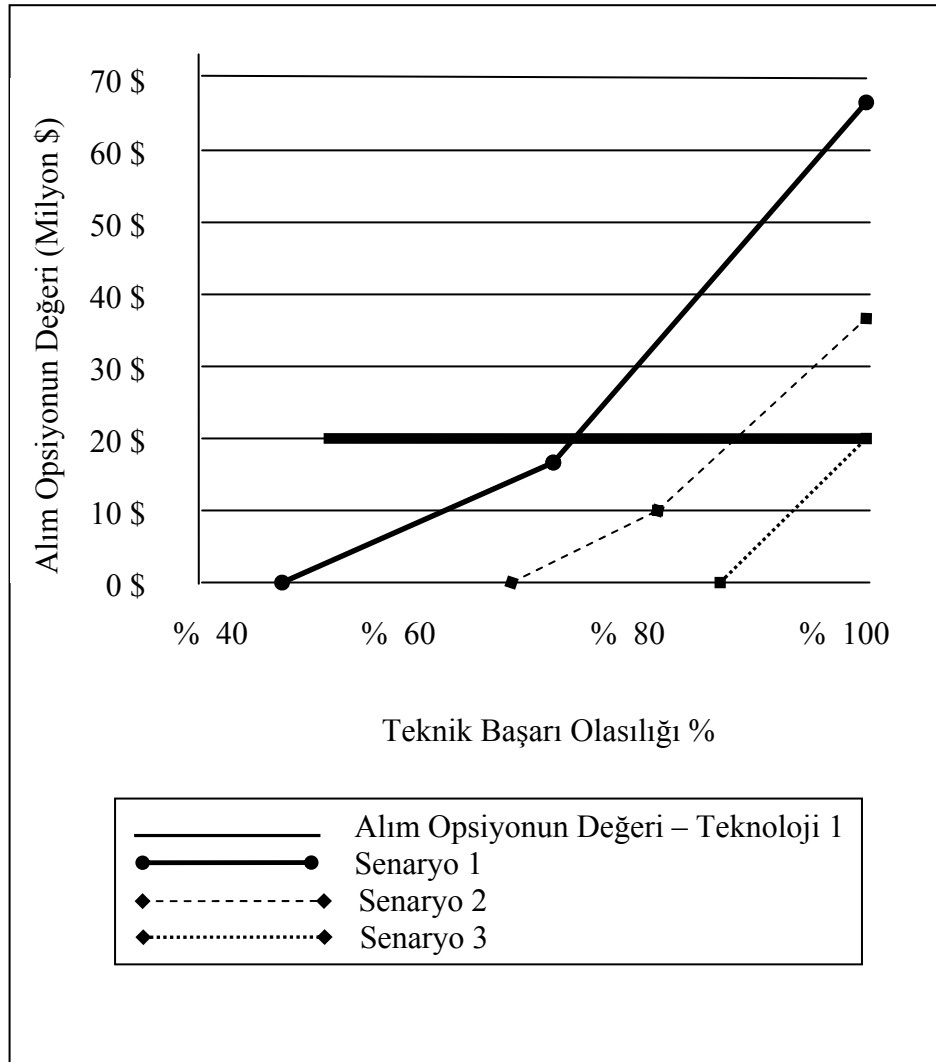
varsayımından en düşük varlık değeri elde edilecektir. Teknik başarı olasılığı en düşük değeri (% 50) alacaktır. Teknolojiye ulaşma ise dört yıl sürebilecektir. Farklı senaryoların her biri için gelir akımları 0.3333'lük ortaya çıkma olasılıklarıyla toplanacaktır. Bu hesaplama başarının teknik olasılığı hakkındaki dört farklı varsayım seti için üç farklı teknolojiye ulaşma senaryosu altında belirlenen değer için elde edilen sonuçları vermektedir. Piyasa ödeme senaryolarının her birinin % 33'lük eşit olasılıklarla gerçekleşeceği varsayılmaktadır. Sonuçlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 20
Belirsiz Teknoloji Ulaşma Zamanlaması ve Özel Risk Altında
***p* Risk Yansız Olasılık ve Varlık Değeri**

Teknik Başarının Olasılığı	% 100	% 85	% 75	%50
Beklenen Değer				
Senaryo 1	180.06 \$	153.05 \$	135.05 \$	90.03 \$
Senaryo 2	159.16 \$	135.29 \$	119.37 \$	79.58 \$
Senaryo 3	142.62 \$	121.23 \$	106.97 \$	71.31 \$
$V_{\max}$	252.23 \$	252.23 \$	252.23 \$	252.23 \$
$V_{\min}$	30.40 \$	30.40 \$	30.40 \$	30.40 \$
p				
Senaryo 1	0.8606	0.7110	0.6112	0.3618
Senaryo 2	0.7315	0.6012	0.5144	0.2972
Senaryo 3	0.6307	0.5155	0.4387	0.2468

Kaynak:Marion A. Brach, **Real Options in Practice**,1.Baskı, USA: Wiley, 2003, s.130

Aşağıdaki grafikte alım opsiyon değerleri gösterilmektedir. Grafikte yer alan yatay kalın çizgi mevcut teknolojiye yatırım yapılma değerini göstermektedir. Mevcut teknolojiye yatırım yapmayı gösteren bu çizgi yönetim için daha iyi bir opsiyon değeri gösterir. bu temel kurulum yönetime yatırım için bilgi sağlar. Bu bilgi temel varsayımdaki değişimlerin her bir opsiyon değerine ve birbirleri arasındaki ilişkilerine olan etkisini gösterir. Özellikle yeni teknolojiye ulaşmayı beklemede hangi varsayım setlerinin daha değerli opsiyon değerine sahip olduğunu gösterir.

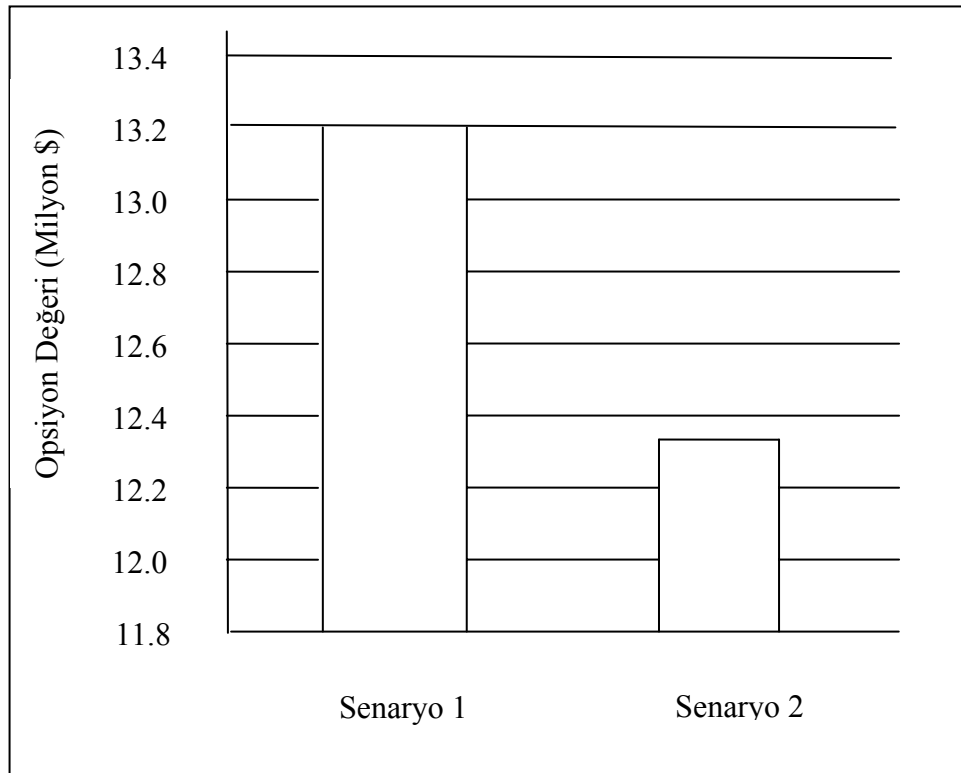


Şekil 28: Belirsiz Teknoloji Ulaşma Zamanlaması ve Özel Risk Altında

Alım Opsiyonunun Değeri

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.131

Yeni teknolojiye ulaşma senaryoları altında yeni teknoloji için azalan opsiyon değeri, ancak aynı teknik başarı olasılığı için, çoğunlukla teknolojiye ulaşmanın beklenen sürelerinin ayrı olduğunu gösterir: senaryo 1 için 1,1 yıl, senaryo 2 için 2 yıl, senaryo 3 için 3,1 yıl. Azalan opsiyon değeri böylece paranın zaman değerini gösterir. Teknolojiye ulaşma volatilité etkisinin daha iyi anlaşılması için beklenen süreler sabitlenip varyans artırılmalıdır. Aşağıda yer alan şekilde bu durum gösterilmiştir. Senaryo 1’de senaryo 2’ye göre teknolojiye ulaşma daha yüksek bir volatilitéye sahiptir. Her iki senaryoda da beklenen teknolojiye ulaşma zamanı 2,5 yıldır. Senaryo 1’de alım opsiyon değeri senaryo 2’ye göre daha yüksektir. Böylece teknolojiye ulaşma belirsizliği arttıkça opsiyon değeri de yükselmektedir. Bu bilgi ışığında teknolojiye ulaşma volatilitesi arttıkça potansiyel yukarı çıkış (yeni teknolojiye daha kısa bir sürede ulaşma) artar. Bunun neticesinde gerçek opsiyonun opsiyon değeri yükselecektir.¹⁷⁴



Şekil 29: Artan Teknoloji Belirsizliği Altında Alım Opsiyonunun Değeri

Kaynak: Marion A. Brach, **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003, s.132

¹⁷⁴ Brach, s.127-128-129-130-131-132

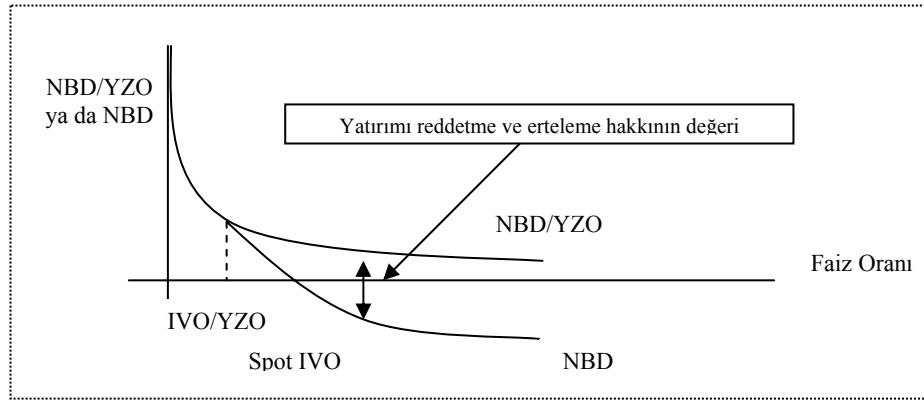
8.YATIRIM ZAMANLAMA OPSİYONLARI (YZO)

Ingersoll ve Ross yapmış oldukları çalışmalarda ertelenebilir yatırım projeleri için çeşitli değerlendirmeler yaparak eşik oranlar tespit ederek faiz oranlarının volatilitésinin projelerin NBD'si üzerindeki etkilerini göstermişlerdir.¹⁷⁵ Ingersoll ve Ross bu çalışmalarında faiz oranlarındaki azalmanın yatırımcıların sermaye bütçeleme kararlarını nasıl etkilediklerini göstermişlerdir.

Ingersoll ve Ross'un bu tespitlerini esas alan Lee projeyi bir dayanak varlık olarak değerlendirerek genişletilmiş NBD kavramı temelinde, faiz oranları değişiminin yatırım projesi için bir yatırım zamanlama opsiyonu içerdiğini belirtmiştir. Lee bu düşüncesini aşağıdaki şekil ile ifade etmiştir.

$$\text{NBD/YZO} = \text{Projenin Temel NBD'si} + \text{YZO}$$

$$\text{NBD/YZO} = \text{Projenin Temel NBD'si} + (\text{Erteleme opsiyonu değeri} + \text{Reddetme opsiyonu değeri})$$



Şekil 30: NBD/YZO ve NBD

Kaynak: Jr. Stephen Ross, “Uses, Abuses and Alternatives Net Present Value Rule”, **Financial Management**, (Autumn. 1995), s.96-102 ve Moon Ho Lee, “Valuing Finite-Maturity Investment-Timing Options”, **Financial Management**, Vol.26, No:2, (Summer 1997), s.60

¹⁷⁵ C. Cox, E.J. Ingersoll ve A.S Ross., “A Theory of The Term Structure of Interest Rates”, s.385-407.

YZO'nun temeli, proje yaşam sürecince faiz oranlarındaki muhtemel bir düşüşün, yatırımın ertelenmesi yoluyla projenin NBD üzerinde yapacağı katkının bir opsiyon olarak değerlendirilerek ölçülmesidir. Bu noktada önemli bir kavram yatırımın ertelenebilirliğidir.

Gerçek hayatta pek çok farklı nedenle yatırımcılar bir projeyi uygulamayı ertelemektedir. Örneğin yasal mevzuatta yapılması beklenen değişiklikler, patent sürelerinin rakipler üzerindeki etkisinin artırılması, politik çevrede yaşanan (seçim, ekonomik kriz gibi) bazı değişimler, teknolojik bazı gelişmeler ve bunların proje üzerindeki etkileri, rakiplerin davranışlarının değerlendirilmek istenmesi gibi çeşitli nedenlerle yatırımcılar karar aşamasında yatırım projelerini yürürlüğe koymayı erteleyebilmektedirler.

YZO, gerçek opsiyonların bir uzantısı olarak, geleneksel değerlendirme teknikleri yerine geçen bir bilgi setini yatırımcıya kazandırmaz. Bu opsiyon yatırımcıya kısa süreli faiz oranları üzerine ilave bir bilgi sağlar. Günümüzde karar vericiler salt tek bir değerlendirme tekniğine göre yatırım alternatiflerini değerlendirmezler. Bunun yerine farklı değerlendirme tekniklerinin çıktılarını yatırım alternatifleri analizlerinde bir bütünün bileşenleri olarak görmektedirler. Bu bakımdan faiz oranları önemli bir faktör olduğundan YZO, yatırımcıya yatırımının faiz oranlarından nasıl etkileneceğine dair objektif bir değerlendirme imkanı verir. Bu ilave bir bilgi olup özellikle NBD'yi ya da iç verim oranına yakın sonuçlar üreten alternatif yatırım projeleri arasında seçim yapacak olan karar vericiler için kullanışlıdır.¹⁷⁶

9.BİR UYGULAMA

Yatırım analizleri çeşitli varsayımlara dayalı olarak şekillendirilir. Bu noktada pek çok farklı faktör, birkaç farklı senaryo başlığı altında, belirli bir zaman diliminde değerlendirilir. Karar alıcılar açısından bakıldığında bir yatırımın planlanması aşamasında, en önemli noktalardan biri yatırımın zamanlamasıdır. Zaman ve beraberinde getirdiği belirsizlik, yatırım üzerinde etkili olan bir çok faktörü doğrudan ya

¹⁷⁶ Jr. Stephen Ross, "Uses, Abuses and Alternatives Net Present Value Rule", **Financial Management**, (Autumn. 1995), s.96-102 ve Moon Ho Lee, "Valuing Finite-Maturity Investment-Timing Options", **Financial Management**, Vol.26, No:2, (Summer 1997), s.60

da dolaylı olarak etkiler. Bu nedenle karar alıcılar, yatırımı etkileyen faktörlerin orta ve uzun vadede izleyecekleri seyir hakkında bir dizi yargı geliştirmek zorundadırlar.

Yukarıda, çeşitli bölümlerde ifade edildiği üzere faiz oranları, yatırımın nakit akışlarına uygulanacak iskonto oranını etkilediğinden, net bugünkü değer kavramını yani kar ya da zarar sonucunu etkileyen önemli bir faktördür. Faiz oranlarının izlediği seyir, yatırımdan elde edilmesi umulan verimi doğrudan etkiler. Çok dönemli bir sermaye projesi için net bugünkü değer, faiz oranlarının zaman içerisindeki değişiminin bir fonksiyonudur. Zamanlama kararının yatırım projesi üzerindeki etkisi özellikle yüksek faiz oranlarının geçerli olduğu bir ekonomik ortamda daha önemli kazanç ya da kayıp sonuçlarına neden olur.

Yatırım zamanlama opsiyonları (YZO), bir önceki bölümde detaylı olarak açıklandığı üzere, yatırım projesinin içerdiği erteleme ve vazgeçme opsiyon değerlerinin sayısal bir ifadesidir. YZO faiz oranlarının volatilitesine bağlı olarak, yatırım projesinin nakit akımlarının sahip olduğu potansiyel genişlemeye işaret eder. Bu opsiyon çeşidi, belirsiz faiz oranlarıyla bir sermaye bütçeleme çalışmasının erteleme yeteneğini gösterir. Bir başka anlatımla YZO, bekleminin net bugünkü değer üzerindeki potansiyelini yansıtarak söz konusu yatırım projesinin optimal zamanlamasına işaret eder.

Bu çalışmanın uygulama bölümünün temel amacı belirli bir süre erteleme imkanına sahip bir yatırım projesinin, zaman içerisinde faiz oranlarındaki değişime gösterdiği tepkinin gerçek opsiyon yaklaşımı çerçevesinde incelenmesidir. Opsiyon düzeltilmeli bir net bugünkü değer yaklaşımı, yatırım zamanlaması hakkında karar alıcılara ilave bir bilgi seti sağlar. Bu çalışmada hipotezimiz, “yatırım projelerinin içerdiği yatırım zamanlama opsiyonlarının, Türkiye ölçeğinde yatırım planlamasında ne derecede önemli olduğu“ sorusudur. Bu soruya örnek bir vaka ile yanıt verilmeye çalışılmıştır.

Örnek vaka olarak, bir kojenerasyon tesisinin, bir tekstil kompleksinde kurulumu ele alınmıştır. Söz konusu vakada işletme, enerji maliyet kaleminde ciddi tasarruflar sağlayacak bir kojenerasyon tesisine yönelik olarak, iki alternatif ünite

arasında karar vermeye çalışmaktadır. Çalışmamızda öncelikle en uygun tahrik sisteminin seçilmesine yönelik finansal değerlendirmeler yapılarak net bugünkü değerleri hesaplanmıştır. Daha sonra proje alternatiflerinin içermiş oldukları YZO'nun tespiti amacıyla iki farklı tek faktör faiz oranı modeli (Vasicek ve CIR modelleri) Türkiye ölçeği için on iki aylık bir dönem için simüle edilmiştir. Her iki model sonuçları dikkate alınarak yatırım alternatiflerinin içermiş olduğu erteleme ve vazgeçme opsiyonları “ve bunlara bağlı olarak YZO'yu”, üç, altı, dokuz ve on iki aylık opsiyon süreleri dikkate alınarak hesaplanmıştır. Uygulamanın son bölümde anılan dönemde gerçekleşen gerçek faiz oranları gösterilerek YZO'nun sonuçları, vade haklarının etkileri, bekleme suretiyle elde edilen değer hakkında yorumlar yapılmıştır. Elde edilen değerlerin planlanan yatırım üzerinde karar alıcılara nasıl bir bilgi verdiği gösterilmeye çalışılmıştır.

Çalışmamızda gerçek proje verilerinin kullanılmasının iki temel nedeni vardır. Birinci neden farklı nakit giriş ve çıkışlarına sahip iki proje alternatifi arasındaki farkları ve benzerlikleri göstermek ve bu suretle karşılaştırmalı bir değerlendirme yapma fırsatını yakalamaktır. İkinci neden ise kullanılan faiz oranı vade modellerinin yapısı gereği bu modellerin gerçek hayatta Türkiye’de nasıl sonuçlar ürettiğinin görülmesi bakımından belirlenen opsiyon değeri ile diğer tekniklerin karşılaştırılmasıdır. Örnek uygulamanın daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle kojenerasyon üniteleri hakkında genel bir bilgi vermek yararlı olacaktır.

9.1.Kojenerasyon Tesisleri

Enerji, faaliyet gösterilen iş kolu ne olursa olsun tüm işletmeler için önemli bir maliyet kalemidir. Artan enerji fiyatları ve rekabet ortamı günümüzde işletmelerin rekabet gücünü önemli ölçüde etkilediğinden işletmeler bu maliyet kalemini azaltmaya çalışmaktadırlar. İşletmeler açısından enerji konusu ele alındığında sarf edilen enerji miktarlarının azaltılmasının yanısıra kullanılan enerji kaynaklarının sürekliliği de önemli bir başka sorundur. Sürekliliğin sağlanamaması, üretimde aksaklıklara neden olabilmekte bunun sonucunda işletmeler ciddi kayıplarla karşılaşabilmektedir. Bu bakımdan işletmeler için temel ilke, sürekli minimum enerji ve maksimum verimliliklerdir. Enerji giderleri sadece işletmeleri ilgilendiren tek boyutlu bir sorun değildir. Enerji

makro düzeyde ulusların milli ekonomilerini ciddi boyutlarda etkilediğinden enerji kullanım verimliliğini arttırıcı teknolojiler hükümetler tarafından çeşitli teşvik düzenlemeleri ile desteklenmektedir. Bu faaliyetler dikkate alındığında kojenerasyon kavramı çağdaş bir enerji yönetim tekniği olarak karşımıza çıkmaktadır.

Kojenerasyon, “Combine Heat and Power: CHP”, enerjinin elektrik ve ısı formlarının ayrı ayrı üretilmesinin yarattığı enerji kayıplarının önlenmesine yönelik, kombine (bileşik) ısı ve güç sistemleridir Sadece elektrik üretiminin hedeflendiği bir sistemde kullanılan enerjinin % 30-40 elektriğe çevrilebilirken, kojenerasyon sistemlerinin kullanımı ile toplam enerjinin % 70-90’ı değerlendirilebilmektedir. Kojenerasyon sistemleri her iki enerji formunun ayrı ayrı üretilmesi için gerekli birincil enerji miktarlarına % 42 oranında tasarruf sağlamaktadır. Kojenerasyon sistemleri verimli enerji kullanımının yanı sıra atık emisyon miktarı bakımından da kayda değer bir kirlilik azaltıcı tekniktir.¹⁷⁷ Enerji çevriminin tüketim yerinde yapılması nedeniyle elektrik enerjisinin iletiminde ve dağıtımında kayıpların olmaması, merkezi santrallere kıyasen daha kısa sürede işletmeye alınabilmesi, makro düzeyde az sayıda merkezi santral yerine çok sayıda üretim tesisinin enerji sürekliliği ve güvenliğe yapacağı katkı kojenerasyon sistemlerinin sağladığı yararlardan birkaçıdır.

Termik esasla çalışan santraller ortalama % 35-55 verimle çalışmakta olup, burada enerjinin % 45-65’i faydasız ısı enerjisi olarak sistem dışına atılır. Yeni nesil termik santraller bu verimi % 55’lere kadar çıkarsa da bu verim enerji iletim ve dağıtım sistemlerindeki kayıplar hesaba katılmadan hesaplanmıştır. Kojenerasyon sistemleri bir elektrik jeneratörü ve ısı dönüşüm sistemi içerir. Geleneksel elektrik üretiminde enerji kaybı iletim ve dağıtım bölümlerinde % 5-10 düzeyinde olup kojenerasyon sistemlerinde enerji tüketimi ve üretimi aynı noktada gerçekleştiğinden bu kayıplar çok daha düşük seviyededir.¹⁷⁸

¹⁷⁷ Kojenerasyon Nedir ? , 2007, <http://www.kojenerasyon.com> (05 Temmuz 2007)

¹⁷⁸ Kojenerasyon , 2007, <http://www.elektrotekno.com/about868.html> (15 Temmuz 2007)

Ülkemizde kojenerasyon sistemlerinin sektörel dağılımına bakarsak, tekstil % 56 ile en büyüğü almakta, onu sırasıyla, kâğıt (% 14), seramik (%13), gıda (%9) ve orman ürünleri (% 8) izlemektedir.

- Seramik Sektöründe kojenerasyon uygulaması ile %15-25
- Tekstil Sektöründe %15-20
- Kimya, Petrol ve Petrol Ürünlerinde %20-25
- Dokuma, Giyim Eşyası ve Deri Sanayisinde %20-25
- Gıda Sanayisinde %15-20
- Cam Sanayisinde %20 enerji tasarrufu sağlamak mümkündür.¹⁷⁹

Kojenerasyon iki çeşit tahrik ünitesi vasıtasıyla uygulanmaktadır;

1. Gaz türbini,
2. Gaz motoru ya da dizel motor

Kojenerasyon sistemlerinde kullanılan motorlar genel olarak 2 tiptir;

1. Fair Karışım Yanmalı Otto Motorları; bu motorlarda biyogaz, doğalgaz, propan, kok ve odun gazları kullanılabılır. Bu gaz çeşitleri içinde doğalgaz ve propan ticari olarak satışı yapılabılır gazlardır. Diğer gazlar ise çöplük, arıtma tesisi gibi çeşitli süreçlerden elde edilmektedir.
2. Dizel - Sıkıştırma Patlatmalı - Prensibe Göre Çalışan Motorlar; bu motorlarda 4 mw'a kadar dizel ya da dizel-gaz (çift yakıt) yakıt, 4 mw üzerinde ise fuel oil 4 ve 6 yakılmaktadır.¹⁸⁰

9.2.Teknik Değerlendirmeler

Örnek uygulamamızda işletme kendisi ve kendine bağlı diğer tesislerin elektrik ve ısı ihtiyacını karşılayacak iki alternatif CHP ünitesi hakkında karar vermek istemektedir. İşletme bu yatırım sayesinde elektrik ve doğalgaz maliyetlerinde ciddi

¹⁷⁹ Türkiye'de Kojenerasyon Yatırımları Ve Enerji Tesisleri Finansman Modelleri Semineri (26 Nisan 2006) Notları, 2007, <http://www.kojenerasyon.com> (05 Temmuz 2007)

¹⁸⁰ Kojenerasyon Nedir ? , 2007, <http://www.kojenerasyon.com> (05 Temmuz 2007)

tasarruflar planlamaktadır. Kurulumu planlanan tesisin öncelikli amacı doğalgazdan elektrik üreterek TEDAŞ'dan halihazırda tedarik edilen birim elektrik maliyetini düşürmektir (kwh= kilowat saat). İşletme anılan dönemde KDV hariç 8.63 Ykr'den elektrik kullanmaktadır. İşletme beş farklı grup şirketinin bulunduğu bir üretim kompleksinde ana şirket konumunda olup, kurulması planlanan tesis bu beş üretim tesisinin ihtiyaçlarını karşılamayı amaçlamaktadır. Kurulması düşünülen CHP ünitesi ana işletmenin mülkiyetinde olacak ve öncelikle bu firmanın elektrik-ısı ihtiyacını karşılayacaktır. Ana işletme kurulacak tesisten elde edilen kendi kullanımı dışında kalan fazla kapasiteyi diğer grup firmalarına bedel karşılığı satmayı planlamaktadır. Firma iki farklı tahrik ünitesi üzerinde durmaktadır. Birinci alternatif üç motordan bileşik bir sistemdir. Diğer alternatif sistem ise tek türbinden oluşan bir sistemdir. Her iki sistemin çeşitli teknik ve mali avantaj ve dezavantajları mevcuttur.

Gaz türbinleri kojenerasyon uygulamalarında genellikle 4,5-20 mw güç üretim aralığında kullanım bulurken gaz motorları özellikle 1 mw güç üretim seviyesinde kullanılmaktadır. Tek modülde 100 kw seviyelerinden 3 mw seviyelerine kadar motorlar mevcut olup, bu motorların çoklu modülleri ile yapılan tesisler 10 mw'a kadar çıkabilmektedir. Kojenerasyon sistemlerinde elektrik üretimini sırasında oluşan atık ısı (egzoz gazı ısısı) ihtiyaca göre buhar, sıcak su, kızgın yağ üretimi ya da egzoz gazının hava ile karıştırılarak kurutma amacıyla kullanılabilir. Örneğimizde üretim kompleksinin buhar ve sıcak su ihtiyacı bulunmaktadır. Kojenerasyon sistemlerinin tahrik ünitesi ile bu ünitenin kapasitesinin seçimi amacıyla işletme teknik bir değerlendirme çalışması yaptırmıştır. Bu çalışma çerçevesinde kompleksin bütün olarak elektrik-ısı tüketim yapı ve dengesi değerlendirilmiştir. Yıllık çalışma süresi ve yıllık enerji ihtiyacı seviyesi günde 24 saat, haftada 6 gün, yılda 288 çalışma günü üzerinde yıllık 6912 iş günü dikkate alınmıştır. İşletme birincil enerji kaynaklarının (doğal gaz, lpg, nafta, fuel oil no:6) temin edilebilirliği ve ekonomik uygulanabilirlikleri konusunda da bir dizi çalışma yapmıştır. Yıllık ortalama elektrik tüketimi dikkate alınarak kapasite tespit edildikten sonra ısı tüketim verileri incelenmiştir. Bu noktada tahrik sistemlerinin elektrik/ısı dengesi önemli bir teknik inceleme konusudur. Yoğun olarak yüksek sıcaklık istendiği durumlarda, elektrik/ısı dengesi için ½ oranı geçerli ise uygun yakıt ve santral büyüklüğü çerçevesinde türbin sistemler ön plana çıkmaktadır. Yüksek ısı

ihtiyacı göstermeyen sıcak su ya da kızgın su ihtiyacı durumunda elektrik/ısı dengesi elektrik lehinde ise bir gaz ve dizel motor sisteminin öne çıktığı teknik fizibilite etütlerinde ifade edilmiştir. Teknik bölüm motor sistemlerinde daha yüksek çevrim veriminin fark yarattığını belirtmiştir. Mühendisler, %40 elektrik verimli bir motor santralında doğalgazdan elde edilecek elektriğin, ısıdan hiç yararlanılmasa bile şebeke elektriğinden daha ucuza mal olmakta iken bu durumun gaz türbinlerinde mümkün olmadığını söylemektedirler. Kojenerasyon sisteminde kullanılacak tahrik sisteminin kaç modülden oluşacağı noktasında enerji temininde süreklilik ve yüksek verimlilik dikkate alındığında en az iki modülün tercih edilmesi tavsiye edilmektedir. Uygulamada, birinci alternatif tahrik ünitesinin seçiminde üç motordan oluşan bileşik bir ünitenin uygun olduğu değerlendirilmiştir. Gün içerisinde elektrik, ısı yükünde meydana gelen değişimler teknik ekibin modül seçimini etkileyen faktörlerden birisidir. Aşağıdaki tabloda işletmenin tedarikini planladığı iki alternatif tahrik ünitesine ilişkin teknik değerlendirmeler özet olarak yer almaktadır.

Tablo 21
İki Alternatif CHP Ünitesi İçin Teknik Veriler

Teknik Değerler	Motor Sistemi (3 Motorlu)	Türbin Sistemi (Tek Türbinli)
Enerji üretim kapasitesi (kw)	10.500 KW	6.974 KW
Egsoz gazları (kg/h)	56.598 kg/h	100.858 kg/h
Gaz tüketimi (th/h)	29.744 th/h	19.383 th/h
Gaz ısısı (k)	793 K	766 K
Verimlilik Değerleri	Motor Sistemi (3 Motorlu)	Türbin Sistemi (Tek Türbinli)
Elektrik verimliliği (Yüzde)	0,40	0,31
Termal verimliliği (Yüzde)	0,34	0,43
Toplam verimliliği (Yüzde)	0,73	0,74

Doğalgaz, kojenerasyon ünitelerinin temel yakıtı olup, yanma ve depolanma özellikleri, çevresel değerlendirmelerde daha olumlu görünüm arz etmesi ve ekonomik açıdan en geçerli yakıt olarak diğer yakıtlara kıyasen daha öne çıkmaktadır. Propan, kullanımı gereği % 95 üzerinde saflık gerektirdiğinden ithali gereken bir yakıt olup, çok

düşük metan sayısı, yüksek kalorifik değerine karşın motor tahrik sistemlerinde enerji üretimi aynı kapasitedeki gaz sistemlerine oranla % 65 düzeyinde kalmakta olduğunda yatırım maliyetini arttırıcı bir yakıt olarak değerlendirilmektedir. Bu dezavantajına rağmen propan kullanımı vergisel düzenlemeler nedeniyle birincil yakıt alternatifi olarak görülmektedir. Dizel yanması en az problemlili ve zararlı emisyonu en düşük likit yakıt olmakla beraber fiyatı nedeniyle ekonomik bir seçenek olarak görülmemektedir. Buna mukabil gaz kesintilerine karşı kullanılmak üzere yedek yakıt olarak değerlendirilebilecek en uygun yakıtlardan birisi olduğu teknik değerlendirmelerde ifade edilmiştir. Fuel oil no:4 bir diğer uygun likit yakıt olarak değerlendirilmiş ancak emisyonlarında arıtma gerekmesi durumu istenmeyen bir sonuç olarak görülmektedir. Fuel oil no:6 işletmenin temini bakımından elde edilebilirliği, ithalattan bağımsız olabilmesi ve enerji üretiminde kullanılması durumunda devletten gördüğü teşvik nedeniyle en uygun yakıtlardan biridir. Bu yakıtın olumsuz yanı ise atıklarının arıtılması ve bertaraf edilmesinde karşılaşılan problemler ve bunların getirdiği maliyetlerdir. Aşağıda yer alan tablolarda sırasıyla ticari olarak temin edilebilen yakıt seçeneklerinin teknik özellikleri ile bugünkü yakıt fiyatları yer almaktadır.¹⁸¹

¹⁸¹ *Kojenerasyon Sisteminde Kullanılabilecek Yakıtlar ve Fiyatları* , 2007, <http://www.kojenerasyon.com> (05 Temmuz 2007)

Tablo 22**Kojenerasyon Sisteminde Kullanılabilecek Yakıtların Teknik Özellikleri**

Yakıt	Kompozisyon	Spesifik gravite (kg/nm3)	Alt ısııl değır (kwh/nm3)	Metan sayısı	Laminar alev hızı (cm/sn)
h2	hidrojen	0,0899	2,996	0	302
ch4	metan	0,717	9,971	100	41
c3h8	propan	2,003	26	33	45
co	karbon monoksit	1,25	3,51	75	24
doğalgaz	ch4 %88,5 c2h6=%4,7 c3h8 %1,6 c4h10=%0,2 n2=%5	0,798	10,14	80	41
arıtma gazı	ch4 = %65 co2 = %35	1,158	6,5	135	27
çöplük gazı	ch4=%50 co2=%40 n2=%10	1,274	4,98	150	20
odun gazı	h2=%7 co=%17 cnhm=%5 n2=%56 co2=%15	1,25	1,38	13	

Kaynak:www.kojen.com**Tablo 23****Kojenerasyon Sisteminde Kullanılabilecek Yakıtların Fiyatları**

	Fuel Oil No:6	Doğalgaz	Propan	Motorin
Kal.değer	9,600	8,250	11,200	10,200
Birim fiyat	105 \$/ton	150 \$/m3	300 \$/ton	317 \$/ton
Spesifik fiyat	0.009 \$/kwh	0.016 \$/kwh	0.023 \$/kwh	0.027 \$/kwh

Kaynak:www.kojen.com

Yapılan teknik fizibilite etüdü esnasında her iki alternatif sistem ile bu sistemlerde kullabilecek yakıtların yukarıda sayılan üstünlük ve eksikleri özet olarak belirtilmiştir. Teknik bölüm yakıt üzerinde doğalgaz kullanımının, tahrik sisteminde ise bileşik motor sisteminin işletme amaçlarına daha uygun olduğunu ancak kesin tercih yapılmadan önce proje alternatiflerinin farklı mali portrelere sahip olması nedeniyle bir dizi finansal değerlendirmenin yapılması gerektiğini hatırlatmıştır.

9.3.Finansal Değerlendirmeler

İşletmenin finans departmanı teknik fizibilite etüdünü takiben proje alternatifleri ile ilgili olarak bir dizi inceleme yapmıştır. İşletme söz konusu sistemlerin tedarikine yönelik olarak yurtdışında bulunan bir finans kuruluşundan kredi kullanmayı planlamaktadır. CHP ünitelerinin kurulmasını sağlayacak firmanın bir yan kuruluşu olan kredi kuruluşu öz sermayenin yatırıma belirli bir oranda (minimum) katılımını zorunlu tutmaktadır. Buna göre işletme anılan yatırım tutarlarının minimum % 30'nu öz sermayesinden karşılamak zorundadır. Tesisin mülkiyetine sahip olacak ve finansmanı sağlayacak (tekstil grubunun ana firma) işletme, diğer grup şirketleriyle bir elektrik satın alma anlaşması (bu anlaşmayı yapmaması durumunda kredi kuruluşu söz konusu öz sermaye payının arttırılmasını talep etmektedir) imzalamıştır. Kredi tutarı üç yıl içinde üç eşit taksitte ödenecek olup, projenin öz sermaye ile karşılanması planlanan kısma ilişkin ödeme ilk yıl içinde yapılacaktır. Projenin inşa süresi üç ay opsiyon on beş günlük bir gecikme ön görülmektedir. Yatırım için on yıllık bir süre % 10 yıllık amortisman dikkate alınmıştır. İşletme tesisin yapılmasını planlandığı dönemde aşağıdaki kabullerle bir ağırlıklı ortalama iskonto oranı hesaplamıştır.

Öz Sermaye Payı (E)	: % 30
Kredi Payı (D)	: % 70
Öz Sermaye Maliyeti (e)	: % 19.00
Kredi Faizi (d)	: % 22.60
Vergi Haddi (t)	: % 35

$$WACC = [e \times E] + [(1-t) \times d \times D] = [\% 19.00 \times \% 30] + [(1 - \% 35) \times \% 22.60 \times \% 70] = \% 15.98$$

İşletme toplam yıllık maliyeti, yıllık yatırım maliyeti ile yıllık işletme/bakım maliyetlerinin toplamı olarak hesaplanmış olup, birim elektrik üretim maliyetleri hesabında (kapasite*288 gün*24 saat/gün*verimlilik) formülünü dikkate almıştır.

İşletmenin finans bölümü konunun vergisel boyutları nedeniyle ilgili yasal mevzuat hakkında Yeminli Mali Müşavirden hukuki görüş istemiş, alınan görüş doğrultusunda gerekli hesaplamaları yapmıştır. Konu ile ilgili başlıca yasal düzenlemelerin şunlar olduğu öğrenilmiştir.

- Yatırımlarda Devlet Yardımları Hakkında Kararın Uygulanmasına İlişkin Tebliğ (Seri No:2002/1, Resmi Gazete Tarihi:30.07.2002, Sayısı: 24831A)
- 4628 Sayılı Elektrik Piyasası Kanunu ve EPDK düzenlemeleridir. (Elektrik Piyasası Lisans Yönetmeliği)

Tablo 24

Motor Tahrik Yapılı CHP Ünitesinin Sağlaması
Planlanan Yıllık Tasarruflar ve Yatırım Maliyetleri

Açıklamalar	Motor Sistemi (3 Motorlu)	
A	Fabrika tarafından planlanan enerji üretimi (kwh)	70.425.493
	Fabrika tarafından planlanan enerji tüketimi (kwh)	21.278.906
	Grup şirketlerine planlanan enerji satımı (kwh)	49.146.587
B	Satış fiyatı (Ytl)	0,0863
C = A*B	Enerji satış tutarı (Ytl)	4.241.350
E	Kojenerasyonsuz elektrik faturası	3.420.278
F	Kojenerasyonlu elektrik faturası	318.177
G = C+E-F	Planlanan enerji tasarrufu	7.343.451
I	Bakım maliyetleri	730.131
K	Gaz tüketimi (th/h)	163.294.560
	Fiyat (Ytl/th)	0,034
	Doğal gaz faturası (Ytl)	5.552.015
L	Doğal gaz tasarrufu (Ytl)	1.899.164
M = K-L	Isısal maliyet (Ytl)	3.652.851
N =G-I-M	Yıllık tasarruf tutarı	2.960.469
	Yatırım tutarı	13.900.000
	Hurda Değer	13.173.077

Tablo 25

Türbin Tahrik Yapılı CHP Ünitesinin Sağlaması
Planlanan Yıllık Tasarruflar ve Yatırım Maliyetleri

Açıklamalar	Türbin Sistemi (Tek Türbinli)
A	Fabrika tarafından planlanan enerji üretimi (kwh) 50.945.448
	Fabrika tarafından planlanan enerji tüketimi (kwh) 20.527.773
	Grup şirketlerine planlanan enerji satımı (kwh) 30.417.675
B	Satış fiyatı (Ytl) 0,0863
C = A*B	Enerji satış tutarı (Ytl) 2.625.045
E	Kojenerasyonsuz elektrik faturası 3.420.278
F	Kojenerasyonlu elektrik faturası 572.833
G = C+E-F	Planlanan enerji tasarrufu 5.472.490
I	Bakım maliyetleri 315.373
K	Gaz tüketimi (th/h) 141.883.560
	Fiyat (Ytl/th) 0,034
	Doğal gaz faturası (Ytl) 4.824.041
L	Doğal gaz tasarrufu (Ytl) 2.126.168
M = K-L	Isısal maliyet (Ytl) 2.697.873
N =G-I-M	Yıllık tasarruf tutarı 2.459.244
	Yatırım tutarı 11.538.441
	Hurda Değer 10.961.538

Her iki CHP ünite alternatifine ait rasyolar aşağıda özet olarak sunulmuştur;

Tablo 26**Proje Alternatiflerine İlişkin Finansal Rasyolar**

Proje Rasyoları	Motor Sistemi (3 Motorlu)	Türbin Sistemi (Tek Türbinli)
Cari değer	5.918.956	5.336.334
Gelecek değer	26.072.849	23.506.416
Yıllık değer	1.223.863	1.103.395
Kapitalize (yararlanma) değeri	946.027	852.906
İç verim oranı	38,44%	42,04%
Prim değer yüzdesi	59,56%	64,34%
Orijinal yatırımın getirisi	29,79%	29,65%
Geri ödeme süresi (yıl)	3,36	3,37
Kar-yatırım rasyosu	1,98	1,97

9.4.Vasicek ve CIR Faiz Oranı Modelleri ve Türkiye Projeksiyonu

Opsiyonlar doğaları gereği iddialara bağlı olarak fiyatlanırlar. Opsiyon işlemlerinde kazanç bir malın fiyatında gerçekleşecek duruma bağlı olarak oluşur. Yatırım zamanlama opsiyonunda (YZO) üzerinde tartışılan konu, faiz oranlarının izleyecekleri seyirdir. Binomial bir yapı içerisinde bir yatırımcı faiz oranına ilişkin iki sonuç öngörür. Buna göre faiz oranları ya yükselecektir, ya da düşecektir. YZO faiz oranlarındaki muhtemel bir düşüşün gerçek varlık yani proje değerinde yaratacağı genişlemeye işaret ettiğinden faiz oranlarına ilişkin bir yargının geliştirilebilmesi gereklidir. Faiz oranlarının modellerine ilişkin literatürde yer bulan çalışmalar önceki bölümlerde detaylı bir biçimde açıklanmış olup, biz çalışmamızda bu modellerden Vasicek'in ve Cox, Ingersoll ve Ross'un (CIR) modelini kullandık. Bu modellerin diğer modellere kıyasen çalışmamızda tercih edilmesinin birkaç nedeni vardır. Söz konusu modeller faiz oranları modelleri içerisinde en bilinen ve yapı itibarıyla en yalın modeller olarak göze çarpmaktadır. Pek çok akademisyen tarafından çift faktör modelleri, trinomial yapılar teoride bu modellere kıyasen daha gelişmiş kabul edilse de her iki model zaman içerisinde değişiklikler yapılmak suretiyle tekrar tekrar ele alınmıştır. Yapı olarak incelendiğinde faiz oranlarını modellerinin içerdiği stokastik diferansiyel yapılar temel olarak bu modeller içinde geçerlidir. Söz konusu modeller temel nitelikte, yaygın olarak bilinen faiz oranları modelleridir. Yapıları itibarıyla de yalın bir anlayışa

sahiptirler. Özellikle kullanımlarının basitliği çalışmamızda tercih edilmelerine neden olmuştur. Unutulmamalıdır ki pratikte uygulacılar faiz oranlarına ilişkin yargılarını çeşitli anlayışlara dayandırabilmekte olup mutlaka bir faiz oranı modeli kullanmak zorunda değildirler. Bu konuda yapılmış çalışmalarda faiz oranları dinamiklerinin çok çeşitli denklemler ile yansıtılabilmesi mümkündür. Çalışmada bir yerine iki model kullanılmasının amacı faiz oranlarına ilişkin yargının daha sağlam bir temele oturtulması ve bu iki model sonuçlarının birbirleriyle karşılaştırılmasıdır. Matematiksel modeller çeşitli teoriler üzerine kurulu görüşleri yansıtır. Modellerin ürettikleri sonuçlarının gerçek hayatta birebir örtüşmesi beklenemez. Vadenin uzaması belirsizliği etkilediğinden modellerin ürettiği sonuçların süre uzadıkça gerçek sonuçlardan farklılaşması olağan bir durumdur. Bu nedenle yapılan hesaplamalarda bir yıldan kısa süreler dikkate alınmıştır. Uygulamada kullandığımız her iki model yapıları itibarıyla bir rassallık unsuru içerirler. Yine bu modeller süre kısaldıkça daha makul kabul edilebilecek neticeler üretmeye eğilimlidirler. Bu çalışmada adı geçen modellerin tercih edilmesinin nedeni bu modellerin genel kabul görmüş, yaygın olarak literatürde yer alan ve uygulanması basit yapıda olmalarıdır.

Anılan vade oranı modellerinin kurulması ve işletilmesi için öncelikle temel parametrelerinin Türkiye örneği için hesaplanması gereklidir. Uygulamada öncelikle sıfır kupon faizli bonolar için verim eğrisi oluşturulur. Bu noktada pek çok farklı yöntemden bahsedilebilmesi mümkündür. Hazine bonoları için uygulanacak modeller içerisinde, polinom fonksiyonlar (2. dereceden, 3. dereceden, 4. dereceden, 6. dereceden) ve Svensson getiri eğrisi fonksiyonu sayılabilir. Bu fonksiyonlar basit olarak Türkiye’de geçmiş faiz oranlarına ait veri setlerinin genel eğilimini yansıtmak amacıyla kullanılır. Söz konusu modeller için parametrelerin bu şekilde bulunabileceği gibi bu konuda, Türkiye’de yapılmış çeşitli akademik çalışmalardan da yararlanmak mümkündür. Bu çalışmada Yeliz Yolcu’nun 2005 yılında yayınlanmış olan çalışmasından yararlanılmıştır. Yazar çalışmasında 1999 - 2004 yılları arasındaki hazine bonolarını inceleyerek Vasicek ve CIR modelleri için Türkiye parametrelerini hesaplamıştır. Faiz oranları modellerinde yer alan parametreler geçmişteki eğilimin birer göstergesi niteliğinde olduklarından Türkiye uygulamalarının yurtdışında yapılan benzer uygulamalara olan farklılıkları göze çarpmaktadır. Örneğin benzer bir çalışma

V.Naik ve M.Lee tarafından 1995 yılında yapılmıştır. Yazarlar bu çalışmalarında üç aylık Birleşik Devletler hazine kağıtlarının faiz oranlarını 30 Haziran 1964 ile 30 Haziran 1992 yılları arasındaki dönemi incelemiştir. Bu çalışmada volatilité (v) % 3, risk primi (λ) %0.1, ortalamaya dönüş hızı (k) 0.4, r_∞ % 7 olarak belirtilmiştir. Bu iki çalışma birbirleriyle karşılaştırıldığında iki husus göze çarpmaktadır. İlk olarak her iki çalışmanın inceledikleri dönemler arasında çok büyük bir süre farklılığı mevcuttur. Türkiye uygulamasında veri seti Amerika Birleşik Devletlerinden çok daha sınırlıdır. İkinci olarak Türkiye’de geçmiş yıllarda yaşanan mali krizler ve enflasyon oranlarının yüksek oluşu A.B.D. örneğinden oldukça farklı bir yapıya işaret etmektedir. Bahsi geçen bu iki durum modellerde kullanılan parametreleri doğrudan etkilediğinden model çıktısının başarı şansını da olumsuz etkilemektedir. Aşağıda çalışmamızda kullanılan modeller için geçerli Türkiye parametreleri belirtilmiştir.

Tablo 27
Euler Planı İle Tahmin Edilen Değerler

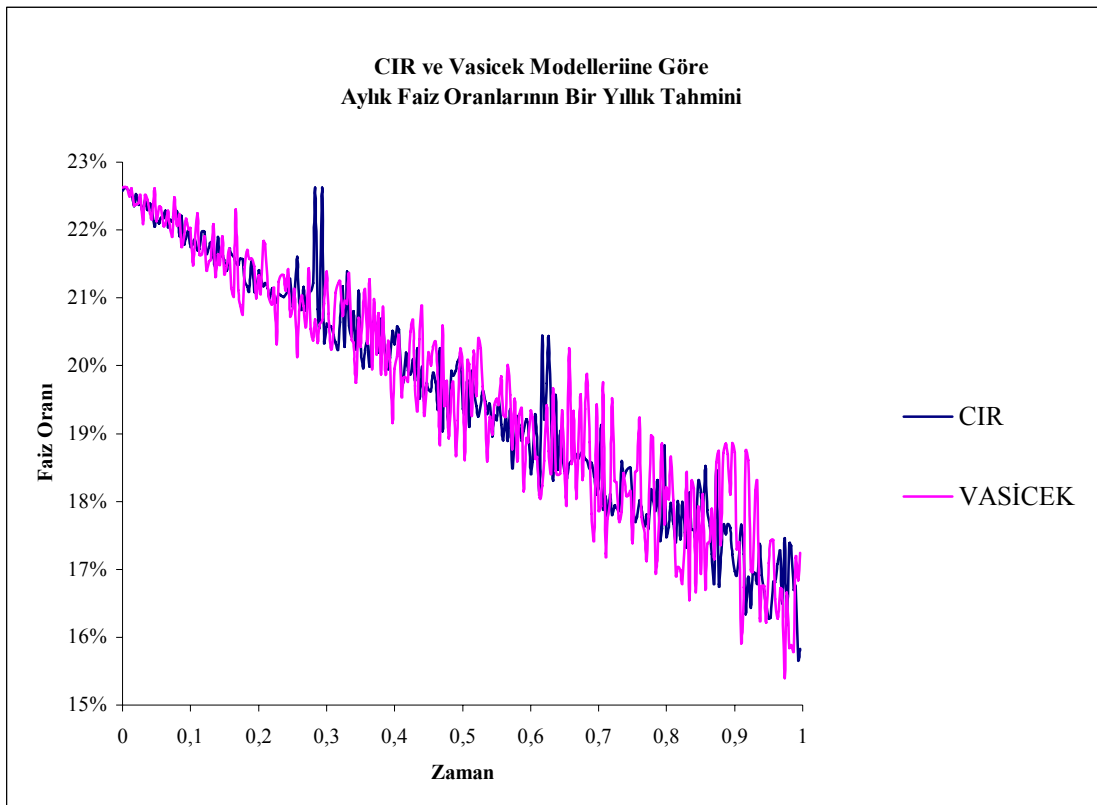
α	β	σ
0,3207	0,0203	0,0203
0,3207	0,0201	0,0201

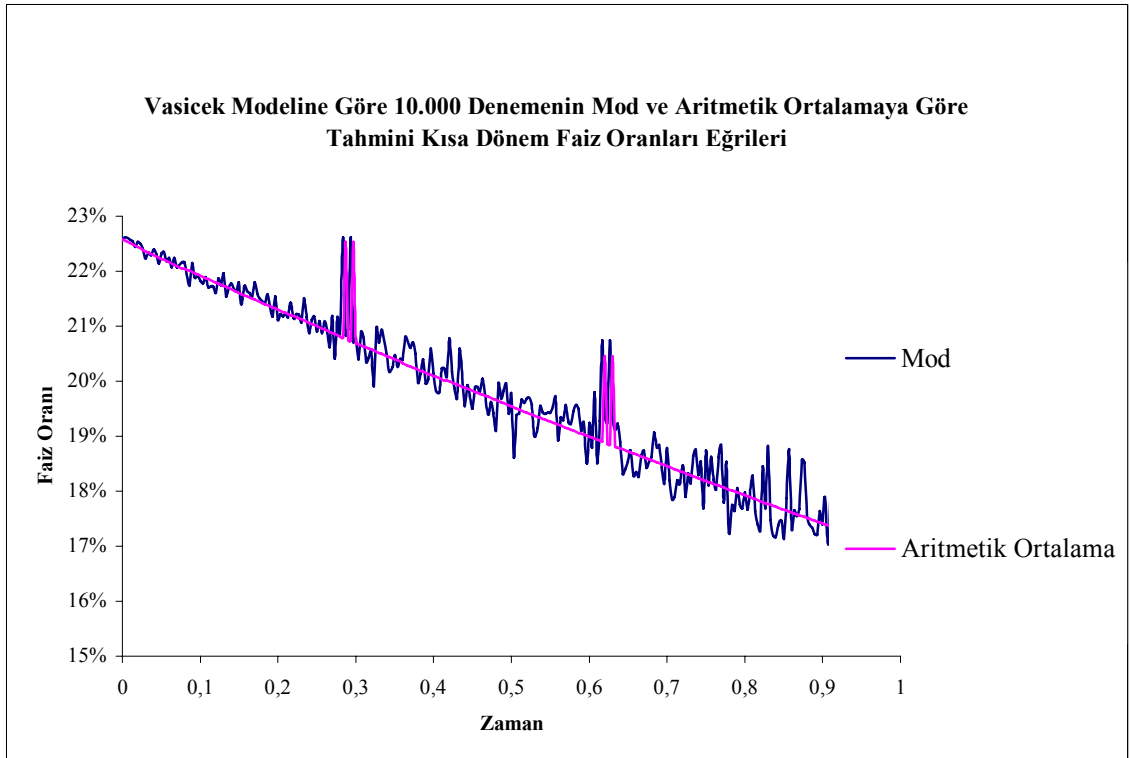
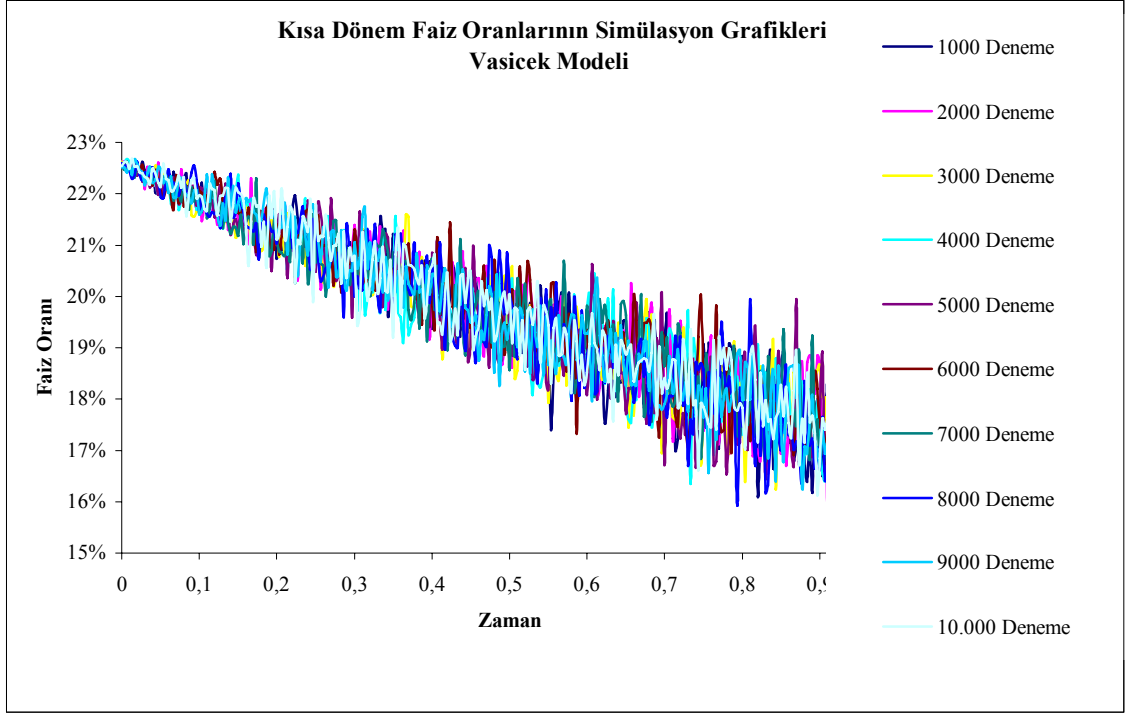
Kaynak: Yeliz Yolcu, “One-Factor Interest Rate Models: Analytic Solutions And Approximations”, (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ Finansal Matematik Bölümü, Jan, 2005), s.56

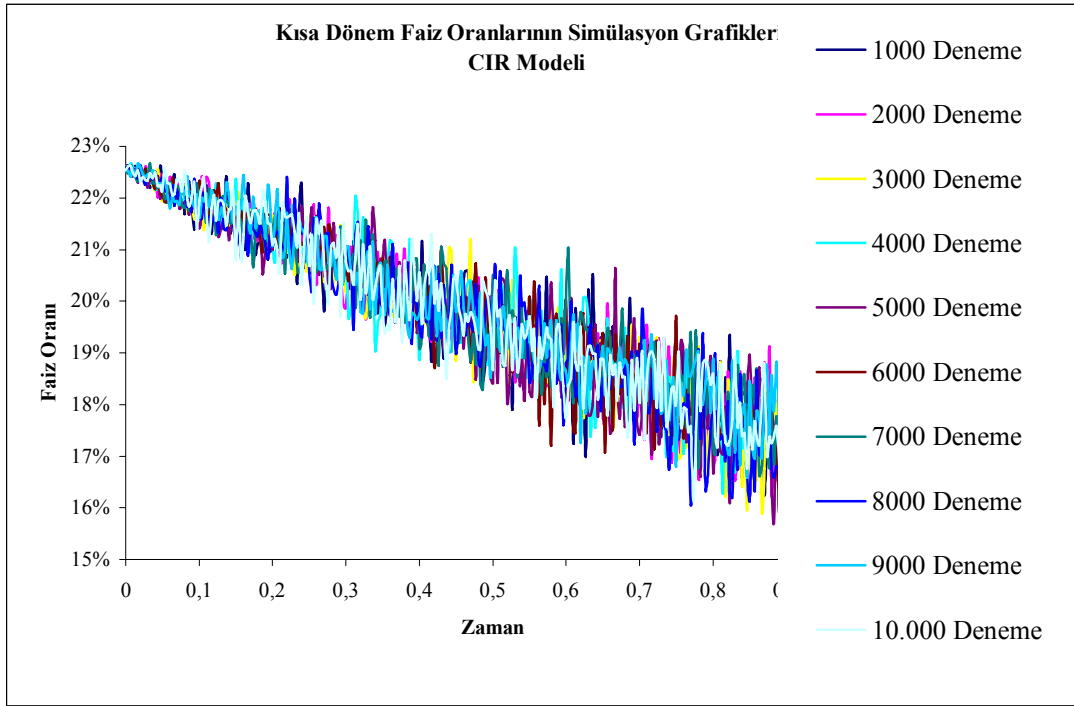
Gerek Vasicek’in gerekse de Cox, Ingersoll ve Ross’un modelleri yapısal olarak rassal unsuru içeren bir esasa sahiptir. Bir başka anlatımla her iki model de normal dağılıma uyan bir rassallık faktörü içermektedir. Bu uygulamada her bir denemede farklı bir faiz oranı eğrisinin oluşturulmasına neden olmaktadır. Bu çalışmada bu iki model bilgisayar programları vasıtasıyla oluşturarak proje için geçerli olan, gelecek on iki aylık dönemdeki (300 gün) aylık faiz oranlarının tahmininde kullanılmıştır.

Uygulamada modeller yapılan denemelere bağlı olarak farklı sonuçlar ürettiğinden bilgisayar programları vasıtasıyla her bir model için on bin deneme yapılmıştır. Böylelikle üç yüz gün için on bin deneme sonucunu temsil eden on bin

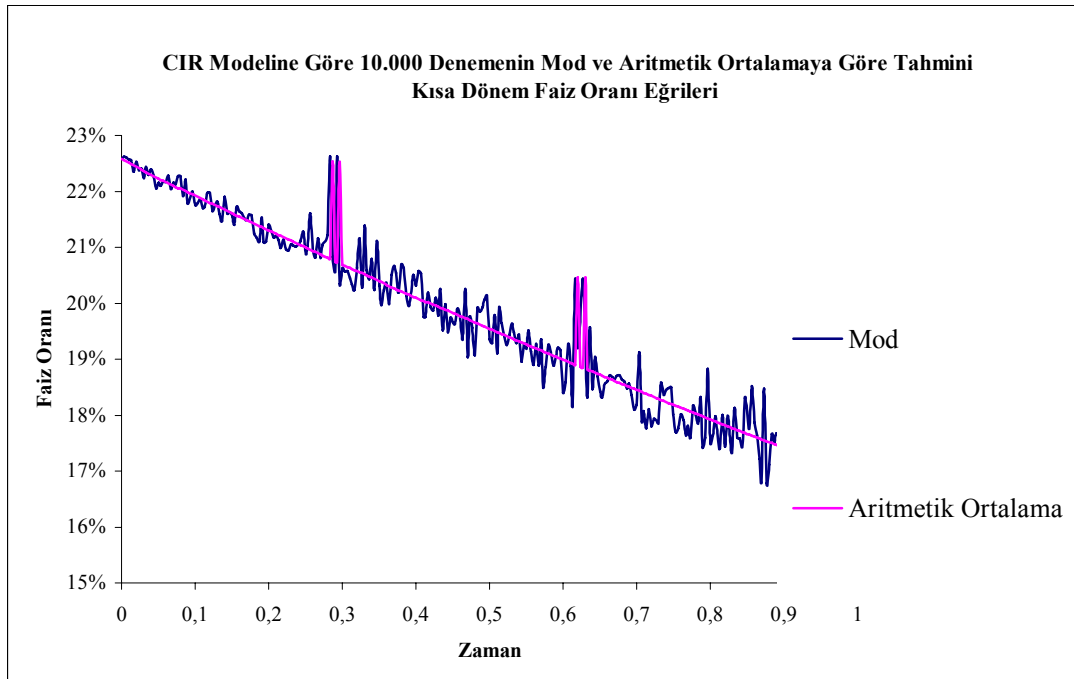
satırlık bir matris elde edilerek bu veri seti incelenmiştir. Her bir model için binerlik gruplar halinde modellerin ürettiği sonuçların genel dağılımı incelenmiş, daha sonra on bin denemeyi temsil eden tek bir grafik elde edilmeye çalışılmıştır. Deneme sayısının arttırılması faiz oranı modelinin ürettiği sonucu değiştirmekte olduğundan her bir gün için geçerli olması beklenen faiz oranı için mod ve aritmetik ortalamadan yararlanılmıştır. Buna göre her bir gün için en çok üretilen faiz oranı değeri ile üretilen faiz oranlarının aritmetik ortalaması karşılaştırılmıştır. Bu tarz bir yolun bu çalışmada uygulanmasının nedeni deneme sayısının arttırılması suretiyle her bir modeli temsil eden birer faiz oranı eğrisinin elde edilmek istenmesidir. Bilgisayar programları vasıtasıyla daha fazla deneme yapmak imkanı her zaman için söz konusu olup, her iki modelin ürettiği eğriler tek bir grafik ile bir araya getirilmiştir. Grafik birde üretilen iki eğri her bir günde modellerin en çok ürettiği değerler esas alınarak oluşturulan eğrilerdir.







Grafik 4: CIR Modeline Göre Yapılan Denemelerin Eğrileri



Grafik 5: CIR Modeline Göre 12 Aylık Dönem Faiz Oranları Eğrileri

Yukarıda verilen grafikler incelendiğinde, her iki modelin benzer zaman noktalarında benzer sıçramalar sergilediği ve on iki aylık dönemde faiz oranlarının düşeceğini ön gördükleri görülmektedir. Bu durum karar alıcılara mevcut faiz oranlarının göreceli olarak yüksek olduğunu belirtmekle beraber bu olası faiz oranı indiriminin kendi yatırım kararları üzerindeki sayısal etkisini göstermekte yetersiz bir veridir. Yatırım zamanlama opsiyonları sözkonusu tahmin sonuçlarını üreterek eğilimin etkisini gözler önüne sermektedir

9.5. Farklı Vadelere Göre Projenin İçerdiği Yatırım Zamanlama Opsiyonları

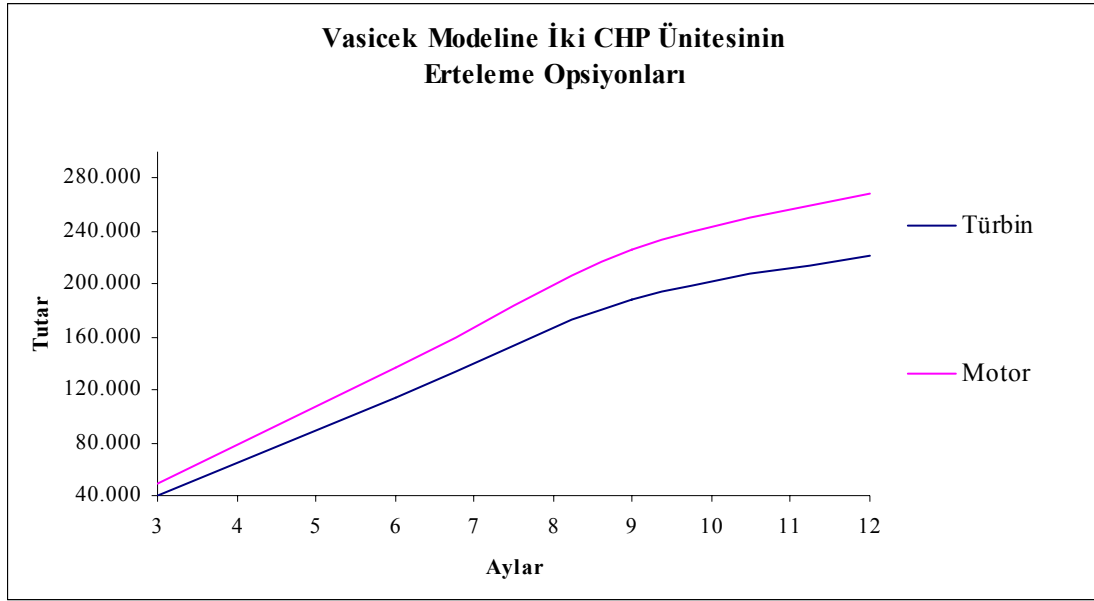
Yatırım zamanlama opsiyonları (YZO) yukarıda ilgili bölümlerde detaylı olarak açıklandığı üzere iki opsiyon değeri ile projenin pasif net bugünkü değerinin toplamıdır. Gerçek opsiyon yaklaşımında bu iki opsiyon değeri erteleme ve vazgeçme opsiyonu olarak belirtilir. Opsiyonlar yukarıda da belirtildiği üzere pek çok yatırım faktörü üzerindeki belirsizliklerden etkilenmektedir. Örneğin yatırım tutarının büyüklüğü, hurda değer tutarı, vadeye olan süre, planlanan gelir akışı bir yatırıma ilişkin yatırım zamanlama opsiyonlarını etkileyen başlıca faktörlerdir. Bu çalışmada, faiz oranları üzerindeki değişimlerin bu opsiyon değerlerine yapmış olduğu katkı tespit edilmek istendiğinden bağımsız değişken olarak sadece faiz oranları dikkate alınmıştır. Bir başka anlatımla faiz oranlarının yatırım üzerindeki sonuçlarını göstermek amacıyla bu opsiyon değerleri hesaplanmıştır. Böylelikle örnek iki yatırım alternatifinin faize duyarlılıklarını ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Opsiyonların hesaplamasında binomial modelde yansız bir anlayışı tercih edilmiştir. Aşağıdaki tablolardan da görüleceği üzere her iki yatırım projesi için dört farklı erteleme süresi dikkate alınarak opsiyon değerleri hesaplanmıştır. Burada farklı vade sürelerine sahip opsiyon değerlerinin hesaplanmasındaki amaç, vadeye olan sürenin opsiyon hesabında yarattığı etkiyi görebilmektir. Buna göre her iki projenin, kullanılan faiz oranı modellerine göre hesaplanan opsiyon değerleri aşağıdaki tablo ve grafiklerle özetlenmiştir.

Tablo 28
Vasicek Modeline Göre Opsiyon Değerleri

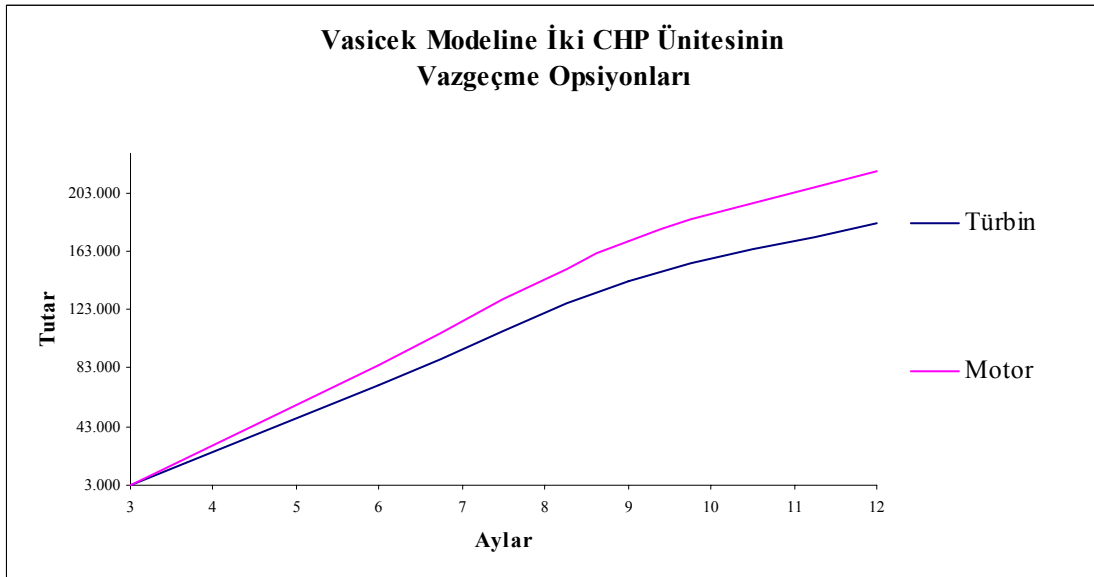
	Vasicek Model			
	Vade	Erteleme	Vazgeçme	YZO
<i>Türbin</i>	3 Ay	40.035	3.168	43.203
	6 Ay	113.650	71.543	185.193
	9 Ay	187.651	143.033	330.684
	12 Ay	222.008	181.823	403.831
<i>Motor</i>	Vade	Erteleme	Vazgeçme	YZO
	3 Ay	48.567	2.371	50.938
	6 Ay	137.237	84.478	221.716
	9 Ay	226.346	170.440	396.786
	12 Ay	267.661	217.309	484.970

Tablo 29
CIR Modeline Göre Opsiyon Değerleri

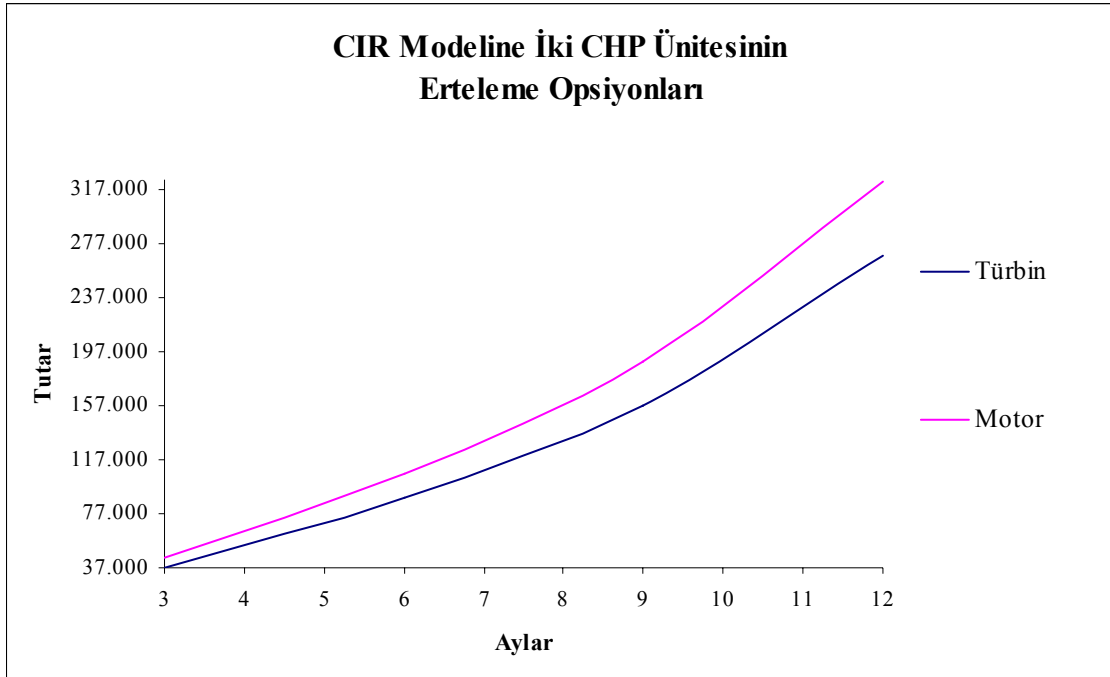
	CIR Model			
	Vade	Erteleme	Vazgeçme	YZO
<i>Türbin</i>	3 Ay	37.000	2.643	39.643
	6 Ay	88.558	55.002	143.560
	9 Ay	157.590	119.503	277.094
	12 Ay	268.288	220.612	488.900
<i>Motor</i>	Vade	Erteleme	Vazgeçme	YZO
	3 Ay	44.887	1.838	46.726
	6 Ay	106.945	64.900	171.845
	9 Ay	190.093	142.370	332.463
	12 Ay	323.449	263.711	587.160



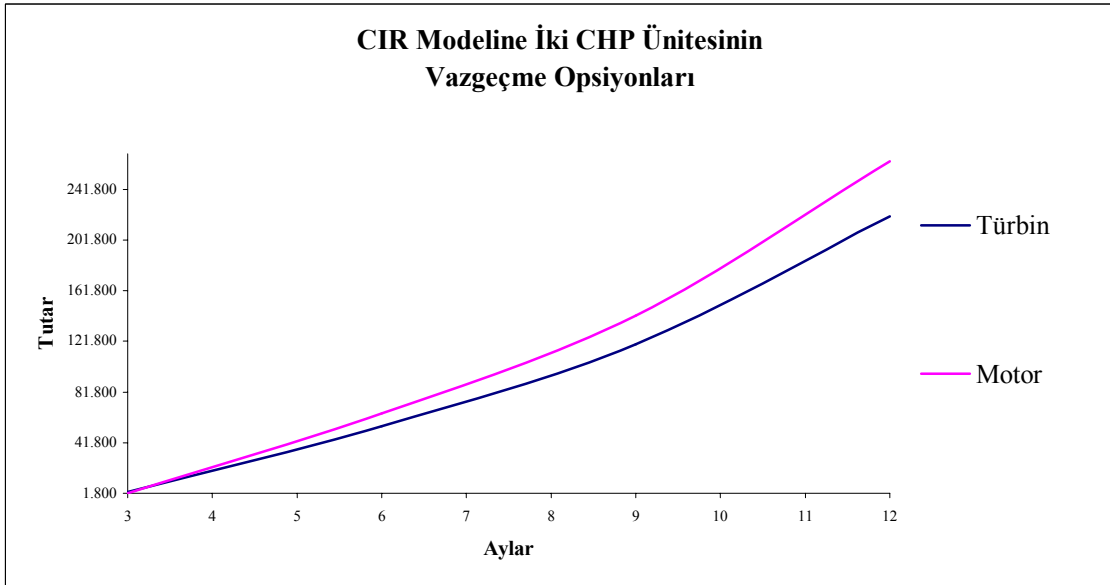
Grafik 6: Vasicek Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Erteleme Opsiyon Değerleri



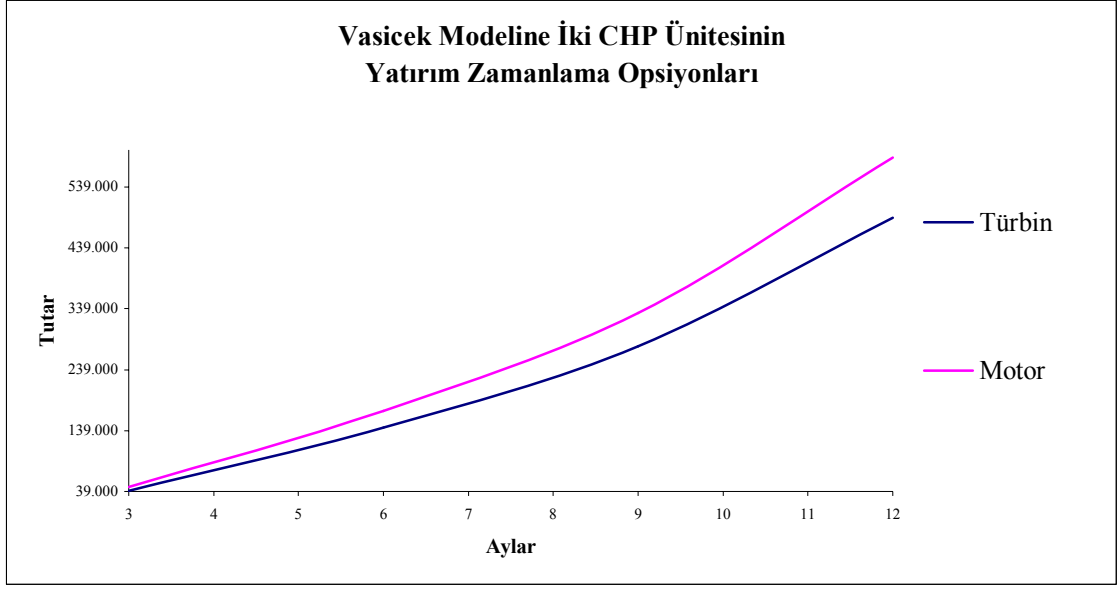
Grafik 7: Vasicek Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Vazgeçme Opsiyon Değerleri



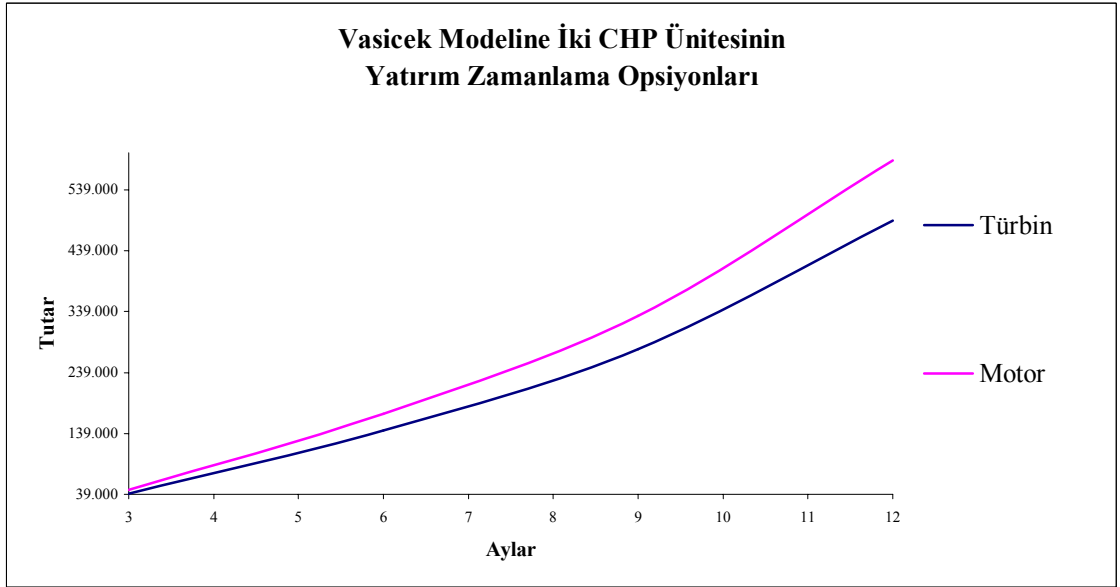
Grafik 8: CIR Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Vazgeçme Opsiyon Değerleri



Grafik 9: CIR Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Vazgeçme Opsiyon Değerleri



Grafik 10: Vasicek Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Yatırım Zamanlama Opsiyon Değerleri



Grafik 11: CIR Modeline İki CHP Ünitesinin 12 Aylık Yatırım Zamanlama Opsiyon Değerleri

9.6.Vade Haklarına İlişkin Yorumlar

Ertelenebilir bir yatırım projesinin NBD'si, faiz oranlarının volatilitesine bağlı olarak bir opsiyon değerine sahiptir. Bu opsiyon değeri yatırımın optimal zamanlamasının bir göstergesi olup, sermaye bütçeleme kararlarında yatırımcılara çok dönemli bir yatırım projesinin faiz oranlarına duyarlılığı hakkında bir bilgi verir. Yatırım zamanlama opsiyonlarının birkaç farklı bakış açısıyla kullanılabilmesi mümkündür. Bir proje için hesaplanan opsiyon değerinin yatırımcılar için belirlenmiş bir anlamlılık seviyesi üzerinde kalması yatırımcı açısından bir ertele işaretidir. İki farklı proje alternatifi söz konusu olduğunda farklı opsiyon değerlerinin varlığı yatırımcı açısından nakit akışlarında belirgin farklar olduğunu gösterir. Yatırım zamanlama opsiyonu ile düzeltilmiş bir iç verim oranının cari faiz oranından küçük olması da benzer şekilde bir erteleme uyarı olarak değerlendirilir. Örnek uygulamada elde edilen opsiyon değerleri incelendiğinde vade artışına bağlı olarak her iki proje alternatifinin içermiş oldukları opsiyon değerlerinin arttığı görülmektedir. Bulunan opsiyon değerleri özellikle altı aydan uzun erteleme süreleri için önemli kabul edilebilecek bir kazanç imkanı olduğunu göstermektedir. Türbin tahrik yapıları CHP ünitesi için, on iki aylık bir erteleme imkanının varlığı halinde opsiyon değeri minimum 403.831 YTL maksimum 488.900 YTL'dir. Motor tahrik yapıları CHP ünitesi için, on iki aylık bir erteleme imkanının varlığı halinde opsiyon değeri minimum 484.970 YTL maksimum 587.160 YTL'dir. Kullanılan faiz oranı modeline bağlı olarak opsiyon eğrileri farklı eğimlere işaret etmekle beraber her iki modelde genel olarak faiz oranlarında bir düşüş beklentisi yaratmaktadır. Proje alternatiflerinin içermiş oldukları opsiyon değerlerinin farklı oluşu nakit akışlarına, projelerin hurda değerlerine, yatırım tutarlarına bağlıdır. Bu örnekte her iki alternatifin benzer yapılara sahip olması nedeniyle gerek erteleme opsiyonları gerekse de vazgeçme opsiyonları benzer sonuçlar üretmiştir. Farklı nakit akışlarına sahip projelerde faize olan duyarlılık farklı olacağından alternatif projelerin mukayesesinde farklı sonuçların üretileceği açıktır. Yatırım zamanlama opsiyonu düzeltilmeli bir NBD yaklaşımının pratikte sağladığı bakış açısı, özellikle projenin NBD'sinin çok küçük olduğu durumlarda daha belirgin bir hal alır. Çok yüksek NBD'ye sahip projelerde erteleme ve vazgeçme opsiyonlarının değerleri karar alıcılar için anlamlı sonuçlar üretmeyecektir. Negatif NBD'ye sahip bir

projede ise durum çok daha farklıdır. Negatif NBD'ye sahip bir yatırım alternatifi, indirgenmiş nakit akımları yaklaşımına göre dikkate alınmazken opsiyon düzeltmeli bir NBD hesaplaması aslında projenin zaman içinde pozitif bir yapı kazanabileceğini gösterir.

Bir yatırım projesinin faiz oranlarındaki değişime ilişkin olarak içermiş olduğu opsiyon değeri, yatırım projesinin vadeye olan sürenin uzunluğu ile ilgili piyasanın volatilitesi ile doğru orantılı olarak değişir. Bu örnekte faiz oranlarının tahminlerine bağlı olarak opsiyon değerleri artan nitelikte dinamik bir form içindedir. Bir başka anlatımla, faiz eğrisinin ilgili zaman noktasındaki hareketine bağlı olarak opsiyon değeri bir önceki zaman noktasındaki opsiyon değerinin altında ya da üzerinde bir değer alabilir. Bunun temel nedeni, kullanılan modellerin ürettikleri faiz eğrilerinin devamlı değişken yapı içinde olmasındandır. Opsiyon değerlemesinde kullanılan hesaplama yöntemi ve geliştirilen faiz beklentisi opsiyon tutarını değiştirir. Bu uygulamada yatırımcının beklentisi on iki aylık bir yatırım dairesi içinde faiz oranlarının düşeceği yolundadır. Örneğin geçerli olduğu dönemde gerçek faiz oranları dikkate alındığında, yatırım zamanlama opsiyonlarının işaret ettikleri faiz seviyesinden farklı olduğu görülmektedir. Bu uygulamada kullanılan iki faiz oranı modeline bağlı olarak geçerli olan faiz oranı olan % 22,60'nın %15,83 ile % 17,04 arasında bir değer alması beklenirken gerçekte bu oranın % 19,43 ile sınırlı kaldığı görülmektedir. Bu durum genel beklentinin doğru olmasıyla birlikte gerçek faiz oranının tam olarak tahmin edilemediğini gösterir. Faiz oranlarının belirsizliğine ilişkin olarak örnekte kullanılan modeller hatırlandığında sözkonusu sonuçlar kabul edilebilir. Faiz oranlarının vade yapısına ilişkin model yapıları stokastik diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerin yoğunluk ve yayılma parametreleri çeşitli varsayımsal düşünceler üzerine kuruludur. Yapı itibarıyla burada araştırmacının aradığı şey bir sayı değil bir stokastik süreçtir. Bir başka anlatımla bir varlığın fiyatının izlediği süreç, değişimin kestirilebilen ve kestirilemeyen kısımları ayrıştırılarak temsil edilir. Bu bakımdan bu çalışmada faiz oranlarının belirli bir zaman noktasındaki değerinin tam olarak belirlenmesi amaçlanmamıştır. Yatırım zamanlama opsiyonları belirli bir kullanım faiz oranı düzeyine işaret Amerikan tipi opsiyonlardır. Yatırımcılar yatırım yaşam döngüsünün herhangi bir anında opsiyonu kullanma imkanına sahiptirler. Bu örnekte her iki yatırım

alternatifi için beklemeyi tercih eden yatırımcı % 3.17'lik bir faiz kazancı elde etmiştir. Faiz oranlarının hesaplanmasında kullanılan parametreler geçmiş dönemde gerçekleşen faiz oranlarından elde edilmiştir. İncelenen dönem ve bu dönemde gerçekleşen faiz oranlarının volatilitesi üretilen tahminin kalitesiyle yakından alakalıdır. Türkiye'de faiz piyasalarında yaşanan dalgalanmalar, bu çalışmada kullanılan parametrelerin incelendiği dönemler dikkate alındığında ele alınan veri setinin benzer gelişmiş piyasalardan farklı olduğu görülmektedir. Türkiye uygulamasında özellikle geçmişte yaşanan ekonomik krizler ve yüksek enflasyonist ortam nedeniyle yapılan tahminlerin sapması yüksektir. Bu durum faiz oranlarına ilişkin uzun süreli tahminlerin kullanılması olumsuz etkilemektedir.

Opsiyon hesaplamasında günümüzde farklı modeller kullanılabilmektedir. Opsiyon hesaplamasında binomial yerine trinomial bir yapının kullanılması ya da binomial yapıda yansız değerlendirme yerine olasılıklar atanarak, koşulların değiştirilmesi farklı sonuçlara neden olacaktır. Kullanılan yöntemin farklı sonuçlar üretmesi yatırım zamanlama opsiyonlarının pratik faydasını etkilemez. Erteleme ve vazgeçme opsiyonları bir kazanç tutarından ziyade yatırımın zamanlamasına ilişkin bilgi sağlar. Bu örnekte iki yatırım alternatifi incelendiğinde motor tahrik yapılı CHP ünitesinin türbin sistemine kıyasen daha ön planda olduğu görülmektedir.

Gerçek opsiyon yaklaşımı sermaye bütçeleme kararlarında yatırımı ertelemek suretiyle projenin kendi kendisiyle yarışır hale gelmesini basit olarak göstermesi bakımından yararlıdır. Yatırımın ertelenmesi durumu, yatırımdan elde edilmesi umulan yüksek karların varlığı halinde anlamsız olmakla beraber faiz oranlarının yüksek olduğu büyük yatırım tutarlarını gerektiren projeler için daha geniş NBD gerçekleşme potansiyeline dikkati çeker. Günümüzde yatırımın yapılıp yapılmamasından çok yatırımın doğru yerde, doğru zamanda yapılması hususu önem kazanmıştır. Gerçek opsiyon yaklaşımı yatırım üzerindeki belirsizliklere bir opsiyon bakış açısı sağlamakta olup bu husus yönetsel esnekliğin değeri olarak bilinir. Yatırım zamanlama opsiyonlarında opsiyon malı, esasen stokastik faiz oranları altında ertelenebilir bir projedir.

10.SONUÇ

İşletmenin mali kaynaklarının çeşitli yatırım projelerine nasıl dağıtılacağı konusu finans yazınının en eski ve en temel sorularından biridir. Yatırım projelerinin iktisadi analizi bu soruya verilen yanıtların bütünüdür. Yatırım kararları basit olarak karar alıcıların belirsizlik altında yapmış oldukları çeşitli karşılaştırmalara dayanır. Bu karşılaştırmalar karar alıcıların geleceğe ilişkin yapmış oldukları bir dizi tahmin ve değerlendirme çerçevesinde belirlenir.

Yatırım analizi statik değil dinamik bir süreçtir. Yatırımcılar, yatırım kararları verirken pek çok değişkene dikkat etmek zorundadır. Yatırımı etkileyen faktörler ile bu faktörlerin yatırımın planlanan yaşam süresi içinde nasıl bir seyir izleyeceğinin doğru analiz edilmesi doğrudan doğruya yatırımın sonucunu etkiler. Yatırım kararlarını etkileyen değişkenler incelendiğinde en önemli değişkenlerden birinin faiz oranları olduğu görülür. Yatırımı etkileyen tek faktörün faiz oranları olduğu varsayımı altında, değişen faiz oranlarının yatırımın sonucuna olan etkisi yatırım zamanlamasının önemine işaret eder.

İndirgenmiş nakit akımları yaklaşımı, yatırıma konu olan varlığın gelecekte elde etmesi planlanan tutarlar serisine iskonto faktörlerinin uygulanması esasına dayanmaktadır. İskonto oranı risksiz faiz oranını içeren bir formül ile hesaplanmakta olup, varlığın beklenen getirisi risksiz faiz oranına bir risk priminin eklenmesi suretiyle tespit edilir. Risksiz faiz oranının, olması gerekenden düşük yada yüksek hesaplanması ilgili varlığın değerlendirilmesinde ciddi farklılıklar yaratacaktır.

Faiz oranlarının istatistiksel davranışlarının matematiksel modeller ile temsil edilmesi içerdikleri dinamiklerin anlaşılması bakımından son derece önemli olup, söz konusu modeller faiz oranlarının gelecekte alacakları değerlerin tahmininde kullanılabilir. Finans yazını incelendiğinde faiz oranı modellerinin aynı temel varsayımlara dayandığı görülmektedir. Bu temel varsayımlar ilerleyen zaman içinde değişmemekle beraber, her bir model kendisinden önce gelen modelin eksiklik ve kusurlarını gidermeye yönelik bir dizi çabayı yansıtmaktadır.

Gerçek opsiyon yaklaşımı günümüzde uluslararası alanda yoğun olarak kullanılan bir değerlendirme tekniği olup, indirgenmiş nakit akımları düşüncesine yapılan eleştiriler neticesinde ortaya çıkan bir anlayıştır. Gerçek opsiyon yaklaşımı bir düşünce biçimidir. Opsiyon fiyatlama tekniklerinin gerçek varlıklara uygulanması esasına dayanır. Gerçek opsiyonların yatırım analizine getirdiği bu yeni bakış açısı indirgenmiş nakit akımı düşüncesinin alternatifi değil tamamlayıcısıdır.

Gerçek opsiyonlar finansal opsiyonlarla aynı temellere dayanmakla birlikte uygulama bakımından farklı bir dizi bilgi ve değerlendirmeyi gerektirir. Bu opsiyon türünün, yatırımların iktisadi analizinde kullanılması noktasında dikkat edilmesi gereken en önemli hususlardan biri, seçilen yöntemin yatırım için ne kadar uygun olduğunun belirlenmesidir. Uygulayıcılar açısından farklı gerçek opsiyon hesaplama tekniklerinin tercih edilebilmesi imkanı vardır. Finansal opsiyonların aksine Black-Scholes gibi standart bir hesaplama tekniğinin kullanımı her yatırım için mümkün değildir. Gerçek opsiyonların değerlendirilmesine yönelik çalışmalar incelendiğinde binomial ağaç kullanımının Black-Scholes modeline göre çeşitli avantajlara sahip olduğu görülmektedir.

Gerçek opsiyon düşüncesinin bir alt başlığı olan erteleme opsiyonları yatırım kararını belirleyen değişkenler üzerindeki belirsizliğin, yatırımın belirli bir süre ertelenmesi suretiyle azaltılması esasına dayanmaktadır. Vazgeçme opsiyonu benzer bir şekilde, mevcut pazar koşulları nedeniyle verimsiz kabul edilen bir projenin bir süre için durdurulması, koşulların düzelmemesi durumunda projenin elden çıkarılması prensibi üzerine kuruludur.

Yatırım zamanlama opsiyonları, faiz oranlarına bağlı olarak projenin içermiş olduğu erteleme ve vazgeçme opsiyon değerlerini yansıtan bir gerçek opsiyon çeşididir. Bu opsiyon çeşidi faiz oranları volatilitésinin projenin net bugünkü değeri üzerindeki etkilerini göstererek karar vericilere ilave bir bilgi seti sunar. Yatırım zamanlama opsiyonları faiz oranlarındaki değişim karşısında, yatırımların belirli bir süre ertelenmesi suretiyle, yatırımdan elde edilmesi umulan verimin artırılması düşüncesini yansıtır.

Yatırım zamanlama opsiyonları tek bir proje için dikkate alınabileceği gibi iki ya da daha fazla yatırım projesinin karşılaştırılmasında da kullanılabilir. Bu opsiyon çeşidinin bir karşılaştırma unsuru olarak kullanılması durumunda, yatırım alternatiflerinin farklı nakit akımlarına sahip olması gerekmekte olup, tutar ve zamanlama bakımından benzer nakit akımlarına sahip yatırım alternatifleri için önemli bir ek bilgi sağlamayacağı açıktır. Bir başka anlatımla iki ya da daha fazla yatırım projesinin mukayesesi esnasında bu opsiyon türünün kullanılması durumunda belirleyici faktör bu alternatiflerin sahip oldukları nakit akımların farklılığıdır.

Yatırım zamanlama opsiyonları finans yazınında yer alan diğer rasyolardan farklı olarak subjektif bir değerlendirmeyi de beraberinde getirir. Bu değerlendirme opsiyonun içermiş olduğu değerın uygulayıcılar açısından taşıdığı anlamlılık seviyesidir. Çok yüksek karlılık oranlarının söz konusu olduğu, nispeten düşük bütçeli yatırım projeleri için hesaplanan opsiyon değerlerinin yatırımcılar açısından çok önemli görülmeyeceği söylenebilir. Bu bakımdan yatırımcılar açısından hesaplanan opsiyon değerinin yatırımın bir yüzdesi olarak değerlendirilmesi daha objektif bir kıyaslama imkanı sağlar. Benzer bir şekilde bu opsiyonların kullanım zamanları yapıları (Amerikan tipi opsiyon olmaları) nedeniyle uygulayıcılara bağılı olarak belirlenecektir.

Faiz oranlarının yüksek olduğu, yüksek bütçeli, uzun dönemlere dağılmış nakit akımlarına sahip, firma dışı kaynakların büyük miktarda kullanıldığı ertelenebilir nitelikteki yatırım projelerinde bu opsiyon çeşidinin hesaplanması, yatırımcılara yatırımın zamanlaması hususunda bir bilgi verecektir. Yatırım zamanlama opsiyonlarının hesaplanması konusunda yatırımcıların farklı tahmin teknikleri kullanabilmesi ya da benzer bir bakış açısının yatırımı etkileyen diğer değişkenler (örneğin yatırımın planlanan yaşam döngüsü içerisinde maliyetlerin matematiksel modeller ile modellenmesi) için değerlendirilebilmesi de mümkündür. Yatırım zamanlama opsiyonları yatırımcılar açısında bütünleşik bir bakış açısı sağlamakta olup, projenin ertelenmesinin yaratacağı ilave değeri göstermektedir.

KAYNAKÇA

Bachelier, Louis, “Theorie de la Speculation”, (**Matematik Doktora Tezi**, Annales Scientifiques De l'Ecole normale Superieure III-17:21(86), (defended March 29, 1900)) Reprinted Editions Jacques Gabay, Paris, 1995).

Benaroch, Michel ve Robert J. Kauffman, “A Case for Using Real Options Pricing Analysis to Evaluate Information Technology Project Investments”, **Information Systems Research**, Vo:10, No:70, 1999.

Berk, Niyazi, **Finansal Yönetim**, 5.Baskı, İstanbul:Türkmen Kitapevi, 2000.

Berrada, Tony “Valuing Real Options when Time to Maturity Is Uncertain”, **Third Real Option Conference**, USA, 1999.

Björk, Tomas, **Arbitrage Theory in Continuous Time**, England:Oxford University Press, 1998.

Black, Fisher ve Piotr Karasinski, “Bond and Option Pricing When Short Rates are Lognormal”, **Financial Analysts Journal**, Vol:47, 1991, s.52-59.

Black, Fisher , Emanuel Derman ve William Toy, “A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Tresuary Bond Options”, **Financial Analysts Journal**, Vol:46, 1990, s.573-597.

Bollen, Nicolas P.B.,“Real Options and Product Life-Cycle”, **Management Science**, Vol:45, No:670, 1999.

Brach, Marion A., **Real Options in Practice**, USA: Wiley, 2003.

Brealey, Richard A. ve Stewart C.Myers, **Principles of Corporate Finance**, 6th Ed., USA:McGraw Hill, 1996.

Brennan, Michael ve Eduardo Schwartz, “Evaluating Natural Resource Investment”, **Journal of Business**, Vol:58, No:135, 1985.

Brien, Thomas O. ve Michael J.P.Selby,” Option Pricing Theory and Asset Expectations: A Review and Discussion in Tribute to James Boness”, **Financial Review**, November 1986, s.399-418.

Brigo, Damiano ve Fabio Mercurio, “A Deterministic Shift Extension of Analytically Tractable and Time Homogeneous Short Rate Models”, **Finance and Stochastic**, Vol:5, 2001, s.369-387.

Brigo, Damiano ve Fabio Mercurio, **Interest Rate Models Theory and Practice**, Germany: Springer, 2001.

Buckley, James J., "The Fuzzy Mathematics of Finance", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol:21, No:257, 1987.

Buetow, Gerald W. ve James Sochacki, **Term Structure Models Using Binomial Trees**, USA: The Research Foundation of AIMR, 2001.

Calzi, Li, "Towards a General Setting for the Fuzzy Mathematics of Finance" **Fuzzy Sets and Systems**, Vol:35, No:265, 1990.

Carlsson, Christer ve Robert Fuller, "Project Scheduling with Fuzzy Real Options", **Cybernetics and Systems**, Vol:33, No:511, 2002.

Carr, Peter, "Randomization and American Put", **Review of Financial Studies**, Vol:11, No:597, 1998.

Cassola, Nuno, ve Jorge Barros Luis, **A Two-Factor Model Of German Term Structure Of Interest Rates**, Brussel:European Central Bank Working Papers, No:46, March 2001.

Chance, Don.M., *Teaching Note 97-03: The Vasicek Term Structure Model*, <c:/Classes/Teaching Notes/TN97-03.doc>, (05 Mayıs 2007).

Chance, Don M. ve Pamela P. Peterson, **Real Options and Investment Valuation**, USA: The Research Foundation of AIMR, 2002.

Chesney, Marc, Monique Jeanblanc-Pique ve Marc Yor, "Brownian Excursions and Parisien Barrier Options", **Advances in Applied Probability**, Vol:29, No:165, 1997.

Chorn, Lawrence G. ve Anurag Sharma, "Valuing Investments in Extension to Product Lines and Services Offering When Facing Competitive Entry", **Fifth Real Option Conference**, USA: 30 Haziran 2001.

Cootner, Paul, **The Random Character of Stock Market Prices**, Cambridge: MIT Press, 1964.

Copeland, Thomas E. ve Vladimir Antikarov, **Real Options, A Practitioner's Guide**, New York, USA: Texere Publishing, 2001.

Cortazar, Gonzalo ve Eduardo S. Schwartz, "A Compound Option Model of Production and Intermediate Inventories", **Journal of Business**, Vol:66, No:517, 1993.

Cox, John C., E. Jonathan Ingersoll ve Sheldon A. Ross., "A Theory of The Term Structure of Interest Rates", **Econometrica**, Vol:53, 1985, s.385-407.

Cox, John C. ve Sheldon A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", **Journal of Financial Economics**, Vol:3, No:145, 1976.

Cox, John C., Sheldon A. Ross ve Mark Rubenstein “Option Pricing: A Simplified Approach”, **Journal of Financial Economics**, Vol:7, No:229, 1979.

Damadoran, Aswath, **Investment Valuation**, Second Edition, New York, USA: John Wiley&Sons Inc December 2001, s.772-773.

Damadoran, Aswath, **The Promise and Peril of Real Options**, USA: Stern School of Business, Working Paper, 2001, s.53.

Dothan, L.Uri, “On the Term Structure of Interest Rates”, **Journal of Financial Economics**, Vol:6, 1978, s.59-69.

Dubois, Didier ve Henri Prade, **Possibility Theory**, New York, USA: Plenum Press, 1988.

Duffie, Darrell ve Madan B. Geman, **Intertemporal Arbitrage and Markov Valuation of Securities**, USA: Stanford Graduate School of Business, Working Paper, 1985.

Gencay, Ramazan ve Minglong Qi, ”Pricing and Hedging Derivative Securities with Neutral Networks: Bayesian Regularization, Early Stopping and Bagging”, **IEEE Transactions on Neural Networks**, Vol:12, No:726, 2000.

Geske, Robert, “The Valuation of Compound Options”, **Journal of Financial Economics**, Vol:7, No:63, 1979.

Hakan Erdoğan, “Management Licence Cost Uncertainty in Software Development: A Real Option Approach”, **Fifth Real Option Conference**, Los Angeles, USA: 2001.

Hemanatha Herath ve Chan S. Park, “Multi-Stage Capital Investment Opportunities as Compound Real Options”, **Engineering Economist**, Vol:47, No:27, (2002).

Haug, Espen Gaardner , 3-Dimensional Lattice Models, <http://home.online.no/spehaug/3DLattice.html>, (05.05.2006).

Ho Lee, Moon, “Valuing Finite-Maturity Investment-Timing Options”, **Financial Management**, Vol.26, No:2, Summer 1997, s.60.

Ho, So Yo Thomas ve Sang-Bin Lee , “Term Structure Movements And Pricing Interest Rate Contingent Claims”, **Journal of Finance**, Vol:41, 1986.

Huchzermeier, Arnd ve Christoph H. Loch, “Project Management Under Risk: Using Real Options Approach to Evaluate Flexibility in R&D”, **Management Science**, Vol:47, No:85, 2001.

Huchzermeier, Arnd ve Christoph H. Loch, **Evaluating R&D Projects as Learning Options: Why More Variability Is Not Always Better**, in H.Wildemann,

ed, Production und Controlling, TCW Transfer Centrum Verlag (Çev), Münih, 1999, s.185-197.

Hull, John ve Alan White, "Pricing Interest Rate Derivative Securities", **The Review of Financial Studies**, Vol:3, 1990, s.573-592.

Hull, John ve Alan White, "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities", **Journal of Financial and Quantative Analysis**, Vol: 28, 1993, s.235-254.

Ikedo, Nobuyuki ve Shinzo Watanabe, **Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes**, New York, USA: North-Holland, 1981.

Ingersoll, Jonathan E. ve Jr. Stephen Ross, "Waiting to Invest: Investment and Uncertainty", **Journal of Business**, Vol. 65, Issue 1, Jan. 1992, s.9.

Kensinger, John, **Project Abandonment As a Put Option: Dealing With The Capital Investment Decision and Operating Risk Using Option Pricing Theory**, USA: Cox School of Business, Working paper, October, 1980.

Kogut, Bruce ve Nalin Kulatika, "Operation Flexibility, Global Manufacturing and The Option Value of a Multinational Network", **Management Science**, No:1, January 1993, s.123-129.

Kulatika, Nalin ve Enrico C. Perotti, **Strategic Investment Timing Under Uncertainty**, USA: Boston University, Working Paper, 1992.

Kulatika, Nalin, "The Value of Flexibility: The Case of Dual-Fuel Industrial Steam Boiler", **Financial Management**, No:3, Autumn 1993.

Kwok, Yue Kuen, **Mathematical Models of Financial Derivatives**, USA: Springer, 1998.

Lamberton, Damien ve Bernard Lapeyre, **Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance**, First Edition, USA: Chapman and Hall, 1996.

Lee, Jongwoo ve Dean A. Paxson, "Valuation of R&D Real American Sequential Exchange Options", **R&D Management**, Vol:31, No:191, 2001.

Majd, Saman ve Robert S. Pindyck, "Time to Build, Option Value and Investment Decision", **Journal of Industrial Economics**, Vol:18, No:7, 1987.

Margrabe, William, "The Valuation of Compound Options", **Journal of Financial Economics**, Vol:7, No:63, 1979.

McDonald, Robert ve Daniel Siegel, "Investment and The Valuation of Firms There is a Option to Shut Down", **International Economic Review**, No:2, June 1985.

McDonald, Robert ve Daniel Siegel, "The Value of Waiting to Invest", **Quarterly Journal of Economics**, No:4, November 1986.

Merton, Robert C., "Option Pricing Where the Underlying Stock Returns are Discontinuous", **Journal of Financial Economics**, Vol:3, No:449, 1974.

Myers, Stewart C. ve D.Chew Jr, **Finance Theory and Financial Strategy – The New Corporate Finance**, İkinci Basım, USA: McGraw Hill, 1998.

Myers, Stewart C. ve Saman Majd, "Calculating Abandonment Value and Project Life", **Advances in Futures and Option Research**, Vol:4, No:1, 1990.

Myers, Stewart C., "Determinants of Corporate Borrowing", **Journal of Financial Economics**, No:2, November 1977.

Myers, Stewart C., ve Saman Majd, **Calculating Abandonment Value Using Option Pricing**, USA:Sloan School of Management, Working Paper, May 1983.

Natter, Martin, A. Taudes ve Michael Trecka, "Real Option Valuation with Neutral Networks", **International Journal of Intelligent Systems in Accounting, finance and Management**, Vol:7, No:1, 1998.

Okur, Sergun, "Şirket Değerlemesinde Tespit Metotlarından İndirgenmiş Nakit Akımları ve Pratikte Uygulaması", **Active Dergisi**, İstanbul, Kasım-Aralık 2001.

Otto, Richard E., "Valuation of Internal Growth Opportunities: The Case of Biotech Company", **Quarterly Review of Economics and Finance**, Vol:38, No: 615, 1995.

Önalın, Ömer, "Hisse Senetleri Fiyat Değişimlerinin Stokastik Süreç Olarak Analizi", **Yayınlanmamış Doktora Tezi**, Marmara Üniversitesi S.B.E., 1996.

Önalın, Ömer, **Finans Mühendisliğinde Matematiksel Modelleme**, 1.Baskı, İstanbul:Avcıol Basım Yayın, 2004.

Revuz, Daniel ve Marc Yor, **Continuous Martingales and Brownian Motion**, Almanya:Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

Ribonato, Riccardo, **Interest Rate Option Models**, USA: Wiley, 1997.

Ross, Jr. Stephen, "Uses, Abuses and Alternatives Net Present Value Rule", **Financial Management**, Autumn. 1995, s.96-102.

Rubenstein, Mark, "Double Trouble", **Risk Magazine**, Vol:4, No:73, 1992.

Saad, Emad W., Danil V. Prokhorov ve Donald C.Wunsch, "Comparative Study of stock Trend Prediction Using Time Delay, Recurrent and Probabilistic Neural Networks", **IEEE Transactions on Neural Networks**, Vol:9, No:145, 1998.

Schoemaker, Paul J.H., “Scenario Planning:A Tool for Strategic Thinking” , **Sloan Management Review**, Winter, 1995.

Sharpe, William F., **Investments**, USA:Prentice Hall, 1978.

Siegel, Daniel, James Smith ve James Paddock, “Valuing Offshore Oil Properties with Option Pricing Models, **Midland Corporate Finance Journal**, Spring 1987, s.22.

Şarer, Başar, Aybaba Hançerlioğulları ve Mustafa Übeyli, “Nükleer Hesaplamalarda Monte Carlo Yönetiminin Kullanımı”, **Gazi Üniversitesi Dergisi**, 2006, s. 1-3.

Taylor, H.M., **Martingales and Random Walks, Stochastic Models**, USA:Heyman Sobels eds, Handbook in Or and MS Vol 2, Elsevier Science, 1990.

Teker, Suat ve Levent Gümüşsoy, “Faiz Oran Eğrisi Tahmini: T.C.Hazine Bonosu ve Eurobonds Üzerine Bir Uygulama”, **8.Ulusal Finans Sempozyumu**, 2003, İstanbul, s.3-5.

Triantis, Alexander ve A.Borison, “Real Options:State of the Practice”, **Journal of Applied Corporate Finance**, Vol:14, No:8, 2001.

Turnbull, Geoffrey K. ve C.F.Sirmans, “Vacant Land Options:A Theoretical Analysis”, **Regional Science and Urban Economics**, Vol:20, No:213, 1990.

Van Der Heijden, Kees, **Scenarios:The art of Strategic Conversation**, USA:Wiley, 1995.

Vasicek, Oldrich, “An Equilibrium Characterization of The Term Structure”, **Journal of Financial Econometrics**, Vol:5, 1977.

Weeds, Helen, **Reverse Hysteresis: R&D Investments with Stochastic Innovation**,USA: Working Paper, 1999.

Wiener, Zvi ve Markus Leippold, “*Algorithms Behind Term Structure Models of Interest Rates: I. Valuation and Hedging of Interest Rates Derivatives With The Ho-Lee Model*”, 2007, The Hebrew University, School of Business, <http://pluto.huji.ac.il/~mswiener/zvi.html> (22 Mayıs 2007).

Wiener, Zvi ve Simon Benninga, “Binomial Term Structure Models”, **Mathematica in Education and Research**, Vol. 7, No: 3, 1998, s.2-3-4.

Yolcu, Yeliz, “One-Factor Interest Rate Models: Analytic Solutions And Approximations”, **Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi**, ODTÜ Finansal Matematik Bölümü, Jan, 2005.

Zhu, K.X., “Strategic Investment in Information Technologies: A Real Options and Game-Theoretic Approach”, **Yayınlanmamış Doktora Tezi**, Stanford University, USA, 1999.

Zmeskal, Zdenek, “Application of the Fuzzy-Stochastic Methodology to Appraising the Firm Value as a European Call Option”, **European Journal of Operational Research**, Vol:135, No:303, 2001.

Kojenerasyon Nedir ?, 2007, <http://www.kojenerasyon.com> (05 Temmuz 2007).

Kojenerasyon, 2007, <http://www.elektrotekno.com/about868.html> (05 Temmuz 2007).

Türkiye’de Kojenerasyon Yatırımları Ve Enerji Tesisleri Finansman Modelleri Semineri (26 Nisan 2006) Notları, 2007, <http://www.kojenerasyon.com> (05 Temmuz 2007).

Kojenerasyon Nedir ?, 2007, <http://www.kojenerasyon.com> (05 Temmuz 2007).

Kojenerasyon Sisteminde Kullanılabilecek Yakıtlar ve Fiyatları, 2007, <http://www.kojenerasyon.com> (05 Temmuz 2007).