

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ELEMANLARLA İKİNCİ MERTEBE TEORİSİNE GÖRE HESAP

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Y. Müh. Kazım Ahmet HAŞİM
(Enstitü No: 501041131)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :12.07.2007
Tezin Savunulduğu Tarih :12.06.2007

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet Işın SAYGUN
Diğer Jüri Üyeleri Doç. Dr. Oğuz Cem ÇELİK

Yrd. Doç. Dr. Mecit ÇELİK

HAZİRAN 2007

ÖNSÖZ

İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Mühendisliği programında, Prof. Dr. Sayın Ahmet Işın SAYGUN danışmanlığında gerçekleştirilen, bu yüksek lisans tezi çalışmasında, önceden oluşturulmuş olan perde sonlu eleman geliştirilerek bu sonlu elemanların kullanıldığı programda çubuk ve perdelerden oluşan sistemlerin ikinci mertebe teorisine göre hesabının yapılması sağlanmıştır.

Bu tez çalışmasında bilgi, birikim ve deneyimleri ile bana yol gösteren, özveride bulunarak desteğini esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Sayın Ahmet Işın SAYGUN'a en içten dileklerle teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarında bana destek olan anneme ve babama sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Haziran 2007

Kazım Ahmet HAŞİM

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SİMGE LİSTESİ	ix
ÖZET	xi
SUMMARY	xiii
1. GEOMETRİ DEĞİŞİMLERİ BAKIMINDAN DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER	1
1.1. Tanımlar ve Esaslar	1
1.2. Ardışık Yaklaşım Yöntemi	2
1.2.1. İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesap	2
1.3. Açık (Yerdeğiştirme) Yöntemi İle İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesap	4
1.3.1. Varsayımlar	4
1.3.2. Yardımcı Bilgiler	
1.3.2.1. Çubuk Diferansiyel Denklemi	5
1.3.2.2. Çubuk Uç Kuvvetleri ve Uç Yerdeğiştirmeleri	6
1.3.2.3. Birim Yerdeğiştirme (Birim Deplasman) Sabitleri	7
1.3.2.4. Birim Yerdeğiştirme Sabitleri İçin Yaklaşık Formüller	9
1.3.3. Yerdeğiştirme Yöntemi İle Hesap Düzeni	10
2. SONLU ELEMANLAR METODU İLE TAŞIYICI SİSTEM HESABI	11
2.1. Metodun Esasları, Tanımlar	11
2.2. Sonlu Elemanlar Metodu Denklemlerinin Elde Edilmesi	12
2.2.1. Virtüel İş İlkesi	14
2.3. Sonlu Elemanlarda Seçilen Deplasman Fonksiyonlarının Genel Özelliklerinin İrdelenmesi	18
2.4. İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesaplarda Sonlu Elemanlar Metodunun Uygulanması	20
2.4.1. Sistemlerin İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesabı	22
3. YENİ BİR PERDE SONLU ELEMAN MODELİ	23
3.1. Kabuller	23
3.2. Perde Elemana Ait Eksen Takımı ve Yerdeğiştirme Parametreleri	23
3.3. Perde Elemana Ait Rijitlik ve Gerilme Matrislerinin Hesabı	26
3.3.1. Yerdeğiştirme Bileşenlerinin Yayılış Fonksiyonları	26
3.3.2. Şekildeğiştirme Matrisinin Hesabı	29
3.3.3. Düğüm Noktalarına Ait İç Kuvvetler (Gerilme) Matrisinin Tanımı	31
3.3.4. $[D]$ Elastisite Matrisinin Belirlenmesi	31

3.3.5. Eleman Bağımsız Alt Rijitlik Matrislerinin Hesabı	32
3.3.5.1. Geliştirilen Sonlu Elemana Ait Birinci Mertebe Rijitlik Matrisinin Bulunması	33
3.3.5.2. Dönüştürme Matrisleri Kullanılarak Geliştirilmiş Perde Sonlu Elemana Ait Alt Rijitlik Matrislerinin Hesabı	37
3.3.5.3. Perde Sonlu Elemanın Planda Farklı Açısız Konumuna Bağlı Olarak Rijitlik Matrislerinin Düzenlenmesi	40
3.3.5.4. Geliştirilen Sonlu Elemana Ait İkinci Mertebe Rijitlik Matrisinin Bulunması	42
4. ÇUBUK SONLU ELEMEN	50
4.1. Kabuller	50
4.2. Çubuk Sonlu Elemana Ait Eksen Takımı ve Yerdeğıştirme Parametreleri	51
4.2.1. Kiriş Sonlu Elemanlar	51
4.2.2. Kolon Sonlu Elemanlar	53
4.2.3. Çubuk Sonlu Elemana Ait Birim Durum Fonksiyonlarının z Serbest Değışkenine Bağlı İfadelerinin Bulunması	55
4.3. Geliştirilen Çubuk Sonlu Elemana Ait İkinci Mertebe Rijitlik Matrisinin Bulunması	57
5. PERDELERİN ELASTOPLASTİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ	61
5.1. Homojen, İzotrop, İdeal Elastoplastik Malzeme	61
5.2. Betonarme Perdeler	63
5.2.1. Donatı Çeliğinin Özellikleri	63
5.2.2. Betonun Özellikleri	64
5.2.3. Betonarme Perde Eleman İçin Malzeme Bakımından Yapılan Kabuller	65
6. PERDELERDEN OLUŞAN SİSTEMLERİN GÖÇME YÜK PARAMETRESİNİN BELİRLENMESİNDE İZLENEN YÖNTEM	67
6.1. Denklem Takımının Oluşturulması	68
6.2. Denklem Takımının Çözümü ve Bilinmeyenlerin Bulunması	71
7. BİLGİSAYAR PROGRAMI	73
7.1. Programın Amacı	73
7.2. Genson.f90 Bilgisayar Programı	73
7.2.1. Program Giriş Bilgileri	73
7.2.2. Program Çıkış Bilgileri	76
8. SAYISAL ÖRNEKLER	78
8.1. Kolonlu Tek Kat Çerçeve	78
8.1.1. X Doğrultusunda Birinci ve İkinci Mertebe Lineer Hesap Sonuçları	
8.1.2. X Doğrultusunda Birinci ve İkinci Mertebe Nonlineer Hesap Sonuçları	84
8.2. Perdeli Tek Kat Çerçeve	86
8.2.1. X Doğrultusunda Birinci ve İkinci Mertebe Lineer Hesap Sonuçları	86

8.2.2. X Doğrultusunda Birinci ve İkinci Mertebe Nonlineer Hesap Sonuçları	87
8.3. 13 Katlı Perde Sistem	89
8.3.1. Y Doğrultusunda Birinci ve İkinci Mertebe Nonlineer Hesap Sonuçları	89
9. SONUÇLAR	93
KAYNAKLAR	95
EKLER	97
ÖZGEÇMİŞ	101

TABLO LİSTESİ

		<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1	Yardımcı fonksiyonlar	28
Tablo 3.2	Serbestliklerin birim değerinde elemanda yerdeğiştirme bileşenlerinin yayılış fonksiyonları	29
Tablo 3.3.a	$[B_1], [B_2], [B_3]$ alt matrisleri.....	35
Tablo 3.3 b	$[B_4], [B_5], [B_6]$ alt matrisleri	36
Tablo 3.4 a	$[k]_{11}$ Eleman alt rijitlik matrisi	38
Tablo 3.4 b	$[k]_{12}$ Eleman alt rijitlik matrisi	38
Tablo 3.4 c	$[k]_{13}$ Eleman alt rijitlik matrisi	38
Tablo 3.4.d	$[k]_{14}$ Eleman alt rijitlik matrisi	39
Tablo 3.4.e	$[k]_{15}$ Eleman alt rijitlik matrisi	39
Tablo 3.4.f	$[k]_{16}$ Eleman alt rijitlik matrisi	39
Tablo 3.5.	$\int_{-a/2}^{a/2} X(x).Y(x).dx$	46
Tablo 3.6.	$\int_{-a/2}^{a/2} X(x).Y(x).dx$	46
Tablo 3.7.	İkinci Mertebe $[\bar{K}]_{N_1}$ matrisi	48
Tablo 3.8.	İkinci Mertebe $[\bar{K}]_{N_2}$ matrisi	49
Tablo 4.1.	Lokal eksen takımında giriş sonlu eleman rijitlik matrisi	53
Tablo 4.2.	L_i, F_i, G_i Yardımcı Fonksiyonları	56
Tablo 4.3.	İkinci Mertebe Çubuk Sonlu Eleman $[\bar{K}]$ matrisi	60
Tablo 7.1.	Program giriş bilgileri	75
Tablo 8.1.	Birinci mertebe pushover analizi verileri	84
Tablo 8.2.	İkinci mertebe pushover analizi verileri	85
Tablo 8.3.	Perde eleman birinci mertebe pushover analizi verileri	87
Tablo 8.4.	Perde eleman ikinci mertebe pushover analizi verileri	88
Tablo 8.5.	13 katlı perde sistem birinci mertebe pushover analizi verileri	89
Tablo 8.6.	13 katlı perde sistem ikinci mertebe pushover analizi verileri	91

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1 : Birinci ve İkinci Mertebe Teorilerinin Karşılaştırılması	1
Şekil 1.2 : İkinci Mertebe Teorisine Göre Boyutandırma	2
Şekil 1.3 : Ardışık Yaklaşım Yönteminin Birinci Adımı	3
Şekil 1.4 : Ardışık Yaklaşım Yönteminin İkinci Adımı	3
Şekil 1.5 : Fiktif Yükler	4
Şekil 1.6 : Çubukların İdealleştirilmesi	5
Şekil 1.7 : Çubuk Diferansiyel Denkleminin Elde Edilmesi	5
Şekil 1.8 : Çubuk Uç Kuvvetleri ve Uç Yerdeğiştirmeleri	6
Şekil 1.9 : (A) Durumu	7
Şekil 1.10 : (B) Durumu	8
Şekil 1.11. : (C) Durumu	9
Şekil 2.1. : Virtüel İş İlkesi	15
Şekil 2.2. : C^0 tipi Süreklilik	20
Şekil 2.3. : İkinci Mertebe Tesirlerin İş	21
Şekil 3.1. : Perde Sonlu Eleman Boyutları ve Eksen Takımı	24
Şekil 3.2.a : Köşe düğüm noktaları Yerdeğiştirme Parametreleri	24
Şekil 3.2.b.: Master düğüm noktaları Yerdeğiştirme Parametreleri	25
Şekil 3.3. : Master düğüm noktasında Dönüşümün Geometrisi	41
Şekil 3.4. : Sonlu Elemandaki Eksenel Kuvvet İle Düzlem İçi ve Düzlem Dışı Dönmeler	43
Şekil 4.1. : İdeal Elastoplastik Malzemede Yükleme ve Boşaltma Eğrileri	50
Şekil 4.2. : Kiriş Sonlu Elemana Ait Yerdeğiştirme Parametreleri	51
Şekil 4.3. : Kolon Sonlu Elemana Ait Yerdeğiştirme Parametreleri	54
Şekil 4.4. : Yerdeğiştirme Parametreleri	56
Şekil 4.5. : X-Z Düzlemindeki Dönme	57
Şekil 4.6. : Y-Z Düzlemindeki Dönme	58
Şekil 5.1. : Perde Elemanlarda Gerilme-Şekildeğiştirme Bağıntısı	62
Şekil 5.2. : İdeal Elastoplastik Malzeme Olarak Donatı Çeliğinin Gerilme-Şekildeğiştirme Bağıntısı	64
Şekil 5.3. : Normal Sargı Donatılı Betonun Eğilmesinde Dış Liflerdeki $\sigma - \epsilon$ Bağıntısı	65
Şekil 7.1. : 80t Düşey; 10t Yatay Yüklü Kolonlu Tek Kat Çerçeve	76
Şekil 8.1. : 100t Düşey; 10t Yatay Yüklü Kolonlu Tek Kat Çerçeve	78
Şekil 8.2. : Eşdeğer X-Z Düzlemsel Çerçeve	79
Şekil 8.3. : İzostatik Esas Sistem Birim Yükleme Diyagramı	79
Şekil 8.4. : İzostatik Sistem M_0 Diyagramı	80
Şekil 8.5. : Çerçeve Sistem M Diyagramı	81
Şekil 8.6. : δ_x Doğrultusunda Birim Yükleme Diyagramı	81
Şekil 8.7. : Moment ve Yatay İzdüşüm Denge Denklemleri	82

Şekil 8.8. : Yük parametresi – tepe düğüm noktası yerdeğıştirmesi	84
Şekil 8.9. : Plastik mafsals oluşum sırası	85
Şekil 8.10. : İkinci mertebe yük parametresi – tepe düğüm noktası yerdeğıştirmesi	85
Şekil 8.11. : İkinci mertebe plastik mafsals oluşum sırası	86
Şekil 8.12. : Perde sistem düşey yük yükleme düzeni ve alt kat planı	86
Şekil 8.13. : Perde sistem yatay yük yükleme düzeni ve üst kat planı	87
Şekil 8.14. : Perde sistem birinci mertebe statik itme eğrisi	88
Şekil 8.15. : Perde sistem ikinci mertebe statik itme eğrisi	88
Şekil 8.16. : 13 kat perde sistem kat kalıp planı	90
Şekil 8.17. : 13 kat perde sistem birinci mertebe statik itme eğrisi	90
Şekil 8.18. : 13 kat perde sistem ikinci mertebe statik itme eğrisi	92

SEMBOL LİSTESİ

$[d]_i$: İ düğüm noktası yerdeğiştirme parametreleri kolon matrisi
u, v, w	: Yerdeğiştirme bileşenleri
l_i, f_i, g_i	: Yardımcı fonksiyonlar
β_n, β_z	: n ve s ekseninde dönme yerdeğiştirme
ϵ_z	: z ekseninde boyunca şekildeğiştirme
$[Ad]$: Serbestliklerin birim değerinde elemanda yerdeğiştirme bileşenlerinin yayılış fonksiyonları matrisi
$[D]$: Elastisite matrisi
E_c	: Beton çeliği elastisite modülü
E_b	: Beton elastisite modülü
h	: Perde eleman kalınlığı
a, b	: Eleman yatay ve düşey boyutları
ν	: Poisson oranı
$[\epsilon]$: Şekildeğiştirme matrisi
$[B]$: Birim yerdeğiştirme durumlarında şekildeğiştirme bileşenlerinin eleman üzerinde yayılışını gösteren matris
$[N]$: Kesit tesirleri matrisi
L	: Çubuk boyu
G	: Kayma modülü
α	: Perde elemanın planda yatayla yaptığı açı
$\Delta x, \Delta y$: Rijit düzlemdeki i düğüm noktası ile referans noktası arasındaki dik mesafeler
$[K]_{ix,jx}$: Perde sonlu elemanın ortak sistem eksen takımındaki alt rijitlik matrisi
EI_y, EI_z	: YZ ve XZ düzlemlerindeki eğilme rijitlikleri
$[q]$: Sistem eksen takımında etkiyen düğüm noktası yüklerine ait matris
$[S\Delta d]$: Ortak sistem eksen takımında perde sonlu elemanlarda, dış yüksüz sistemde, plastik şekildeğiştirmeler sıfır iken yalnız düğüm noktalarının yerdeğiştirme bileşenlerinden dolayı plastikleşen düğüm noktalarında oluşan uç kuvvetleri matrisi
$[S\Delta \Delta]$: Ortak sistem eksen takımında perdelerde plastik şekildeğiştirmenin olduğu düğüm noktasında düşey doğrultudaki ve düğüm noktası yerdeğiştirme parametresi ile ters işaretli plastik yerdeğiştirmenin birim değerinden dolayı perde elemanın düğüm noktalarında oluşan ilave uç kuvvetleri matrisi

ϵ_e	: Elastik şekildeğiştirme sınır değeri
ϵ_g	: Maksimum şekildeğiştirme sınır değeri
$E_{eş}$: Eşdeğer elastisite modülü
t	: Perde kalınlığı
M_x, M_z	: Çubuk eksen takımında x ve z eksenleri etrafında eğilme momenti
f_{ywd}	: Hesapta kullanılacak etriye akma dayanımını ifade etmektedir.
L_p	: Plastik bölge uzunluğu
N	: Çubuk eksen takımında y eksenini boyunca çekme-basınç normal kuvveti
τ	: Kayma gerilmesi

SONLU ELEMANLARLA İKİNCİ MERTEBE TEORİSİNE GÖRE HESAP

ÖZET

Bu çalışma ile, daha önceden geliştirilmiş olan perde ve çubuk sonlu elemanlardan oluşan sistemlerde ikinci mertbe etkiler gözününe alınmış ve geometri değişimi bakımından lineer olmayan teorinin esasları açıklanmıştır.

Sekiz bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde ikinci mertbe teorisinin esasları açıklanmış; bu teoriye göre sistem hesabının öngören iki temel yöntem olan Ardışık Yaklaşım Yöntemi ile diferansiyel denge denkleminde ilgili sınır şartlarının yerine konulup çözülmesiyle oluşturulan birim deplasman sabitlerinden meydana gelen Açık Yöntemi kısaca özetlenmiştir.

İkinci bölümde; özel haller dışında diferansiyel denge denkleminde dayalı çözümün uygulanmasının zorluğu göz önüne alınarak yerine sayısal hesap metodlarından biri olan sonlu elemanlar metodunun kullanılması önerilmiş ve bu metodun ilkeleri açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde; köşelerde dört; master düğüm noktalarında üç yerdeğiştirme parametresi olmak üzere toplamda yirmi iki serbestlik dereceli dikdörtgen perde sonlu eleman tanıtılmış ve bu sonlu elemana ait birinci ve ikinci mertbe rijitlik matrislerinin çıkarılışı anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde; doğru eksenli ve prizmatik uzay çubuklarda ikinci mertbe teorisine ait çubuk rijitlik matrisi sunulmuştur.

Beşinci bölümde; homojen, izotrop, ideal elasto-plastik malzeme kabulü yapılarak perdelerine ait düğüm noktalarında düşey doğrultudaki şekildeğiştirme parametresinin elastik şekildeğiştirme sınırını aşması halinde plastikleşmenin başladığı kabul edilmiştir. Eleman içinde yayılı plastik şekildeğiştirmeleri dikkate almak yerine, plastik şekildeğiştirmelerin düğüm noktalarında plastik rölatif yerdeğiştirmeler olarak toplandığı, arada elemanların lineer elastik davranmaya devam ettiği kabulü yapılmıştır. Göçmenin mesnet düğüm noktalarının biri hariç hepsinde düşey şekildeğiştirmelerin ϵ_e elastik şekildeğiştirme sınır değerine ulaşması veya bir kısmı ulaşmamış olsa bile herhangi bir düğüm noktasında ϵ_p plastik şekildeğiştirme sınırının aşılması durumunda oluşacağı kabul edilmiştir. Homojen, izotrop, ideal elasto-plastik malzeme öngörülerek oluşturulan perde sonlu elemanların betonarme malzeme özelliklerini de dikkate alarak kullanımının mümkün olduğu açıklanmıştır.

Altıncı bölümde; yalnız perdelerden oluşan sistemlerin lineer elastik olmayan şekildeğiştirmelerinin etkisini de dikkate alan çözüm için bir yöntem açıklanmıştır.

Plastikleşmenin perde sonlu elemanın düğüm noktalarından birinde oluşması durumunda o düğüm noktasında oluşan ve plastikleşme parametresi olarak isimlendirilen ilave düşey yerdeğiştirme yeni bilinmeyen olarak alınmış, bu bilinmeyenin tayini için sistem rijitlik matrisine satır ve sütun eklenerek, plastikleşen sistemin çözümü yapılmıştır. Özel bir durum olarak geometri bakımından simetrik, yükleme bakımından antimetrik olan sistemlerde aynı yük parametresinde birden fazla simetrik plastikleşme oluşması durumunda sistem rijitlik matrisine sadece bir satır ve sütun ilave edilmesi ile çözümün yapılabileceği açıklanmıştır.

Yedinci bölümde; yöntemin sayısal uygulamaları için Fortran Programlama dilinde yazılmış, Microsoft Developer Studio'da derlenmiş olan bilgisayar programı hakkında bilgi verilmiştir.

Sekizinci bölümde; tanıtılan bilgisayar programından yararlanılarak örnek çözümler yapılmıştır.

SECOND ORDER THEORY BY FINITE ELEMENT METHOD

SUMMARY

In this study; theory of the geometric nonlinearity is explained and dealt with the shear walled and framed structures using the finite element model by considering the second order effects.

The thesis consists of eight chapters. In the first chapter, after introducing the principles of the second order theory, the two methods; Iterative Approach Method and the displacement method based on the solution of the differential equilibrium equation by replacing the boundary conditions are summarized.

In the second chapter; considering the difficulty of applying the differential equilibrium equation ; one of the numerical methods called the finite element method is advised and the theory of this method is explained.

In the third chapter; a finite rectangular shear wall element model which has four displacement parameters at the corners and three parameters at the master joints; totally exists from twenty two degrees of freedom, are presented. By the assumption of isotrop material, the first and second order stiffness matrices of the finite shear wall element are obtained and tabulated in the thesis.

In the fourth chapter, the stiffness matrix for the linear axial, prismatic, space column and beam elements in the second order theory is given.

In the fifth chapter, the structural members are considered to be made of homogenous, isotrop and ideal elasto plastic material. In nodes belonging to the finite wall elements, if the vertical deformation parameter is exceeded the elastic deformation limit, this node is accepted as a plastic node. One of the reason of collapse is that the vertical deformation parameters in all except that one of the foundation nodes are exceeded ϵ_e , the elastic deformation limit. Another reason is that vertical deformation parameter in anyone of the plastic nodes is over or equal ϵ_p , the collapse deformation limit. These are assumptions. It can be possible that, the finite wall element which is developed by assuming homogenous, isotrop, ideal elasto-plastic material can be used by considering reinforced concrete material properties, is explained.

In the sixth chapter, in order to analyse the system which has only the finite wall elements by considering nonlinear –elastic deformation's effects, a method is explained. In the case of plastic node is belonging to the finite wall element, Δ , the supplement vertical displacement, which is occurred in the plastic node and as called plastic deformation parameter is chosen as a new unknown. An additional row and a column are added to the system stiffness matrix in order to determine Δ . The

solution of the system which has plastic nodes is accomplished. As a special condition, in the structural system which has symmetrical geometry and antimetrical loads, in case of plastic nodes are more than one at the same horizontal load parameter, similarly only one line and one column is added to the system stiffness matrix.

In the seventh chapter, the computer program which has been developed for the numerical applications is explained. This program is compiled in Microsoft Developer Studio.

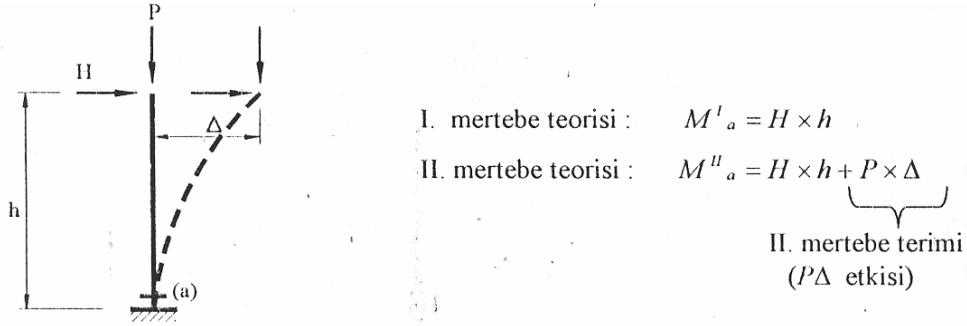
In the eighth chapter, some numerical examples are given by using the computer program.

1. GEOMETRİ DEĞİŞİMLERİ BAKIMINDAN DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER

Bu bölümde, geometri değişimleri bakımından lineer olmayan teorinin (ikinci mertbe teorisi) esasları açıklanacak ve ikinci mertbe teorisine göre sistem hesabını öngören iki temel yöntem olan Ardışık Yaklaşım Yöntemi ile Açık (Yerdeğiştirme) Yöntemi kısaca özetlenecektir.

1.1 Tanımlar ve Esaslar

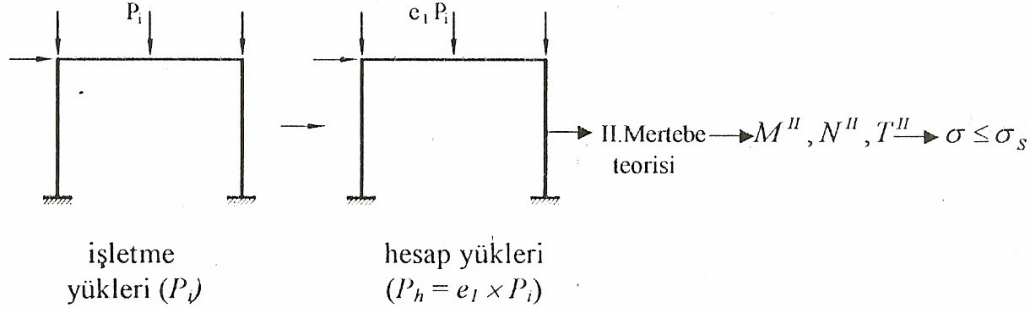
Yerdeğiştirmelerin yeter derecede küçük olmadığı yapı sistemlerinde denge denklemlerinin şekildeğiştirilmiş eksen üzerinde yazılması gerekmektedir. Geometri değişimlerinin (yerdeğiştirmelerin) denge denklemlerine etkisinin göz önüne alındığı bu teoriye *ikinci mertbe teorisi* denir. Şekil 1.1



Şekil 1.1. : Birinci ve İkinci Mertbe Teorilerinin Karşılaştırılması

İkinci mertbe teorisinde yerdeğiştirmelerin geometrik süreklilik denklemlerine etkisi terk edilmektedir. Bu etkinin de göz önüne alındığı teoriye sonlu deplasman teorisi adı verilir. İnşaat mühendisliği kapsamındaki yapı sistemlerinde belirli sınır değerleri aşmasına izin verilmediğinden, yerdeğiştirmelerin geometrik süreklilik denklemlerine etkisi çok kere terk edilebilecek düzeyde kalmaktadır.

İkinci mertebe teorisi doğrusal olmadığından süperpozisyon prensibi geçerli değildir. Bu nedenle, güvenlik gerilmeleri esasına göre hesap yapılamaz. Bunun yerine, işletme (servis) yüklerinin belirli bir güvenlik katsayısı ile çarpımından oluşan hesap yükleri (tasarım yükleri) altında, sistem ikinci mertebe teorisine göre hesaplanarak kesit zorları bulunur. Bu kesit zorlarından oluşan gerilmeler malzemenin sınır gerilmelerini aşmayacak şekilde, sistem boyutlandırılır, Şekil 1.2.



Şekil 1.2. : İkinci Mertebe Teorisine Göre Boyutlandırma

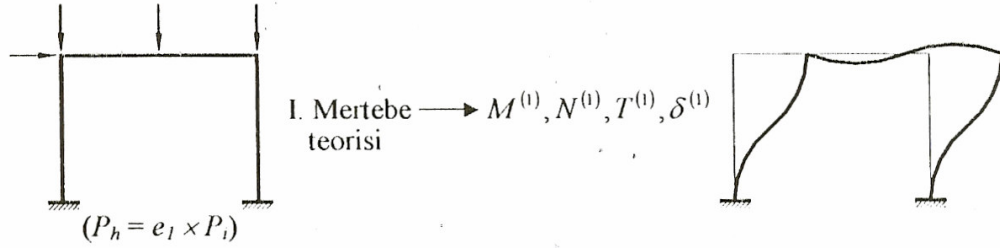
1.2 Ardışık Yaklaşım Yöntemi

1.2.1 İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesap

Ardışık yaklaşım yönteminin en belirgin özelliği, sistem özelliklerinden bağımsız olarak her türlü yapı sistemine uygulanabilmesidir, [1]. Bu yöntemin uygulanmasında Kuvvet veya Yerdeğiştirme (Deplasman) esaslı çözüm yöntemlerinden herhangi biri kullanılabilir.

Dış yükler etkisindeki bir yapı sisteminin şekil değiştirmiş eksenini bilirse denge denklemleri bu eksen üzerinde yazılarak ikinci mertebe teorisine göre hesap yapılabilir. Ancak çözüme bağlı olan şekil değiştirmiş eksen başlangıçta bilinmediğinden bir ardışık yaklaşım yolunun uygulanması gerekmektedir.

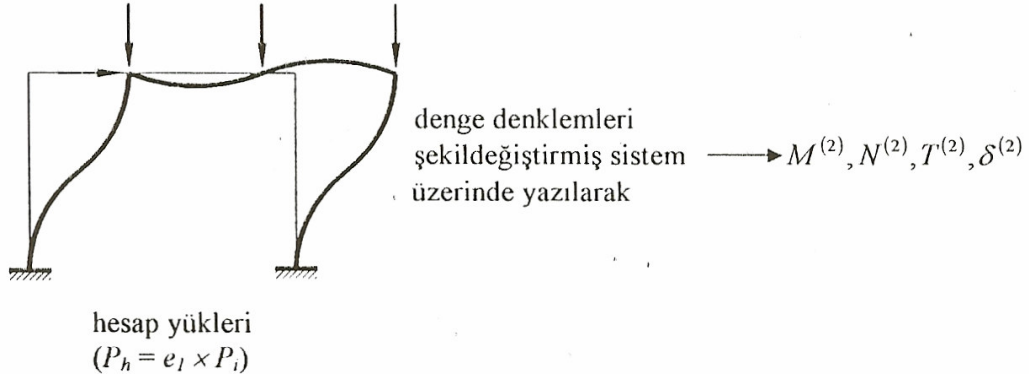
Ardışık yaklaşımın birinci adımında sistem birinci mertebe teorisine göre hesaplanarak $M^{(1)}$, $N^{(1)}$, $T^{(1)}$ kesit zorları ve $\delta^{(1)}$ yerdeğiştirmeleri bulunur, Şekil 1.3



Şekil 1.3. : Ardışık Yaklaşım Yönteminin Birinci Adımı

İkinci adımda şekildeğiştirmiş eksen sistem eksenini olarak alınır. Denge denklemleri bu eksen üzerinde yazılarak sistem yeniden hesaplanır ve bu adıma ait $M^{(2)}$, $N^{(2)}$, $T^{(2)}$, $\delta^{(2)}$ büyüklükleri bulunur, Şekil 1.4

Örneğin Kuvvet yönteminden yararlanarak hesap yapılması halinde, dış yüklerden ve birim yüklemelerden oluşan dış yük ve birim yükleme diyagramları çizilirken eksen eğrisi olarak şekildeğiştirmiş eksen esas alınır.



Şekil 1.4. : Ardışık Yaklaşım Yönteminin İkinci Adımı

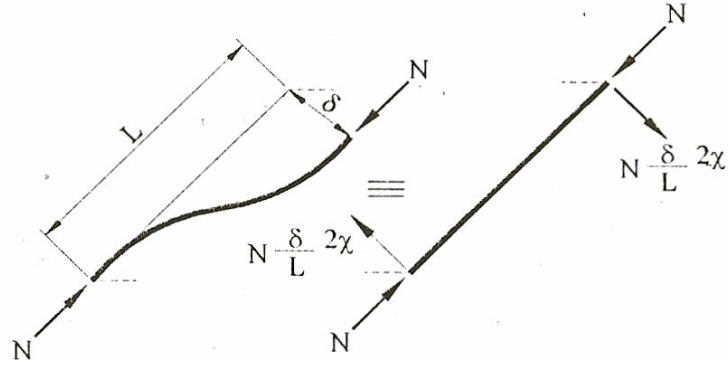
İstenirse, denge denklemlerini şekildeğiştirmiş sistem üzerinde yazmak yerine, yüksüz eksen (şekildeğiştirmemiş eksen) esas alınır. Buna karşılık her adımda dış yüklerle beraber

$$N \frac{\delta}{L} 2\kappa \quad (1.1)$$

fiktif kuvvetleri de hesaba katılır, Şekil 1.5. Buradaki 2χ katsayısı, eksen eğrisinin doğrusal olmamasından doğan ek fiktif kuvvetlerinin katkısını ifade etmektedir. Bu

katsayı genellikle $1.00 \leq 2\chi \leq 1.20$ arasındadır. Göz önüne alınan eleman boylarının yeter derecede küçük olması halinde $2\chi \approx 1.00$ alınabilir.

Her adımda, bir önceki adım sonunda bulunan şekildeğiştirmiş eksen sistem eksenini olarak almak ve denge denklemlerini bu eksen üzerinde yazmak suretiyle hesaba devam edilir. Herhangi bir adımda esas alınan eksen eğrisi ile hesap sonucunda bulunan şekildeğiştirmiş eksen birbirine yeter derecede yakın olunca ardışık yaklaşıma son verilir.



Şekil 1.5. : Fiktif Yükler

Ardışık yaklaşımın belirli bir sonuca yakınsamaması, yani ıraksak olması halinde sistemin bu yükleri taşıyamadığı, diğer bir deyişle, burkulduğu anlaşılır. Yükler belirli bir sınır değerinin altında ise ardışık yaklaşım yakınsaktır. Ancak yükler arttıkça ardışık yaklaşımın yakınsaklık hızı azalır.

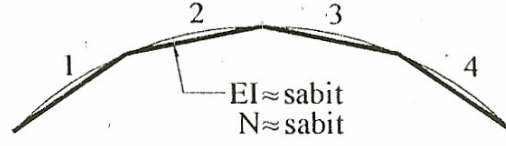
1.3 Açı (Yerdeğiştirme) Yöntemi İle İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesap

1.3.1 Varsayımlar

Bu bölümde, düzlem yapı sistemlerinin geleneksel Açık (Yerdeğiştirme) yöntemi ile ikinci mertebe teorisine göre hesabı incelenecektir, [2]. Yöntemin geliştirilmesinde ve uygulanmasında şu temel varsayımlar yapılmaktadır.

- i) Çubuklar doğru eksenlidir ve çubuk enkesiti çubuk boyunca sabittir.
- ii) Normal kuvvet çubuk boyunca sabittir.

Bu koşulların sağlanmadığı hallerde, çubuklar doğru eksenli, sabit enkesitli ve normal kuvveti sabit varsayılabilen küçük parçalara bölünerek idealleştirilebilirler, Şekil 1.6.



Şekil 1.6. : Çubukların İdealleştirilmesi

1.3.2 Yardımcı Bilgiler

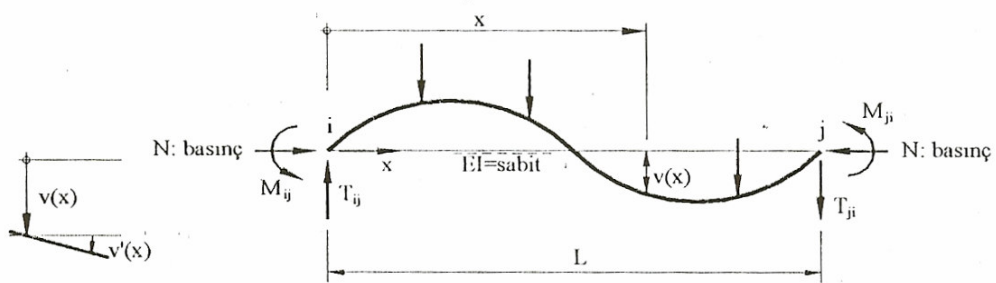
1.3.2.1 Çubuk Diferansiyel Denklemleri

Dış yükler, uç kuvvetleri ve sabit aksenal basınç kuvveti etkisindeki bir doğru eksenli prizmatik (sabit kesitli) çubuğun ikinci mertebe teorisine ait diferansiyel denklemleri elde edilecektir, Şekil 1.7.

İkinci mertebe teorisinde, şekildeğiştirmiş eksen üzerinde yazılan denge denklemleri

$$M(x) = M^1(x) + N \cdot v(x) \quad (1.2)$$

şeklinde dir.



Şekil 1.7. : Çubuk Diferansiyel Denkleminin Elde Edilmesi

Bu denklemdaki $M^1(x)$ birinci mertebe eğilme momenti, çubuk uç kuvvetlerine ve çubuk üzerindeki yüklerle bağlı olarak, $M_0(x)$ çubuk üzerindeki yüklerden oluşan basit kiriş eğilme momentini göstermek üzere,

$$M^1(x) = -M_{ij} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}x + M_0(x) \quad (1.3)$$

şeklinde yazılabilir. Elastik çubuğa ait

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (1.4)$$

şekildeğiştirme denkleminde $M(x)$ eğilme momentinin (1.2) denklemindeki ifadesi yerine konursa

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \alpha^2 v(x) + \frac{M^1(x)}{EI} = 0 \quad (1.5)$$

$$\left\{ \alpha^2 = \frac{N}{EI} \right\} : \text{sabit} \quad (1.6)$$

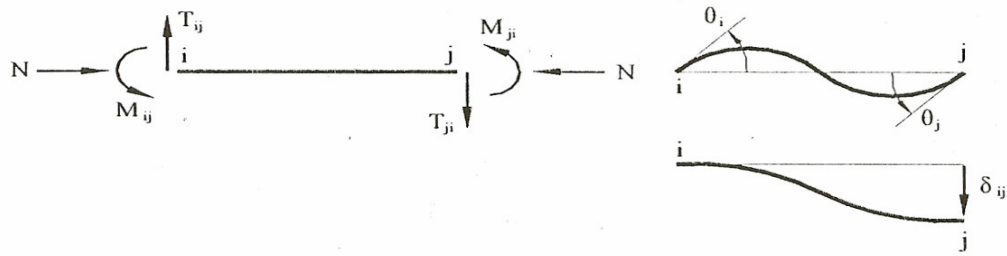
çubuk diferansiyel denklemi elde edilir. İkinci mertebeden sabit katsayılı olan bu diferansiyel denklemin genel çözümü, $F(x)$ özel çözümü göstermek üzere,

$$v(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) + F(x) \quad (1.7)$$

şeklindedir.

1.3.2.2 Çubuk Uç Kuvvetleri ve Uç Yerdeğiştirmeleri

İkinci mertebeye teorisine göre hesapta, doğru eksenli çubukların uç kuvvetlerinin ve uç yerdeğiştirmelerin tanımı birinci mertebeye teorisindeki tanımlarla aynıdır, Şekil 1.8

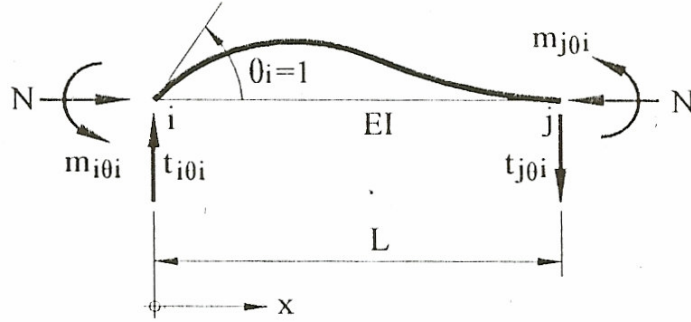


Şekil 1.8. : Çubuk Uç Kuvvetleri ve Uç Yerdeğiştirmeleri

1.3.2.3 Birim Yerdeğiştirme (Birim Deplasman) Sabitleri

Birim yerdeğiştirme sabitleri, uç yerdeğiştirmelerinin birim değerlerinden oluşan uç kuvvetleri olarak tanımlanmaktadır. Doğru eksenli düzlem çubuklarda, ikinci mertebe teorisine ait birim yerdeğiştirme sabitlerini belirlemek için üç farklı yerdeğiştirme durumu göz önüne alınır.

(A) Durumu: $\theta_i = 1, \theta_j = 0, \delta_{ij} = 0$, dış yükler = 0, Şekil 1.9.



Şekil 1.9. : (A) Durumu

Bu duruma ait sınır koşulları:

$$x=0 \quad \text{için} \quad v(0) = 0 \quad \frac{dv}{dx}(0) = -1$$

$$x=L \quad \text{için} \quad v(L) = 0 \quad \frac{dv}{dx}(L) = 0$$

(1.3) denklemi dış yük = 0 olmak üzere $M^1(x) = -M_{ij} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}x$ şeklini alır.

$$\text{Özel çözüm: } F(x) = -\frac{M^1(x)}{\alpha^2 EI} \quad (1.8)$$

seçilebilir. Buna göre genel çözüm (1.7)' den:

$$v(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) + \left[M_{ij} \left(1 - \frac{x}{L} \right) - M_{ji} \frac{x}{L} \right] \frac{1}{\alpha^2 EI} \quad (1.9)$$

ile her noktada dönme $\theta(x) = -\frac{dv(x)}{dx}$ olduğundan

$$\theta(x) = -A\alpha \cos(\alpha x) + B\alpha \sin(\alpha x) + \left[\frac{M_{ij} + M_{ji}}{L} \right] \frac{1}{\alpha^2 EI} \quad (1.10)$$

olmak üzere (1.9) ve (1.10) denklemlerinde (A) Durumuna ait sınır koşulları yerine yazıldığında $m_{i\theta i} = M_{ij}$ ile $m_{j\theta i} = M_{ji}$ birim deplasman sabitleri hesaplanır.

$$m_{i\theta i} = \left[\frac{EI}{L} \right] \left[\frac{\alpha L \sin(\alpha L) - (\alpha L)^2 \cos(\alpha L)}{[2(1 - \cos(\alpha L)) - \alpha L \sin(\alpha L)]} \right] \quad (1.11)$$

$$\alpha L = L \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (N: \text{basınç}) \quad (1.12)$$

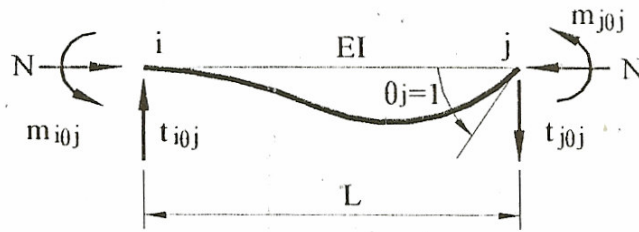
$$m_{j\theta i} = \left[\frac{EI}{L} \right] \left[\frac{(\alpha L)^2 - (\alpha L) \sin(\alpha L)}{[2(1 - \cos(\alpha L)) - \alpha L \sin(\alpha L)]} \right] \quad (1.13)$$

Çubuğun denge denklemlerinden

$$t_{i\theta i} = t_{j\theta i} = \frac{m_{i\theta i} + m_{j\theta i}}{L} \quad (1.14)$$

bulunur.

(B) Durumu: $\theta_i = 0, \theta_j = 1, \delta_{ij} = 0$, dış yükler = 0, Şekil 1.10



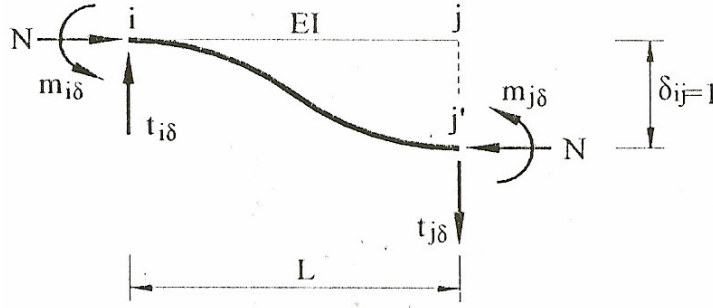
Şekil 1.10. : (B) Durumu

Betti karşılık teoreminden: $m_{i\theta j} = m_{j\theta i}$ (A ve B durumları arasında)

Simetri özelliğinden $m_{j\theta j} = m_{i\theta i}$

Çubuğun denge denklemlerinden: $t_{i\theta j} = t_{j\theta j} = \frac{m_{i\theta j} + m_{j\theta j}}{L}$ ifadeleri elde edilir.

(C) Durumu: $\theta_i = 0, \theta_j = 0, \delta_{ij} = 1$, dış yükler = 0, Şekil 1.11.



Şekil 1.11. : (C) Durumu

Betti karşılık teoreminden : $m_{i\delta} = t_{j\theta i}$ (A ve C durumları arasında)

Simetri özelliğinden : $m_{j\delta} = t_{j\theta j}$ (B ve C durumları arasında)

Çubuğun denge denklemlerinden : $t_{i\delta} = t_{j\delta} = \frac{m_{i\delta} + m_{j\delta}}{L} - \frac{N}{L}$ (1.15)

ifadeleri elde edilir.

1.3.2.4 Birim Yerdeğiştirme Sabitleri İçin Yaklaşık Formüller

Doğru eksenli prizmatik çubuklarda ikinci mertbe teorisine ait birim yerdeğiştirme sabitlerini veren yukarıdaki ifadelerde, trigonometrik fonksiyonların seri açılımları yazılarak ilk iki terimi göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, birim yerdeğiştirme ve yükleme sabitleri için aşağıdaki basit yaklaşık formüller elde edilebilir.

$$m_{i0i} = \frac{4EI}{L} \left[1 - \frac{(\alpha L)^2}{30} \right] = \frac{4EI}{L} - \frac{2NL}{15} \quad (1.16)$$

$$m_{i0j} = \frac{2EI}{L} \left[1 + \frac{(\alpha L)^2}{60} \right] = \frac{2EI}{L} + \frac{NL}{30} \quad (1.17)$$

$$m_{i\delta} = t_{i0i} = t_{j0i} = \frac{6EI}{L^2} \left[1 - \frac{(\alpha L)^2}{60} \right] = \frac{6EI}{L^2} - \frac{N}{10} \quad (1.18)$$

$$t_{i\delta} = \frac{12EI}{L^3} \left[1 - \frac{(\alpha L)^2}{10} \right] = \frac{12EI}{L^3} - \frac{6N}{5L} \quad (1.19)$$

1.3.3 Yerdeğiştirme Yöntemi İle Hesap Düzeni

Normal kuvvet yayılışı başlangıçta bilinen sistemlerde, birim deplasman sabitleri ve ankastrelik momentlerinin yukarıdaki gibi normal kuvvete bağlı ifadeleri kullanılarak, doğrudan ikinci mertebe hesabı yapılabilir.

Normal kuvvet yayılışı başlangıçta bilinmeyen sistemlerde, örneğin önce birinci mertebe teorisine göre hesap yaparak normal kuvvet yayılışını bulup bu normal kuvvetlerden hareket ederek bulunan birim deplasman sabitleri ve ankastrelik momentlerini kullanıp ikinci mertebe hesabı yapılabilir. Teorik olarak bu yöntemde de bu tür sistemlerde ardışık yaklaşımın uygulanması gerekecektir. Bir hesap adımı sonrasında bulunan normal kuvvet yayılışının değişmesine bağlı olarak hesabın tekrarı söz konusudur. Ancak genelde sistemde normal kuvvet yayılışı önemli ölçüde denge denklemlerine bağlı olup hesaplar fazla değişmediğinden ardışık yaklaşımın bir adım götürülmesi çoğunlukla yeterli olacaktır.

2. SONLU ELEMANLAR METODU İLE TAŞIYICI SİSTEMLERİN HESABI

2.1 Metodun Esasları, Tanımlar

Yüzeysel taşıyıcı cisimlerin gerilme-şekildeğiştirme problemleri incelenirken iki yol izlenmektedir.

1-) Diferansiyel denklem metodu

2-) Sonlu Eleman Metodu veya diğer sayısal yöntemler

Diferansiyel denklem metodu; serbest değişkenlere bağlı deplasman yüzeyini ifade eden fonksiyonların bulunması için diferansiyel denge denkleminin integre edilmesini ve integral sabitlerinin sınır şartlarını sağlayacak şekilde bulunmasını gerektiren bir yöntemdir.

Nitekim bu metodu birinci bölümde, sabit kesitli çubuklar için birim deplasman sabitlerine ikinci mertebe etkilerin katkısının bulunmasında, diferansiyel denge denkleminin ilgili sınır koşullarının yerine konulup çözülmesi şeklinde kullanmıştık.

Özel haller dışında yüzeysel taşıyıcı sistemlerde bu kesin çözümün uygulanması, matematik güçlükler nedeniyle ya çok zor ya da imkansız olduğundan, değişik sayısal hesap metodlarının geliştirilmesini gerektirmiştir. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar şeklinde gruplandırabileceğimiz bu sayısal yöntemlerden bu çalışmada sonlu elemanlar yöntemi üzerinde durulacaktır.

Sonlu elemanlar metodunda, sürekli sistemden genel bir eğriler ağı geçirilir. Bu eğriler arasında kalan her sürekli ortam parçasına sonlu eleman denir. Elemanların çevresini belirten eğriler ise elemanın ayrıtları olmaktadır. Sonlu elemanların ayrıtlarının kesişme noktalarına ise düğüm noktaları denecektir. Bu metotta, sonlu eleman yüzeyinin şekil değiştirmesi yalnız, düğüm noktalarının deplasman

bileşenleri ve bunların serbest değişkenlere göre türevlerinden oluşan uç deplasman parametrelerine bağlı olarak ifade edilir. Bu takdirde, düğüm noktaları deplasman parametrelerinin belirlenmesi, sonlu elemanlardan oluşan bütün sistemde deplasman yüzeyinin ve bunun sonucu olarak da, her noktadaki deformasyonların ve kesit tesirlerinin bulunması için yeterli olacaktır. Böylece sürekli bir sistem yerine ayrık bir sistem alınıp, diferansiyel denklem sisteminin integrasyonunu deplasman parametrelerinin karşılıklı etkilerini ifade edecek bir denge denklem takımının çözümüne indirgemek metodun amacıdır.

Sonlu elemanlara ayrıldığı düşünülen sistemin, dış etkiler yokken herhangi bir düğüm noktasındaki deplasman bileşenlerinden birini bir, diğerleri sıfır ve diğer bütün noktalarda deplasman parametrelerini sıfır yapan bir şekil değiştirme durumuna birim durum denecektir. Birim durumda yalnız o düğüm noktasında birleşen sonlu elemanlarda şekil değiştirmelerin meydana geleceği açıktır. Sonlu elemanlarda, düğüm noktaları deplasman parametrelerinin birim değerlerine ait deplasman fonksiyonlarının seçilmesi ile ilgili özellikler ve uyulması gereken şartlar Bölüm 2.3 de irdelenecektir.

2.2 Sonlu Elemanlar Metodu Denklemlerinin Elde Edilmesi

Bu kısımda, enerji teoremlerinden hareket ederek bütün sistem için, sonlu elemanlar metodu denklemleri elde edilecektir. Bu bağıntıların bulunması için, birim durumlara ait deplasman fonksiyonlarının ayrıtlar boyunca komşu elemanlar arasında, geometrik uygunluk şartlarını sağladığı kabulü gerekmektedir.

Herhangi bir (i) durumunda deplasman bileşenleri fonksiyonları,

$$[v]_i = \begin{bmatrix} v(s_1, s_2) \\ u(s_1, s_2) \\ w(s_1, s_2) \end{bmatrix}_i \quad (2.1)$$

mambran ve eğilme deformasyonları,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_i \quad \begin{bmatrix} \chi \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ 2\tau \end{bmatrix}_i \quad \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} [\varepsilon]_i \\ [\chi]_i \end{bmatrix}_i \quad (2.2)$$

Mambran ve eğilme kesit tesirleri ise

$$\begin{bmatrix} N \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{bmatrix}_i \quad \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_b \end{bmatrix}_i \quad \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} [N]_i \\ [M]_i \end{bmatrix}_i \quad (2.3)$$

kolon matrisleri ile tanımlanırsa, genel bir taşıyıcı sistem için, deplasman deformasyon bağıntıları toplu halde;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i = [\partial][v]_i \quad (2.4)$$

şeklinde matris formunda gösterilebilir. Kesit tesirleri ise deplasman fonksiyonlarına bağlı olarak,

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_i = [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i = [D][\partial][v]_i \quad (2.5)$$

bağıntısı yardımı ile türetilebilir.

Diğer taraftan, dış yükler, üniform ve farklı sıcaklık değişimleri, elastik yataklanma tepkileri gibi statik tesirlerden oluşabilen dış etkiler altında, sistemde meydana gelen denge durumuna tabii durum denirse, bu halde yayılı dış yükler, deplasman bileşenleri ve deformasyonlar;

$$[q] = \begin{bmatrix} q_v \\ q_u \\ q_w \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$[v] = \begin{bmatrix} v \\ u \\ w \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\varepsilon] \\ [\chi] \end{bmatrix} = [D][v] \quad (2.8)$$

kolon matrisleri ile tanımlanabilir.

Üniform ve farklı sıcaklık değişiminden ileri gelen deformasyonlar ve eğrilik değişimleri ise,

$$[\varepsilon]_T = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_T \quad [\chi]_T = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ 2\tau \end{bmatrix}_T \quad \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} [\varepsilon]_T \\ [\chi]_T \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

şeklinde gösterilebilir. Toplam deformasyonlardan, sıcaklık değişimlerinden ileri gelen deformasyonlar çıkarılarak, kesit tesirleri bileşenleri,

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_0 = [D] \left[\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T \right] \quad (2.10)$$

formülü ile bulunur.

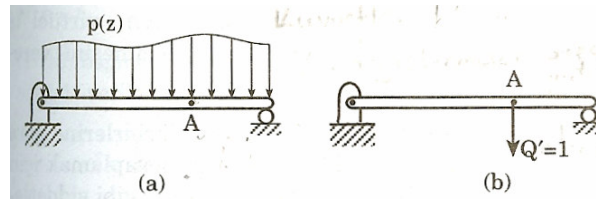
2.2.1 Virtüel İş İlkesi

Burada virtüel iş kelimesi ile tamamen fiktif veya düşünsel bir enerjiden bahsedilmektedir. Kuvvetler sisteminin işi hesaplanırken yer değiştirmelerin o kuvvetler tarafından oluşturulması gerekmez. Yer değiştirmeler tamamen keyfi veya düşünsel olabilir. İstenirse keyfi yer değiştirme olarak başka bir kuvvetler sisteminin oluşturduğu yer değiştirmeler de alınabilir. Bu tip yer değiştirmelere virtüel yer değiştirmeler adı verilir ve kuvvetlerin bu tip yer değiştirmeler sonunda yaptığı işe de virtüel iş adı verilir.

Her ne kadar virtüel yer değiştirmeler keyfi ise de bazı şartları sağlaması gerekir. Virtüel yer değiştirmeler: a) Sistemin dış bağları ile uyum sağlamalı, b) cismin iç sürekliliğini bozmamalı, c) çok küçük olmalı, d) zamandan bağımsız olmalıdır.

Virtüel iş teoreminde iki çeşit yükleme durumu vardır. Birincisi, sistemin gerçek yükler altındaki durumu; ikincisi ise sistemin gerçek yüklerinden temizlenip fiktif (hayali) bir kuvvetle birim yükleme durumudur. Virtüel iş teoremine göre iç ve dış kuvvetlerin bir yüklemeden, yer ve şekil değiştirmelerin ise diğer yüklemeden alınması koşuluyla dış kuvvetlerin virtüel işi iç kuvvetlerin virtüel işine eşitir.

$$V_i = V_d \quad (2.11)$$



şekil 2.1. : Virtüel İş İlkesi

A noktasına yapılan birim yükleme şekil 2.1 (b) de görölmektedir. Birim yüklemenin yapıldığı sistemdeki kuvvetlerin, şekil 2.1 (a) da görölen sistemin yer değiştirmelerine göre virtüel işi yazıldığında veya başka kelimelerle şekil 2.1 (b) de görölen virtüel kuvvetlerin gerçek yer değiştirmelere göre virtüel işi yazıldığında dış kuvvetlerin virtüel işi $Q' * \delta$ dır. İç kuvvetlerin virtüel işi ise; kuvvet tipi büyüklüklerin birim yükleme yapılan sistemden, deformasyon tipi büyüklüklerin gerçek sistemden alınmasıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$Q' \cdot \delta = 1 \cdot \delta \quad 1 \cdot \delta = \int_0^L (R' \cdot \gamma + M' \cdot \omega) dz \quad (2.12)$$

Yukarıda verilen ifadede R' ve M' vektörleri birim yükleme yapılan sisteme ait kesit tesiri vektörleri, γ ve ω vektörleri ise gerçek sisteme ait birim öteleme ve birim dönme vektörleridir.

Sonlu elemanlara ayırdığımız sistemin, dış etkiler yokken herhangi bir düğüm noktasındaki deplasman bileşenlerinden birini bir, diğerlerini sıfır yapan (i) birim durumunu virtüel deplasman; tabii durumu da yükleme olarak alıp (2.11.) denklemini uyarınca iç kuvvetlerin virtüel işini dış kuvvetlerin virtüel işine eşitlersek;

$$\iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_0 .dA = \iint [v]_i^T .[q].dA \quad (2.13)$$

(2.10.) bağıntısından da yararlanarak (2.13.) eşitliği düzenlenirse

$$\iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_i \end{bmatrix}^T .[D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} .dA = \iint [v]_i^T .[q].dA + \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_i \end{bmatrix}^T .[D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T .dA \quad (2.14)$$

yazılabilir. Birim duruma ait deplasman fonksiyonlarının ayrıtlar boyunca süreklilik şartlarını sağlaması halinde, ayrıca bir kabul yapılmadığından bu bağıntının kesin olduğu açıktır.

Tabii durumun birim durumların lineer kombinezonu olarak belirlenebileceği yaklaşımı yapılırsa, X_j tabii durumda sistemin j inci deplasman parametresinin aldığı değer olmak üzere,

$$[v] = \sum_{j=1}^n [v]_j .X_j \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n [\partial][v]_j .X_j = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_j .X_j \quad (2.16)$$

yazılabilir. Burada n sistemin serbestlik derecesini yani toplam deplasman parametresi sayısını göstermektedir. O halde (2.14.) eşitliği

$$\sum_{j=1}^n X_j . \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_i \end{bmatrix} .[D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_j .dA = \iint [v]_i^T .[q].dA + \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_i \end{bmatrix}^T .[D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T .dA \quad (2.17)$$

şekline girer. Bu bağıntıda:

$$k_{ij} = \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_i \end{bmatrix}^T \cdot [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_j \end{bmatrix} \cdot dA \quad (2.18,a)$$

$$p_{i,0} = \iint [v_i]^T \cdot [q] \cdot dA \quad (2.18,b)$$

$$p_{i,T} = \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_i \end{bmatrix}^T \cdot [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_T \end{bmatrix} \cdot dA \quad (2.18,c)$$

kısaltmaları yapılırsa,

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \cdot X_j = p_{i,0} + p_{i,T} \quad (2.19)$$

bulunur.

Sistemde bütün birim durumlar ayrı ayrı deplasman durumu olarak alınıp (2.13.) virtüel iş ifadesi yazılırsa, (2.19.) a benzer bilinmeyen uç deplasman parametresi sayısına eşit, n adet denklem elde edilir. Matris formunda bu denklem takımı,

$$[K][X] = [P]_0 + [P]_T \quad (2.20)$$

olarak yazılabilir.

Burada:

[X]: Bilinmeyen uç deplasman parametrelerinin alt alta yazılmasından oluşan kolon matrisi,

[K]: Herhangi bir k_{ij} terimi, (2.18, a) da görüldüğü gibi, sistemde j birim durumundaki iç kuvvetlerin i birim durumunda yaptığı iş olan, sistem rijitlik matrisini,

$[P]_0$:Herhangi bir i elemanı dış yüklerin i birim durumunda yaptığı iş olan, sistem yükleme matrisini

$[P]_T$:Herhangi bir i elemanı, i birim durumunda iç kuvvetlerin sıcaklık değişmesinden doğan deformasyonlarda yaptığı iş olan, n boyutlu sistem sıcaklık değişimi matrisini göstermektedir.

Burada tanımlanan iş ifadeleri sistemi oluşturan bütün sonlu elemanlarda önce ayrı ayrı hesaplanıp, sonradan toplanabilir. Yani yukarıdaki ifadelerde sistem yerine sonlu eleman demek şartı ile tanımlanabilen ve aynı notasyonla gösterilecek olan eleman rijitlik, yükleme ve sıcaklık değişimi matrisleri seçilen birim durum fonksiyonlarına bağlı olarak bulunup, bunlardan hareket ederek matris deplasman metodu ile (2.20.) denklemleri elde edilir.

(2.20.) denklemlerinden tabii durumda uç deplasman parametrelerinin değerleri bulunur ve (2.16.) ve (2.10.) da yerlerine konursa her noktadaki ve özellikle düğüm noktalarındaki deformasyonlar ve kesit tesirleri bileşenleri elde edilir.

Tabii durumun birim durumların lineer kombinezonu olduğu kabulünden dolayı bulunan bu sonuçlar yaklaşıktır. Eleman boyutlarını küçültüp, sistemde birim durum ve bilinmeyen sayısını arttırarak gerçek değere daha yakın sonuçlar elde edilebilir.

2.3 Sonlu Elemanlarda Seçilen Deplasman Fonksiyonlarının Genel Özelliklerinin İrdelenmesi

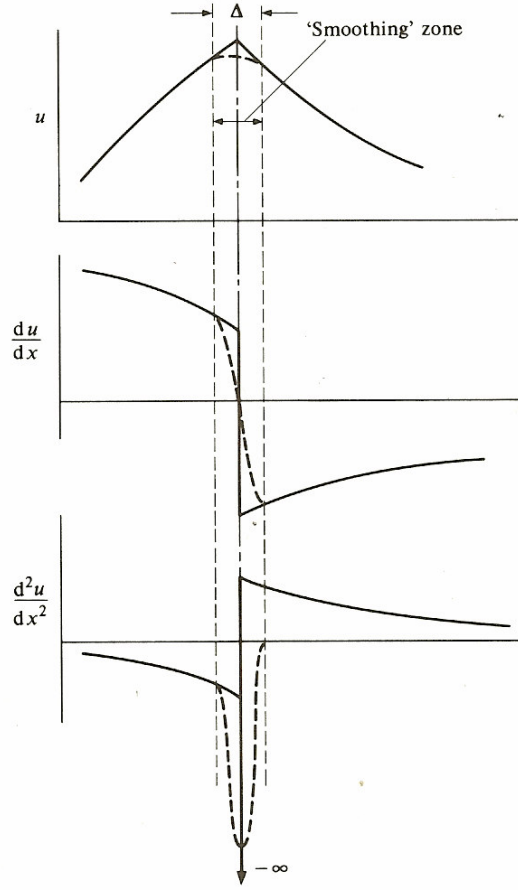
Bilindiği gibi sonlu elemanlar metodunda, gerçek sonuçlara yakınsaması için en önemli etken, elemanlarda deplasman parametrelerinin birim değerlerine karşı gelen, seçilmiş deplasman fonksiyonlarının uygunluğudur. Birim deplasman durumlarının lineer kombinezonunun, gerçek deplasman yayılışını iyi bir şekilde ifade etmesi için, bu deplasman fonksiyonlarının kendilerine ait birim uç deplasmanına karşı gelen uç kuvveti tesir yüzeyine yakın olması gerekmektedir. Bunun dışında bu fonksiyonların belirlenmesinde yakınsaklık kriterleri diye bilinen, [3] , bazı özelliklerin sağlanması, metodun yakınsaklığının temini için önemlidir.

a) Ayrıtlar boyunca komşu iki elemanın [u] yer değiştirme bileşenleri birbirine eşit olmalıdır. Bu koşul yakınsaklığın monoton ve çok kere hızlı olmasını sağlamaktadır.

$$\iint \begin{bmatrix} \epsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T [D] \begin{bmatrix} \epsilon \\ \chi \end{bmatrix}_j .dA = \sum_{j=1}^n X_j . \iint \begin{bmatrix} \epsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T [D] \begin{bmatrix} \epsilon \\ \chi \end{bmatrix}_j .dA \quad (2.21)$$

eşitliği ile tabii durumun birim durumların lineer kombinezonu olarak belirlenebileceği yaklaşımı yapılırken; üstü kapalı bir şekilde ayrık olarak ele aldığımız elemanların bitiştirilmesi sırasında süreksizliğin oluşmadığını varsaymıştık. Aksi halde ayrıtlarda böyle bir süreksizliğin oluşması bu ayrıtlardaki gerilmelerin yaptıkları işlerin (2.21.) eşitliğine ilavesini gerektirecekti.

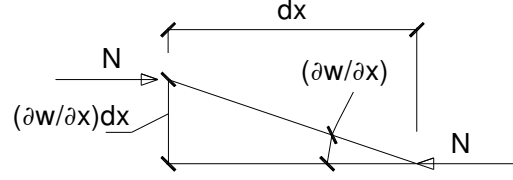
(2.21.) eşitliği kapalı olarak yer değiştirme fonksiyonu ile şekildeğiştirmeyi barındırmakla beraber; kimi problemlerde şekil değiştirme yer değiştirmenin birinci türevi ; plak ve kabuk problemleri gibi durumlarda ise ikinci türevi olarak eşitliğin içine girmektedir. Dolayısıyla kimi durumlarda u ve u nun 1. türevinin sürekliliği (2.21.) eşitliğinin geçerliliğini koruması için yeterliyken (C⁰ tipi süreklilik) kimi durumlarda ise u nun 2. türevinin sürekliliği de (C¹ tipi süreklilik) koşul olarak aranmaktadır. şekil 2.2 de C⁰ tipi sürekliliğe sahip bir yer değiştirme fonksiyonunun türev süreksizliği gösterilmiştir.



Şekil 2.2 : C^0 tipi süreklilik

2.4 İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesaplarda Sonlu Elemanlar Metodunun Uygulanması

Sistemdeki şekil değiştirmelerin denge denklemlerine etkisini, yayılı fiktif yük bileşenleri ve sınırlardaki fiktif kesit tesirleri şeklinde düşünebiliriz. Buna göre ikinci mertebe teorisine göre hesaplarda, tabii durum kuvvet, i birim durumu ise deplasman durumu olarak alınıp yazılan virtüel iş teoreminde, tabii durumdaki bu fiktif kuvvetlerin işinin de, dış kuvvetlerin işine ilave edilmesi gerekmektedir. Şekil 2.3.de çubuğun şekil değiştirmesi ile üzerindeki aksenal kuvvetlerden dolayı oluşan momentin yapmış olduğu iş gösterilmektedir.



Şekil 2.3 : İkinci Mertebe Tesirlerin İşİ

$$\text{İkinci Mertebe Tesirlerin İşİ} = \int_0^L M_i \cdot \theta_j = \int_0^L \left(\frac{N \cdot \partial w_i}{\partial x} dx \right) \cdot \frac{\partial w_j}{\partial x} \quad (2.22)$$

Fiktif kuvvetlerinin işini genel haliyle (2.22) denklemine benzer şekilde

$$\bar{k}_{i,j} = \iint \left\{ N_1^0 (\gamma_1^i \cdot \gamma_1^j + \beta_1^i \cdot \beta_1^j) + N_2^0 (\gamma_2^i \cdot \gamma_2^j + \beta_2^i \cdot \beta_2^j) + N_{12}^0 \left[(\epsilon_1^i \cdot \gamma_2^j + \gamma_2^i \cdot \epsilon_1^j) + (\epsilon_2^i \cdot \gamma_1^j + \gamma_1^i \cdot \epsilon_2^j) + (\beta_1^i \cdot \beta_2^j + \beta_2^i \cdot \beta_1^j) \right] \right\} dA \quad (2.23)$$

olmak üzere

$$I_{i,0}^F = - \sum_{j=1}^n \bar{k}_{i,j} \cdot X_j \quad (2.24)$$

yazılabilir.[6] Bu takdirde (2.13) bağıntısı;

$$\iint \begin{bmatrix} \epsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T \cdot \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_0 dA = \iint [v]_i^T \cdot [q] dA + I_{i,0}^F \quad (2.25)$$

şekline girer.

Bu takdirde (2.19.) eşitliği, Bölüm: 2.2.1 de tanımlanan kısaltmaların yapılması ve $I_{i,0}^F$ değerinin denklemin sol tarafına geçirilmesiyle

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \cdot X_j + \sum_{j=1}^n \bar{k}_{ij} \cdot X_j = p_{i,0} + p_{i,T} \quad (2.26)$$

şekline girer. Sistemde bütün birim durumlar ayrı ayrı deplasman durumu olarak alınıp virtüel iş teoremi uygulanırsa, (2.26.) ya benzeyen, uç deplasman parametresi sayısına eşit, n adet denklem elde edilecektir. Matris formunda bu denklem takımı:

$$[K][X] + [\bar{K}][X] = [P]_0 + [P]_T \quad (2.27)$$

olarak yazılabilir.

2.4.1 Sistemlerin İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesabı

Başlangıçta kesit tesirleri değerleri genellikle bilinmediği için, bir ardışık yaklaşım hesap metodu uygulanır. Önce sistem (2.20.) denklem takımından yararlanarak birinci mertebe teorisine göre çözülür ve her noktada kesit tesirleri hesaplanır. Bulunan membran kesit tesirlerinden yararlanarak hesap edilen $[\bar{K}]$ matrisi (2.27.) denkleminde yerine konarak, ikinci mertebe teorisine göre hesap yapılır. Buradan bulunan membran kesit tesirlerinin ilk adımda alınanlardan büyük ölçüde farklı olması halinde, ikinci mertebe hesabı bu yeni değerlere göre tekrarlanır. Bu şekilde bulunan tesirlerin başlangıçta alınanlara yeter derecede yakın oluncaya kadar hesabın tekrarlanması mümkündür. Genellikle birinci veya ikinci yaklaşımın sonuçlarının bile yeterli olacağı görülmektedir.

3. YENİ BİR PERDE SONLU ELEMAN MODELİ

Bu bölümde, çok katlı bir yapının taşıyıcı sisteminde yer alan perdelerin, kat aralarında düşey doğrultuda çok sayıda elemana bölünmeye gerek bırakmadan uygun sonuç verebilecek şekilde modellenmesine yönelik, düzlemi içinde ve düzlemine dik kuvvetler etkisi altındaki, [10] da geliştirilmiş düşey dikdörtgen bir sonlu eleman ile ilgili açıklamalar yapılacaktır. Bu sonlu elemana ait birinci mertebeye rijitlik matrisi $[K]$ ikinci bölümde çıkarılan denklemler yardımıyla elde edilecek; bir sonraki aşamasında da söz konusu perde sonlu elemanda, şekil değiştirmelerin denge denklemlerine etkisini göz önüne almaya yönelik ikinci mertebeye rijitlik matrisi terimleri bulunacaktır.

3.1 Kabuller

Perde sonlu elemana ait kabulleri şu şekilde sıralayabiliriz.

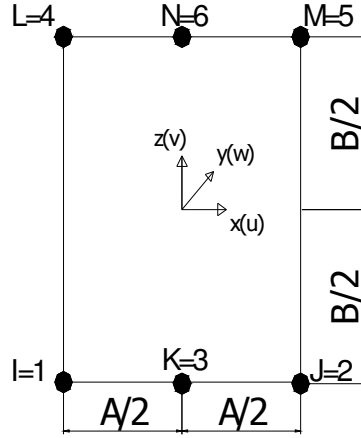
a) Çok katlı yapı perdelerinde genelde kat hizalarında düzlemi içinde rijit diyafram kabulünün geçerli olduğu döşemeler bulunması nedeniyle eleman alt ve üst kenarlarında master düğüm noktalarına bağımlı düzlem içi yer değiştirmeler söz konusudur. Her eleman için bu master düğüm noktaları elemanın mevcut köşe düğüm noktalarına ilave düğüm noktaları olarak düşünülecektir. Standart rijitlik matrisi hesaplanırken bu noktaların başlangıçta kenarların ortasında olduğu varsayılmıştır.

b) Yer değiştirme fonksiyonunun seçiminde, örneğin $x-z$ düzlemi içindeki bir perde eleman için kat döşemelerinin düzlemleri içinde rijit harekete neden olduğu göz önüne alınıp yatayda (x doğrultusunda) lineer, kat yüksekliği boyunca (z doğrultusunda) kübik değişim kabulü yapılmıştır.

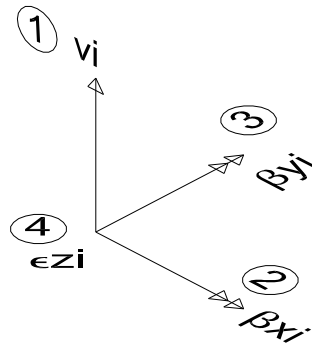
3.2 Perde Elemana Ait Eksen Takımı ve Yerdeğiştirme Parametreleri

Şekil 3.1 de, geliştirilen perde sonlu elemanın boyutları ile eksen takımı gösterilmiştir. Köşe ve master düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme parametreleri de sırasıyla Şekil 3.2.a ve Şekil 3.2.b de gösterilmiştir.

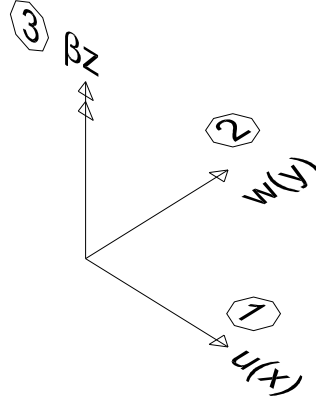
Burada x ve z eleman düzlemi içindeki eksenler olup bu doğrultulardaki yerdeğiştirme bileşenleri u ve v dir. y ise eleman düzlemine dik eksen olup bu doğrultudaki yerdeğiştirme bileşeni w dir.



Şekil 3.1.: Perde sonlu eleman boyutları ve eksen takımı



Şekil 3.2.a : Köşe düğüm noktaları yerdeğiştirme parametreleri



Şekil 3.2.b : Master düğüm noktaları yerdeğiştirme parametreleri

Köşe düğüm noktaları yerdeğiştirme parametreleri;

$$[d]_{i=1,2,4,5} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} v_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \\ \epsilon_{zi} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

şeklinde yazılırken, master düğüm noktası yerdeğiştirme parametreleri;

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}_{i=3,6} = \begin{bmatrix} u_m \\ w_m \\ \beta_{z_m} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

şeklindedir ve eleman tüm serbestliklerinin matris formunda ifadesi;

$$[d] = \begin{bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \\ [d]_3 \\ [d]_4 \\ [d]_5 \\ [d]_6 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

(3.3.) deki gibi yazılabilir.

3.3 Perde Elemana Ait Rijitlik ve Gerilme Matrislerinin Hesabı

3.3.1 Yerdeğiştirme bileşenlerinin yayılış fonksiyonları

Yerdeğiştirme fonksiyonlarının seçiminde yapılan kabule göre, kat hizasında (x doğrultusunda) rijit hareket nedeni ile doğrusal değişim, kat yüksekliği boyunca (z doğrultusunda) kübik değişim göz önüne alınarak, yerdeğiştirme fonksiyonları (3.4.) deki şekilde belirlenmiştir.

$$U(x, z) = (a'_1 + a'_2 \cdot x) \cdot (a_1 + a_2 \cdot z + a_3 \cdot z^2 + a_4 \cdot z^3)$$

$$V(x, z) = (b'_1 + b'_2 \cdot x) \cdot (b_1 + b_2 \cdot z + b_3 \cdot z^2 + b_4 \cdot z^3) \quad (3.4)$$

$$W(x, z) = (c'_1 + c'_2 \cdot x) \cdot (c_1 + c_2 \cdot z + c_3 \cdot z^2 + c_4 \cdot z^3)$$

Serbestlik derecelerinin birim değerleri için yerdeğiştirme bileşenlerinin eleman yüzeyinde yayılışını belirleyen şekil fonksiyonları (birim durum fonksiyonları) (3.4.) genel formüllerinde olduğu gibi x ve z değişkenine göre lineer veya kübik fonksiyonların çarpımı şeklindedir. Li(x) lineer değişimi, fi(x) ve gi(x) kübik değişimleri göstermek üzere karşılaşılabilecek bu yardımcı fonksiyonların açık ifadeleri ve sınır şartları Tablo (3.1.) de gösterilmiştir.[4]. Elemanda yerdeğiştirme bileşenlerinin (u, v, w) yayılışı eleman serbestliklerine bağlı olarak;

$$[U] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [Ad][d] \quad (3.5)$$

bağıntısı ile verilebilir. Burada [Ad] matrisinin her kolonu karşı geldiği serbestliğin birim değerinde elemanda yerdeğiştirme bileşenlerinin yayılış fonksiyonlarını göstermektedir.

Li(x) lineer değişimi, fi(z) ve gi(z) sırasıyla uçlardaki birim çökme ve birim dönmelere karşı gelen kübik değişimleri göstermek üzere, [Ad] matrisi bu yardımcı fonksiyonlar ile belirlenir.

Yerdeğiştirme yayılışları için yukarıda açıklanan kabullere göre, x ve z değişkenleri cinsinden yazılmış, (Tablo 3.1.) deki yardımcı fonksiyonlar (li, fi, gi) ile belirlenen [Ad] matrisinin transpozesi (Tablo 3.2.) de verilmiştir.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta 3.4. bağıntısında toplam 24 serbestlik gözükrken , 3.5 bağıntısında 22 serbestliğe inilmiş olmasdır.

Bu husus perde elemanın alt ayrıtının yatay hareketi iki uç noktasının yatay yerdeğiştirmelerine bağlı

$$L_1(x).F_2(z).u_1 + L_2(x).F_2(z).u_2$$

şeklinde iki serbestlikle değil, kat düzlemi içinde rijit diyafram etkisi nedeniyle alt kat referans noktasının yatay yerdeğiştirmesi cinsinden $F_2(z).u_3$ şeklinde tek serbestlikle ifade edilmesinden kaynaklanmaktadır. Benzer husus üst ayrıt için de geçerlidir.

Tablo 3.1. Yardımcı fonksiyonlar

SINIR ŞARTI	FONKSİYON	ŞEKİL
$x = \frac{a}{2} \quad l_1 = 1$ $x = -\frac{a}{2} \quad l_1 = 0$	$l_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{a}$	
$x = \frac{a}{2} \quad l_2 = 0$ $x = -\frac{a}{2} \quad l_2 = 1$	$l_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{a}$	
$x = \frac{a}{2} \begin{cases} f_1 = 1 \\ \partial f_1 / \partial x = 0 \end{cases}$ $x = -\frac{a}{2} \begin{cases} f_1 = 0 \\ \partial f_1 / \partial x = 0 \end{cases}$	$f_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x}{2a} - \frac{2x^3}{a^3}$	
$x = \frac{a}{2} \begin{cases} f_2 = 0 \\ \partial f_2 / \partial x = 0 \end{cases}$ $x = -\frac{a}{2} \begin{cases} f_2 = 1 \\ \partial f_2 / \partial x = 0 \end{cases}$	$f_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x}{2a} + \frac{2x^3}{a^3}$	
$x = \frac{a}{2} \begin{cases} g_1 = 0 \\ \partial g_1 / \partial x = 1 \end{cases}$ $x = -\frac{a}{2} \begin{cases} g_1 = 0 \\ \partial g_1 / \partial x = 0 \end{cases}$	$g_1(x) = -\frac{a}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{a^2}$	
$x = \frac{a}{2} \begin{cases} g_2 = 0 \\ \partial g_2 / \partial x = 0 \end{cases}$ $x = -\frac{a}{2} \begin{cases} g_2 = 0 \\ \partial g_2 / \partial x = 1 \end{cases}$	$g_2(x) = \frac{a}{8} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{a^2}$	

Tablo 3.2. Serbestliklerin birim değerinde elemanda yerdeğiştirme bileşenlerinin yayılış fonksiyonları

	u	v	w	
[Ad] ^T =	0	L2(x).F2(z)	0	d1
	0	0	L2(x).G2(z)	d2
	-L2(x).G2(z)	0	0	d3
	0	-L2(x).G2(z)	0	d4
	0	L1(x).F2(z)	0	d5
	0	0	L1(x).G2(z)	d6
	-L1(x).G2(z)	0	0	d7
	0	-L1(x).G2(z)	0	d8
	F2(z)	0	0	d9
	0	0	F2(z)	d10
	0	0	(a/2).[L1(x)-L2(x)].F2(z)	d11
	0	L2(x).F1(z)	0	d12
	0	0	L2(x).G1(z)	d13
	-L2(x).G1(z)	0	0	d14
	0	-L2(x).G2(z)	0	d15
	0	L1(x).F1(z)	0	d16
	0	0	L1(x).G1(z)	d17
	-L1(x).G1(z)	0	0	d18
	0	-L1(x).G1(z)	0	d19
	F1(z)	0	0	d20
	0	0	F1(z)	d21
	0	0	(a/2).[L1(x)-L2(x)].F1(z)	d22

3.3.2 Şekildeğiştirme matrisinin hesabı

Düzlemsel elemanlarda, deformasyon ve eğriliklerin yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden, kartezyen koordinatlardaki ifadeleri klasik elastisite teorisinden şu şekilde yazılmaktadır.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 \epsilon_z &= \frac{\partial v}{\partial z} & \chi_z &= -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \tau &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Yerdeğiştirme parametrelerinin x doğrultusunda değişimi lineer olduğundan ikinci türev sıfırdır. Dolayısı ile $\chi_x = 0$ çıkar. Elemanın herhangi bir noktasındaki şekildeğiştirmeler ve yerdeğiştirmeler arasındaki bağıntı matris formunda :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \chi_z \\ 2\tau \end{bmatrix} = [\partial][U] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ 0 & 0 & -2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3.7.)$$

şeklinde yazılabilir. Yerdeğiştirme bileşenlerinin yerine (3.5.) formülündeki ifadeler yazılırsa;

$$[\varepsilon] = [\partial][U] \quad (3.8.a.)$$

$$[\varepsilon] = [\partial][Ad][d] = [B][d] \quad (3.8.b.)$$

elde edilir. Burada [B] matrisinin her bir kolonu birim yerdeğiştirme durumlarında göz önüne alınan şekildeğiştirme bileşenlerinin eleman üzerinde yayılışını göstermektedir. 5 satır ve 22 sütunlu [B] matrisinin alt matrisleri (3.9.) da gösterilmiştir.

$$[B] = [[B]_1][B]_2[B]_3[B]_4[B]_5[B]_6]^T \quad (3.9.)$$

Özel olarak [B] matrisinde x ve z değişkenlerine düğüm noktalarının koordinatları yazılırsa, düğüm noktalarında birim durumlara karşı gelen şekildeğiştirme bileşenleri bulunabilir. $[\varepsilon_d]$ kolon matrisinin sırasıyla düğüm noktalarının şekildeğiştirme matrislerinin alt alta yazılmasından oluştuğu tanımlanırsa,

$$[\varepsilon_d] = [B_d][d] \quad (3.10.a.)$$

$$[B_d] = [[B_d]_1][B_d]_2[B_d]_3[B_d]_4[B_d]_5[B_d]_6]^T \quad (3.10.b.)$$

yazılabilir. Burada 20 satırlı, 22 sütunlu bir matris olacaktır.

3.3.3 Dügüm noktalarına ait iç kuvvetler (gerilme) matrisinin tanımı

Sonlu elemanın herhangi bir noktasındaki iç kuvvetler matris formunda (3.11.) şeklinde yazılabilir.

$$[N] = \begin{bmatrix} N_x \\ N_z \\ N_{xz} \\ M_z \\ M_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.11.)$$

Lineer elastik malzeme kabulü ile bu iç kuvvetler o noktadaki şekildeğiştirme bileşenlerine bağlı olarak:

$$[N] = [D][[\varepsilon] - [\varepsilon_t]] \quad (3.12.)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[\varepsilon_t]$ eğer varsa, sistemdeki düzgün veya farklı sıcaklık değişiminden kaynaklanan şekildeğiştirmeleri göstermektedir.

Elastisite matrisinin düğüm noktalarında bulunan şekildeğiştirmeler ile çarpımı yapılarak, bu noktalardaki iç kuvvetler yerdeğiştirme parametrelerine bağlı olarak bulunur.

3.3.4 [D] Elastisite matrisinin belirlenmesi

[D] elastisite matrisi izotrop malzeme kabulüne göre tanımlanacaktır. [5] Buna göre [D] elastisite matrisi izotrop malzeme için,

$$[D] = \frac{E.h}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2.(1-\nu)}{24} \end{bmatrix} \quad (3.13.)$$

şeklini alır.

3.3.5 Eleman bağımsız alt rijitlik matrislerinin hesabı

Bölüm 2 de açıklanan ve virtüel iş teoremine dayanarak elde edilen iş ifadeleri (eleman rijitlik, yükleme ve sıcaklık değişimi matrisleri), sistemi oluşturan bütün sonlu elemanlar için ayrı ayrı hesaplanacak, sisteme ait olan rijitlik, yükleme ve sıcaklık değişimi matrisleri, matris yerdeğiştirme yöntemi ile toplanıp (2.20.) denklem takımı elde edilecektir.

Eleman rijitlik matrisinin satır ve sütun sayısı eleman yerdeğiştirme parametresi sayısına eşit bir kare matris olacaktır. Bu matrisin herhangi bir k_{ij} terimi, j birim durumuna ait iç kuvvetlerin i birim durumundaki şekildeğiştirmelerde yaptığı iş olarak tanımlanabilir. Buna göre eleman rijitlik matrisi matris formunda, birim yerdeğiştirme parametrelerine karşılık gelen şekildeğiştirmeler,

$$[\varepsilon] = [B] \quad (3.14.)$$

olmak üzere,

$[K] = \iint [\varepsilon]_i^T [D] [\varepsilon] dA$ eşitliğinde (3.14.) ifadesinin yerine konulmasıyla,

$$[K] = \iint [B]_i^T [D] [B]_j dA \quad (3.15.a)$$

ve tabii durumun birim durumların lineer kombinezonu olarak belirlenebileceği kabulüyle;

$$k_{ij} = \iint [B]_i^T [D] [B]_j dA \quad (3.15.b)$$

yazılabilir. k_{ij} rijitlik matrisi, daha açık şekliyle birim yerdeğiştirme parametrelerine bağlı olacak şekilde yazılacak olursa;

$$k_{ij} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial z} \frac{\partial V_j}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial V_j}{\partial z} + \frac{\partial V_i}{\partial z} \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) + \dots + \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial z} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial U_j}{\partial z} + \frac{\partial V_j}{\partial x} \right] \right] dx.dz \quad (3.15.c.)$$

$$\dots + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial z} \right] dx.dz$$

halini alır.

3.3.5.1 Geliştirilen sonlu elemana ait birinci merteye rijitlik matrisinin bulunması

Tablo 3.2. de yer alan [Ad] matrisinin ifadeleri x ve z değişkenleri cinsinden li, fi, gi fonksiyonlarının çarpımı yardımı ile bulunur. Örneğin, rijitlik matrisinin $k_{1,16}$ terimini bulmak için (3.15.c.) den de görüleceği gibi $d_1 = 1$, $d_{16} = 1$ durumlarına ait u_1 , v_1 , w_1 , u_{16} , v_{16} , w_{16} yerdeğiştirme parametreleri ile bu parametrelerin x ve z serbest değişkenlerine bağlı kısmı türevlerinin değerlerine ihtiyaç vardır. Bunun için Tablo 3.2. deki [Ad] matrisine bakılarak;

$$d_1 = 1, d_{i=2,22} = 0 \Rightarrow u = u_1 = 0, v = v_1 = L_2(x)F_2(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3z}{2b} + \frac{2z^3}{b^3} \right), w = w_1 = 0 \quad (3.16.)$$

$$d_{16} = 1 \Rightarrow u = u_{16} = 0, v = v_{16} = L_1(x)F_1(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{3z}{2b} - \frac{2z^3}{b^3} \right), w = w_{16} = 0 \quad (3.17.)$$

sonuçları elde edilir. Tablo 3.3.a ve Tablo 3.3.b. de verilen $[B]_1, [B]_2, [B]_3, [B]_4, [B]_5, [B]_6$ alt matrisi terimleri de (3.16.), (3.17.) sonuçlarına bakılarak birim yerdeğiştirme parametrelerinin x ve z serbest değişkenlerine bağlı türevlerini içermektedir. Buna göre [K] eleman rijitlik matrisi kolaylıkla (3.15.c.) formülü ile her iki doğrultuda ayrı ayrı integrallerin hesaplanması ile tablolandırılabilir. Buna göre eleman rijitlik matrisi,

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}]_{11} & [\mathbf{K}]_{12} & [\mathbf{K}]_{13} & [\mathbf{K}]_{14} & [\mathbf{K}]_{15} & [\mathbf{K}]_{16} \\ [\mathbf{K}]_{21} & [\mathbf{K}]_{22} & [\mathbf{K}]_{23} & [\mathbf{K}]_{24} & [\mathbf{K}]_{25} & [\mathbf{K}]_{26} \\ [\mathbf{K}]_{31} & [\mathbf{K}]_{32} & [\mathbf{K}]_{33} & [\mathbf{K}]_{34} & [\mathbf{K}]_{35} & [\mathbf{K}]_{36} \\ [\mathbf{K}]_{41} & [\mathbf{K}]_{42} & [\mathbf{K}]_{43} & [\mathbf{K}]_{44} & [\mathbf{K}]_{45} & [\mathbf{K}]_{46} \\ [\mathbf{K}]_{51} & [\mathbf{K}]_{52} & [\mathbf{K}]_{53} & [\mathbf{K}]_{54} & [\mathbf{K}]_{55} & [\mathbf{K}]_{56} \\ [\mathbf{K}]_{61} & [\mathbf{K}]_{62} & [\mathbf{K}]_{63} & [\mathbf{K}]_{64} & [\mathbf{K}]_{65} & [\mathbf{K}]_{66} \end{bmatrix} \quad (3.18.)$$

şeklinde alt matrislere ayrılabilir. Buradaki $[\mathbf{K}]_{ij}$ alt matrisleri, j düğüm noktası serbestliklerinin birim değerlerinde i düğüm noktasında oluşacak iç kuvvetleri vermektedir. Betti karşılık teoremi uyarınca rijitlik matrisinin simetri şartından,

$$[\mathbf{K}]_{ij} = [\mathbf{K}]_{ji} \quad (3.19.)$$

eşitliği vardır. Bu nedenle matrisin yalnız esas köşegeni üzerindeki alt matrislerin verilmesi yeterlidir.

Tablo 3.3.a. $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$ alt matrisleri

$$[B_1] =$$

	d1=1	d2=1	d3=1	d4=1
$\frac{\partial U}{\partial x}$	0	0	$\frac{1}{a} \left(\frac{b}{8} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{2b} + \frac{z^3}{b^2} \right)$	0
$\frac{\partial V}{\partial z}$	$\left(\frac{1-x}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(\frac{-3}{2b} + \frac{6z^2}{b^3} \right)$	0	0	$\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) \left(-\frac{1}{4} - \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$
$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}$	$-\frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{3z}{2b} + \frac{2z^3}{b^3} \right)$	0	$\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) \left(-\frac{1}{4} - \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$	$\frac{1}{a} \left(\frac{b}{8} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{2b} + \frac{z^3}{b^2} \right)$
$-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$	0	$-\left(\frac{1-x}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(-\frac{1}{b} + \frac{6z}{b^2} \right)$	0	0
$-\frac{2 \cdot \partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z}$	0	$\frac{2}{a} \left(-\frac{1}{4} - \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$	0	0

$$[B_2] =$$

	d5=1	d6=1	d7=1	d8=1
$\frac{\partial U}{\partial x}$	0	0	$-\frac{1}{a} \left(\frac{b}{8} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{2b} + \frac{z^3}{b^2} \right)$	0
$\frac{\partial V}{\partial z}$	$\left(\frac{1+x}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(\frac{-3}{2b} + \frac{6z^2}{b^3} \right)$	0	0	$\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(-\frac{1}{4} - \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$
$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}$	$\frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{3z}{2b} + \frac{2z^3}{b^3} \right)$	0	$\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(-\frac{1}{4} - \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$	$-\frac{1}{a} \left(\frac{b}{8} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{2b} + \frac{z^3}{b^2} \right)$
$-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$	0	$-\left(\frac{1+x}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(-\frac{1}{b} + \frac{6z}{b^2} \right)$	0	0
$-\frac{2 \cdot \partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z}$	0	$-\frac{2}{a} \left(-\frac{1}{4} - \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$	0	0

$$[B_3] =$$

	d9=1	d10=1	d11=1
$\frac{\partial U}{\partial x}$	0	0	0
$\frac{\partial V}{\partial z}$	0	0	0
$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}$	$-\frac{3}{2b} + \frac{6z^2}{b^3}$	0	0
$-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$	0	$\frac{-12z}{b^3}$	$\frac{-12xz}{b^3}$
$-\frac{2 \cdot \partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z}$	0	0	$\frac{3}{b} - \frac{12z^2}{b^3}$

Tablo 3.3.b. $[B_4]$, $[B_5]$, $[B_6]$ alt matrisleri

$$[B_4] =$$

	d12=1	d13=1	d14=1	d15=1
$\frac{\partial U}{\partial x}$	0	0	$\frac{1}{a} \left(-\frac{b}{8} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{2b} + \frac{z^3}{b^2} \right)$	0
$\frac{\partial V}{\partial z}$	$\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(\frac{3}{2b} - \frac{6z^2}{b^3} \right)$	0	0	$\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) \left(-\frac{1}{4} - \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$
$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}$	$-\frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} + \frac{3z}{2b} - \frac{2z^3}{b^3} \right)$	0	$\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) \left(-\frac{1}{4} + \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$	$\frac{1}{a} \left(\frac{b}{8} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{2b} + \frac{z^3}{b^2} \right)$
$-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$	0	$-\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(\frac{1}{b} + \frac{6z}{b^2} \right)$	0	0
$-\frac{2 \cdot \partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z}$	0	$\frac{2}{a} \left(-\frac{1}{4} + \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$	0	0

$$[B_5] =$$

	d16=1	d17=1	d18=1	d19=1
$\frac{\partial U}{\partial x}$	0	0	$-\frac{1}{a} \left(-\frac{b}{8} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{2b} + \frac{z^3}{b^2} \right)$	0
$\frac{\partial V}{\partial z}$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) \left(\frac{3}{2b} - \frac{6z^2}{b^3} \right)$	0	0	$\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(-\frac{1}{4} + \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$
$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}$	$\frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} + \frac{3z}{2b} - \frac{2z^3}{b^3} \right)$	0	$\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(-\frac{1}{4} + \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$	$-\frac{1}{a} \left(-\frac{b}{8} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{2b} + \frac{z^3}{b^2} \right)$
$-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$	0	$-\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) \left(\frac{1}{b} + \frac{6z}{b^2} \right)$	0	0
$-\frac{2 \cdot \partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z}$	0	$-\frac{2}{a} \left(-\frac{1}{4} + \frac{z}{b} + \frac{3z^2}{b^2} \right)$	0	0

$$[B_6] =$$

	d20=1	d21=1	d22=1
$\frac{\partial U}{\partial x}$	0	0	0
$\frac{\partial V}{\partial z}$	0	0	0
$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}$	$\frac{3}{2b} - \frac{6z^2}{b^3}$	0	0
$-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$	0	$\frac{12z}{b^3}$	$\frac{12xz}{b^3}$
$-\frac{2 \cdot \partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z}$	0	0	$-\frac{3}{b} + \frac{12z^2}{b^3}$

3.3.5.2 Dönüştürme matrisleri kullanılarak geliştirilmiş perde sonlu elemana ait alt rijitlik matrislerinin hesabı

Eleman rijitlik matrisinin terimlerinin bulunması için sadece $[K]_{11}$, $[K]_{12}$, $[K]_{13}$, $[K]_{14}$, $[K]_{15}$, $[K]_{16}$ alt matrislerinin integral yoluyla bulunması yeterli olup, eleman rijitlik matrisinin esas köşegeni ve üzerindeki diğer alt matrisler, bu bağımsız alt matrislerden ve dönüştürme matrislerinden yararlanılarak bulunabilmektedir.

Diğer alt matrisler simetrik (veya antisimetrik) uç deplasmanlarına karşılık simetrik (veya antisimetrik) uç kuvvetleri oluşacağı özellikleri dikkate alınarak aşağıdaki dönüşüm operatörleri ile tayin edilebilir. Köşe düğüm noktalarında x doğrultusu için;

$$[T_x] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.20.)$$

dönüşüm matrisi kullanılırken y doğrultusu için;

$$[T_y] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.21.)$$

kolon matrisi kullanılmaktadır. Master düğüm noktalarında ise x doğrultusu için;

$$[T_{ox}] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.22.)$$

eşitliği kullanılırken y doğrultusunda;

$$[T_{oy}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.23.)$$

transformasyon operatörleri kullanılır. $[K]_{11}, [K]_{12}, [K]_{13}, [K]_{14}, [K]_{15}, [K]_{16}$ bağımsız alt matrislerinin aşağıda tablolar halinde verilmesiyle;

Tablo 3.4.a. $[k]_{11}$ Eleman Alt Rijitlik Matrisi

$[k]_{11} =$	$\frac{2ma}{5b} + \frac{13nb}{70a}$	0	$\frac{-rb}{20} + \frac{nb}{40}$	$\frac{-ma}{30} - \frac{11nb^2}{420a}$
	0	$\frac{7btd}{20a}$	0	0
	$\frac{-rb}{20} + \frac{nb}{40}$	0	$\frac{mb^3}{105a} + \frac{abn}{45}$	0
	$\frac{-ma}{30} - \frac{11nb^2}{420a}$	0	0	$\frac{2mab}{45} + \frac{b^3n}{210a}$

Tablo 3.4.b. $[k]_{12}$ Eleman Alt Rijitlik Matrisi

$[k]_{12} =$	$\frac{ma}{5b} - \frac{13nb}{70a}$	0	$\frac{rb}{20} + \frac{nb}{40}$	$\frac{-ma}{60} + \frac{11nb^2}{420a}$
	0	$t \left[\frac{-7db}{20a} + \frac{2a}{b} + \frac{db}{12a} + \frac{a}{6b} \right]$	0	0
	$\frac{-rb}{20} - \frac{nb}{40}$	0	$\frac{-mb^3}{105a} + \frac{nab}{90}$	0
	$\frac{-ma}{60} + \frac{11nb^2}{420a}$	0	0	$\frac{mab}{45} - \frac{nb^3}{210a}$

Tablo 3.4.c. $[k]_{13}$ Eleman Alt Rijitlik Matrisi

$[k]_{13} =$	$\frac{n}{4}$	0	0
	0	$\frac{3ta}{b^2}$	$t \left[-\frac{6}{5} + \frac{6v}{5} - \frac{a^2}{b^2} + \frac{d}{4} + \frac{3d}{4} \right]$
	$-\frac{an}{40}$	0	0
	$-\frac{bn}{20}$	0	0

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{Eh}{1-v^2} & t &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} & d &= 1-v & (3.24.) \\
 n &= \frac{Eh(1-v)}{1-v^2} & r &= \frac{Ehv}{1-v^2}
 \end{aligned}$$

Tablo 3.4.d. $[k]_{14}$ Eleman Alt Rijitlik Matrisi

$[k]_{14} =$	$-\frac{2ma}{5b} + \frac{9bn}{140a}$	0	$\frac{rb}{20} - \frac{nb}{40}$	$-\frac{ma}{30} - \frac{11nb^2}{420a}$
	0	$t \left[\frac{7bd}{20a} + \frac{a}{b} - \frac{5db}{12a} - \frac{a}{3b} \right]$	0	0
	$\frac{rb}{20} - \frac{nb}{40}$	0	$-\frac{mb^3}{140a} - \frac{nab}{180}$	0
	$\frac{ma}{30} - \frac{13nb^2}{840a}$	0	$-\frac{rb^2}{120} + \frac{nb^2}{240}$	$\frac{2mab}{45} + \frac{nb^3}{210a}$

Tablo 3.4.e $[k]_{15}$ Eleman Alt Rijitlik Matrisi

$[k]_{15} =$	$-\frac{ma}{5b} - \frac{9nb}{140a}$	0	$-\frac{rb}{20} - \frac{nb}{40}$	$-\frac{ma}{60} - \frac{13nb^2}{840a}$
	0	$t \left[-\frac{7db}{20a} + \frac{a}{2b} + \frac{5db}{12a} - \frac{a}{6b} \right]$	0	0
	$\frac{rb}{20} + \frac{nb}{40}$	0	$\frac{mb^3}{140a} - \frac{nab}{360}$	$\frac{rb^2}{120} + \frac{nb^2}{240}$
	$\frac{ma}{60} + \frac{13nb^2}{840a}$	0	$\frac{rb^2}{120} + \frac{nb^2}{240}$	$-\frac{mab}{180} + \frac{nb^3}{280a}$

Tablo 3.4.f. $[k]_{16}$ Eleman Alt Rijitlik Matrisi

$[k]_{16} =$	$-\frac{n}{4}$	0	0
	0	$\frac{-3ta}{b^2}$	$-t \left[-\frac{6}{5} + \frac{6v}{5} - \frac{a^2}{b^2} + \frac{d}{4} + \frac{3d}{4} \right]$
	$\frac{an}{40}$	0	0
	$\frac{bn}{20}$	0	0

$$\begin{aligned}
[k]_{45} &= [T_y][k]_{12}[T_y] & [k]_{22} &= [T_x][k]_{11}[T_x] & [k]_{23} &= [T_x][k]_{13}[T_{ox}] \\
[k]_{25} &= [T_x][k]_{14}[T_x] & [k]_{44} &= [T_y][k]_{11}[T_y] & [k]_{46} &= [T_y][k]_{13}[T_{oy}] \\
[k]_{24} &= [T_x][k]_{15}[T_x] & [k]_{55} &= [T_x][k]_{44}[T_x] & [k]_{26} &= [T_x][k]_{16}[T_{ox}]
\end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde diğer alt matrisler elde edilebilir.

3.3.5.3 Perde sonlu elemanın planda farklı açısız konumuna bağı olarak rijitlik matrislerinin düzenlenmesi

X eksenini yönünde standart rijitlik matrisi kurulan perde elemanın x-y planında herhangi bir açı ile yerleşebileceği düşünülürğinde global eksen takımındaki yerdeğiştirme parametrelerinin elemanın lokal eksen takımındaki yerdeğiştirme parametrelerine dönüştürülmesi ihtiyacının ortaya çıkacağı açıkça görülmektedir.

Buna göre köşe düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme parametrelerinin dönüşüm matrisi;

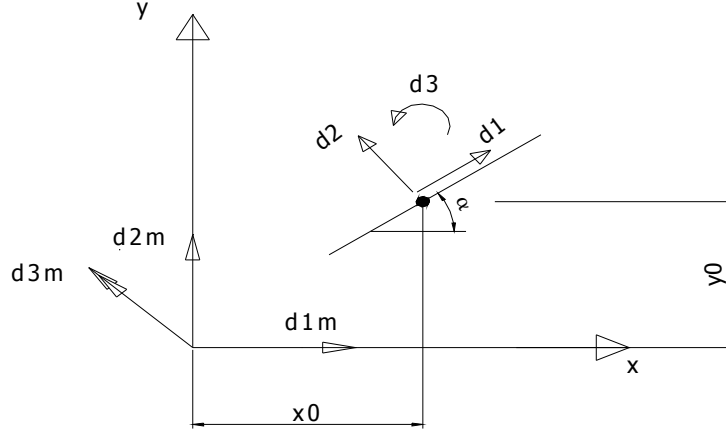
$$\begin{bmatrix} v_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \\ \epsilon_{zi} \end{bmatrix}_{\text{lokal}} = [TR]_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} v_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \\ \epsilon_{zi} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

olmak üzere,

$$[TR]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta x}{a} & \frac{\Delta y}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta y}{a} & \frac{\Delta x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

şeklini alır. Bu matrisin dört köşe için de aynı olduğu dikkate alınarak $[k]_{ij}$ ($i, j \geq i = 1, 2, 4, 5$) her bir alt matrisi için standart rijitlik alt matrisleri $[k]_{ix,jx} = [TR]^T \cdot [k]_{ij} \cdot [TR]$ şeklinde yeniden düzenlenecektir.

Master düğüm noktalarının yerdeğiştirme parametreleri köşe düğüm noktalarının yerdeğiştirme parametrelerinden farklılık gösterdiği için master düğüm noktaları için de ayrıca dönüştürme matrisi tanımlanması gerekmektedir.



Şekil 3.3. Master düğüm noktasında dönüştürme geometrisi

Master düğüm noktalarının global eksen takımındaki birim uç deplasmanlarından eleman kenar orta noktasında oluşan lokal doğrultuda uç deplasmanlarına geçişi ise Şekil 3.3. den de görüleceği üzere 3.28. de tanımlı $T\phi$ matrisi ile yapılmaktadır.

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}_{\text{lokal}} = [T\phi]_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} d_{1m} \\ d_{2m} \\ d_{3m} \end{bmatrix} \quad (3.28.)$$

$$[T\phi]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & x_0 \cdot \sin \alpha - y_0 \cdot \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & x_0 \cdot \cos \alpha + y_0 \cdot \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29.)$$

Burada α eleman lokal x ekseninin global x eksenine yaptığı açı, x_0 ve y_0 elemanın ayrıt ortasının master noktasına göre koordinat farklarını göstermektedir. Elemanın alt kenarının bağlı olduğu master düğüm noktası ile üst kenarının bağlandığı master düğüm noktasının yerlerinin farklı olabileceği dikkate alınarak; alt kenar ortası için x_1, y_1 ; üst kenar ortası koordinatı için ise x_2, y_2

değerleri okunacaktır. Buna göre $[T_{\phi_1}]$ ve $[T_{\phi_2}]$ olmak üzere iki farklı taşıma matrisi oluşturulması gerektiği açıktır.

Master düğüm noktalarında oluşan serbestlikler nedeniyle bu serbestlikler doğrultusunda oluşacak kuvvetleri bulmak için

$$\begin{aligned} [k]_{3x,3x} &= [T_{\phi_1}]^T \cdot [k]_{33} \cdot [T_{\phi_1}] \\ [k]_{3x,6x} &= [T_{\phi_1}]^T \cdot [k]_{36} \cdot [T_{\phi_2}] \\ [k]_{6x,6x} &= [T_{\phi_2}]^T \cdot [k]_{66} \cdot [T_{\phi_2}] \end{aligned} \quad (3.30.)$$

matris çarpımları yapılmalıdır.

Yukarıda verilen bu dönüştürme matrisleri tanımlarından, herhangi bir j master noktasındaki serbestlik nedeniyle bir i köşe düğüm noktasında oluşacak düğüm noktası kuvvetleri

$$[k]_{ix,jx} = [T_R]^T \cdot [k]_{ij} \cdot [T_{\phi_j}] \quad (3.31.)$$

veya tersine herhangi bir i köşe düğüm noktası serbestliklerinden j master noktasında oluşacak kuvvetler

$$[k]_{jx,ix} = [T_{\phi_j}]^T \cdot [k]_{ji} \cdot [T_R] \quad (3.32.)$$

matris çarpımları ile yapılabilir.

Bu dönüştürme çarpımları sonucunda global eksen sistemi serbestlikleri cinsinden (22x22) $[k]_{xx}$ eleman rijitlik matrisi simetrik bir matris olarak elde edilir.

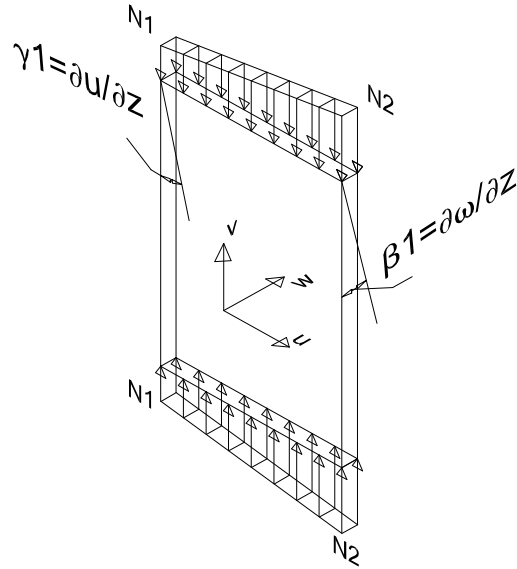
3.3.5.4 Geliştirilen sonlu elemana ait ikinci mertebe rijitlik matrisinin bulunması

Çok katlı yapı perde taşıyıcılarında ikinci mertebe etki yaratabilecek düzlemi içindeki kesit zorlarının yalnızca düşey N_z basınç yayılı kuvvetleri olduğu açıktır.

Özellikle kat hizalarında $\sum X = 0$ olduğundan enine N_x kuvvetleri poisson oranına bağlı olarak sıfırdan farklı olabilen küçük değerlerdir. Yapı yüksekliğinin perde enkesit boyutlarına oranının büyük olduğu yüksek narin yapılarda ikinci mertebe etkilerin önem kazanacağı düşünülürse bu tür sistemlerde perdelerdeki kayma gerilmelerinin de düşey basınç gerilmelerinin yanında küçük olacağı açıktır.

Geliştirilen perde sonlu elemanın x-y düzlemindeki konumunu da dikkate alacak şekilde dönüşümlere uğrayan (3.18.) deki alt rijitlik matrislerinin bulunup (2.20.) de tanımlanan $[K][X] = [P_0] + [P_1]$ denklem takımına yazılması ve birinci mertebe teorisine göre çözülmesiyle sistemdeki bilinmeyen uç deplasman parametreleri bulunmuş olur. Bu sayede (3.12.) denkleminde sistemdeki kesit zorları kolaylıkla elde edilebilir. Bu kesit zorlarından perdede oluşan N_z eksenel kuvvetini, köşe düğüm noktalarında N_1 ve N_2 değerlerini alacak şekilde (3.30.) daki gibi ifade edebiliriz.

$$N_z = N_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) + N_2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) \quad (3.33.)$$



Şekil 3.4. Sonlu elemandaki eksenel kuvvet ile düzlem içi ve düzlem dışı dönmeler

Şekil 3.4. den de görüleceği üzere perde sonlu eleman üzerindeki $N_z(N_1, N_2)$ aksenal kuvvetinin doğuracağı momentin sırasıyla (3.31.) ve (3.32.) deki düzlem içi ve düzlem dışındaki dönmelerle yapacağı işin bulunmasıyla (3.33.) deki ikinci mertebe rijitlik matrisi terimleri elde edilmiş olacaktır.

X-Z düzlemindeki dönmeler;

$$\begin{aligned}\gamma_z = \gamma_1 &= \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_x = \gamma_2 &= \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.34.)$$

X-Z düzlemine dik dönme;

$$\begin{aligned}\beta_z = \beta_1 &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \beta_x = \beta_2 &= \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.35.)$$

olmak üzere ikinci mertebe rijitlik matrisi terimleri;

$$\bar{k}_{ij} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} N_z \cdot (\gamma_1^i \cdot \gamma_1^j + \beta_1^i \cdot \beta_1^j) dx \cdot dz \quad (3.36.)$$

şeklini alır.(3.30.), (3.31.) ve (3.32.) denklemlerinin (3.33.) de yerine konulmasıyla ikinci mertebe rijitlik matrisi terimleri;

$$\bar{k}_{ij} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[N_1 \cdot \left(\frac{1-x}{2} - \frac{x}{a} \right) + N_2 \cdot \left(\frac{1+x}{2} + \frac{x}{a} \right) \right] \left[\frac{\partial u_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial z} \right] dx \cdot dz \quad (3.37.)$$

şekline girer. Buradan \bar{k}_{ij} ikinci mertebe rijitlik matrisinin (3.35.) ve (3.36.) da verilen N_1 ve N_2 'ye bağlı iki rijitlik matrisinin toplamından oluştuğu görülmektedir.

$$\bar{k}_{ijN_1} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} N_1 \cdot \left(\frac{1-x}{2} - \frac{x}{a} \right) \left[\frac{\partial u_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial z} \right] dx \cdot dz \quad (3.38.)$$

$$\bar{k}_{ijN_2} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} N_2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) \left[\frac{\partial u_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial z} \right] dx \cdot dz \quad (3.39.)$$

Örnek olarak ikinci mertebe rijitlik matrisinin N_1 'e bağlı \bar{k}_{22N_1} terimini bulmak için (3.35.) den de görüleceği üzere N_1 kesit zoruyla beraber $d_2 = 1$ durumuna ait u_2, w_2 yerdeğiştirme parametreleri ve bu parametrelerin z değişkenine bağlı kısmi türevlerinin değerlerine ihtiyaç vardır. Bunun için Tablo 3.2. deki [Ad] matrisine bakılarak;

$$d_2 = 1, d_{dger} = 0 \Rightarrow u = u_2 = 0, w = w_2 = L_2(x) \cdot G_2(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \left(\frac{b}{8} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{2b} + \frac{z^3}{b^2} \right) \quad (3.40.)$$

fonksiyonları elde edilir. Buna göre (3.35.) denklemi;

$$\bar{k}_{22N_1} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} N_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) (L_2(x) \cdot G_2'(z)) \cdot (L_2(x) \cdot G_2'(z)) dx \cdot dz \quad (3.41.)$$

şeklini alır.(3.38.) deki $L_2(x)$ ve $G_2(z)$ gibi yardımcı fonksiyonların kendileri ve x değişkenine göre birinci ve ikinci türevlerinin çarpımlarının bütün ikili kombinezonları için a anadoğru boyu aralığında sınırlı integrallerinin hesaplanarak Tablo 3.5. ve Tablo 3.6. da verilmesiyle ve bu tablolardan;

$$\bar{k}_{22N_1} = N_1 \cdot \frac{ab}{30} \quad (3.42.)$$

sonucu elde edilir.

Tablo 3.5. $\int_{-a/2}^{a/2} X(x).Y(x).dx$

X \ Y	L ₁	L ₂	L' ₁	L' ₂
L ₁	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
L ₂		$\frac{a}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
L' ₁	SİMETRİK		$\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
L' ₂	SİMETRİK			$\frac{1}{a}$

Tablo 3.6. $\int_{-a/2}^{a/2} X(x).Y(x).dx$

X \ Y	f ₁	f ₂	g ₁	g ₂	f' ₁	f' ₂	g' ₁	g' ₂	f'' ₁	f'' ₂	g'' ₁	g'' ₂
f ₁	$\frac{13}{35}a$	$\frac{9}{70}a$	$\frac{11a^2}{210}$	$-\frac{13a^2}{420}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{a}{10}$	$\frac{a}{10}$	$-\frac{6}{5a}$	$\frac{6}{5a}$	$-\frac{11}{10}$	$-\frac{1}{10}$
f ₂		$\frac{13}{35}a$	$\frac{13a^2}{420}$	$-\frac{11a^2}{210}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{a}{10}$	$-\frac{a}{10}$	$\frac{6}{5a}$	$-\frac{6}{5a}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$
g ₁			$\frac{a^3}{105}$	$-\frac{a^3}{140}$	$\frac{a}{10}$	$-\frac{a}{10}$	0	$\frac{a^2}{60}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2a}{15}$	$\frac{a}{30}$
g ₂				$\frac{a^3}{105}$	$-\frac{a}{10}$	$\frac{a}{10}$	$-\frac{a^2}{60}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{a}{30}$	$-\frac{2a}{15}$
f' ₁	SİMETRİK				$\frac{6}{5a}$	$-\frac{6}{5a}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$-\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
f' ₂	SİMETRİK					$\frac{6}{5a}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
g' ₁	SİMETRİK						$\frac{2a}{15}$	$-\frac{a}{30}$	$\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
g' ₂	SİMETRİK							$\frac{2a}{15}$	$-\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
f'' ₁	SİMETRİK								$\frac{12}{a^3}$	$-\frac{12}{a^3}$	$\frac{6}{a^2}$	$\frac{6}{a^2}$
f'' ₂	SİMETRİK									$\frac{12}{a^3}$	$-\frac{6}{a^2}$	$-\frac{6}{a^2}$
g'' ₁	SİMETRİK										$\frac{4}{a}$	$\frac{2}{a}$
g'' ₂	SİMETRİK											$\frac{4}{a}$

N_1 ve N_2 ' ye bağlı ikinci mertebeye rijitlik matrisi terimlerinin örnekte açıklandığı gibi bulunmasıyla ilgili rijitlik matrisi terimleri Tablo 3.7 ve Tablo 3.8' den bakılarak 2.27 denklemindeki $[\bar{K}]$ matrisi oluşturulur. 2.27. denklem sisteminin yeniden

çözülmesiyle elemanlarda bulunan N_1, N_2 değerleri ilk adımda alınanlardan büyük ölçüde farklı olması halinde, ikinci merteye hesabı bu yeni değerlere göre tekrarlanır. Bu şekilde bulunan tesirlerin başlangıçta alınanlara yeter derecede yakın oluncaya kadar hesabın tekrarlanması mümkündür. Genellikle birinci veya ikinci yaklaşımın sonuçlarının bile yeterli olacağı, daha ileri ardışık yaklaşımlara gerek kalmayacağı görülmektedir.

Sistem artan yükler altında ikinci merteye teorisine göre hesaplanarak P-v eğrisi çizilirse yüklerin P_b değerinden daha büyük olamadığı görülür.(Genelde yatay asimptot) Bu yüke burkulma yükü denir. Malzeme dayanımıyla ilgisi yoktur. Burkulma yükü altında sistemin yerdeğişimleri ve kesit zorları sonsuza gider.

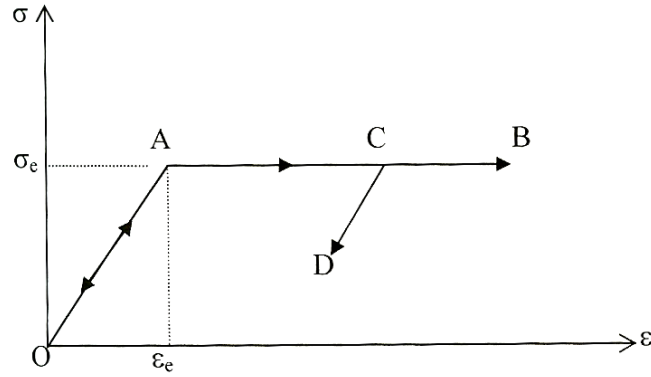
4. ÇUBUK SONLU ELEMAN

Geliştirilen perde sonlu elemanın kullanıldığı yapı sistemlerinde, çubuk sonlu eleman da kullanılarak, perde-çerçevesel sistemlerin çözümünün yapılması amaçlandığından, bu bölümde doğru eksenli, prizmatik uzay çubuk sonlu elemanlardan söz edilecektir.

4.1 Kabuller

a-) Bernoulli-Navier hipotezi geçerlidir. Buna göre düzlem kesitler, sistem şekil değiştirdikten sonra da düzlem kalırlar.

b-) Malzeme ideal elastoplastiktir. Bu tür malzemelerde yükleme ve boşaltma eğrisi Şekil 4.1. deki gibidir.



Şekil 4.1. İdeal elastoplastik malzemede yükleme ve boşaltma eğrileri

Buna göre yükleme eğrisi OA ve AB parçalarından oluşmaktadır.

OA Bölgesinde: $0 < \epsilon < \epsilon_e$ $\sigma = E \cdot \epsilon$

AB Bölgesinde: $\epsilon > \epsilon_e$ $\sigma = \sigma_e$ 'dir.

Boşaltma eğrisi: AO ve CD parçalarından oluşmaktadır.

AO Bölgesinde: $\varepsilon < \varepsilon_e$, OA ile çakışmaktadır.

CD Bölgesinde: $\varepsilon > \varepsilon_e$, OA doğrusuna paraleldir.

c-) Sistemdeki çubuklar doğru eksenli, sabit enkesitlidir. Sistemde eğri eksenli, değişken enkesitli çubukların bulunması durumunda, bu özellikteki çubuklar, yukarıdaki şartları sağlayacak şekilde küçük parçalara ayrılarak idealleştirilebilirler.

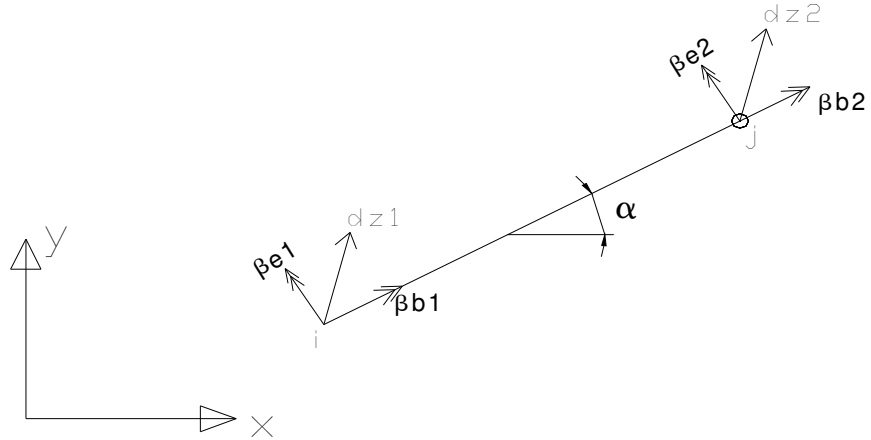
d-) İkinci mertebe teorisine göre hesap yapılacaktır. Sistemin şekildeğişirmesi sırasında dış yüklerin doğrultuları değişmemektedir.

e-) İkinci mertebe etkileri yalnız düşey çubuklarda (kolonlarda) dikkate alınmalıdır.

f-) Kat döşemeleri düzlemleri içinde rijit diyafram davranışı gösterdiğinden bu düzlem içinde kalan kirişlerde hem normal kuvvet oluşmaz hem de düzlemi içinde eğilme söz konusu olmaz.

4.2 Çubuk Sonlu Elemana Ait Eksen Takımı ve Yerdeğiştirme Parametreleri

4.2.1 Kiriş Sonlu Elemanlar



Şekil 4.2. Kiriş sonlu elemana ait yerdeğiştirme parametreleri

X-Y döşeme düzlemi içindeki kiriş sonlu eleman düzlemi içinde rijit öteleme hareketi yapacağından, yalnız düzleme dik doğrultuda tesirlere karşı gelen uç deplasman ve uç kuvvetleri oluşur. Kirişin herhangi bir master noktaya bağlanmasına gerek yoktur.

Her düğüm noktasında üçer serbestlik söz konusu olup, uç deplasmanları kolon matrisi (4.1.)deki gibidir.

$$\begin{bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dz_1 \\ \beta_{b1} \\ \beta_{e1} \\ dz_2 \\ \beta_{b2} \\ \beta_{e2} \end{bmatrix} \quad (4.1.)$$

Elemanın yatayla yaptığı açı $\sin \alpha = \Delta y/L = y_2 - y_1/L$; $\cos \alpha = \Delta x/L = x_2 - x_1/L$ bellidir. Bu açığa bağlı olarak rijitlik ve yükleme matrislerinin global eksen takımı doğrultusuna dönüştürülmeleri gerekir.

Kiriş sonlu elemanın eğilme ve burulma rijitlikleri sırasıyla;

$$EI = E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (4.2.)$$

$$GI_t = \frac{b^3 \cdot h}{3 \cdot \left[1 + 1.4 \left(\frac{b}{h} \right)^{1.4} \right]} \cdot \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.3.)$$

olmak üzere kayma deformasyonlarının şekildeğiştirmeye etkisini alacak şekilde

$$\beta = \frac{12EI}{\frac{GF}{12} \cdot L^2} = 2.4 \cdot (1+\nu) \cdot \frac{h^2}{L^2} \quad (4.4.)$$

katsayısı tanımlanırsa lokal eksen takımında rijitlik matrisi Tablo 4.1. deki şekli alır.

Tablo 4.1. Lokal eksen takımında kiriş sonlu eleman rijitlik matrisi

$\frac{12EI}{L^3(1+\beta)}$	0	$\frac{-6EI}{L^2(1+\beta)}$	$\frac{-12EI}{L^3(1+\beta)}$	0	$\frac{-6EI}{L^2(1+\beta)}$
	$\frac{GI_b}{L}$	0	0	$\frac{-GI_b}{L}$	0
		$\frac{4EI(1+0.25\beta)}{L(1+\beta)}$	$\frac{6EI}{L^2(1+\beta)}$	0	$\frac{2EI}{L} \cdot \frac{(1-0.5\beta)}{(1+\beta)}$
			$\frac{12EI}{L^3(1+\beta)}$	0	$\frac{6EI}{L^2(1+\beta)}$
				$\frac{GI_b}{L}$	0
					$\frac{4EI(1+0.25\beta)}{L(1+\beta)}$

Global eksen takımındaki dönmelerden lokal eksen takımındaki dönmelere geçmek için tranformasyon matrisi

$$[TR] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.5.)$$

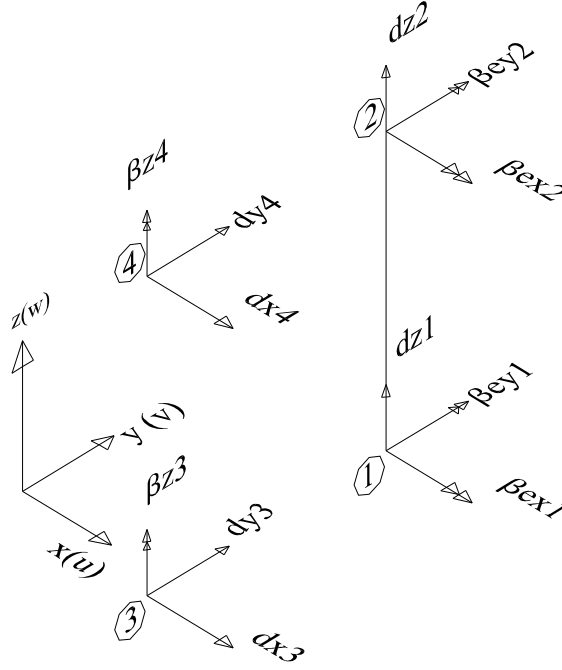
olduğuna göre alt matrisleri rijitlik matrisinde

$$[TR]^T \cdot [K]_{ik} \cdot [TR] \quad (4.6.)$$

şeklinde dönüştürme yapmak gerekir.

4.2.2 Kolon Sonlu Elemanlar

Şekil 4.3 de, geliştirilen çubuk sonlu elemanın. alt ve üst uç düğüm noktaları ile master düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme parametrelerinin sırası ve yönleri gösterilmiştir.



Şekil 4.3. Kolon sonlu elemana ait yerdeğiştirme parametreleri

Alt ve üst uç düğüm noktaları yerdeğiştirme parametreleri;

$$[d]_{i=1,2} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} dz_i \\ \beta ex_i \\ \beta ey_i \end{bmatrix} \quad (4.7.)$$

şeklinde yazılırken, master düğüm noktası yerdeğiştirme parametreleri;

$$[d]_{i=3,4} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ \beta z_i \end{bmatrix} \quad (4.8.)$$

şeklindedir ve eleman tüm serbestliklerinin matris formunda ifadesi;

$$[d] = \begin{bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \\ [d]_3 \\ [d]_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dz_1 \\ \beta ex_1 \\ \beta ey_1 \\ dz_2 \\ \beta ex_2 \\ \beta ey_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \\ \beta z_3 \\ dx_4 \\ dy_4 \\ \beta z_4 \end{bmatrix} \quad (4.9.)$$

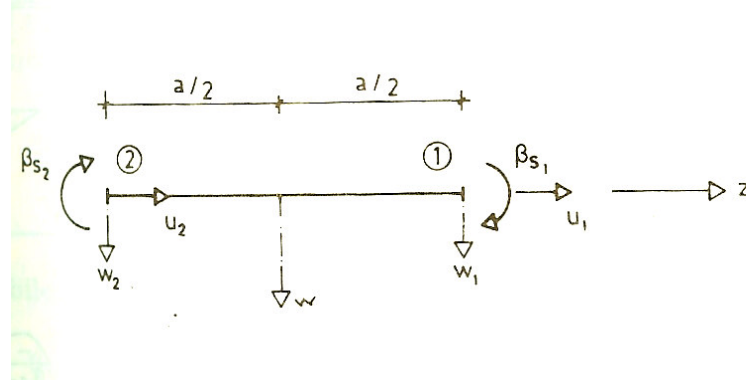
(4.9.) daki gibi yazılabilir.

4.2.3 Çubuk Sonlu Elemana Ait Birim Durum Fonksiyonlarının z Serbest Değişkenine Bağlı İfadelerinin Bulunması

Kaynak [6] da silindirik sonlu elemana ait birim durum fonksiyonları belirlenirken silindirik sonlu elemanın ana doğrusu boyunca ince bir şeritin doğru eksenli sabit kesitli bir çubuk gibi düşünülebileceği belirtilerek;

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 \cdot x + c_2 \\ v(x) &= \tilde{c}_1 \cdot x + \tilde{c}_2 \\ w(x) &= \hat{c}_1 \cdot x^3 + \hat{c}_2 \cdot x^2 + \hat{c}_3 \cdot x + \hat{c}_4 \end{aligned} \quad (4.10.)$$

şeklinde u ve v için lineer, w için 3.derece polinomlarının kullanılmasının uygun olacağı ifade edilmiştir. Buna göre toplam boyu a olan bir çubukta başlangıç noktası olarak çubuğun orta noktası seçilmiş ise, Şekil 4.3. deki 6 uç deplasman parametresinin birim değerlerine karşı gelen deplasman fonksiyonları Tablo 4.2. de $l_i(x), f_i(x), g_i(x)$ yardımcı fonksiyonları ile belirlenebilir ve bu yardımcı fonksiyonlar üzerinde çubuk sonlu elemanın deplasman parametrelerinin pozitif yönleri dikkate alınarak gerekli düzeltmeler yapılabilir.



Şekil 4.4. Yerdeğiştirme Parametreleri

Şekil 4.3. deki çubuk sonlu eleman yerdeğiştirme parametrelerinin pozitif yönleri esas alınarak Şekil 4.4 için verilen Tablo 4.2 le aralarında analogi kurulursa u ve v yerdeğiştirme fonksiyonları kolaylıkla elde edilebilir.

Tablo 4.2. L_i, F_i, G_i Yardımcı Fonksiyonları

SINIR ŞARTLARI	DEPLASMAN FONKSİYONLARI	ŞEKİL
$x = \frac{a}{2} \begin{cases} u = 1 \\ w = 0 \\ \beta_s = 0 \end{cases}$ $x = -\frac{a}{2} \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \\ \beta_s = 0 \end{cases}$	$u = l_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{a}$ $w = 0$	
$x = \frac{a}{2} \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \\ \beta_s = 0 \end{cases}$ $x = -\frac{a}{2} \begin{cases} u = 1 \\ w = 0 \\ \beta_s = 0 \end{cases}$	$u = l_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{a}$ $w = 0$	
$x = \frac{a}{2} \begin{cases} u = 0 \\ w = 1 \\ \beta_s = 0 \end{cases}$ $x = -\frac{a}{2} \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \\ \beta_s = 0 \end{cases}$	$u = 0$ $w = f_1(x) = -\frac{2x^3}{a^3} + \frac{3x}{2a} + \frac{1}{2}$	
$x = \frac{a}{2} \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \\ \beta_s = 0 \end{cases}$ $x = -\frac{a}{2} \begin{cases} u = 0 \\ w = 1 \\ \beta_s = 0 \end{cases}$	$u = 0$ $w = f_2(x) = \frac{2x^3}{a^3} - \frac{3x}{2a} + \frac{1}{2}$	
$x = \frac{a}{2} \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \\ \beta_s = -1 \end{cases}$ $x = -\frac{a}{2} \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \\ \beta_s = 0 \end{cases}$	$u = 0$ $w = g_1(x) = -\frac{x^3}{a^2} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x}{4} + \frac{a}{8}$	
$x = \frac{a}{2} \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \\ \beta_s = 0 \end{cases}$ $x = -\frac{a}{2} \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \\ \beta_s = -1 \end{cases}$	$u = 0$ $w = g_2(x) = -\left(\frac{x^3}{a^2} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x}{4} + \frac{a}{8}\right)$	

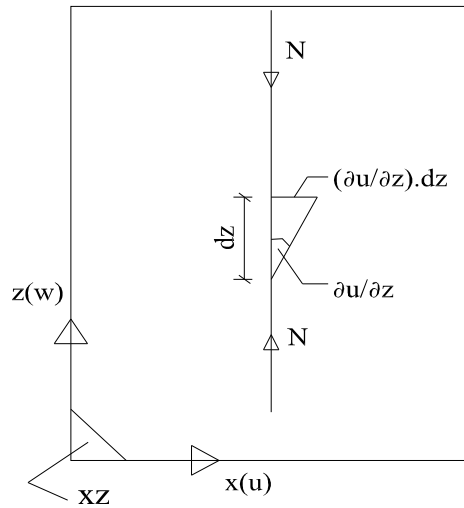
olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_2(z) & 0 & 0 & -g_1(z) & f_2(z) & 0 & -f_2(z).y_1 & f_1(z) & 0 & -f_1(z) \\ 0 & g_2(z) & 0 & 0 & g_1(z) & 0 & 0 & f_2(z) & f_2(z).x_1 & 0 & f_1(z) & f_1(z).x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dz_1 \\ \beta e_{x_1} \\ \beta e_{y_1} \\ dz_2 \\ \beta e_{x_2} \\ \beta e_{y_2} \\ dx_3 \\ dy_3 \\ \beta z_3 \\ dx_4 \\ dy_4 \\ \beta z_4 \end{bmatrix} \quad (4.11.)$$

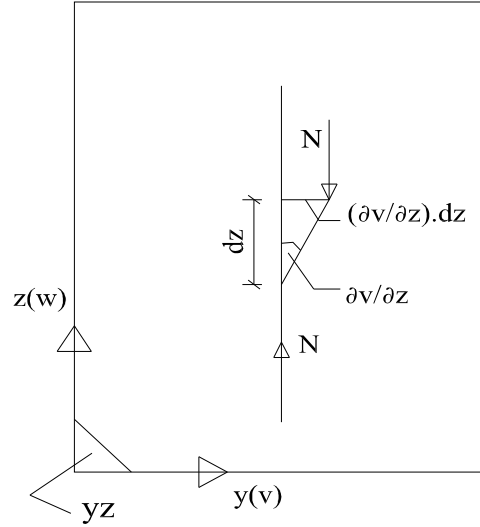
şeklinde yazılabilir.

4.3 Geliştirilen Çubuk Sonlu Elemana Ait İkinci Mertebe Rijitlik Matrisinin Bulunması

Geliştirilen çubuk sonlu elemanın birinci mertebe rijitlik matrislerinin bulunup (2.20.) de tanımlanan $[K].[X] = [P_0] + [P_t]$ denklem takımına yazılması ve birinci mertebe teorisine göre çözülmesiyle sistemdeki bilinmeyen uç deplasman parametreleri ve kesit zorları elde edilmiş olur.



Şekil 4.5. X-Z düzlemindeki dönme



Şekil 4.6. Y-Z düzlemindeki dönme

Şekil 4.5 ve Şekil 4.6. dan da görüleceği üzere çubuk sonlu eleman üzerindeki N aksenal kuvvetinin x-z düzleminde doğurduğu $N \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) dz$ momenti ile y-z düzleminde doğurduğu $N \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) dz$ momentlerinin sırasıyla $\frac{\partial u}{\partial z}$ ve $\frac{\partial v}{\partial z}$ dönmeleriyle yapacağı işin bulunmasıyla (4.14.) deki ikinci mertebe rijitlik matrisi terimleri elde edilmiş olacaktır.

X-Z düzlemindeki dönme;

$$\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.12.)$$

Y-Z düzlemindeki dönme;

$$\beta_1 = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.13.)$$

olmak üzere ikinci mertebe rijitlik matrisi terimleri;

$$\bar{k}_{ij} = \int_{-L/2}^{L/2} N \cdot \frac{\partial u_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial z} \cdot dz + \int_{-L/2}^{L/2} N \cdot \frac{\partial v_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial z} \cdot dz \quad (4.14.)$$

şeklini alır. Örnek olarak ikinci mertebe rijitlik matrisinin \bar{k}_{22} terimini bulmak için (4.14.) den de görüleceği üzere N kesit zoruyla beraber $d_2 = 1$ durumuna ait u_2, v_2 yerdeğiştirme parametreleri ve bu parametrelerin z değişkenine bağlı kısmi türevlerinin değerlerine ihtiyaç vardır. Bunun için (4.11.) deki [Ad] matrisinden yararlanarak;

$$d_2 = \beta e x_1 = 1, d_{\text{diğer}} = 0 \Rightarrow u = u_2 = 0, v = v_2 = g_2(z) \quad (4.15.)$$

sonuçları elde edilir. Buna göre (4.14.) denklemini;

$$\bar{k}_{22} = \int_{-L/2}^{L/2} N \cdot g_2'(z) \cdot g_2'(z) \cdot dz = N \cdot \int_{-L/2}^{L/2} g_2'(z) \cdot g_2'(z) \cdot dz \quad (4.16.)$$

şeklini alır. (4.16.) daki $g_2'(z)$ yardımcı fonksiyonunun kendisi ile çarpımını da içeren sınırlı integrallerin çarpım tablosunun Tablo 3.6 da verilmesiyle ve bu tablodan yararlanılarak;

$$\bar{k}_{22} = N \cdot \frac{2L}{15} \quad (4.17.)$$

sonucu elde edilir. (4.17.) ifadesi doğru eksenli prizmatik çubuklarda birinci mertebe teorisine ait m_{i0i} birim deplasman sabitine gelecek ilave terim olup ikinci mertebe \bar{m}_{i0i} birim deplasman sabiti;

$$\bar{m}_{i0i} = \frac{4EI}{L} - \frac{2NL}{15} \quad (4.18.)$$

şeklini alır.

Bu şekilde bulunan birim deplasman sabitleri Bölüm 1. de elastik eğrinin integrasyonu ile 1.11~1.15 te bulunmuş birim deplasman sabitlerinin yaklaşık ifadeleridir. Nitekim 1.11~1.15 ifadelerinde αl nin küçük değerleri pay ve paydada McLaurin açılımı uygulanıp sadeleştirilirse bu ifadelere geçilebilir.

Tablo 4.3. İkinci Mertebe Çubuk Sonlu Eleman $[\bar{K}]$ Matrisi

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\frac{2NL}{15}$	0	0	$-\frac{NL}{30}$	0	0	$-\frac{N}{10}$	$-\frac{N \cdot x_1}{10}$	0	$\frac{N}{10}$	$\frac{N \cdot x_2}{10}$
		$\frac{2NL}{15}$	0	0	$-\frac{NL}{30}$	$\frac{N}{10}$	0	$-\frac{N \cdot y_1}{10}$	$-\frac{N}{10}$	0	$\frac{N \cdot y_2}{10}$
			0	0	0	0	0	0	0	0	0
			$\frac{2NL}{15}$	0	0	0	$-\frac{N}{10}$	$-\frac{N \cdot x_1}{10}$	0	$\frac{N}{10}$	$\frac{N \cdot x_2}{10}$
				$\frac{2NL}{15}$	$\frac{N}{10}$	0	0	$-\frac{N \cdot y_1}{10}$	$-\frac{N}{10}$	0	$\frac{N \cdot y_2}{10}$
					$\frac{6N}{5L}$	0	0	$-\frac{6N}{5L} \cdot y_1$	$-\frac{6N}{5L}$	0	$\frac{6N}{5L} \cdot y_2$
						$\frac{6N}{5L}$	0	$\frac{6N}{5L} \cdot x_1$	0	$-\frac{6N}{5L}$	$-\frac{6N}{5L} \cdot x_2$
							$\frac{6N}{5L} (y_1^2 + x_1^2)$	$\frac{6N}{5L} \cdot y_1$	$-\frac{6N}{5L} \cdot x_1$	$-\frac{6N}{5L} (y_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot x_2)$	
								$\frac{6N}{5L}$	0	$-\frac{6N}{5L} \cdot y_2$	
									$\frac{6N}{5L}$	$\frac{6N}{5L} \cdot x_2$	
											$\frac{6N}{5L} (y_2^2 + x_2^2)$

5. PERDELERİN ELASTOPLASTİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

5.1 Homojen, İzotrop, İdeal Elastoplastik Malzeme

Çok katlı yapı perdelerinin düzlemi içindeki gerilme durumu, levhalarda düzlemsel gerilme durumunun özel bir halidir. Döşemelerin kat hizalarında rijit diyafram etkisi yapması sonucu perdelerde yatay boy değiştirme şekildeğiştirmesi kat hizalarında sıfır, arada terk edilebilecek mertebede küçük olacaktır. İdeal elastoplastik malzeme için von Mises hipotezi esas alınarak, akma koşulu bu durumda,

$$\sigma_z^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_e^2 \quad (5.1)$$

şeklindedir. Burada σ_z düşey normal gerilmeyi, τ kayma gerilmesini, σ_e tek eksenli akma limitini göstermektedir. Eğilme momenti ve kesme kuvveti etkisindeki dikdörtgen kesitlerde akma koşulunun,

$$M/M_p + 0.75.(T/T_p)^2 = 1 \quad (T \leq T_p/1.5) \quad (5.2)$$

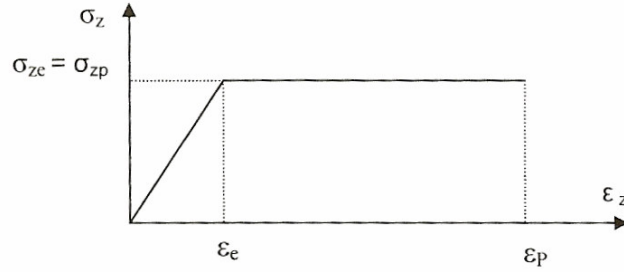
olarak elde edilebileceği gösterilmiştir. [7]. Ancak bunun bir alt sınır olduğu gerçekte kesitin daha büyük iç kuvvetleri de taşıyabileceği belirtilerek,

$$M/M_p + (T/T_p)^4 = 1 \quad (T \leq T_p) \quad (5.3)$$

bağıntısının kullanabileceğine dair referans verilmiştir. Burada F ve W kesitin alanı ve mukavemet momentlerini göstermek üzere,

$$\begin{aligned} \tau_e &= \sigma_e / \sqrt{3} \\ T_p &= \tau_e \cdot F \\ M_p &= 1.5 \cdot W_e \cdot \sigma_e \end{aligned} \quad (5.4)$$

Bu bağıntılardan tarafsız eksen civarında maksimum değerler alıp uçlarda sıfırlanan kayma gerilmelerinin perdelerde moment taşıma kapasitesini önemli ölçüde etkilemediği, özellikle çok basık olmayan yüksek yapı perdelerinde kayma etkisi terk edilerek akma koşulları için tek eksenli gerilme haline ait Şekil 5.1. basitleştirici kabulün yapılabileceği sonucu çıkarılabilir.



Şekil 5.1. Perde elemanlarda gerilme-şekildeğiştirme bağıntısı

Buna göre ϵ_e elastik şekildeğiştirme sınırına kadar sistemin her noktasının lineer elastik davrandığı, bu sınırdan sonra artan yükler altında plastikleşen noktalarda σ_z düşey gerilmesinin sabit kaldığı, ϵ_z şekildeğiştirmesinin ϵ_p plastik şekildeğiştirme sınırına kadar arttığı kabul edilmektedir.

Elemanlarda yayılı plastik şekildeğiştirmelerin dikkate alınması durumunda, her yük adımında plastik şekildeğiştirme bölgelerinin belirlenmesi ve eleman rijitlik matrisinin buna uygun olarak yeniden hesaplanıp sistem rijitlik matrisinin kurulması gerekecektir. Küçük olmayan yük artımları için bu bölgenin değişiminide dikkate alarak ardışık yaklaşım yapılması zorunludur. Bu anlamda veya buna eşdeğer ardışık yaklaşım teknikleri ile hesabın yapılışı [3] de açıklanmış ve çeşitli çalışmalar referans verilmiştir. [10] daki çalışmada ise, plastik şekildeğiştirmelerin düğüm noktalarında düşey plastik yerdeğiştirmeler olarak toplandığı, düğüm noktaları arasında elemanların lineer elastik kaldığı kabul edilmiştir. Çubuklarda plastik mafsall hipotezinin benzeri olan ve hesabı önemli ölçüde kısaltan bu kabul sonucu eleman ve sistem rijitlik matrisleri değişmemekte, perde düğüm noktalarında düşey şekildeğiştirme ϵ_e akma sınırına ulaştıktan sonraki yük artımlarında bu düğüm noktalarında rölatif plastik düşey yerdeğiştirmeler ortaya çıkmaktadır.

Örneğin, ϵ_e akma sınırının aşıldığı düğüm noktası bir mesnet düğüm noktası ise artan yükler için hesapta bu noktadaki düşey mesnet bağı kaldırılıp, bulunacak yerdeğiştirmeye bu noktanın plastik yerdeğiştirmesi olarak kabul edilecektir.

Genelde tabanından mesnetli konsol gibi çalışan çok katlı yapı perdelerinde göçme iki şekilde oluşmaktadır:

a-) Biri hariç bütün mesnet noktalarında plastikleşmenin (düşeyde ayrılma) oluşması (bir nokta etrafında elemanın dönmesi gibi), diğer bir deyişle mesnet düğüm noktalarının ϵ_e elastik şekildeğiştirme sınırına gelmiş olmaları,

b-) Mesnetteki bütün noktalarda, ϵ_e elastik şekildeğiştirme değerine ulaşılmamış olsa bile, herhangi bir düğüm noktasında ϵ_p plastik şekildeğiştirme sınırına ulaşılmış olmasıdır.

Bu çalışmada, yük artımı yöntemi yukarıda belirtilen kabullere göre geliştirilmiştir.

5.2 Betonarme Perdeler

Homojen, izotrop malzeme öngörülerek oluşturulan perde sonlu elemanların betonarme malzeme özelliklerini de dikkate alarak kullanımı mümkündür.

5.2.1 Donatı çeliğinin özellikleri

Betonun çekme dayanımı çok düşük olduğundan çekme bölgesindeki gerilmelerin tümüyle çelik donatılarla karşılandığı kabul edilecektir. Çelik çekme ve basınç altında benzer özellikler gösteren bir malzemedir. Pekleşme terk edilerek ideal elastoplastik malzeme kabulü yapılırsa, çelik için Şekil 5.2. de verilen gerilme şekildeğiştirme diyagramı çizilebilir.

Şekil 5.2. de görüldüğü gibi $\sigma - \epsilon$ eğrisinin doğrusal elastik olan bölümünün eğimi çeliğin elastisite modülüdür. [8] de beton çeliğinin elastisite modülünün $2.10^6 \text{ kgf/cm}^2 (2.10^5 \text{ N/mm}^2)$ olarak alınması gerektiği belirtilmiştir.

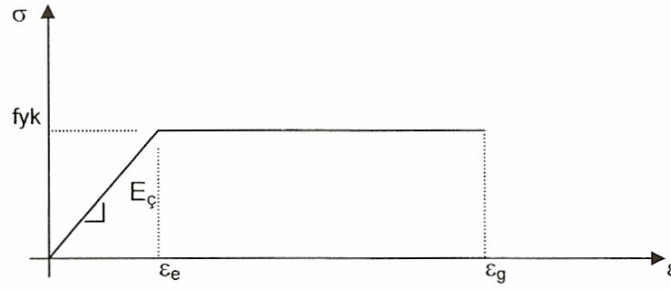
Donatı çeliğinin sınıflarına göre akma sınırına ve kopmaya karşı gelen şekildeğiştirme değerleri değişmektedir. Göçme güvenliğinin belirlenmesinde,

gerilme değerleri için malzeme güvenlik katsayıları kullanılmadan malzemenin gerçek davranışına karşı gelen değerlerin kullanılması uygun olacaktır. Örneğin:

$$\text{BÇI için } f_{yk} = 2200 \text{ kgf / cm}^2, \quad \epsilon_e = f_{yk} / E_{\zeta} = 2200 / 2.10^6 = 0.0011 \quad \epsilon_g = 0.18$$

$$\text{BÇIII için } f_{yk} = 4200 \text{ kgf / cm}^2, \quad \epsilon_e = f_{yk} / E_{\zeta} = 4200 / 2.10^6 = 0.0021 \quad \epsilon_g = 0.12$$

şeklinde verilebilir. [7,9]



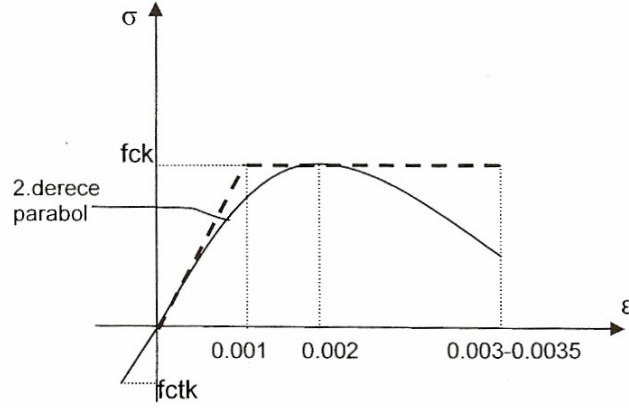
Şekil5.2. İdeal elastoplastik malzeme olarak donatı çeliğinin gerilme şekildeğiştirme bağıntısı

5.2.2 Betonun özellikleri

Normal sargılı betonun davranışını gösteren Şekil5.3. de görüldüğü gibi eğrinin başlangıç eğimi betonun elastisite modülünü vermektedir. [8] de değişik beton sınıflarına göre elastisite modülü verilmiştir. Düşük dayanımlı betonlar, yüksek dayanımlı betonlara oranla daha fazla sünekliğe sahiptirler. Maksimum gerilmeye karşılık olan birim kısalma beton dayanımından bağımsız olarak 0.002 mertebesindedir. Sargı donatısının artması sünekliği arttırmaktadır. Avrupa beton komitesine göre (CEB), normal sargılı betonda Şekil 5.3.de ikinci derece parabol olarak gösterilen kısım ile birleşen yatay teğet kısım idealleştirilmiş ve ezilmeye karşı gelen boy değişimi 0.003-0.0035 ile sınırlandırılmıştır.

Betonun kayma modülü, elastisite modülünün bir fonksiyonu olup, [8] de G_c yaklaşık olarak aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$G_c = 0.4.E_c \quad (5.5.)$$



Şekil 5.3. Normal sargı donatılı betonun eğilmesinde dış liflerdeki $\sigma - \epsilon$ bağıntısı

İdeal elastoplastik malzeme kabulünde Şekil 5.3. de gösterilen başlangıç teğetinin yatay teğeti kestiği noktadaki şekildeğiştirme değeri 0.001 olarak alınarak, her cins beton için elastisite modülü, $E_b = 1000.f_{ck}$ şeklinde hesaplanabilir. Gerilme değerlerinin, malzemenin gerçek davranışını göz önüne almak üzere, malzeme katsayılarına bölünmeden alınması uygun olacaktır.

5.2.3 Betonarme perde eleman için malzeme bakımından yapılan kabuller

Homojen kesit kabulü ile rijitlik matrisleri hesaplanmış sonlu elemanların betonarme perdelerine uygulanabilmesi için belli bir donatı oranına sahip betonarme kesite karşı gelen eşdeğer bir elastisite modülü tanımlanabilir. Sonlu elemanlar yöntemi ile perde eleman ağı oluşturulurken, kat hizalarındaki perde elemanlar donatı dağılımına göre istenilen sayıya bölünerek uygun çözüm elde edilebilir. Ancak sonlu elemanın çekme veya basınç bölgesinde olması halinde bu eşdeğer elastisite modülleri farklı değerler alacaktır. Homojen kesitin eşdeğer elastisite modülü $E_{eş}$, donatı oranı ρ , perde eleman kalınlığı h olmak üzere, birim perde uzunluğuna gelen normal kuvvet n ,

$$n = E_b \cdot h \cdot (1 - \rho) \cdot \epsilon + E_c \cdot h \cdot \rho \cdot \epsilon = E_{eş} \cdot h \cdot \epsilon \quad (5.6.)$$

şeklinde yazılabilir. Basınç bölgesinde,

$$E_{eş} = E_b \cdot (1 - \rho) + E_c \cdot \rho \quad (5.7.)$$

çekme bölgesinde ise çatlama kesitte betonun aldığı çekme ihmal edilirse,

$$E_{e\sigma} = E_{\sigma} \cdot \rho \quad (5.8.)$$

şeklinde elde edilecektir.

İdeal elastoplastik malzeme ve beton ile çelik arasındaki aderansın tam olduğu kabulüne göre, elastik şekil değiştirme sınırına karşı gelen ε değerleri, elemanın basınç gerilmesinin etkisi altında bulunması durumunda beton ve çelik aynı kısalmayı yapacak ve betona ait $\varepsilon_c = 0.001$ değerine, çekme gerilmesinin etkisi altında olması durumunda ise beton katkısı olmayacak ve çelik sınıfına bağlı ε_c değerine eşit olacaktır. Göçmeye karşı gelen ε_g değerleri de benzer şekilde belirlenecektir.

Buna göre, eleman rijitlik matrisi hesabında elastisite modülünü, elemanın basınç veya çekme bölgesinde olmasına göre (5.7.) ve (5.8.) formüllerinden alıp, düğüm noktalarında akma sınır boy değişimleri için çekme veya basınç gerilmelerinde farklı değerler vermek koşuluyla bu çalışmada önerilen yöntem betonarme perdeler de uygulanabilir. Ancak, elemanların çekme veya basınç bölgesinde olması başlangıçta bilinmediğinden bir ardışık yaklaşım gerekecektir.

Bu çalışmanın devamında, betonarme malzeme özelliklerinin dikkate alındığı bu anlamda örneklerin çözümüne gidilecektir.

6. PERDELERDEN OLUŞAN SİSTEMLERİN GÖÇME YÜK PARAMETRESİNİN BELİRLENMESİNDE İZLENEN YÖNTEM

Sadece mesnet düğüm noktalarında plastikleşmenin oluşabileceği sistemlerde, sistem rijitlik matrisinde plastikleşmenin olduğu düğüm noktasında plastikleşme parametresi olarak isimlendirilen o noktadaki düşey yerdeğiştirmenin serbest bırakılması, diğer bir deyişle ona ait satır ve sütunun silinmemesi ile sistem rijitlik matrisi her seferinde yeniden kurularak çözüm elde edilebilir. Ancak plastikleşmenin mesnet düğüm noktaları dışında herhangi bir iç düğüm noktasında oluşması halinde, bu noktaya bağlanmış ve bu noktanın üstündeki elemanların bu noktanın altında kalmış elemanlara göre söz konusu noktada farklı düşey yerdeğiştirme yapabilecek şekilde bir düzenleme gerekecektir. Bu durum matris yerdeğiştirme yönteminin standart sistem rijitlik matrisi oluşturma tekniğine uymamaktadır.

Bu bölümde, perde elemanlardan oluşan yapı sistemlerinin göçme yük parametresinin belirlenmesi için farklı bir yöntem sunulacaktır. Akma sınır şekildeğiştirmesinin aşılması plastikleşmenin başladığı düğüm noktalarının her biri için elastik hesap sırasında matris yerdeğiştirme yöntemine göre kurulmuş sistem rijitlik matrisine bir satır ve sütun ilave edilerek oluşturulan denklem sistemiyle ΔP yük artımına göre hesap yapılacaktır.

Üzerinde plastikleşen düğüm noktaları bulunan sistemin bilinmeyenleri:

a-) Düğüm noktalarının bağlandıkları referans düğüm noktasının yerdeğiştirmelerinden bağımsız olan biri doğrusal (u_z), iki açısız (β_x, β_y) yerdeğiştirmesi ve ϵ_z boy değişimi olmak üzere toplam dört adet serbestliği ve referans noktalarının rijit düzlem hareketini belirleyen iki doğrusal, bir açısız yerdeğiştirmesi

b-) Perde elemanın elastik şekildeğiştirme sınırını aşan düğüm noktalarının Δ_k plastik şekildeğiştirme parametresi,

olmak üzere iki grupta toplanabilirler.

Bu bilinmeyenleri tayin etmek için:

a-) Dügüm noktalarının ve referans noktalarının yerdeğiştirme bileşenleri doğrultularında yazılan moment ve izdüşüm denge denklemlerinden,

b-) Plastik şekildeğiştirmelerin oluştuğu düğüm noktasında, o noktanın üstünde kalan ve o noktada birleşen perde sonlu elemanların o noktadaki düşey izdüşüm denge denkleminde yararlanılır.

6.1 Denklemler Takımının Oluşturulması

Bölüm 2. de anlatılan denge denklemlerine, plastik şekildeğiştirmenin oluştuğu düğüm noktasının birim düşey yerdeğiştirme değerinden dolayı eleman düğüm noktalarına gelen iç kuvvetleri ilave edilerek denklemler takımının bir bölümü (6.1.) elde edilir.

$$[S_{dd}][d] + [S_{d\Delta}][\Delta] = [q] \quad (6.1.)$$

Bu denklemlerde:

$[S_{dd}]$: Sistem ortak eksen takımında, üzerinde plastik düğüm noktası bulunmayan sistemin referans noktasına bağlanarak küçültülen rijitlik matrisidir. n düğüm noktalı ve r adet referans noktalı (master joint) sistem için $(4n+3r) \times (4n+3r)$ boyutundadır. Esas köşegenine göre simetriktir. Dış yükler sıfır iken birim yerdeğiştirme bileşenlerinden dolayı, yerdeğiştirme bileşenleri doğrultusunda oluşan iç kuvvetlerini göstermektedir.

$[q]$: Dış yük matrisi, düğüm noktalarına etkiyen dış yüklerin ortak sistem eksen takımındaki bileşenlerinden meydana gelen $(4n+3r)$ elemanlı bir kolon matristir.

$[\Delta]$: Ortak sistem eksen takımında, elastik şekildeğiştirme sınırını aşan düğüm noktalarındaki plastik şekildeğiştirme parametreleri olup, m adet plastikleşen düğüm noktası için m adetli kolon matristir.

$[S_{d\Delta}]$: Sistem ortak eksen takımında, plastik şekildeğiřtirmelerin oluřtuđu dűđüm noktasında dűřey dođrultudaki plastik yerdeđiřtirimenin birim deđerinden dolayı o noktanın üstündeki perde elemanların dűđüm noktalarında oluřan ilave iç kuvvetleri matrisidir. Üzerinde m sayılı plastikleşen dűđüm noktası, r adet referans noktası ve n adet dűđüm noktası bulunan uzay sistemde, pek çok terimi sıfır olmakla birlikte bu matrisin boyutu $(4n+3r) \times m$ dir. $[S_{d\Delta}]$ matrisinin k sayılı kolonu, k sayılı plastikleşen dűđüm noktasının plastik yerdeđiřtirmesinin $\Delta_k = 1$ deđerı için, (diđer plastikleşen dűđüm noktalarındaki plastik yerdeđiřtirmeler ve dűđüm noktalarının yerdeđiřtirme bileşenleri sıfır iken) k noktasına üstten bađlanan perde elemanların dűđüm noktalarına etkiyen iç kuvvetlerinden oluřmaktadır.

$[S_{d\Delta}]$ matrisinin k sayılı kolonunun elde edilmesi için, plastikleşmenin başladığı dűđüm noktasının, elemanın hangi dűđüm noktası olduğunun belirlenerek, Bölüm 3. de anlatılan perde eleman alt rijitlik matrislerinden yararlanılacaktır. Örneđin plastikleşmenin perde elemanın I dűđüm noktasında olması durumunda $[K]_{11}, [K]_{21}, [K]_{41}, [K]_{51}$ alt matrislerinin, perde eleman özel eksen takımındaki 1 nolu dűřey yerdeğiştirme parametresinin birim değerinden dolayı oluşan dűđüm noktası iç kuvvetlerini veren 1. kolonları alınacaktır. $[K]_{12}, [K]_{21}$ ' in transpozu olduğundan $[K]_{12}$ matrisinin 1. satırı $[K]_{21}$ matrisinin 1. kolonu olarak yazılabilmektedir. Buna göre;

$$\begin{aligned}
 [K]_{1\Delta} &= \begin{bmatrix} (2ma/5b) + (13nb/70a) \\ 0 \\ (-rb/20) + (nb/40) \\ (-ma/30) - (11nb^2/420a) \end{bmatrix} \\
 [K]_{2\Delta} &= \begin{bmatrix} (ma/5b) - (13nb/70a) \\ 0 \\ (rb/20) + (nb/40) \\ (-ma/60) + (11nb^2/420a) \end{bmatrix} \\
 [K]_{4\Delta} &= \begin{bmatrix} (-2ma/5b) + (9nb/140a) \\ 0 \\ (rb/20) - (nb/40) \\ (-ma/30) - (11nb^2/420a) \end{bmatrix} \\
 [K]_{5\Delta} &= \begin{bmatrix} (-ma/5b) - (9nb/140a) \\ 0 \\ (-rb/20) - (nb/40) \\ (-ma/60) - (13nb^2/840a) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.2.}$$

Plastikleşme perde elemanın K ve L düğüm noktasında ise herhangi bir işlem yapılmayacaktır.6.2. denkleminde ve plastikleşen düğüm noktasını ifade eden $n=I, J$ olmak üzere, $[K_{d\Delta}]_n$ matrisi,

$$[K_{d\Delta}]_n = \begin{bmatrix} [K_{1\Delta}] \\ [K_{2\Delta}] \\ [K_{4\Delta}] \\ [K_{5\Delta}] \end{bmatrix}_n \quad (6.3)$$

şeklinde perde özel eksen takımındaki değerleri ile elde edilir.

Yukarıda sözü edilen, (6.1.) denklemine ilave olarak, plastikleşen düğüm noktalarındaki plastik yerdeğiştirme parametresini bulabilmek amacı ile, plastikleşme parametresi doğrultusunda (düşey doğrultuda) (6.4.) denge denklemi ilave edilir.

$$[S_{\Delta d}][d] + [S_{\Delta\Delta}][\Delta] = [0] \quad (6.4)$$

Böylece denklem takımı kurulmuş olur. Burada:

$[S_{\Delta d}]$: Sistem ortak eksen takımında, dış yüksüz sistemde plastik şekildeğiştirmeler sıfır iken, yalnız düğüm noktalarının yerdeğiştirme bileşenlerinden dolayı plastikleşen düğüm noktalarında oluşan iç kuvvetleri gösteren bir matristir. m adet plastikleşen düğüm noktası, n adet düğüm noktası ve r adet referans noktası bulunan sistem için $m \times (4n+3r)$ boyutundadır. Betti karşılık teoremi uyarınca,

$$[S_{\Delta d}] = [S_{d\Delta}]^T \quad (6.5)$$

olduğundan ayrıca hesaplanmasına gerek yoktur.

$[S_{\Delta\Delta}]$: m adet plastikleşen düğüm noktası için $m \times m$ boyutunda kare matristir. Bu matrisin k sayılı kolonu dış yüksüz sistemde düğüm noktalarının yerdeğiştirme bileşenleri sıfır iken k sayılı plastikleşen düğüm noktasındaki plastikleşme parametresinin birim değeri için tüm plastikleşen düğüm noktalarındaki iç kuvvet değişimini göstermektedir. Betti karşılık teoremi uyarınca esas köşegene göre

simetriktir. Esas köşegen üzerindeki terimler dışındaki terimler genelde sıfırdır. Eğer bir perde sonlu elemanda iki alt düğüm noktasında da plastikleşme oluşuyorsa, köşegen üzerindeki terimler dışındaki terimlerden ilgili olanları sıfırdan farklı olacaktır.

Yukarıda açıklanan denge denklemleri ve akma koşulları bir arada yazıldığında, sisteme ait genişletilmiş denklem takımı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} [S_{dd}] & [S_{d\Delta}] \\ [S_{\Delta d}] & [S_{\Delta\Delta}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [d] \\ [\Delta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [q] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (6.6.)$$

Buradaki katsayılar matrisi $(4n+3r+m) \times (4n+3r+m)$ boyutunda ve esas köşegene göre simetriktir.

6.2 Denklem Takımının Çözümü ve Bilinmeyenlerin Bulunması

Üzerinde plastikleşen düğüm noktaları bulunan sisteme ait genişletilmiş denklem takımı bölüm 6.1. de belirlenmiştir. Bu denklem takımının çözümünde elastik hesap için ve daha önceki plastikleşen düğüm noktaları için indirgenmiş olan satır ve sütunlar tekrar Gauss eliminasyon yöntemi ile indirgenmeyecek olup, sadece yeni oluşan k sayılı plastikleşen düğüm noktasına ait $[S_{\Delta d}]$, $[S_{d\Delta}]$ ve $[S_{\Delta\Delta}]$ matrislerinin satır ve sütunları hesaplanarak denklem takımına ilave edilir. Başlangıçta sıfır olan serbestliklere ait olan satır ve sütunların ek kolon ve satıra karşı gelen terimleri sıfırlanır. İlave edilen satır ve sütun Gauss eliminasyon yöntemi ile indirgenecektir.

Ayrıca her artım yük parametresinde sabitler kolonunun yeni satırı indirgenecektir. Denklem takımının çözümü sonucu artım yük parametresi için, ilave bağımsız serbestlikler ve plastikleşen düğüm noktalarına ait ilave plastikleşme parametreleri elde edilecektir. Plastikleşme parametresi olan düşey doğrultudaki ilave yerdeğiştirmeden dolayı plastikleşen düğüm noktalarındaki ilave şekildeğiştirmeler eleman rijitlik matrisinin ilgili terimleri kullanılarak bulunur ve hesap sonucu plastikleşen düğüm noktalarına ait d_7 şekildeğiştirme bileşenleri ile toplanarak, plastikleşen düğüm noktalarındaki d_7 şekildeğiştirmeleri o adım için bulunur.

Toplam yük parametresine ait düğüm noktaları serbestlikleri ve plastikleşen düğüm noktalarına ait plastikleşme parametreleri, o adıma kadar elde edilen değerlerin toplamı ile elde edilecektir. n. adım için k. plastikleşen düğüm noktasına ait toplam plastikleşme parametresi Δ_k ve i düğüm noktasındaki n. adım için toplam serbestlik değerleri $[D_i]_n$ olmak üzere,

$$\Delta_{k,n} = \sum_{t=k+1}^n \Delta_{k,t} \quad (6.7.)$$

$$[D_i]_n = \sum_{m=1}^n [D_i]_m \quad (6.8.)$$

şeklinde ifade edilir.

7. BİLGİSAYAR PROGRAMI

7.1 Programın Amacı

Bu tez çalışmasının amacı ve kapsamına uygun olarak, perde ve çerçevelerden oluşan yapı sistemlerinin ikinci mertbe limit yükünün belirlenebilmesi için, Fortran programlama dilinde, Microsoft Developer Studio' da derlenen bir bilgisayar programı yazılmıştır.

7.2 GENSON.f90 Bilgisayar Programı

7.2.1 Program giriş bilgileri

Perde ve çerçevelerden oluşan yapı sistemlerinin ikinci mertbe limit yükünün belirlenebilmesi amacı ile hazırlanan programda, giriş bilgisi olan düğüm noktalarının elastik ve maksimum şekildeğiştirme değerleri homojen malzeme kabulüne göre girilmektedir. Giriş bilgileri sırasıyla;

Nbel: Sistemdeki eleman sayısı

Nbcach: Sistemdeki farklı yükleme durumları sayısı. Düşey ve yatay yükleme durumları için alınacak değer 2 olmaktadır.

Nmat: Malzeme cinsi sayısı

Nbnok: Sistemdeki düğüm noktası sayısı

Nbard: Plastik mafsallık oluşacak kesit sayısı

Imert: İkinci mertbe hesap yapıp yapılmadığını gösterir anahtar değişken. Anahtar değişken parametresi 0 ise birinci mertbe hesaba yetinildiği; 1 ise ikinci mertbe hesaba geçildiğini göstermektedir.

Nocat: Eleman katalog numarası. Nocat = 11 ise elemanın perde eleman olduğu; Nocat=12 ise çubuk eleman olduğu anlaşılmaktadır.

Iel: Sistemdeki eleman numarasını vermektedir.

Nnle: Elemanın z doğrultusunda kolon mu yoksa x-y düzleminde kiriş mi olduğunu gösteren parametredir. Parametre değeri 4 ise elemanın kolon ; 2 ise kiriş olduğu anlaşılmaktadır.

El: Elemanın boykesit uzunluğunu belirten parametredir.

B: Elemanın enkesit genişliğini belirten parametredir.

H: Elemanın enkesit yüksekliğini belirten parametredir.

Dx: Elemanın x eksenine ile yaptığı açının doğrultman kosinüs değeridir.

Dy: Elemanın y eksenine ile yaptığı açının doğrultman kosinüs değeridir.

x(1),x(2),y(1),y(2): Elemanın orjin noktasına göre koordinatlarını veren değerlerdir.

Nsımr: Mesnetlenen düğüm noktası sayısı

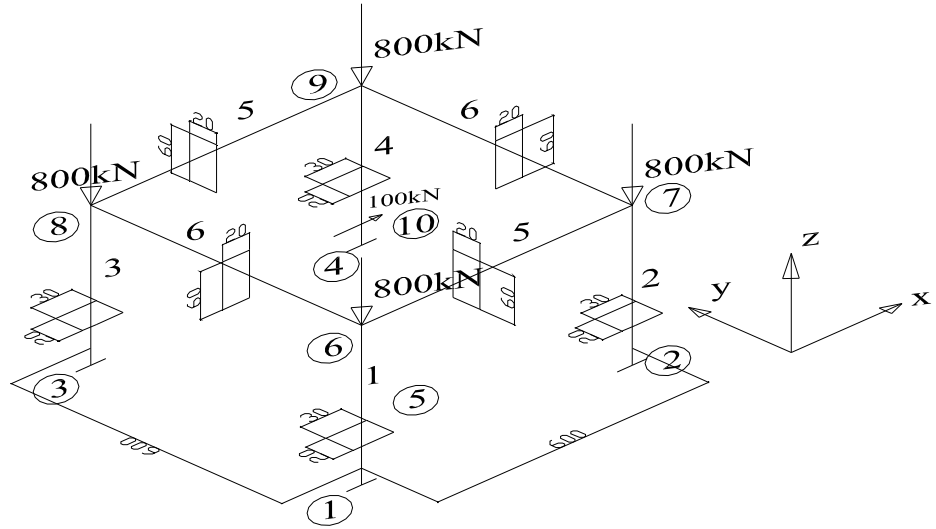
Nyük: Her bir yükleme durumundaki yükleme sayısı. Örneğin; düşey yük durumu için bazı düğüm noktalarına 100t etkinken bazı düğüm noktalarına 50t etkimesi durumunda Nyük 2 değerini alacaktır.

Verilen parametrelerin daha iyi anlaşılabilmesi açısından tablo 7.1. de elastisite modülü $E=2.10^6 \text{ kgf / cm}^2$ olan ve poisson oranı $\nu = 0,17$ şeklinde malzeme özelliklerine sahip düşeyde 80 t ;x doğrultusunda 10 t yatay yüke sahip kolonlu tek kat çerçeve örneğinin giriş datası verilmiştir.Kolonlar 4.0 m uzunlukta ve 0.2 x 0.3 m enkesite sahip durumdayken kirişler 6.00 m açıklıkta ve 0.2 x 0.6 m enkesitte bulunmaktadırlar.

Tablo 7.1. Program giriş bilgileri

KOLONLU TEK KAT ÇERÇEVE (X)									
NBEL	NBCACH	NMAT	NZEM	NBNOK	IMP	IFDESE	IGAMA	NBARD	IMERT
8	2	1	0	10	0	3	0	5	1
		E	V						
	2	2,E6	0.17						
NOCAT	IEL	IELY	NNLE	MATNO	NUART				
12	1	1	4	1	0				
I.D.N	J. D.N								
1	6	5	10						
	EL	B	H	DX	DY	X(1)	Y(1)	X(2)	Y(2)
	4	0.3	0.2	1	0	-3	-3	-3	-3
NOCAT	IEL	IELY	NNLE	MATNO	NUART				
12	5	5	2	1	0				
I.D.N	J. D.N								
6	7								
	EL	B	H	DX	DY				
	6	0.2	0.6	6	0				
NSINIR									
5									
D.n	$v_i, \beta_{xi}, \beta_{yi}$								
1	111								
2	111								
3	111								
4	111								
5	111								
NYUK									
1									
NOD	NODS	NODA							
6	9	1							
	VALUE								
	-80								
NYUK									
1									
NOD									
10									
	VALUE								
	10								

Şekil 7.1. den de ilgili program giriş datasının parametrelerini görüp şekil üzerinden takip etmek mümkündür.



Şekil 7.1. 800kN düşey, 100 kN yatay yüklü kolonlu tek kat çerçeve

7.2.2 Program çıkış bilgileri

Program çıkış bilgileri:

- 1-) Yükleme No: 1 adı altında düşey yük halinde meydana gelen deplasmanlar verilmekte olup z eksenini doğrultusundaki kısalma ile θ_x ve θ_y değerlerini içermektedir.
- 2-) Yükleme No: 2 adı altında yatay yük halinde meydana gelen deplasmanlar verilmekte olup yine z eksenini doğrultusundaki kısalma ile θ_x ve θ_y değerleri yer almaktadır.
- 3-) Yükleme No: 1 ve yükleme no: 2' ye ait eleman düğüm noktalarındaki gerilmeler bulunmaktadır.
- 4-) Program 1. mertebe hesap sonuçlarını 3.adımdan sonra bitirmekte ve 2. mertebe hesap sonuçlarına geçmektedir. Program, 1. mertebe hesapta olduğu gibi 2. mertebe hesapta da Yükleme No:1 (Düşey yük hali) ve Yükleme No:2 (Yatay yük hali)'ye ait deplasman sonuçlarını yazdırmaktadır.
- 5-) Bu adımda giriş datasında verilen kolon ve perdelerin akma limiti deformasyonlarına göre plastik hesaba geçilmekte ve akma oluşan nokta sayısı, yük artım oranı ile plastik mafsal oluşan çubuk ve kesit zoru belirlenmektedir.

6-) Plastik hesabın N.adımındaki yükleme no:1 de elde edilen deplasman değerleri ile (N-1). adımdaki plastik mafsalı oluşturan yük parametresi altındaki toplam yatay yerdeğiştirmeye ilave düşey yerdeğiştirme değerlerine ulaşılmaktadır.

7-)Yükleme no:2 de elde edilen deplasman değerleri ise iki yük artımı arasında oluşan yatay yük deplasman artışını vermektedir.

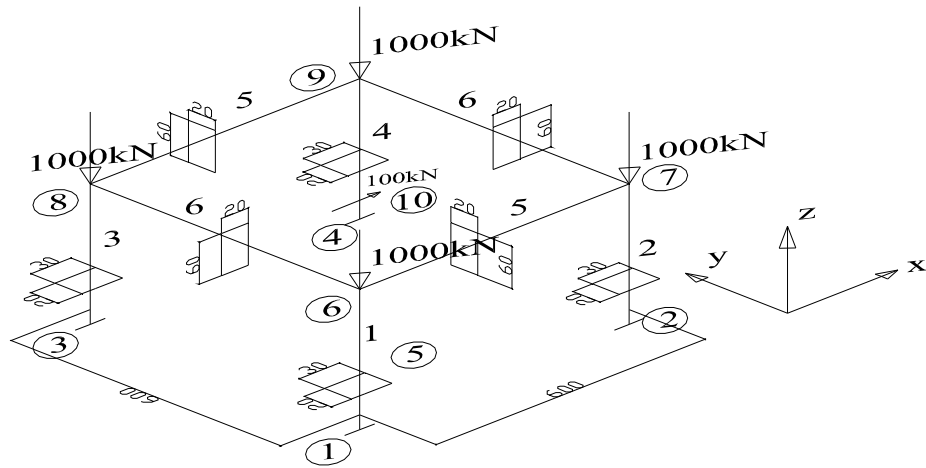
8. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde geliştirilmiş perde ve çubuk sonlu elemanlar ile yük artım yöntemi kullanılarak Bölüm 9. da içeriği anlatılmış olan bilgisayar programı yardımı ile yapılan uygulama ve el ile yapılan hesapların sonuçlarının karşılaştırılması ile ilgili çalışmalar yer almaktadır.

8.1 Kolonlu Tek Kat Çerçeve

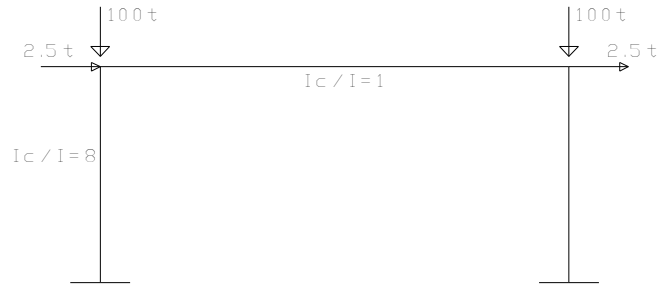
8.1.1 X Doğrultusunda Birinci ve İkinci Mertebe Linear Hesap Sonuçları

Şekil 8.1 den de görüleceği üzere düşey çubuk sonlu elemanlardan oluşan tek katlı çerçeve sisteminin 1000kN düşey ; 100kN yatay yük etkileri altında tepe düğüm noktasının birinci mertebe ve ikinci mertebe deplasmanları el yöntemi ile hesaplanacak; daha sonra da bulunan değerler ekler kısmında verilen program çıktılarından alınan sonuçlar ile karşılaştırılarak birlikte değerlendirileceklerdir.



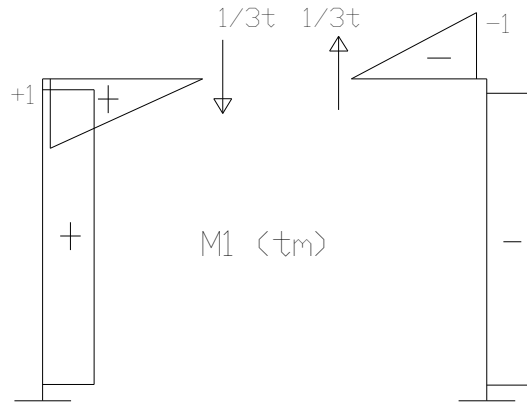
Şekil 8.1. 1000kN düşey; 100 kN yatay yüklü kolonlu tek kat çerçeve

Şekil 8.1. e bakılarak 1-6-7-2 düğüm noktalarından oluşan çerçeve sistemini ele alıp kolonlara 10 t yatay yükün eşit dağılması sebebiyle Şekil 8.2. deki gibi 6 ve 7 no'lu düğüm noktalarına 2.5 t yük etki ettirilecek olursa çözüm iki boyuta indirgenmiş olacaktır.

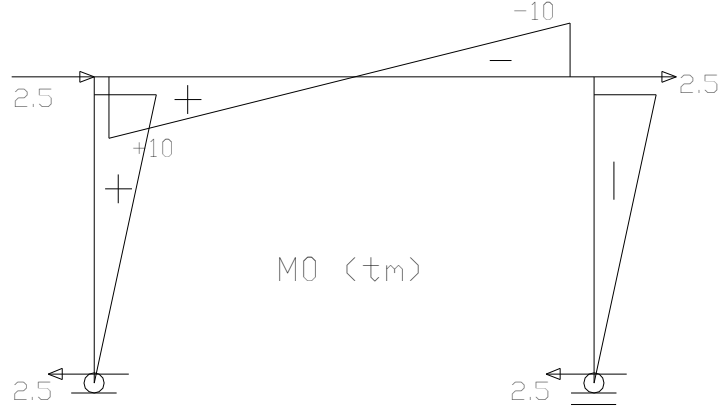


Şekil 8.2. Eşdeğer X-Z düzlemsel çerçeve

İzostatik esas sistemin birim yükleme ve dış yükler altındaki moment diyagramlarının da sırasıyla Şekil 8.3 ve Şekil 8.4 den elde edilip X_1 hiperstatik bilinmeyeninin bulunması için gerekli bu diyagramların kendileri ve birbiriyle olan çarpımlarıyla 8.1. eşitliği elde edilmiş olacaktır.



Şekil 8.3 İzostatik esas sistem birim yükleme diyagramı



Şekil 8.4. İzostatik sistem M_0 diyagramı

$$EI_c \cdot \delta_{11} \cdot X_1 + EI_c \delta_{10} = 0 \quad (8.1.)$$

$$EI_c \delta_{11} = \frac{3 \cdot 1^2}{3} [1] + \frac{4 \cdot 1^2}{1} [8] = 33 \quad (8.2.)$$

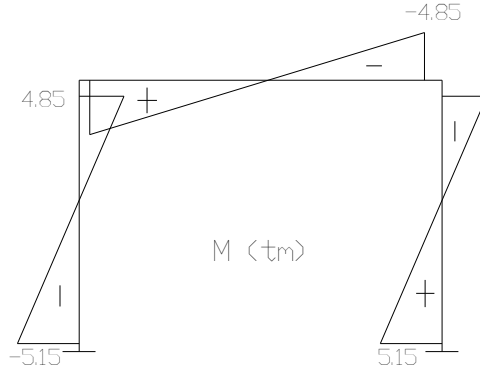
$$EI_c \delta_{10} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 10}{3} [1] + \frac{4 \cdot 1 \cdot 10}{2} [8] = 170 \quad (8.3.)$$

$$X_1 = \frac{170}{33} = 5.151 \quad (8.4.)$$

X_1 hiperstatik bilinmeyeninin bulunması ve

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 \quad (8.5.)$$

denklemini ile Şekil 8.5. deki hiperstatik sistemin M diyagramı elde edilebilir.



Şekil 8.5. Çerçeve sistem M diyagramı

δ_x yatay yerdeğiştirmesinin hesabı için hiperstatik sisteme yatay yerdeğiştirme doğrultusunda birim yükleme yapmak gerekecektir. Ancak hesapları kısaltmak amacıyla birim yüklemeyi hiperstatik sistem üzerinde yapmak yerine bu hiperstatik sistemden türetilebilecek herhangi bir izostatik sistem üzerinde yapılarak hesaplar kolaylaştırılacaktır. Buna göre Şekil 8.6. da da görüleceği üzere hiperstatik sistemden türetilen izostatik sisteme birim yükleme yapılarak;



Şekil 8.6. δ_x doğrultusunda birim yükleme diyagramı

Şekil 8.5 ve Şekil 8.6. daki moment diyagramlarının çarpılmasıyla;

$$EI_{kol} \delta_x = \frac{1}{6} 4.4. (2.5.15 - 4.85) = 14,53 \quad (8.6.)$$

$$I_{kol} = \frac{3^3 \cdot 2}{12} \cdot 10^{-4} \quad (8.7.)$$

$$\delta_{x,I} = \frac{14.53}{2 \cdot 10^6 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} = 0,0161 \quad (8.8.)$$

olarak bulunur. Bu değer Bölüm 7. de tanıtılan Fortran programlama dilinde hazırlanmış programda Ek.1. den de görüleceği üzere kolonlu tek kat çerçeve örneği x doğrultusundaki birinci mertebeye deplasman olarak $\delta_{x,I} = 0,0164$ bulunmuştur.

Aynı sistemin ikinci mertebeye hesabı için ikinci mertebeye birim deplasman sabitleri kullanılarak çözüm tekrarlanacaktır.

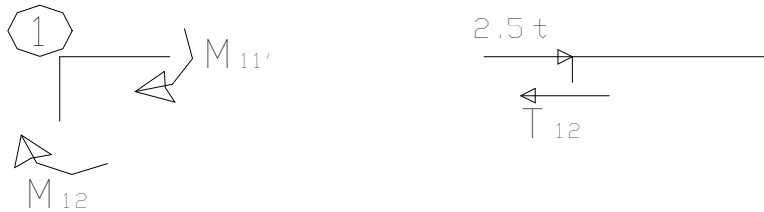
$$m_{101}^{11'} = \frac{6EI}{L} = \frac{6 \cdot 8}{6} = 8 \quad (8.9.)$$

$$m_{101}^{12} = \frac{4EI}{L} - \frac{2NL}{15EI} = \frac{4 \cdot 1}{4} - \frac{2 \cdot 100 \cdot 4}{15 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} = 0,941 \quad (8.10.)$$

$$m_{18}^{12} = \frac{6EI}{L^2} - \frac{N}{10EI} = \frac{6 \cdot 1}{4^2} - \frac{100}{10 \cdot 900} = 0,364 \quad (8.11.)$$

$$t_{18}^{12} = \frac{12 \cdot EI}{L^3} - \frac{6N}{5LEI} = \frac{12 \cdot 1}{4^3} - 1,2 \cdot \frac{100}{4 \cdot 900} = 0,154 \quad (8.12.)$$

olmak üzere Şekil 8.7 de görülen moment ve yatay izdüşüm denge denklemleri yazılacak olursa;



Şekil 8.7. Moment ve yatay izdüşüm denge denklemleri

$$\begin{aligned} m_{i\theta_i}^{11'} \cdot \theta_1 + m_{i\theta_i}^{12} \cdot \theta_1 + m_{i\delta}^{12} \cdot \delta &= 0 \\ 8,941 \cdot \theta_1 + 0,364 \cdot \delta &= 0 \end{aligned} \quad (8.13.)$$

$$\begin{aligned} t_{i\theta_i}^{12} \cdot \theta_1 + t_{i\delta}^{12} \cdot \delta &= 2,5 \\ 0,364 \cdot \theta_1 + 0,154 \cdot \delta &= 2,5 \end{aligned} \quad (8.14.)$$

8.13. ve 8.14. denklemlerinin birlikte çözülmesiyle;

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -0,731 \\ \delta &= 17,96 \end{aligned} \quad (8.15.)$$

olarak bulunur. Bulunan δ nın EI ya bölünmesiyle x doğrultusundaki ikinci mertebe deplasman

$$\delta_{x,\text{gerçek}} = \frac{17,96}{900} = 0,0201 \quad (8.16.)$$

olarak bulunur.

Ek 1.de verilen 1000 kN düşey 100 kN x doğrultusunda yatay yüke maruz kolonlu tek kat çerçevenin program sonuçlarından da sistemin x doğrultusundaki ikinci mertebe deplasmanının $\delta_{x,II} = 0,0204$ olduğu rahatlıkla görülebilir.

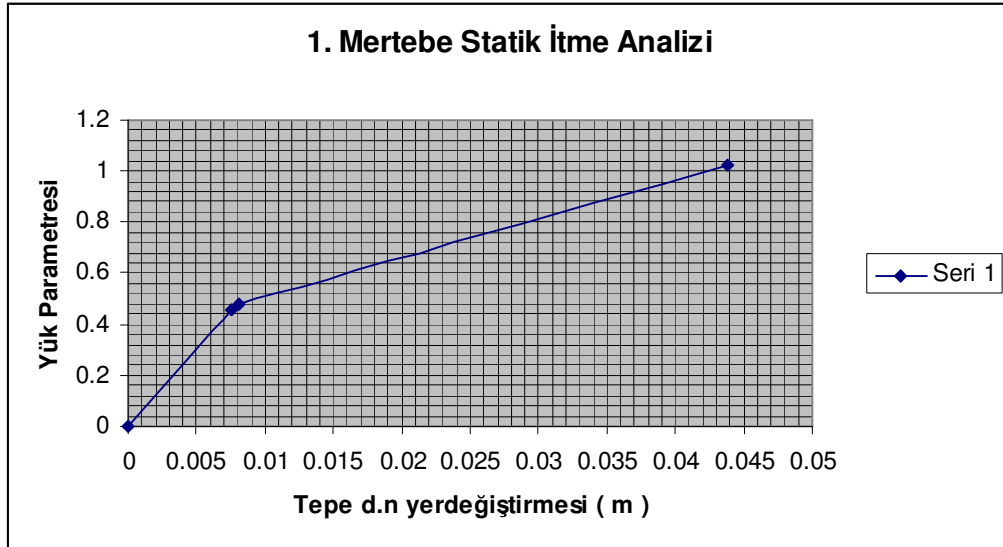
8.1.2 X Doğrultusunda Birinci ve İkinci Mertebe Nonlineer Hesap Sonuçları

Ek. 1. de verilen 1000 kN düşey 100 kN x doğrultusunda yatay yüke maruz kolonlu tek kat çerçeve sistemin birinci mertebe statik itme analizi, program sonuç dosyasından alınarak;

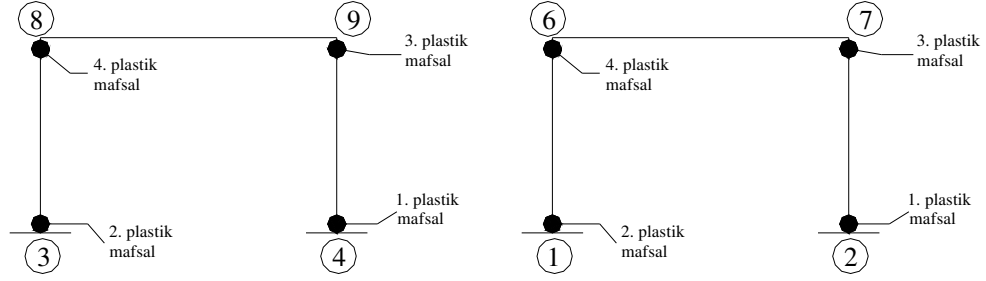
Tablo 8.1. Birinci mertebe pushover analizi verileri

X Doğrultusunda Birinci Mertebe Nonlineer Hesap				
Adım No	Yük Artım Oranı	Yük Parametresi	Tepe Düğüm Noktası Yerdeğiştirmesi(m)	Plastik Mafsal Oluşan Düğüm No
1	0.4578	0.4578	0.00753	2&4
2	0.0211	0.4789	0.00808	1&3
3	0.5475	1.0264	0.04380	7&9
4	0.0104	1.0368	∞	6&8

şeklinde yazılmasıyla şekil 8.8. ve şekil 8.9. dan sırasıyla yük parametresi-tepe düğüm noktası yerdeğiştirme grafiği ile plastik mafsal oluşum sırası görülebilir.



şekil 8.8. Yük parametresi – tepe düğüm noktası yerdeğiştirmesi



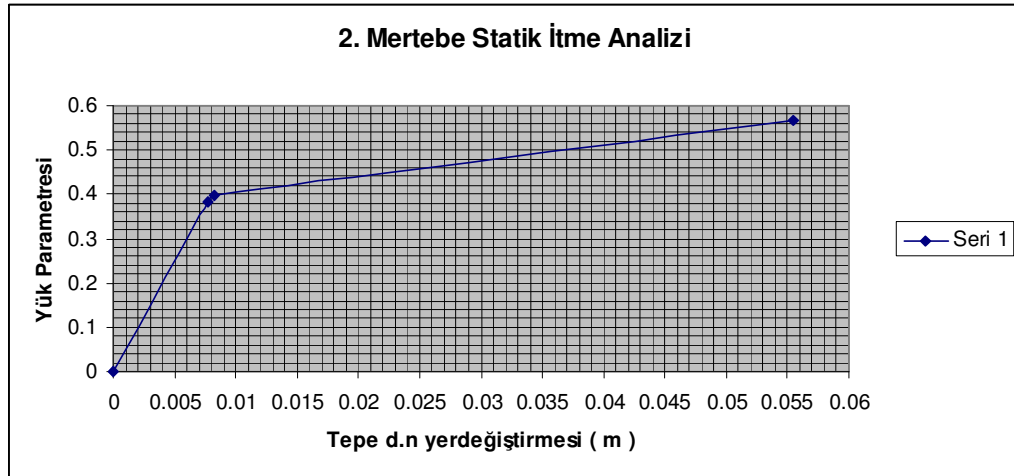
Şekil 8.9. Plastik mafsall oluşum sırası

Ek. 2. de verilen 1000 kN düşey 100 kN x doğrultusunda yatay yüke maruz kolonlu tek kat çerçeve sistemin ikinci mertbe statik itme analizi, program sonuç dosyasından alınarak;

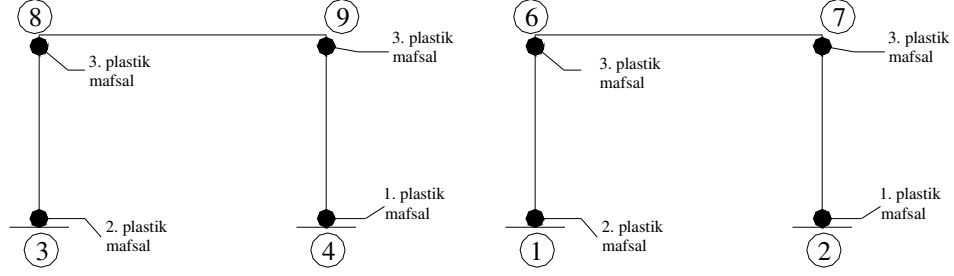
Tablo 8.2. İkinci mertbe pushover analizi verileri

X Doğrultusunda İkinci Mertbe Nonlineer Hesap				
Adım No	Yük Artım Oranı	Yük Parametresi	Tepe Düğüm Noktası Yerdeğıştirmesi(m)	Plastik Mafsall Oluşan Düğüm No
1	0.3818	0.3818	0.00778	2&4
2	0.0153	0.3971	0.00830	1&3
3	0.1694	0.5665	0.05548	6&7&8&9
4	1000	1000.5665	∞	

şeklinde yazılmasıyla Şekil 8.10. ve Şekil 8.11. den sırasıyla yük parametresi-tepe düğüm noktası yerdeğıştirme grafiğı ile plastik mafsall oluşum sırası görülebılır.



Şekil 8.10. İkinci mertbe yük parametresi-tepe düğüm noktası yerdeğıştirmesi



Şekil 8.11. İkinci mertebe plastik mafsall oluşum sırası

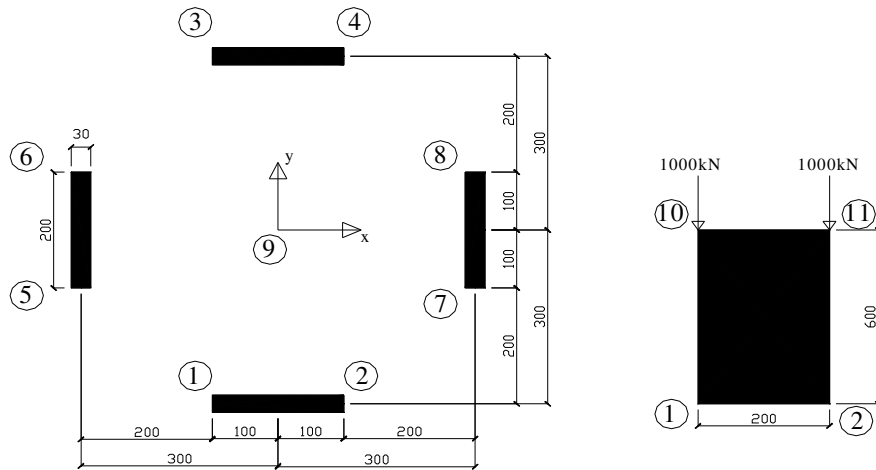
8.2 Perdeli Tek Kat Çerçeve

8.2.1 X Doğrultusunda Birinci ve İkinci Mertebe Lineer Hesap Sonuçları

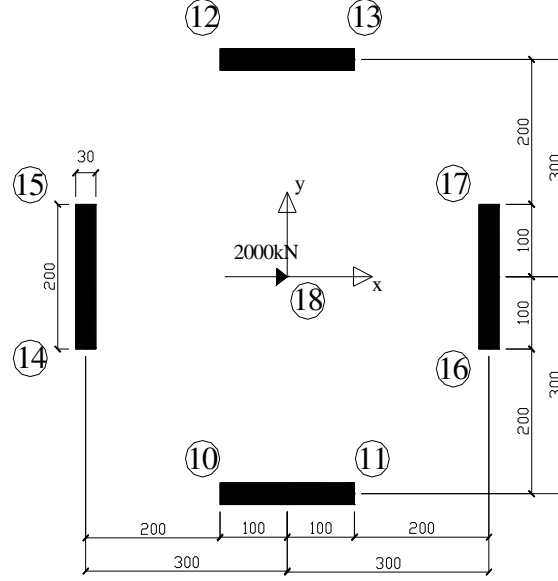
Şekil 8.12. ve Şekil 8.13.' de gösterilen perde sonlu elemanlardan oluşan tek katlı perde sistemin her bir perdesine 2000 kN düşey; üst master düğüm noktasına 2000kN yatay yük etkimesi durumuna ait tepe düğüm noktası birinci ve ikinci mertebe lineer deplasmanları Ek 5. ile Ek 6.' da verilen program sonuçlarından;

$$\delta_{x..I.mert.lineer} = 0.01821 \text{ m} \quad (8.17.)$$

$$\delta_{x..II.mertlineer} = 0.01862 \text{ m} \quad (8.18.)$$



Şekil 8.12. Perde sistem düşey yük yükleme düzeni ve alt kat planı



Şekil 8.13. Perde sistem yatay yük yükleme düzeni ve üst kat planı

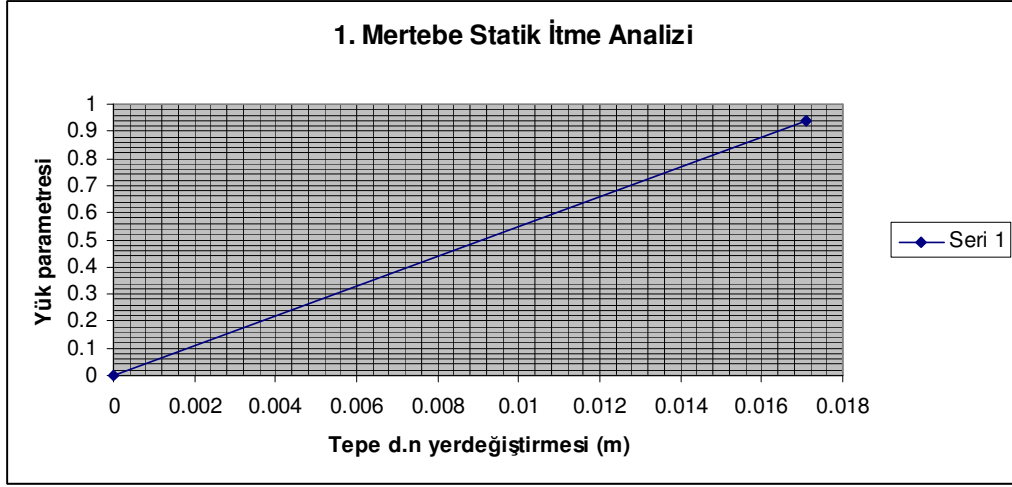
8.2.2 X Doğrultusunda Birinci ve İkinci Mertebe Nonlineer Hesap Sonuçları

Ek 5. de verilen 2000 kN düşey; 2000 kN x doğrultusunda yatay yüke maruz perde sistemin birinci mertebe statik itme analizi, program sonuç dosyasından alınarak;

Tablo 8.3. Perde eleman birinci mertebe pushover analizi verileri

X Doğrultusunda Birinci Mertebe Nonlineer Hesap				
Adım No	Yük Artım Oranı	Yük Parametresi	Tepe Düğüm Noktası Yerdeğiştirmesi(m)	Plastik Mafsal Oluşan Düğüm No
1	0.9407	0.9407	0.01710	2&4

şeklinde elde edilir. Mesnet düğüm noktalarında plastik mafsal oluşmasıyla x doğrultusunda yerleştirilmiş perdeler labil konumuna geçmekte ve y doğrultusundaki perdelerin rijitliklerinin x doğrultusunda gelen 2000 kN yatay yüke fazla bir katkısı olmamaktadır. Şekil 8.14. de perde sistemin birinci mertebe yük artım eğrisi verilmektedir.



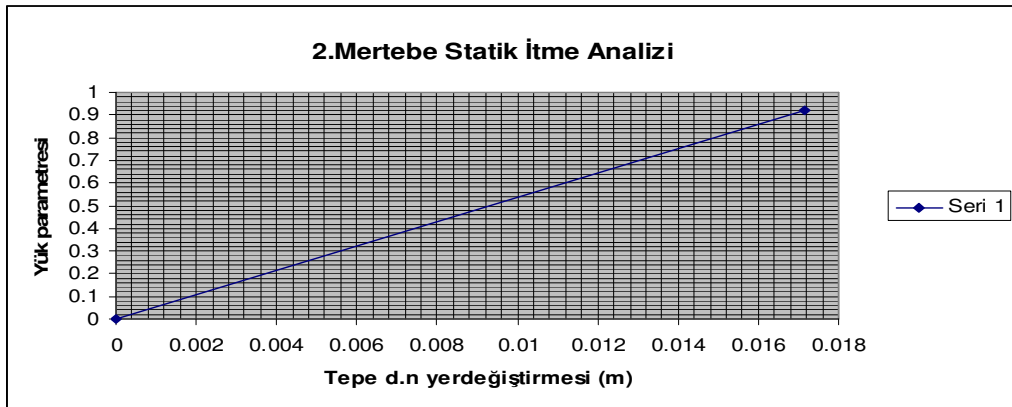
Şekil 8.14. Birinci mertebe yük parametresi-tepe düğüm noktası yerdeğiştirmesi

Ek.6. da verilen 2000kN düşey; 2000kN x doğrultusunda yatay yüke maruz perde sistemin ikinci mertebe statik itme analizi, program sonuç dosyasından alınarak;

Tablo 8.4. Perde eleman ikinci mertebe pushover verileri

X Doğrultusunda Birinci Mertebe Nonlineer Hesap				
Adım No	Yük Artım Oranı	Yük Parametresi	Tepe Düğüm Noktası Yerdeğiştirmesi(m)	Plastik Mafsal Oluşan Düğüm No
1	0.921	0.921	0.01715	2&4

şeklinde elde edilir. Şekil 8.15. de perde sistemin ikinci mertebe yük artım eğrisi verilmektedir.



Şekil 8.15. İkinci mertebe yük parametresi-tepe düğüm noktası yerdeğiştirmesi

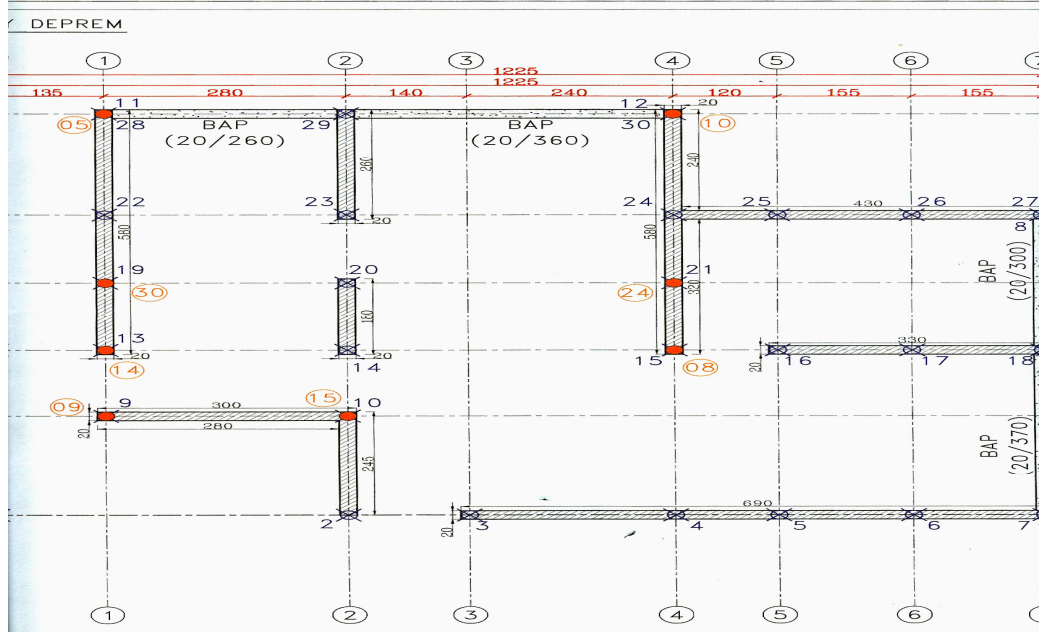
8.3 13 Katlı Perde Sistem

8.3.1 Y Doğrultusunda Birinci ve İkinci Mertebe Nonlinear Hesap Sonuçları

Şekil 8.16 da kat planı gösterilen 13 katlı toplam 458 adet perde eleman bulunan sistemin birinci ve ikinci mertebe nonlinear hesabı yapılmıştır.

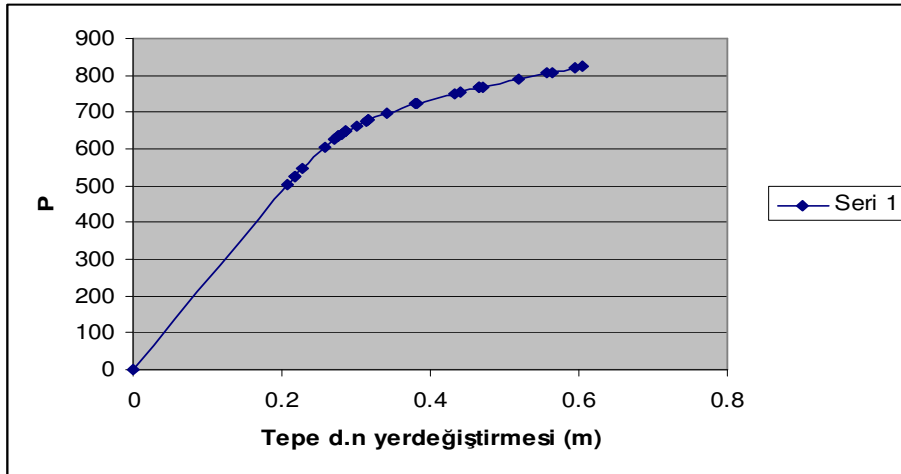
Tablo 8.5. 13 Kat Perde Sistem Birinci Mertebe Pushover Verileri

Y Doğrultusunda Birinci Mertebe Nonlinear Hesap		
Adım No	Tepe Düşüm Noktası Yerdeğiştirilmesi(m)	Yük Parametresi
	0	0
1	0.2077	501.610
2	0.2176	524.580
3	0.2182	525.870
4	0.2287	547.230
5	0.2590	605.630
6	0.2700	626.500
7	0.2749	633.790
8	0.2753	634.240
9	0.2806	641.670
10	0.2854	648.040
11	0.2869	649.940
12	0.2870	650.020
13	0.3006	663.140
14	0.3146	676.180
15	0.3169	678.400
16	0.3175	678.830
17	0.3176	678.900
18	0.3409	698.130
19	0.3792	723.110
20	0.3827	725.430
21	0.4333	750.400
22	0.4412	754.230
23	0.4651	765.540
24	0.4669	766.390
25	0.4702	767.920
26	0.5179	788.830
27	0.5579	806.160
28	0.5649	809.180
29	0.5951	821.320
30	0.6063	825.820



Şekil 8.16. 13 kat perde sistem kat kalıp planı

Tablo 8.5.deki birinci mertebe statik itme analizi verilerinden yararlanarak Şekil 8.17.deki birinci mertebe tepe düğüm noktası yerdeğiştirmesi - yük parametresini gösteren grafik elde edilmiştir.

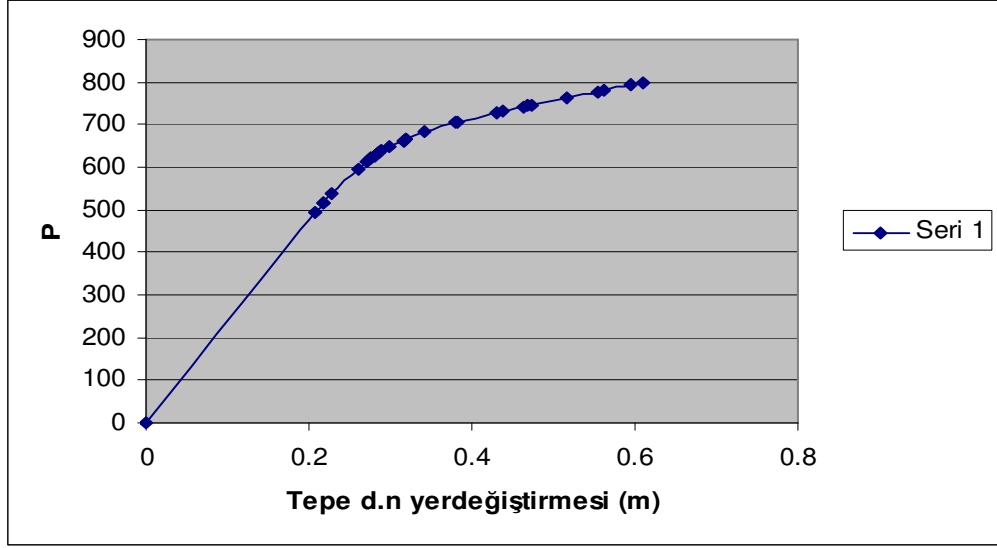


Şekil 8.17. 13 Kat Perde Sistem Birinci Mertebe Yük Artım Eğrisi

Tablo 8.6.daki ikinci merteye statik itme analizi verilerinden yararlanarak Şekil 8.18.deki ikinci merteye tepe düğüm noktası yerdeğiştirmesi - yük parametresini gösteren grafik elde edilmiştir.

Tablo 8.6. 13 Kat Perde Sistem İkinci Merteye Pushover Verileri

Y Doğrultusunda İkinci Merteye Nonlineer Hesap		
Adım No	Tepe Düğüm Noktası Yerdeğiştirmesi(m)	Yük
	0	0
1	0.2078	492.070
2	0.2178	514.590
3	0.2183	515.820
4	0.2288	536.670
5	0.2610	597.080
6	0.2701	613.870
7	0.2742	619.760
8	0.2772	623.880
9	0.2807	628.490
10	0.2862	635.530
11	0.2870	636.500
12	0.2883	637.700
13	0.2996	648.030
14	0.3164	662.880
15	0.3177	663.950
16	0.3178	664.016
17	0.3199	665.660
18	0.3409	681.910
19	0.3792	704.950
20	0.3827	707.000
21	0.4308	728.300
22	0.4388	731.720
23	0.4626	741.790
24	0.4679	744.030
25	0.4729	745.970
26	0.5154	762.430
27	0.5550	777.650
28	0.5624	780.300
29	0.5958	792.020
30	0.6109	797.330



Şekil 8.18. 13 Kat Perde Sistem İkinici Mertebe Y¼k Artım Eğrisi

9. SONUÇLAR

Daha önceden geliştirilmiş olan perde ve çubuk sonlu elemanlardan oluşan sistemlerde geometri ve malzeme değişimi bakımından lineer olmayan etkiler göz önüne alınmış ve bunlara ait uygulamaları kapsayan bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

1-) Bölüm 1’de geometri değişimi bakımından doğrusal olmayan çubuk sistemlerin ikinci mertebe deplasman sabitleri diferansiyel denklem metodu ile elde edilmiştir.

2-) Bölüm 2’de virtüel iş teoreminden yararlanarak, üniform ve farklı sıcaklık değişimi, ikinci mertebe etkilerini de kapsayacak şekilde bütün sistem için sonlu elemanlar metodu denklemleri çıkarılmıştır.

3-) Bölüm 3’de köşelerde dört, master düğüm noktalarında üç yerdeğiştirme parametresi olmak üzere toplamda yirmi iki serbestlik dereceli dikdörtgen perde sonlu eleman tanıtılmış ve bu sonlu elemana ait birinci ve ikinci mertebe rijitlik matrislerinin çıkarılışı anlatılmıştır.

4-) Bölüm 4’ de doğru eksenli ve prizmatik uzay çubuklarda ikinci mertebe teorisine ait çubuk rijitlik matrisi sunulmuştur.

5-) Çalışma düzeni ve kullanma esasları yedinci bölümde açıklanan GenSon adlı bilgisayar programı yardımı ile perde ve çubuk sistemlerin birinci ve ikinci mertebe lineer hesabı ile birinci ve ikinci mertebe nonlinear hesabı yapılmıştır.

6-) Örnek 1’de verilen 1000 kN düşey; 100 kN x doğrultusunda yatay yüke maruz kolonlu tek kat çerçeve sistemin birinci mertebe statik itme analizi sonucu sistem $\rho = 1.0264$ yük parametresi altında $\delta = 0.0438\text{m}$ deplasman yaparak labil konumuna geçmekte iken ikinci mertebe statik itme analizinde yük parametresi % 44.8 düşüş göstererek $\rho = 0.5665$ değerinde $\delta = 0.0555\text{m}$ deplasman yaparak stabilitesini kaybetmiştir.

7-) Örnek 2’de verilen 2000 kN düşey; 2000 kN x doğrultusunda yatay yüke maruz perde sistemin birinci merteye statik itme analizi sonucu sistem $\rho = 0.9407$ yük parametresi altında $\delta = 0.0171\text{m}$ deplasman yaparken ikinci merteye statik itme analizi sonucunda $\rho = 0.921$ olmak üzere $\delta = 0.01715\text{m}$ deplasman gerçekleşmiştir.

8-) 13 katlı perde sistemin y doğrultusunda birinci merteye statik itme analizi sonucunda $\rho = 0.8528$ yük parametresi altında $\delta = 0.6063\text{m}$ deplasman meydana gelirken ikinci merteye statik itme analizinde $\rho = 0.7973$ yük parametresi olmak üzere deplasman $\delta = 0.6109\text{m}$ olarak bulunmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] **Özer, E.**, 2004. Yapı Sistemlerinin Lineer Olmayan Analizi Ders Notları, www.ins.itu.edu.tr/eozer, İstanbul.
- [2] **Çakıroğlu, A.**, 1974. Hiperstatik Sistemlerin Hesap Metodları, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.
- [3] **Zienkiewicz, O.C.**, 1971. The Finite Element Method in Engineering Science, Mc.Graw Hill, London.
- [4] **Saygun, A.I.**, 1979. Eğri eksenli, kutu kesitli kirişlerin hesabı için bir sonlu elemanlar yöntemi, *Doçentlik Tezi*, İstanbul.
- [5] **Köksal, T.**, 1995. Sonlu Elemanlar Metodu, Y.T:Ü: Matbaası, İstanbul.
- [6] **Saygun, A.I.**, 1974. Yüzeysel Taşıyıcı Sistemlerin Hesabı İçin Eğrisel Sonlu Elemanlar, *Doktora Tezi*, İstanbul.
- [7] **Çakıroğlu, A., ve Özer, E.**, 1980. Malzeme ve Geometri Değişimi Bakımından Lineer Olmayan Sistemler, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.
- [8] **TS-500**, 1984. Betonarme Yapıların Hesap ve Yapım Kuralları, *Türk Standartları Enstitüsü*, Ankara.
- [9] **Özer, E.**, 1997. İleri Yapı Statiği Ders Notları
- [10] **Cengiz, E.Y.**, Yeni Bir Perde Sonlu Eleman Modeli ve Çok Katlı Perde-Çerçevesel Yapı Sistemlerinin Göçme Güvenliğinin Belirlenebilmesi İçin Yük Artımı Yöntemi, *Doktora Tezi*, İstanbul.
- [11] **Özer, E.**, 1987. Determination of second order limit load by a method of load increments, *Bulletin of Technical University of İstanbul*, **40**, 815-836.
- [12] **Demir, F.**, 1998. Betonarme yapılarda sonlu eleman yönteminin uygulamaları, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [13] **Çakıroğlu, A., Özden, E. ve Özmen, G.**, 1992. Yapı Sistemlerinin Hesabı İçin Matris Metodları ve Elektronik Hesap Makinesi Programları, Cilt I, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.
- [14] **Ersoy, U.**, 1985. Betonarme Temel İlkeler ve Taşıma Gücü Hesabı, Cilt I, ODTÜ, Evrim Yayınevi ve Ticaret Ltd. Şti., İstanbul.

- [15] **Przemieniecki, J.S.**, 1968. Theory of Matrix Structural Analysis, Mc Graw Hill, Book company, London.
- [16] **Keskinel, F. ve Karadoğan, F.**, 1992. Açıklamalı Örneklerle Fortran IV ve 77., Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [17] **Meek, J.L.**, 1991. Computer Methods in Structural Analysis, Chapman & Hall, Australia.
- [18] **Bathe, K.J.**, 1982. Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey.
- [19] **Celep, Z. ve Kumbasar, N.**, 1995. Örneklerle Betonarme, İTÜ; Sema Matbaacılık, İstanbul.
- [20] **TS-498**, 1987. Yapı elemanlarının boyutlandırılmasında alınacak yüklerin hesap değerleri, *Türk Standartları Enstitüsü*, Ankara.
- [21] **İTÜ İnşaat Fakültesi Betonarme Yapılar Birimi**, 1990. Betonarme Tablo ve Abaklar, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Kazım Ahmet HAŞİM, 12.01.1983 tarihinde İstanbul' da doğmuştur. 2000 yılında Haydarpaşa Süper Lisesi' ni başarıyla bitirmiş, lisans öğrenimini 2004 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünde tamamlamış, 2004 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Mühendisliği programında yüksek lisans eğitimine başlamıştır.