

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OPSİYON FİYATLAMA MODELLERİNİN İMKB'YE  
UYGULANMASI**

**Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Mühendisi Zeynep İLTÜZER  
507051032**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Mayıs 2007  
Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Haziran 2007**

**Tez Danışmanı : Doç.Dr. Oktay TAŞ  
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Fahir BİLGİNOĞLU (İ.Ü.)  
Prof.Dr. Suat TEKER (O.Ü.)**

**HAZİRAN 2007**

## ÖNSÖZ

Öncelikle bu yüksek lisans tezinin hazırlanması için bana her zaman destek olan, tavsiyeleri ve deneyimleriyle bana yol gösteren tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Oktay TAŞ ‘ a çok teşekkür ederim. Ayrıca yüksek lisans eğitimim süresince bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan tüm İşletme Fakültesi öğretim üyelerine saygı ve teşekkürlerimi sunuyorum.

Mayıs 2007

Zeynep İLTÜZER

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                         |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| KISALTMALAR                                                                             | V         |
| TABLO LİSTESİ                                                                           | VI        |
| ŞEKİL LİSTESİ                                                                           | VII       |
| ÖZET                                                                                    | VIII      |
| SUMMARY                                                                                 | IX        |
| <b>1. GİRİŞ</b>                                                                         | <b>1</b>  |
| <b>2. STOKASTİK SÜREÇLER VE HİSSE SENEDİ FİYAT HAREKETLERİ</b>                          | <b>3</b>  |
| 2.1. Markov özelliği                                                                    | 3         |
| 2.2. Martingale Özelliği                                                                | 4         |
| 2.3. Wiener Prosesi                                                                     | 5         |
| 2.4. Genelleştirilmiş Wiener Prosesi                                                    | 5         |
| 2.5. Hisse Senedi Fiyat Değişimlerinin Stokastik Modeli                                 | 6         |
| 2.6. Ito Prosesi                                                                        | 7         |
| 2.7. Ito Lemma                                                                          | 8         |
| <b>3. BLACK SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA MODELİ</b>                                        | <b>12</b> |
| 3.1. Black Scholes Diferansiyel Denklemi                                                | 12        |
| 3.2. Avrupa Tipi Call Opsiyonun Analitik Çözümü                                         | 15        |
| 3.3. Black- Scholes Modelinin Performansı,İma edilen Oynaklık ve Oynaklık   Gülümsemesi | 18        |
| <b>4. LİTERATÜR</b>                                                                     | <b>24</b> |
| <b>5. OPSİYON FİYATLAMA MODELLERİNİN TEORİSİ</b>                                        | <b>30</b> |
| 5.1. GARCH Opsiyon Fiyatlama Modeli                                                     | 30        |
| 5.2. Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli                                                     | 33        |
| 5.3. Açık Sonlu Farklar Yöntemi                                                         | 36        |
| <b>6. UYGULAMA</b>                                                                      | <b>41</b> |
| 6.1. GARCH Opsiyon Fiyatlama Modeli                                                     | 41        |
| 6.1.1. İMKB30 Endeksi GARCH Opsiyon Fiyatlaması                                         | 42        |
| 6.1.2. İMKB100 Endeksi GARCH Opsiyon Fiyatlaması                                        | 50        |
| 6.2. Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli                                                     | 56        |
| 6.2.1. İMKB30 Endeksi Binom Opsiyon Fiyatlaması                                         | 57        |

|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 6.2.2. İMKB100 Endeksi Binom Opsiyon Fiyatlaması                                                | 58        |
| 6.3. Açık Sonlu Farklar Yöntemi                                                                 | 59        |
| 6.3.1. İMKB30 Endeksi Kesin Sonlu Opsiyon Fiyatlaması Sonlu Yöntemi<br>ile Opsiyon Fiyatlaması  | 59        |
| 6.3.2. İMKB100 Endeksi Kesin Sonlu Opsiyon Fiyatlaması Sonlu<br>Yöntemi ile Opsiyon Fiyatlaması | 61        |
| <b>6. SONUÇ</b>                                                                                 | <b>64</b> |
| <b>KAYNAKLAR</b>                                                                                | <b>66</b> |
| <b>EKLER</b>                                                                                    | <b>69</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b>                                                                                 | <b>84</b> |

## **KISALTMALAR**

|              |                                             |
|--------------|---------------------------------------------|
| <b>IMKB</b>  | : İstanbul Menkul Kıymetler Borsası         |
| <b>VOB</b>   | : İzmir Vadeli İşlemler ve Opsiyon Borsası  |
| <b>LRNRV</b> | : Local Risk Neutral Valuation Relationship |
| <b>CBOE</b>  | : Chicago Board Option Exchange             |
| <b>ISE</b>   | : Istanbul Stock Exchange                   |
| <b>EMS</b>   | : Empirical Martingale Simulation           |

## TABLO LİSTESİ

|                                                                                                                                                                                     | <b><u>Sayfa No</u></b> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>Tablo 3.1.1</b> IBM opsiyon fiyatları kullanılarak hesaplanan ima edilen oynaklık.....                                                                                           | 20                     |
| <b>Tablo 6.1.1.1</b> IMKB30 endeksi Garch Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları..                                                                                                      | 48                     |
| <b>Tablo 6.1.1.2</b> IMKB30 endeksi Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları.....                                                                                           | 48                     |
| <b>Tablo 6.1.1.3</b> IMKB30 Garch Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Modeli arasındaki %fark [(GARCH-BS)/BS].....                                                           | 49                     |
| <b>Tablo 6.1.2.1</b> IMKB100 endeksinin Garch opsiyon fiyatlama modeli sonuçları.....                                                                                               | 55                     |
| <b>Tablo 6.1.2.2</b> IMKB100 endeksi Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları .....                                                                                         | 55                     |
| <b>Tablo 6.1.2.3</b> IMKB100 endeksi Garch Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Modeli arasındaki %fark [(GARCH-BS)/BS].....                                                  | 56                     |
| <b>Tablo 6.2.1.1</b> IMKB30 endeksinin Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları.....                                                                                                | 57                     |
| <b>Tablo 6.2.1.2</b> IMKB30 Endeksi Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama modeli arasındaki sapma [(BINOM-BS)/BS].....                                 | 58                     |
| <b>Tablo 6.2.2.1</b> IMKB100 endeksinin Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları.....                                                                                               | 58                     |
| <b>Tablo 6.2.2.2</b> IMKB100 Endeksi Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama modeli arasındaki sapma [(BINOM-BS)/BS].....                                | 59                     |
| <b>Tablo 6.3.1.1</b> IMKB30 endeksinin Açık Sonlu Farklar Yöntemi Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları.....                                                                           | 60                     |
| <b>Tablo 6.3.1.2</b> IMKB30 Endeksi Açık Sonlu Farklar Yöntemi Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama modeli arasındaki sapma [(KESİN SONLU FARK-BS)/BS]....  | 61                     |
| <b>Tablo 6.3.2.1</b> IMKB100 endeksinin Açık Sonlu Farklar Yöntemi Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları.....                                                                          | 62                     |
| <b>Tablo 6.3.2.2</b> IMKB100 Endeksi Açık Sonlu Farklar Yöntemi Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama modeli arasındaki sapma [(KESİN SONLU FARK-BS)/BS].... | 63                     |

## ŞEKİL LİSTESİ

|                      | <u>Sayfa No</u>                                                                                                           |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Şekil 3.3.1</b>   | : 1987 krizi öncesi S&P 500 endeks opsiyonun ima edilen oynaklık ve uygulama fiyatı arasındaki ilişkinin grafiği..... 20  |
| <b>Şekil 3.3.2</b>   | : 1987 krizi sonrası S&P 500 endeks opsiyonun ima edilen oynaklık ve uygulama fiyatı arasındaki ilişkinin grafiği..... 22 |
| <b>Şekil 5.2.1</b>   | : $\delta$ zaman adımları ile hisse sendi fiyatının izlediği binom prosesi..... 33                                        |
| <b>Şekil 5.2.2</b>   | : Şekil 5.2.1 deki binom prosesinin izleyen hisse senedinin opsiyon fiyatların..... 33                                    |
| <b>Şekil 5.2.3</b>   | : Amerikan Doları/Kanada Doları avrupa tipi call opsiyonun binom modeli ile çözümü..... 35                                |
| <b>Şekil 5.3.1</b>   | : Açık Sonlu Farklar Yönteminin Grafik Gösterimi..... 37                                                                  |
| <b>Şekil 6.1.1.1</b> | : $LN(IMKB_t/IMKB_{t-1})$ , IMKB30 endeksi birleşik getirisinin istatistikleri..... 42                                    |
| <b>Şekil 6.1.1.2</b> | : IMKB30 günlük birleşik getirisinin AC, PAC ve Q-Stat değerleri..... 44                                                  |
| <b>Şekil 6.1.1.3</b> | : IMKB30 günlük birleşik getiri serisinin ARCH-LM testi sonucu..... 45                                                    |
| <b>Şekil 6.1.1.4</b> | : IMKB30 endeksinin GARCH(1-1)- M modellemesi..... 46                                                                     |
| <b>Şekil 6.1.2.1</b> | : IMKB100 birleşik getiri serisinin istatistikleri..... 50                                                                |
| <b>Şekil 6.1.2.2</b> | : IMKB100 c regresyonun hata terimlerinin AC,PAC ve Q-Stat değerleri..... 52                                              |
| <b>Şekil 6.1.2.3</b> | : IMKB100 endeksi ARCH –LM testi sonucu..... 53                                                                           |
| <b>Şekil 6.1.2.4</b> | : IMKB100 endeksi GARCH(1,1)-M Modeli Sonuçları..... 54                                                                   |

## OPSIYON FİYATLAMA MODELLERİNİN İMKB'YE UYGULANMASI

### ÖZET

Bu tez kapsamında finans literatüründe 20. yüzyılın son çeyreğinden itibaren oldukça geniş yer tutan opsiyon fiyatlama konusunda geliştirilen modellerinin incelenmesi ve bazı modellerin İstanbul Menkul Kıymetler Borsasına uygulanması gerçekleştirilmiştir.

Dünyada en önemli ve yaygın olarak kullanılan türev ürünlerden biri olan opsiyonlar temel işlevi riskten korunmak olmasına rağmen spekülative, yatırım ve arbitraj amaçları ile de kullanılarak dünya piyasalarında oldukça yüksek işlem hacimlerine ulaşan finansal ürünlerdir. Dünya piyasalarında gittikçe artan önemlerine paralel olarak opsiyon fiyatlarının en etkin şekilde belirlenmesi gereksinimini karşılamak için finans literatüründe pek çok opsiyon fiyatlama modeli geliştirilmiştir.

Dünya piyasalarındaki bu önemli konumlarına rağmen Türkiye halen kurumsallaşmış bir borsada opsiyon işlemleri gerçekleştirememektedir. Fakat 2001 yılında İzmir'de kurulmuş olan Vadeli İşlem ve Opsiyon Borsası'nda vadeli işlem sözleşmeleri (futures) alım-satımı yapılabilmektedir ve opsiyon sözleşmelerinin de alım-satımının yapılabilmesi için çalışmalara başlandığı belirtilmektedir. Yakın zamanda Türk finansal piyasalarında da işlem yapılmaya başlanacak olan opsiyonların fiyatlaması konusu da gittikçe önem kazanacaktır.

Bu çalışmada öncelikle kendisinden sonraki çalışmalara temel oluşturan ünlü Black-Scholes modelinin ve diğer opsiyon fiyatlama modellerinin temellerini anlayabilmek için gerekli olan temel matematiksel konulara yer verilmiştir. Daha sonra Black-Scholes modelinin detayları ve eksik yönlerine yer verilmiş ve opsiyon fiyatlama modellerinin finans literatüründeki gelişimi incelenmiştir. Daha sonra uygulaması yapılacak olan modeller olan Binom Opsiyon Fiyatlama modeli, Açık Sonlu Farklar modeli, GARCH Opsiyon Fiyatlama modellerinin teorik alt yapısı anlatılmış ve son olarak uygulama gerçekleştirilmiştir.

Daha önce değinildiği gibi Türk finans piyasalarında opsiyon alım-satım işlemi yapılmadığı için İMKB30 endeksi ve İMKB100 endeksi üzerine yazılı varsayımsal opsiyonlar, Chicago Menkul Kıymetler Borsasında işlem gören opsiyonlar vadeleri, uygulama fiyatı ve spot fiyat arasındaki ilişki incelenerek varsayımsal opsiyonlar oluşturulmuş ve fiyatlamaları gerçekleştirilmiş ve uygulaması yapılan modellerin literatürdeki çalışmalarla paralel sonuçlar verip vermediği incelenmiştir.



## **APPLICATION OF OPTION PRICING METHODS TO ISE**

### **SUMMARY**

In the extent of this study, the option pricing methods that has been developed for the last quarter of 20th century are examined and certain pricing methods are applied into İstanbul Stock Exchange.

Although options' , one of the most important and widespread derivative instruments, basic function is hedging, they are also used with the aims of speculation, investment and arbitrage. Therefore options have reached quite large transaction volume. Paralel with the increasing importance of options in the world markets, in order to satisfy the need of true value of an option many option pricing techniques have been developed in the literature.

Turkey does not have any institutional exchange like İstanbul Stock Exchange to trade options although options carry substantial importance in the world. However, futures trading can be made in İzmir Futures and Options Exchange that has been established in 2001, and it has been stated that studies have started in order to be able to trade option contracts in İzmir Futures and Option Exchange. That is, in the near future financial markets in Turkey will be able to make options trading, and option pricing methods will gain importance gradually.

In this study, first of all fundamental stochastic calculus topics related to seminal work of Black-Scholes and other option pricing methods is presented. Then the details of Black-Scholes option pricing model and its systematic biases are presented and literature review of option pricing methods are mentioned. After that, the theoretical details of the three methods that are applied into ISE, Binomial option pricing method, GARCH Option Pricing Method and Explicit Finite Difference Method, is presented.

As stated earlier because there is no option trading in Turkish financial markets, IMKB30 and IMKB100 index hypothetical options are created by taking into account the relationship between Chicago Board Exchange options' maturity, exercise price and spot price. Finally pricing of these hypothetical options are made with Binomial option pricing method, GARCH Option Pricing Method and Explicit Finite Difference Method and results are examined whether they are parallel with literature.

## 1. GİRİŞ

Küreselleşme ve bilgi teknolojisinde yaşanan hızlı gelişmeler sonucunda ekonomik birimlerin maruz kaldığı riskler sadece ülke içi faktörlerden değil dünya çapındaki gelişmelerden de büyük ölçüde etkilenmektedir. Ekonomik birimlerin karşı karşıya kaldığı risklerin çeşitliliği ve çokluğu risk yönetimine verilen önemi arttırmıştır. Uluslararası ve ulusal piyasalarda karşılaşılan risklerden korunabilmek için türev ürünler önemli fırsatlar sunmakta rekabet koşullarının gittikçe arttığı günümüz koşullarında ekonomik birimlerin devamlılığına katkıda bulunmaktadır. Bu açıdan bakıldığında oldukça yüksek öneme sahip türev ürünlerden biri olan opsiyonlar risk yönetimi için vazgeçilmez bir finansal araç haline gelmiştir.

Türev ürünler basitçe değeri başka bir finansal ürünün değerine bağlı olan finansal araçlardır. Önemli türev ürünlerden biri olan opsiyonlar başka bir ürüne bağlı olarak fiyatlandığı ve sözleşme özellikleri nedeniyle modern opsiyon fiyatlama modelleri finans literatüründe kökleri stokastik matematiğe dayanan matematiksel olarak en kompleks başlıklar olarak değerlendirilmektedir. Risk yönetiminin artan önemine paralel olarak önemi hale gelen opsiyonlar, finasta matematiksel modelleme bilgi ve birikimi olan insan gücüne ihtiyacı arttırmış ve finans mühendisliği gibi yeni bir meslek dalının ortaya çıkmasına paralel olarak akademilerde ve özel eğitim kurumlarında finans mühendisliği bölümlerinin ve eğitim programlarının açılması ile sektörün bu konudaki ihtiyacına karşılamaya yönelik adımlar atılmaya başlanmıştır. Türkiye'nin 1980 sonrası serbest piyasa ekonomisine geçişi ile hızlanan dünya piyasaları ile entegrasyonun etkisiyle aynı ihtiyaçlar Türk finans sektöründe de hissedilmeye başlanmıştır.

Bu açıdan bakıldığında opsiyon fiyatlama teorisinin incelenmesi finans mühendisliği ile ilgilenmek bu alanda kendini geliştirmek isteyen kişiler için temel teşkil etmektedir. Literatürde geliştirilen opsiyon fiyatlama modelleri 1900'lara kadar dayanmasına rağmen 1973 yılında yayınlanan Black ve Scholes'un 1997 yılında ekonomi dalında Nobel ödülü aldıkları çalışmalarına kadar yaygın kabul gören bir model geliştirilememiştir. Bu çalışmaları sadece opsiyon fiyatlama konusundaki ileri

alışmalara temel oluşturmamış aynı zamanda garanti sözleşmeleri ve sigorta sözleşmelerinin değerlemesi, şirket değerlemesi, yatırım karalarının alınması gibi pek çok alandaki değerleme konuları içinde temel teşkil etmiştir. Black-Scholes 'un bu nc çalışmasından daha genelleştirilmiş ve gerçeğe yakın modeller geliştirilmeye başlanmış, fakat ampirik bulguları modellere dahil etmeye varsayımları azaltmaya çalıştıkça modeller daha karmaşık bir hal almaya başlamış ve bu gelişmeler günümüzde de devam etmektedir.

Yukarıda değinilen faktörler göz önünde bulundurularak hazırlanan bu çalışmanın ikinci bölümünde opsiyon fiyatlama modellerinin temelini oluşturan stokastik değişkenler ve süreçler detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Çalışmanın nc bölümünde finans literatüründeki önemi ve kendisinden sonraki modellere temel teşkil etmesi nedeniyle Black-Scholes modeli detaylı olarak incelenmiş ve modelin sistematik yanlış fiyatlama nedenlerine değinilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde opsiyon fiyatlama modellerinin literatürdeki gelişimi ve modellerin Black-Scholes' un modelin sebep olduğu yanlış fiyatlama sorunlarını hangi varsayımlarını genelleştirerek çözüm üretmeye çalıştıkları üzerinde durulmuştur.

Çalışmanın beşinci bölümünde literatürdeki opsiyon fiyatlama modellerinden GARCH opsiyon fiyatlama modeli, Binom opsiyon fiyatlama modeli ve Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile opsiyon fiyatlama modelleri detaylı olarak anlatılmış ve bu modellerle ilgili literatürdeki çalışmaların bulgularına yer verilmiştir.

Çalışmanın altıncı bölümünde ise beşinci bölümde detaylı olarak anlatılan modellerin dayanak varlığı IMKB30 endeksi ve IMKB100 endeksi olan varsayımsal opsiyonların fiyatlaması gerçekleştirilmiştir.

## 2. STOKASTİK SÜREÇLER VE HİSSE SENEDİ FİYAT HAREKETLERİ

Diğer çalışmalara temel oluşturan ünlü Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeli ve daha sonra geliştirilmiş opsiyon fiyatlama modelleri temel olarak varlık fiyatları hareketlerinin detaylarına bu bölümde anlatılmış olan stokastik süreçlere sahip olduğu varsayımına dayanmaktadır. Süreçlerin tanımlarına ve özelliklerine hakim olmak opsiyon fiyatlama modellerinin anlaşılması için temel oluşturmaktadır.

### 2.1. Markov Özelliği

Finansal modellerin çoğu varlıkların markov özelliğine sahip olduğu varsayımı üzerine kurulduğu için markov özelliği finasta modelleme konuları için temel teşkil eden oldukça önemli bir konudur.

Markov özelliğini anlatmak için öncelikle bir örnekle başlayacağım. Bunun için yazı tura oyununu kullanalım. Tura geldiğinde 1YTL alacağımız, yazı geldiğinde 1YTL vereceğimiz bir oyun olsun. Böyle bir oyunda yapılan atışların beklenen değeri uzun dönemde sıfır olacak, ve bu oyunda ilk atışta tura gelmesi hiçbir şekilde ikinci denemenin yazı veya tura gelmesini etkilememektedir,yani 10. atışın sonucunun geçmiş atışların sonuçlarıyla herhangi bir ilişkisi bulunmamaktadır. Matematiksel olarak ifadesi;  $r_i$  i. atış,  $r_j$  j. atış olmak üzere

$$\begin{aligned} E(x_i) &= 0 \\ E(x_i^2) &= 1 \\ E(x_i x_j) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklindeir. Bu durumda i. atış sonunda oyuncunun elde ettiği kazancı

$$S_i = \sum_{j=1}^i x_j \tag{2.1.2}$$

şeklinde ifade edilebilir (Wilmott, 2005).

Markov analizi bir değişkenin aldığı değerler zinciri incelenerek bu değişkenin belli bir değeri aldıktan sonra diğer bir değeri alma eğiliminin incelenmesi olarak tanımlanabilir. Markov analizi ile değişkenin gerçekte aldığı değerlere benzer fakat birbiriyle bağlantılı rasgele değerlerle yeni bir seri elde edilir. Bu yüzden markov prosesi birbiriyle ilişkili rasgele değerlerin türetilmesi için oldukça kullanışlıdır. Fakat yazı tura oyununu bu proses ile modellemek yanlış bir modelleme olacaktır çünkü yukarıda da belirtildiği gibi her atış birbirinden etkilenmemektedir. Buradaki her atış birbirinden tamamen bağımsızdır. Buradan rasgele yürüyüş modelinin markov prosesine göre daha sıkı şartlar gerektirdiği söylenebilir. Çünkü markov prosesi ikinci , üçüncü koşullu momentlerinin birinden bağımsız olma şartını aramamaktadır (Cuthbertson, Nitzsche,2004).

Markov özelliği bir değişkenin geçmişte aldığı değerlerin gelecekteki değerlerin belirlenmesinde etkili olmadığını, geleceği tahmin etmede kullanılacak tek bilginin değişkenin bugünkü değeri olduğunu ifade eder. Örneğin hisse senedi fiyatlarının modellenmesinde genellikle markov özelliğine sahip olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda A hissesinin bugünkü fiyatını 5 YTL ise , yarınki fiyatının beklenen değeri 5YTL'dir. A hissesinin yarınki fiyatı bir hafta önce , bir ay önce yada bir yıl önce aldığı değerlerden etkilenmemektedir. Hisse senedi fiyatlarının markov özelliği zayıf etkin piyasa ile tutarlılık göstermektedir. Zayıf etkin piyasa hipotezi bir hisse senedinin şimdiki fiyatının geçmişteki bütün bilgileri yansıtmakta olduğunu belirtmektedir. Buradan geçmiş bilgilere göre şekillenen geçmiş fiyatların gelecekteki fiyatlar üzerinde etkisi olmayacağı sonucu çıkmakta yani markov özelliği ile tutarlılık göstermektedir (Hull,2005).

Markov özelliğinin matematiksel olarak gösterimi:

$$E(S_i | x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) = S_{i-1} \quad (2.1.3)$$

şeklindedir.

## 2.2. Martingale Özelliği

Martingale özelliği markov özelliği gibi bir değişkenin gelecekteki koşullu beklenen değerinin değişkenin geçmiş değerlerine eşit olduğunu ifade etmektedir.  $S_t$  aşağıdaki özelliğe sahip bir stokastik değişken ise

$$E(S_t|S_k, k < t) = S_k \quad (2.2.1)$$

$S_t$  martingale özelliğine sahiptir denir.

### 2.3. Wiener Prosesi

Wiener prosesi ortalaması 0, varyansı 1 olan özel markov proseslerinden biridir. Bazen Brownian hareketi (Brownian motion) olarak da tanımlanmaktadır. Eğer  $z$  değişkeni wiener sürecine sahipse şu iki özelliğe sahiptir:

1.  $\Delta t$  gibi çok küçük bir zaman diliminde  $z$  değişkeninde gerçekleşen değişim  $\Delta z$  ise

$$\Delta z = \varepsilon \cdot \Delta t \quad \varepsilon \sim N(0,1) \quad (2.3.1)$$

ortalaması 0, varyansı 1 olan standard normal dağılım sahip rassal bir değişkendir.

2.  $\Delta t_i, \Delta t_j$  iki farklı zaman dilimi olmak üzere bu zaman dilimlerine karşılık gelen:  $\Delta z_i, \Delta z_j$  değerleri birbirinden bağımsızdır.  $\Delta z$  'nin ortalama değerinin bulmak için  $\Delta z$  'nin beklenen değerini hesaplayalım:

$$E[\Delta z] = E[\varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}] = \sqrt{\Delta t} E[\varepsilon] = \sqrt{\Delta t} \cdot 0 = 0 \quad (2.3.2)$$

$\Delta z$  'nin varyansı:

$$Var(\Delta z) = Var(\varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}) = \Delta t \cdot Var(\varepsilon) = \Delta t \cdot 1 = \Delta t \quad (2.3.3)$$

Dolayısıyla  $\Delta z$  ortalaması 0, varyansı  $\Delta t$  olan normal dağılıma sahiptir. Bu durumu bir örnekle somutlaştırmak için  $t=0$  da  $z_0 = 25$  ve bir sene sonunda ortalaması 25, varyansı 1 olan  $z$  wiener prosesine sahip bir stokastik değişkendir. Bu bilgilere göre 5 yıl sonra yani  $t = 5$   $\Delta t = 5$  olduğuna göre  $z$ , ortalaması 25, varyansı  $\sqrt{5}$  olan normal dağılıma sahiptir.

### 2.4. Genelleştirilmiş Wiener Prosesi

Stokastik değişkenler analiz edilirken iki önemli parçadan söz edilebilir. Bunlardan biri birim zamandaki ortalama değişim olarak tanımlanan sürüklenme oranı ( drift

rate), diğeri ise birim zamandaki varyans olarak tanımlanan varyans oranı (variance rate) dır. Wiener prosesi sürüklenme oranı sıfır, varyans oranı 1 olan bir stokastik procestir. Sürüklenme oranının sıfır olması değışkenin gelecekteki herhangi bir zamandaki beklenen değerin şimdiki değrine eşit olduğunu ifade etmektedir. Varyans oranının 1 olması ise T sürelik bir zaman dilimde varyansının T' ye eşit olması anlamına gelmektedir. X değışkeni için genelleştirilmiş wiener prosesi

$$\Delta x = a.\Delta t + b.\Delta z \quad (2.4.1)$$

a sürüklenme oranı,  $b^2$  varyansı oranı olmak üzere yukarıdaki gibi kesikli stokastik değışken olarak tanımlanabilir. Sürekli stokastik değışken olarak  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$  ,  $dz$  wiener prosesi olmak üzere

$$dx = a.dt + b.dz \quad (2.4.2)$$

olarak tanımlanır.

$\Delta x$  'in ortalaması:

$$E[\Delta x] = E[a.\Delta t + b.\Delta z] = a.\Delta t + b.E[\Delta z] = a.\Delta t \quad (2.4.3)$$

$\Delta x$  'in varyansı:

$$Var(\Delta x) = Var(a.\Delta t + b.\Delta z) = 0 + b^2.Var(\Delta z) = b^2.\Delta t \quad (2.4.4)$$

$a, b, \Delta t \in R$  olmak üzere  $\Delta z$  wiener prosesi olduğu için ortalaması (4)'ten  $E[\Delta z] = 0$  ve (5)'ten  $Var(\Delta z) = \Delta t$  'dır. Bir örnekle açıklamak gerekirse sürüklenme oranı,  $a= 2$  ve varyans oranı 3,  $b=\sqrt{3}$  olan genelleştirilmiş prosesine sahip x değışkeninin  $t=0$  daki değeri  $x_0=20$  ise bir yıl sonunda x ortalaması  $20 + 2.1 = 23$  varyansı ise  $3.1 = 3$  olan normal dağılıma sahiptir. 2 yıllık bir zaman dilimi için x değışkeni ortalaması  $20 + 2.2 = 24$ , varyansı  $3.2 = 6$  olan normal dağılıma sahiptir.

## 2.5. Hisse Senedi Fiyat Değişimlerinin Stokastik Modeli

Etkin piyasa varsayımlarından ilki olan geçmiş bilgilerin tamimiyle varlığın bugünkü fiyatına yansıtıldığı ve ikincisi varsayımı olan varlıkla ilgili her yeni bilginin etkisinin anında fiyata yansması varsayımları altında hisse senedi

fiyatlarının rassal olarak hareket etmesi gerektiği ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla varlık fiyatlarındaki değişimler sürüklenme oranı  $\mu$ , varyans oranı  $\sigma^2$  olan genelleştirilmiş wiener prosesi ile modellenenebilir.  $t$  anında varlığın fiyatının  $S$  olduğunu, çok küçük bir zaman dilimi  $dt$  sonrasında varlık fiyatındaki değişimi  $dS$  olmak üzere  $t+dt$  anındaki değeri  $S+dS$  olarak ifade edelim. Bu durumda varlığın çok küçük  $dt$  süresi sonundaki getirisi  $\frac{dS}{S}$ 'yi modelleyelim. Literatürdeki en genel yaklaşım bu getiriyi iki parça olarak incelemektedir. İlk kısım,  $\mu$  sürüklenme oranına sahip bir varlık  $dt$  süre sonunda  $\mu.dt$  kadar değişecektir. En basit modellerde sürüklenme oranı  $\mu$  sabit olarak kabul edilmektedir fakat  $\mu = \mu(S,t)$  şeklinde de modellenenebilir. İkinci kısım ise dış etkilerin sebep olduğu varlık fiyatlarındaki rassal değişimin neden olduğu etkidir. Bu etki ortalaması 0, varyansı 1 olan normal dağılım ile gösterilirse etkinin varlık getirisinde yaratacağı etki  $\sigma.dz$  olarak tanımlanır. Burada  $dz$ 'nin wiener prosesi olduğu unutulmamalıdır. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= \mu.dt + \sigma.dz \\ dz &= \varepsilon.dt \\ \varepsilon &\sim N(0,1)\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

denklem seti hisse senedi getirilerinin modellenmesi için kullanılan en kabul görmüş modeldir (Wilmott,1995).

## 2.6 Ito Prosesi

Ito prosesi sürüklenme oranı  $\mu$  ve varyans oranı  $\sigma^2$ 'nin zamanın ve değişkenin kendisinin fonksiyonu olan yani  $\mu = \mu(S,t)$  ve  $\sigma = \sigma(S,t)$  olan stokastik bir prosesidir. Matematiksel olarak bir  $S$  değişkeni

$$dS = \mu(S,t).dt + \sigma(S,t).dz\tag{2.6.1}$$

sürecini izliyorsa bu değişken Ito prosesine sahiptir. Ito prosesi wiener prosesi ve genelleştirilmiş wiener prosesini kapsamaktadır.  $\mu = 0$  ve  $\sigma = 1$  olduğunda (2.6.1) denklemi wiener prosesi olmakta,  $\mu = \text{sabit}$  ve  $\sigma = \text{sabit}$  olduğunda ise genelleştirilmiş wiener prosesi olmaktadır. (2.6.1) integrali alınırsa



$$S = S_0 + \int_0^t \mu(S, x).dx + \int_0^t \sigma(S, x).dz_x \quad (2.6.2)$$

‘dır.  $S_0$ , prosesin başlangıç değeridir. (2.6.1)’deki ikinci terimdeki  $dz$  wiener prosesi olduğu için bu denklemin sağ tarafındaki ikinci terim stokastik integraldir (Tsay,2002).

## 2.7 Ito Lemma

Türev ürünlerin modellemesinde stokastik diferansiyel denklemler kullanıldığı için yani stokastik değişkenler içerdiği için matematikte kullanılan integral kuralları ile çözümlenemez bu yüzden stokastik matematik kullanılmalıdır. Ito lemma 1951 yılında Japon matematikçi K. Ito tarafından geliştirilen stokastik matematikte kullanılan en önemli sonuçlardan biridir (Hull,2005).

$$dS = \mu(S, t).dt + \sigma(S, t).dz \quad (2.7.1)$$

S ito prosesine sahip stokastik bir değişken olmak üzere ve  $F=F(S,t)$  ise, Ito lemma S ve t’de ki çok küçük değişimlerin F’de yaratacağı değişimi ile aşağıdaki şekilde ilişkilendirir.

$$dF = (\mu(S, t). \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2(S, t). \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{\partial F}{\partial t}).dt + \sigma(S, t) \frac{dF}{dS} dz \quad (2.7.2)$$

(2.7.2)’den de görüldüğü gibi Ito Lemma aslında matematikte kullanılan zincir kuralının stokastik matematikteki versiyonudur.

### İspat:

S stokastik değişkeninin (2.7.1) denklemi ile tanımlanan Ito prosesine sahip olduğunu varsayalım. F fonksiyonu S ve t’nin fonksiyonu olmak üzere F’nin Taylor açılımı K kalan terimleri göstermek üzere;

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial S} \cdot \Delta S + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial t} \cdot \Delta S \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + K \quad (2.7.3)$$

şeklinde ifade edilir. (2.7.3) denklemi  $\Delta t \rightarrow 0$  durumunda inceleyim. (2.7.1)’in kesikli uzayda

$$\Delta S = \mu(S, t) \cdot \Delta t + \sigma(S, t) \cdot \Delta z \quad (2.7.4)$$

olarak ifade edilir.  $\Delta z$  wiener prosesi olduğuna göre:

$$\Delta S = \mu(S, t) \cdot \Delta t + \sigma(S, t) \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (2.7.5)$$

dir.

(2.7.3) denkleminin ilk terimi olan  $\frac{\partial F}{\partial S} \cdot \Delta S$  , (2.7.5) denkleminden görüldüğü gibi

$\Delta t$  'nin 1 ve  $\frac{1}{2}$  dereceden terimlerini içerdiği için bu terim ihmal edilemez.

(2.7.3) denkleminin ikinci terimi olan  $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \cdot \Delta t$  incelendiğinde ,  $\Delta t$  'nin 1. dereceden terimini ihtiva ettiği için bu terim ihmal edilemez.

(2.7.3) denkleminin üçüncü terimi olan  $\frac{1}{2} \frac{\partial^3 F}{\partial S^3} (\Delta S)^2$  incelenmesi için  $(\Delta S)^2$  'nin detaylı olarak incelenmesi gerekmektedir. Yazım kolaylığı açısından  $\mu(S, t) = \mu$  ve  $\sigma(S, t) = \sigma$  olarak alınırsa:

$$\begin{aligned} (\Delta S)^2 &= [\mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}]^2 \\ (\Delta S)^2 &= \mu^2 \cdot (\Delta t)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot \Delta t^{\left(\frac{3}{2}\right)} + \sigma^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

1. dereceden daha yüksek  $\Delta t$  dereceleri  $H(\Delta t)$  ile gösterilirse

$$(\Delta S)^2 = (\sigma^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \Delta t) + H(\Delta t) \quad (2.7.7)$$

elde edilir. (2.7.7) ifadesinden görüldüğü gibi  $(\Delta S)^2$  terimini içeren (2.7.3) denkleminin sağ tarafındaki üçüncü terim 1. dereceden  $\Delta t$  'yi içerdiği için ihmal edilemez. Bu terimin  $\Delta t \rightarrow 0$  nasıl davranacağı incelenirse:

$$E[\sigma^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \Delta t] = \sigma^2 \cdot \Delta t \quad (2.7.8)$$

$$Var(\sigma^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \Delta t) = E[\sigma^4 \cdot \varepsilon^4 \cdot (\Delta t)^2] - [E(\sigma^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \Delta t)]^2 = 2 \cdot \sigma^4 (\Delta t)^2 \quad (2.7.9)$$

elde edilir. Burada  $\varepsilon$  standard normal dağılıma sahip rassal değişken olduğundan  $E[\varepsilon] = 0$  ve  $Var(\varepsilon) = 1$  'dir. Varyans tanımı  $Var(\varepsilon) = E[\varepsilon^2] - E[\varepsilon]^2$  kullanılarak

$E[\varepsilon^2] = 1$  ve  $E[\varepsilon^4] = 3$  kullanılmıştır. Bu iki özellik ile  $\Delta t \rightarrow 0$  iken  $(\Delta S)^2 \rightarrow \sigma^2 \cdot dt$  olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Tsay,2002).

(2.7.3) denkleminin 4. ve 5. terimleri olan  $\frac{\partial^2 F}{\partial S \partial t} \cdot \Delta S \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (\Delta t)^2$  2 ve üstü derecelerde  $\Delta t$  ihtiva ettiği için bu terimlerin önemsiz sayılabilecek kadar küçük etkileri olduğundan ihmal edilebilir. Sonuç olarak (2.7.3) ifadesi  $\Delta t \rightarrow 0$  iken

$$dF = \frac{\partial F}{\partial S} \cdot dS + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma^2 dt \quad (2.7.10)$$

ifadesi elde edilir. (2.7.1) bu ifade de yerine yazılırsa;

$$dF = (\mu \cdot \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{\partial F}{\partial t}) \cdot dt + \sigma \frac{dF}{dS} dz \quad (2.7.11)$$

elde edilmiş olur.

Ito lemma F fonksiyonunun (2.7.11) prosesinin izlediğini göstermektedir.(2.7.11) denklemi incelendiğinde  $dz$  wiener prosesi olduğu içi F fonksiyonu sürüklenme oranı

$$(\mu \cdot \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{\partial F}{\partial t}) \quad (2.7.12)$$

Varyans oranı

$$(\sigma \frac{dF}{dS})^2 \quad (2.7.13)$$

olan Ito prosesine sahiptir.

Ito prosesinin hisse senedi fiyatları üzerine basit bir uygulamasını göstermek amacıyla fiyatların doğal logaritma serisini inceleyelim. S hisse senedi fiyatını göstermek üzere  $F = LN(S)$ 'dır. F sürekli bir fonksiyon olduğuna göre Ito lemma'yı uygulayabiliriz:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Bu bilgiler Ito lemma denkleminde yerine yazılırsa:

$$dF = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (2.7.14)$$

$dF = \frac{1}{S} . dS$  olduğuna göre sonsuz küçük bir dt zamanında hisse senedi fiyatında gerçekleşecek fiyat değişimi

$$dS = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) . S . dt + \sigma . S . dz \quad (2.7.15)$$

elde edilir.

(2.7.14) denklemi hisse senedi fiyatları ile ilgili önemli bir özelliği de ortaya çıkarmaktadır. (2.7.14)  $F = LN(S)$  olan F fonksiyonunun ortalaması  $\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ ,

varyansı  $\sigma^2$  olan normal dağılıma sahip olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla S yani hisse senedi fiyatlarının logaritması normal dağılıma sahip ise kendileri lognormal dağılıma sahiptir sonucuna ulaşılmaktadır ki bu sonuçta hisse senedi fiyatlarının normal dağılımdan daha kalın kuyruğa sahip olduğu ampirik sonucu ile örtüşmektedir.

### 3. BLACK SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA MODELİ

#### 3.1. Black- Scholes Diferansiyel Denklemi

Black-Scholes diferansiyel denklemi dayanak varlığı kar payı ödemeyen bir hisse senedini olan herhangi bir türev ürünün sağlaması gereken diferansiyel denklemdir. Bu bölümde söz konusu diferansiyel denklem risk nötr değerlendirme ve Ito lemma kullanılarak elde edilecektir. Black Scholes opsiyon fiyatlamasını dayanak varlığın fiyatına bağlı olarak oluştururken hisse senedi ve opsiyon piyasası için bir takım “ideal koşullar” tanımlamışlardır. Bu koşullar:

1. Kısa vadeli faiz oranlarını belirli ve sabit olduğu.
2. Dayanak varlığı olan hisse senedi sürüklenme oranı  $\mu$  ve varyans oranı  $\sigma^2$  sabit olan  $dS = \mu.S.dt + \sigma.S.dz$  stokastik prosesini izlediği.
3. Hisse senedinin türev ürününün vade sonuna kadar kar payı dağıtmadığı.
4. Opsiyon tipinin Avrupa tipi opsiyon olduğu yani vadesi dolmadan opsiyonun uygulanamayacağı.
5. Hisse senedi ve opsiyon sözleşmesi alım-satımı sırasında işlem maliyetinin sıfır ve sürekli olduğu.
6. Borçlanma oranının kısa vadeli risksiz faiz oranına eşit olduğu ve açığa satışa her oranda izin verildiği.
7. Risksiz arbitraj fırsatlarının olmadığı

olarak tanımlanmıştır. Bu varsayımlar ile opsiyon fiyatlama modelinin değişken olarak sadece hisse senedi fiyatı ve zamana bağlı olması sağlanmıştır (Black,Scholes,1973).

Bu varsayımlar altında opsiyonun değeri sadece hisse senedi ve zamana bağlı olarak değiştiği için opsiyonda uzun pozisyon ,söz konusu opsiyona dayanak varlık olan hisse senedinde kısa pozisyon alınarak risksiz getiri elde edilebilir.

Varsayım 1’den hisse senedinin

$$dS = \mu.S.dt + \sigma.S.dz$$

genelleştirilmiş wiener prosesi izlediği takip ettiği için opsiyonun fiyatını  $f = f(S, t)$  olarak tanımlanırsa, hisse senedi fiyatındaki sonsuz küçüklükteki bir değişimi Ito lemma yardımıyla

$$df = (\mu.S \cdot \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}) \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot \frac{df}{dS} dz \quad (3.1.2)$$

şeklinde ifade ederiz. (3.1.1) ve (3.1.2) denklemlerinden görüldüğü gibi bu denklemlerde rastsallığı yaratan tek terim  $dz$  'dır. Dolayısıyla 1 adet opsiyon ve bu opsiyonun dayanak varlığı olan  $\Delta$  adet hisse senedinde kısa pozisyon alınan öyle bir portföy oluşturmaya çalışalım ki  $dz$  terimini yok ederek portföyün getirisini risksiz ve kesin olarak bilelim. Portföyün değeri  $\Pi$  olarak gösterilirse:

$$\Pi = f - \Delta S \quad (3.1.3)$$

Sonsuz küçük bir zaman diliminde portföyün değerindeki değişim:

$$d\Pi = df - \Delta dS \quad (3.1.4)$$

dir. Burada  $\Delta$  'nin sonsuz küçük bir zaman diliminde sabit olduğu varsayılmaktadır. (3.1.1) ve (3.1.2) ifadelerini (3.1.4)'de yerine yazılırsa:

$$d\Pi = (\mu.S \cdot \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}) \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot \frac{df}{dS} dz - \Delta \cdot (\mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz) \quad (3.1.5)$$

(3.1.5) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa:

$$d\Pi = \sigma \cdot S \cdot (\frac{df}{dS} - \Delta) \cdot dz + (\mu \cdot S \cdot \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} - \Delta \cdot S \cdot \mu) \cdot dt \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) denkleminde rastsallığa yani belirsizliğe yol açan terim  $dz$ 'dir. Bu terimin yok edilmesi belirsizliğin ve riskin ortadan kaldırılması anlamına geleceğinden  $dz$ 'nin katsayısı sıfıra eşitlenirse:

$$\sigma \cdot S \cdot (\frac{df}{dS} - \Delta) = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{df}{dS} \quad (3.1.7)$$

olarak bulunur. Yani dayanak varlık olan hisse senedinden  $\frac{df}{dS}$  adet kısa pozisyon alınırsa risksiz bir portföy oluşturulmuş olur. Portföyün getirisi hisse senedi fiyatındaki değişimlerden ve değişimin yönünden bağımsızdır. Kısaca portföyün getirisi ile hisse senedinin getirisi arasındaki kovaryans sıfırdır. Sonuç olarak portföyün sonsuz küçük zaman periyotlarındaki değişimi tamamen deterministik ve

$$d\Pi = \left( \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \cdot dt \quad (3.1.8)$$

olarak ifade edilir. Varsayım 7'den piyasada risksiz arbitraj fırsatları olmadığı bilindiği için  $\Pi$  portföyünün getirisi risksiz finansal varlığın getirisine eşit olmalıdır. Eğer risksiz getiri oranını  $r$  ile gösterirsek,  $\Pi$  miktarlık yatırımın sonsuz küçük bir zaman dilimindeki getirisi

$$r \cdot \Pi \cdot dt \quad (3.1.9)$$

olarak ifade ederiz. 1 adet opsiyonda uzun pozisyon, dayanak varlıkta  $\Delta = \frac{df}{dS}$  adet kısa pozisyon alınarak oluşturulan risksiz portföyün getirisinin risksiz finansal varlığa yapılan yatırımın getirisine eşit olmalıdır:

$$\left( \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \cdot dt = r \cdot \Pi \cdot dt \quad (3.1.10)$$

$\Pi$  ve  $\Delta$  'yı yani (3.1.3) ve (3.1.7) denklemlerini (3.1.10)'da yerine yazarsak:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + r \cdot S \cdot \frac{\partial f}{\partial S} - r \cdot f = 0 \quad (3.1.11)$$

çok bilinen Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. Diferansiyel denklemin çıkarılışında  $\Delta$  'nın sonsuz küçük bir zaman diliminde sabit olduğu varsayımı ile oluşturulan portföyün risksiz getiriye sahip olması için riskten korunmanın sürekli olması yani dinamik olarak oluşturulması gerekmektedir. Deltanın belirlenmesi çoğu zaman opsiyon fiyatının belirlenmesinden daha önemli olabilir. Çünkü türev ürünlerin asıl amacı riskten korunma amaçlı olduğu için deltanın doğru olarak belirlenmesi daha çok önem kazanmaktadır. Elde edilen

Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemi sınır ve final koşullarına göre değişen pek çok çözümü vardır. Ayrıca şu noktaya da dikkat çekmek önemlidir. (3.1.11)'den görüldüğü gibi diferansiyel denklem  $\mu$  içermemektedir. Yani opsiyon fiyatı yatırımcı tercihlerinden bağımsızdır. İki ayrı yatırım tercihlerine sahip iki farklı yatırımcı opsiyon fiyatı her ikisi içinde aynıdır. İki yatırımcı ilgili hisse sendi fiyatı üzerinde anlaşamaları bile opsiyon fiyatı her ikisi içinde aynıdır.

### 3.2 Avrupa Tipi Call Opsiyonunun Analitik Çözümü

Kısmi diferansiyel denklemler sınır koşulları ve final koşullarına göre pek çok değişik çözüme sahiptir. Bu nedenle bir önceki bölümde elde edilen Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemi opsiyonun tipine ve özelliklerine göre farklı sınır ve final koşullarına sahip olacağı için her farklı opsiyon tipi için farklı çözüm yolları gerektirmektedir. Ayrıca eklemek gerekir ki bu diferansiyel denklem her sınır ve final koşulunda o tip opsiyon için kapalı formda bir çözüm üretememekte, çoğunlukla nümerik metotlara ihtiyaç duyulmaktadır.  $C(S,t)$  Avrupa tipi call opsiyonun değerini,  $E$  uygulama fiyatını,  $T$  vadesini,  $S$  dayanak varlığı göstermek üzere sınır koşulları

$$\begin{aligned} C(S, T) &= \max(S - E, 0) \\ C(0, t) &= 0 \\ S \rightarrow \infty \quad C(S, t) &\sim S \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

şeklinde olan call opsiyonun analitik çözümü

$$C(S, t) = S.N(d_1) - E.e^{-r(T-t)}.N(d_2) \tag{3.2.2}$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{E} + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \tag{3.2.3}$$

$$d_1 = d_2 + \sigma \sqrt{T - t} \tag{3.2.4}$$



### İspat:<sup>1</sup>

(3.1.11) Black-Scholes diferansiyel denklemini çözmek için  $S$  ve  $T$ 'ye bağlı  $C(S,t)$  fonksiyonun  $S$  ve  $t$  'ye bağlı olan başka bir  $y$  fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki dönüşüm yapılır (Black, Scholes, 1973).

$$C(S,t) = e^{r(t-T)} y \left[ \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left[ \ln \frac{S}{E} - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t-T) \right] - \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 (t-T) \right]$$

### (3.2.5)

Bu dönüşümü tamamlayabilmek için  $\frac{\partial C}{\partial t}, \frac{\partial C}{\partial S}, \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$  terimlerinin de  $y$  cinsinden ifade edilmesi için zincir kuralı kullanılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ e^{r(t-T)} \left( -2r\sigma^2 y + (-2r + \sigma^2)^2 \left( \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial S} \right) \right) \right] \quad (3.2.6)$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = -\frac{1}{S\sigma^2} \left[ e^{r(t-T)} (-2r + \sigma^2) \cdot \frac{\partial y}{\partial S} \right] \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2\sigma^2} \left[ e^{r(t-T)} (-2r + \sigma^2) \left( \sigma^2 \frac{\partial y}{\partial S} + (-2r + \sigma^2) \frac{\partial^2 y}{\partial S^2} \right) \right] \quad (3.2.8)$$

(3.2.6), (3.2.7) ve (3.2.8) denklemleri (3.1.11) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial S^2} \quad (3.2.9)$$

kısmi diferansiyel denklem elde edilmiş olur. (3.2.1) sınır koşulları  $C(S, t)$  fonksiyonu için geçerli olduğundan  $y$  fonksiyonu için yeni sınır koşullarının elde edilmesi gerekmektedir. Bunun için

$$u = \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \ln \frac{S}{E}$$

---

<sup>1</sup> Bu kısım Jonathan William Anderson(1999) , “The Black-Scholes Option Pricing Model and Assumptions” başlıklı yüksek lisans tez çalışmasından alınmıştır.

kısaltması yapılırsa vade sonunda yani  $t=T$

$$y(u,0) = 0 \quad u < 0$$

$$y(u,0) = E \cdot \left[ e^{\frac{u \left( \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)} - 1} \right] \quad u \geq 0 \quad (3.2.10)$$

(3.2.9) ve (3.2.10) denklemleri ile ifade edilen yeni diferansiyel denklem fizik konularında çok iyi bilinen ısı transferi diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$y(u,s) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\frac{u}{\sqrt{2s}}}^{\infty} E \cdot \left[ e^{\frac{(u+q\sqrt{2s}) \left( \frac{\sigma^2}{2} \right)}{r - \frac{\sigma^2}{2}} - 1} \right] e^{-\frac{q^2}{2}} dq \quad (3.2.11)$$

Yukarıdaki integralin alt limiti (3.2.10) ifadesindeki sınır koşullarından bulunabilir:

$$u + q\sqrt{2s} \geq 0 \Rightarrow q > -\frac{u}{\sqrt{2s}} \quad (3.2.12)$$

denklem (3.2.11) ile elde edilen  $y$  fonksiyonu,  $C(S,t)$  fonksiyonunun  $y$  fonksiyonuna dönüştürüldüğü denklem olan (3.2.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$C(S,t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-d_2}^{\infty} \left[ S \cdot e^{\frac{1}{2}(q - \sigma\sqrt{T-t})^2} - E \cdot e^{\frac{-q^2}{2}} \right] dq \quad (3.2.13)$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{E} + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (3.2.14)$$

(3.2.13) integrali  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$  olmak üzere iki integralin farkı şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$C(S, t) = \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1 + \sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(q - \sigma\sqrt{T-t})^2} dq - \frac{E.e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-q^2/2} dq \quad (3.2.15)$$

Kümülatif normal dağılım fonksiyonu

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \quad (3.2.16)$$

olmak üzere (3.2.15) denkleminde uygun yerleri tanımlamada kullanılırsa:

$$C(S, t) = S.N(d_1) - E.e^{-r(T-t)}.N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

çok bilinen avrupa tipi call opsiyon analitik formülü elde edilmiş olur.

### 3.3 Black-Scholes Modelinin Performansı, İma Edilen Oynaklık, Oynaklık Gülümsemesi

Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeli geliştirildikten sonra modelin performansını ölçmek amacıyla pek çok çalışma yapılmıştır. Modelin ürettiği opsiyon fiyatları ile piyasada oluşan opsiyon fiyatları karşılaştırıldığında Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin dayanak varlığın oynaklığına bağlı olarak sistematik yanlış fiyatlamalar yaptığı gözlenmiştir. Black-Scholes modelinin yüksek oynaklığa sahip dayanak varlıklar üzerine yazılmış opsiyonların fiyatlarının olması gerekenden yüksek, düşük oynaklığa sahip dayanak varlıklar üzerine yazılmış opsiyonların fiyatlarının olması gerekenden düşük olarak bulunduğu görülmüştür. Bunu nedeni olarak geçmiş veriler kullanılarak hesaplanan oynaklığın kullanılmasının yetersiz kalması ve daha doğru oynaklık modellemeleri ile bu sistematik fiyatlama hatalarının düzeltilebileceği ileri sürülmüştür (Black, Scholes, 1972). Örneğin finansal varlıkların zaman serileri üzerinde yapılan ampirik çalışmalar oynaklığın durağan olmadığı, zaman içinde oynaklığın değişkenlik

gösterdiği ve oynaklık kümelenmesi özelliklerine rastlanmıştır. Bu özellikleri barındıracak oynaklık hesapları ile opsiyon fiyatlamasının yapılması fiyatlama performansını artıracaktır.

Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin performansı değerlendirmeye başlandığında opsiyon literatüründe önemli bir kavram olan ima edilen oynaklık “implied volatility” ‘tır.

Araştırmacılar bundan yola çıkarak piyasalarda oluşan opsiyon fiyatlarının Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinden elde etmek için kullanılması gereken oynaklığını hesaplamıştır. Bu yöntemle ulaşılan oynaklık değeri ima edilen oynaklık olarak adlandırılmaktadır. Black-Scholes modeli kullanılarak elde edilen opsiyon fiyatları vade günü ve uygulama fiyatı farklılıklarına bakılmaksızın aynı ve sabit oynaklık değerine dayanmaktadır. Fakat yapılan çalışmalar farklı vade günü ve farklı uygulama fiyatlarına sahip opsiyonlar için farklı oynaklık değerleri bulunmuştur. Macbeth ve Merville (1979) yaptıkları çalışmada ima edilen oynaklık ile uygulama fiyatı arasındaki , oynaklık ile vade arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Tablo 3.3.1 söz konusu çalışmadan alınmıştır. Tablo 3.3.1’den görüldüğü gibi ima edilen oynaklık günden güne değişmektedir. Örneğin 11.06.1976 tarihindeki uygulama fiyatı 240\$, vadesi Ocak olan opsiyon fiyatına göre hesaplanan ima edilen volatilité 0,01431 iken 14.06.1976 tarihindeki ima edilen oynaklığı 0,01540’tır. Ayrıca aynı gün içinde farklı aynı dayanak varlık üzerine yazılan opsiyonun uygulama fiyatı arttıkça ima edilen oynaklık düşmektedir. Örneğin 10.06.1979 tarihli, Temmuz vadeli, uygulama fiyatları 200\$, 220\$, 240\$, 260\$, 280\$ olan opsiyonların ima edilen oynaklıkları sırasıyla 0.02103, 0.01730, 0.01362, 0.1118, 0.00980’ dir. Ayrıca vade günü ile ima edilen oynaklık arasında da bir ilişkinin varlığı göze çarpmaktadır. Karda “in-the-money” durumdaki yani uygulama fiyatının spot fiyattan küçük olduğu durumlarda kısa vadeli opsiyonlar, uzun vadeli opsiyonlara göre daha büyük oynaklık değerine sahiptir. Örneğin 10.06.1976 tarihinde 260\$ ve 280\$ uygulama fiyatlı, Ocak vadeli opsiyonların ima edilen oynaklıkları sırasıyla 0.01263, 0.01154 iken Temmuz vadeli ima edilen oynaklıkları sırasıyla 0.0118 ve 0.00980’ dir. Ayrıca zararda “out-of-money” durumdaki yani uygulama fiyatının spot fiyatın üstünde olduğu durumlarda ise kısa vadeli opsiyonlar uzun vadeli opsiyonlara göre daha düşük oynaklık değerlerine sahiptir (Macbeth , Merville, 1979).

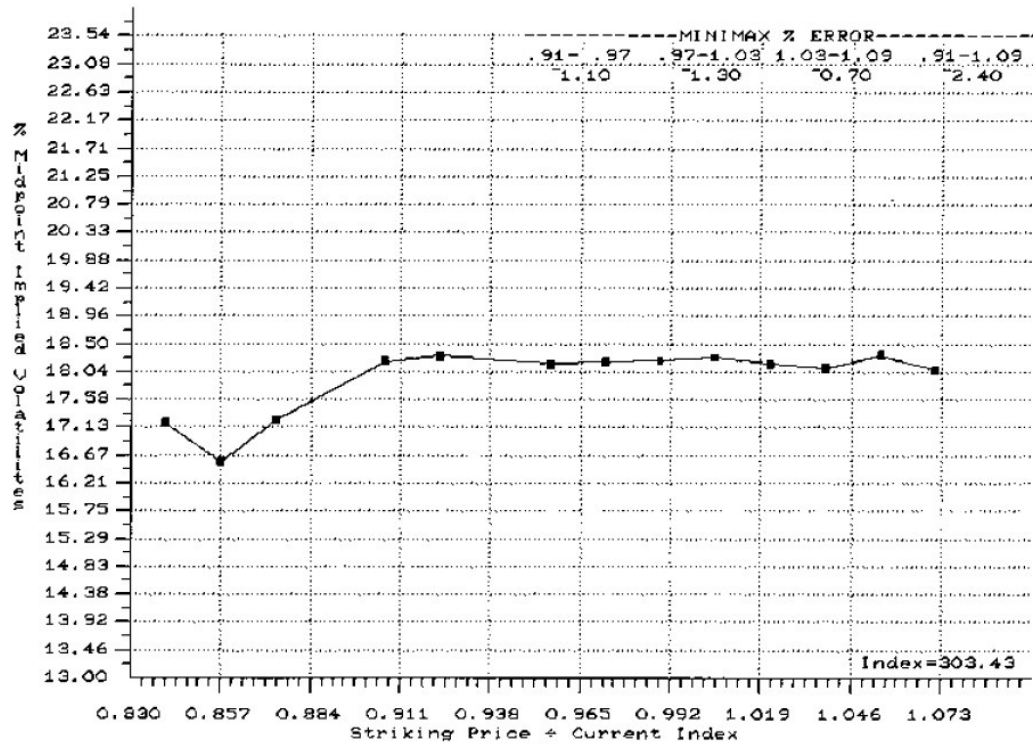
**Tablo 3.3.1:** IBM opsiyon fiyatları kullanılarak hesaplanan ima edilen oynaklık

| Date      | Exercise Price | January | April | July    | October | Stock Price |
|-----------|----------------|---------|-------|---------|---------|-------------|
| 1006.1976 | 200.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02103 | 0.0     | 255.12      |
| 1006.1976 | 220.00         | 0.0     | 0.0   | 0.01730 | 0.01655 | 255.12      |
| 1006.1976 | 240.00         | 0.01412 | 0.0   | 0.01362 | 0.01423 | 255.12      |
| 1006.1976 | 260.00         | 0.01263 | 0.0   | 0.01118 | 0.01254 | 255.12      |
| 1006.1976 | 280.00         | 0.01154 | 0.0   | 0.00980 | 0.01164 | 255.12      |
| 1106.1976 | 200.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02900 | 0.0     | 257.75      |
| 1106.1976 | 220.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02087 | 0.01674 | 257.75      |
| 1106.1976 | 240.00         | 0.01431 | 0.0   | 0.01567 | 0.01496 | 257.75      |
| 1106.1976 | 260.00         | 0.01304 | 0.0   | 0.01080 | 0.01272 | 257.75      |
| 1106.1976 | 280.00         | 0.01158 | 0.0   | 0.00979 | 0.01153 | 257.75      |
| 1406.1976 | 200.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02841 | 0.0     | 260.25      |
| 1406.1976 | 220.00         | 0.0     | 0.0   | 0.01931 | 0.01869 | 260.25      |
| 1406.1976 | 240.00         | 0.01540 | 0.0   | 0.01472 | 0.01542 | 260.25      |
| 1406.1976 | 260.00         | 0.01289 | 0.0   | 0.01066 | 0.01282 | 260.25      |
| 1406.1976 | 280.00         | 0.01169 | 0.0   | 0.01016 | 0.01164 | 260.25      |
| 1506.1976 | 200.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02865 | 0.0     | 259.00      |
| 1506.1976 | 220.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02413 | 0.01727 | 259.00      |
| 1506.1976 | 240.00         | 0.01498 | 0.0   | 0.01588 | 0.01502 | 259.00      |
| 1506.1976 | 260.00         | 0.01316 | 0.0   | 0.01072 | 0.01317 | 259.00      |
| 1506.1976 | 280.00         | 0.01173 | 0.0   | 0.01063 | 0.01174 | 259.00      |
| 1606.1976 | 200.00         | 0.0     | 0.0   | 0.03368 | 0.0     | 262.37      |
| 1606.1976 | 220.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02542 | 0.01947 | 262.37      |
| 1606.1976 | 240.00         | 0.01519 | 0.0   | 0.01630 | 0.01584 | 262.37      |
| 1606.1976 | 260.00         | 0.01287 | 0.0   | 0.01068 | 0.01303 | 262.37      |
| 1606.1976 | 280.00         | 0.01172 | 0.0   | 0.01018 | 0.01132 | 262.37      |
| 1706.1976 | 200.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02794 | 0.0     | 267.50      |
| 1706.1976 | 220.00         | 0.0     | 0.0   | 0.01398 | 0.01490 | 267.50      |
| 1706.1976 | 240.00         | 0.01358 | 0.0   | 0.01108 | 0.01335 | 267.50      |
| 1706.1976 | 260.00         | 0.01248 | 0.0   | 0.00820 | 0.01220 | 267.50      |
| 1706.1976 | 280.00         | 0.01140 | 0.0   | 0.00683 | 0.01097 | 267.50      |
| 1806.1976 | 200.00         | 0.0     | 0.0   | 0.03929 | 0.0     | 266.25      |
| 1806.1976 | 220.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02627 | 0.01835 | 266.25      |
| 1806.1976 | 240.00         | 0.01463 | 0.0   | 0.01790 | 0.01568 | 266.25      |
| 1806.1976 | 260.00         | 0.01323 | 0.0   | 0.01087 | 0.01299 | 266.25      |
| 1806.1976 | 280.00         | 0.01206 | 0.0   | 0.01163 | 0.01182 | 266.25      |
| 2106.1976 | 200.00         | 0.0     | 0.0   | 0.03496 | 0.0     | 270.50      |
| 2106.1976 | 220.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02514 | 0.01650 | 270.50      |
| 2106.1976 | 240.00         | 0.01374 | 0.0   | 0.01733 | 0.01632 | 270.50      |
| 2106.1976 | 260.00         | 0.01305 | 0.0   | 0.01254 | 0.01324 | 270.50      |
| 2106.1976 | 280.00         | 0.01207 | 0.0   | 0.01186 | 0.01196 | 270.50      |
| 2206.1976 | 200.00         | 0.0     | 0.0   | 0.04245 | 0.0     | 268.75      |
| 2206.1976 | 220.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02312 | 0.02017 | 268.75      |
| 2206.1976 | 240.00         | 0.01658 | 0.0   | 0.01412 | 0.01346 | 268.75      |
| 2206.1976 | 260.00         | 0.01336 | 0.0   | 0.01066 | 0.01228 | 268.75      |
| 2206.1976 | 280.00         | 0.01163 | 0.0   | 0.01133 | 0.01137 | 268.75      |
| 2306.1976 | 200.00         | 0.0     | 0.0   | 0.03953 | 0.0     | 271.50      |
| 2306.1976 | 220.00         | 0.0     | 0.0   | 0.02708 | 0.01796 | 271.50      |
| 2306.1976 | 240.00         | 0.01309 | 0.0   | 0.01883 | 0.01555 | 271.50      |
| 2306.1976 | 260.00         | 0.01317 | 0.0   | 0.01119 | 0.01374 | 271.50      |
| 2306.1976 | 280.00         | 0.01212 | 0.0   | 0.01199 | 0.01203 | 271.50      |

(Macbeth, Merville, 1979, sayfa 1176)

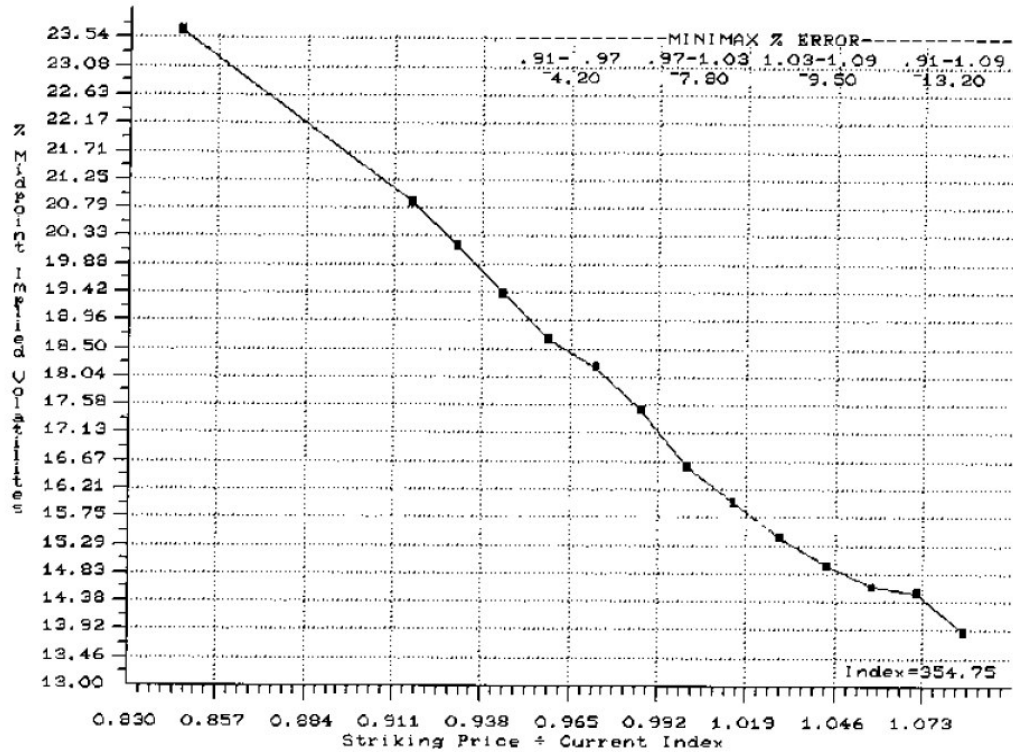
Bir varlık için birden çok oynaklık değerinin varlığı nasıl açıklanabilir. Burada Black-Scholes modelinin opsiyon fiyatının belirlenmesinde gerekli olan tüm faktörleri içermediği sonucu çıkmakta ve oynaklığın ise oynaklık dışında modelde bulunmayan diğer faktörlerinde etkisini barındıran (catch-all term) bir değişkene dönüşmesine neden olmaktadır. Hatta literatürde aynı dayanak varlık üzerinde farklı zaman aralıklarındaki veriler kullanılarak yapılan değerlendirmelerinin birbirinin tersi sonuçlar verdiği görülmekte ve bunlar oynaklığın stokastik özelliğine bağlanmaktadır (Macbeth , Merville, 1979).

Amerika’da 1987 yılındaki krizden önce yapılan çalışmalarda ima edilen oynaklık ve uygulama fiyatı arasında ilişkinin minimum noktasının spot fiyat/uygulama fiyat oranının yaklaşık olarak 1’e eşit olduğu noktalarda gerçekleşen U biçiminde bir eğri olduğu görülmüştür ve şeklinden dolayı oynaklık gülümsemesi “volatility smile” olarak adlandırılmıştır. Şekil3.3.1 1987 öncesi oynaklık gülümsemesinin göstermektedir (Poon, 2005).



**Şekil 3.3.1:** 1987 krizi öncesi S&P 500 endeks opsiyonunun ima edilen oynaklık ve uygulama fiyatı arasındaki ilişkinin grafiği (Rubinstein, 1994, s.776)

1987 yılından sonra yapılan çalışmalar ima edilen oynaklık ile uygulama fiyatı arasındaki ilişki spot fiyat/uygulama fiyatı oranının zarar (out-of-money) durumundan, spot fiyat/uygulama fiyatı'nın bire eşit olması yani başa baş noktasına (at-the-money) kadar monoton azalan bir fonksiyon halini almış ve bu ilişki de oynaklık sırtması "volatility smirk" olarak nitelendirilmektedir (Poon,2005). Şekil 3.3.2, 1987 krizi sonrası ima edilen oynaklık ve uygulama fiyatı/spot fiyat oranı arasındaki ilişki resmedilmiştir.



**Şekil 3.3.2:** 1987 krizi sonrası S&P 500 endeks opsiyonunun ima edilen oynaklık ve uygulama fiyatı arasındaki ilişkinin grafiği (Rubinstein, 1994, s.776)

Literatürde oynaklık gülümsemesini veya oynaklık sırtmasını yada genel olarak ima edilen oynaklık ile uygulama fiyatı arasındaki ilişkinin nedenlerini araştırmaya ve bir takım modeller geliştirilerek opsiyon fiyatlama modellerinin performansını arttırmaya yönelik pek çok çalışma örneğin Rubinstein (1994), Jackwerth ve Rubinstein (1996), Masson and Perrakis (2000), Malz (1997), Duan (1996), Dumas (1998) yapılmıştır. İma edilen oynaklık aslında Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin modele alınmayan fakat opsiyon fiyatlarını etkileyen tüm etkileri barındırdığı için geliştirilen modeller ima edilen risksiz olasılık dağılımının "implied

volatility distribution“ hesaplanması temeline dayanmaktadır. Opsiyon fiyatlamasının geçmiş opsiyon verilerine dayanarak elde edilen olasılık dağılımına göre modellenmesi oynaklık gülümsemesini yaratan tüm bilgilerin modele aktarılması anlamına gelmektedir.



#### 4. LİTERATÜR

Finans literatüründe önemli dönüm noktalarından biri olan Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinden sonra opsiyon fiyatlama modelleri üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Black-Scholes modeli için yapılan varsayımların pratikte karşılaşılan durumlarla örtüşmemesi ve sistematik yanlış fiyatlamalara neden olması, opsiyon sözleşmelerinin erken uygulama gibi değişik spesifikasyonlar içerdiği durumlarda analitik çözümünün elde edilememesi gibi sorunlara çözüm bulabilmek için pek çok yöntem geliştirilmiştir. Çalışmaların önemli bir bölümü Black-Scholes modelindeki sabit varyans varsayımının üzerinde çalışmış ve finansal zaman serilerinin ampirik çalışmalarında görülen değişken varyans özelliğini kapsayacak yeni opsiyon fiyatlama modelleri oluşturulmuştur. Bazı çalışmalara da hisse senedi fiyat hareketlerinin sürekli uzayda modellenmesinin tam olarak pratik verilerle uyuşmadığı gerçeğinden yola çıkarak dayanak varlığın fiyat hareketlerini sürekli ve sıçramalı prosesler olarak modelleyerek yeni opsiyon fiyatlama modelleri elde edilmiştir.

Merton(1975) Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin kritik varsayımlarından biri olan alım-satım işlemlerinin sürekli olması ve hisse senedi fiyatının sürekli uzayda modellenmesinin hisse senedi fiyat hareketleri ile örtüşmediği gerçeğine dayanak, hisse senedi fiyat hareketlerini sürekli uzayda sıçramalı stokastik proses ile modellemiştir. Sıçramalı stokastik proses olarak modelleme hisse senedi fiyat hareketlerinde görülen büyük pozitif veya negatif değişimlere izin vermektedir ki bu da Black-Scholes modelinde varsayılan sabit varyanslı lognormal dağılımdan daha çok dışa düşene “outlier” sahip hisse senedi fiyat hareketlerinin modellenmesi için daha uygun olmaktadır. Hisse senedi fiyat hareketlerinde görülen sıçramanın firmaya özgü bilgilerin piyasada yarattığı etki olarak görülmüştür . Dolayısıyla model değişken varyanslı opsiyon fiyatlama modelidir. Çünkü firmaya özgü risklerin diğer bir tanımıyla sistematik olmayan risklerin ortaya çıkması durumunda hisse senedi fiyat hareketine sıçrama etkisi yansıyacağından varyans artacak, sıçramanın olmadığı

durumda varyansta bir değişme yaşanmayacaktır. Fakat Ball ve Torous (1985) firmaya özgü bilgilerin yani özel durumların yarattığı sıçramaların opsiyon fiyatı üzerinde çok etkili olmadığını Merton (1976) ile Black-Scholes modeli ile elde edilen opsiyon fiyatları arasında küçük fiyat değişiklikleri olduğunu göstermiştir.

Rubinstein (1983) opsiyon fiyatlama modeli oluştururken opsiyonun dayanak varlığı olan firmanın sermaye yapısını göz önünde bulundurularak oluşturulmuştur. Firmanın sermaye yapısını risksiz varlıklar (bono, tahvil) ve riskli varlıklar (hisse senedi) olmak üzere iki ana grup altında toplayarak riskli varlıkları Black-Scholes modelinde olduğu gibi lognormal yayılım prosesi ile risksiz varlıkları yıllık efektif büyüme oranı  $(r-1)$  ile modellemiştir. Modelin Black-Scholes modelinden üstün pek çok özelliği bulunmaktadır. Öncelikle modelde sabit varyans varsayımı bulunmamakta, varyans değişkenlik göstermektedir. Firma yapısı incelenirken riskli ve risksiz varlıklar olarak iki ana kısım da incelendiği için firma değerindeki değişim bu kısımlardaki değişimlerden etkilenecektir. Örneğin firmanın risksiz varlıklarının firma oranı %50 'den %30'a düşerse firmanın oynaklığı risksiz varlıkların oranının artmasından dolayı artacaktır. Sonuç olarak oynaklık kendini risksiz ,riskli varlıkların firma sermaye yapısındaki oranına göre ayarlayacak yani değişkenlik gösterecektir. İkinci önemli avantajı ise kar payı dağıtımının sabit bir oran olarak modele eklenmesi Black-Scholes modeline eklenen sabit kar payı miktarından daha gerçekçi bir modelleme olacağı açıktır.

Hull ve White (1987) Black-Scholes modelindeki gözlenemeyen tek değişken olan oynaklığın sabit olarak varsayılmasının modelin sistematik yanlış fiyatlamalara yol açtığı için oynaklığı stokastik bir proses olarak modelleyerek yeni bir opsiyon fiyatlama modeli geliştirmişlerdir. Hem hisse senedi fiyat hareketleri hem de oynaklık genelleştirilmiş wiener prosesi ile modellenerek oynaklığın hisse senedi fiyat değişimleri ile korelasyona sahip olması ve olmaması durumları için çözüm geliştirilmişlerdir. Oynaklık ile hisse senedi fiyat değişimleri arasındaki korelasyonun sıfır olması durumunda seri formunda çözüm üretebilirken, korelasyonun varlığı durumunda problem kompleks bir hale geldiği için nümerik metotlarla çözüme ulaşılabilmektedir. Modelin fiyatlama performansını değerlendirmek için yapılan uygulamada oynaklığın , hisse sendi fiyatı ile ilişkili olmadığı durumda yani  $\rho = 0$  durumunda derin-zararda (deep out-of-money) ve derin-karda (deep in-the-money) durumlarında stokastik opsiyon fiyatlama modelinin seri çözümü ile elde edilen

fiyatlar Black-Scholes modeli ile elde edilen fiyatlardan oldukça düşük, başa-baş ( at-the-money) durumda ise Black-Scholes fiyatından oldukça yüksek olarak bulunmuştur. Oynaklık ile hisse sendi fiyatı arasında bir ilişkinin varlığı yani  $\rho \neq 0$  olduğu durumda spot fiyat/uygulama fiyatı (S/X) oranı 0.9 ile 1.1 arasında değişecek şekilde incelenme yapılmıştır. Oynaklığın hisse senedi fiyatı ile pozitif ilişkili yani  $\rho > 0$  olduğu durumda hisse senedi fiyatı arttıkça Black Scholes fiyatı ile arasındaki fark büyüklük olarak azalmaktadır. Zarar durumundaki opsiyonlarda yani (S/X < 1) olduğu durumda Black-Scholes'dan daha fazla bir fiyat ,kar durumundaki opsiyonlarda yani (S/X > 1) olduğu durumda stokastik model Black-Scholes fiyatından daha düşük bir fiyatlama yapmaktadır. Başa baş noktasında yani Black-Scholes modelinin doğru fiyatlama yaptığı noktada model Black-Scholes fiyatından çok ufak bir farkla daha düşük fiyatlama yapmaktadır. Oynaklığın hisse senedi fiyatı ile negatif ilişkili olduğu durumda yani  $\rho < 0$  iken pozitif ilişkili olduğu durumda elde edilen sonuçların tam tersi sonuçlar elde edilmiştir. Zarar durumundaki opsiyonlarda modelin fiyatlamasının Black-Scholes fiyatından düşük, kar durumundaki opsiyonlarda ise Black-Scholes fiyatından yüksek fiyatlama yaptığı görülmüştür. Bütün  $\rho$  değerleri için S/X oranı sonsuza gittikçe Black-Scholes ve stokastik model arasındaki farkın mutlak yüzdesi sıfıra yakınsamaktadır. Bu genel sonuçların bütün vade uzunluklarında geçerli olduğu görülmüştür.

Oynaklık ile hisse senedi fiyatı arasındaki korelasyonun pozitif ve negatif olmasına göre görülen fiyatlama farklılıklarının sebebi hisse senedi fiyat dağılımı ile ilgilidir. Korelasyonun pozitif olduğu durumda oynaklık arttıkça hisse senedi fiyatı artacağından hisse senedi fiyatında büyük çaplı pozitif değişimler görülme olasılığı artacaktır ki hisse senedi fiyatının yüksek seviyelere çıkması oynaklığın sabit alındığı duruma göre artmış olacaktır. Aynı şekilde oynaklık azaldıkça hisse senedi fiyatının düşük olma olasılığı oynaklığın sabit olduğu duruma göre artacaktır. Yani hisse senedi fiyat dağılımı, lognormal dağılımdan daha sağa yatık bir dağılımdır. Aynı şekilde oynaklık ile hisse senedi fiyatı arasındaki ilişki negatif olduğunda oynaklık arttıkça hisse senedi fiyatının yüksek fiyatlara ulaşma olasılığının düşeceği ve oynaklık azaldıkça hisse senedi fiyatı düşük seviyelere inme olasılığının azalacağı bir durum söz konusu olacaktır. Bu da hisse senedi fiyatının lognormal dağılımdan daha dik bir dağılıma sahip olması anlamına gelmektedir.

Scott (1987) çalışmasında da Hull ve White(1987) de modellendiği gibi varyansı stokastik olarak modelleyerek yeni bir opsiyon fiyatlama modeli elde etmiş ve stokastik oynaklık ile modelin daha kompleks bir yapıya geldiği için analitik çözüm üretilmemiş ve çözüm için nümerik metotların kullanılmıştır. Çalışma sonunda yapılan uygulamada modelin gerçek opsiyon fiyatlarına daha yakın sonuçlar ürettiği fakat Black-Scholes modelinde görülen sistematik fiyatlama hatalarının bulgularına bu üretilen modelde de rastlandığı belirtilmiştir.

Naik (1993) Yeni bilgilerin piyasa üzerinde ve varlıkların oynaklığı üzerindeki etkisi finans literatüründe varlıkları fiyatlama modelleri oluşturulurken önem kazanmaktadır. Örneğin Merton (1976) firmaya özgü yeni bilgilerin hisse senedi fiyat değişimlerine etkisini fiyatlama modeline bir poisson dağılımına sahip olay olarak nitelendirdiği “sıçrama” terimini ekleyerek modellemiştir. Bu çalışmada da kesikli uzayda firma ile ilgili yeni bilgilerin hisse senedi fiyatı üzerinde önemli değişimlere sahip olduğu durum modellenmiştir. Ayrıca elde edilen modelin firmaya özgü veya ülke ve dünya ekonomisinde görülen değişiklikler veya konjonktürel etkilerden dolayı firmanın risk karakteristiği üzerinde önemli etkileri içerecek şekilde modelleme yapılmıştır. Bu amaçla hisse senedi getirileri rassal kesikli sıçramalara sahip olacak şekilde modellenmiş böylece firma profilinde (birleşme, satın alma...) yaşanan değişimleri veya önemli ekonomik değişimlerin yarattığı risklerin opsiyon fiyatlarına yansımaları sağlanmıştır. Piyasada iki ana belirsizlik kaynağı olduğu varsayılmıştır. Birincisi wiener prosesi ile modellenen sürekli bir biçimde çok küçük zaman dilimlerinde piyasaya ulaşan yeni bilgilerin etkisini barındırmak için tanımlanmıştır. İkincisi ise oynaklık prosesi olarak tanımlanan birim zamanda kaç tane yeni bilginin piyasa ulaştığını gösteren bir indeks olarak tanımlanmış ve sağdan sürekli markov zinciri olarak modellenmiştir. Oynaklığın rasgele bir süre boyunca bir durumda kaldığı ve sonra diğer bir duruma sıçradığı varsayılmış , bu durumlar oynaklığın normal seviyede olduğu durum ve anormal seviyede olduğu durum olarak tanımlanmıştır. Modelde ayrıca oynaklıkta bir sıçrama meydana geldiği zaman hisse senedi fiyatında da sürekli olmayan bir etki yaratması durumu yani hisse senedi fiyatı ile oynaklık arasında korelasyon olduğu durumda göz önünde bulundurulmuştur. Modelin uygulama sonuçlarına göre oynaklıkta yaşanan artışın direk olarak opsiyon fiyatında artışa yarattığı görülmüştür. Ayrıca opsiyon fiyatlarındaki değişimin oynaklıkta yaşanan değişimlere duyarlılığı oynaklık

prosesindeki devamlılık düşük olduğunda duyarlılığın az olduğu saptanmıştır. Bu da yüksek varyanslı rejimler olması durumunda Black-Scholes call ve put opsiyon fiyatlarının modele göre daha yüksek fiyatlama yaptığını, düşük varyanslı rejim olduğu durumda ise Black-Scholes call ve put opsiyon fiyatlarının modele göre daha düşük fiyatlama yaptığını bulunmuştur. Ayrıca uzun vadede oynaklıkta görülen yukarı ve aşağı doğru hareketler birbirlerinin etkilerini sıfırladıkları için kısa vadeli opsiyonların oynaklıktaki değişimlere duyarlılığının uzun vadeli opsiyonlara göre daha fazla olduğu belirtilmiştir.

Amin ve Ng (1993) hem hisse senedinin oynaklığını hem de faiz oranının stokastik olarak modelleyerek opsiyon fiyatlama modeli geliştirmişlerdir. Daha önce geliştirilen modeller ya oynaklığı ya da sadece faiz oranını stokastik olarak modele dahil ettikleri için Amin ve Ng (1993) opsiyon fiyatlama modeli önem kazanmaktadır. Yani Black-Scholes modelinin temel iki varsayımları olan sabit varyans ve sabit faiz oranı sınırlamaları yumuşatılmıştır. Çalışmada elde edilen model literatürde geliştirmiş pek çok opsiyon fiyatlama modelini özel bir durum olarak barındırdığı belirtilmiştir. Modelin uygulama sonuçlarına göre hisse senedi fiyat hareketleri ve oynaklık prosesi tahmin edilebilir ise Black-Scholes opsiyon fiyatlarından sapmalar sistematik oynaklığın baskın olduğu hisse senetleri üzerine yazılı opsiyon olmasına veya sistematik olmayan oynaklığın baskın olduğu hisse senetleri üzerine yazılı opsiyon olmasına göre farklılık gösterdiği görülmüştür. Model de sistematik oynaklık stokastik faiz oranı ile ilişkili olduğundan Black-Scholes fiyatından sapmalar bu ilişkinin yönüne ve hangisinin baskın olduğuna göre değişmektedir. Yani Black-Scholes opsiyon fiyatından sapmaları dayanak varlık olan hisse senedinin sistematik oynaklığının yada sistematik olmayan oynaklığının hangisinin baskın olduğuna göre değişecektir.

Scott (1997) çalışmasında stokastik oynaklık ve stokastik faiz oranı ile sıçramalı yayılım prosesi kullanarak opsiyon fiyatlama modeli geliştirmiştir. Ters Fourier dönüşümü kullanarak Avrupa tipi hisse senedi opsiyonları için analitik çözüme ulaşmıştır. S&P500 endeksi üzerine yazılı opsiyonlar kullanılarak modelin Monte Carlo simülasyonu ve sonlu farklar yöntemleri ile hız ve doğruluk açısından karşılaştırılması yapılmış ve üç yönteminde aynı opsiyon fiyatına yakınsadığı fakat ters Fourier dönüşümü ile elde edilen modelin diğerlerine göre oldukça hızlı bir şekilde sonucu yakınsadığı görülmüştür. Çalışmada hisse senedi getirisi ile faiz oranı

arasındaki korelasyonun, hisse senedi getirisi ile oynaklık arasındaki korelasyonun ve faiz oranı değişkenliklerinin opsiyon fiyatlaması üzerindeki etkisi incelemek için stokastik oynaklık ve stokastik faiz oranının her ikisinin birlikte var olduğu durum ile stokastik oynaklık ile sabit faiz oranı kullanılan opsiyon fiyatları arasında karşılaştırma yapılmıştır. Hisse senedi getirisi ile faiz oranı arasındaki korelasyonun negatif ve sıfır olduğu durumda 3 ay vadeli call opsiyonu için elde edilen sonuçlar arasında önemli bir fark bulunamamış faiz oranındaki değişimlerden dolayı oluşan yüzde sapmaların %1 'den küçük olduğu bulunmuştur. Fakat 2 yıl vadeli put opsiyonunda yapılan değerlendirmede hisse senedi getirisi ile faiz oranı arasındaki korelasyonun negatif olduğu durumda yüzde sapmaların %5-10 arasında opsiyon fiyatlarında düşüşe neden olduğu, korelasyonun sıfır olduğu durumda derin-zararda durumdaki opsiyonlarda çok küçük fiyat düşüşleri yarattığı, başa-baş ve karda durumları için opsiyon fiyatlarında önemli artışlar yarattığı bulgulanmıştır. Ayrıca korelasyon katsayısının uygulama fiyatı ile spot fiyat arasındaki orana göre opsiyon fiyatlarında değişik etkileri olduğu belirtilmiştir. Negatif korelasyon katsayısı karda durumdaki opsiyonları daha yüksek fiyatlamakta, zararda durumdaki opsiyonları daha düşük fiyatladığı belirtilmiştir.

## 5. OPSİYON FİYATLAMA MODELLERİNİN TEORİSİ

### 5.1. GARCH Opsiyon Fiyatlama Modeli

Opsiyon fiyatlarının belirlenmesinde en önemli değişkenlerden birinin dayanak varlığın oynaklığı olduğunu başta Black-Scholes olmak üzere pek çok yazar kabul etmiş ve oynaklığın doğru olarak modellenememesinin sebep olduğu sapmalar ampirik çalışmalarla pek çok finansçı tarafından dokümanite edilmiş ve yeni modeller geliştirilmeye başlanmıştır. Engle(1982) ve Bollerslev(1986) 'in geliştirdiği finansal zaman serilerinin oynaklığının zamanla değiştiği ve oto korelasyonların ilişkilerinin varlığı ile geliştirilen ARCH-GARCH modelleri literatürde oynaklık modellemesi için en çok kabul görmüş yöntemlerden biridir. Duan (1995) oynaklığın bu güçlü ekonometrik modelini kullanılarak yeni bir opsiyon fiyatlama modeli elde edilmiştir.

$S_t$  t anındaki hisse senedi fiyatı olmak üzere hisse senedi getirisini ve varyansını  $P$  ölçüsü altında

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda \sqrt{h_t} - \frac{1}{2} h_t + \varepsilon_t \quad (5.1.1)$$

$$\varepsilon_t | \phi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (5.1.2)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (5.1.3)$$

olarak tanımlamıştır. Görüldüğü gibi  $\lambda$  risk primi,  $\varepsilon_t$  ortalaması sıfır ve varyansı GARCH(q,p) prosesidir. Yukarıdaki model gelecek dönemlerdeki varyans geçmiş verilerden kesin olarak elde edilebileceği için belirsizlik yaratan bir tek kaynak vardır(Chaudhury, Wei, 1996). Duan(1995) bu özelliği kullanarak koşullarının makalesinde tanımladığı Yerel Risk Nötr Değerleme İlişkisi (Local Risk Neutral

Valuation Relationship LRNVR) ilişkisini kullanarak Q ölçüsü altında dayanak varlığın

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2} h_t + \xi_t \quad (5.1.4)$$

$$\xi_t | \phi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (5.1.5)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sqrt{h_{t-i}})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (5.1.6)$$

prosesini izlemektedir. Yerel risk nötr değerlendirme ile geleneksel risk nötr değerlendirme yöntemlerinin aynı olmadığını belirtmek gerekir. Sabit varyans olması durumunda geleneksel risk nötrleme ile yerel risk nötrleme aynı sonuca gitmektedir. (5.1.6) denkleminde oynaklık ile birim risk primi incelendiğinde  $\lambda > 0$  olması durumunda koşullu varyans hisse senedi getirisi ile ters ilişkili olduğu görülmektedir. (5.1.4) denkleminde T anında hesaplanan dönem sonu hisse senedi fiyatı

$$S_T = S_t \exp \left[ (T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T h_s + \sum_{s=t+1}^T \xi_s \right] \quad (5.1.7)$$

olarak bulunur.

Hisse senedi oynaklığının GARCH(p,q) prosesini izlediği varsayılarak geliştirilen yöntem EGARCH, TGARCH gibi diğer oynaklık modelleri kullanılarak da kolaylıkla  $\varepsilon_t = \xi_t - \lambda \sqrt{h_t}$  dönüşümü yapılarak uygulanabilir. Dayanak varlığın izlediği proses modellendikten sonra uygulama fiyatı X ve vadesi T olan bu dayanak varlık üzerine yazılı opsiyonun fiyatı dönem sonundaki opsiyon ödemesi  $(S_T - X)$  'nin Q ölçüsü altındaki koşullu beklenen değerinin risksiz getiri oranı ile bugünkü değerine iskonto edilmesidir. Matematiksel olarak

$$C_t = e^{-r(T-t)} E^Q [\max(X_T - K, 0) | \phi_t] \quad (5.1.8)$$

ifade edilir.



Literatürde değişken varyanslı pek çok opsiyon fiyatlama modelinde olduğu gibi Garch opsiyon fiyatlama modeli de simülasyon yöntemleri ile çözüme ulaşılmaktadır. Duan (1995) GARCH opsiyon fiyatlaması modelini S&P100 endeksi avrupa tipi call opsiyonuna uygulayarak modelin fiyatlama performansını belirlemeye çalışmıştır. Buna göre GARCH opsiyon fiyatlama modelinin Black-Scholes modelinin sebep olduğu sistematik yanlışlıklara çözüm getirebildiği görülmüştür. Ayrıca (5.1.6) denkleminde  $q=0$  ve  $p=0$  olduğu durumda GARCH opsiyon fiyatlama modelinin Black-Scholes modelini içermekt aynı Black-Scholes GARCH opsiyon fiyatlama modelinin özel bir hali olmaktadır.

Chaudhury ve Wei (1996) Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeli ile GARCH(1,1) opsiyon fiyatlama modelinin karşılaştırmasını oldukça geniş bir çerçevede yapmıştır. Black-Scholes fiyatının GARCH(1,1) fiyatından sapmalarını  $S/X$ , GARCH(1,1) modelinin eğim katsayıları, vade ve başlangıç koşullu varyansındaki değişimlerine göre incelemiştir. Bu parametrelerdeki değişimlerin her zaman aynı işarete sapmalara sebep olmadığı ve her bir parametredeki değişimin toplam etkisinin Black-Scholes fiyatı ile GARCH fiyatı arasındaki sapmanın belirli bir eğilim içinde olmadığını göstermiştir.

Duan ve Zhang (2001) Hong Kong Borsasında işlem gören Hang Seng Index opsiyonlarının GARCH opsiyon fiyatlama modeli ve Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin kullanarak opsiyon fiyatlarını hesaplamışlar ve gerçek opsiyon verileri ile karşılaştırılarak GARCH opsiyon modelinin üstün bir performans gösterdiğini kanıtlamışlardır. Kullanılan veriler 1997 Asya krizini de kapsayacak şekilde kullanıldığı için GARCH modelini kriz zamanında da üstün bir performans gösterdiğini kanıtlamışlardır. GARCH prosesi olarak Engle ve Ng (1993) geliştirdikleri NGARCH modelinin kullanmışlardır.

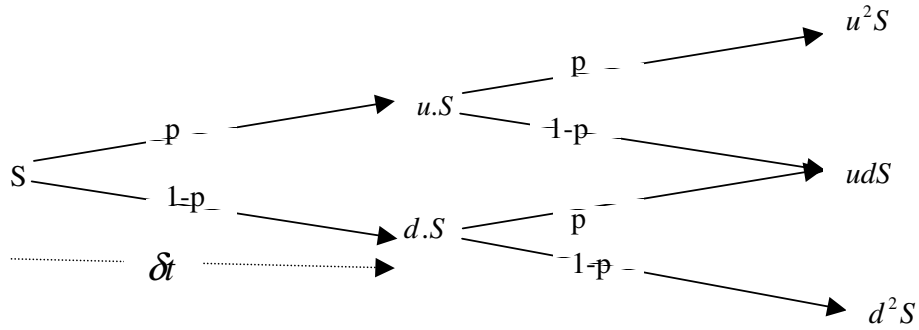
Duan ve Wei (1999) döviz opsiyonlarının fiyatlaması için GARCH opsiyon fiyatlama çerçevesinde döviz verilerinin özelliklerine uygun alternatif bir fiyatlama modelin geliştirmişlerdir.

Harikumar ve Boyrie (2004) Philadelphia Menkul Kıymetler borsasında işlem gören İngiliz Sterlini, İsviçre Frangı ve Japon Yeni avrupa tipi call opsiyonlarının Black-Scholes ve GARCH opsiyon fiyatları hesaplanarak hangi modelin daha iyi performans gösterdiği gerçek opsiyon verileri ile karşılaştırılarak değerlendirilmiştir.

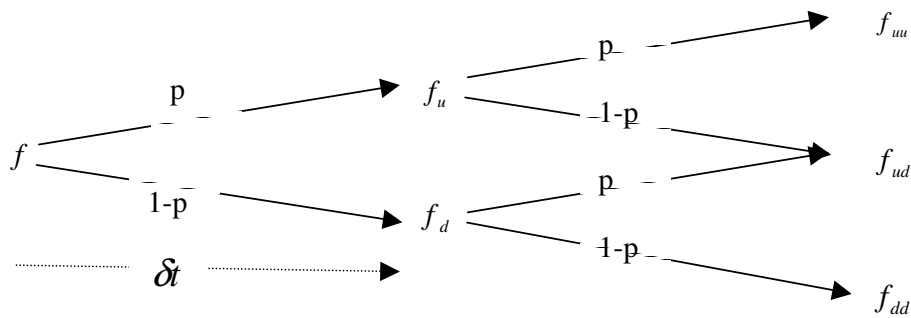
Buna her üç opsiyon tipi içinde Black-Scholes fiyatlama modelinin daha iyi performans gösterdiği sonucuna ulaşmışlardır.

## 5.2. Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli

Cox, Ross, Rubinstein (1979) ve Rendleman ve Bartter (1979) tarafından geliştirilen Binom opsiyon fiyatlama modeli matematiksel olarak diğer opsiyon fiyatlama modellerinden daha basit ve kolay anlaşılabilir bir yöntemdir. Amerikan tipi opsiyonlarda erken uygulama gibi durumlarda analitik bir çözüm elde edilemeyen Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeline göre çözüm süreci oldukça basittir. Binom modelinde hisse senedi fiyatının  $\delta t$  süre sonra fiyatının yükseleceği yada azalacağı varsayımına dayanır.



Şekil 5.2.1:  $\delta t$  zaman adımları ile hisse sendi fiyatının izlediği binom prosesi



Şekil 5.2.2: Şekil 5.2.1 deki binom prosesinin izleyen hisse senedinin opsiyon fiyatların

Şekil 5.2.1 'den görüldüğü gibi  $\delta t$  süre sonra hisse senedi fiyatı  $\%(u-1)$  kadar artacak ya da  $\%(d-1)$  kadar azalacaktır.  $u$ ,  $d$  ve hisse senedi fiyatının hangi

olasılık ile azalıp (1-p) hangi olasılık ile artacağı (p) hisse senedinin risk nötr değerlendirme yöntemi kullanılarak yapılan hesaplamalara göre oynaklığına bağlı olarak değişecektir.

$$u = e^{-\sigma\sqrt{\delta}} \quad (5.2.1)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}} \quad (5.2.2)$$

$$p = \frac{e^{-(r-q)\delta} - d}{u - d} \quad (5.2.3)$$

Binom opsiyon fiyatlama modeli dönem sonu hisse senedi fiyatının Şekil 5.2.1'deki ağaç yapısı ile elde edilerek buradan geriye doğru çözümleme yapılarak opsiyon fiyatının belirlenmesine dayanmaktadır. Her geriye doğru çözümlemede elde edilen opsiyon fiyatı f ile gösterilirse Şekil 5.2.2 deki ağaç yapısının opsiyon fiyatlaması

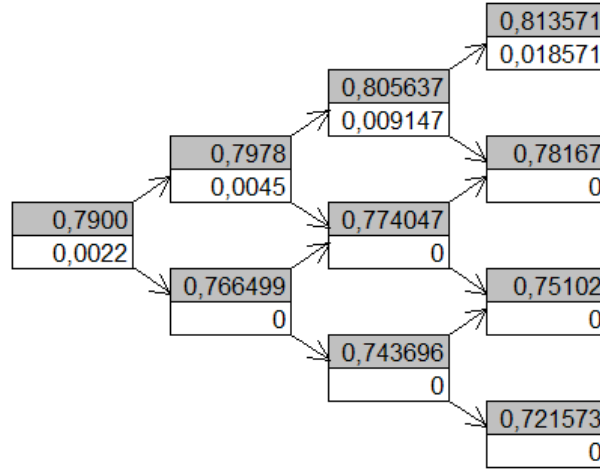
$$f_u = e^{-r\delta} [p \cdot f_{uu} + (1-p) f_{ud}] \quad (5.2.4)$$

$$f_d = e^{-r\delta} [p \cdot f_{ud} + (1-p) f_{dd}] \quad (5.2.5)$$

$$f = e^{-r\delta} [p \cdot f_u + (1-p) f_d] \quad (5.2.6)$$

formülleri ile hesaplanır.  $f_{uu}$ ,  $f_{ud}$  ve  $f_{dd}$  değerleri Şekil 5.2.1 de elde edilen vade sonu  $u^2S$ ,  $u.d.S$  ve  $d^2S$  hisse senedi fiyatlarına göre hesaplanmış opsiyon fiyatlarıdır. Yani X uygulama fiyatı olmak üzere sırasıyla  $\max(u^2S - f_{uu}, 0)$ ,  $\max(u.dS - f_{ud}, 0)$ ,  $\max(d^2S - f_{dd}, 0)$ 'dır.

Şekil 5.2.3 Uygulama fiyatı 0.795 olan Amerikan Doları/Kanada doları spot fiyatı 0.79, Amerika risksiz getiri oranı %6, Kanada risksiz getiri oranı %10,  $p=0.5$ , vadesi 9 ay olan opsiyonun 4 adımlık ağaç yapısı ile hesaplanmasını göstermektedir. Gri kutucuklar hisse senedi fiyatının binom prosesinde nasıl ilerlediğini, altlarındaki kutucuklar ise o düğümdeki opsiyon fiyatının göstermektedir.



**Şekil 5.2.3:** Amerikan Doları/Kanada Doları avrupa tipi call opsiyonun binom modeli ile çözümü

Rendleman ve Bartter (1979) farklı vadeler, farklı uygulama fiyatları ve farklı zaman adımları kullanarak binom fiyatlama modelinin Black Scholes fiyatlarına ne kadar yakınsadığını incelenmiştir. Hisse senedi fiyatı ortalama getiri seviyeleri  $\mu$  0.5, 0.1, 0, -0.1, -0.5 olduğu durumlar için incelendiğinde  $\mu = 0$  ve  $\mu = 0.1$  veya  $-0.1$  olduğu durumlarda opsiyon fiyatları birbirine çok yakın olarak bulunmasına rağmen  $\mu = 0.5$  veya  $-0.5$  olduğu durumda 12 ve 52 adımlık ağaç yapıları ile Black-Scholes modeline düzgün bir şekilde yakınsamadığı bulunmuştur. Bu bulgu yatırımcı tercihlerinden etkilenmemesi gerektiği varsayımı ile de çalışmaktadır. Fakat ağaç yapısında adımlar 100 ve yüzün üzerine çıktıkça Black-Scholes fiyatını koşul ne olursa olsun yakınsadığı bulunmuştur.

Hull ve White (1988) binom modelinin geliştirilmiş bir versiyonu geliştirmişlerdir. Opsiyon vadesi boyunca sabit kar payı oranı yerine sabit bir kar payı ödemesi olduğu durumda fiyatlamının nasıl gerçekleşeceğini göstermişlerdir. Yine de çalışmanın ana konusunu geliştirilmiş binom fiyatlama modeli gibi nümerik olarak çözülen metotlarda hesaplama etkinliğini arttırmak için kontrol değişim yöntemini geliştirmişlerdir. Bu tekniğe göre fiyatı hesaplanmak istenen opsiyonla benzer özelliklere sahip fakat analitik formda çözümü olan diğer opsiyon kullanılarak her iki opsiyonda binom modeli yada diğer sonlu yaklaşım modelleri kullanılarak çözümlere aralarında saptanan ilişkiye daha etkin bir sonuca ulaşılır.

Boyle (1988) , bir durum değişkeni içeren Cox, Ross ve Rubinstein'in geliştirdiği binom opsiyon fiyatlama modelini iki durum değişkeni içerecek şekilde genişleterek yeni bir opsiyon fiyatlama modeli geliştirmiştir. Binom opsiyon fiyatlama modelinde tek durum değişkeni hisse senedi fiyatı iken risksiz faiz oranı, oynaklık gibi ikinci bir durum değişkeninin olması durumunda binom opsiyon fiyatlama modeli yetersiz kalmaktadır .Örneğin hem hisse senedinin hem de oynaklığın stokastik olarak modellendiği durumda Boyle (1988) önerdiği model kullanılabilir. Yapılan uygulamada 5 adımda ulaşılan doğruluk seviyesi, Cox, Ross, Rubinstein'in binom opsiyon fiyatlama modeli ile 20 adımda ulaşıldığını bulgulamışlardır.

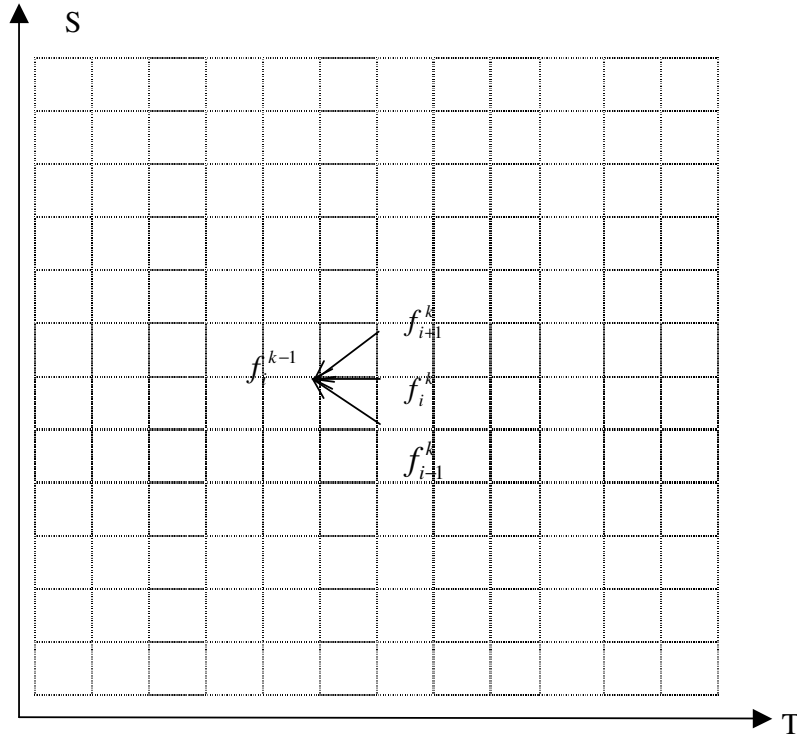
### **5.3 Açık Sonlu Farklar Yöntemi (Explicit Finite Difference Method)**

Pratikte yapılan opsiyon sözleşmelerinin çoğu Avrupa tipi call opsiyon modelinin ufak değişikliklerle spesifikleştirilen sözleşmelerdir. Değişiklikler ufak olsa bile bu durumlar Black-Scholes diferansiyel denklemi için analitik çözümünü elde edilmez hale getirmekte ve nümerik metotların ve simülasyonların kullanılmasını gerekli kılmaktadır. Örneğin Amerikan tipi call opsiyon olması durumunda Black-Scholes diferansiyel denkleminden anlatik çözüm elde edilememesine rağmen en basit nümerik metot olan binom opsiyon fiyatlama modeli ile bu değişiklik çok basit bir şekilde çözüm sürecine entegre edilebilmektedir. İşte Açık Sonlu Farklar Yöntemi de opsiyon sözleşmelerindeki değişiklikleri kolayca modele entegre edilebilen binom opsiyon fiyatlama modelinden daha gelişmiş bir nümerik çözüm metodudur. Binom opsiyon fiyatlama modeli ile Açık Sonlu Farklar Yöntemi arasındaki temel fark Açık Sonlu Farklar Yöntemi ağaç yapısında oynaklık ve yayılmayı da barındırmaktadır. Yani ağaç sabittir fakat parametreler yayılımındaki değişimi yansıtmak için değişebilmektedir (Wilmott, 2005).

Açık Sonlu Farklar Yöntemi ya da Kapalı Sonlu Farklar yönteminin temeli opsiyona ait kısmi diferansiyel denklemin diferansiyel ifadelerinin fark denklemleri ile ifade edilerek iteratif olarak çözülmesi ile opsiyon fiyatının elde edilmesi esasına dayanmaktadır. Bu bölümde Avrupa tipi kar payı ödemeyen call opsiyonun Açık Sonlu Farklar yöntemi ile modellenmesi yapılacaktır. Avrupa tipi kar payı ödemeyen T vadeli call opsiyonun sağladığı kısmi diferansiyel denklem (3.1.11)'den

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + r \cdot S \cdot \frac{\partial f}{\partial S} = r \cdot f \quad (5.3.1)$$

dir. Vadesi T olan opsiyonunun vadesini  $\Delta t = T / N$  uzunluğunda eşit adımlı zaman adımına , N adet zaman adımı sayısına bölünür ve hisse senedi fiyatı  $\Delta S = S_{mak} / M$  uzunluğunda eşit adımlı varlık adımına , M adet varlık adımı sayısına bölünerek Şekil 5.3.1 de tasvir edilen ağ elde edilir. Burada T vade uzunluğu  $0 \Delta t 2\Delta t 3\Delta t 4\Delta t \dots T$  aralıklarına bölünür. Opsiyonu fiyatlamak için kullanılacak olan ağ oluşturulurken varlık değeri S eksenini bugünkü spot fiyatı içerecek şekilde genelde opsiyonun uygulama fiyatının 2 ya da 3 katı olacak biçimde seçilerek  $\Delta S$  uzunluğunda eşit aralıklara bölünerek S eksenini  $0 \Delta S 2\Delta S 3\Delta S \dots S_{mak}$  olarak elde edilir (Wilmott, 2005).



**Şekil 5.3.1:** Açık Sonlu Farklar Yönteminin Grafik Gösterimi

Varlık değeri ve vade sonlu aralıklara bölünerek (5.3.1)'in diferansiyel ifadeleri olan

$\frac{\partial f}{\partial S}, \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$  ileri sonlu fark yaklaşımı (forward difference approximation) ve geri sonlu

fark yaklaşımlarının (backward difference approximation) ortalaması olan merkezi farklar yöntemi  $\frac{\partial f}{\partial t}$  geri sonlu fark yaklaşımı kullanılarak:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}}{2\Delta S} \quad (5.3.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} \quad (5.3.3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1}^{k+1} + f_{i-1}^{k+1} - 2f_i^{k+1}}{\Delta S^2} \quad (5.3.4)$$

elde edilir. (5.3.2), (5.3.3), (5.3.4) denklemler (5.3.1)'de yerine koyulduğu zaman

$$\frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot j^2 \cdot \Delta S \cdot \frac{f_{i+1}^{k+1} + f_{i-1}^{k+1} - 2f_i^{k+1}}{\Delta S^2} + r \cdot j \cdot S \cdot \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}}{2\Delta S} = r \cdot f_i^k \quad (5.3.5)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak :

$$f_i^k = A_i^k \cdot f_{i-1}^{k+1} + B_i^k \cdot f_i^{k+1} + C_i^k \cdot f_{i+1}^{k+1} \quad (5.3.6)$$

$$A_i^k = \frac{1}{2 \cdot (1 + r\Delta t)} (\sigma^2 \cdot j^2 - r \cdot j) \Delta t \quad (5.3.7)$$

$$B_i^k = \frac{1}{2 \cdot (1 + r\Delta t)} (1 - \sigma^2 \cdot j^2 \Delta t) \quad (5.3.8)$$

$$C_i^k = \frac{1}{2 \cdot (1 + r\Delta t)} (\sigma^2 \cdot j^2 + r \cdot j) \Delta t \quad (5.3.9)$$

denklemler sistemi elde edilir. Şekil 5.3.1 'te görüldüğü gibi Açık Sonlu Farklar yöntemi geri sonlu farklar yaklaşımı ile vade T 'den t=0 doğru opsiyon fiyatı hesaplanmaktadır. Burada hesaplama yapılabilmesi için k=T 'deki ve i=0 'daki opsiyon fiyatlarının belirlenmesi gerekir. Bu değerler opsiyon tipine göre belirlenen sınır ve final koşullarından hesaplanmaktadır. i=0 yani S=0 noktalarında incelenen opsiyon call opsiyon olduğu için  $f_0^k = \max(0,0) = 0$  sonucuna ulaşılmaktadır.

Uygulama fiyatı  $X$  ve  $a.\Delta S$  ( $a = 0,1,\dots,M+1$ ) değerleri bilinen değerler olduğuna göre  $k=T$ 'de  $f_i^{N+1} = \max(a.\Delta S - X, 0)$   $a=0,1,2,\dots,M+1$  ve  $i=0,1,2,\dots,N+1$

'dir. Son olarak  $S \rightarrow \infty$   $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \rightarrow 0$  gerçeğinden yararlanılarak üst sınır değerleri

$$f_{M+1}^k = 2.f_M^k - f_{M-1}^k \quad (5.3.10)$$

ile hesaplanır (Wilmott, 2005).

Açık Sonlu Farklar yönteminin değişken özelliklere sahip opsiyon sözleşmelerini fiyatlamak için yaygın olarak kullanılmasına rağmen en büyük dezavantajı bir yaklaşım hesabı olduğu için hataların bu yaklaşımlar sırasında gittikçe büyüyen opsiyon fiyatına bazı durumlarda yakınsayamamasıdır. Bu sorun çözümü için  $\Delta S$  ve  $\Delta t$  değerlerinin birbiri ile ilişkili bir biçimde seçilmesi gerekmektedir.  $\Delta t$  değeri

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\Delta S}{S} \quad (5.3.11)$$

koşulunu sağlayacak şekilde seçilmelidir (Wilmott, 2005).

Açık Sonlu Farklar Yönteminin en önemli dezavantajı olan kararsızlık durumu yani opsiyonun sağladığı kısmi diferansiyel denklemin belli bir çözüme yakınsayamaması durumuna çözümler bulabilmek için çalışmalar yapılmıştır. Brennan ve Schwartz (1978) çalışmalarında Black-Scholes diferansiyel denkleminin logaritmik dönüşümü yapıldığında Açık Sonlu Farklar yönteminin daha hızlı bir şekilde yakınsadığını ve kararsızlık probleminin çözüldüğünü göstermişlerdir. Ayrıca varlık fiyatının logaritması alınarak yapılan bu dönüşüm ile elde edilen prosesin Açık Sonlu Farklar Yönteminde 3 noktalı şıçrama posesi olduğunu ve Kapalı Sonlu Farklar Yönteminde genelleştirilmiş şıçrama prosesi olduğu gösterilmiştir.

Geske ve Shastri (1985), binom opsiyon fiyatlama modeli, Açık Sonlu Farklar yöntemi ve kapalı sonlu farklar yönteminin opsiyonun kar payı ödendiği ve ödenmediği durumlar için yakınsaması, karlılığı ve performansı üzerinde detaylı bir inceleme yapmışlardır. Buna göre bu üç yöntemde yakınsadığı ve doğru çözüme ulaştığı belirtilmiştir. Fakat bazı şartlar altında üç metottan biri daha çabuk yakınsadığı daha iyi performans gösterdiği belirtilmiştir. Buna göre binom metodunun hisse senedinin kar payı ödemediği durumda iyi performans gösterdiği ve



Amerikan tipi opsiyonlarda etkinliğini kaybettiği sonucuna ulaşmışlardır. Açık Sonlu Farklar Yönteminin logaritmik dönüşüm uygulanarak kullanıldığı durumda Kapalı Sonlu Farklar Yönteminden daha etkin olduğu ve karasızlık sorunun kolayca üstesinde geldiği belirtilmiştir.

Hull ve White (1990) da Açık Sonlu Farklar Yönteminin yakınsamama soruna çözüm olarak değişken dönüşümü ve ağaç yapısı içindeki dallanmanın durumda duruma değiştiği yeni bir prosedür önermişlerdir. Örneğin normal durumda  $f_i^k$ ;  $f_{i-1}^{k-1}, f_i^{k-1}, f_{i+1}^{k-1}$  kullanılarak hesaplanırken, yeter büyüklükte bir değişim olduğu durumda  $f_i^k$ ;  $f_i^{k-1}, f_{i+1}^{k-1}, f_{i+2}^{k-1}$  kullanılarak hesaplamaktadır. Çalışma sonunda yapılan uygulamada prosesin oldukça hızlı bir şekilde yakınsadığı belirtilmiştir.

## 6. UYGULAMA

Bu bölümde 3 opsiyon fiyatlama modeli olan Garch Opsiyon Fiyatlama Modeli, Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli , Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile Opsiyon Fiyatlama Modelinin uygulaması yapılmıştır. Türkiye finansal piyasalarında kullanılan opsiyon işlemlerinin hepsi tezgah üstü piyasalarda gerçekleşmektedir. Kurumsallaşmış bir borsa alt yapısında henüz opsiyon alım-satımı yapılamamakta fakat 2001 'de kurulan devlet iç borçlanma senetleri, dolar ve euro, IMKB30 ve IMKB100 endeksleri üzerine yazılı futures sözleşmelerinin alım satım işlemlerinin yapıldığı İzmir Vadeli İşlemler Borsasında önümüzdeki yıllarda opsiyon alım-satımı işlemlerini yapılabilmesi için çalışmaların başlamış olduğu belirtilmektedir. Bu da opsiyon fiyatlama konusunu Türkiye için önemli bir konuma getirmektedir. Bu çalışmada şayet IMKB30 ve IMKB100 endeksleri ile üzerine yazılı opsiyon sözleşmeleri alım-satımı yapılabiliyor olsaydı sözleşmelerinin Garch Opsiyon Fiyatlama Modeli, Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli , Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile Opsiyon Fiyatlama Modeli kullanılarak teorik fiyatlarının nasıl olması gerektiği hesaplanmıştır. Bunun için IMKB30 ve IMKB100 endekslerinin 1766 adet 04.01.2000 - 14.03.2007 tarihleri arasındaki düzeltilmiş günlük verileri kullanılmıştır. Risksiz getiri oranı olarak 2007 Mart ayı 3 aylık hazine bonusu birleşik faiz oranı olan %19 kullanılmıştır.

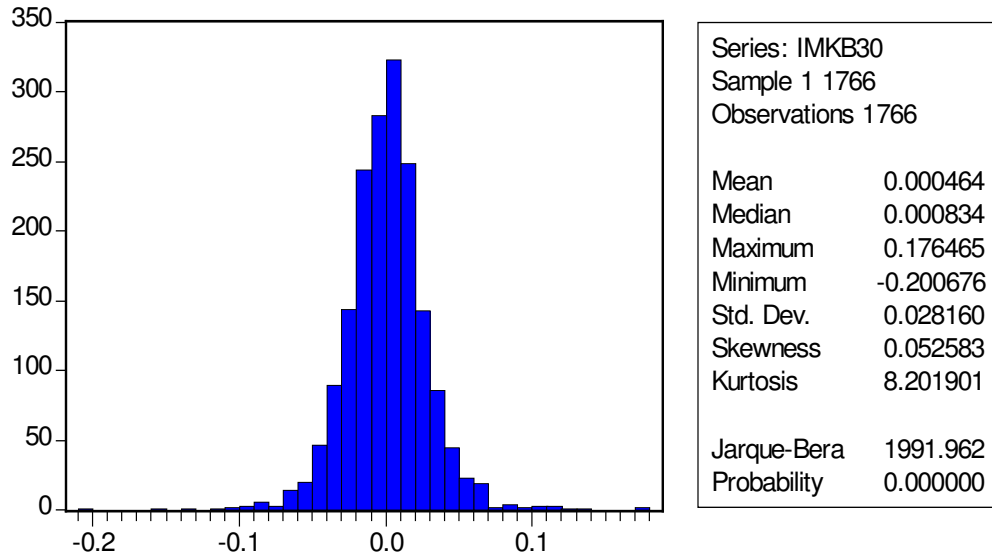
### 6.1. Garch Opsiyon Fiyatlama Modeli

Yapılan ampirik çalışmalar finansal zaman serilerin de oynaklığın değişkenlik gösterdiği, kümeleme ve kaldıraç etkilerine sahip olduğunu şüphe götürmez biçimde kanıtlamıştır. Garch Opsiyon fiyatlama modeli ampirik çalışmalarda görülen bu sonucu opsiyon fiyatlarının daha doğru bir biçimde belirlenmesi için dayanak varlığın oynaklığının belirlenmesi için Bollersev (1986)'in geliştirdiği GARCH modellemesini kullanmıştır.

### 6.1.1 IMKB30 Endeksinin Garch Opsiyon Fiyatlaması

IMKB30 endeksinin birleşik getirisi yani  $LN[\frac{IMKB30}{IMKB30(-1)}]$  serisinin özellikleri

incelenmiştir. Şekil 6.1.1 'de görüldüğü gibi IMKB30 birleşik getiri serisi normal dağılımdan daha kalın kuyruklu bir dağılıma sahiptir, yani outlier denilen normal dağılıma göre dışa düşen noktaları daha fazladır. Sonuçlara göre IMKB30 günlük birleşik getiri serisinin ortalaması 0.000464, standard sapması 0.028160 'dır.



Şekil 6.1.1.1:  $LN(IMKB_t/IMKB_{t-1})$ , IMKB30 endeksi birleşik getirisinin istatistikleri

Pek çok finansal zaman serisinde oynaklık kümelemesi ve değişkenlik görülmesine rağmen veriler arasında oto korelasyon varlığının GARCH modellemesi yapabilmek için incelenmesi gerekmektedir. Bu ARCH etkisi olarak da tanımlanmaktadır. Şekil 6.1.1.2 IMKB30 günlük birleşik getiri serisinin terimleri arasında oto korelasyonun varlığı Q-stat değerleri %5 'den çok daha küçük anlamlılık seviyesinde olması açıkça göstermektedir. Özellikle ilk iki lag'in Pac değerleri oldukça yüksek olduğu görülmektedir. Şekil 6.1.1.3 de IMKB30 günlük birleşik getiri serisinde ARCH etkisinin varlığından emin olmak için yapılan ARCH-LM testi sonucu görülmektedir. Görüldüğü gibi 134,4335 gibi çok yüksek bir F-istatistiği ve %0.000 gibi yüksek bir anlamlılık seviyesinde seride ARCH etkisi var olduğu görülmüştür.

Duan(1995) tarafından önerilen Garch opsiyon fiyatlama modeline göre Garch(1,1)-M modeli katsayıları Şekil 6.1.1.4’de görüldüğü gibi elde edilmiştir. Katsayılar ve anlamlılıkları incelendiği risk primi  $-0,05634$  olarak bulunmuştur. İstatistiksel olarak anlamlı değildir. Fakat Garch opsiyon fiyatlama modelinde risk priminin anlamlılığı sorgulanmamaktadır (Duan,1995). Harikumar ve Boyre (2004) makalesinde Garch opsiyon fiyatlama modelini Philadelphia Menkul Kıymetler borsasında işlem gören İngiliz Sterlini, İsviçre Frangı ve Japon Yeni üzerine yazılı opsiyonların fiyatlaması için kullanmış bu modelden elde ettiği sonuçları, Black-Scholes modelinden elde edilen sonuçları , geçmiş opsiyon verileri ile karşılaştırarak hangi modelin daha iyi sonuç verdiğini bulmuştur. Bu uygulamada da sadece İngiliz Sterlini GARCH-M modellemesi ile elde edilen risk primi %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı bulunmuştur. İsviçre Frangı ve Japon Yeni için GARCH-M modellemesi sonucu elde edilen risk primi katsayısı %5 ve %1 anlamlılık düzeylerinde anlamlı bulunamamış olmasına rağmen modellemeye devam edilmiştir (Harikumar, Boyrie, 2004). Bu nedenle bu çalışmada da modellemeye devam edilmiştir.

Date: 04/13/07 Time: 10:34  
Sample: 1 1766  
Included observations: 1766

| Autocorrelation                                                                     | Partial Correlation                                                                 |    | AC    | PAC    | Q-Stat | Prob  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|-------|--------|--------|-------|
|    |    | 1  | 0.294 | 0.294  | 152.95 | 0.000 |
|    |    | 2  | 0.291 | 0.224  | 303.26 | 0.000 |
|    |    | 3  | 0.169 | 0.042  | 354.02 | 0.000 |
|    |    | 4  | 0.091 | -0.025 | 368.61 | 0.000 |
|    |    | 5  | 0.123 | 0.069  | 395.56 | 0.000 |
|    |    | 6  | 0.099 | 0.044  | 413.05 | 0.000 |
|    |    | 7  | 0.064 | -0.010 | 420.41 | 0.000 |
|    |    | 8  | 0.098 | 0.049  | 437.64 | 0.000 |
|    |    | 9  | 0.030 | -0.026 | 439.21 | 0.000 |
|    |    | 10 | 0.108 | 0.077  | 459.82 | 0.000 |
|    |    | 11 | 0.082 | 0.031  | 471.80 | 0.000 |
|    |    | 12 | 0.058 | -0.011 | 477.70 | 0.000 |
|    |    | 13 | 0.050 | -0.008 | 482.13 | 0.000 |
|    |    | 14 | 0.064 | 0.040  | 489.40 | 0.000 |
|    |    | 15 | 0.070 | 0.034  | 498.02 | 0.000 |
|    |    | 16 | 0.081 | 0.024  | 509.71 | 0.000 |
|    |    | 17 | 0.013 | -0.050 | 510.03 | 0.000 |
|    |    | 18 | 0.055 | 0.025  | 515.42 | 0.000 |
|    |    | 19 | 0.091 | 0.083  | 530.18 | 0.000 |
|   |   | 20 | 0.064 | 0.005  | 537.60 | 0.000 |
|  |  | 21 | 0.081 | 0.009  | 549.45 | 0.000 |
|  |  | 22 | 0.095 | 0.048  | 565.66 | 0.000 |
|  |  | 23 | 0.050 | -0.007 | 570.14 | 0.000 |
|  |  | 24 | 0.050 | -0.015 | 574.55 | 0.000 |
|  |  | 25 | 0.054 | 0.020  | 579.86 | 0.000 |
|  |  | 26 | 0.029 | -0.019 | 581.37 | 0.000 |
|  |  | 27 | 0.051 | 0.021  | 586.09 | 0.000 |
|  |  | 28 | 0.035 | 0.011  | 588.34 | 0.000 |
|  |  | 29 | 0.013 | -0.034 | 588.67 | 0.000 |
|  |  | 30 | 0.044 | 0.016  | 592.14 | 0.000 |
|  |  | 31 | 0.022 | 0.005  | 592.98 | 0.000 |

Şekil 6.1.1.2: IMKB30 günlük birleşik getirisinin AC, PAC ve Q-Stat değerleri

ARCH Test:

|               |          |             |          |
|---------------|----------|-------------|----------|
| F-statistic   | 134.4335 | Probability | 0.000000 |
| Obs*R-squared | 233.6514 | Probability | 0.000000 |

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Date: 04/13/07 Time: 10:37

Sample (adjusted): 3 1766

Included observations: 1764 after adjustments

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| C                  | 0.000432    | 5.20E-05              | 8.306241    | 0.0000    |
| RESID^2(-1)        | 0.227563    | 0.023207              | 9.806002    | 0.0000    |
| RESID^2(-2)        | 0.224554    | 0.023205              | 9.676801    | 0.0000    |
| R-squared          | 0.132455    | Mean dependent var    |             | 0.000790  |
| Adjusted R-squared | 0.131470    | S.D. dependent var    |             | 0.002127  |
| S.E. of regression | 0.001982    | Akaike info criterion |             | -9.607536 |
| Sum squared resid  | 0.006919    | Schwarz criterion     |             | -9.598225 |
| Log likelihood     | 8476.847    | F-statistic           |             | 134.4335  |
| Durbin-Watson stat | 2.017840    | Prob(F-statistic)     |             | 0.000000  |

**Şekil 6.1.1.3:** IMKB30 günlük birleşik getiri serisinin ARCH-LM testi sonucu

Türkiye de opsiyonların alım-satım işlemlerinin yapıldığı bir opsiyon borsası olmadığı işlemlerin tezgah üstü piyasalarda gerçekleştiği için opsiyonlar varsayımsal olarak oluşturulmuştur. Varsayımsal opsiyonlar oluşturulurken uygulama fiyatları belirlenirken için Chicago Borsasında işlem gören S&P100 avrupa tipi call opsiyonun özelliklerine yakın olarak oluşturulmuştur. 11 Nisan 2007 tarihinde S&P100 endeksinin değeri 630'dur. Bu tarihte Yahoo.finance web sayfasından 29, 49, 69 ve 202 vadeli opsiyonların hepsinde ortak olan uygulama fiyatları 600, 620, 640, 660, 680, 700, 720 olarak bulunmuştur. S spot fiyatı, X uygulama fiyatını göstermek üzere (S/X) oranı yani opsiyonun zarar, kar, başa baş durumunu gösteren

oran (moneyness) sırasıyla 1.05, 1.02, 0.984, 0.954, 0.92, 0.9, 0.875 olarak bulunmuştur.

Dependent Variable: IMKB30

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Date: 04/13/07 Time: 10:39

Sample: 1 1766

Included observations: 1766

Convergence achieved after 21 iterations

Variance backcast: OFF

GARCH = C(3) + C(4)\*RESID(-1)^2 + C(5)\*GARCH(-1)

|                    | Coefficient | Std. Error            | z-Statistic | Prob.     |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| @SQRT(GARCH)       | -0.056344   | 0.077260              | -0.729277   | 0.4658    |
| C                  | 0.002252    | 0.001728              | 1.303109    | 0.1925    |
| Variance Equation  |             |                       |             |           |
| C                  | 8.84E-06    | 2.41E-06              | 3.676936    | 0.0002    |
| RESID(-1)^2        | 0.086484    | 0.008619              | 10.03364    | 0.0000    |
| GARCH(-1)          | 0.904816    | 0.008673              | 104.3264    | 0.0000    |
| R-squared          | -0.001152   | Mean dependent var    |             | 0.000464  |
| Adjusted R-squared | -0.003426   | S.D. dependent var    |             | 0.028160  |
| S.E. of regression | 0.028208    | Akaike info criterion |             | -4.541790 |
| Sum squared resid  | 1.401187    | Schwarz criterion     |             | -4.526284 |

#### Şekil 6.1.1.4: IMKB30 endeksinin GARCH(1-1)- M modellemesi

Bu bilgiler baz alınarak aşağıdaki 11 Nisan 2007 tarihinde IMKB30 endeksinin değerinin 58 'dir. S&P100 opsiyonlarının özelliklerine paralel olarak  $0.85 < S/X < 1.1$  olacak şekilde uygulama fiyatları 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67 olarak belirlenmiştir. S/X oranları sırasıyla 1.137, 1.094, 1.055, 1.018, 0.983, 0.951, 0.921, 0.892, 0.866 olmaktadır. Vadeler ise 30, 60,90,180 ve 360 olarak belirlenmiştir. Garch opsiyon fiyatlama modelinin girdileri olan Garch(1,1)-M modeli katsayıları Şekil 6.1.1.4 'te görüldüğü gibi, günlük risksiz getiri oranı 0.00252, başlangıç varyansı olarak tarihi varyans seçilmiş ve değeri Şekil 6.1.1.1 'den görüldüğü gibi  $(0.028160)^2$  olarak alınmıştır.

Garch opsiyon fiyatlama modeli hisse senedi getirilerinin dağılımı analitik olarak bulunamadığı için analitik formda tek bir çözümü yoktur. Kapalı formda çözümü bulunamayan pek çok model gibi opsiyon fiyatları Ampirik Martingale Simülasyonu ile hesaplanmıştır. Duan ve Simonato (1998) çalışmasında Monte carlo simülasyon yönteminde simülasyon sırasında Merton(1973) tarafından tanımlanan rasyonel opsiyon sınırlarını pek çok kez özellikle karda ( $S/X > 1$ ) ve zararda ( $S/X < 1$ ) durumdaki opsiyonlarda geçerliliğini kaybettiğini göstermiştir (Duan,Simonato1998). Buna göre monte carlo simulasyon yönetimi ile 30 gün vadeli karda ( $S/X > 1$ ) durumdaki opsiyon hesaplamaların yaklaşık %50 'sini rasyonel opsiyon sınırlarını çiğnediği, zararda ( $S/X < 1$ ) durumdaki opsiyonlarda hesaplamaların %90 'ının rasyonel opsiyon sınırlarını çiğnediği bulunmuştur. Bu ile hesaplanan Simülasyon sayısı 1000 olarak belirlenmiştir. Bu dezavantajı önlemek için Ampirik Martingale Simülasyonu (EMS) adını verdikleri aşağıdaki düzeltme prosedürünü geliştirmişlerdir (Duan,Simonato1998):

$$Z_0(t_j, n) = \frac{1}{n} e^{-rt_j} \sum_{i=1}^n Z_i(t_j, n) \quad (6.1.1.1)$$

$$Z_i(t_j, n) = S_i^*(t_{j-1}, n) \frac{\hat{S}_i(t_j)}{S_i(t_{j-1})} \quad (6.1.1.2)$$

$$S_i^*(t_j, n) = S_0 \frac{Z_i(t_j, n)}{Z_0(t_j, n)} \quad (6.1.1.3)$$

$\hat{S}_i(t)$  , EMS düzeltmesi uygulanmadan önceki  $t$  zamanında  $i$ . Simüle edilen adımda elde edilen fiyattır.  $\hat{S}_i(t_0)$  ve  $S_i^*(t_0)$  ilk değerleri  $S_0$  eşit olarak seçilir.  $S_i^*(t)$  EMS düzeltmesi gerçekleştirilmiş fiyattır.  $Z_i(t)$  terimi ise  $\hat{S}_i(t)$ 'den  $S_i^*(t)$  geçişi sağlayan geçici fiyattır.

Simülasyon adımı 1000 olarak seçilmiştir. Simülasyon Matlab 6 uygulamasında programlama yapılarak gerçekleştirilmiştir. Programlama yapılmadan çözüme ulaşma haftalar süren çalışmalar gerektirebilir. Programın kodları Ekler kısmında görülebilir. İşlem yükünün ağırlığını anlatabilmek için uygulama fiyatı 51 vadesi 30 gün olan opsiyonu göz önüne alalım. Her gün için yani  $t=1, \dots, 30$ 'a kadar her gün için



1000 adet hisse senedi fiyatı ve 1000 adet koşullu varyans değeri hesaplanmaktadır ki bu da sadece uygulama fiyatı 51, vadesi 30 gün olan opsiyonun fiyatının belirlenmesi için sadece varlık fiyatı ve koşullu varyans hesaplaması için 60000 işlem gerektirmektedir. Fakat matlab'ın matris temelli program yapısı ve programlama yapılarak hesaplama süresi karşılaştırılamayacak kadar azaltılmıştır.

**Tablo 6.1.1.1: IMKB30 endeksi Garch Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları**

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE   |        |        |         |         |
|-------|-----------------|--------|--------|--------|---------|---------|
|       |                 | 30     | 60     | 90     | 180     | 360     |
| 1,137 | 51              | 7,9925 | 8,8253 | 9,5881 | 11,8591 | 15,9973 |
| 1,094 | 53              | 6,2667 | 7,153  | 7,9312 | 10,2535 | 14,479  |
| 1,055 | 55              | 4,7095 | 5,6394 | 6,4149 | 8,7438  | 13,0234 |
| 1,018 | 57              | 3,3985 | 4,3021 | 5,0649 | 7,3275  | 11,6281 |
| 0,983 | 59              | 2,362  | 3,1547 | 3,8839 | 6,0596  | 10,3147 |
| 0,951 | 61              | 1,5646 | 2,2181 | 2,905  | 4,9418  | 9,07    |
| 0,921 | 63              | 0,9748 | 1,502  | 2,1169 | 3,9537  | 7,9129  |
| 0,892 | 65              | 0,5725 | 0,9904 | 1,5086 | 3,1346  | 6,8553  |
| 0,866 | 67              | 0,3129 | 0,64   | 1,04   | 2,4405  | 5,9003  |
| 0,841 | 69              | 0,1665 | 0,3974 | 0,7017 | 1,8687  | 5,0556  |

**Tablo 6.1.1.2: IMKB30 endeksi Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları**

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE   |         |         |         |         |
|-------|-----------------|--------|---------|---------|---------|---------|
|       |                 | 30     | 60      | 90      | 180     | 360     |
| 1,137 | 51              | 8,5716 | 10,1396 | 11,5022 | 14,8964 | 20,1498 |
| 1,094 | 53              | 7,0604 | 8,776   | 10,2164 | 13,738  | 19,1328 |
| 1,055 | 55              | 5,7083 | 7,5332  | 9,0305  | 12,649  | 18,161  |
| 1,018 | 57              | 4,5284 | 6,4142  | 7,9451  | 11,6285 | 17,2335 |
| 0,983 | 59              | 3,5248 | 5,4185  | 6,959   | 10,675  | 16,3492 |
| 0,951 | 61              | 2,6926 | 4,5427  | 6,0694  | 9,7867  | 15,5068 |
| 0,921 | 63              | 2,0194 | 3,7807  | 5,2722  | 8,9613  | 14,705  |
| 0,892 | 65              | 1,4878 | 3,1246  | 4,5622  | 8,1961  | 13,9424 |
| 0,866 | 67              | 1,0776 | 2,5653  | 3,9336  | 7,4883  | 13,2175 |
| 0,841 | 69              | 0,7678 | 2,093   | 3,3801  | 6,8351  | 12,529  |

**Tablo 6.1.1.3:** IMKB30 Garch Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Modeli arasındaki %fark [(GARCH-BS)/BS]

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE     |          |          |          |          |
|-------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|       |                 | 30       | 60       | 90       | 180      | 360      |
| 1,137 | 51              | -6,756%  | -12,962% | -16,641% | -20,389% | -20,608% |
| 1,094 | 53              | -11,242% | -18,494% | -22,368% | -25,364% | -24,324% |
| 1,055 | 55              | -17,497% | -25,139% | -28,964% | -30,874% | -28,289% |
| 1,018 | 57              | -24,951% | -32,929% | -36,251% | -36,987% | -32,526% |
| 0,983 | 59              | -32,989% | -41,779% | -44,189% | -43,236% | -36,910% |
| 0,951 | 61              | -41,893% | -51,172% | -52,137% | -49,505% | -41,510% |
| 0,921 | 63              | -51,728% | -60,272% | -59,848% | -55,880% | -46,189% |
| 0,892 | 65              | -61,520% | -68,303% | -66,933% | -61,755% | -50,831% |
| 0,866 | 67              | -70,963% | -75,052% | -73,561% | -67,409% | -55,360% |
| 0,841 | 69              | -78,315% | -81,013% | -79,240% | -72,660% | -59,649% |

Tablo 6.1.1.1, Tablo 6.1.1.2 ve Tablo 6.1.1.3 sırasıyla Garch Opsiyon fiyatlama modelinin, Black-Scholes fiyatlama modelinin, Black-Scholes fiyatlama modelinin Garch opsiyon fiyatla modelinden yüzde olarak sapmasını göstermektedir. Sonuçlar literatür çalışmalarında görülen sonuçlarla paralellik göstermektedir. Literatürde Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeli ile Garch opsiyon fiyatlama modeli arasındaki en kapsamlı çalışma Chaudhury ve Wei (1996) tarafından gerçekleştirilmiştir. Çalışma sonucunda Black-Scholes ve Garch opsiyon fiyatlama modelinin ürettiği sonuçlar arasındaki farklar parametrelerdeki değişime göre ihmal edilecek boyutlarda küçük farkların olduğu ve her iki modelin önemli ölçüde farklı fiyatlama yaptığı iki uç sınır arasında değiştiği belirtilmiştir. Black-Scholes opsiyon fiyatlarının düşük başlangıç koşullu varyansı olması durumunda Garch opsiyon fiyatlama modeline göre daha yüksek fiyatlama yaptığı , yüksek başlangıç koşullu varyans olması durumunda Garch opsiyon fiyatlama modeline göre düşük fiyatlama yapmaktadır. Birim risk priminin yüksek olması durumunda ( $\lambda = 0.2$ ) düşük koşullu varyans olmasına rağmen Black Scholes'un daha düşük fiyatlama yaptığı görülmüştür (Chaudhury, Wei, 1996). GARCH koşullu varyans modeli düşük varyanslar ürettiği için genel olarak Black-Scholes'un daha yüksek fiyatlama yapması beklenmektedir (Duan, 1995). Dolayısıyla Chaudhury ve Wei (1996)'nin bulgularıyla örtüşmektedir. Duan (1995) GARCH opsiyon fiyatlama modelinin zarar

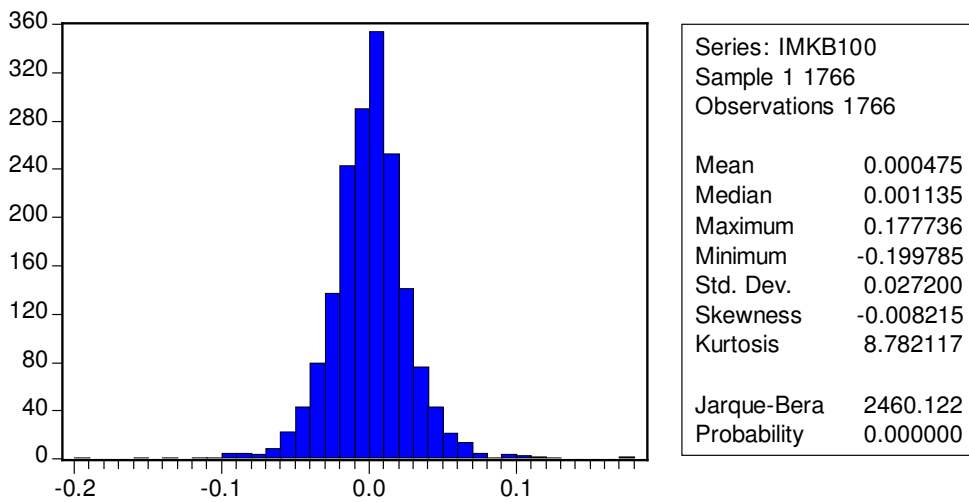
durumundaki opsiyonları Black-Scholes modeline göre daha yüksek fiyatlama yaptığı bu etkinin vade kısaldıkça arttığını belirtmiştir.

GARCH opsiyon fiyatlama modelinin ve Black-Scholes modelinin IMKB30 endeksine uygulama sonuçlarında da görüldüğü gibi opsiyonun gerçek fiyatı teorik GARCH opsiyon modelinin ürettiği fiyat olarak kabul edilirse Black-Scholes yüksek fiyatlama yapmaktadır, negatif sapmalar bunun göstergesidir. Pratikte opsiyon piyasalarında alım satımı işlemi yapılan opsiyonların S/X oranı 1.1 ile 0.9 arasında değiştiği için Black-Scholes'un gerçek opsiyon verilerine göre yüksek fiyatlama yapmaktadır.(Hull, White, 1987). Dolayısıyla Garch opsiyon fiyatlama modeli Black-Scholes'un sistematik yanlış fiyatlamalarına çözüm getirebilmiştir yorumu yapılabilir. Bu uygulamada oluşturulan varsayımsal opsiyonlar gerçek opsiyon sözleşmeleri ilişkilendirilerek hazırlandığı için Black-Scholes opsiyonların hepsinde yüksek fiyatlama yapıştır.

### 6.1.2 IMKB100 Endeksinin GARCH Opsiyon Fiyatlaması

IMKB100 endeksini bileşik getiri serisi  $LN[\frac{IMKB100}{IMKB100(-1)}]$  'in özellikleri

incelenmiştir. Şekil 6.1.2.1 'de görüldüğü gibi IM KB100 endeksi birleşik getiri serisi normal dağılım göre daha kalın kuyruklu sola yatık bir dağılımdır.Yani yüksek kayıplara uğrama olasılığı normal dağılıma göre daha fazladır.



Şekil 6.1.2.1: IMKB100 birleşik getiri serisinin istatistikleri

Bölüm 6.1.1 'de belirtildiği gibi GARCH modellemesi yapabilmek için IMKB100 birleşik getiri serisinin sabit terimle regresyonunun hata terimlerin arasındaki oto korelasyon varlığının, incelenmesi için AC,PAC ve Q-Stat değerleri Şekil 6.1.2.2 'da görüldüğü bulunmuştur. Görüldüğü gibi Q istatistikleri %0.00 gibi çok yüksek bir yüzde anlamlı bulunmuştur. Yani hata terimleri arasında güçlü bir korelasyon varlığı söz konusudur. IMKB100 birleşik getiri serisinde ARCH etkisinin varlığından emin olmak için gerçekleştirilen ARCH-LM testinin Şekil 6.1.2.3 de görülen sonucuna göre F istatistiği 153,7814 gibi çok yüksek bir değer ve anlamlılığı %0,00 yüzde ile anlamlı çıkmıştır. Yani seride güçlü bir ARCH etkisine rastlanmıştır.

Garch opsiyon fiyatlama modelinin ilk adımı olan serinin GARH(1,1)-M modeli ile modellemesine geçilebilir. GARCH(1,1)- M modeli katsayıları Şekil 6.1.2.4 'de görülmektedir. Görüldüğü gibi birim risk primi -0.048233 olarak bulunmuş istatistiki olarak %51 gibi bir olasılık değeri anlamsız olarak bulunmuştur. Bölüm 6.1.1 de belirtilen nedenlerle uygulamaya devam edilecektir.

Date: 04/13/07 Time: 13:27  
Sample: 1 1766  
Included observations: 1766

| Autocorrelation                                                                     | Partial Correlation                                                                 | AC       | PAC    | Q-Stat | Prob  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------|--------|--------|-------|
|    |    | 1 0.312  | 0.312  | 172.55 | 0.000 |
|    |    | 2 0.312  | 0.238  | 345.25 | 0.000 |
|    |    | 3 0.177  | 0.034  | 400.90 | 0.000 |
|    |    | 4 0.094  | -0.035 | 416.44 | 0.000 |
|    |    | 5 0.134  | 0.080  | 448.30 | 0.000 |
|    |    | 6 0.105  | 0.046  | 467.76 | 0.000 |
|    |    | 7 0.067  | -0.018 | 475.78 | 0.000 |
|    |    | 8 0.097  | 0.043  | 492.47 | 0.000 |
|    |    | 9 0.030  | -0.025 | 494.03 | 0.000 |
|    |    | 10 0.112 | 0.084  | 516.29 | 0.000 |
|    |    | 11 0.086 | 0.033  | 529.54 | 0.000 |
|    |    | 12 0.062 | -0.015 | 536.29 | 0.000 |
|    |    | 13 0.045 | -0.020 | 539.86 | 0.000 |
|    |    | 14 0.060 | 0.042  | 546.38 | 0.000 |
|    |    | 15 0.065 | 0.032  | 553.86 | 0.000 |
|    |    | 16 0.081 | 0.024  | 565.55 | 0.000 |
|    |    | 17 0.017 | -0.049 | 566.06 | 0.000 |
|    |    | 18 0.054 | 0.023  | 571.20 | 0.000 |
|    |    | 19 0.087 | 0.083  | 584.81 | 0.000 |
|    |    | 20 0.061 | 0.000  | 591.41 | 0.000 |
|   |   | 21 0.079 | 0.004  | 602.59 | 0.000 |
|  |  | 22 0.098 | 0.054  | 619.65 | 0.000 |
|  |  | 23 0.049 | -0.007 | 623.99 | 0.000 |
|  |  | 24 0.050 | -0.018 | 628.51 | 0.000 |
|  |  | 25 0.055 | 0.022  | 633.89 | 0.000 |
|  |  | 26 0.029 | -0.019 | 635.38 | 0.000 |
|  |  | 27 0.053 | 0.022  | 640.42 | 0.000 |
|  |  | 28 0.033 | 0.009  | 642.42 | 0.000 |
|  |  | 29 0.014 | -0.033 | 642.76 | 0.000 |
|  |  | 30 0.043 | 0.015  | 646.12 | 0.000 |

**Şekil 6.1.2.2:** IMKB100 c regresyonun hata terimlerinin AC,PAC ve Q-Stat değerleri

IMKB30 endeksi uygulamasında olduğu gibi IMKB100 endeksi içinde aynı şartlar göz önünde bulundurularak varsayımsal opsiyonlar oluşturulmuştur. 11 Nisan 2007 tarihinde IMKB100 endeksini değeri 46'dır. Varsayımsal opsiyonların uygulama fiyatları  $0,85 < S/X < 1,2$  olacak şekilde 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55 olarak seçilmiştir. S/X oranları sırasıyla 1. 179, 1.122, 1.07, 1.022, 0.979, 0.939, 0.902, 0.868 olmaktadır. Vadeler ise 30, 60,90,180 ve 360 olarak belirlenmiştir. Garch opsiyon fiyatlama modelinin girdileri olan Garch(1,1)-M modeli katsayıları Şekil 6.1.2.4 'de görüldüğü gibi, günlük risksiz getiri oranı 0.00252, başlangıç varyansı

olarak tarihi varyans seçilmiş ve değeri Şekil 6.1.2.1 'den görüldüğü gibi  $(0.027200)^2$  olarak alınmıştır.

ARCH Test:

|               |          |             |          |
|---------------|----------|-------------|----------|
| F-statistic   | 153.7814 | Probability | 0.000000 |
| Obs*R-squared | 262.2791 | Probability | 0.000000 |

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Date: 04/13/07 Time: 13:30

Sample (adjusted): 3 1766

Included observations: 1764 after adjustments

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.    |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|----------|
| C                  | 0.000387    | 4.96E-05              | 7.793799    | 0.0000   |
| RESID^2(-1)        | 0.237840    | 0.023143              | 10.27697    | 0.0000   |
| RESID^2(-2)        | 0.238142    | 0.023143              | 10.28996    | 0.0000   |
| R-squared          | 0.148684    | Mean dependent var    |             | 0.000738 |
| Adjusted R-squared | 0.147717    | S.D. dependent var    |             | 0.002064 |
|                    |             |                       |             | -        |
| S.E. of regression | 0.001906    | Akaike info criterion |             | 9.686290 |
|                    |             |                       |             | -        |
| Sum squared resid  | 0.006395    | Schwarz criterion     |             | 9.676978 |
| Log likelihood     | 8546.308    | F-statistic           |             | 153.7814 |
| Durbin-Watson stat | 2.015639    | Prob(F-statistic)     |             | 0.000000 |

**Şekil 6.1.2.3:** IMKB100 endeksi ARCH –LM testi sonucu

Standart simülasyon yöntemine ek olarak Ampirik Martingale Simulasyonu (EMS) prosedürü de kullanılarak simülasyon adımı 1000 seçilerek simülasyon gerçekleştirilmiştir. Tablo 6.1.2.1, Tablo 6.1.2.2, Tablo 6.1.2.3 sırasıyla Garch Opsiyon fiyatlama modelinin, Black-Scholes fiyatlama modelinin, Black-Scholes fiyatlama modelinin Garch opsiyon fiyatla

modelinden yüzde olarak sapmasını göstermektedir. Sonuçlar literatür çalışmalarında görülen sonuçlarla IMKB30 endeksinde görüldüğü gibi paralellik göstermektedir.

Dependent Variable: IMKB100

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Date: 04/13/07 Time: 13:32

Sample: 1 1766

Included observations: 1766

Convergence achieved after 21 iterations

Variance backcast: OFF

GARCH = C(3) + C(4)\*RESID(-1)^2 + C(5)\*GARCH(-1)

|                    | Coefficient | Std. Error            | z-Statistic | Prob.     |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| @SQRT(GARCH)       | -0.048233   | 0.074197              | -0.650065   | 0.5157    |
| C                  | 0.002075    | 0.001560              | 1.330132    | 0.1835    |
| Variance Equation  |             |                       |             |           |
| C                  | 8.66E-06    | 2.31E-06              | 3.752548    | 0.0002    |
| RESID(-1)^2        | 0.097225    | 0.009438              | 10.30127    | 0.0000    |
| GARCH(-1)          | 0.894553    | 0.009282              | 96.37629    | 0.0000    |
| R-squared          | -0.001202   | Mean dependent var    |             | 0.000475  |
| Adjusted R-squared | -0.003476   | S.D. dependent var    |             | 0.027200  |
| S.E. of regression | 0.027247    | Akaike info criterion |             | -4.638549 |
| Sum squared resid  | 1.307363    | Schwarz criterion     |             | -4.623044 |
| Log likelihood     | 4100.839    | Durbin-Watson stat    |             | 1.999120  |

**Şekil 6.1.2.4:** IMKB100 endeksi GARCH(1,1)-M Modeli Sonuçları

GARCH opsiyon fiyatlama modelinin ve Black-Scholes modelinin IMKB100 endeksine uygulama sonuçlarında da görüldüğü gibi opsiyonun gerçek fiyatı teorik GARCH opsiyon modelinin ürettiği fiyat olarak kabul edilirse Black-Scholes yüksek fiyatlama yapmaktadır, negatif sapmalar bunun göstergesidir. IMKB30 ve IMKB100 endeklerinin karakteristikleri birbirine çok yakın olduğu için dolayısıyla aynı uyumlulukla modellerin çok benzer sonuçlar üretmesi zaten beklenen bir sonuçtur. Bu uygulamada da oluşturulan varsayımsal opsiyonlar gerçek opsiyon sözleşmeleri

ilişkilendirilerek hazırlandığı için Hull ve White (1987) çalışmasında belirttiği gibi Black-Scholes modeli opsiyonların hepsinde yüksek fiyatlama yapmıştır.

**Tablo 6.1.2.1:** IMKB100 endeksinin Garch opsiyon fiyatlama modeli sonuçları

| <i>S/X</i>   | <i>UYGULAMA FİYATI</i> | <i>VADE</i> |           |           |            |            |
|--------------|------------------------|-------------|-----------|-----------|------------|------------|
|              |                        | <i>30</i>   | <i>60</i> | <i>90</i> | <i>180</i> | <i>360</i> |
| <b>1,179</b> | <b>39</b>              | 7,6359      | 8,2413    | 8,8391    | 10,5652    | 13,7553    |
| <b>1,122</b> | <b>41</b>              | 5,7682      | 6,4128    | 7,0464    | 8,8568     | 12,1865    |
| <b>1,070</b> | <b>43</b>              | 4,0572      | 4,7265    | 5,3886    | 7,247      | 10,6728    |
| <b>1,022</b> | <b>45</b>              | 2,6302      | 3,2706    | 3,9368    | 5,7747     | 9,2334     |
| <b>0,979</b> | <b>47</b>              | 1,5424      | 2,0997    | 2,7167    | 4,4725     | 7,8949     |
| <b>0,939</b> | <b>49</b>              | 0,8233      | 1,2496    | 1,7475    | 3,3653     | 6,6638     |
| <b>0,902</b> | <b>51</b>              | 0,394       | 0,6927    | 1,0518    | 2,4537     | 5,5477     |
| <b>0,868</b> | <b>53</b>              | 0,1635      | 0,3484    | 0,5971    | 1,7239     | 4,5518     |
| <b>0,836</b> | <b>55</b>              | 0,0569      | 0,1686    | 0,3175    | 1,1723     | 3,6781     |

**Tablo 6.1.2.2:** IMKB100 endeksi Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları

| <i>S/X</i>   | <i>UYGULAMA FİYATI</i> | <i>VADE</i> |           |           |            |            |
|--------------|------------------------|-------------|-----------|-----------|------------|------------|
|              |                        | <i>30</i>   | <i>60</i> | <i>90</i> | <i>180</i> | <i>360</i> |
| <b>1,179</b> | <b>39</b>              | 7,9452      | 9,0276    | 10,0134   | 12,5413    | 16,533     |
| <b>1,122</b> | <b>41</b>              | 6,3058      | 7,5551    | 8,6325    | 11,3099    | 15,4609    |
| <b>1,070</b> | <b>43</b>              | 4,8516      | 6,2325    | 7,3783    | 10,1683    | 14,4481    |
| <b>1,022</b> | <b>45</b>              | 3,614       | 5,0692    | 6,2544    | 9,1162     | 13,4933    |
| <b>0,979</b> | <b>47</b>              | 2,6055      | 4,0666    | 5,2601    | 8,1517     | 12,5948    |
| <b>0,939</b> | <b>49</b>              | 1,8184      | 3,2195    | 4,391     | 7,2718     | 11,7507    |
| <b>0,902</b> | <b>51</b>              | 1,2298      | 2,5171    | 3,64      | 6,4728     | 10,9589    |
| <b>0,868</b> | <b>53</b>              | 0,807       | 1,9447    | 2,9979    | 5,7501     | 10,2172    |
| <b>0,836</b> | <b>55</b>              | 0,5146      | 1,486     | 2,4541    | 5,0989     | 9,5232     |



**Tablo 6.1.2.3:** IMKB100 endeksi Garch Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Modeli arasındaki %fark  $[(GARCH-BS)/BS]$

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE    |         |         |         |         |
|-------|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|       |                 | 30      | 60      | 90      | 180     | 360     |
| 1,179 | 39              | -3,89%  | -8,71%  | -11,73% | -15,76% | -16,80% |
| 1,122 | 41              | -8,53%  | -15,12% | -18,37% | -21,69% | -21,18% |
| 1,070 | 43              | -16,37% | -24,16% | -26,97% | -28,73% | -26,13% |
| 1,022 | 45              | -27,22% | -35,48% | -37,06% | -36,65% | -31,57% |
| 0,979 | 47              | -40,80% | -48,37% | -48,35% | -45,13% | -37,32% |
| 0,939 | 49              | -54,72% | -61,19% | -60,20% | -53,72% | -43,29% |
| 0,902 | 51              | -67,96% | -72,48% | -71,10% | -62,09% | -49,38% |
| 0,868 | 53              | -79,74% | -82,08% | -80,08% | -70,02% | -55,45% |

## 6.2 Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli

Bu bölümde derin bir matematik bilgisi içermediği için diğer modellere göre basit ve anlaşılır opsiyon fiyatlama modeli olarak sayılan Binom Opsiyon Fiyatlama modeli dayanak varlığı IMKB30 ve IMKB100 endeksleri olan varsayımsal opsiyonların fiyatlaması için kullanılmıştır. Varsayımsal opsiyonlar Bölüm1.1 ve Bölüm1.2 de Garch Opsiyon Fiyatlama modeli için kullanılan aynı opsiyonlardır. Binom opsiyon fiyatlama modeli zaman aralıkları sıfıra yaklaştıkça Black-Scholes modeli ile aynı sonucu üretmektedir. Bu uygulamada 500 adımlık bir ağaç yapısı ile opsiyon fiyatlaması yapılmıştır. 100 adımlık bir ağaç yapısı fiyatlama için kullanıldığı zaman bile Black-Scholes opsiyon fiyatına oldukça yakın bir sonuç elde edilmektedir (Rendleman, Bartter, 1979). Modele girdi olarak risksiz getiri oranı %19, IMKB30 endeksi için yıllık standart sapması %54, IMKB100 endeksi için yıllık standart sapması %52'dir.

## 6.2.1 IMKB30 Endeksinin Binom Opsiyon Fiyatlaması

**Tablo 6.2.1.1:** IMKB30 endeksinin Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE   |         |         |         |         |
|-------|-----------------|--------|---------|---------|---------|---------|
|       |                 | 30     | 60      | 90      | 180     | 360     |
| 1,137 | 51              | 8,6249 | 10,1554 | 11,6358 | 15,1645 | 20,4686 |
| 1,094 | 53              | 7,071  | 8,9231  | 10,4172 | 13,9902 | 19,3847 |
| 1,055 | 55              | 5,8264 | 7,6906  | 9,1985  | 12,8159 | 18,3009 |
| 1,018 | 57              | 4,5818 | 6,4588  | 7,9798  | 11,616  | 17,217  |
| 0,983 | 59              | 3,5794 | 5,4641  | 6,9956  | 10,6908 | 16,336  |
| 0,951 | 61              | 2,8191 | 4,7082  | 6,2459  | 9,9633  | 15,6577 |
| 0,921 | 63              | 2,0588 | 3,953   | 5,4962  | 9,2358  | 14,9794 |
| 0,892 | 65              | 1,5017 | 3,1971  | 4,7465  | 8,5083  | 14,3012 |
| 0,866 | 67              | 1,1511 | 2,506   | 3,9968  | 7,7808  | 13,6229 |
| 0,841 | 69              | 0,8011 | 2,1559  | 3,2872  | 7,0534  | 12,9446 |

Tablo 6.2.1.1 IMKB30 endeksinin varsayımsal opsiyonlarının Binom fiyatlama modeli sonuçlarını göstermektedir. Tablo 6.2.1.2 de görülen Black-Scholes modeli fiyatları ile karşılaştırıldığında birbirine oldukça yakın sonuçlar ürettiği görülmüştür. Daha açıklayıcı olması için Tablo 6.2.1.2 incelendiğinde Binom fiyatlama modelinin Black-Scholes fiyatından  $[(B\dot{I}NOM-BS)/BS]$  olarak hesaplanan % sapmalarının mutlak değerinin %0.08 ile %6,82 arasında değiştiği görülmektedir. Rendleman ve Bartter (1979) makalesindeki sonuçlar ile de örtüşmektedir. Burada da iki çok uç değer hariç tutulursa  $[(B\dot{I}NOM-BS)/BS]$  değerleri %0.1 ile %12.6 arasında değişmekte, %12,6 , %8,4 gibi sapma değerleri 12 adımlık ağaçtan elde edilen sonuçlarda elde edilmiştir. Bu çalışmada 500 adımlık ağaç yapısı ile fiyatlama yapıldığı düşüldüğünde sapmalar biraz yüksek olarak bulunmuştur.

**Tablo 6.2.1.2:** IMKB30 Endeksi Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama modeli arasındaki sapma [(BINOM-BS)/BS]

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE  |        |        |       |        |
|-------|-----------------|-------|--------|--------|-------|--------|
|       |                 | 30    | 60     | 90     | 180   | 360    |
| 1,137 | 51              | 0,62% | 0,16%  | 1,16%  | 1,80% | 1,58%  |
| 1,094 | 53              | 0,15% | 1,68%  | 1,97%  | 1,84% | 1,32%  |
| 1,055 | 55              | 2,07% | 2,09%  | 1,86%  | 1,32% | 0,77%  |
| 1,018 | 57              | 1,18% | 0,70%  | 0,44%  | 0,11% | -0,10% |
| 0,983 | 59              | 1,55% | 0,84%  | 0,53%  | 0,15% | -0,08% |
| 0,951 | 61              | 4,70% | 3,64%  | 2,91%  | 1,80% | 0,97%  |
| 0,921 | 63              | 1,95% | 4,56%  | 4,25%  | 3,06% | 1,87%  |
| 0,892 | 65              | 0,93% | 2,32%  | 4,04%  | 3,81% | 2,57%  |
| 0,866 | 67              | 6,82% | -2,31% | 1,61%  | 3,91% | 3,07%  |
| 0,841 | 69              | 4,33% | 3,00%  | -2,75% | 3,19% | 3,32%  |

## 6.2.2 IMKB100 Endeksinin Binom Opsiyon Fiyatlaması

**Tablo 6.2.2.1:** IMKB100 endeksinin Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE   |        |        |         |         |
|-------|-----------------|--------|--------|--------|---------|---------|
|       |                 | 30     | 60     | 90     | 180     | 360     |
| 1,179 | 39              | 7,9738 | 9,0665 | 9,9752 | 12,6881 | 16,7754 |
| 1,122 | 41              | 6,3282 | 7,5912 | 8,7432 | 11,5023 | 15,6768 |
| 1,070 | 43              | 4,9133 | 6,3514 | 7,5160 | 10,3164 | 14,5783 |
| 1,022 | 45              | 3,6635 | 5,1121 | 6,2887 | 9,1306  | 13,4797 |
| 0,979 | 47              | 2,6559 | 4,1107 | 5,2958 | 8,1679  | 12,5835 |
| 0,939 | 49              | 1,8904 | 3,3475 | 4,5372 | 7,4284  | 11,8896 |
| 0,902 | 51              | 1,2112 | 2,5839 | 3,7786 | 6,6889  | 11,1957 |
| 0,868 | 53              | 0,8570 | 1,9006 | 3,0201 | 5,9494  | 10,5018 |
| 0,836 | 55              | 0,5029 | 1,5454 | 2,4187 | 5,2099  | 9,8079  |

Tablo 6.2.2.1 IMKB100 endeksinin varsayımsal opsiyonlarının Binom fiyatlama modeli sonuçlarını göstermektedir. IMKB100 endeksi opsiyonlarını fiyatları da IMKB30 endeksi Binom modeli opsiyon fiyatları ile Black-Scholes modeli opsiyon fiyatları arasındaki ilişki ile çok benzer olduğu Tablo 6.1.2.2 ve Tablo 6.2.2.1 incelendiğinde görülmektedir. IMKB100 endeksi varsayımsal opsiyonların Binom modeli fiyatları ile Tablo 6.1.2.2 de görülen Black-Scholes modeli fiyatları ile

karşılaştırıldığında birbirine oldukça yakın sonuçlar ürettiği görülmüştür. Tablo 6.2.2.2 incelendiğinde Binom fiyatlama modelinin Black-Scholes fiyatından [(BINOM-BS)/BS] olarak hesaplanan yüzde sapmalarının mutlak değerinin %0.09 ile %6 arasında değiştiği görülmektedir. Tablo 6.2.2.2 ve Tablo 6.2.1.2 birlikte değerlendirildiğinde IMKB100 endeksi varsayımsal opsiyonlarının Black-Scholes modelinden sapma yüzdeleri IMKB30 endeksi varsayımsal opsiyonlarının Black-Scholes modelinden sapmalarına sapma yüzdelerine göre genel olarak daha düşük olduğu gözlemlenmektedir.

**Tablo 6.2.2.2:** IMKB100 Endeksi Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama modeli arasındaki sapma [(BINOM-BS)/BS]

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE     |          |          |         |          |
|-------|-----------------|----------|----------|----------|---------|----------|
|       |                 | 30       | 60       | 90       | 180     | 360      |
| 1,179 | 39              | 0,3595%  | 0,4305%  | -0,3811% | 1,1705% | 1,4660%  |
| 1,122 | 41              | 0,3549%  | 0,4784%  | 1,2829%  | 1,7008% | 1,3965%  |
| 1,070 | 43              | 1,2710%  | 1,9071%  | 1,8659%  | 1,4568% | 0,9009%  |
| 1,022 | 45              | 1,3700%  | 0,8460%  | 0,5484%  | 0,1580% | -0,1008% |
| 0,979 | 47              | 1,9334%  | 1,0846%  | 0,6783%  | 0,1991% | -0,0900% |
| 0,939 | 49              | 3,9569%  | 3,9765%  | 3,3296%  | 2,1538% | 1,1818%  |
| 0,902 | 51              | -1,5146% | 2,6530%  | 3,8084%  | 3,3386% | 2,1605%  |
| 0,868 | 53              | 6,2000%  | -2,2681% | 0,7389%  | 3,4657% | 0,3595%  |
| 0,836 | 55              | -2,2746% | 3,9977%  | -1,4438% | 2,1763% | 2,9892%  |

### 6.3 Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile Opsiyon Fiyatlama

Açık Sonlu Farklar Yöntemi fizik ve finasta modellenen kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için yaygın olarak kullanılan nümerik çözüm metotlarından biri olduğu modelin detayları bölüm 5.3’de anlatılmıştır. Çalışmanın bu bölümünde Garch Opsiyon Fiyatlama uygulamasının ve Binom Opsiyon Fiyatlama modelinde kullanılan varsayımsal IMKB30 ve IMKB100 endeksi opsiyonları kullanılmıştır.

#### 6.3.1 IMKB30 Endeksinin Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile Opsiyon Fiyatlaması

Açık Sonlu Farklar Yönteminin uygulanmasında en önemli sorun kaynağı olan sonuca yakınsayamama sorunu varlık adımı ve zaman adımının birbiri ile ilişkili

olarak  $\Delta t \leq \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\Delta S}{S}$  belirlenmesi gerekmektedir ve varlık adımı sayısı 50 olarak

belirlenmiş ve zaman adımının uzunluğu söz konusu ilişki varlık adımı sayısı  $l$  ‘ye

göre  $\Delta t = \frac{1}{\sigma^2 \cdot J^2}$  kullanılarak IMKB30 opsiyonları için  $\Delta t = 0,00074$  olarak

belirlenerek 30 gün vadeli opsiyonlar için zaman adımı sayısı 113, 60 gün vadeli opsiyonlar için zaman adımı sayısı 225 , 90 gün vadeli opsiyonlar için zaman adımı sayısı 336, 180 gün vadeli opsiyonlar için zaman adımı sayısı 665, 360 gün vadeli opsiyonlar için zaman adımı sayısı 1350 olarak belirlenmiştir.

**Tablo 6.3.1.1:** IMKB30 endeksinin Açık Sonlu Farklar Yöntemi Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçları

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE   |         |         |         |         |
|-------|-----------------|--------|---------|---------|---------|---------|
|       |                 | 30     | 60      | 90      | 180     | 360     |
| 1,137 | 51              | 8,6064 | 10,1964 | 11,5761 | 15,0070 | 20,2219 |
| 1,094 | 53              | 7,1001 | 8,8371  | 10,2944 | 13,8535 | 19,2249 |
| 1,055 | 55              | 5,7529 | 7,5985  | 9,1124  | 12,7690 | 18,2703 |
| 1,018 | 57              | 4,5783 | 6,4836  | 8,0309  | 11,7526 | 17,3578 |
| 0,983 | 59              | 3,5760 | 5,4898  | 7,0768  | 10,8020 | 16,4858 |
| 0,951 | 61              | 2,7356 | 4,6083  | 6,1531  | 9,9123  | 15,6517 |
| 0,921 | 63              | 2,0394 | 3,8292  | 5,3422  | 9,0786  | 14,8526 |
| 0,892 | 65              | 1,5316 | 3,1910  | 4,6471  | 8,3247  | 14,1040 |
| 0,866 | 67              | 1,1190 | 2,6308  | 4,0183  | 7,6180  | 13,3860 |
| 0,841 | 69              | 0,7821 | 2,1330  | 3,4425  | 6,9490  | 12,6923 |

Tablo 6.3.1.1 varsayımsal IMKB30 endeksi opsiyonlarının Açık Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak belirlenen opsiyon fiyatlarını göstermektedir. Tablo 6.1.1.2 ve Tablo 6.3.2.1 beraber değerlendirildiğinde Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile elde edilen sonuçların Black-Scholes opsiyon fiyatlarına 50 varlık adımı kullanılmasına rağmen çok yakın değerler olduğu görülmektedir. Geske ve Shastri (1985) Binom, Açık Sonlu Farklar Yöntemi ve Kapalı Sonlu Farklar Yöntemlerinin performanslarının değerlendirdiği çalışmada varlık adımı sayısı 200 olarak kullanılmıştır ve bu uygulamada varlık adımı sayısı 50 olarak kullanılmasına rağmen doğruluğu oldukça yüksek olan yakınsama sağlanmıştır.

**Tablo 6.3.1.2:** IMKB30 Endeksi Açık Sonlu Farklar Yöntemi Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama modeli arasındaki sapma  $[(KESİN SONLU FARK-BS)/BS]$

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE  |       |       |       |       |
|-------|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       |                 | 30    | 60    | 90    | 180   | 360   |
| 1,137 | 51              | 0,41% | 0,56% | 0,64% | 0,74% | 0,36% |
| 1,094 | 53              | 0,56% | 0,70% | 0,76% | 0,84% | 0,48% |
| 1,055 | 55              | 0,78% | 0,87% | 0,91% | 0,95% | 0,60% |
| 1,018 | 57              | 1,10% | 1,08% | 1,08% | 1,07% | 0,72% |
| 0,983 | 59              | 1,45% | 1,32% | 1,69% | 1,19% | 0,84% |
| 0,951 | 61              | 1,60% | 1,44% | 1,38% | 1,28% | 0,93% |
| 0,921 | 63              | 0,99% | 1,28% | 1,33% | 1,31% | 1,00% |
| 0,892 | 65              | 2,94% | 2,13% | 1,86% | 1,57% | 1,16% |
| 0,866 | 67              | 3,84% | 2,55% | 2,15% | 1,73% | 1,27% |
| 0,841 | 69              | 1,86% | 1,91% | 1,85% | 1,67% | 1,30% |

Tablo 6.3.1.2 Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile elde edilen opsiyon fiyatlarının Black-Scholes fiyatlarından yüzde sapmalarının değerleri görülmektedir. Yüzde sapmaların %0,41 ile %1,30 arasında değiştiği görülmektedir ki bu da yönetimin oldukça yüksek bir doğrulukla yakınsadığının gösterdiği bir durumdur.

### 6.3.2 IMKB100 Endeksinin Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile Opsiyon Fiyatlaması

Bu bölümde IMKB100 endeksi varsayımsal opsiyonlarının Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile fiyatlaması IMKB30 endeksi varsayımsal opsiyonlarında olduğu gibi varlık adımı sayısı 50 olarak seçilmiş ve modelin en önemli dezavantajı olan yakınsamama sorununu çözmek için varlık adımı ile zaman adımı arasındaki ilişki kullanılarak 30 gün vadeli opsiyonlar için zaman adımı sayısı 119, 60 gün vadeli opsiyonlar için zaman adımı sayısı 217 , 90 gün vadeli opsiyonlar için zaman adımı sayısı 325, 180 gün vadeli opsiyonlar için zaman adımı sayısı 650, 360 gün vadeli opsiyonlar için zaman adımı sayısı 1300 olarak belirlenmiştir.

**Tablo 6.3.2.1:** IMKB100 endeksinin Açık Sonlu Farklar Yöntemi Opsiyon Fiyatlandırma Modeli Sonuçları

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE   |        |         |         |         |
|-------|-----------------|--------|--------|---------|---------|---------|
|       |                 | 30     | 60     | 90      | 180     | 360     |
| 1,179 | 39              | 7,9637 | 9,0601 | 10,0572 | 12,6097 | 16,5751 |
| 1,122 | 41              | 6,3188 | 7,5836 | 8,6732  | 11,3776 | 15,5177 |
| 1,07  | 43              | 4,8755 | 6,2699 | 7,4267  | 10,2427 | 14,5211 |
| 1,022 | 45              | 3,6447 | 5,1170 | 6,3073  | 9,1946  | 13,5784 |
| 0,979 | 47              | 2,6378 | 4,1105 | 5,3142  | 8,2318  | 12,6888 |
| 0,939 | 49              | 1,8507 | 3,2635 | 4,4455  | 7,3529  | 11,8518 |
| 0,902 | 51              | 1,2602 | 2,5600 | 3,6939  | 6,5540  | 11,0654 |
| 0,868 | 53              | 0,8307 | 1,9826 | 3,0477  | 5,8291  | 10,3266 |
| 0,836 | 55              | 0,5247 | 1,5107 | 2,4922  | 5,1695  | 9,6305  |

Tablo 6.3.2.1 varsayımsal IMKB100 endeksi opsiyonlarının Açık Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak belirlenen opsiyon fiyatlarını göstermektedir. Tablo 6.1.2.2 ve Tablo 6.3.2.1 beraber değerlendirildiğinde Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile elde edilen sonuçların Black-Scholes opsiyon fiyatlarına 50 varlık adımı kullanılmasına rağmen çok yakın değerler olduğu görülmektedir. Geske ve Shastri (1985) Binom, Açık Sonlu Farklar Yöntemi ve Kapalı Sonlu Farklar Yöntemlerinin performanslarının değerlendirdiği çalışmada varlık adımı sayısı 200 olarak kullanılmıştır ve bu uygulamada varlık adımı sayısı 50 olarak kullanılmasına rağmen doğruluğu oldukça yüksek olan yakınsama sağlanmıştır.

Tablo 6.3.2.2 Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile elde edilen opsiyon fiyatlarının Black-Scholes fiyatlarından yüzde sapmalarının değerleri görülmektedir. Yüzde sapmaların %0,23 ile %2,94 arasında değiştiği görülmektedir ki bu da yönetimin oldukça yüksek bir doğrulukla yakınsadığının gösterdiği bir durumdur.

**Tablo 6.3.2.2:** IMKB100 Endeksi Açık Sonlu Farklar Yöntemi Opsiyon Fiyatlama Modeli ile Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama modeli arasındaki sapma [(KESİN SONLU FARK-BS)/BS]

| S/X   | UYGULAMA FİYATI | VADE  |       |       |       |       |
|-------|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       |                 | 30    | 60    | 90    | 180   | 360   |
| 1,179 | 39              | 0,23% | 0,36% | 0,44% | 0,55% | 0,25% |
| 1,122 | 41              | 0,21% | 0,38% | 0,47% | 0,60% | 0,37% |
| 1,07  | 43              | 0,49% | 0,60% | 0,66% | 0,73% | 0,51% |
| 1,022 | 45              | 0,85% | 0,94% | 0,85% | 0,86% | 0,63% |
| 0,979 | 47              | 1,24% | 1,08% | 1,03% | 0,98% | 0,75% |
| 0,939 | 49              | 1,78% | 1,37% | 1,24% | 1,12% | 0,86% |
| 0,902 | 51              | 2,47% | 1,70% | 1,48% | 1,25% | 0,97% |
| 0,868 | 53              | 2,94% | 1,95% | 1,66% | 1,37% | 1,07% |
| 0,836 | 55              | 1,96% | 1,66% | 1,55% | 1,38% | 1,13% |



## 7. SONUÇ

Uluslararası ve ulusal piyasalarda karşılaşılan risklerden korunabilmek için türev ürünler önemli fırsatlar sunmakta rekabet koşullarının gittikçe arttığı günümüz koşullarında ekonomik birimlerin devamlılığına katkıda bulunmaktadır. Bu nedenle oldukça yüksek işlem hacimlerine ulaşan ve pek çok kurum ve bireysel yatırımcı tarafından kullanılan türev araçlarından biri olan opsiyonlarla ilgili çalışmalar önem kazanmaktadır. Türkiye’de uluslararası piyasalarda olduğu gibi opsiyon alım-satımının yapıldığı kurumsallaşmış borsalar bulunmamakla beraber, 2005 yılında vadeli işlem sözleşmelerinin alınıp satılabildiği İzmir Vadeli İşlemler ve Opsiyon Borsasında opsiyon sözleşmelerinin alınıp satılabilmesi için çalışmaların başlaması Türkiye için de önümüzdeki günlerde opsiyon sözleşmeleri konusu önem kazanacağının işaretidir.

Bu çalışmada opsiyon fiyatlama konusu incelenmiş ve literatürde geliştirilmiş modellerden üçü olan GARCH Opsiyon Fiyatlama Modeli, Binom opsiyon Fiyatlama Modeli ve Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile Opsiyon Fiyatlama Modeli kullanılarak IMKB30 ve IMKB100 endeksleri varsayımlar opsiyonlarının fiyatlaması yapılmıştır. Varsayımsal opsiyonlar CBOE’de alınıp satılan endeks opsiyonlarındaki uygulama fiyatları ve spot fiyatları arasındaki ilişkiler dikkate alınarak oluşturulmuştur. Bu doğrultuda çalışmada öncelikle opsiyon fiyatlama modellerinin temelini oluşturan stokastik değişkenler ve süreçler detaylı bir şekilde incelenmiş, daha sonra kendisinden sonraki modellere temel teşkil etmesi nedeniyle Black-Scholes modeli detaylı olarak incelenmiş ve modelin sistematik yanlış fiyatlama nedenlerine değinilmiş ve opsiyon fiyatlama modellerinin literatürdeki gelişimi ve modellerin Black-Scholes’ un modelin sebep olduğu yanlış fiyatlama sorunlarını hangi varsayımlarını genelleştirerek çözüm üretmeye çalıştıkları üzerinde durulmuştur. Sonraki bölümde uygulaması yapılan GARCH Opsiyon Fiyatlama Modeli, Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli ve Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile

Opsiyon Fiyatlama Modeli detayları anlatılmış ve son bölümde uygulama gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın sonuçlarına kısaca özetlenecek olursa :

GARCH Opsiyon Fiyatlama Modeli ile ilgili yapılan çalışmalar, parametrelerdeki değişime göre fiyatlamamanın Black-Scholes fiyatlarından farklılık gösterdiği yani sistematik bir sapmanın her durumda gözlenmediği, modelin Black Scholes modelini bünyesinde barındırdığı, GARCH opsiyon fiyatlama modelinin genel olarak Black-Scholes fiyatlarından düşük fiyatlama yaptığı, bu etkinin vade kısaltıldıkça arttığı belirtilmiştir. Bunun da Black-Scholes sistematik Yanlış fiyatlamalarına çözüm getirdiği yönünde yorumlanmaktadır. Bu çalışmada yapılan uygulamada da benzer sonuçlara ulaşılmıştır. GARCH opsiyon fiyatları, Black Scholes opsiyon fiyatlarından daha düşük olarak bulunmuştur.

Binom Opsiyon Fiyatlama Modeli matematiksel olarak kolay anlaşılabilir olması, Black-Scholes modeliyle Amerikan tipi opsiyonların analitik çözümünün elde edilememesi, fakat binom modelinde bunun özelliğın çözüm sürecine kolayca entegre edilebilmesi gibi avantajları ile ön plana çıkmaktadır. Literatürde Binom opsiyon fiyatlama modeli ile hesaplanan avrupa tipi call opsiyonun fiyatının Black-Scholes modeliyle elde sonsuz küçük zaman adımlarında eşit olduğu ispatlanmıştır. Bu doğrultuda beklendiği gibi çalışmanın uygulama kısmında 500 adımlık ağaç yapısı ile hesaplanan binom opsiyon fiyatları , Black-Scholes fiyatlarında çok ufak sapmalar göstermiştir.

Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile Opsiyon Fiyatlama Opsiyon sözleşmelerindeki değişiklikleri kolayca modele entegre edilebilen binom opsiyon fiyatlama modelinden daha gelişmiş bir nümerik çözüm metodudur. Çalışmanın uygulama sonuçlarına göre varsayımsal portföyler kar payı ödemesi olmayan basit avrupa tipi call opsiyonları şeklinde oluşturulduğu için Açık Sonlu Farklar Yöntemi ile elde edilen opsiyon fiyatlarının Black-Scholes opsiyon fiyatlarından çok küçük sapmalar göstermesi beklenen bir sonuç olmuştur.

## KAYNAKLAR

- Albanese, C. and Campolieti, G.,** 2006. Advanced Derivatives Pricing and Risk Management, Elsevier Academic Press, London.
- Amin, K. I. and Ng, V. K.,** 1993. Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility, *The Journal of Finance*, **48(3)** , 881-910.
- Anderson, J. W.,** 2001. The Black-Scholes Option Pricing Model and Assumptions, Thesis, University of Louisville, Louisville, Kentucky, MA.
- Ball, C. and Torous, W.,** 1985. On jumps in common stock prices and their impact on call pricing, *The Journal of Finance* , **40**, 155-173.
- Black, F. and Scholes, M.,** 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *The Journal of Political Economy*, **81(3)**, 637-654.
- Black ,F. and Scholes M.,** 1972. The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency, *The Journal of Finance*, **27(2)**, 399-417.
- Boyle, P. P.,** 1988. A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **23(1)**, 1-12.
- Boyle, P. and Brodie, M. and Glasserman, P.,** 1997. Monte Carlo Methods For Security Pricing, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **21**, 1267-1321
- Bollerslev, T.,** 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- Brennan, M. J. and Schwartz, E.S.,** 1978. Finite Difference Methods And Jump Processes Arising In the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **13(3)**, 461-474.
- Chaudhury, M. and Wei, J.Z.,** 1996. A Comparative Study of GARCH(1,1) and Black-Scholes Option Prices, Working Paper.
- Cox, J. C. and Ross, S. A. and Rubinstein, M.,** 1979. Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, **7**, 229-263.

- Cuthbertson, K. and Nitzsche, D.,** 2004. Quantitative Financial Economics, John Wiley & Sons, England.
- Duan, J.,** 1995. The Garch Option Pricing Model, *Mathematical Finance*, **5(1)**, 13-32.
- Duan, J.,** 1998. Empirical Martingale Simulation for Asset Prices, *Management Science*, **44(9)**, 1218-1233.
- Duan, J. and Zhang, H.,** 2001. Pricing Hang Seng Index Options Around The Asian Financial Crisis- A GARCH approach, *Journal of Banking & Finance*, **25**, 1989-2014.
- Engel, R.,** 1982. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, *Econometrica*, **52**, 289-311.
- Geske R. and Shastri, K.,** 1985. Valuation by Approximation: A Comparison Of Alternative Option Valuation Techniques, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **20(1)**, 45-71
- Harikumar, T. and Boyrie, M.,** 2004. Evaluation of Black-Scholes and Garch Models Using Currency Call Options Data, *Review of Quantitative Finance and Accounting*, **23**, 299-312.
- Hull, J. C. and White, A.,** 1988. The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **23(3)**, 237-251.
- Hull, J. C. and White, A.,** 1990. Valuing Derivative Securities Using The Explicit Finite Difference Method, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **25(1)**, 87-100.
- Hull, J. C. and White, A.,** 1987. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *The Journal of Finance*, **42(2)**, 281-300.
- Hull, J. C.,** 2005. Options, Futures, and Other Derivatives, Prentice Hall, New Jersey.
- Macbeth, J. D. and Merville L. J.,** 1979. An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model, *The Journal of Finance*, **34(5)**, 1173-1186.
- Merton, R. C.,** 1973. Theory of Rational Option Pricing, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, **4(1)**, 141-183.
- Merton, R.C.,** 1976. Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**, 125-44.

- Naik, V.**, 1993. Option Valuation and Hedging Strategies with Jumps in the Volatility of Asset Returns, *The Journal of Finance*, **48(5)**, 1969-1984.
- Poon, S.**, 2005. A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility, John Wiley&Sons.
- Rendleman, R. J. and Bartter, B. J.**, 1979. Two-State Option Pricing, *The Journal of Finance*, **34(5)**, 1093-1110.
- Rubinstein, M.**, 1983. Displaced Diffusion Option Pricing, *The Journal of Finance*, **38(1)**, 213-217
- Rubinstein, M.**, 1994. Implied Binomial Trees, *The Journal of Finance*, **49(3)**, 771-818.
- Scott, L. O.**, 1987. Option Pricing When The Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* , **22(4)**, 419-438.
- Scott L. O.**, 1997. Pricing Stock Options in A Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier Inversion Methods, *Mathematical Finance*, **7(4)**, 413-424.
- Wilmott, P.**, 2005. Introduces Quantitative Finance, John Wiley & Sons, England.
- Wilmott, P. and Howison, S. and Dewyne J.**, 1995. The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction, Cambridge University Press, United Kindom.
- Tsay, R. S.**, 2002. Analysis of Financial Time Series, Wiley-Interscience.

**EKLER**

## EK A

### IMKB30 endeksi varsayımsal opsiyonların Matlab 6 da yazılmış Garch Opsiyon fiyatlama kodları:

```
r=0.00052; s0=58
sk=[51;53;55;57;59;61;63;65;67;69;71;73;75;77;79]
mat=[30 60 90 180 360]
[n,a]=size(sk)
[a,m]=size(mat)
hti=0.000951583
alfa0=0.00000884
alfa1=0.086484
beta1=0.90481
lamda=-0.056344
nsim=1000
xt=ones(nsim,1);
ht=hti*ones(nsim,1)
zt=ones(nsim,1)
optsum=zeros(n,m)
opt=optsum
xta=s0*ones(nsim,1)
xt=s0*xt
iconst=1
i=1
k=1
while k<=m
    k=iconst
    xit=randn(nsim,1)
    xt_1=xt
    xt=xt.*exp(-0.5*ht+sqrt(ht).*xit)
    ht=alfa0*ones(nsim,1)+alfa1*(ht.*(xit-
lamda*ones(nsim,1))).^2+beta1*ht
    zt=xta.*(xt./xt_1)
    z0t=(1/nsim)*exp(-r*i)*sum(zt)
    xta=(s0/z0t)*zt
    if i==mat(1,k)
        iconst=iconst+1
        j=1
        while j<=n
            maxpay=xta-sk(j,1)*ones(nsim,1)
            maxpay=max(maxpay,zeros(nsim,1))
            optsum(j,k)=exp(-r*i)*sum(maxpay)
            opt=optsum/nsim
        j=j+1
    end
    end
    i=i+1
    if i>mat(1,m)
        break
    end
end
end
```

## EK B

### IMKB100 endeksi varsayımsal opsiyonların Matlab 6 da yazılmış Garch Opsiyon fiyatlama kodları:

```
r=0.00052; s0=46
sk=[39;41;43;45;47;49;51;53;55;57;59;61;63;65;67]
mat=[30 60 90 180 360]
[n,a]=size(sk)
[a,m]=size(mat)
hti=0.00087808
alfa0=0.00000866
alfa1=0.097225
beta1=0.894553
lamda=-0.048233
nsim=1000
xt=ones(nsim,1);
ht=hti*ones(nsim,1)
zt=ones(nsim,1)
optsum=zeros(n,m)
opt=optsum
xta=s0*ones(nsim,1)
xt=s0*xt
iconst=1
i=1
k=1
while k<=m
    k=iconst
    xit=randn(nsim,1)
    xt_1=xt
    xt=xt.*exp(-0.5*ht+sqrt(ht).*xit)
    ht=alfa0*ones(nsim,1)+alfa1*(ht.*(xit-
lamda*ones(nsim,1))).^2+beta1*ht
    zt=xta.*(xt./xt_1)
    z0t=(1/nsim)*exp(-r*i)*sum(zt)
    xta=(s0/z0t)*zt
    if i==mat(1,k)
        iconst=iconst+1
        j=1
        while j<=n
            maxpay=xta-sk(j,1)*ones(nsim,1)
            maxpay=max(maxpay,zeros(nsim,1))
            optsum(j,k)=exp(-r*i)*sum(maxpay)
            opt=optsum/nsim
            j=j+1
        end
    end
    i=i+1
    if i>mat(1,m)
        break
    end
end
end
```

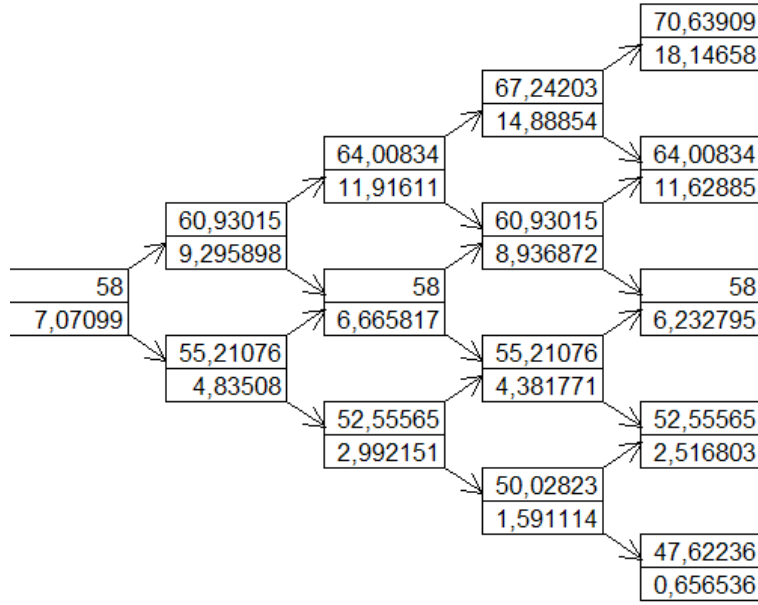


## EK C

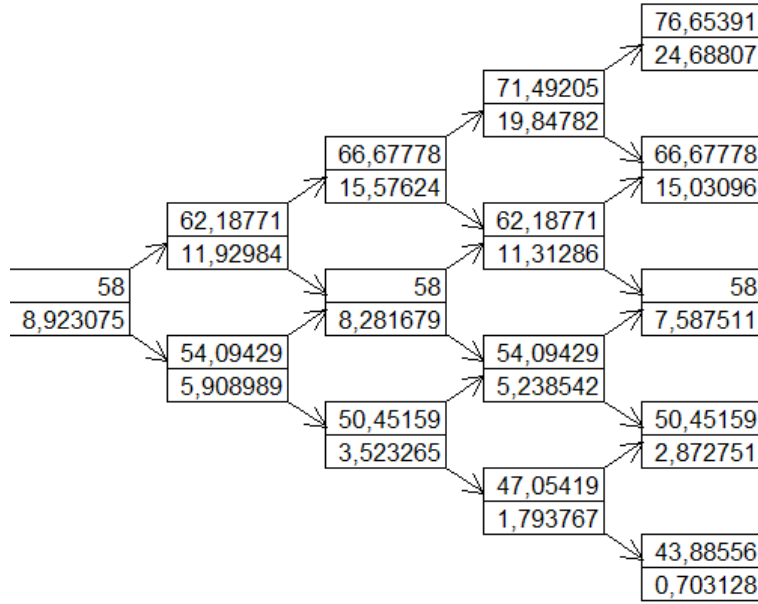
**IMKB30 endeksi vadesi 30, uygulama fiyatı 69 olan varsayımsal opsiyonun Matlab 6 da yazılmış olan Açık Sonlu Farklar yöntemine göre fiyatlama kodu:**

```
Spot=58;
Exercise=69;
r=0.19;
maturity=(30/360);
volatility=0.54;
number_assetstep=50
Strike=Exercise*ones(number_assetstep+1,1)
S=zeros(number_assetstep+1,1)
V0=zeros(number_assetstep+1,1)
V1=zeros(number_assetstep+1,1)
delta=zeros(number_assetstep+1,1)
gamma=zeros(number_assetstep+1,1)
theta=zeros(number_assetstep+1,1)
H=0.5*volatility*volatility
assetstep=2*Exercise/number_assetstep
timestep=assetstep^2/(volatility^2*4*Exercise^2)
number_timestep=floor(maturity/timestep)+1
timestep=maturity/number_timestep
for i=1:number_assetstep+1
    S(i,1)=i*assetstep
    V0(i,1)=max((S(i,1)-Strike(i,1)),0)
end
j=2
for j=2:number_timestep+1
    for i=2:number_assetstep
        delta(i,1)=(V0(i+1,1)-V0(i-1,1))/(2*assetstep)
        gamma(i,1)=(V0(i+1,1)-2*V0(i,1)+V0(i-1,1))/assetstep^2
        V1(i,1)=V0(i,1)+timestep*(H*S(i,1)^2*gamma(i,1)+r*S(i,1)*delta(i,1)-
r*V0(i,1))
    end
    V1(1,1)=0
    V1(number_assetstep+1,1)=2*V1(number_assetstep,1)-V1(number_assetstep-1,1)
    for i=1:number_assetstep+1
        V0(i,1)=V1(i,1)
    end
end
x=V0(nearest+1,1)-V0(nearest,1)
y=S(nearest+1,1)-S(nearest,1)
optionvalue=V0(nearest,1)+((x/y)*(Spot-S(nearest,1)))
```

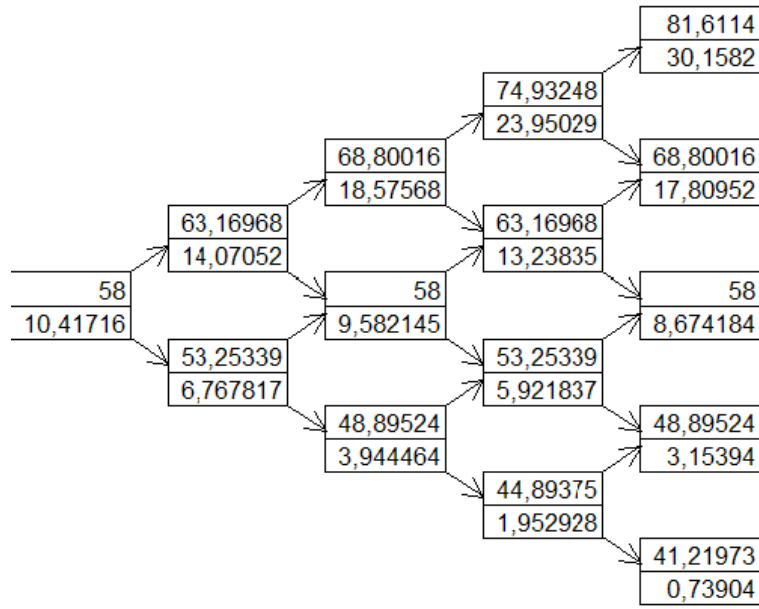
## EK D



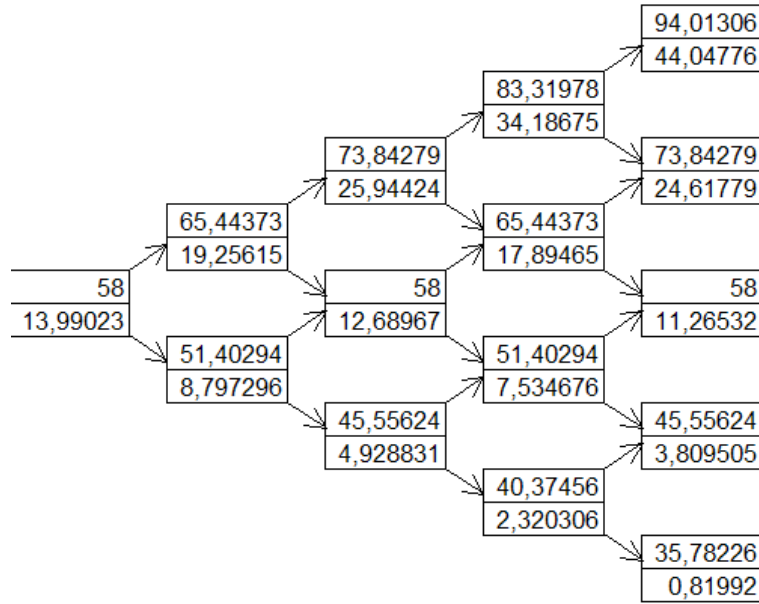
Uygulama fiyatı 53, Vadesi 30 olan opsiyonun 500 adımlık ağaç yapısının ilk 5 adımı



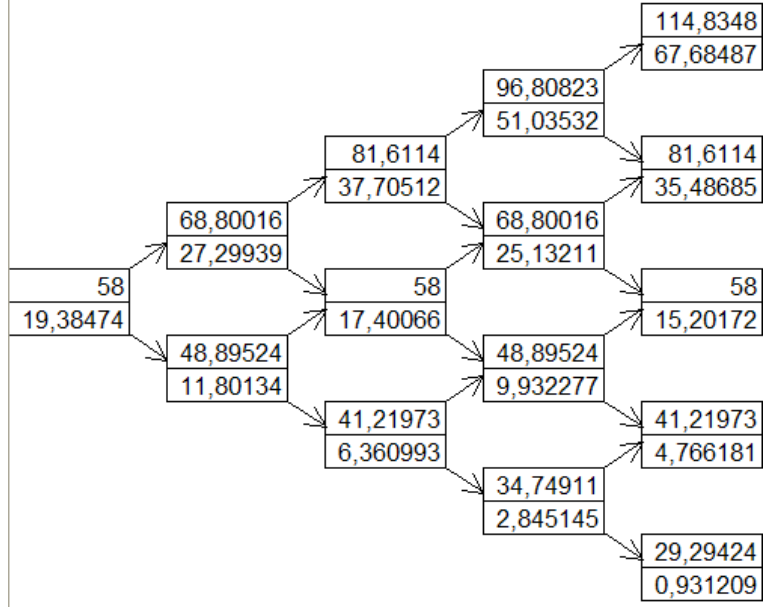
Uygulama fiyatı 53, Vadesi 60 olan opsiyonun 500 adımlık ağaç yapısının ilk 5 adımı



Uygulama fiyatı 53, Vadesi 90 olan opsiyonun 500 adımlık ağaç yapısının ilk 5 adımı



Uygulama fiyatı 53, Vadesi 180 olan opsiyonun 500 adımlık ağaç yapısının ilk 5 adımı



Uygulama fiyatı 53, Vadesi 360 olan opsiyonun 500 adımlık ağaç yapısının ilk 5 adımı

## **ÖZGEÇMİŞ**

Zeynep İltüzer 1980 yılında Ankara’da dünyaya gelmiştir. 1998 yılında Haydarpaşa Süper Lisesini bitirdikten sonra 2004 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği bölümünden birincilikle mezun olmuştur. Mezuniyetinden hemen sonra özel bir kurumda kalite mühendisi olarak çalıştıktan sonra 2005 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi , İşletme Mühendisliği Yüksek Lisans eğitimine başlamıştır. Aynı zaman da İTÜ İşletme Fakültesi , Muhasebe-Finansman Anabilim Dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.