

**MODEL SEÇİMİNDE BAYESÇİ
YAKLAŞIMLARIN KULLANIMI**

NACİ MURAT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**

**ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MODEL SEÇİMİNDE BAYESCİ
YAKLAŞIMLARIN KULLANIMI**

NACİ MURAT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

SAMSUN-2007

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından/..... tarihinde yapılan sınav ile
.....Ana
bilim Dalı 'nda YÜKSEK LİSANS / DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :

Üye :

Üye :

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

....../...../2007

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Hipotez testi, farklılıklara sahip olan iki temel istatistiksel düşünme tarzı tarafından önerilen çözümlere sahip bir model seçim problemidir. Bu istatistiksel yaklaşımlar; Klasik ve Bayesci yaklaşımlardır. Bu farklılıkların en önemlisi Bayesci yaklaşımdaki önsel seçimi olduğu bilinir. Oysa, gerçekte iki yaklaşım arasında temel başka ayrılıkların olduğu da bilinen bir gerçektir. Bu tezde, Bayesci hipotez testlerinin temel basit yönleri özet olarak verilerek, simüle edilen veri üzerine örnekler verilmiştir.

Standart istatistiksel metotlar model belirsizliğini ihmal eder. Veri analizcileri olası model sınıfından bir model seçer ve sanki seçilen model veriyi üretmiş gibi işleme devam eder. Bu yaklaşım model seçiminde belirsizliği ihmal ederek istatistiksel çıkarımlar için güven aralıklarını daha geniş tutar ve daha riskli kararlara neden olur. Oysa Bayesci model ortalaması (BMA) bu model belirsizliğini göz önüne alan bir yapı sunar. Bu çalışmada BMA yaklaşımını sunarak gerçek hayattan bir probleme uygulaması verilmiştir. Uygulamada, BMA örnek kestirim performansını geliştirmiştir.

Anahtar kelimeler: Bayesci yaklaşım, Bayesci hipotez testi, Bayes Faktörü, Bayesci Model ortalaması, Model belirsizliği

ABSTRACT

Hypothesis testing is a model selection problem for which the solution proposed by the two main statistical streams of thought, frequentists and Bayesians, substantially differ. One may think that this fact might be due to the prior chosen in the Bayesian analysis. However, the Bayesian robustness viewpoint has shown that, in general, this is not so and hence a profound disagreement between both approaches exists. In this thesis, we briefly revise the basic aspects of hypothesis testing for Bayesian procedures and discuss illustrations on simulated data.

Standard statistical practice ignores model uncertainty. Data analysts typically select a model from some class of models and then proceed as if the selected model had generated the data. This approach ignores the uncertainty in model selection, leading to over-confident inferences and decisions that are more risky than one thinks they are. Bayesian model averaging (BMA) provides a coherent mechanism for accounting for this model uncertainty.. In this study, we discuss BMA approach and present a real life application. In this application, BMA provides improved out-of sample predictive performance.

Key words: Bayesian approach, Bayesian Hypotesis testing, Bayesian model averaging, model uncertainty,

TEŞEKKÜR

Çalışmam sırasında hiçbir yardımı esirgemeyen danışmanım Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali CENGİZ'e, emeği geçen arkadaşlarıma ve ayrıca değerli eşime teşekkürlerimi sunarım.

Naci MURAT
Ağustos – 2007

İÇİNDEKİLER

	<u>SAYFA</u>
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
BÖLÜM 1 : GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 : TEMEL BİLGİLER	9
2.1. BAYES TEOREMİ	10
2.2. BAYES TEOREMİNİN GENİŞLETİLMİŞ HALİ	11
2.3. BAYES FAKTÖRÜ	12
BÖLÜM 3 : MATERYAL VE METOT	13
3.1. BAYESİAN HİPOTEZ TESTLERİ	13
3.2. BAYESÇİ MODEL ORTALAMASI	14
3.3. BMA'nın GERÇEKLEŞTİRİLMESİ	15
BÖLÜM 4 : BULGULAR	17
4.1. UYGULAMA 1	18
4.2. UYGULAMA 2	20
4.3. UYGULAMA 3	21
4.4. UYGULAMA 4	22
4.5. UYGULAMA 5	23
BÖLÜM 5 : SONUÇ VE TARTIŞMALAR	26
KAYNAKLAR	28
ÖZGEÇMİŞ	xx

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A	Stokastik olay (değişken)
B	Stokastik olay (değişken)
C	Stokastik olay (değişken)
D	Veri
H_0	Boş hipotez
H_1	Birinci hipotez
H_2	İkinci hipotez
M	Model
N	Verideki gözlem sayısı
p	Hipoteze karşı delilin gücünü gösteren veriye bağlı ölçüm
P	Olasılık
P_k	Model M_k 'daki parametre sayısı
α	Boş hipotezinin yanlış olarak ret edilmesi
β	Boş hipotezinin yanlış olarak kabul edilmesi
σ	Varyans
$\hat{\beta}^k$	M_k modeli altında β_k parametre vektörünün sonsal ortalaması
$\mathcal{A}$	Her bir modelde aynı yoruma sahip ilgilenilen regresyon parametreleri veya tahmin edilecek gelecek değerler gibi bir nicelik
B.F.	Bayes Faktörü
BIC	Bayesci Bilgi Kriteri
AIC	Akaiki Bilgi Kriteri
BMA	Bayesci Model Ortalaması
CAD	Kalp Damar Hastalığı

ŞEKİLLER LİSTESİ**ŞEKİL****SAYFA**

Şekil 4.1. Uygulama 1 için Visual Basic program çıktısı

17

Şekil 4.2. Uygulama 2 için Visual Basic program çıktısı

17

ÇİZELGELER LİSTESİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>SAYFA</u>
Çizelge 3.1. Thumb kuralına göre Bayes Faktör değerinin yorumlanması	14
Çizelge 4.1. Örneklem genişliği N=5 için sonuçlar	19
Çizelge 4.2. Örneklem genişliği N=10 için sonuçlar	19
Çizelge 4.3. Örneklem genişliği N=20 için sonuçlar	19
Çizelge 4.4. Örneklem genişliği N=5 için sonuçlar	20
Çizelge 4.5. Örneklem genişliği N=10 için sonuçlar	21
Çizelge 4.6. Örneklem genişliği N=20 için sonuçlar	21
Çizelge 4.7. Değişkenler ve tanımlamaları	23
Çizelge 4.8. Farklı Model Seçme Kriterlerine Göre Oluşturulan Modeller	24
Çizelge 4.9. BMA ve Adımsal (Entry) Metodu sonuçlarının karşılaştırılması	25

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Özel ve iş hayatımızın önemli bir bölümünü belirsizlik içinde geçiririz. Bu belirsizlik direkt olarak bilgi veya kanıt olmadığı veya unuttuğumuz (kaybettiğimiz) geçmişe veya henüz tam olmayan şu andaki veya gelecekteki durumlara bağlı olabilir. Belirsizliğin insan beyni tarafından nasıl değerlendirildiğini bilmediğimiz için genelde sadece bu tür değerlendirmelerin sonuçları ile ilgilenmek zorundayız.

Sürekli olarak kullandığımız ve yerine göre sezgi, sağduyu ve altıncı his dediğimiz yeteneklerimizden neden bilimsel amaçlar için yararlanmayalım?. Bu tür yeteneklerin bilimsel bir şekilde kullanılmasında Bayes Teorisi alternatif bir çıkarım olarak ortaya çıkmaktadır. Klasik çıkarım, örneklem verileri yardımı ile hakkında bilgi sahibi olmadığımız kitleye ilişkin sonuç çıkarılmasıdır. Güven aralıkları, hipotez testleri gibi istatistiksel işlemler, klasik çıkarımın esasıdır. Oysa “Hayat; yetersiz önsellerden yeterli sonuçlar çıkarma sanatıdır.” diyen Samuel Butler ile benzer düşünceye sahip olan Thomas Bayes, gözlenen örneklem verilerinden hareketle kitleye ilişkin çıkarım konusunda farklı bir bakış açısına sahiptir. Genelde nedenlerden sonuçlara doğru olan mantık zincirini, sonuçlardan nedenlere doğru oluşturmuştur.

Son 30 yıldır istatistiksel analizde diğer yaygın temel yaklaşımlardan farklı bir yaklaşımın kullanımı artmıştır. Bu yaklaşım Bayes çıkarımı olup 1763’de Thomas Bayes tarafından ortaya konulan çok bilindik teoreme dayanmaktadır. Thomas Bayes ortaya attığı olasılığa dayalı basit teoreminin istatistiksel bir çıkarım yöntemi olacağını herhalde tahmin bile etmemiştir. Ancak son 30 yılda bu teorem, çok sayıda istatistikçiye ve matematikçiye etkilemiş ve Bayes istatistiği temel istatistiksel çıkarım yöntemi

olarak kabul edilmiştir. Jeffreys, de Finetti, Savage ve Lindley gibi çoğu araştırmacı Bayes analizinin gelişiminde katkıda bulunmuşlardır. Son yıllarda, Bayes analizinin teknik uygulanabilirliği bilgisayar kullanımıyla da hızla gelişmiş ve yeni uygulama alanları açmıştır. Bu gelişmeler sonucunda Bayes analizi Berger (1985), Bernardo ve Smith (1994) ve O'Hagan (1994) gibi araştırmacılarla da genişletilmiştir.

Günümüzde Bayesci analiz her bilim dalında başarıyla uygulanmaktadır. Pek çok uygulamalı çalışma ortaya konmuştur. Bu çalışmaların geniş bir taraması aşağıda verilecektir.

Buck, Cavanaugh ve Litton (1996) arkeoloji çalışmalarında Bayesci uygulamaları; Berliner, Royle, Wikle ve Milliff (1999) atmosfer bilimlerinde; Cyert ve DeGroot (1987), Poirier (1995), Perlman ve Blaug (1997), Kim, Shephard ve Chib (1998) ve Geweke (1999) ekonomi ve ekonometri alanlarında; Johnson (1997) eğitim alanında; Greenland (1998) epidemiyoloji alanında; Godsill ve Rayner (1998) mühendislik alanında; Iversen, Parmigiani ve Berry (1998), Dawid (1999), Liu, Neuwald ve Lawrence (1999) genetik alanında; Parent, Hubert, Bobee ve Miquel (1998) hidroloji alanında; DeGroot, Fienberg ve Kadane (1986), Kadane ve Schuan (1996) hukuk alanında; Brown (1993) ölçme ve değerlendirme alanında; Berry and Stangl (1996), Stangl ve Berry (1998) tıp alanında; Bretthorst (1988) ve Jaynes (1999) fizik bilimleri alanında; Moreno ve Rios-Insua (1999) kalite yönetimi alanında; Pollard (1986), Johnson ve Albert (1999) sosyal bilimler alanında; Berry ve Stangl (1996), Carlin ve Louis (1996) ve Kadane (1996) biyoistatistik alanında; Spirtes, Glymour ve Scheines (1993), Glymour ve Cooper (1999) nedensellik ilişkilerinin ölçülmesinde; Neal (1996,1999), Müller ve Rios-Insua (1998) ve George (2000) sınıflandırma, ayrıştırma, sinir ağları vs. alanlarında; Fienberg (2000) kontenjans tabloları alanında;

Smith (1988), Robert (1994), Clemen (1996) ve Brown (2000) karar analizi ve karar teorisi alanlarında; Chaloner ve Verdinelli (1995) ve Müler (1999) tasarım alanında; Carlin ve Louis (1996) ve Carlin ve Louis (2000) deneysel Bayes alanında; Good (1983), Regazzini (1999), Kadane, Schervish ve Seidenfeld (1999) ve Robins ve Wasserman (2000) temel istatistik alanlarında; Bolfarine ve Zacks (1992) ve Mukhopadhyay (1998) sonlu kitle örnekleme alanında; Dey, Ghosh ve Mallick (2000) genelleştirilmiş lineer modeller alanında; Pearl (1988), Jensen (1986), Lauritze (1996), Jordan (1998) ve Cowell, Dawid, Lauritze ve Spiegelhalter (1999) grafiksel model ve Bayesci ağlar alanlarında; Hobert (2000) hiyerarşık modelleme alanında; Fitzgerald, Godsill, Kokaram ve Stark (1999) görüntüleme süreçleri alanında; Baron, Rissanen ve Yu (1998) ve Sofi (2000) bilgi teknolojisi alanında; Little ve Rubin (1987) ve Meng (2000) kayıp veri alanında; Dey, Müller ve Sinha (1998), Müller ve Vidakovic (1999) ve Robins ve Wasserman (2000) parametrik olmayan ve fonksiyon kestirimi alanlarında; Johnson ve Albert (1999) sıralı veri alanında; Barlow, Clarotti ve Spizzichino (1993) ve Dey ve Sinha (1999) güvenilirlik ve sağkalım analizi alanında; Carlin, Kadane ve Gelfand (1998) ve Qian ve Brown (1999) dizisel analiz alanında; Wolpert ve Ickstadt (1998) ve Besag ve Higdon (1999) uzaysal istatistik (Spatial Statistics) alanında; Kass ve Raftery (1995), O'Hagan (1995), Berger ve Pericchi (1996), Berger (1998), Racugno (1998), Sellke, Bayarri ve Berger (1999), Thiesson, Meek, Chickering ve Heckerman (1999) ve George (2000) deneme, model seçimi ve değişken seçimi alanında; Pole, West ve Harrison (1995), Gersch ve Kitagawa (1996) ve West ve Harrison (1997) zaman serileri alanında Bayesci çalışmalar yapmışlardır.

Pek çok istatistiksel alanda olduğu gibi, istatistiksel hipotezi test etme problemi Bayesci çalışanlar ile klasik istatistik çalışanları arasında önemli bir tartışma noktası olmuştur. Klasik istatistik yaklaşımı bir ret bölgesi oluşturur ve ilişkili olasılıkları

hesaplar. H_0 boş hipotezinin yanlış olarak ret edilmesi α olasılığına sahiptir bu da I. tip hatadır. H_0 boş hipotezinin yanlış olarak kabul edilmesi β olasılığına sahiptir bu da II. tip hatadır. Bu tür α ve β 'nın kullanımı birçok araştırmacı tarafından eleştirilmiştir. Eleştirinin temel nedeni bu hata olasılıklarının bilinen veri tarafından sağlanan veriyi yansıtmamasıdır. Bu durumda H_0 hipotezine karşı delilin gücünü gösteren veriye bağlı bir ölçüm olan p -değerinin kullanımı ortaya atılmıştır. Ancak p değeri gerçek bir ölçüm değeri değildir ve delilin bir ölçüsü olarak bazı noksanlıklara sahiptir (Edwards, ve ark. 1963; Berger ve Delampady 1987; Delampady ve Berger 1990) p -nin kullanımındaki tartışmaları ve p değeri ile delilin veriye bağlı diğer ölçümleri arasındaki farklılıkları ifade ettiler. Genel olarak yokluk hipotezine karşı veri tarafından sağlanan delilin bir ölçüsü olarak p -nin kullanımının yanıltıcı olabileceği vurgulanır (Berger ve ark. 1997).

Günümüzde her türlü istatistik tahmin probleminde alternatif bir yaklaşım olarak kullanılan ve dünya literatüründe yer alan Bayesci yaklaşım hipotez testlerinde de çok yaygın olmasa bile kullanılmaktadır. Maalesef dünyada çok yaygın kullanıma karşın bu yaklaşımla ilgili çalışmalar Türkçe literatürde fazla yer almamaktadır. Bu çalışmanın amaçlarından biri Bayesian hipotez testlerini uygulamacılara sunmaktır.

Bayesci metotlar hesaplamalarda çoğu zaman nümerik yöntemlerle çözülebilen integraller ve sonsal olasılıkları güncelleştiren önsel olasılıkların hesaplanmasını gerektirir. Her iki nokta için pek çok çalışma yapılmış ve uygun yöntemler sunulmuştur (O'Hagan 1994; Bernardo ve Smith 1994). Bayesci yaklaşımın hipotez testlerinde kullanım ilk olarak (Jeffreys, 1961) tarafından ortaya konulmuştur. Jeffreys sunduğu metodu istatistiksel testler olarak isimlendirse de kullanılan yaklaşım Bayesci idi. Bayesci hipotez testlerinde en önemli unsurlardan bir tanesi Bayes faktörüdür. Klasik p değerinin yorumlanmasındaki eleştirilere karşın Bayes Faktörünün hesaplanması zor ancak hipotezin doğru ya da yanlış olduğuna ilişkin yorumlanması kolay ve kesindir.

Berger ve Sellke (1987) yokluk hipotezi için p değeri ile Bayes Faktörünü (B.F.) karşılaştırmıştır. Casella ve Berger (1987) aynı karşılaştırmayı tek taraflı hipotez testi için yapmıştır. Berger ve Delampady (1987); Berger ve Berry (1988) BF ile alakalı karşılaştırmalı çalışmalar sunmuştur. Kass ve Raftery (1995) BF'nin ve alternatiflerinin kullanımını örneklerle sunmuştur. Ayrıca Sellke ve ark. (2001) hipotez için p değerinin kalibrasyonu ile ilgili çalışmayı yapmıştır.

Bayesci hipotez testlerinin ilk defa kullanımı Lindley (1957)'e dayanmaktadır. Lindley (1957) çalışmasında kullandığı hipotez testini Bayesci olarak isimlendirmese de Bayesci yaklaşımı kullanmıştır ve Lindley paradoksunu ifade etmiştir. Diğer çalışmalar bu çalışmayı takip ederek Bayesci hipotezi kullanılabilir bir alet haline getirmiştir. Bu çalışmaların özeti aşağıda sunulmuştur.

Edwards ve ark. (1963) Bayesci istatistiğe kısa bir giriş verdikten sonra klasik ve Bayesci hipotez testlerini karşılaştırmıştır. DeGroot (1973) p değerinin alternatif hipotezin doğru olma olasılığına yaklaşık olarak eşit olduğu durumlarda önsel dağılımların ve alternatif hipotezlerin özel sınıflarını tanımlar. Dickey (1977) p değerinin Bayes Faktörün genel olarak iyi bir yaklaşık değer olup olmadığını tartışmıştır. Shafer (1982) Lindley paradoksunun iyi tanımını tekrar vererek parmak izi verilerinde uygulamıştır. Berger ve Sellke (1987) boş hipotez için Bayes Faktörü ile p değerini karşılaştırmıştır. Casella ve Berger (1987); Berger ve Sellke (1987) aynı problemi tek taraflı hipotez için karşılaştırmıştır. Verdine ve Wasserman (1996) bazı koşullar altında Bayes Faktörünün farklı hipotezler altında karşılaştırmalarını vermiştir. Boş parametre durumlarında da Bayes Faktörünü incelemiştir.

Weakliem (1998) klasik ve Bayesci hipotez testlerinde anlamlılık seviyelerini karşılaştırmıştır. Efron ve Gous (1998) Bayes Faktörü ve anlamlılık testleri için delil

skalalarını yeniden düzenlemiştir. Aitkin (1998) Lindley paradoksunu yeniden yorumlamıştır. Bayes Faktörüne yaklaşık değeri veren kriterler de geliştirilmiştir. Cox ve Hinkley (1978) Bayesci Bilgi Kriteri (BIC) verilmiştir. BIC Bayes Faktörünün bir yaklaşımının özel bir durumudur ve iki model için önsellerin seçimini tartışmasında kullanılmıştır. Schwarz (1978) BIC'ın bir model seçim kriteri olarak doğrusal üstel dağılımlar ailesinde kullanımını ortaya koymuştur. Akaike Bilgi Kriteri (AIC) gibi diğer kriterlerle karşılaştırmıştır. Smith ve Spiegelhalter (1980) iç içe doğrusal modeller arasında seçim yapmada Bayes faktörünün kullanımını vermiştir. Pericchi (1984) Lindley paradoksundan kaçınarak parametreler hakkında bilginin beklenen kazançlarına dayalı bir şekilde önsel olasılık modellerinin belirlenmesini önermiştir. Örnek olarak normal doğrusal modeli ele almıştır. Haughton (1988), Schwarz (1978)'in sonuçlarını daha da geliştirmiş ve eğrisel üstel dağılımlar ailesine uygulamıştır. Bazı koşullar altında BIC'ın tutarlılığını incelemiştir. Kass ve Vaidyanathan (1992) iç içe modeller için Bayes Faktörünün Laplace yaklaşımını ve geçerliliğini incelemiştir. Önseldeki değişimlere göre sonuçların duyarlılığını incelemiştir. McCullogh ve Rossi (1992) doğrusal olmayan sınırlamalar içeren hipotezler için Bayes Faktörünü araştırmıştır. Hesaplamalarda Monte Carlo integrasyonunu kullanmıştır. Kass ve Wasserman (1995) iki iç içe modeli karşılaştırmada kullanılan Bayes Faktörü için referans önsellerin seçimini incelemiştir. Bayes Faktörü için Laplace yaklaşımını da kullanmıştır. Raftery (1996) Laplace yaklaşımına dayalı olarak Bayes Faktörü farklı yaklaşımları vermiştir. Model ortalamaları yaklaşımını ortaya atmıştır. Hsiao (1997) yine Laplace yaklaşımını incelemiştir. Pauler (1998) normal doğrusal modellerde değişken seçimini incelemiş ve Bayes Faktörü ile BIC kullanımını vermiştir. Ayrıca karışık doğrusal modeller içinde bu yaklaşımları kullanmıştır. Atkinson (1978) normal doğrusal modeller için sonsal

olasılıkları incelemiştir. Spiegelhalter ve Smith (1982) iki iç içe model ve log doğrusal modeller için BF yaklaşımını vermiştir. Raftery (1986) log doğrusal modeller için Spiegelhalter ve Smith (1982)'in önerdiği yaklaşımı kullanarak bir başka BF yaklaşımını geliştirmiştir. Fornell ve Rust (1989) eşit olmayan önsel olasılıklara sahip kovaryans yapı modellerinin karşılaştırmasını vermiştir. BF ile AIC karşılaştırmasını da vermiştir. McCullogh ve Rossi (1992) eşlenik önsel kullanımıyla model karşılaştırmalarında BF'yi kullanmıştır. Gelfand ve Dey (1994) BF'yi farklı durumlarda inceleyerek Monte Carlo metotlarını kullanarak tam hesaplamaları vermiştir. O'Hagan (1995) model parametreleri için önsel dağılımlar düzgün olmadığında BF'nin belli olmayan önsellere bağlı olduğundan kısmi BF yaklaşımını vermiştir. Newton ve Raftery (1994) BF'nin tahmin için ağırlıklı olabilirlik bootstrap yöntemini geliştirmiştir. Chib (1995) Gibbs örneklemesini kullanarak BF'nin bir diğer yaklaşımını sunmuştur. Carlin ve Chib (1995) de MCMC yaklaşımını kullanarak BF'nin bir diğer yaklaşımını geliştirmiştir. Green (1995) reversible jump MCMC metodunu kullanarak yine BF için bir yaklaşım vermiştir. Lewis ve Raftery (1997) Laplace Metropolis yöntemini kullanarak BF için bir tahminci elde etmiş ve sayısal örneklerde iyi çalıştığını göstermiştir. Brown ve ark. (1998) de çok değişkenli regresyon modellerinde değişken seçimi için MCMC ye dayalı BF kullanımını vermiştir. Albert ve Chib (1997) hiyerarşik modeller için (özellikle bir sabit etkili ve tesadüfi etki modelleri karşılaştırmada) Bayes Faktörlerin tahmininde MCMC metotlarını kullanmıştır.

Değişken seçimi istatistiksel uygulamalarda model seçimi problemlerinin en önemli noktası olarak bilinir (George, 2000). Değişken seçimine yönelik son 30 yılda pek çok yöntem ve kriter geliştirildi. Bu yöntemlerden bazıları:

PRESS (Allen, 1971), MALLOWS'un C_p 'si (Mallows, 1973), Akaike Bilgi Kriteri (AIC) (Akaike, 1973), Schwarz'ın Bayesci bilgi kriteri (BIC) (Schwarz, 1978), RIC (Foster ve George, 1994) ve Bootstrap model seçimi (Shao, 1996). Bu çalışmaların birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları olmasına rağmen pek çok alanda uygulanmaktadır. Bir diğer yöntem ise Kass ve Raftery (1995) tarafından geliştirilen Bayesci Model Ortalaması yöntemidir (BMA). BMA model seçiminde belirsizliği göz önüne alınan ve kullanımı gittikçe artan bir yöntemdir. Draper (1995) ve Raftery (1996) BMA'nın Genelleştirilmiş Lineer Modeller de kullanımını verirken Smith ve Kohn (1996) aykırı gözlemlerde BMA'yı incelemiştir. Madigan ve Raftery (1994) grafiksel modeller için BMA'yı incelerken Noble (2000) çok değişkenli regresyonda, Clyde ve ark. (1998) Wavelet analizinde ve Volynsky ve ark. (1997) sağkalım analizinde BMA'yı kullanmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Bayesci yöntemlerin tanıtımı yapıldıktan sonra, genelde Bayesci çalışmalar, özelde ise Bayesci hipotez testleri, Bayes Faktörü (BF) ve model seçim yöntemi olarak Bayesci Model Ortalaması (BMA)'na ilişkin geniş bir literatür taraması ve tezin haritası sunulmuştur. İkinci bölümünde Bayes teoremi ve Bayesci yöntemle ilişkin temel bilgiler verilmiştir. Materyal ve metot bölümünde Bayesci hipotez testleri ve Bayes Faktörü verildikten sonra Byesci Model Ortalaması yöntemi verilmiştir. Uygulama bölümünde ilk olarak hipotez testlerine ilişkin simülasyon çalışmaları verilirken ikinci olarak BMA yöntemi kalp hastalıklarına ilişkin risk faktörleri verisine uygulanmıştır. Byesci hipotez testlerine ilişkin hesaplamalar için Visual Basic 6.0 ortamında yazılmış MACNAMstat programı hazırlanmış. Bayesci model ortalamalarına ilişkin hesaplamalar SPlus programında yazılan macro kullanılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

Bayesci düşünmenin esaslarını üç temel adımda toplayabiliriz:

1. Bilinmeyen parametreler hakkında varsa bazı önsel bilgiler içeren olasılık modeli belirlemek.
2. Bu olasılık modelinin gözlenen veri üzerine koşullandırılmasıyla bilinmeyen parametreler hakkındaki bilginin geliştirilmesi.
3. Veriye modellerin uyumunun ve varsayımların sonuçlara duyarlılığının hesaplanması.

Temel Bayesci yaklaşımda gereken anahtar kabuller vardır. Birincisi: bilinmeyen parametreler için belli bir parametrik formun oluşturulmasıdır. İkincisi: bilinmeyen parametreler sabit olma yerine dağılımsal özelliklere sahip olduğu için daha önceki bilgilere dayalı olan bu parametrelerin bir başlangıç koşulsuz dağılımın belirlenmesinin uygun olacağı kabul edilir.

Veri değerlerinin değiştirilebilir (exchangeable) olduğu kabul edilir. Model sonuçları veri değerlerinin tekrar sıralanmasıyla değiştirilemez. Bu özellik, verinin bağımsız ve özdeş dağılımlı olduğunu ifade eden standart varsayımdan daha geneldir. Aynı dağılımdan çekilen bağımsız ve aynı değerler için ortak ortalama ve varyansa sahiptir .

Değişebilir veri üretim sürecinin her veri için aynı şekilde bilinmeyen model parametrelerine koşullu olduğunu söylememize izin verir. (De Finetti, 1974)

Olasılığı tanımlamak kolay olmalıdır. Gerçekte bir olasılık fonksiyonunun özelliklerini matematik olarak tanımlamak kolaydır:

1. Sıfır ve bire sınırlıdır
2. Toplamı ya da integrali 1'e eşittir
3. Ayrık olayların olasılıklarının integrali veya toplamı bu olayların birleşimlerinin olasılıklarına eşittir. (Kolmogorov, 1933)

Gerçek problem olasılık ifadelerinin gerçek anlamını tanımlamada yatar. Bu zorluk Bayesci ve Bayesci olmayan yaklaşımlar arasındaki geleneksel anlaşmazlığın temel noktasıdır.

Olasılığın klasik istatistiksel yorumu; bir kitledeki gözlenen bir oranın veya deterministik olmayan bir sonucun uzun dönem davranışdır. Bu görüş Laplace (1814)'e dayanmaktadır. Laplace, olasılığı gözlenen denemelerdeki başarılı olayların sayısı olarak tanımlamaktadır. Deneyin yeteri kadar tekrarlanması esasına dayanır.

Olasılığın bir başka yönü, subjektiflik olarak isimlendirilir ve inanç derecesi terimi ile özdeşleştirilir. Bu terim ilk olarak aynı duruma bakan iki kişinin gelecek durumlar hakkında farklı olasılık ifadeleri belirtebileceğini söyleyen Keynes (1921) ve Jeffreys (1961) söylemişlerdir. Subjektif olasılık olarak isimlendirilen bu kavramın gelişimi Berger (1985) ve Bernardo ve Smith (1994) ile geliştirilmiştir.

Bu subjektif olasılık, Bayesci yaklaşımda önsel bilgi ile formülize edilir. Önsel bilgi; elimizde bir veri olmadan ya da henüz veriyi gözlemlemeden parametre hakkındaki araştırmacının deneyimi, hissiyatı ve teorik fikirlerini içerir. Ayrıca daha önceki çalışmalardan, deneylerden ve ilgili kişilerin görüşlerinden elde edilir.

Bu önsel bilgiler, gözlem değerleri ile ifade edilen olabilirlik fonksiyonu kullanımıyla sonsal bilgiye dönüştürülür. Sonsal bilgi ve ona karşılık gelen sonsal olasılık veriyi gözlemledikten sonra ona tahmin edilmesi istenen parametre hakkındaki olasılık değeridir.

2.1. BAYES TEOREMİ

Bayes teoremi stokastik A ve B olaylarının marjinal ve koşullu olasılıkları arasında ilişki kurar:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (2.1)$$

$$\propto L(A|B)P(A)$$

Burada;

- $L(A|B)$ B bilindiğinde A'nın olabilirliği
- $P(A|B)$ B bilindiğinde A'nın koşullu olasılığıdır. Aynı zamanda B üzerinden hesaplandığından sonsal olasılık diye de adlandırılır.
- $P(B|A)$ A bilindiğinde B'nin koşullu olasılığıdır.
- $P(B)$ B'nin önsel olasılığı veya marjinal olasılığıdır.

Bu terminolojiyle birlikte Bayes Teoremi;

$$\text{Sonsal odds oranı} = [\text{Önsel odds oranı}] [\text{Bayes Faktörü}] \quad (2.2)$$

olarak ifade edilir.

Bayes teoremini elde etmek için koşullu olasılığın tanımından başlarız. B olayı bilindiğinde A olayının olasılığı:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.3)$$

Aynı şekilde A olayı bilindiğinde B olayının olasılığı:

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (2.4)$$

Bu iki eşitliği birleştirir ve yeniden düzenlersek:

$$P(A \setminus B)P(B) = P(A \cap B) = P(B \setminus A)P(A) \quad (2.5)$$

elde ederiz. Eşitliğin her iki tarafını $P(B)$ 'ye bölersek Bayes Teoremini elde ederiz:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(B \setminus A)P(A)}{P(B)} \quad (2.6)$$

burada $P(B)$ sıfırdan farklı olacaktır.

2.2. BAYES TEOREMİNİN GENİŞLETİLMİŞ HALİ

Bayes teoremi ikiden fazla değişkenli problemlerin çözümünde de kullanılır. Örneğin :

$$P(A \setminus B, C) = \frac{P(A)P(B \setminus A)P(C \setminus A, B)}{P(B)P(C \setminus B)} \quad (2.7)$$

Bu işlem koşullu olasılığın tanımı ve Bayes teoreminden birkaç adımla genişletilebilir:

$$\begin{aligned}
P(A \setminus B, C) &= \frac{P(A, B, C)}{P(B, C)} = \frac{P(A, B, C)}{P(B)P(C \setminus B)} = \\
&= \frac{P(C \setminus A, B)P(A, B)}{P(B)P(C \setminus B)} = \frac{P(A)P(B \setminus A)P(C \setminus A, B)}{P(B)P(C \setminus B)}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3. BAYES FAKTÖRÜ

$P(D/H_1)$ veya $P(D/H_2)$ olasılık yoğunluğuna göre H_1 ve H_2 hipotezlerinin biri altında D verisiyle başlayalım. $P(H_1)$ ve $P(H_2)=1-P(H_1)$ önsel olasılıkları veri bilindiğinde $P(H_1/D)$ ve $P(H_2/D)=1-P(H_1/D)$ sonsal olasılıklarını ortaya koyar. Çünkü herhangi önsel bilgi veriden dolayı bir sonsal bilgiye dönüştürülmüştür. Önsel olasılık ne olursa olsun benzer dönüşüm sonsal olasılıkları elde etmede kullanılır. İlk olarak odds skalasına çeviririz ($Odds = Pr/(1-Pr)$). Bu dönüşüm bize sade bir form verir. Bayes teoremini kullanarak Bayes Faktörünü elde ederiz:

$$P(H_k \setminus D) = \frac{P(D \setminus H_k)P(H_k)}{P(D \setminus H_1)P(H_1) + P(D \setminus H_2)P(H_2)} \quad (k=1,2) \tag{2.9}$$

Buradan:

$$\frac{P(H_1 \setminus D)}{P(H_2 \setminus D)} = \frac{P(D \setminus H_1)}{P(D \setminus H_2)} \frac{P(H_1)}{P(H_2)} \tag{2.10}$$

Burada:

$$Sonsal odds oranı = \frac{P(H_1 \setminus D)}{P(H_2 \setminus D)} \tag{2.11}$$

$$Bayes Faktörü = \frac{P(D \setminus H_1)}{P(D \setminus H_2)} \tag{2.12}$$

$$Önsel odds oranı = \frac{P(H_1)}{P(H_2)} \tag{2.13}$$

BÖLÜM III

MATERYAL VE METOT

3.1. BAYESİAN HİPOTEZ TESTLERİ

Bayes hipotez testinde, temel olarak bilinen eldeki veriler kullanılarak iki hipotezin olasılıklarının hesaplanmasıyla H_1 ile H_0 arasında karar verilir yani,

$$\begin{cases} \frac{P(H_0 / D)}{P(H_1 / D)} > 1 & \Rightarrow H_0 \text{ seçilir} \\ \text{aksidurumda} & \Rightarrow H_1 \text{ seçilir} \end{cases} \quad (3.1)$$

Kararlar $P(\text{Hipotez} / \text{Veri})$ kullanılarak verilir oysa klasik istatistikte aynı işlem $P(\text{Veri} / \text{Hipotez})$ olasılığı kullanılarak verilir. Bayes kuralına göre D ile gösterilen veri bilindiğinde H_0 'ın sonsal olasılığı;

$$P(H_0 / D) = \frac{P(D / H_0)P(H_0)}{P(D / H_0)P(H_0) + P(D / H_1)P(H_1)} \quad (3.2)$$

Benzer biçimde; D bilindiğinde H_1 ' in sonsal olasılığı;

$$P(H_1 / D) = \frac{P(D / H_1)P(H_1)}{P(D / H_0)P(H_0) + P(D / H_1)P(H_1)} \quad (3.3)$$

Burada $P(H_0)$, H_0 'ın ve $P(H_1)$, H_1 önsel olasılıklarıdır. Her iki sonsal olasılığı birbirine oranlarsak,

$$\left[\frac{P(H_0 / D)}{P(H_1 / D)} \right] = \left[\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right] \left[\frac{P(D / H_0)}{P(D / H_1)} \right] \quad (3.4)$$

elde ederiz. Burada: $BF = \left[\frac{P(D / H_0)}{P(D / H_1)} \right]$ Bayes faktörü olarak isimlendirilir.

Eşitlik (3.4)'deki ifadeyi sözel olarak;

$$[\text{Sonsal odds oranı}] = [\text{Önsel odds oranı}] [\text{Bayesfaktörü}] \quad (3.5)$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Thumb kuralı kullanılarak elde edilen Çizelge 3.1'e göre Bayes Faktörü değeri kullanılabilir.

Çizelge 3.1. Thumb kuralına göre Bayes Faktör değerinin yorumlanması

Bayes Faktör değeri	Yorum
$BF \geq 1$	H_0 kabul edilir
$1 > BF \geq 10^{-1/2}$	H_0 'a karşı az delil var
$10^{-1/2} > BF \geq 10^{-1}$	H_0 'a karşı sağlam delil var
$10^{-1} > BF \geq 10^{-2}$	H_0 'a karşı güçlü delil var
$10^{-2} > BF$	H_0 'a karşı kesin delil var

3.2. BAYESÇİ MODEL ORTALAMASI

Bayesci model ortalaması bütün olasılık modellerinin bir alt kümesini seçer. $K=2^p$ kadar alt küme seçebilir ve açıklayıcı değişkenlerin etkileşimini ihmal eder. Bütün çıkarımları ve kestirimleri elde etmek için modellerin sonsal olasılıklarını kullanır.

$$M = \{M_1, M_2, \dots, M_K\} \quad (3.6)$$

İlgilenilen bütün olası modellerin kümesini gösterebilir. Δ her bir modelde aynı yoruma sahip ilgilenilen regresyon parametreleri veya tahmin edilecek gelecek değerler gibi bir nicelik olsun. Böylece D verisi bilindiğinde Δ 'nın sonsal dağılımı;

$$P(\Delta \setminus D) = \sum_{k=1}^K P(\Delta \setminus M_k, D) P(M_k \setminus D) \quad (3.7)$$

Bu her bir M_k modeli altındaki sonsal dağılımların bir ortalamasıdır. Bir M_k modeli verildiğinde Δ 'nın predictive dağılımı;

$$P(\Delta \setminus M_k, D) = \int P(\Delta \setminus \beta^k, M_k, D) P(\beta^k \setminus M_k, D) d\beta^k \quad (3.8)$$

$$\beta^k = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)' \quad (3.9)$$

(3.9)'daki eşitlik M_k modeli için regresyon parametrelerinin vektörüdür. Burada:

- M_k modelinin sonsal olasılığı;

$$P(M_k \setminus D) = \frac{P(D/M_k) P(M_k)}{\sum_{j=1}^K P(D/M_j) P(M_j)} \quad (3.10)$$

- M_k modelinin integrallanmış olabilirliği;

$$P(D/M_k) = \int P(D \setminus \beta^k, M_k) P(\beta^k \setminus M_k) d\beta^k \quad (3.11)$$

- β^k 'nin önsel yoğunluğu

$$P(\beta^k / M_k) \quad (3.12)$$

- $P(D/\beta^k, M_k)$ olabilirlik
- $P(M_k)$ M_k 'nin optimal olduğuna ilişkin önsel olasılıktır.

3.3. BMA'nın GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

Uygulamaya ilişkin bir takım zorluklar söz konusudur. Bunlar;

- Modellerin $P(M_k)$ önsel olasılıklarının tespiti
- β^k parametrelerinin önsel dağılımının tespiti
- İntegrallerin hesaplanması (genelde analitik çözüm yoktur)

- Çok sayıda olası model söz konusu iken Δ 'nın sonsal dağılımının hesaplanması

Modellerin olabilirliğine ilişkin çok az bilgi varsa her birinin gerçekleşme olasılığını eşit almak makul bir seçenektir.

β^k parametreleri için önsel olarak çok değişkenli normal önsel dağılım alınabilir.

Ortalama : ençok olabilirlik tahmincisine ve

Varyans : gözlem için bilgi matrisinin beklenenine eşittir Raftery (1995,1996,1999).

$$P(D/M_k) = \int P(D \setminus \beta^k, M_k) P(\beta^k \setminus M_k) d\beta^k \quad (3.13)$$

integrali Laplace Metodu kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanabilir.

$$\log P(D \setminus M_k) = \log P(D/\hat{\beta}^k, M_k) - P_k \log n + O(1) \quad (3.14)$$

Burada;

$\hat{\beta}^k$: M_k modeli altında β_k parametre vektörünün sonsal ortalaması

P_k : Model M_k 'daki parametre sayısı

N : verideki gözlem sayısı

Bu eşitlik Schwarz Bayesci bilgi kriteri olarak da bilinir. P ortak değişkenli bir analiz için model sayısı K oldukça büyük olabilir. Bu problemi aşmak için Madigan ve Raftery (1994) tarafından önerilen The Occam's Window yaklaşımını kullanırız. Bu yaklaşım sadece en yüksek sonsal model olasılıklarına sahip olasılıkları göz önüne alır. Veri verildiğinde bir modelin sonsal olasılığı diğer olası modellerden küçükse, bu model göz ardı edilir. Sadece

$$A = \left[M_k : \frac{\max_1 P(M_1 / D)}{P(M_k / D)} \leq C \right] \quad (3.15)$$

kümesine ait modeller hesaplamaya katılır. C 'nin 20 alınması genel bir kabuldür (Raftery, 1995, 1996).

BÖLÜM 4

BULGULAR

Bu bölümde dört basit uygulama ile hesaplamaları ve yorumlamalarını sunacağız. Uygulama 1’de yapılan hesaplamalar için hazırlanan Visual Basic programının çıktısı aşağıdaki gibidir:

$P(H_0 X)$	$P(H_1 X)$	Örnek ortalaması	B.F.
0,07586	0,92414	1	0,08209

Şekil 4.1. Uygulama 1 için Visual Basic program çıktısı

Uygulama 2’de yapılan hesaplamalar için hazırlanan Visual Basic programının çıktısı aşağıdaki gibidir.

$P(H_0 X)$	$P(H_1 X)$	Örnek ortalaması	B.F.
0,0147	0,9853	1	0,0149

Şekil 4.2. Uygulama 2 için Visual Basic program çıktısı

4.1. UYGULAMA 1

Farklı ortalamalı ancak eşit varyanslı ($\sigma^2 = 1$) normal dağılıma sahip iki ortalamayı Bayesci yöntemle karşılaştırmak istiyoruz. Hipotezlerimiz;

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= 0 \\ H_1 : \mu &= 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklindedir. (3.4) eşitliğini,

$$\frac{P(H_0 / \bar{X}_{\text{gözlenen}})}{P(H_1 / \bar{X}_{\text{gözlenen}})} = \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right) \left[\frac{P(\bar{X}_{\text{gözlenen}} / H_0)}{P(\bar{X}_{\text{gözlenen}} / H_1)} \right] \quad (4.2)$$

şeklinde yazalım. N örneklem genişliği için (4.2) nolu ifade

$$= \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right) \left[\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{N}{2\sigma^2} (\bar{X}_{\text{gözlenen}} - \mu_{H_0})^2}}{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{N}{2\sigma^2} (\bar{X}_{\text{gözlenen}} - \mu_{H_1})^2}} \right] \quad (4.3)$$

olur. $P(H_0) = P(H_1) = 0,5$ alınırsa (4.3) nolu eşitlik

$$= e^{-\frac{N}{2\sigma^2} \left(\bar{X}_{\text{gözlenen}} - \frac{\mu_{H_0} + \mu_{H_1}}{2} \right)^2} \quad (4.4)$$

olur. Örneğin $N=5$ ve $\bar{X}_{\text{gözlenen}} = 1$ için; $P(H_0 / \bar{X}_{\text{gözlenen}}) = 0.076$ ve

$P(H_1 / \bar{X}_{\text{gözlenen}}) = 0.924$ ve $\frac{P(H_0 / \bar{X}_{\text{gözlenen}})}{P(H_1 / \bar{X}_{\text{gözlenen}})} = e^{-5(1-0,5)} = 0.082$ bulunur. Sonuç olarak

H_1 hipotezi kabul edilir. Benzer şekilde $BF = 0,082$ olduğundan Thumb kuralına göre $10^{-1} > BF = 0.082 \geq 10^{-2}$ olduğundan H_0 'a karşı güçlü delil vardır denir. Farklı N ve ortalama değerleri için olası sonuçlar Çizelge 4.1, 4.2 ve 4.3'de sunulmuştur.

Çizelge 4.1. Örneklem genişliği N=5 için sonuçlar

Örnek ortalaması	$P(H_0 / \bar{X} \text{ gözlenen})$	$P(H_1 / \bar{X} \text{ gözlenen})$	Karar
0	0.924	0.076	H_0
0.25	0.777	0.223	H_0
0.50	0.500	0.500	kararsız
0.75	0.223	0.777	H_1
1.00	0.076	0.924	H_1

Çizelge 4.2. Örneklem genişliği N=10 için sonuçlar

Örnek ortalaması	$P(H_0 / \bar{X} \text{ gözlenen})$	$P(H_1 / \bar{X} \text{ gözlenen})$	Karar
0	0.993	0.007	H_0
0.25	0.924	0.076	H_0
0.50	0.500	0.500	kararsız
0.75	0.076	0.924	H_1
1.00	0.007	0.993	H_1

Çizelge 4.3. Örneklem genişliği N=20 için sonuçlar

Örnek ortalaması	$P(H_0 / \bar{X} \text{ gözlenen})$	$P(H_1 / \bar{X} \text{ gözlenen})$	Karar
0	0.999	0.001	H_0
0.25	0.993	0.007	H_0
0.50	0.500	0.500	kararsız
0.75	0.007	0.993	H_1
1.00	0.001	0.999	H_1

4.2. UYGULAMA 2

Sabit varyanslı ($\sigma^2 = 1$) normal dağılımlı tek bir kitle için ortalamanın sıfırdan farklı olup olmadığını test etmek istiyoruz. Çift yönlü hipotezlerimiz

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= 0 \\ H_1 : \mu &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

dir. $P(H_0) = P(H_1)$ alınırsa N örneklem genişliği için,

$$\frac{P(H_0 / \bar{X}_{gözlenn})}{P(H_1 / \bar{X}_{gözlenn})} = \frac{P(\bar{X}_{gözlenn} / \mu = 0)}{\int_{\mu \neq 0} P(\bar{X}_{gözlenn} / \mu) P(\mu) d\mu} \quad (4.6)$$

elde edilir. Örnek olarak N=5 ve $\bar{X}_{gözlenn} = 1$ için $P(H_0 / \bar{X}_{gözlenn}) = 0,0147$ ve $P(H_1 / \bar{X}_{gözlenn}) = 0,9853$ bulunur. Sonuç olarak H_1 kabul edilir. Benzer şekilde $BF = \frac{P(H_0 / \bar{X}_{gözlenn})}{P(H_1 / \bar{X}_{gözlenn})} = 0,0149$ hesaplaması ve Thumb kuralı gereği

$10^{-1} > BF = 0.0149 \geq 10^{-2}$ olduğunda H_0 'a karşı güçlü delil vardır denir. Farklı N ve ortalama değerleri için olası sonuçlar Çizelge 4.4, 4.5 ve 4.6'da sunulmuştur.

Çizelge 4.4. Örneklem genişliği N=5 için sonuçlar

Örnek ortalaması	$P(H_0 / \bar{X}_{gözlenn})$	$P(H_1 / \bar{X}_{gözlenn})$	Karar
0	0.1785	0.8215	H_1
0.25	0.0956	0.9044	H_1
0.50	0.0511	0.9489	H_1
0.75	0.0274	0.9726	H_1
1.00	0.0147	0.9853	H_1

Çizelge 4.5. Örneklem genişliği N=10 için sonuçlar

Örnek ortalaması	$P(H_0 / \bar{X} \text{ gözlenen})$	$P(H_1 / \bar{X} \text{ gözlenen})$	Karar
0	0.1262	0.8738	H_1
0.25	0.0362	0.9638	H_1
0.50	0.0104	0.9896	H_1
0.75	0.003	0.997	H_1
1.00	0.0008	0.9992	H_1

Çizelge 4.6. Örneklem genişliği N=20 için sonuçlar

Örnek ortalaması	$P(H_0 / \bar{X} \text{ gözlenen})$	$P(H_1 / \bar{X} \text{ gözlenen})$	Karar
0	0.0892	0.9108	H_1
0.25	0.0073	0.9927	H_1
0.50	0.0006	0.9994	H_1
0.75	0.0001	0.9999	H_1
1.00	0.0000	1.0000	H_1

4.3. UYGULAMA 3

Kabul edelim ki hayat sigortası sahiplerinin yaşları X-tesadüfi değişkeni ile gösterilsin ve $X / \mu \sim N(\mu, 51,84)$ normal dağılımlı, $n=36$ ve $\bar{X} = 39,22$ olduğu bilinsin. Bu durumda;

$$H_0 : \mu \leq 37$$

$$H_1 : \mu > 37 \quad (4.7)$$

hipotezlerini test etmek istiyoruz.

$$\frac{P(H_0 / X)}{P(H_1 / X)} = \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right) \left[\frac{P(X / H_0)}{P(X / H_1)} \right] \text{ ve } P(H_0) = P(H_1) = 1 \text{ düzgün önsel alınır}$$

$$P(H_0 / X) = P(\mu \leq 37 / \bar{X}) = Z \left(\frac{37 - \bar{X}}{\sigma / \sqrt{n}} \right) \cong Z(-1,852) \cong 0,032 \text{ ve}$$

$P(H_1 / X) = 1 - P(H_0 / X) = 1 - 0,032 \cong 0,968$ bulunur. Sonuç olarak H_1 kabul edilir.

4.4. UYGULAMA 4

Kabul edelim ki $Y_i = X_i + 1$ olsun ve

$$\begin{aligned} H_0 : X_i / \mu &\sim Po(\mu) \\ H_1 : Y_i / \pi &\sim Ge(\pi) \end{aligned} \quad (4.8)$$

hipotezlerini test etmek istiyoruz. Bunun için μ / H_0 ve π / H_1 için referans önselleri

kabul ederek Bayes faktörünü hesaplayalım. $BF = \left[\frac{P(D / H_0)}{P(D / H_1)} \right]$ ifadesini ve μ

parametrelili Poisson dağılımının π parametrelili Geometrik dağılımın olasılık fonksiyonlarını kullanarak,

$$\begin{aligned} BF &= \frac{\int_0^\infty \left[\frac{\mu^{\sum X}}{\pi X!} \exp(-n, \mu) \right] \left[\mu^{-\frac{1}{2}} \right] d\mu}{\int_0^1 \left[\pi^n (1 - \pi)^{\sum X} \right] \left[\pi^{-1} (1 - \pi)^{-\frac{1}{2}} \right] d\pi} = \frac{\frac{1}{\pi X!} \int_0^\infty \mu^{\sum X - \frac{1}{2}} \exp(-n\mu) d\mu}{\int_0^1 \pi^{n-1} (1 - \pi)^{\sum X - \frac{1}{2}} d\pi} \\ &= \frac{\Gamma(n, \sum X + \frac{1}{2})}{\pi X! n^{\sum X + \frac{1}{2}} B(n, \sum X + \frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(n + \sum X + \frac{1}{2})}{\pi X! n^{\sum X + \frac{1}{2}} (n - 2)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde ederiz. Sayısal örnek olarak, $n=2$, $X_1=X_2=0$ alırsak

$$BF = \frac{\Gamma(21/2)}{1.2^{2.1}} \approx 0,94 \text{ olur. Thumb kuralına } 1 > BF = 0.94 \geq 10^{-1/2} \text{ olduğundan } H_0$$

‘a karşı az delil vardır denir. Bir başka sayısal örnek olarak; $n=2$, $X_1=X_2=2$ alırsak

$$BF = \frac{\Gamma(61/2)}{4.2^{4.1}} \approx 3,181 \text{ bulunur. } BF = 3.181 \geq 1 \text{ olduğundan } H_0 \text{ kabul edilir.}$$

4.5. UYGULAMA 5

Kalp damar hastalığı (CAD) ülkemizde ölümcül oranı en yüksek hastalıkların başında gelmektedir. Yüksek kolesterol, sigara içme, hiper tansiyon, insülin seviyesinin yüksekliği, yaş, cinsiyetin erkek olması, şişmanlık, alkol kullanımı, diyabetik bir rahatsızlığın olması ve yakınlarında bu hastalığın olması en temel risk faktörleridir.

Kullanılan veri Erzurum Atatürk Üniversitesi Tıp Fakültesinde toplanılmış olup Balcı ve ak. (2000) tarafından kullanılmıştır. Normal şeker seviyesine sahip erkek hastalar için plazma insülin seviyeleri ile CAD’ın angiographical yoğunluğu arasındaki ilişki araştırılmıştır. Bu çalışmada 32’si kontrol diğerleri hasta grubu olan 101 bireyden oluşan veriye BMA metodu uygulanarak CAD için risk faktörleri lojistik regresyonla ortaya konulmuştur. Elde edilen ölçümler Çizelge 4.7’de özetlenmiştir;

Çizelge 4.7. Değişkenler ve tanımlamaları

DEĞİŞKEN	TANIM
CAD	Kalp Damar Hastalığı (1,0)
YAŞ	Bireylerin Yaşları
İNSÜLİN	Açlık İnsülin Seviyesi
KOLESTROL	Ortalama Kolesterol Seviyesi
SOYGEÇMİŞ	Yakınlarında CAD olup olmadığı
SİGARA	Sigara İçip İçmediği
TANSİYON	Alkol Kullanıp Kullanmadığı
HİPERTANSİYON	Hipertansiyon Olup Olmadığı

Etkileşim ihmal edilerek sadece ana etkiler kullanılmıştır. 8 olası açıklayıcı değişkenin bütün olası kombinasyonları gözden geçirildi. Başlangıçta 256 olası model söz konusu idi. Bic.logit programı kullanılarak Occam's window metoduyla 256 olası model 4'e indirgenmiştir. Seçilen modeller ve sonsal model olasılıkları Çizelge 4.8'de verilmiştir.

Çizelge 4.8. Farklı Model Seçme Kriterlerine Göre Oluşturulan Modeller

DEĞİŞKEN	BMA				ADIMSAL ENTRY
	1	2	3	4	5
Yaş	√	√	√	√	
Açlık İnsülin	√	√	√	√	√
Kolestrol	√	√	√	√	
Soygeçmiş	√				√
Sigara	√	√	√		√
Alkol	√				√
Hipertansiyon	√				√
Sapma	56,327	59,001	59,012	59,315	58,998
Sonsal Model Olasılığı	0,812	0,473	0,451	0,376	

En yüksek sonsal olasılığa sahip model (% 81,2) 7 açıklayıcı değişken içermektedir. Oysa adımsal (entry) yöntem 6 değişken içermektedir. Kolestrol seviyesini modele katmamaktadır. Çizelge 4.9 BMA'nın seçtiği en iyi yöntemle klasik adımsal (entry) yöntemin sonuçlarını karşılaştırmaktadır.

Çizelge 4.9. BMA ve Adımsal (Entry) Metodu sonuçlarının karşılaştırılması

DEĞİŞKEN	BMA		ADIMSAL (ENTRY)	
	Ortalama	Yüzde	Katsayı	P değeri
Yaş	0,081	76,4	0,085	0,068
Açlık İnsülin (log)	0,563	100	0,579	0,06
Kolesterol	0,028	87,4	0,023	0,659
Soygeçmiş	1,631	75,5	1,584	0,023
Sigara	2,135	100	2,243	0,006
Alkol	1,953	68,5	2,053	0,09
Hipertansiyon	1,771	92,6	1,871	0,015

BÖLÜM 5

SONUÇ VE TARTIŞMALAR

Bayes faktörünün Bayesci hipotez testlerindeki önemi vurgulanmıştır. Ancak Bayes faktörünün iki taraflı testlerdeki kullanımında bir takım sınırlamalar söz konusudur. Bunlar parametreler üzerine bir takım kısıtlamalar gerektirmektedir. Literatürde güncel çalışmalar bulunmamaktadır. Parametre üzerine sınırlamalar ve parameterelerin genelleştirilmesi gibi problemler gelecek çalışmalarda incelenebilir.

Sonsal dağılımın yaklaşık olarak normal dağılımlı olmadığı durumlarda Bayes faktörünü elde etmek kolay değildir. Bu durum da gelecek çalışmalarda incelenebilir. Laplace yaklaşımı gibi yöntemler kullanılabilir.

Teoride BMA yöntemi model seçiminde iyi bir performans göstermektedir. Teorideki bu durum uygulamalı bir çalışmayla da gösterilmiştir. Bu çalışmada BMA'nın lojistik regresyonda model seçimindeki performansı üzerinde durulmuştur. Araştırılması gereken açık sorular vardır. Bunlar: farklı önsellerin seçimi, kestirim performansının geliştirilmesi ve farklı modellemelere uygulanmasıdır. Basit ya da çoklu regresyon modellerinde, çok değişkenli regresyon modellerinde, arklı genelleştirilmiş lineer modellerde (Loglineer modeller gibi), sağkalım analizinde ve grafiksel modellerde de uygulanabilir. Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) yöntemleri de Bayesci hipotez teslerinde ve Bayes faktörü hesaplamaları için incelenebilir.

Ayrıca yokluk hipotezine ilişkin anlamlılık testleri üzerine yapılan çalışmalar bulunmamaktadır. Bu eksiklikler gelecekte yapılabilecek çalışmalar için bize ışık tutacaktır.

BMA da çok büyük sayıda modellerle çalışıldığı için her bir model için bir önsel bilgi seçimi zorunluluğu vardır. Bu zorlukları aşmada literatürde yapılan çalışmaları olmasına rağmen halen yeni çalışmalara ihtiyaç vardır. Benchmark önsel seçimi yapılabilir.

Bu tezde, BMA yöntemi sadece lojistik regresyondaki klasik model seçimi yöntemleriyle karşılaştırıldı. Bayesci bilgi kriteri (BIC), Akaike bilgi kriteri (AIC) ve Sapma bilgi kriteri (DIC) gibi yöntemlerde de karşılaştırmalar yapılabilir.

Bayesci yaklaşım incelenen modelin parametre değerleri hakkındaki inanışların yani önsel olasılıkların verideki bilgiye nasıl ekleneceği sorusuna tam olarak cevap verir. Klasik çıkarım yaklaşımın da mümkün olmayan önsel bilginin kullanımına imkân tanır. Herhangi bir konu dışı fakat anlamlı bir bilgi (örneğin geçmişteki benzer sonuçlar veya başka bir benzer araştırma çalışmalarının sonuçları önsel formülasyon içinde Bayesci metodunda birleştirilebilir. Karşıt olarak Klasik istatistikte böyle bilginin ihmal edilmeye daha uygundur ve meta analizi gibi ileri tekniklerle bu birleştirmeler yapılır. Avantaj gibi gözüken bu durum önsellerin seçimi ve formülüze edilmesi konusunda bir takım zorluklar ve subjektiflik de getirir.

Hipotez testleri gibi analizlerde direkt yorumlama avantajları sağlamasına rağmen sonsal olasılıkların hesaplamasında gereken integrallerin bulunmasında analitik çözümler yeterli olmamaktadır. Dolayısıyla nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Özellikle bilinen istatistik paket programlarında bu işlemler kolaylıkla yapılamamaktadır. Ancak son yıllarda geliştirilen WinBugs gibi programlarda ve SPLUS makro yazılımıyla bu hesaplamalar yapılabilmektedir.

KAYNAKLAR

- **AITKIN, M.** : “*Simpson's paradox and the Bayes factor*”, Journal of the Royal Statistical Society B, 60(1):269-270, 1998
- **AKAIKE, H.** : “*Information theory and an extension of the maximum likelihood principle*”, in B. N. Petrov and F. Csaki, eds, ‘2nd International Symposium on Information Theory’, Akademiai Kiado, Budapest, pp. 267–281, 1973
- **ALBERT, J. H., AND CHIB, S.** : “*Bayesian methods for cumulative, sequential and two-step ordinal data regression models*”, Technical Report. Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University, OH, 1997
- **ALLEN, D. M.** : “*Mean square error prediction as a criterion for selecting variables*”, *Technometrics* **13**, 469–475, 1971
- **ATKINSON, A. C.** : “*Posterior probabilities for choosing a regression model*”, *Biometrika* **65**, 39-48, 1978
- **BARLOW, R.E., CLAROTTI, C.A. and SPIZZICHINO, F.** : “*Reliability and Decision Making*”, Chapman & Hall (London), 1993
- **BARRON, A., RISSANEN, J., and YU, B.**, “*The minimum description length principle in coding and modeling*,” *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 44, no. 6, pp. 2743-2760, 1998
- **BERGER, R. A.** : “*Factorial design model for assessing second language proficiency*.”, *Notes on Sociolinguistics* **3**: 181-86, 1998
- **BERGER, J.** : “*Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*”. New York: Springer-Verlag., 1985
- **BERGER, J.O. and BERRY, D.A.** : “ *The Relevance of stopping Rules in statistical inference*”, in *statistical Decision Theory and Related Topics IV*, Vol.1, eds. S. S. Gupta and J.O. Berger , New York : Springer verlag , pp.29-47, 1988
- **BERGER, J.O., BOUKAI, B. and WANG, Y.:** “*Unified Frequentist and Bayesian Testing of a Precise Hypothesis*”, *Statistical Science*, **12**, 3, 133-160, 1997

- **BERGER, J.O. and DELAMPADY, M. :** *"Testing precise hypotheses"*, Statist. Sci. J. 317-352, 1987
- **BERGER, J. O. and PREICCHI, L. R. :** *"The Intrinsic Bayes Factor for Model Selection and Prediction"*, Journal of the American Statistical Association, 91, 433, p.109-122, 1996
- **BERGER, J.O. and SELLKE, T. :** *"Testing a point null hypothesis: the irreconcilability of P values and evidence"*, (with discussion) Journal of the American Statistical Association, 82(397):112-139, 1987
- **BERLINER, L.M., ROYLE, J.A., WIKLE, C.K., and MILLIFF, R.F. :** *"Bayesian Methods in the Atmospheric Sciences"*, Bayesian Statistics 6 , J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid and A.F.M. Smith (Eds.), Oxford University Press, 83-100, 1999
- **BERNARDO, J. M. and SMITH, A. F. M. :** *"Bayesian Theory"*. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 1994
- **BERRY, D. And STANGL, D. :** *"Bayesian Methods in Health Related Research"*, in Bayesian Biostatistics", pp. 3-66, 1996
- **BESAG, J. and HIGDON, D. :** *"Bayesian analysis of agricultural field experiments"*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 61 691-746, 1999
- **BOLFARINE, H. and ZACKS, S. :** *"Prediction Theory for Finite Populations"*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1992
- **BRETTTHORST, G.L. :** *"Bayesian Spectrum Analysis and Parameter Analysis"*, New York: Springer-Verlag, 1988
- **BROWN, P. J. :** *"Measurement, Regression, and Calibration"*, Oxford, U.K., Clarendon Press., 1993
- **BROWN, W. J., MALVEAU, R. C., MCCORMICK, H. W. AND MOWBRAY, T. J. :** *"AntiPatterns: Refactoring Software, Architectures, and Projects in Crisis"*, John Wiley, New York, NY, 1998
- **BUCK, C.E., CAVANAGH, W.G. and LITTON, C.D. :** *"Bayesian Approach to Interpreting Archaeological Data"*, Wiley, Chicester, UK., 1996

- **CARLIN, B. AND CHIB, S. :** “*Bayesian model choice via Markov chain Monte Carlo methods*”, J.Royal Statist. Society Series B 57(3), 473-484, 1995
- **CARLIN, B., KADANE, J. and GELFAND, A. :**”*Approaches for Optimal Sequential Decision Analysis in Clinical Trials*”, Biometrics, 54, 964-975, 1998
- **CARLIN, B. P. and LOUIS, T. A. :**”*Bayes and empirical Bayes Methods for Data Analysis*”, (2nd edition). Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000
- **CARLIN, B. P. and LOUIS, T.A. :**” *Bayes and empirical Bayes Methods for Data Analysis*”, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL,1996
- **CASELLA , G. and BERGER, R.L. :** “ *Reconciling Bayesian and frequentist evidence in the one-sided testing problem*”, Journal of the American Statistical Association, 82(397):106-111,123-139(discussion), 1987
- **CHALONER, K. and VERDINELLI, I. :** “*Bayesian experimental design: A review*”, Statistical Science 10:273-304, 1995
- **CHIB, S. :** “*Marginal likelihood from the Gibbs output*”, Journal of the American Statistical Association, 90: 1313-1321,1995
- **CLEMEN, R. T. :**”*Making hard Decisions: An Introduction to Decision Analysis*”, 2nd Ed., Duxbury Belmont, CA, 1996
- **CLYDE, M., PARMIGIANI, G. AND VIDAKOVIC, B. :** “*Multiple shrinkage and subset selection in wavelets*”, Biometrika 85, 391-402, 1998
- **COWELL, R., DAWID, A., LAURITZEN, S., and SPIEGELHALTER, D. :** “*Probabilistic Networks and Expert Systems*”, Springer-Verlag, New York, 1999
- **COX, D. R. AND HINKLEY, D.V. :** “*Problems and solutions in theoretical statistics*”, London: Chapman and Hall, 1978
- **CYERT, R.M. and DEGROOT, M.H. :** “*Bayesian Analysis and Uncertainty in Economic Theory*”, Rowman and Littlefield, Totowa (New Jersey), 1987
- **DAWID, A.P. :** “*The trouble with Bayes factors*”, Research Report No. 202, Department of Statistical Science, University College London, 1999
- **DE FINETTI, B. :** “*Theory of probability*”, vol. 1 and 2. New York: John Wiley & Sons, 1974
- **DEGROOT, M. H. :** “*Doing what comes naturally: Interpreting a tail area as a posterior probability or as a likelihood ratio*”, Journal of the American Statistical Association, 68(344):966-969, 1973

- **DEGROOT, M.H., FIENBERG, S.E. , AND KADANE J.B.,** : “*Statistics and the Law*”, Wiley, New York, 1986
- **DELAMPADY, M. and BERGER, J.O.** : “*Lower bounds on Bayes factors for the multinomial distribution with application to chi-squared tests of fit*”, Ann. Statist. 18, 1295-1316, 1990
- **DEY, D. K., GHOSH, S. K. and MALLICK, B. K.** : “*Generalized Linear Models: A Bayesian perspective*”, Marcel Dekker Inc., New York. ISBN: 0-8247-9034-0, 2000
- **DEY, D., MULLER, P. and SINHA, D.** : “*Practical Nonparametric and Semiparametric Bayesian Statistics*”, Springer-Verlag Lecture Notes Series, Volume 133, 1998
- **DEY, D. K. and SINHA, D.** : “*Bayesian model determination in lifetime data analysis*”, Brazilian Journal of Probability and Statistics, 2, pp 1-19, 1999
- **DICKEY, J. M.** : “*Is the tail area useful as an approximate Bayes factor?*”, Journal of the American Statistical Association, 72:138-142, 1977
- **DRAPER, D.** : “*Assessment and propagation of model uncertainty*”, J. Royal Statist. Soc., Ser. B, 57, 45-97, 1995
- **EDWARDS, W., LINDMAN, H. and SAVAGE, L.J.** : “*Bayesian Statistical Inference for Psychological Research*”, Psychological Review, 70,193-242, 1963
- **EFRON, B. AND GOUS, A.** : “*Scales of evidence for model selection: Fisher versus jeffreys*”, 1998
- **FIENBERG, S. E:** “*Contingency tables and log-linear models: Basic results and new developments*”, Journal of the American Statistical Association, **95**, 643-647, 2000
- **FITZGERALD, W.J., GODSILL, S.J., KOKARAM, A.C., and STARK A.J.** : “*Bayesian methods in signal and image processing*”, Oxford University Press, 1999
- **FORNELL, C. AND RUST, R. T.** : “*Incorporating prior theory in covariance structure analysis: A Bayesian approach*”, Psychometrika, 54(2):249-259, 1989
- **FOSTER, D. and GEORGE, E.** : “*The Risk Inflation Criterion for Multiple Regression*”, Annals of Statistics 22, 1947-75, 1994

- **GELFAND, A. E. AND DEY, D. K. :** “*Bayesian Model Choice: Asymptotics and Exact Calculations*”, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 56: 501-514, 1994
- **GEORGE, E. I. ”** *The variable selection problem*”, J. Amer. Statist. Assoc. 95: 1304–1308, 2000
- **GERSCH, W. and KITAGAWA, G. :”** *Smoothness priors analysis of quasi-periodic time series*”, Signals, Systems and Computers, 1995. 1995 Conference Record of the Twenty-Ninth Asilomar Conference on Vol. 2, Issue , 30 Oct-1 Nov 1995 Page(s):1091 - 1095 vol.2, 1996
- **GEWEKE, J. :”***Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models Inference, Development and Communication*”, Econometric Reviews, 18, 1-126, 1999a
- **GLYMOUR, C. and COOPER G. F. :** “ *Computation, Causation, and Discovery*”, Menlo Park, CA: AAAI Press, Cambridge, MA: MIT Pres, 1999
- **GODSILL, S. J. And RAYNER, P. J. W. :** “*Digital Audio Restoration: A Statistical Model-based Approach*”, Berlin:Springer, ISBN 3 540 76222 1, 1998a
- **GOOD, I. J. :** “*Good Thinking: The Foundations of Probability and Its Applications*”, Univ. of Minn. Press., Minneapolis, 1983
- **GREEN, P. J. :** “*Reversible jump Markov chain Monte carlo computation and Bayesian model determination*”, Biometrika **82**: 711–713. ., 1995
- **GREENLAND, S. :** “ *Introduction to Regression Modelling*”, in modern Epidemiology, K. J. Rothman and S. Greenland (eds), 401-432, Philadelphia: Lippincott-Raven, 1998
- **HAUGHTON, D. M. A. :** “*On the choice of a model to fit data from an exponential family*”, Annals of Statistics, 16(1):342-355, 1988
- **HOBERT, J. P. :** “*Hierarchical models: A current computational perspective*”, Journal of the American Statistical Association 95: 1312–1316, 2000
- **HSIAO, C.K. :** “*Approximate Bayes factors when a mode occurs on the boundary*”, Journal of the American Statistical Association, 656-663, 1997

- **IVERSEN, E. S. JR., PARMIGIANI, G. and BERRY, D.A. :** “*Validating Bayesian Prediction Models: a Case Study in Genetic Susceptibility to Breast Cancer. In: Case Studies in Bayesian Statistics*”, Springer, NY. pp. 321-338, 1998
- **JAYNES, E. :** “*Probability Theory: The Logic of Science*”, 1999
- **JEFFREYS, H. :** “*Theory of Probability*”, (3rd ed.), Oxford, U.K.: Oxford University Pres., 1961
- **JENSEN, J.R.:** “*Introductory digital image processing: A remote sensing perspective*”, Prentice Hall (New Jersey), 1986
- **JOHNSON, V. E. :** “*An Alternative to Traditional GPA for Evaluating Student Performance*”, Statistical Science, 12, 251-278, 1997
- **JOHNSON, V. E. and ALBERT, J. H. :** “*Ordinal Data Modeling*”, New York: Springer-Verlag, 1999
- **JORDAN, M. I. :** “*Learning in Graphical Models*”, MIT Press, 1998
- **KADANE, J. B. :** “*Bayesian Methods and Ethics in a Clinical Trial Design*”, John Wiley & Sons (New York), 1996
- **KADANE, J., SCHERVISH, M. And SEIDENFELD, T. :** “*Rethinking the Foundations of Statistics*”, Cambridge: Cambridge university Pres, 1999
- **KADANE, J. And SCHUAN, D. A. :** “*A Probabilistic Analysis of the Sacco and Vanzetti Evidence*”, new York Wiley, 1996
- **KASS, R.E. and RAFTERY, A.E.:** “*Bayes factors*”, Journal of the American Statistical Association, 90, 773-795, 1995
- **KASS, R. E. AND VAIDYANATHAN, S. K. :** “*Approximate Bayes factors and orthogonal parameters, with application to testing equality of two binomial proportions*”, Journal of the Royal Statistical Society B, 54(1):129-144, 1992
- **KASS, R. E. AND WASSERMAN, L. :** “*A reference Bayesian test for nested hypotheses and its relationship to the Schwarz criterion*”, Journal of the American Statistical Association, 90(431):928-934, 1995
- **KEYNES, J. M. :** “*Theoretical Approach to Decision-making under Conditions of Risk*”, Brady Br J Philos Sci, 1921

- **KIM, S., SHEPHARD N. and CHIB, S.** : “*Stochastic volatility, likelihood inference and comparison with GARCH Models*”, Review of Economic Studies, 65: 361-393, 1998
- **KOLMOGOROV, A. N.** : “*Foundations of the theory of probability*”, Chelsea, New York, 1950
- **LAPLACE** : “*Essai philosophique sur les probabilités*”, Translated by F. W. Truscott and F. L. Emory and reprinted in 1951 with an introductory note by E. T. Bell as A philosophical essay on probabilities. New York: Dover Publications, 1814
- **LAURITZEN, S. L.** : “*Graphical Models*”, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996
- **LEWIS, S.M. AND RAFTERY, A.E.** : “*Estimating Bayes factors via posterior simulation with the Laplace-Metropolis estimator*”, Journal of the American Statistical Association, 92, 648–655, 1997
- **LINDLEY, D. V.** : “*A statistical paradox*”, Biometrika, 44:187-192, 1957
- **LITTLE, R.J.A. and RUBIN, D.B.**: “*Statistical Analysis with Missing Data*”, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1987
- **LIU, J., NEUWALD, A. F. and LAWRENCE, C. E.** : “*Markovian structures in biological sequence alignments*”, J Amer Statist Assoc **94**:1-15, 1999
- **MADIGAN, D. and RAFTERY, A. E.** : “*Model Selection and Accounting for Model uncertainty in Graphical Models Using Occam’s Window*”, Journal of the American Statistical Association 89, 1335-1346, 1994
- **MALLOWS, C. L.** : “*Some comments on C_p* ”, Technometrics **15**, 661–675, 1973
- **MCCULLOGH, R. AND ROSSI, P. E.** : “*A Bayesian Approach To Testing The Arbitrage Pricing Theory*”, Journal of Econometrics, 49:141-168, 1992
- **MENG, X.-L.**: “*Missing Data: Dial M for ???*,” Journal of the American Statistical Association, 95, 1325–1330, 2000
- **MUKHOPADHYAY, P.** : “*Small Area Estimation in Survey Sampling*”, New Delhi: Naroso, 1998

- **MULLER, P. M. :** “*Simulation based optimal design* “,In: Berger,J., Bernardo, J., Dawid, A., Smith, A. (Eds.), *Bayesian Statistics 6*. Clarendon Press (Oxford), 1999
- **MULLER, P. M. And RIOS-INSUA, D. :** “*Issues in Bayesian Analysis of Neural Network Models*”, *Neural Computation*, 10, 571–592, 1998
- **MULLER, P. M. and VIDA KOVIC, B.:** “*Bayesian Inference in Wavelet Based Models*”, *Lecture Notes in Statistics*, Vol. 141. Springer, New York, 1999
- **NEAL, R. M. :** “*Regression and Classification Using Gaussian Process Priors in Bayesian Statistics*”, Oxford University Pres, pp. 475-501, 1999
- **NEAL, R. M. :** “*Bayesian Learning for Neural Networks*”, New York:Springer, 1996
- **NEWTON, M. A. AND RAFTERY, A. E. :** “*Journal of the Royal Statistical Society*”, Series B (Methodological), Vol. 56, No. 1 (1994),pp.3-48 , 1994
- **NOBLE, R. :** “*Multivariate applications of Bayesian model averaging*”, Ph.D. diss. Dep. of Statistics, Virginia Polytechnic Inst. And State Univ., Blacksburg, VA, 2000
- **O’HAGAN, A. :** “*Fractional Bayes factors for models comparison* “, *J. Roy. Statist. Soc. B*, 57, 99–138, 1995
- **O’HAGAN, A. :** “*Bayesian inference*”, New York, Edward Arnold, 1994
- **QIAN, W. and BROWN, P. J. :** “*Bayes Sequential Decision Theory in Clinical Trials*”, in *Bayesian Statistics 6*, Oxford University Press, pp. 829-838, 1999
- **PARENT, E., BOBEE, B., HUBERT, P., MIQUEL, J. :"** *Statistical and Bayesian Methods in Hydrological Sciences*", UNESCO Studies and Reports in Hydrology, pp. 327-340, 1998
- **PAULER, D. :** “*The Schwarz Criterion and related methods for the normal linear model*”, *Biometrika*, 85, 13-27, 1998
- **PEARL, J. :** “*Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*”, San Mateo, CA: Morgan Kaufman Publishers, 1988
- **PERICCHI, L. R. :** “*An alternative to the standard Bayesian procedure for discrimination between normal linear models*”, *Biometrika*, 71(3):575-586, 1984

- **PERLMAN, M., BLAUG, M. :** *"Economists of the Twentieth Century"*, Elgar Publishing, 1997
- **POIRIER, D. J. :** *"Intermediate Statistics and Econometrics"*, MIT Press, 1995
- **POLE, A., WEST, M. and HARRISON, J. :** *"Applied Bayesian Forecasting and Time Series Analysis"*, Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society), Vol. 158, No. 3, pp. 635-636, 1995
- **POLLARD, W. E. :** *"Bayesian Statistics for Evaluation Research"*, Beverly Hills, Calif.: Sage, 1986
- **RACUGNO, W. :** *"Processing of the Workshop on Model Selection"*, Special issue of Rassegna di Metodi Statistici ed Applicazioni, Bologna: Pitagora Editrice, 1998
- **RAFTERY, A. E. :** *"Bayes factors and BIC: comment on 'A critique of the Bayesian information criterion for model selection'"*, Sociological Methods and Research , 27: 411-427, 1999
- **RAFTERY, A. E. :** *"Approximate Bayes factors and accounting for model uncertainty in generalized linear models"*, Biometrika 83:251-266, 1996
- **RAFTERY, A.E. :** *"Bayesian model selection in social research"*, Sociological Methodology 1995. Marsden, P.V. Cambridge, Mass., Blackwells: 111-196, 1995
- **RAFTERY, A. E. :** *"Choosing models for cross-classification"*, American Sociological Review 51: 145-146, 1986
- **REGAZZINI, E. :** *"Old and recent results on the relationship between predictive inference and statistical modeling either in nonparametric or parametric form"*, in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith (eds), Bayesian Statistics 6, Oxford University Press, pp. 571-588, 1999
- **ROBERT, C. P. :** *"The Bayesian Choice"*, Springer-Verlag, 1994
- **ROBINS, J.M. and WASSERMAN, L. :** *"Conditioning, likelihood, and coherence: A review of some foundational concepts"*, Journal of the American Statistical Association, 95(452):1340-1346, 2000
- **SCHWARZ, G. :** *"Estimating the dimension of a model"*, Annals of Statistics, 6(2):461-464, 1978

- **SELLKE, T. , BAYARRI, M.J. and BERGER, J. O. :** “*Calibration of P values for testing precise null hypotheses*”, The American Statistician , 55,62-71, 2001
- **SELLKE, T., BAYARRI, M. J. and BERGER, J. O. :** “*Calibration of P-values for precise Null Hypotheses*”, ISDS Discussion Paper 99-13, Durham: Duke University, 1999
- **SHAFFER, G. :** “*Lindley's paradox*”, Journal of the American Statistical Association, 77(378):325-351, 1982
- **SHAO, J.:** “*The Jackknife and Bootstrap*”, Newyork, Springer, 1996
- **SMITH, J.Q. :** “*Decision Analysis: A Bayesian Approach* “, Chapman and Hall. ISBN 0-412-27520-1, 1988
- **SMITH, M. AND KOHN, R. :** “*Nonparametric regression using Bayesian variable selection*”, Journal of Econometrics, vol.75:2, pp. 317-344, 1996
- **SMITH, A. F. M. AND SPIEGELHALTER, D. J. :** “*Bayes factors and choice criteria for linear models*”, Journal of the Royal Statistical Society B, 42(2):213-220, 1980
- **SPIEGELHALTER, D. and SMITH, A.F.M. :** “*Bayes factors for linear and log-linear models with vague prior information*”, J. Royal Statist Soc. B 44: 377–387, 1982
- **SPIRITES, P., GLYMOUR, C. and SCHEINES, R. “** *Causation, Prediction, and Search*”, New York, N.Y.: Springer-Verlag, 1993
- **STANGL, D. And BERRY, D. :** “*Bayesian Statistics in Medicine: Where We Are adn Where We Should Be Going*”, Invited Paper, Sankhya, Series B 60:176-195, 1998
- **THIESSON, B., MEEK, C., CHICKERING, D. M. and HECKERMAN, D. :** “*Computationally Efficient Methods for Selecting Among Mixtures of Graphical Models*”, in Bayesian Statistics6, Oxford University Press, pp.631-656, 1999
- **VERDINELLI, I. AND WASSERMAN, L. :** “*Computing Bayes factors using a generalization of the Savage-Dickey density ratio*”, Journal of the American Statistical Association, 90(430):614-618, 1995

- **VOLINSKY, C., MADIGAN, D., RAFTERY, A.E. AND KRONMAL, R.A.**
: “*Bayesian model averaging in proportional hazard models: assessing the risk of a stroke*”, *Applied Statistics*, **46**:4, 433-448, 1997
- **WEAKLIEM, D. L. :** “*What do statistically significant results signify?*” , 1998
- **WEST, M. and HARRISON, J. :"** *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*", Springer New York, 2nd edition, 1997
- **WOLPERT, R.L. and ICKSTADT, K. :"** *Poisson/gamma random field models for spatial statistics*", *Biometrika*, 85, 251—267, 1998

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Trabzon’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Trabzon’da tamamladıktan sonra 2000 yılında 19 Mayıs Üniversitesi İstatistik bölümü kazandı. 2004 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl 19 Mayıs Üniversitesi İstatistik bölümünde yüksek lisansa başladı. Evli ve bir çocuk babasıdır.