

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

NETWORK TOPOLOJİLERİ
VE
GRAF PARAMATRELERİ

Yıldız DIZMAN

Matematik Bölümü Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 619.03.03

Sunuş Tarihi: 13.08.2007

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Aysun AYTAÇ

Bornova-İZMİR

Sayın **Yıldız DIZMAN** tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “**Network Topolojileri ve Graf Parametreleri**” başlıklı bu çalışma E.Ü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve / / 2007 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği / oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı :.....

Raportör Üye :.....

Üye :.....

ÖZET
NETWORK TOPOLOJİLERİ
VE
GRAF PARAMATRELERİ

DİZMAN, Yıldız

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yard. Doç. Dr. Aysun AYTAÇ

Ağustos 2007, 46 sayfa

Bir iletişim network' ün tasarımında network' ün dayanıklılığı oldukça önemli bir kavramdır. Bir network' ün dayanıklılığı, zedelenebilirlik için onun dayanma gücünü gösterdiğinden, bir network mümkün olduğunca kararlı oluşturulmak zorundadır. Bir çok bilim ve mühendislik problemleri bir network olarak temsil edilebilir. Bir network' ün genelleştirilmiş bir graftır. Bir network ile temsil edilebilen bir çok problem örneği vardır. Bunlardan bazıları periyodik ve ardışık devirler, organik molekül yapıları, mekaniksel yapılar ve benzerlerini içerir. Böylece bir graf bir iletişim network' ü olarak düşünebilir. Bu durumda graf teorisindeki notasyonlar, bir network' ün dayanıklılığı için kullanılabilir. Graf teorisinde, bağlantılılık, örtü sayısı, bağımsızlık sayısı, baskınlık sayısı gibi kararlılığın belirli ölçümleri graflarda kullanılabilir. Böylece bir network' ün kararlılığı belirgin hesaplamalar ile tanımlanır. Bu tezde bir grafın ortalama bütünlük değeri çalışılmıştır. Total grafların ortalama bütünlük sayısını hesaplanıp, graf işlemlerini de kullanarak ortalama bütünlük ile ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Zedelenebilirlik, Total Graf, Bütünlük, Ortalama Bütünlük

ABSTRACT
NETWORK TOPOLOJİLERİ
VE
GRAF PARAMATRELERİ

DİZMAN, Yıldız

Msc in Mathematics

Supervisor: Yard. Doç. Dr. Aysun AYTAÇ

August 2007, 46 pages

In communications network design, network's stability is a very important concept. A network has to be constructed as possible as stable since the stability of a network shows its resistance to vulnerability. Many science and engineering problems can be represented by a network, generalization of which is a graph. Examples of problems that can be represented by a graph include: cyclic sequential circuit, organic molecule structures, mechanical structures, etc. So, a graph can be considered as a model of a communication network. Then, the notions of the graph theory can be used for the stability of a network. In the graph theory, deterministic measures of the stability are used for some parameters of graphs as connectivity, covering number, independence number and dominating number. Then, the stability of a network is defined with deterministic calculation. We considered the mean-integrity number of a graph. In this thesis; we search the mean-integrity number of total graphs. We also give some theorems about the mean-integrity using the graph operations and design.

Keywords: Vulnerability, Total Graph, Integrity, Mean Integrity

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her safhasında ve her anında bilgi ve tecrübesiyle bana yön veren, beni destekleyen ve bu çalışmamda benden tüm yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Aysun Aytaç' a, manevi desteklerini her an hissettiğim ve eksik etmeyen aileme, yakın arkadaşlarıma, çalıştığım kurumdaki öğretmen arkadaşlarıma, dershanede müdür olan Kübilay Doğan'a ve öğrencilerime çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 6 Tepeli Graf Örneği.....	3
2.1 Yol Grafin Yapısı.....	4
2.2 Çevre Grafin Yapısı.....	4
2.3 Tam Grafin Yapısı.....	5
2.4 Tekerlek Grafin Yapısı.....	5
2.5 Yıldız Grafin Yapısı.....	6
2.6 İki Kümeli Grafin Yapısı.....	6
2.7 İki Kümeli Tam Grafin Yapısı.....	7
2.8 Ağaç Grafin Yapısı.....	7
2.9 Bir Grafin Tümleyeni.....	8
2.10 Bir Grafin Gücü.....	8
2.11 İki Grafin Birleşim işlemi.....	9
2.12 İki Grafin Toplama işlemi.....	9
2.13 Graflarda Bileşke işlemi.....	10
2.14 Grafların Kartezyen Çarpımı.....	11
2.15 P_3 o P_5 Grafinin Korana İşlemi.....	11
3.1 7 Tepeli Graf Örnekleri.....	20
4.1 P_4 Grafinin Total Grafinin Yapısı.....	21
4.2 $T(K_n)$ -s Grafinin Genel yapısı.....	25
4.3 $T(K_{1,n})$ Grafinin Yapısı.....	27
4.4 $T(K_{1,n})$ -s Grafinin yapısı.....	28
5.1 $P_2 \circ C_n$ Grafinin Yapısı.....	29

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.2 T(P ₂)oC _n rafının Yapısı.....	38
5.3 P ₂ oP _n Grafinin Yapısı	38
5.4 T(P ₂)oP _n Grafinin Yapısı.....	39

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
1.GİRİŞ.....	1
1.1 Graflarda zedelenebilirlik kavramı.....	1
2.GRAFA GİRİŞ.....	4
2.1 Graf Çeşitleri.....	4
2.2 Graflarda İşlemler.....	7
2.3. İkili İşlemler.....	8
2.4 Graf Parametreleri.....	12
3.BAZI ZEDELENEBİLİRLİK PARAMETRELERİ VE	
SONUÇLAR.....	13
3.1 Bağlantılılık.....	13
3.2 Bütünlük.....	13
3.3 Ortalama Bütünlük Tanımı ve Sonuçları.....	17
4. TOTAL GRAFLAR VE ORTALAMA BÜTÜNLÜK	
DEĞERLERİ.....	21
5. BAZI GRAFLARIN CORONA (TAÇLAMA) İŞLEMİ VE	
ORTALAMA BÜTÜNLÜK.....	29
6.SONUÇ.....	43
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	46

1. GİRİŞ

1.1 Graflarda zedelenebilirlik kavramı

Network birbirine kablolarla bağlanmış server, printer, pc, modem gibi birçok haberleşme ekipmanının en ekonomik ve verimli yoldan kullanılmasıdır. Network insanların bireysel değil, ortak çalışmalarını, zaman ve para kazancı sağlar. Bilgisayar iletişim sistemleri gerek orduda, gerek idari teşkilatta ve gerekse sivil çevrelerde gittikçe önemi artan bir konudur.

İletişim deyince ilk akla gelen şey de internettir. İnternet ile beraber toplumların iletişim yapısı büyük bir değişikliğe uğramıştır. İletişim ve haberleşme yüzyıllar önce başlayan posta sisteminden günümüz İnternet'ine kadar büyük bir yolculuk geçirmiştir ve bu yolculuk hala devam etmektedir. Bu büyük yolculuk ve değişimin ana kaynağı internet'tir. İnternet, iki güçlü müttefik olan, bilişim ve iletişimi, öne sürmektedir. Telefon şebekeleri ya da radyo ağı gibi tek bir hizmet için işletilen iletişim ağları yerine, İnternet bilişimin gücünü kullanarak tek bir iletişim ağını birçok uygulama için kullanmaktadır.

“ Topluluk (Community) ve iletişim (Communication) sözcükleri aynı köke sahiptir. Bir iletişim ağı kurduğunuz her yerde bir toplulukta kurarsınız ve ne zaman bu ağı yıkarsanız –yasadışı ilan ederseniz, çökertirseniz ya da erişilemeyecek kadar pahalı kıalarsanız–, topluluğu da incitmiş olursunuz.”

B. Strerling, The Hacker Crackdown

Günümüzde insanlar arasındaki iletişimin sürekli ve hızlı olması büyük önem kazanmıştır. Bu da iletişim ağlarının hızlı, güvenilir ve

sorunsuz olmasının önemini daha çok arttırmıştır. İletişim ağlarında çıkabilecek bir sorun veri kaybına, verinin zamanında yerine ulaşmamasına neden olabilir. Bu ise hem para hem de zaman kaybı demektir. Grafin tepelerini iletişim ağını oluşturan merkezler, bu merkezler arasındaki bağlantılar ise ayrıtlarla birebir eşleştirilerek sağlanmıştır. “Acaba iletişim ağlarında herhangi bir sorunla karşılaşılırsa iletişimi devam ettirmek için nasıl bir yol izlenmeli ?” sorusu ilk akla gelen sorulardan birisidir. İşte birçok yöntem bunun üzerine geliştirilmiştir. Yani birçok yöntemde iletişimi sürekli hale getirmenin en karlı yolları aranmıştır. Zedelenebilirliğin tanımı da bu noktada ortaya çıkar. Bir iletişim ağında bazı merkezlerin ya da bağlantıların herhangi bir sebep den ötürü bozulmasıyla iletişim kesilene kadar ağın gösterdiği dayanma gücüne zedelenebilirlik denir.

Bu günlerde bu tür olayların önemi daha da artmaktadır. Burada önemli olan iki nokta vardır. Biri güvenilirlik öbürü ise zedelenebilirliktir.

Örneğin hava alanlarındaki uçuş rotasını bir network ağı gibi düşünelim. Bu düzeneği graflara birebir taşıyarak neler yapabileceğimizi bulmaya çalışalım. Örneğin İstanbul, Ankara, Adana, Erzurum ve Hakkari şehirleri arasındaki uçuş rotası her bir şehir için aşağıdaki gibidir.

İstanbul → Ankara, Adana, Antalya, Erzurum ve Hakkari

Ankara → İstanbul, Adana, Antalya, Erzurum ve Hakkari

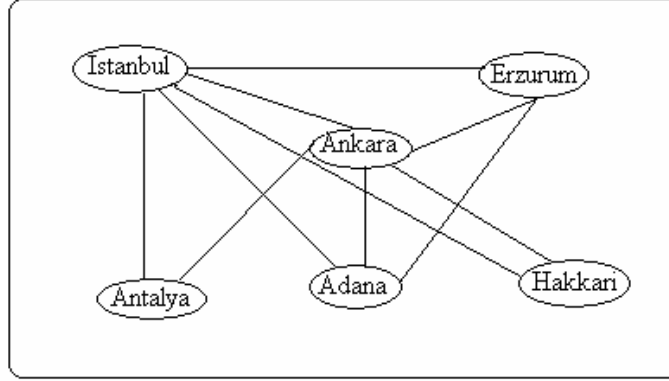
Antalya → İstanbul, Ankara

Adana → İstanbul, Ankara, Erzurum

Erzurum → İstanbul, Ankara, Adana

Hakkari → İstanbul, Ankara

Bu uçuş güzergahlarını bir graf ile modellerken şehirlere tepe, herhangi iki şehir arasındaki güzergaha da ayrıt olarak aldığımızda aşağıdaki Şekil 1.1'i elde ederiz.



Şekil 1.1

Bu graf yapısını kullanarak birçok işlem yapabiliriz. Bunlardan bir kaçışöyledir:

1. Bir şehirden bir şehre en kısa mesafeyi,
2. En ucuz uçuş maliyeti,
3. İki şehir arasında uçuş yoksa hangi güzergahlardan gidebiliriz?
4. Bu gibi işlemlerden en önemlisi bizimde konu aldığımız, herhangi bir şehirdeki hava alanında bir aksaklık olduğunda kalan hava alanları iletişimi sağlayabilecek mi ya da ne kadar dayanabilecek?
5. Ya da bazı hap şehirlerin (Örneğin Ankara, İstanbul) hangisini kaldırırsak iletişim tamamen kopar ya da kısmen de olsa sürdürülebilir mi?

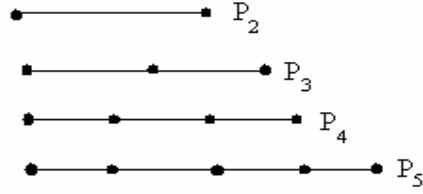
Sonuç olarak havaalanının dayanabilirliği ne kadardır. Buradan da zedelenebilirlik kavramları olan parametrelere ihtiyaç duyuluyor.

2. GRAFA GİRİŞ

Bu bölümde bazı bilinen graf yapıları tanımlanmış ve bunların sembolik gösterimleri verilmiştir. Ayrıca graflarda işlemler ve sıkça kullanılan bazı graf parametreleri tanımlanmıştır.

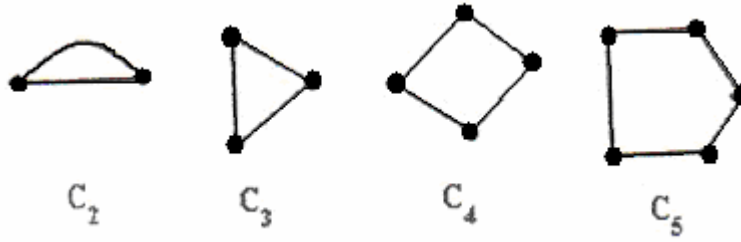
2.1 GRAF ÇEŞİTLERİ

2.1.1 Yol Graf: Tepelerin iki tanesinin derecesi 1, diğer tüm tepelerinin dereceleri ise 2 olan graflara “yol graf” denir. n tepeli bir yol graf P_n ile gösterilir. N tepeli bir yol grafının ayrıt sayısı ise $n-1$ dir.



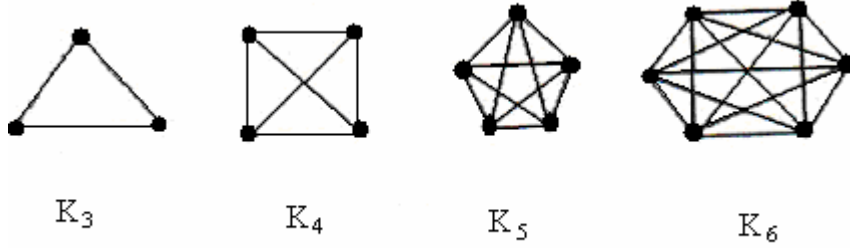
Şekil 2.1

2.1.2 Çevre Graf: Her tepesinin derecesi 2 olan grafa “çevre graf” denir. n tepeli bir çevre graf C_n ile gösterilir. n tepeli bir çevre grafın ayrıt sayısı n tanedir.



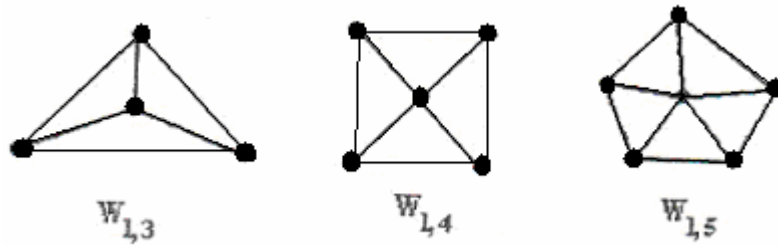
Şekil 2.2

2.1.3. Tam Graf: Bir G grafindaki herhangi iki tepe arasında mutlaka bir ayrıt var ise bu grafa “tam graf” denir. n tepeli bir tam graf K_n ile gösterilir. n tepeli bir grafin ayrıt sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ dir. Tam graftaki her bir tepenin derecesi ise $(n-1)$ dir.



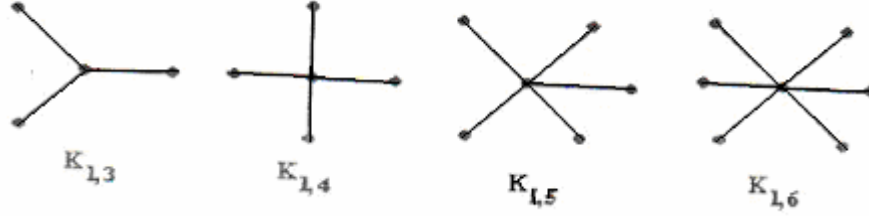
Şekil 2.3

2.1.4. Tekerlek Graf: n tepeli bir çevre grafin her bir tepesine, bir tek tepeden (bu tepe çevre grafa ait değildir) birer ayrıt eklenmesiyle elde edilen grafa “tekerlek graf” denir. n tepeli bir tekerlek graf $W_{1,n}$ ile gösterilir. Tekerlek grafi K_1+C_n şeklinde de ifade etmek mümkündür.



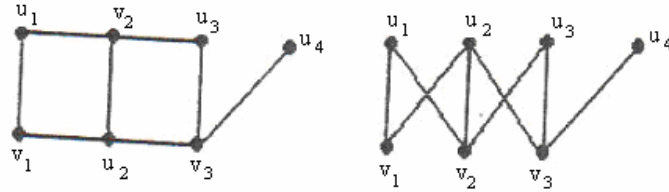
Şekil 2.4

2.1.5. Yıldız Graf: $(n+1)$ tepeli bir G grafında bir tepe n dereceli diğer tepeler 1 dereceli ise bu grafa “yıldız graf” denir ve $K_{1,n}$ ile gösterilir.



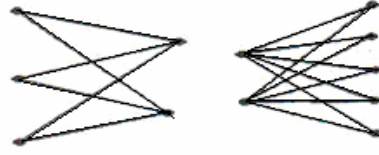
Şekil 2.5

2.1.6. İki kümeli (Bipartite) Graflar: Bir G grafının tepeler kümesi V_1 ve V_2 gibi iki alt kümeye ayrılsın. V_1 kümesindeki tepe çiftleri birbirleriyle, V_2 kümesindeki tepe çiftleri de birbirleriyle bitişik değilse, ancak V_1 ve V_2 kümeleri arasında bazı ayrıtlar varsa böyle graflara iki kümeli (bipartite) graflar denir. $K_{m,n}$ ile gösterilir. (m ile V_1 kümesinin eleman sayısı, n ile V_2 kümesinin eleman sayısı temsil edilir.)



Şekil 2.6

2.1.7. İki Kümeli Tam Graflar: Bir iki kümeli (bipartite) grafa V_1 kümesinin her bir tepesi, V_2 kümesinin her bir tepesiyle bitişikse böyle graflara iki kümeli graflar denir.



Şekil 2.7

2.1.8. Ağaç Graflar: Çevre içermeyen graflara ağaç graf denir. Örneğin her yol graf, yıldız graf ve iki kümeli graf birer ağaç graftır.



Şekil 2.8

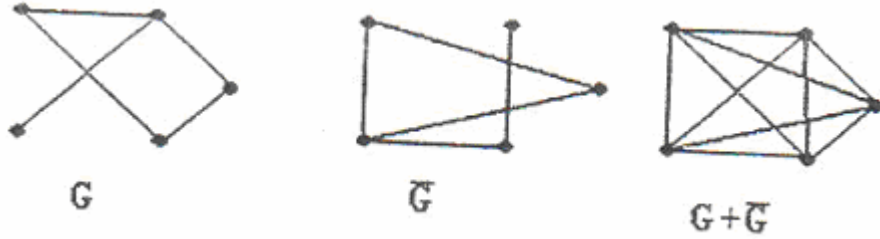
2.1.9. Regüler (düzenli) Graflar : Bir grafın tüm tepeleri aynı dereceden ise grafa o dereceden regüler (düzenli) graf denir. K_n tam grafi $(n-1)$. dereceden, C_n çevre grafları ise ikinci dereceden düzenli graflardır. Bu ifade n -regüler şeklinde de gösterilir.

2.2. GRAFLARDA İŞLEMLER

2.2.1 TEKLİ İŞLEMLER

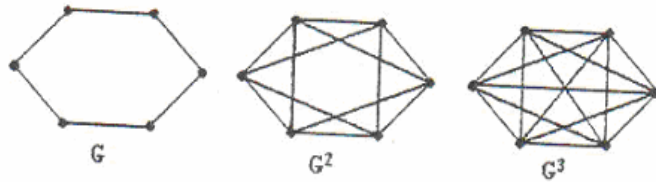
Bu kısımda bir G grafi için tümleyen ve güç tekli işlemlerinin tanımı verilmiştir.

Tanım 2.2.1.1: Bir Grafın Tümleyeni, G grafının tümleyeni, G ile aynı tepe kümesine sahip ancak ayrıt kümesi G ' de olmayan ayrıntıları içeren graftır. $\overline{G}$ ile gösterilir. n tepeli bir G grafında $G + \overline{G}$ toplamı tam bir graftır.



Şekil 2.9

Tanım 2.2.1.2: Bir Grafın Gücü, G grafının k . kuvveti alındığında oluşan graf G ile aynı tepe kümesine sahiptir ve iki tepe arasındaki yol k uzunluğunda ise bu tepelerin bir ayrıtla birleştirilmesiyle oluşur. Ve bu G^k ile gösterilir.

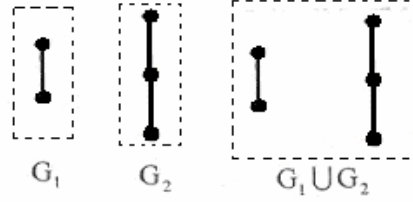


Şekil 2.10

2.3. İKİLİ İŞLEMLER

Bu kısımda bir grafın birleşim, toplama, bileşke ve kartezyen çarpım ikili işlemlerinin tanımı verilmiştir.

Tanım 2.3.1: Graflarda Birleşim İşlemi, G_1 ve G_2 graflarının birleşimi, V_1 ve V_2 ayrık tepe kümeleri, E_1 ve E_2 ayrık kümeleri olmak üzere $V=V_1 \cup V_2$ ve $E=E_1 \cup E_2$ birleşimlerinden oluşan $G=G_1 \cup G_2$ grafidir. G_1 ve G_2 'nin ayrık sayıları q_1 ve q_2 ise oluşan grafin ayrık sayısı q_1+q_2 tanedir.



Şekil 2.11

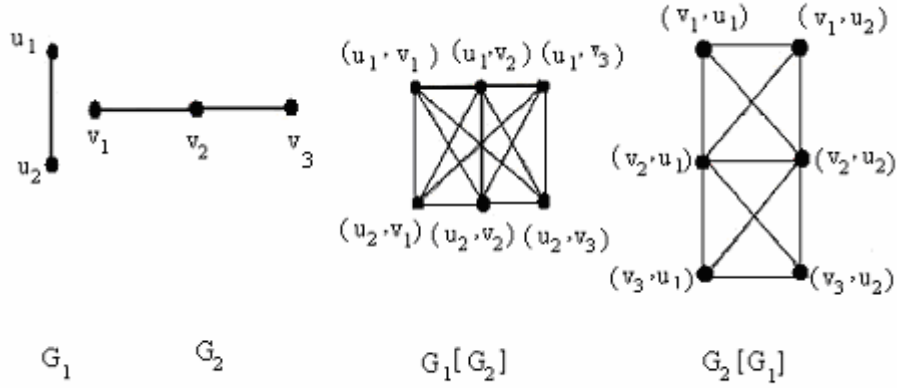
Tanım 2.3.2: Graflarda Toplama İşlemi, G_1 ve G_2 , m ve n tepeli iki graf olsun. G_1 'in her bir tepesinin G_2 'nin her bir tepesine bir ayrıtle birleştirilmesiyle elde edilen grafa G_1 ve G_2 graflarının toplamı denir. G_1+G_2 ile gösterilir. Elde edilen graf $m+n$ tepelidir. G_1 'in ayrıtlarının sayısı q_1 , G_2 'nin ayrıtlarının sayısı q_2 ise G_1+G_2 'nin ayrıtlarının sayısı q_1+q_2+m*n olur.



Şekil 2.12

Tanım 2.3.3: Graflarda Bileşke İşlemi, G_1 ve G_2 graflarında bileşke işlemi ile elde edilen graf $G_1[G_2]$ ile gösterilir. G_1 'in tepeler kümesi V_1 , G_2 'nin tepeler kümesi V_2 ise $G_1[G_2]$ 'nin tepeler kümesi V_1 ve V_2 'nin kartezyen çarpımı olur. Bu işlemde ayrıtlar şu şekilde belirlenir. $G_1[G_2]$ 'nin herhangi iki tepesi $u=(u_1, u_2)$ ve $v=(v_1, v_2)$ olsun. Eğer u_1 ve v_1 komşu ise veya $u_1 = v_1$ ve u_2, v_2 ile komşu ise u ve v tepeleri bir ayrıtlarla bitştirilir.

G_1 grafinin tepe sayısı m , G_2 grafinin tepe sayısı n ise $G_1[G_2]$ grafinin tepe sayısı $m*n$ dir. G_1 grafinin ayrıtlarının sayısı q_1 ve G_2 grafinin ayrıtlarının sayısı q_2 ise $G_1[G_2]$ grafinin ayrıtlarının sayısı $m*q_2+n^2*q_1$ dir.

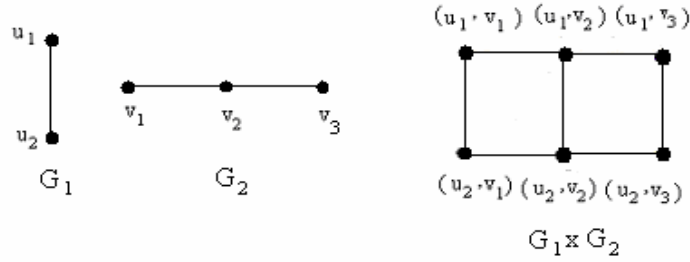


Şekil 2.13

Tanım 2.3.4: Grafların Kartezyen Çarpımı, G_1 ve G_2 gibi iki grafin kartezyen çarpımı $G_1 \times G_2$ ile gösterilir. G_1 'in tepeler kümesi V_1 , G_2 'nin tepeler kümesi V_2 olmak üzere $G_1 \times G_2$ 'nin tepeler kümesi bu kümelerin kartezyen çarpımıdır. Bu işlemde ayrıtlar şu şekilde belirlenir. G_1 ve G_2 'nin herhangi iki tepesi $u=(u_1, u_2)$ ve $v=(v_1, v_2)$ olsun. $G_1 \times G_2$ 'nin

tepeleri belirlendikten sonra $u_1 = v_1$ ve u_2, v_2 ile komşusu ise ya da $u_2 = v_2$ ve u_1, v_1 ile komşu ise bu iki tepe ayrıtlarla birleştirilir.

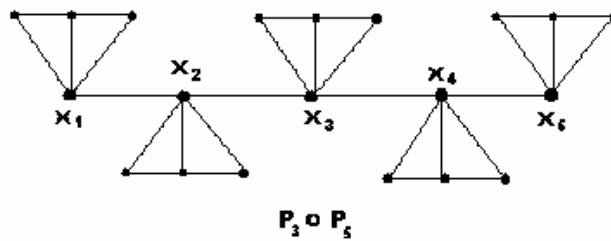
G_1 'in tepe sayısı m ve G_2 'nin tepe sayısı n ise $G_1 \times G_2$ grafinin tepe sayısı mn dir. G_1 grafinin ayrıtlarının sayısı q_1 ve G_2 grafinin ayrıtlarının sayısı q_2 ise $G_1 \times G_2$ grafinin ayrıtlarının sayısı $m \cdot q_2 + n \cdot q_1$ dir.



Şekil 2.14

Tanım 2.3.5: Graflarda Corona İşlemi, G_1 ve G_2 herhangi iki graf olsun. G_1 ve G_2 graflarının corona işlemi $G_1 \circ G_2$ ile gösterilir. $G_1 \circ G_2$ grafında G_1 grafinin her bir tepesine karşılık G_2 'nin bir tane kopyası getirilir. Ardından G_1 'deki her bir tepe ile o tepeye karşılık gelen G_2 'nin kopyasındaki tüm tepeler bir ayrıtlarla birleştirilir. Corona işleminde değişme özelliği yoktur.

$$G_1 = P_3 \quad G_2 = P_5$$



Şekil 2.15

2.4 GRAF PARAMETRELERİ

Bir G grafinın zedelenebilirlik değerinin alt veya üst sınırlarını bulmak için bazı graf parametreleri kullanılır. Burada bazı graf parametrelerinin tanımları verilmiştir.

Tanım 2.4.1: Minimum Tepe Derecesi, : Bir G grafinın herhangi bir v tepesine bitişik olan ayrıtlarının sayısına v tepesinin derecesi denir. Bir G grafinın en küçük tepe derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.2: Maksimum Tepe Derecesi, Bir grafin tepelerinin dereceleri içinde en büyük olana maksimum tepe derecesi denir. $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.3: Bağımsızlık Sayısı, $V(G)$, G grafinın tepeler kümesi olmak üzere $A \subset V(G)$ olsun. A kümesindeki herhangi iki tepe G grafinda bir ayrıtla birleştirilmiş ise bu kümeye bağımsız küme, bu kümeler içinde en çok elemana sahip olan kümenin eleman sayısına grafin **bağımsızlık sayısı (independence number)** denir. $\beta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.4: G grafinın tepeler kümesi $V(G)$ olmak üzere $S \subseteq V(G)$, olsun. G grafinın her bir ayrıtının en az bir uç noktası S kümesinde ise bu kümeye G grafinın **örtü kümesi (covering set)** denir. Bir G grafinın birden fazla örtü kümesi olabilir. Bu kümeler içerisindeki en az elemanlı kümenin eleman sayısına G grafinın **örtü sayısı (covering number)** denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

3. BAZI ZEDELENEbilirlik PARAMETRELERİ VE SONUÇLAR

Bu bölümde bir grafin zedelenebilirlik değerini belirlemek için kullanılan bütünlük kavramlarının, tanımları verilmiştir. Bu kavramlar ile ilgili yapılan bazı sonuç ve teoremler ele alınmıştır.

3.1 Bağlantılılık

Tanım 3.1.1: Bir G grafini bağlantısız veya sadece izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafin tepe bağlantılılık sayısı (connectivity) denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir. Bir G grafinin bileşenlerinin sayısı $c(G)$ olmak üzere,

$$\kappa(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| : c(G - S) \geq 2\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 3.1.2: Bir G grafini bağlantısız ya da sadece izole tepelerden oluşan bir graf haline getirebilmek için graftan çıkarılması gereken en az ayırıt sayısına grafin ayırıt bağlantılılık sayısı denir ve $\lambda(G)$ ile gösterilir,

$$\lambda(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{|S| : c(G - S) \geq 2\}$$

şeklinde de yazılabilir

3.2 Bütünlük

İletişim ağını temsil eden G grafinin zedelenebilirlik değerini bulmak için geriye kalan ağı yapısı hakkında daha çok bilgi edinilmesi

gerektiği anlaşılmıştır. Zedelenebilirliğin en az olabilmesi için hasar gören ağda çalışmayan merkezlerin sayısı ve geriye kalan ağda iletişim sürdüğü en büyük alt ağın merkezlerinin sayısının en az olması gerekmektedir. Bu durumlardan hareketle 1987’ de Barefoot, Entringer ve Swart tarafından graf zedelenebilirliğinin yeni ölçümü olarak **bütünlük** kavramı ortaya çıkmıştır.

Tanım 3.2.1: (Entringer, 1987) G bir graf ve S , G ’nin tepelerinin herhangi bir alt kümesi olmak üzere S ’nin elemanları graftan çıkarıldığında elde edilen graf birleştirilmiş bir graf olsun. $G-S$ grafın en büyük bileşeninin eleman sayısı $m(G-S)$ olmak üzere, G grafının bütünlük değeri $I(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I(G) = \min_{S \subset V(G)} \{ |S| + m(G-S) \}$$

Bütünlük tanımından hemen sonra şunlar söylenebilir:

Eğer G n ’inci dereceden bir graf ise $1 \leq I(G) \leq n$ dir.

H , G ’nin herhangi bir alt grafi ise $I(H) \leq I(G)$ dir.

Bazı temel grafların bütünlük değerleri aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.1: (Goddard and Swart, 1988~: Bagga et al.,1992)

K_n tam grafi için $I(K_n)=n$,

K_n grafının tümleyeni için $I(\overline{K_n})=1$,

$K_{1,n}$ yıldız grafi için $I(K_{1,n})=2$,

P_n yol grafi için $I(P_n)=\lfloor 2\sqrt{n+1} \rfloor - 2$,

C_n çevre grafi için $I(C_n) = \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor - 1$,

$K_{m,n}$ tam iki kümeli grafi için $I(K_{m,n}) = 1 + \min\{m, n\}$

Tanım 3.2.2: (Bagga et al., 1992) Herhangi birleştirilmiş bir G grafinin bütünlük değeri ile G 'nin herhangi bir e ayrıtı çıkarıldığında elde edilen grafin bütünlük değeri arasında $I(G) > I(G-e)$ eşitsizliği sağlanıyorsa I -minimaldir denir. G , I -minimal bir graf ise $I(G-e) = I(G) - 1$ dir.

Benzer işlem G grafinde herhangi bir v tepesi çıkarıldığında da sağlanıyorsa yani

$I(G) > I(G-v)$ ise I -kritik grafin izole tepesi yoktur.

Teorem 3.2.2: (Goddard and Swart, 1990) G grafinde v tepesi için $\deg(v) \geq I(G-v)$ eşitsizliği sağlanıyorsa

$$I(G) = 1 + I(G-v)$$

dir.

G birleştirilmiş bir graf ise ;

$$I(G-v) \geq I(G) - 1$$

$$I(G-e) \geq I(G) - 1$$

dir.

Bir G grafinin bütünlük değerinin diğer parametrelerle arasındaki ilişki için aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır

Teorem 3.2.3: (Goddard and swart, 1990) Herhangi bir G grafi için ;

$$I(G) \leq \alpha(G) + 1$$

$$I(G) \geq \delta(G) + 1$$

$$I(G) \geq n - \kappa(G) / \beta(G) + \kappa(G)$$

Teorem 3.2.4: (Goddard and swart, 1990)

- 1) $\delta(G) = \alpha(G)$ ise $I(G) = \delta(G) + 1 = \alpha(G) + 1$;
- 2) $I(G) = \kappa(G) + 1$ dir ancak ve ancak $\kappa(G) = \alpha(G)$ ise ;
- 3) $I(G) = \alpha(G) + 1$ dir ancak ve ancak G grafi etkilenmiş alt grafi

olarak $2K_2$ içermiyorsa.

Tanım 3.2.3 : (Bagga, Beineke, Lipman, and Pippert, 1994) G bir graf ve G 'nin ayrıtlarının bir alt kümesi S olsun. $G - S$ grafinin en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere, G grafinin **ayrıt bütünlüğü (edge integrity)** aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$I'(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{S + m(G - S)\}$$

Tanım 3.2.4 : (Cozzens, Wu, 1994, 1996, 1998) G herhangi bir graf ve u , G grafinin herhangi bir tepesi olsun. u tepesinin açık komşuluğu

$$N(u) = \{v \in V(G) \mid v \neq u, v \text{ ve } u \text{ bitişiktir}\}$$

ve u tepesinin kapalı komşuluğu $N[u] = \{u\} \cup N(u)$ olur.

Herhangi bir u tepesinin graftan çıkarılmasıyla graftan silinen tepeler kümesi de $N[u]$ olsun. Bu durumda $V(G)$ 'nin bir alt kümesi olan grafin en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere G grafinin **tepe-komşu bütünlük (vertex-neighbor integrity)** değeri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$NI(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + m(G - S)\}$$

3.3 Ortalama Bütünlük Tanımı ve Sonuçları

Tanım 3.3.1 : (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989)

G herhangi bir graf ve G'nin ayrışlarının bir kümesi S olsun. v tepesi V(G) kümesinin bir elemanı olmak üzere, $P_v(G-S)$, v tepesi içeren G – S grafının bileşenlerini göstermek üzere bir G grafının **ortalama bütünlük (mean integrity)** değeri aşağıda şekilde tanımlanmıştır.

$$J(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{ |S| + \text{average}\{P_v(G-S) | v \in V(G-S)\} \}$$

$$= \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ |S| + \frac{\sum \{P_v(G-S) | v \in V(G-S)\}}{p(G-S)} \right\}$$

$$= \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ |S| + \frac{\sum \{(p(H))^2 | H \in C(G-S)\}}{\sum \{p(H) | H \in C(G-S)\}} \right\}$$

Ortalama bütünlük'ün tanımının bir sonucu olarak, tepe sayısı n olan G grafı için $1 \leq J(G) \leq n$ dir. (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989).

Teorem 3.3.1: (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989) G grafı n tepeli bir graf olmak üzere

1) $J(G) = n$ olması için gerek ve yeter koşul $G = K_n$ olmasıdır

2) $J(G) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $G = \overline{K_n}$ olmasıdır

Teorem 3.3.2 : (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989) $p_1, p_2, \dots, p_n$ pozitif tamsayıları için

$$J(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) = 1 + \sum_{i=1}^n p_i - \max_{1 \leq i \leq n} p_i$$

yukarıdaki teoremden eğer $G \cong K(1, 1, \dots, 1, p-n+1) \cong K_{n-1} + \overline{K}_{p-n+1}$ p

tepli bir graf ise $1 \leq n \leq p$ olmak üzere $J(G)=n$ dir. $n = 1$ ise $G \cong \overline{K}_p$ dir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.3.1 : (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989) p pozitif bir tamsayı olsun. Her x ($1 \leq x \leq p$) tamsayısı için $J(G) = x$ olan p tepeli bir G grafi bulunabilir.

Sonuç 3.3.2 : (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989) Her x rasyonel sayısı için ($x \geq 1$) $J(G) = x$ olan bir G vardır.

Aşağıda esas bütünlük ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.3.2: Eğer G bir tam graf ise $V(G)$ 'nin bütün uygun alt grafları G 'nin bir J -set'i dir. Eğer G tam bir graf değilse, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.3: (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989) Eğer tam olmayan bir G grafının S tepeler kümesi bir J -set' i olmak üzere, $G - S$ grafi bağlantısız bir graftır.

Teorem 3.3.4: (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989) Eğer n tepeli bir G grafi için $\kappa(G) \geq n$ ise bu G graf birleştirilmiştir.

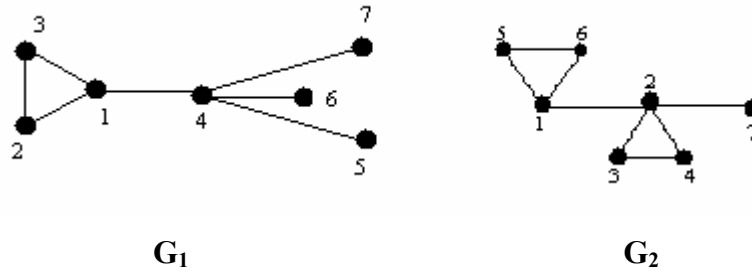
Teorem 3.3.5: (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989) Eğer G , n -birleştirilmiş bir graf ise $J(G) \geq n+1$ olur.

Teorem 3.3.6: (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989) G p tepeli bir graf ise ve n , $1 \leq n \leq p$ aralığında bir tamsayı olsun.

Eğer $J(G) > p-2 + \frac{2}{p-n+1}$ ise G grafi n -birleştirilmiştir.

Teorem 3.3.7: (Chartrand, Kapoor, McKee and Oellermann, 1989) Her G grafi için $\delta(G)+1 \leq J(G) \leq \alpha(G)+1$ olur.

Bütünlük ve bağlantılılık tanımlarında grafin zedelenebilirliği hesaplanırken farklı işlemler yapılsa da temelde her ikisi de graftan tepe çıkarıldıktan sonra geriye kalan grafin yapısı ile ilgilenir. Bazı durumlarda, grafların bağlantılık ve bütünlük sayısının aynı olması “hangi graf yapısının daha güvenilir” olduğuna karar verme de yetersiz kalmaktadır. Bu da başka zedelenebilirlik tanımlarını doğurmuştur. Bunlardan biriside ortalama bütünlük değeridir. Örneğin, Şekil 3.1’ deki grafların ikisinin de tepe sayıları aynı, bağlantılılık sayısı 1 ve bütünlük sayısı ise 4 dür.



Şekil 3.1

Her iki grafın bağlantılık ve bütünlük sayısı eşit olmasına rağmen kalan graflardaki iletişimler farklıdır. G_1 ve G_2 graflarının bağlantılık, bütünlük ve ortalama bütünlük değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

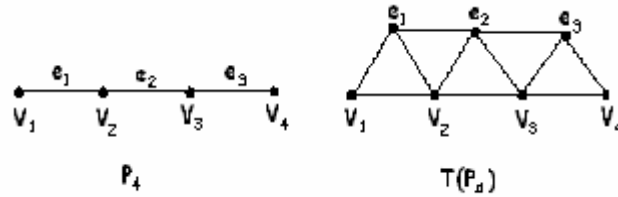
	G_1	G_2
$\kappa(G)$	1	1
$I(G)$	4	4
$J(G)$	3	$3, \bar{3}$

Tablodan görüldüğü gibi, ortalama bütünlük değeri sağlamlığı ölçmede daha hassas bir parametredir. Dolayısıyla zedelenebilirlik araştırmalarında daha sağlam daha güvenilir sonuçlar verebilir.

4. TOTAL GRAFLAR VE ORTALAMA BÜTÜNLÜK DEĞERLERİ

Bu bölümde öncelikle bir G grafinin total grafi tanımlanmıştır. $Yol(P_n)$, $Çevre(C_n)$, $Tam(K_n)$ ve $Yıldız(K_{1,n})$ grafları ele alınmış ve bu grafların total graflarının ortalama bütünlük değerleri hesaplanmıştır.

Tanım 4.1: G herhangi bir graf olmak üzere, grafin tepeleri ve ayrıtları graf elemanları olarak adlandırılınsın. Grafta herhangi iki eleman bitişik ya da birbirlerini kapsıyorlarsa bu elemanlara grafin komşu elemanları denir. $G=(V(G), E(G))$ grafinin total grafi $T(G)$ ile gösterilir. $T(G)$ 'nin tepe kümesi $V(G) \cup E(G)$ 'dir. Öyle ki $T(G)$ nin herhangi iki elemanı G de komşu iseler $T(G)$ de bitişiktirler. Aşağıda P_4 'ün total grafi verilmiştir.



Şekil 4.1

Teorem 4.1: P_n grafinin total grafi $T(P_n)$ olsun. $2n - 1$ tepeli $T(P_n)$ grafinin ortalama bütünlük değeri

$$J(T(P_n)) > 2 \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor - 4$$

dir.

İspat: S , $V(T(P_n))$ 'nin bir alt kümesi olmak üzere eğer $T(P_n)$ grafindan $|S| = r$ tane tepe graftan çıkarırsak o zaman kalan graf $2n-1-r$

tane tepe ve $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1$ tane parça içerir. $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1$ tane parçanın hepsi en az

$\frac{2n-1-r}{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1}$ tane tepe içermektedir. Bu durumda

$$\text{average}(T(P_n-S)) > \frac{\left(\frac{r}{2} + 1\right) \left(\frac{2n-1-r}{\frac{r}{2} + 1}\right)^2}{(2n-1-r)}$$

$$\text{average}(T(P_n-S)) > \frac{(2n-1-r)^2}{\left(\frac{r}{2} + 1\right)(2n-1-r)}$$

olur. Bu eşitsizliği ortalama bütünlük tanımında yerine koyduğumuzda aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$J(T(P_n)) > \min \left\{ r + \frac{(2n-1-r)^2}{\left(\frac{r}{2} + 1\right)(2n-1-r)} \right\}$$

Eşitsizliği r 'ye bağlı bir fonksiyon gibi düzenlediğimizde

$$f(r) > r + \frac{(2n-1-r)^2}{\left(\frac{r}{2} + 1\right)(2n-1-r)} \quad (1)$$

elde edilir. Amacımız fonksiyonun en küçük olduğu değeri bulmak, bunun için öncelikle (1) eşitsizliğini eşitlik olarak gerekli işlemleri yapalım. Böylece

$$f(r) = r + \frac{(2n-1-r)}{\left(\frac{r}{2} + 1\right)}$$

$$f(r) = \frac{r^2 + 4n - 2}{r + 2}$$

$$f'(r) = \frac{2r(r + 2) - (r^2 + 4n - 2)}{(r + 2)^2}$$

$$f'(r) = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2 + 4n}}{2}$$

elde edilir.

Fonksiyon minimum değerini $r > 0$ olduğundan $r = -2 + \sqrt{2 + 4n}$ değerinde alır. Bu değeri fonksiyonda yerine yazdığımızda;

$$f(-2 + \sqrt{2 + 4n}) = -2 + \sqrt{2 + 4n} + \frac{4n + 2 - 2\sqrt{2 + 4n}}{\sqrt{2 + 4n}}$$

$$= 2\sqrt{2 + 4n} - 4$$

bulunur. Böylece P_n nin total grafinin ortalama bütünlük (mean integrity) değeri;

$$J(T(P_n)) > 2 \lfloor \sqrt{4n + 2} \rfloor - 4$$

olur.

Teorem 4.2: C_n grafinin total grafi $T(C_n)$ olsun. $T(C_n)$ grafinin ortalama bütünlük değeri

$$J(T(C_n)) \geq 4 \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 2$$

dir

İspat: S , $V(T(C_n))$ ' nin bir alt kümesi olmak üzere eğer $T(C_n)$ grafindan $|S| = r$ tane tepe çıkarırsak o zaman kalan graf $2n - r$ tane tepe ve

$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ tane parça içerir. $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ parçanın hepsi en az $\frac{2n-r}{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}$ tane tepe

içermektedir. Bu durumda

$$\text{average (} T(C_n - S)) \geq \frac{\frac{r}{2} \left(\frac{2n-r}{\frac{r}{2}} \right)^2}{2n-r}$$

$$\text{average (} T(C_n - S)) \geq \frac{2n-r}{\frac{r}{2}}$$

Bu eşitsizliği ortalama bütünlük tanımında yerine koyduğumuzda aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$J(T(C_n)) \geq \min_r \left\{ r + \frac{(2n-r)^2}{\frac{r}{2}(2n-r)} \right\}$$

Eşitsizliği r 'ye bağlı bir fonksiyon gibi düzenlediğimizde

$$f(r) \geq r + \frac{(2n-r)^2}{\frac{r}{2}(2n-r)} \quad (2)$$

elde edilir. Amacımız fonksiyonun en küçük olduğu değeri bulmak, bunun için öncelikle (2) eşitsizliğini eşitlik olarak gerekli işlemleri yapalım.

Böylece

$$f(r) = r + \frac{2n-r}{\frac{r}{2}}$$

$$f(r) = \frac{r^2 + 4n - 2r}{r}$$

$$f'(r) = \frac{(2r-2)r - (r^2 + 4n - 2r)}{r^2}$$

$$f'(r) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2\sqrt{n}$$

Fonksiyon minimum değerini $r > 0$ olduğundan $r = 2\sqrt{n}$ değerinde alır. Bu değeri fonksiyonda yerine yazdığımızda;

$$f(2\sqrt{n}) = \frac{(2\sqrt{n})^2 + 4n - 2(2\sqrt{n})}{2\sqrt{n}} = \frac{4n - 2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$f(2\sqrt{n}) = 4\sqrt{n} - 2$$

buluruz. Böylece C_n grafinin total grafinin ortalama bütünlük değeri (mean integrity)

$$J(T(C_n)) \geq 4 \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 2$$

olur.

Teorem 4.3: K_n grafinin total grafi $T(K_n)$ olsun. $T(K_n)$ grafinin ortalama bütünlük değeri $n \geq 6$ olmak üzere ;

$$J(T(K_n)) \leq 4n - 8 + \frac{8 + (n-4)^2(n-3)^2}{(n^2 - 7n + 16)2}$$

dir.

İspat: K_n grafinin total grafi $T(K_n)$ 'nin tepe sayısı $V(T(K_n)) = (n^2 + n)/2$ dir. $T(K_n)$ grafi $2n - 2$ regüler bir graftır. Dolayısıyla $\kappa(T(K_n)) = 2n - 2$ dir. Eğer $T(K_n)$ grafında connectivity (bağlantılılık) sayısı kadar tepe atıldığında graf iki parçaya ayrılır. Elde edilen graf Şekil 4.2 deki gibidir.



Şekil 4.2

G_2 grafi $(n-2)(n-1) / 2$ tepeli ve $2n-6$ regüler bir graftır. G_2 grafindan yine G_2 nin connectivity (bağlantılılık) sayısı kadar tepe atıldığında G_2 iki parçaya ayrılır. Toplam $T(K_n)$ grafinda böyle $2n-2 + 2n-6 = 4n-8$ tane tepe atıldığında graf da iki tane izole tepeli ve 1 tanede $(n-4)(n-3) / 2$ tepeli $2n-10$ regüler graf olmak üzere 3 parçaya ayrılır.

Bu işleme, eğer K_n grafinin tepe sayısı tek ise graf da 1 tane 4- regülerli parça kalıncaya kadar, tepe sayısı çift ise graf da 1 tane 2- regülerli parça kalıncaya kadar rekürsif olarak tekrarlanır. Her iki durumda da diğer tüm parçaların hepsi izole tepelerden oluşur. Dolayısıyla $J(T(K_n))$ için ;

$$J(T(K_n)) \leq 4n-8 + \frac{1^2 + 1^2 + \frac{(n-4)^2(n-3)^2}{4}}{\frac{n^2 - 7n + 16}{2}}$$

$$J(T(K_n)) \leq 4n-8 + \frac{8 + (n-4)^2(n-3)^2}{(n^2 - 7n + 16)2}$$

elde edilir.

K_3 , K_4 ve K_5 grafları için bulunan sonuçlar Tablo 1 de verilmiştir.

$J(T(K_3))$	5
$J(T(K_4))$	8,5
$J(T(K_5))$	13

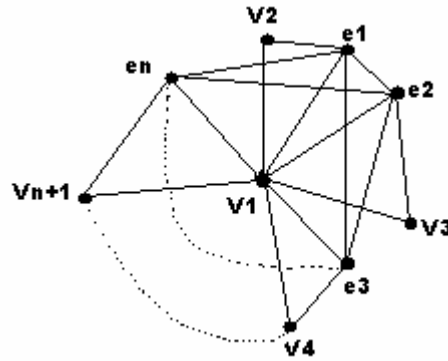
Tablo 1

Teorem 4. 4: $K_{1,n}$ grafinın total grafi $T(K_{1,n})$ olsun. $T(K_{1,n})$ grafinın ortalama bütünlük değeri

$$J(T(K_{1,n})) = \frac{n^2 + 2n + 3}{n + 1}$$

dir.

İspat: $K_{1,n}$ grafinın total grafinın yapısı Şekil 4.2 de olduğu gibidir.

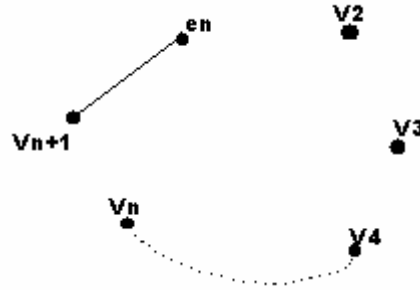


Şekil 4.3

$K_{1,n}$ grafinın Şekil 4.3 de görüldüğü gibi ayrıtlarından oluşan yeni tepeler $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ tepeleri kendi aralarında n tepeli bir tam graf yapısı oluşturur. Oluşan $T(K_{1,n})$ grafinın en küçük tepe derecesi 2 dir ve bu grafin $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}$ tepeleridir.

Graftan öncelikle v_2 tepesinin izole olarak kalması istenildiğin de v_1 ile e_1 tepesinin atılması gerekir. Benzer şekilde grafin diğer 2 dereceli tepeleri (v_{n+1} hariç) yalnız kalması istenildiğin de $e_2, e_3, \dots, e_{n-1}$ tepeleri graftan

atılmalıdır. Dolayısıyla grafitan böylece n tane tepe atıldığında kalan grafitan yapısı Şekil 4.4 deki gibidir.



Şekil 4.4

Şekil 4.4’ de (n-1) tane parça 1 tepeli, 1 tane parça 2 tepeli olacak şekilde n tane parça oluşur. Ortalama bütünlük tanımında bu değer yerine konduğunda;

$$J(T(K_{l,n})) = n + \frac{(n-1)1^2 + 1.2^2}{2n+1-n}$$

$$J(T(K_{1,n})) = n + \frac{n+3}{n+1}$$

$$J(T(K_{1,n})) = \frac{n^2 + 2n + 3}{n + 1}$$

elde edilir.

5. BAZI GRAFLARIN CORONA (TAÇLAMA) İŞLEMİ VE ORTALAMA BÜTÜNLÜK DEĞERLERİ

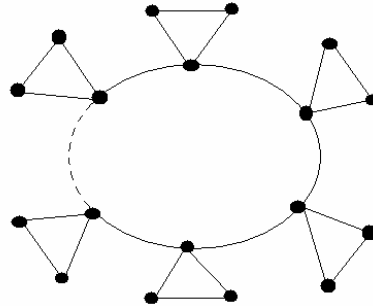
Bu bölümde $P_2 \circ C_n$, $T(P_2) \circ C_n$, $P_2 \circ P_n$, $T(P_2) \circ P_n$ graflarının ortalama bütünlük değeri hesaplanmıştır ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Teorem 5.1: $3n$ tepeli $P_2 \circ C_n$ grafinin ortalama bütünlük değeri

$$J(P_2 \circ C_n) = \begin{cases} \frac{5n+26}{10}, & n \text{ çift ise} \\ \frac{5n^2+30n-11}{10n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: $P_2 \circ C_n$ grafinin yapısı Şekil 5.1 deki gibidir. İspat n 'nin çift ya da tek olması durumuna göre 2 durumda yapılır.



Şekil 5.1

1. DURUM: (n çift ise)

$S \subset V(P_2 \circ C_n)$ dir. Eğer $|S| = r$ ise bu durumda S kümesine göre 3 durum söz konusudur.

Durum 1: Eğer $r = \alpha(C_n)$ ise yani graftan C_n grafinin örtü kümesinin elemanları çıkarılırsa P_2oC_n grafında n tane bileşen oluşur. Bunlardan $\alpha(C_n) = \frac{n}{2}$ tanesi 2 tepeli $\frac{n}{2}$ tanesi de 3 tepelidir. Bu değerleri ortalama bütünlük kavramında yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} J((P_2oC_n)) &= \min \left\{ \frac{n}{2} + \frac{\frac{n}{2}2^2 + \frac{n}{2}3^2}{3n - \frac{n}{2}} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{5n + 26}{10} \right\} \\ J((P_2oC_n)) &= \frac{5n + 26}{10} \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2: P_2oC_n grafindan çıkarılan tepelerin C_n grafinin örtü kümesinin elemanlarından büyük olmaları durumunda $r = \alpha(C_n) + 1$ ise grafta yine **Durum 1** de olduğu gibi n tane bileşen oluşur. Bunlardan $r = \alpha(C_n) + 1$ tanesi 2 tepeli $n-r$ tanesi de 3 tepelidir. Bu değerleri ortalama bütünlük tanımında yerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned} J((P_2oC_n)) &= \min \left\{ r + \frac{r2^2 + (n-r)3^2}{3n-r} \right\} \\ &= \min \left\{ \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + \frac{\left(\frac{n}{2} + 1 \right)2^2 + \left(n - \frac{n}{2} - 1 \right)3^2}{3n - \frac{n}{2} - 1} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{5n^2 + 34n - 24}{2(5n - 2)} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{5n^2 + 34n - 24}{2(5n - 2)}$$

elde edilir. Şimdi amacımız **Durum 1** de bulduğumuz $\frac{5n + 26}{10}$ değerinin

$\frac{5n^2 + 34n - 24}{10n - 4}$ den küçük olduğunu göstermektir. Bu durumda,

$$\frac{5n + 26}{10} < \frac{5n^2 + 34n - 24}{10n - 4}$$

olduğunu iddia ediyoruz. İddiamızın ispatı için öncelikle olmayan ergi yöntemiyle

$\frac{5n + 26}{10} > \frac{5n^2 + 34n - 24}{10n - 4}$ olduğunu kabul edelim.

$$\frac{5n + 26}{10} > \frac{5n^2 + 34n - 24}{10n - 4} \quad (1)$$

eşitsizliğin her iki kısmındaki rasyonel ifadelerin paydalarını eşitlediğimizde;

$$\frac{5n + 26}{10} = \frac{(5n + 26)(10n - 4)}{10(10n - 4)} = \frac{50n^2 + 240n - 104}{100n - 40}$$

$$\frac{5n^2 + 34n - 24}{10n - 4} = \frac{50n^2 + 340n - 240}{100n - 40} = \frac{50n^2 + 240n - 104}{100n - 40} + \frac{100n - 136}{100n - 40}$$

elde ederiz. Bu değerleri (1) de yerine yazdığımızda aşağıdaki eşitsizlik oluşur.

$$\frac{50n^2 + 240n - 104}{100n - 40} > \frac{5n^2 + 240n - 104}{100n - 40} + \frac{100n - 136}{100n - 40} \quad (2)$$

$n \geq 2$ olduğundan (2) eşitsizliğindeki $\frac{100n - 136}{100n - 40}$ ifadesi pozitif bir sayıdır.

Bu durumda (2) eşitsizliği bir çelişkidir. Böylece ,

$$\frac{5n + 26}{10} < \frac{5n^2 + 34n - 24}{10n - 4}$$

olur.

Durum 3: Şimdi de graftan atılan tepeler C_n grafinin örtü kümesinin elemanlarından küçük olsun. Yani $r = \alpha(C_n) - 1$ tane tepe graftan atıldığından **Durum 1** de elde ettiğimiz n den daha az sayıda bileşen oluşur. Oluşan bileşen sayısı $2r$ tanedir. Bunlarda r tanesi 2 tepeli $r-1$ tanesi 3 tepeli ve en az bir tanesi de 6 tepelidir. Bu durumda grafin ortalama bütünlük değeri,

$$\begin{aligned} J((P_2O C_n)) &> \min \left\{ r + \frac{r2^2 + (r-1)3^2 + 6^2}{3n - r} \right\} \\ &> \min \left\{ \frac{5n^2 + 18n + 52}{10n + 4} \right\} \\ &> \frac{5n^2 + 18n + 52}{10n + 4} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda $J((P_2O C_n)) = \frac{5n^2 + 18n + 52}{10n + 4} + 1 = \frac{5n^2 + 28n + 56}{10n + 4}$ aldığımızda

bu değerin yine **Durum 1** de elde ettiğimiz $\frac{5n + 26}{10}$ değerinden büyük olduğu iddia edilirse, yani

$$\frac{5n+26}{10} < \frac{5n^2+28n+56}{10n+4} \quad (3)$$

bir önceki iddiadaki ispat gibi benzer işlemler yapıldığında;

$$\frac{5n+26}{10} = \frac{(5n+26)(10n+4)}{10(10n+4)} = \frac{50n^2+280n+104}{100n+40}$$

$$\frac{5n^2+28n+56}{10n+4} = \frac{50n^2+280n+560}{100n+40} = \frac{50n^2+280n+104}{100n+40} + \frac{456}{100n+40}$$

ve bu değerler (3) de yerine yazılırsa

$$\frac{50n^2+280n+104}{100n+40} < \frac{50n^2+280n+104}{100} + \frac{456}{100n+40} \quad (4)$$

elde edilir.

(4) de $n \geq 2$ olduğundan $\frac{456}{100n-40} > 0$ dır. Bu da iddianın doğru olduğunu gösterir, yani

$$\frac{5n+26}{10} < \frac{5n^2+28n+56}{10n+4}$$

dır.

Sonuçta n çift olması durumunda P_2oCn grafının ortalama bütünlük değeri;

$$J((P_2oCn)) = \frac{5n+26}{10}$$

elde edilir.

2. DURUM : (n tek ise)

$S \subset V(P_2oC_n)$ dir. Eğer $|S| = r$ ise bu durumda S kümesine göre 3 durum söz konusudur.

Durum 1: Eğer $r = \alpha(C_n)$ ise yani graftan C_n grafinin örtü kümesinin elemanları çıkarılırsa P_2oC_n grafında n tane bileşen oluşur.

Bunlardan $\alpha(C_n) = \frac{n+1}{2}$ tanesi 2 tepeli $\frac{n-1}{2}$ tanesi de 3 tepelidir. Bu değerleri ortalama bütünlük kavramında yerine yazıldığında,

$$J((P_2oC_n)) = \min \left\{ \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{n+1}{2} 2^2 + \frac{n-1}{2} 3^2}{3n - \frac{n+1}{2}} \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 2} \right\}$$

$$J((P_2oC_n)) = \frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 2}$$

elde edilir.

Durum 2: P_2oC_n grafından çıkarılan tepeler C_n grafinin örtü kümesinin elemanlarından büyük olması durumunda $r = \alpha(C_n) + 1$ ise grafta yine **Durum 1** de olduğu gibi n tane bileşen oluşur. Bunlardan $r = \alpha(C_n) + 1$ tanesi 2 tepeli n-r tanesi de 3 tepelidir. Bu değerleri ortalama bütünlük tanımında yerine yazdığımızda,

$$J((P_2oC_n)) = \min \left\{ r + \frac{r 2^2 + (n-r) 3^2}{3n - r} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \min \left\{ \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) + \frac{\left(\frac{n+1}{2} + 1 \right)^2 + \left(n - \frac{n-1}{2} - 1 \right)^2}{3n - \frac{n+1}{2} - 1} \right\} \\
&= \min \left\{ \frac{5n^2 + 38n - 39}{10n - 6} \right\} \\
&= \frac{5n^2 + 38n - 39}{10n - 6}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda amac **Durum 1** de bulunan $\frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 2}$

değerinin $\frac{5n^2 + 38n - 39}{10n - 6}$ den küçük olduğunu göstermektir. Bu durumda,

$$\frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 2} < \frac{5n^2 + 38n - 39}{10n - 6}$$

olduğu iddia edilirse,

$$\frac{5n^2 + 38n - 39}{10n - 6} = \frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 6} + \frac{8n - 28}{10n - 6} \quad (5)$$

$$\frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 2} < \frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 6} \quad (6)$$

$$\frac{8n - 28}{10n - 6} > 0 \quad (7)$$

(5), (6) ve (7) eşitsizliklerinden iddianın doğru olduğu gösterilmiş oldu bu durumda;

$$\frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 2} < \frac{5n^2 + 38n - 39}{10n - 6}$$

dir.

Durum 3: Şimdi de graftan atılan tepeler C_n grafinin örtü kümesinin elemanlarından küçük olsun. Yani $r = \alpha(C_n) - 1$ tane tepe graftan atıldığından **Durum 1** de elde edilen n den daha az sayıda bileşen oluşur. Oluşan bileşen sayısı $2r$ tanedir. Bunlarda r tanesi 2 tepeli, $r-1$ tanesi 3 tepeli ve en az bir tanesi de 6 tepelidir. Bu durumda grafin ortalama bütünlük değeri,

$$\begin{aligned} J((P_2oC_n)) &> \min\left\{r + \frac{r2^2 + (r-1)3^2 + 6^2}{3n - r}\right\} \\ &> \min\left\{\frac{5n^2 + 22n + 81}{10n + 2}\right\} \\ &> \frac{5n^2 + 22n + 81}{10n + 2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\text{Bu durumda } J((P_2oC_n)) = J(G) = \frac{5n^2 + 22n + 81}{10n + 2} + 1 = \frac{5n^2 + 32n + 83}{10n + 2}$$

elde edilir. **Durum 1** de bulunan $\frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 2}$ değerinin

$\frac{5n^2 + 32n + 83}{10n + 2}$ den küçük olduğunu gösterelim. Bunun için olmayan ergi yöntemiyle

$$\frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 2} > \frac{5n^2 + 32n + 83}{10n + 2} \quad (8)$$

olduğunu kabul edelim.

(8) eşitsizliğinin her iki kısmındaki rasyonel ifadelerin paydaları eşitlendiğinde;

$$\frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 2} = \frac{50n^3 + 310n^2 - 50n - 22}{100n^2 - 4}$$

$$\frac{5n^2 + 32n + 83}{10n + 2} = \frac{50n^3 + 330n^2 + 892n + 166}{100n^2 - 4} = \frac{50n^3 + 310n^2 - 50n - 22}{100n^2 - 4} + \frac{20n^2 + 942n + 188}{100n^2 - 4}$$

elde edilir. Bu değerler (8) de yerine yazıldığında aşağıdaki eşitsizlik oluşur.

$$\frac{50n^3 + 310n^2 - 50n - 22}{100n^2 - 4} > \frac{50n^3 + 310n^2 - 50n - 22}{100n^2 - 4} + \frac{20n^2 + 942n + 188}{100n^2 - 4} \quad (9)$$

$n \geq 2$ olduğundan (9) eşitsizliğindeki $\frac{20n^2 + 942n + 188}{100n^2 - 4}$ ifadesi pozitif bir

sayıdır. Bu durumda (9) eşitsizliği bir çelişkidir. Böylece,

$$\frac{5n^2 + 30n - 11}{10n - 2} < \frac{5n^2 + 32n + 83}{10n + 2}$$

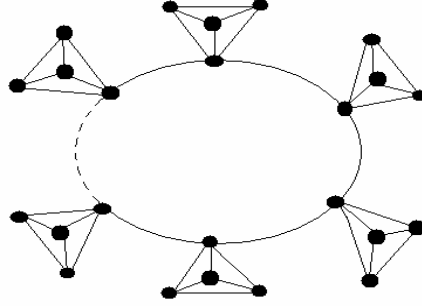
dir.

Teorem 5.2: $4n$ tepeli $G = T(P_2) \circ C_n$ grafının $n \geq 3$ için ortalama bütünlük değeri;

$$J(G) = \begin{cases} \frac{7n + 50}{14}, & n \text{ çift ise} \\ \frac{7n^2 + 56n - 15}{14n - 2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: $T(P_2) \circ C_n$ grafının yapısı Şekil 5.2 deki gibidir. Teoremin ispatı Teorem 5.1' deki benzer şekilde yapılır.



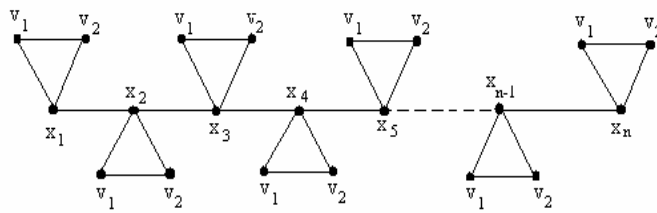
Şekil 5.2

Teorem 5.3: $n \geq 3$ olmak üzere $P_2 \circ P_n$ grafının ortalama bütünlük değeri,

$$J(P_2 \circ P_n) = \begin{cases} \frac{5n + 26}{10} & , n \text{ çift se} \\ \frac{5n^2 + 22n + 9}{10n + 2} & , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir

İspat: $P_2 \circ P_n$ grafının yapısı Şekil 5.3'deki gibidir.

 $P_2 \circ P_n$

Şekil 5.3

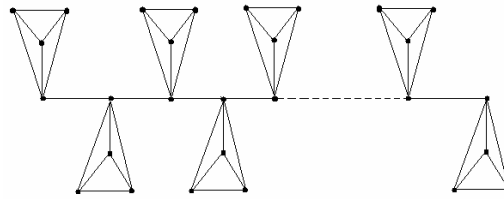
Teoremin ispatı Teorem 5.1'dekine benzer şekilde yapılır. Ancak $S \subset V(P_2 \circ P_n)$ kümesinin incelenmesi $\alpha(P_n)$ 'ne göre yapılır. Bir P_n grafının örtü kümesi sayısı ise;

$$\alpha(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ çift ise} \\ \frac{n+1}{2} & , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

Teorem 5.4: $n \geq 3$ olmak üzere $T(P_2) \circ P_n$ o grafının ortalama bütünlük değeri,

$$J(T(P_2) \circ P_n) = \begin{cases} \frac{7n+50}{14} & , n \text{ çift ise} \\ \frac{7n^2+44n+13}{14n+2} & , n \text{ tek ise} \end{cases} \text{ dir.}$$

İspat: $T(P_2) \circ P_n$ grafının yapısı Şekil 5.4' deki gibidir



$T(P_2) \circ P_n$

Şekil 5.4

Teoremin ispatı Teorem 5.3'deki gibi yapılır.

Sonuç 5.1: $P_2 \circ P_n$ ve $P_2 \circ C_n$ graflarının ortalama bütünlük değerleri için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$J(P_2 \circ C_n) \geq J(P_2 \circ P_n)$$

İspat: Teorem 5.3'den $J(P_2oP_n)$ değeri,

$$J(P_2oP_n) = \begin{cases} \frac{5n+26}{10} & , n \text{ çift se} \\ \frac{5n^2+22n+9}{10n+2} & , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve Teorem 5.1'den $J(P_2oC_n)$ değeri

$$J(P_2oC_n) = \begin{cases} \frac{5n+26}{10}, & n \text{ çift ise} \\ \frac{5n^2+30n-11}{10n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edildi.

Bu iki ifade arasındaki ilişki için n 'nin tek ve çift olması durumları incelenir.

1. Durum (n çift için)

Bu durumun eşit olduğu kolayca görülür.

2. Durum (n tek için)

$$J(P_2oC_n)' \text{ deki } \frac{5n^2+30n-11}{10n-2} \text{ değerini } J(P_2oP_n)' \text{ deki } \frac{5n^2+22n+9}{10n+2}$$

şeklinde ifade ettiğimizde;

$$\frac{5n^2+30n-11}{10n-2} = \frac{5n^2+22n+9}{10n-2} + \frac{8n-20}{10n-2} \quad (10)$$

elde edilir,

$n \geq 3$ olduğundan (10)'daki $\frac{8n-20}{10n-2}$ değeri her zaman için pozitiftir. Aynı

zamanda $\frac{5n^2+22n+9}{10n-2} > \frac{5n^2+22n+9}{10n+2}$ dır. Bu durumda;

$$\frac{5n^2+30n-11}{10n-2} > \frac{5n^2+22n+9}{10n+2}$$

olduğu kolayca görülür.

Sonuç 5.2: $T(P_2) \circ P_n$ ve $T(P_2) \circ C_n$ graflarının ortalama bütünlük değerleri için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$J(T(P_2) \circ C_n) \geq J(T(P_2) \circ P_n)$$

İspat: Teorem 5.4'den $J(T(P_2) \circ P_n)$ değeri,

$$J(T(P_2) \circ P_n) = \begin{cases} \frac{7n+50}{14} & , n \text{ çift ise} \\ \frac{7n^2+44n+13}{14n+2} & , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve Teorem 5.2'den $J(T(P_2) \circ C_n)$ değeri

$$J(T(P_2) \circ C_n) = \begin{cases} \frac{7n+50}{14} & , n \text{ çift ise} \\ \frac{7n^2+56n-15}{14n-2} & , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edildi.

İspat iki durumda yapılır:

1. Durum (n çift için)

Bu durumun eşit olduğu kolayca görülür.

2. Durum (n tek için)

$J(T(P_2) \circ P_n)$ 'deki $\frac{7n^2 + 44n + 13}{14n + 2}$ değerini $J(T(P_2) \circ C_n)$ 'deki

$\frac{7n^2 + 56n - 15}{14n - 2}$ değeriyle karşılaştıralım.

$$\frac{7n^2 + 56n - 15}{14n - 2} = \frac{7n^2 + 44n + 13}{14n - 2} + \frac{12n - 28}{14n - 2} \quad (11)$$

$n \geq 3$ olduğundan (11)'daki $\frac{12n - 28}{14n - 2}$ değeri her zaman için pozitiftir.

Aynı zamanda $\frac{7n^2 + 44n + 13}{14n - 2} > \frac{7n^2 + 44n + 13}{14n + 2}$ olduğu aşıkardır. Bu

durumda;

$$\frac{7n^2 + 56n - 15}{14n - 2} > \frac{7n^2 + 44n + 13}{14n + 2}$$

olduğu kolayca görülür.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında bir iletişim ağı bir graf ile modellenerek öncelikle bu yapının daha sağlam ve kararlı hale getirilmesi düşünülmüştür. Bunu yapmak içinde grafa yeni merkezlerin (tepelerin) eklenmesi gerçekleştirilmiştir. Bu işlem bir grafın total grafı tanımıyla yapılmıştır. Bu şekilde elde edilen yeni graftan herhangi tepelerin çıkartılması durumundaki ortalama bütünlük değeri hesaplanmıştır.

Aşağıdaki tabloda herhangi bir graf ile aynı türden bir grafın total grafının ortalama bütünlük değeri hesaplanmıştır.

G graf	J(G)	Total Graf	J(T(G))
P_{40}	10,85714286	$T(P_{40})$	21,52173913
C_{40}	11,70588235	$T(C_{40})$	23,35294118
$K_{1,40}$	2	$T(K_{1,40})$	41,04804901
K_{40}	40	$T(K_{40})$	799,2727273

Tablodan görüldüğü gibi total grafların ortalama bütünlük değerleri daha büyüktür. Bu sonuçlar networkçülere uygun topolojiyi seçmede yardımcı olabilir. Buradan total graf yapılarının diğerlerine göre daha kararlı yapılar olduğu görülmüştür.

Bir sonraki çalışmada benzer işlemler bu sefer tepe yerine ayrıt çıkartılarak hesaplanabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

K.S. Bagga, L.W. Beineke, W.D. Goddart, M.J. Lipman, and R.E. Pippert. A survey of Discrete Applied Mathematics, 1992

C.A Barefoot, R.Etringer, and H.Swart, Vulnerability in Graphs, A comparative Survey . J. Combin. Math. Combin. Comput, 1997

Bagga, K.S., Deogun, J.S. : On the Pure Edge-Integrity of graphs, Graph Theory, Combinatorics and Algorithms, Vol.1.2 (Kalamazoo, MI, 1992) 301-310p

Bagga, K.S., Beineke, L.W., Goddart, W.D., Lipman, M.J., Pippert, R.E.: A survey of Integrity Discrete Applied Mathematics 37/38 (1992) 13-28p

Goddart, W. and Swart, H.C.: The Toughness of A Graph, Questiones Math. 13.(1990). pp.217-232

Goddart, W. and Swart, H.C.: Integrity in Graph, Bounds and Basics. J. Combin. Math. Combin. Comp. 7.(1990). 139-151p

Dündar, P. and Ozan, A.: The Neighbour-integrity of Sequential Joined Graphs, J. Compute Math. (2000). Vol.74.pp.45-52

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Chartrand, G., Lesniak, L.: Graphs and Digraphs, California Wadsworth&Brooks, (1986).

F. Harary: Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company .1972

Cozzens, M:B.: Stability Measures and Data Fusion Networks, Graph Theory Notes of Network XXVI. (1994).pp.8-14

Buckley, F. and Harary, F.(1990): Distance in Graph, Addison-Wesley Pub. California

Kırlangıç, A., Ozan, A. (2000): The Neighbour-integrity of Total Graph, Intern. J. Computer Math. Vol. 76. pp.25-33

Cozzens, M:B., Wu. S.S.Y.: Vertex-Neighbour-Integrity of Trees, Ars Combinatoria 43. (1996). 169-180p

Cozzens, M:B., Wu. S.S.Y.: Edge -Neighbour-Integrity of Trees, Australasian J.of Combin. 10.(1994). 163-174p

Cozzens, M:B., Wu. S.S.Y.: Vertex-Neighbour-Integrity of Powers of Cycles, Ars Combinatoria 48. (1998). 257-270p

ÖZGEÇMİŞ

10 Kasım 1981 tarihinde Iğdır’da doğan Dızman, Yıldız ilköğrenimini 1988-1993 yılları arasında Yedi Eylül İlkokulu ve 1993-1996 yılları arasında Turgutlu Ortaokulunda, ortaöğrenimini de 1996-1999 yılları arasında Turgutlu Lisesinde tamamladı. Aynı yıl, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nü kazandı. 2004 yılında Matematik Bölümünün Bilgisayar Opsiyonun’dan “iyi” derece ile mezun oldu. Aynı yıl, Ege Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisans programına başladı. Mezun olduğu yıl Özel Kültür Dershanesinde işe başladı ve 2 yıl çalıştı. Şu an Özel Birey Dershanesinde Matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.