EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

DİNAMİK TOPOLOJİK LOJİK

Naile TOPBAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu: 403.05.01
Tezin Sunulduğu Tarih: 01.02.2008

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Bornova-İZMİR

Naile TOPBAŞ tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan "Dinamik Topolojik Lojik" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 01.02.2008 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

<u>Jüri Üyeleri</u>:		**<u>İmza</u>**
Jüri Başkanı	**: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER**	**.................**
Raportör Üye	**: Prof. Dr. Fevzi ÜNLÜ**	**.................**
Üye	**: Yrd. Doç. Tahsin ÖNER**	**.................**

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince değerli görüşlerinden ve engin bilgisinden faydalandığım hocam Ege Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanı sayın Prof. Dr. Mehmet TERZİLER' e, katkılarından dolayı Bölüm Başkan Yardımcısı Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER' e, tez sunumum için yönlendirici katkılarından dolayı Yaşar Üniversitesi Bilgisayar Ana Bilim Dalı Başkanı sayın Prof. Dr. Fevzi ÜNLÜ' ye, tezin yazım aşamasında ve biçimlenmesinde değerli yardımlarından ve dostluğundan dolayı arkadaşlarım Dr. Özlem BATIT'a ve Araş. Gör. Murat E. BERBERLER' e teşekkürlerimi sunarım.

Başaracağıma inanan ve sonuna kadar yanımda olan sevgili eşim Tansel TOPBAŞ' a, yaşı küçük, aklı büyük güzel kızım Ece TOPBAŞ' a ve her zaman desteklerini gördüğüm canım aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

SİMGELER VE KISALTMALAR (Devam)

1. GİRİŞ

Dinamik topolojik lojik, ***S4***, dinamik topoloji ve lojiğin topolojik semantikleri için uygun bir çalışma ortamı sağlar. ***S4*** ün topolojik semantikleri Kripke Çatılarından daha çok topolojik uzayları konu alır. Modal lojikteki "Box (Kutu)"($\square$) topolojik olarak iç anlamını taşır. Böylece ***S4*** topolojik uzayların lojiği ve "Box (Kutu)"($\square$) da topolojik modalite olarak algılanabilir.

Dinamik topolojik lojik, ***S4*** için topolojik semantiğin, topolojik dinamiğin ve zaman lojiğinin bir arada ele alınmasını amaçlayan yeni bir alandır.

Bu çalışmada, dinamik topolojik lojik kavramları hakkında bilgiler verilerek dört ana başlıkta incelemesi yapılmıştır. Birinci bölümde, ön bilgiler ve gerekli tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde, Seyrek İndirgenebilir Haussdorf ve Kalıtsal Çözülemez Uzaylar, üçüncü bölümde *HI* ve *HR* Uzayları ve son bölümde de Kompakt *SI* Uzayları ve Haussdorf *SI* Uzayları hakkında çalışmalara yer verilmiştir.

Bu tez projesi; bilinen klasik modal lojiği (statik lojiği) uygun bir topolojik sürekli fonksiyon aracılığıyla dinamik hale geçirmesi açısından önem taşımaktadır.

2. ÖN BİLGİLER VE GEREKLİ TANIMLAR

2.1. Genel Bilgiler Bu bölümde, gerekli tanımlar ve ön bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1.1 Temel modal dil, elemanları p,q,r,... ile gösterilen önerme harflerinin veya sembollerinin ya da değişkenlerinin ϕ kümesi ve 1-li modal operatörünün ($\Diamond , \Box$) kullanımları ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.2 Temel modal dil için bir "çatı (frame)" $\mathcal{F} = (\mathcal{W}, R)$ bir ikilidir öyle ki,

(i) $\mathcal{W} \neq \varnothing$ herhangi bir küme

(ii) $(R, \mathcal{W})$ üzerinde ikili bir bağıntı olsun.

Temel modal dil için bir model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ ikilisidir öyle ki $\mathcal{F}$ bir çatı ve

$$v : \phi \to \mathcal{P}(\mathcal{W})$$
$$p \to v(p) \subset \mathcal{W}$$

fonksiyonudur. Bu v fonksiyonuna bir valuation (değer) atama denir. $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ ye dayalı ya da $\mathcal{F}$ tabanlı modeldir, denir.

$\mathcal{M} = (\mathcal{W}, R, v(p), v(q), \ ...)$ modelinde R 2-li bağıntı, $v(p)$ ise 1-li bağıntıdır, yani bağıntısal bir yapıdır.

w, $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, R, v)$ modelinin bir durumu olsun. Temel modal dilde yazılmış bir ϕ formülünün $\mathcal{M}$ modelinde w durumunda Σ bir formüller kümesi olsun.

Her $\phi \in \Sigma$ için $\mathcal{M},\mathcal{W} \models \phi$ ise o zaman Σ, $\mathcal{W}$ da **gerçeklenebilir** denir ve $\mathcal{M}, \mathcal{W} \models \Sigma$ ile gösterilir.

Temel uyarılar

i) Gerçeklenme kavramı tamamen 'içsel' ve 'yerel' bir kavramdır, çünkü $\Diamond$ operatörü bir modelin w noktasında formülün gerçeklenebilirliğini yerine getirmek için tamamen 'lokal' (yerel) çalışır.

ii) Bu operatör w nun gördüğü olası durumları içerden tarar.

Tanım 2.1.3 Bir $\mathcal{M}$ modelinin bütün noktalarında gerçeklenen bir ϕ formülüne "$\mathcal{M}$ de global veya evrensel doğru" formülü denir. (Her $\mathcal{W} \in \mathcal{M}$ *için*, $\mathcal{W} \models \phi$ dır.)

Eğer ϕ formülünün $\mathcal{M}$ deki bir durumda doğru olması söz konusu ise ϕ, $\mathcal{M}$ de **gerçeklenebilir**dir, denir.

Bir modelde değillemesi gerçeklenebilir olan formüle "yanlışlanabilir veya çürütülebilir formül" denir. Σ bir formüller kümesi olduğunda, Σ nın her formülü $\mathcal{M}$ modelinin her noktasında doğru ise Σ ya $\mathcal{M}$ modelinde global doğrudur denir.

ϕ bir formül ve $\mathcal{F}, w \in \mathcal{W}$ nun bir elemanı olsun. Eğer çatı üzerindeki her $(\mathcal{F}, v)$ $\mathcal{M}$ modelinin w noktasında ϕ doğru ise $\mathcal{F}, w \models \phi$ **geçerli**dir denir. F çatılar sınıfı olsun. Eğer her $\mathcal{F} \in \mathrm{F}$ için $\mathcal{F} \models \phi$ ise $F \models \phi$ **geçerli**dir denir. Çatı belirlenmezse her yerde geçerli demektir ve $\models \phi$ ile gösterilir.

S4 lojiği, ***K, T, 4*** aksiyomları ve Modus Ponens ($\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$ (MP)), geçerlilik kurallarıyla tanımlıdır. Yansıyan ve geçişken çatıların ***S4*** lojiği ***K*** lojiğine ***T*** ve ***4*** aksiyomları eklenerek tanımlanır. Topolojik bağlamda bu ilkeler, açıklayıcı bir dille şöyle tercüme edilirler:

$\square(p \to q) \to (\square p \to \square q)$ (***K***) Tüm çatıların temel lojiği ($\mathbb{R}$ nin keyfi bir bağıntısı)

$\square(\square p \to p)$ (***N***) Uzayın tümünü açıklar.

$(\square p \wedge \square q) \leftrightarrow \square(p \wedge q)$ (***R***) Açık kümeler sonlu arakesitlere kapalıdır.

$\square p \to \square\square p$ (***4***) İç operatörü idempotent dir.

$\square p \to p$ (***T***) Bir kümenin içi küme tarafından kapsanır.

Topolojik olarak yorumlanmış evrensel geçerli formüller ***S4*** ün teoremleridir. Ama ilk kez McKinsey ve Tarski'nin 1944 yılında yazdıkları "The algebra of topology" isimli makalelerinde ***S4*** lojiğinin topolojik uzayları tanımlayan lojik olduğunu göstererek çok çarpıcı bir sonuç elde etmişlerdir.

McKinsey ve Tarski Teoremi A bir formül ve X bir topolojik uzay olsun. $A \in$ ***S4*** $\Leftrightarrow \models A \Leftrightarrow X \models A \Leftrightarrow \mathbb{R} \models A \Leftrightarrow$ her sonlu Y uzayı için $Y \models A \Leftrightarrow$ her Alexandroff uzay Y için $Y \models A$. (Alexandroff uzay tanımı ilerideki bölümlerde verilecektir.)

Aynı makaleden, bir başka teoreme göre, ***S4*** kendi içinde yoğun ve ayrılabilir uzaylarda uygun metrik ile tam (complete) dır. Böylece ***S4*** standart topolojili herhangi bir $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayının da lojiğidir.1998 de Mints, ***S4*** ün Cantor uzayı için tamlığını kanıtlamıştır.

Önce $\mathcal{L}$ temel dilimizin P sayılabilir bir önerme harfleri kümesinden; $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ Boole bağlaçlarından ve $\Diamond$, $\Box$ modal operatörlerinden oluştuğunu hatırlatalım. Bir topolojik model ya da kısaca topo-model bir $\langle X, \tau, v \rangle$ üçlüsüdür öyle ki $\langle X, \tau \rangle$ bir topolojik uzay ve $P \rightarrow P(X)$ bir valuation fonksiyonudur.

Tanım 2.1.4 (Temel topolojik semantik) Modal formüllerin $\mathcal{M} = \langle X, \tau, v \rangle$ modelinin x noktalarındaki doğruluğu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\mathcal{M},\ x \models p$ eğer ve yalnız eğer $x \in v(p)$ $(p \in P)$

$\mathcal{M},\ x \models \neg\varphi$ eğer ve yalnız eğer $\mathcal{M}, x \models \varphi$ olmaz

$\mathcal{M},\ x \models \varphi \wedge \psi$ eğer ve yalnız eğer $\mathcal{M}, x \models \varphi$ ve $\mathcal{M}, x \models \psi$

$\mathcal{M}, x \models \Box\varphi$ (eye) $\exists U \in \tau$ $(x \in U \wedge \forall y \in U$ için $\mathcal{M}, y \models \varphi)$

$\mathcal{M}, x \models \Diamond\varphi$ (eye) $\forall U \in \tau$ $(x \in U \rightarrow \exists y \in U$ için $\mathcal{M}, y \models \varphi)$

Bu semantik bilinen sembolik doğruluk tanımının kendisidir. Ama bu semantik altında dolaysız bir uzaysal yorum söz konusudur. Somut bir model verildiğinde, $\mathcal{L}$ nin her bir formülü modellenen topolojik uzayın bir bölgesini gösterir.

Tanım 2.1.5 X bir küme ve τ, $P(X)$ in bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa, τ ya X üzerinde bir **topoloji** (topolojik yapı) denir:

(t_1) X, $\varnothing \in \tau$.

(t_2) τ dan alınan her sayıda elemanların birleşimi τ ya aittir; yani I bir indis kümesi olmak üzere, her $\{A_i\}_{i\in I} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ dır.

(t_3) τ da alınan her sonlu sayıdaki elemanın kesişimi τ ya aittir; yani sonlu J indis kümesi için, her $\{A_i\}_{i\in J} \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i\in J} A_i \in \tau$ dır.

Uyarı: Bazı kaynaklarda (t_1) aksiyomu yazılmayıp, sadece (t_2) ve (t_3) verilmektedir. Bu takdirde $\bigcup_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing$ ve $\bigcap_{i\in\varnothing} A_i = X$ göz önüne alınırsa, (t_2) ve (t_3) aksiyomlarının aynı zamanda (t_1) i içerdiğine dikkat edilmelidir.

Tanım 2.1.6 τ topolojisi ile donatılmış X kümesine veya (X,τ) ikilisine **topolojik uzay** denir.

X kümesinin her elemanına topolojik uzayın bir **noktası** denir.

τ nun elemanlarına açık kümeler, tümleyenlerine de kapalı kümeler denir. $x\in X$ i içeren bir açık kümeye x in bir açık komşuluğu denir. $A\subseteq X$ olsun. Eğer $\bigcirc\subseteq A$ olacak şekilde x in bir $\bigcirc$ açık komşuluğu varsa, $x\in X$, A nın bir iç noktasıdır.

Eğer $x\in X$ in her bir $\bigcirc$ açık komşuluğu için $\bigcirc\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$, ise $A\subseteq X$ nın bir limit noktasıdır. $\bigcirc\cap A\neq\varnothing$ ise $x\in Cl(A)$ dır ve $Cl(A)=A\cup d(A)$ dır.

(X,τ) bir topolojik uzay olsun.

$A\subseteq X$ yoğun (dense) $\Leftrightarrow$ $Cl(A)=X$

$A\subseteq X$ nowhere dense $\Leftrightarrow$ $Int(Cl(A))=\varnothing$

Hewitt, bir X topolojik uzayının ayrık iki yoğun alt uzayının birleşimi şeklinde yazılabildiğini göstermiştir.

Tanım 2.1.7 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X, iki ayrık yoğun alt kümesinin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa X e **(resolvable) çözülebilir uzay** denir. Aksi halde X **(irresolvable) çözülemez uzay**dır. Örneğin, iki ayrık yoğun alt kümesi olmayan T_2-uzayı çözülemez uzaydır.

Örnek 2.1.1 $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}^c$ ayrık iki uzayı ve $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisinde her yerde yoğun alt uzaylardır. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R}$ çözülebilirdir.

Örnek 2.1.2 X={a,b,c,d,e}kümesi üzerinde $\tau=\{\varnothing, X, \{c,e\}, \{a,b,d\}\}$ topolojisini tanımlayalım.

$K=\{X,\varnothing,\{a,b,d\},\{c,e\}\}$ X in kapalılarının kümesidir. O halde {a,b,d} ve {c,e} iki ayrık açıklardır ve yoğundurlar. O halde $\{a,b,d\} \cup \{c,e\}=X$ yazılabildiğine göre, X çözülebilirdir.

Tanım 2.1.8 $A \subseteq d(A)$ özelliğini sağlayan her A kümesine **kendi-içinde-yoğun (dense-in-itself)** küme denir. Bu bağlamda, çözülebilir her uzayın kendi-içinde- yoğun olduğu açıktır. $\mathbb{R}$, bilinen topolojisi altında kendi-içinde-yoğundur.

Örnek 2.1.3 X={a,b,c} kümesi verilsin. $A \subseteq X$ için A={a,b,c} ve $\tau=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ topolojisi tanımlı olsun.

$d(A)=\{x \in X : (\bigcirc \in \tau \rightarrow (x \in \bigcirc \wedge (\bigcirc - \{x\})) \cap A \neq \varnothing)\}=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ dan $A \subseteq d(A)$ olur. Yani, A kendi-içinde-yoğundur.

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

$\tau_A = \{O \in \tau \mid O \cap A\}$ topolojisine ***A* nın ürettiği (induced) topoloji** denir.

X in yoğun alt kümelerinin kümesi $D(X,\tau)$ ile gösterilir. Tümleyeni X de yoğun bir kümeye **co-yoğun** denir. $C \subseteq X$ için co-yoğun olma $Int(C)=\varnothing$ ya da denk olarak $X - C = Cl(C)$ demektir.

$Int(Cl(N))=\varnothing$ ise $N \subseteq X$ kümesine **hiçbir yerde yoğun (nowhere dense)** küme denir ve bu kümelerin kümesi $N(\mathrm{X},\tau)$ ile gösterilir. $N(\mathrm{X},\tau)$ bir idealdir.

N kümesi hiçbir yerde yoğun değildir $\Leftrightarrow$ Her bir boştan farklı U açığı için $V \cap N=\varnothing$ olacak biçimde boştan farklı bir V açık kümesi vardır.

$N(\mathrm{X},\tau)$ nun ideal olmasından, $A \in N(X,\tau)$ *ve* $B \subseteq A$ ise $B \in N(\mathrm{X},\tau)$ olur. $N(\mathrm{X},\tau)$ sonlu birleşim işlemine kapalı iken, bu özellik co-yoğun uzaylar için doğru değildir.

[Hewitt, 1943] de kendi-içinde-yoğun her uzayın çözülebilir uzay olduğu gösterilmiştir. Bu konuyla ilgili sonuçlar [Padmavally, 1953] de bulunabilir. [Anderson, 1965, Teorem 2] sonsuz kardinaliteli uzaylar bağlamında çözülemezliği ele almıştır.

D, (X,τ) uzayının bir öz yoğun alt kümesi ise *D*, (X,σ) da yoğun değildir. Burada, *D* nin kapalı olması için τ, (X,σ) nun en küçük genişlemesi olmalıdır. $\sigma = \tau(X - D) = \tau[D]$ dır.

Tanım 2.1.9 Boştan farklı her açık kümesi sonsuz olan ve her $\tau' \supset \tau$ kabul edilebilir (admissible) genişlemesi boştan farklı sonlu bir açık içeren (X,τ) topolojik uzayına **maksimal uzay** denir.

Örnek 2.1.4 $X=\mathbb{R}$, $\tau=\{\varnothing,\mathbb{Z},\mathbb{N},\mathbb{Q},\mathbb{Q}^c,\mathbb{R}\}$ olsun. $\tau^{'}\supset\tau$ olacak şekilde, $\tau^{'}=\{\varnothing,\mathbb{Z},\mathbb{N},\mathbb{Q},\mathbb{Q}^c,\mathbb{R}\}\cup\{\sqrt{2}\}$ kabul edilebilir genişlemesi alınırsa, $A\neq\varnothing$ olacak şekilde $A=\{\sqrt{2}\}\in\tau^{'}$ sonlu açık kümesi bulunur. O halde $(\mathbb{R},\tau)$ maksimaldir.

Tanım 2.1.10 Her yoğun alt kümesi açık olan bir kendi-içinde-yoğun X uzayına **maksimal çözülemez uzay** denir ve ***MI*** ile gösterilir. Örneğin, X={a,b,c,d} ve $\tau=P(X)$ için $d(X)=X$ ve $A\subseteq X$ yoğundur ve açık olduğu aşikârdır. Dolayısıyla, X maksimal çözülemez uzaydır.

Tanım 2.1.11 Her alt uzayı çözülemez olan bir kendi-içinde-yoğun uzaya **kuvvetli çözülemez uzay** denir ve ***SI*** ile gösterilir.

Teorem 2.1.1 Kuvvetli çözülemez bir (X,τ) uzayı aşağıdakilere denktir:

(1) Her açık alt uzay çözülemezdir.

(2) Her yoğun alt uzayın bir yoğun içi vardır.

(3) Her co-yoğun küme hiçbir yerde yoğun değildir.

(4) Her alt kümesi, bir açık ve bir hiçbir yerde yoğun olmayan kümenin birleşiminden oluşur.

İspat:

$(1)\Leftrightarrow(2)$:

$(\Rightarrow:)$ Eğer D yoğun ve $U = X - Cl(Int(D))\neq\varnothing$ ise o zaman $U - D\neq\varnothing$ olur.

$(\Leftarrow:) U \subseteq Int(D) - Int(D) = \varnothing$, aynı zamanda $U \cap D \neq \varnothing$ dir, çünkü D yoğundur ve $U \subseteq Cl(U) = Cl(U \cap D)$ olduğundan $U \cap D$, U da yoğundur. Fakat,

$Int(U \cap D) \subseteq U \cap Int(D) = \varnothing \Rightarrow Int_U(U \cap D) = Int(U \cap D) = \varnothing$

dır. Böylece, U-D de U da yoğundur ve U çözülebilirdir. Bu da $X - Cl(Int(D)) = \varnothing$ ve $Int(D)$ nin yoğun olduğunu gösterir.

$(2) \Rightarrow (3)$: A co-yoğun olsun. X-A yoğun $\Rightarrow Int(X\text{-}A)$ yoğun $\Rightarrow$ $Cl(Int(X\text{-}A)) = X\text{-}Int(Cl(A)) = X \Rightarrow Int(Cl(A)) = \varnothing \Rightarrow A$ hiçbir yerde yoğun değildir.

$(3) \Rightarrow (4)$: $A \subseteq X \Rightarrow Int(A) = \varnothing$ veya $Int(A) \neq \varnothing$ vardır.

Eğer $Int(A) = \varnothing$ ise o zaman

$A \in C(X, \tau) = N(X, \tau) \Rightarrow A = \varnothing \cup A$ olur.

Eğer $Int(A) \neq \varnothing$ ise o zaman;

$$Int(A - Int(A)) = \varnothing \Rightarrow A - Int(A) \in C(X, \tau) = N(X, \tau)$$

$$\Rightarrow A = Int(A) \cup (A - Int(A))$$

elde edilir.

$(4) \Rightarrow (1)$: Eğer U boştan farklı açık ve çözülebilir ise o zaman U daki her yoğun U_i ($i=1,2,...$ indis olmak üzere) için $U = U_1 \cup U_2$ dir. Böylece, V açık ve N hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme olacak şekilde $U_1 = V \cup N$ olur.

$V = \varnothing \Rightarrow U \subseteq Int(Cl(U_1)) = Int(Cl(N)) = \varnothing$. Böylece,

$$V \neq \varnothing \Rightarrow Int_U(U_1) = Int(U_1) \neq \varnothing \Rightarrow U_2 \cap Int(U_1) \neq \varnothing \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$$

çelişkisi elde edilir; yani U çözülemezdir. □

2.2 Seyrek İndirgenebilir Haussdorf ve Kalıtsal Çözülemez Uzaylar

Tanım 2.2.1 Her yoğun alt kümesi açık olan bir kendi-içinde-yoğun olmayan uzaya **alt maksimal (submaximal)** ve boştan farklı her alt uzayı çözülemez olan bir uzaya da **kalıtsal çözülemez uzay** denir ve ***HI*** ile gösterilir.

Teorem 2.2.1 Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki gerektirmeler geçerlidir:

Alt maksimal $\Rightarrow HI \Rightarrow SI \Rightarrow$ Çözülemez

İspat X alt maksimal ve A boş olmayan çözülebilir bir alt uzay olsun. $A = A_1 \cup A_2$ ve A daki her A_i yoğun ise o zaman $X - A_2 = (X - A) \cup A_1$ X de yoğundur yani A_2 kapalıdır ve $A \subseteq Cl(A_2) = A_2 \Rightarrow A_1 = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$ olur, çünkü $A \subseteq Cl(A_1)$ dir. Çelişkiden çıkan X in kalıtsal çözülemez olduğudur. Eğer X kalıtsal çözülemez ise açıkları içeren tüm alt uzayları da çözülemezdir; bu durumda X kuvvetli çözülemezdir. Kuşkusuz kuvvetli çözülemez uzaylar çözülemezdirler.

Örnek 2.2.1 Kalıtsal çözülemez bir uzay alt maksimal midir?

Y ve Z ayrık sonsuz kümeler olsunlar. F, Y de ve G de Z de birer serbest esas süzgeç olsunlar. Y ve Z , σ ve ρ topolojileri altında $\sigma = F \cup \{\varnothing\}$ ve $\rho = G \cup \{\varnothing\}$ denkliğine bakalım.

X=$Y \cup Z$ nin $\tau = \{A \cup B \,|\, A \in F \ ve \ B \in \rho\} \cup \{\varnothing\}$ topolojisi vardır. (X, τ) saçılmış T_1 -uzayı kalıtsal çözülemez olsun ancak alt maksimal olmasın. τ bir topolojidir.

Gerçekten $A_1, A_2 \in F \ ve \ B_1, B_2 \in \rho$ olacak şekilde,

$(A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \in \tau$ vardır, çünkü,

$A_1 \cap A_2 \in F \ ve \ B_1 \cap B_2 \in \rho$ dır. Böylece, τ sonlu kesişimler altında kapalıdır.

Keyfi birleşimlerin kapanışına gelince, her $i \in I$ için $A_i \in F$ ve $B_i \in \rho$ olsun , eğer I=$\varnothing$ ise $\bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i) = \varnothing \in \tau$ dır.

Aksi halde,

$\bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i) = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cup (\bigcup_{i \in I} B_i) \in \tau$ olur, çünkü öyle bir $i_0 \in I$ için , $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in F$ ve $\bigcup_{i \in I} B_i \in \rho$ dir.

Her $\{x\}$ in kapalı olduğunu görmek için $x \in Y$ ise;

$$Y\text{-}\{x\} \in F \text{ ve } Z \in G \Rightarrow Y\text{-}\{x\} \cup Z \in \tau$$

$$\Rightarrow \{x\} \in \tau^c$$

ve

$$x \in Z \Rightarrow Z\text{-}\{x\} \in G$$

$$\Rightarrow Y \cup (Z\text{-}\{x\}) \in \tau$$

$$\Rightarrow \{x\} \in \tau^c$$

dir.

Böylece, (X, τ) bir T_1-uzayıdır.

Ayrıca (X, τ), bir $A \in F$ için $U \in \tau\{\varnothing\} \Rightarrow U = A \cup B \Rightarrow U$ sonsuz olduğundan kalabalık (crowded) tır. ((X, τ) nun sonsuz dispersiyon karakteri vardır.)

X in kalıtsal çözülemez olduğunu gösterelim. Herhangi bir $H \subseteq X$ vardır. Eğer $H \cap Y = \varnothing$ ise o zaman $H \subseteq Z \Rightarrow H$ çözülemezdir, çünkü $\tau|Z = \rho$, Z alt uzayının kalıtsal çözülemez olduğunu ortaya çıkarır.

Diğer yönden $H \cap Y \neq \varnothing$ ve $Y = Y \cup \varnothing \in \tau$ olduğundan $H \cap Y \in \tau|H$ -$\{\varnothing\}$ olur. Eğer H çözülebilir ise $H \cap Y$ açık kümesi de çözülebilirdir. Fakat $H \cap Y$ bir kalıtsal çözülemez uzay Y nin bir alt uzayı olması nedeniyle çözülemezdir. Öte yandan, $\tau|Y = \sigma$ olduğundan $(Y, \tau|Y) = (Y, \sigma)$ dir. Benzer şekilde, H çözülemezdir böylece (X, τ) kalıtsal çözülemezdir.

X in alt maksimal olmadığına gelince; Y, X de yoğun değildi. $A \cup B \in \tau - \{\varnothing\}$ için $(A \cup B) \cap Y = A \neq \varnothing$ dir, çünkü $A \in F$ dir. Böylece herhangi bir $x \in Z$ için $Y \subseteq Y \cup \{x\} \Rightarrow Y \cup \{x\}$ yoğundur. Fakat $Y \cup \{x\} \notin \tau$ dır, çünkü $\{x\} \notin \rho$ vardır. □

Örnek 2.2.2 Her alt maksimal uzay kuvvetli çözülemez midir?

X alt maksimal ise tüm alt kümeleri bir açık ve bir kapalı alt kümenin kesişiminden oluşur ve tüm yoğun kümeler açık, tüm kapalı küme bir yoğun küme içeren X kümesi olmalıdır. Fakat o zaman bu iki yoğun kümenin kesişimi yine yoğun olacaktır, böylece boştan farklı yani çözülemez olur. □

Önerme 2.2.1 Eğer *F, X* de bir esas süzgeç ve $B \subseteq X$, her $A \in F$ için $B \cap A \neq \varnothing$ özelliğine sahip ise $B \in F$ dir.

Önerme 2.2.2 Eğer *F, X* de bir esas süzgeç ise tüm $A \subseteq X$ alt kümeleri için her $A \notin F \Rightarrow A^c = X - A \in F$ dir.

Önerme 2.2.3 Eğer *X* bir sonsuz küme, *F, X* de bir serbest esas süzgeç ve $\tau = F \cup \{\varnothing\}$ ise (X, τ) bir kalabalık alt maksimal T_1-uzayıdır.

Önerme 2.2.4 (X, τ) uzayı bazı çözülebilir *U* uzayı için $x \in U \in \tau$ olacak şekilde $x \in X$ noktasında çözülebilir bir uzay olsun.
$R(\tau) = \{x \in X \,|\, (X, \tau),\ x$ noktasında çözülebilirdir $\}$kümesi tanımlansın. O zaman (X, τ) uzayı için aşağıdakiler denktir:

(1) *X* kuvvetli çözülemezdir.
(2) $R(\tau) = \varnothing$ dir.
(3) $Int(F) = \varnothing$ eğer $F \cup G$, *F* nin kapalı ve çözülebilir olduğu Hewitt in ayrışmasıdır.
(4) *X* in bir açık kalıtsal çözülemez yoğun alt uzayı vardır.
(5) Her çözülebilir alt uzay hiçbir yerde yoğun değildir.

İspat

$(1) \Rightarrow (2)$: $R(\tau) \neq \varnothing$ olduğunda açık ve çözülebilir olduğundan ispat açıktır.

$(2) \Leftrightarrow (3)$: $x \in Int(F) \Rightarrow x \in R(\tau)$ olduğundan açıktır.

$(3) \Leftrightarrow (4)$: *Int*(*F*)=$\varnothing$ nedeniyle *G* bir açık yoğun kalıtsal çözülemez alt uzaydır. Eğer *H*, *X*= $F \cup G$ nin bir açık yoğun kalıtsal çözülemez alt uzayı ise $H \cap F \neq \varnothing$ dir. Diğer yönden, bu alt küme *F* nin açık alt uzayı olduğunda hem çözülebilir hem de çözülemezdir. Böylece $H \subseteq G$, *G* nin *X* de yoğun olduğunu gerektirir, yani, *Int*(*F*)= $\varnothing$ dir.

$(3) \Rightarrow (5)$: Eğer *A* çözülebilir ise *Cl*(*A*) da çözülebilirdir. Eğer *A* hiçbir yerde yoğun değilse o zaman *Int*(*Cl*(*A*)) açık, boştan farklı ve çözülebilirdir, o halde $Int(Cl(A)) \cap G = \varnothing$ dır. Böylece $Int(F) \neq \varnothing$ dir, *F* hiçbir yerde yoğun değildir.

$(5) \Rightarrow (1)$: Boştan farklı açık alt kümeler hiçbir yerde yoğun değildir. İspat açıktır. □

Örnek 2.2.3: Her kuvvetli çözülemez uzay kalıtsal çözülemez uzay mıdır?

Y ve *Z* ayrık sonsuz kümeler ve *F,Y* de bir serbest esas süzgeç olsun. *Y* ye denk $\sigma = F \cup \{\varnothing\}$ esas süzgeç topolojisi ile ρ, *Z* de co-sonlu topoloji olarak alınsın.

X=$Y \cup Z$ nin topolojisi $\tau = \{A \cup B \mid A \in F \ ve\ B \in \rho\} \cup \{\varnothing\}$ olsun. (X, τ) kalabalık (crowded) T_1-uzayı kuvvetli çözülemez olsun fakat kalıtsal çözülemez olmasın. τ nun bir topoloji olduğu açıktır.

$U \in \tau - \{\varnothing\}$ için $A = U \cap Y \in F$ den $U = A \cup B$ olur ve $Y \in \tau$ nedeni ile $A \in \tau|U$ olur. Ama *Y* nin alt uzayı olan *A* kuşkusuz çözülemezdir. Buradan *U* çözülemezdir. Böylece *X* kuvvetli çözülemezdir. Oysa *Z*, *X* in alt uzayıdır, dolayısıyla kalıtsal çözülemez değildir. □

Örnek 2.2.4: Her çözülemez uzay kuvvetli çözülemez midir?

Y ve *Z* sonsuz kümeler olsun. *F* yi, *Y* de bir serbest esas süzgeç olarak alalım ve $\sigma = F \cup \{\varnothing\}$ esas süzgeç topolojisi olmak üzere ρ, *Z* de co-sonlu topoloji olarak alınsın.

$X = Y \cup Z$ nin topolojisi $\tau = \{A \cup B \mid A \in \sigma \ ve \ B \in \rho\} \cup \{\varnothing\}$ olsun. (X, τ) kalabalık yani τ nun alt kümelerinin sonlu kesişimi yine τ ya ait olmak üzere bir T_1-uzayı kuvvetli çözülemez olsun ancak kalıtsal çözülemez olmasın. Örnek 2.2.3 deki gibi τ nun bir topoloji olduğu görülür.

X uzayı çözülemezdir çünkü *Y* bir açık çözülemez alt uzaydır. Fakat *X, Z* bir açık çözülebilir alt uzay olduğundan, kuvvetli çözülemez değildir. *Z* boştan farklı kapalı-açık öz alt kümesi olduğu için *X* uzayı bağlantısızdır. □

Eğer *X* böyle bir topolojik uzay ise Hewitt'in ayrıştırma teoremi şu genel hale dönüşür; *X* uzayı, *C* kapalı ve çözülebilir ve *U* açık ve *HI* olmak üzere *C* ve *U* ayrık alt uzayların birleşimidir.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $A \subset X$ için, (X, τ)nun bir *A* alt kümesinin doğal topolojisi $\tau | A$ olsun.

Herhangi iki yoğun kümenin kesişimleri boştan farklı ise (X, τ) topolojik uzayı çözülemezdir. Eğer, (A, τ_A) çözülebilir ise, *X* in alt kümesi olan *A* çözülebilirdir. Boştan farklı bir çözülebilir alt kümeyi içermeyen (X, τ) uzayına kalıtsal çözülemezdir, denir.

Açık kalıtsal çözülemez (X, τ) uzayının her açık alt uzayı çözülemez; çözülemez (X, τ) uzayının genişlemesinin de çözülemez olduğu söylenebilir. Ancak, açık kalıtsal çözülemez uzayın genişlemesinin de açık kalıtsal çözülemez uzay olduğu söylenemez.

Örnek 2.2.5 X={a,b,c,d,e,f} olsun.

τ={$\varnothing$,X,{a},{a,b},{a,c},{a,b,c},{a,d,e,f},{a,b,d,e,f},{a,c,d,e,f}} ve A={c,e,f} verilsin.

$$\tau|A=\{\varnothing, A, \{c\}, \{e,f\}\}$$

ve

$$\tau(A)= \tau \cup \tau|A \cup \{\{a,e,f\},\{a,b,e,f\},\{a,c,e,f\}\{a,b,c,e,f\}\}.$$

Her D yoğun alt kümesi için (X,τ) da, $Int(D_\tau)$ yoğun olduğundan (X,τ) nun açık kalıtsal çözülemez olduğu açıktır. Fakat $(X,\tau(A))$ açık kalıtsal çözülemez değildir. $(X,\tau(A))$ da D={a,c,f} yoğun alt kümesini alırsak, açıkça $Int(D_{\tau(A)})$={a,c} olduğu görülür. Bu da, $(X,\tau(A))$ da yoğun değildir.

İndirgenebilir alt uzayları betimlemek amacıyla Haussdorf, bir X topolojik uzayı ve bir keyfi alt kümesi $A \subseteq X$ için A kümesinin rezidü kümesini şöyle tanımlamıştır:

$$\rho(A)=A\cap Cl(\ Cl(A)-A)$$

Y alt uzayının her bir boş olmayan kapalı A alt kümesi için $\rho(A) \subsetneq A$ vardır.

Kavramı açıklayıcı şu örnekler verilebilir:

X={a,b,c,d} üzerinde τ={$\varnothing$,X,{a},{a,b},{a,c},{a,b,c}}

topolojisi için K={$\varnothing$,X,{b,c,d},{c,d},{b,d},{d}} olur. Şimdi, Y={a,b,d}$\subset X$ için A={b,d}$\subset Y$ kapalı kümesinin rezidü kümesi,

$\rho(A)=A\cap Cl(\ Cl(A)-A)=A\cap Cl(A-A)=A\cap Cl(\varnothing)=A\cap\varnothing=\varnothing \subseteq A$ boş küme olup tanım sağlanmıştır.

İkinci bir örnek için, $X=\mathbb{R}^2$ ve doğal topolojisi verilsin.

$\tau=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$, $B(a,r)=\{x|\rho(a,x)<r\}$, $Y=(1,3]\subset\mathbb{R}^2$ ve $A=[2,3]\subset Y$ yi uygulanırsa,

$B(1,3)=\{x|\rho(1,x)<3\}=(-1,3)$ ve $B[2,3]=\{x|\ \rho(2,x)\leq 3\}=[-1,5]$ olur.

$\rho(A)=A\cap Cl(Cl(A)-A)=A\cap Cl(A-A)=A\cap Cl(\varnothing)=A\cap\varnothing=\varnothing\subseteq A$, yine tanım gerçeklenmiş olur.

Tanım 2.2.2 Aşağıdaki ayrılabilme aksiyomu denilen, [R] aksiyomunu sağlayan *X* topolojik uzayına **regüler (düzenli) uzay** denir.

[R] : *K*, *X* uzayının kapalı bir alt kümesi ve $x\notin K$ ise, *K* kümesi ile x noktasının birbirinden ayrık iki komşuluğu vardır, yani $\forall K\in$ K ve $x\notin K$ için $\exists\, N_1\in N(K)$ ve $\exists\, N_2\in N(x): N_1\cap N_2=\varnothing$ dur.

[T_1] : *X* topolojik uzayının her farklı *x, y* elemanları için, bunlardan her birisinin diğerini içermeyen komşuluğu vardır.

[R] aksiyomundaki ayrık komşuluklar yerine ayrık açık komşuluklar alınabilir. Bir regüler uzay her zaman [T_1] aksiyomlarını sağlamaz; [T_1] aksiyomlarını sağlayan regüler uzaylara da **T_3-uzayı** denir.

Aşağıdaki örnekte, $C_1\not\Rightarrow SI$, $C_2\not\Rightarrow HI$, $C_3\not\Rightarrow I$ olduğu gösterilmiştir:

Örnek 2.2.6 $(\mathbb{N},\rho)$ co-sonlu topolojik uzayı olmak üzere, $\mathbb{N}$ kalabalık (crowded) çözülebilir T_1-uzayı ve C_1 özelliğini taşısın. *U* boş olmayan regüler açık küme ise o zaman $U=Int(Cl(U))=Int(X)=X$ dir. Böylece $\mathbb{N}$ herhangi bir öz regüler açık kümeye sahip değildir. O halde $\mathbb{N}$, C_1 özelliğini taşır fakat *I* yı hatta *SI* yı ya da *HI* yı da sağlamaz. Bu uzay, hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin sonlu kümeler olması halinde C_2 özelliğini de taşır. Sonsuz kümeler yoğun ve bir *F* kümesi sonlu ise co-sonlu topolojisine göre kapalıdır ve içi boştur. Aynı zamanda, alt küme $(F, \rho|F)$ diskret ve her noktası alt uzayda ayrık noktadır. $x \in F$ ise $U = \mathbb{N} - (F - \{x\}) \in \rho$ ve $U \cap F = \{x\} \in \rho|F$ dir. Hiçbir yerde yoğun olmayan tüm yoğun kümeler çözülemez ve de kapalı olduğundan C_3 ü de sağlar.

Teorem 2.2.2

$SI = C_1 + I$ dır.

İspat ($\Rightarrow$) $SI \Rightarrow C_1 \wedge I$ olduğu açıktır.

($\Leftarrow$) $X = F \cup G$, F nin kapalı ve çözülebilir olduğu bir çözülemez uzay olan Hewitt ayrışım uzayı kullanıldığında; eğer $U = Int(F) \neq \varnothing$ ise o zaman, $Int(Cl(U)) = Int(Cl(Int(Cl(F)))) = Int(Cl(F)) = Int(F) = U$ dır ve böylece U boş olmayan öz regüler açık alt kümedir. C_1 den U çözülemezdir, buradan F nin çözülebilirliği sonucu çıkar. Böylece $Int(F) = \varnothing$ olur ve (X, τ), SI dır. □

Teorem 2.2.3:

$HI = SI + C_2$ dir.

İspat ($\Rightarrow$) $HI \Rightarrow SI \wedge C_2$ olduğu açıktır.

($\Leftarrow$) (X, τ) bir $SI \wedge C_2$ uzayı ve $X = F \cup G$, F nin kapalı ve çözülebilir olduğu bir çözülemez Hewitt ayrışım uzayı olsun. O zaman G bir boş olmayan açık kalıtsal çözülemez alt uzaydır ve $Int(F) = \varnothing$ dir. Buradan F eğer boştan farklıysa hiçbir yerde yoğun değildir ve çözülemezdir. C_2 den $F = \varnothing$ ve $X = G$ sonuçlanır, dolayısıyla X, HI dır. □

Teorem 2.2.4

$S = HI + C_3$ dır.

İspat:($\Rightarrow$) $S \Rightarrow HI \wedge C_3$ olduğu açıktır.

($\Leftarrow$) (X, τ) bir $C_3 \wedge HI$ uzayı ve D, X de yoğun olsun. O zaman X-D co-yoğundur ve böylece hiçbir yerde yoğun değildir ve çözülemez alt uzaydır. C_3 den X-D kapalıdır ve D açıktır. □

Örnek 2.2.7:

$Y = \{0\} \cup \mathbb{N}$

ve

$\sigma = \{\varnothing, \{0\}\} \cup \{V \subseteq Y \mid 0 \in V \text{ ve } Y\text{-}V \text{ sonlu}\}$ olsun.

E={2,4,6,....} çözülebilir hiçbir yerde yoğun olmayan bir kümedir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $D_1 = \{2+4n\}$ ve $D_2 = \{4(1+n)\}$ E de iki ayrık yoğun alt kümedir. Fakat E kapalı değildir, çünkü $Cl(E) = \mathbb{N}$ dir. Böylece Y, C_2 özelliğini sağlamaz. Buna karşın, eğer F, Y nin bir çözülemez hiçbir yerde yoğun olmayan alt kümesi ise F co-yoğundur, o halde, $0 \notin F$ dir. Fakat o zaman çözülemez olması için F sonsuz olmalıdır ve böylece kapalı olur. Yani, Y, C_3 ü sağlar. □

[Hewitt, 1943, Teorem 28] de**,** her maksimal uzayın MI ve her MI nında SI olduğunu ispatlamıştır.

Tanım.2.2.3 1) X uzayının her alt kümesi için $\boldsymbol{Cl(A)=Cl(A-\rho(A))}$ ise X uzayına bir **Hausdorff İndirgenebilir Uzay** denir ve ***HR*** ile gösterilir. Boştan farklı her alt uzayın bir ayrık (isolated) noktası varsa bu uzaya **saçılmış (scattered) uzay** denir.

2) Bir topolojik uzayın rezidüsünü gerçekleyen boş olmayan herhangi bir alt kümesi yoksa bu uzaya **Hausdorff İndirgenebilir Uzay** denir.

Örnek 2.2.8 $X=\{a,b\}$ için $\tau=\{\emptyset,X,\{a\}\}$ alınırsa, $K=\{\emptyset,X,\{b\}\}$ olur. $A=\{a\}\subset X$ için $Cl(A)=X$ dolayısıyla $\rho(A) = A\cap Cl(Cl(A)\text{-}A) = A\cap Cl(X\text{-}A) = A\cap Cl(X\text{-}A) = A\cap Cl(\{b\}) = A\cap X=A$ olduğu açıktır.
$Cl(A\text{-}\rho(A)) = Cl(A\text{-}A) = Cl(\emptyset) =\emptyset$ nedeniyle $Cl(A)\neq Cl(A\text{-}\rho(A))$, yani (X,τ) nun *HR* olmadığı açıktır.

[Esakia, 1981] da, her saçılmış uzayın *HR* uzayı olduğunu, [Gabelaia, 1999] da bazı koşullar altında tersi kanıtlanmıştır. Ancak denklik hala açık bir problemdir.

X topolojik uzayı saçılmıştır $\Leftrightarrow$ X, *HR* dir.

Burada ispatını görmek için modal lojikte *GL* ve *Grz* formüller kümelerinden ve metrik ve kompakt uzaylardan yararlanılacaktır. Ayrıca, *HR* olan fakat saçılmış olmayan uzayın varlığı gösterilecektir.

2.3 Modal Lojikte *GL*, *Grz* ve *HR*

Tanım 2.3.1

1) Tüm klasik lojik aksiyom şemalarını,
2) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

3) $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$

içeren ve Modus Ponens, gerektirme ve ikame(yerine koyma) kurallarına kapalı olan en küçük formüller kümesine ***GL*****(Gödel-Löb)** denir.

Herhangi bir X topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ seçilsin. x, $A \subseteq X$ in bir limit (yığılma) noktası ise x in tüm komşulukları $A - \{x\}$ in bir noktasını içerir. Bu limit noktalarının tümüne A nın **türev kümesi** denir ve $d(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2(Cantor)

1) X topolojik uzayının bir A alt kümesi için, $A \subseteq d(A)$ ise A kümesine **kendi içinde yoğun** denir.
2) Boştan farklı kendi içinde yoğun hiçbir küme içermeyen bir topolojik uzaya **saçılmış uzay** denir.

GL in X saçılmış uzayındaki bir yorumu tüm önermesel değişkenlerin kümesinden $P(X)$ kümesine aşağıdakileri sağlayan bir v fonksiyonudur:

1) $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \cap v(\beta)$
2) $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \cup v(\beta)$
3) $v(\alpha \to \beta) = -v(\alpha) \cup v(\beta)$
4) $v(\Box\alpha) = \tau(v(\alpha))$ (τ(A)=$-d$ - A tüm $A \in P(X)$ için)

(X,d) saçılmış uzayı ve verilmiş bir v yorumu için eğer $v(\alpha) = X$ ise α, (X,d) de doğrudur. Tüm v yorumları için α, (X,d) de doğru ise (X,d) de geçerlidir denir.

Eğer her saçılmış uzayda α geçerliyse *GL* de α formülü ispatlanabilirdir.

Grz (Grzegorczyk) sistemi aşağıdaki formülleri ve Modus Ponens gereklilik ve ikame(yerine koyma)ye göre kapalı en küçük formüller kümesidir.

1) Klasik lojiğin tüm aksiyomlarının şemaları
2) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
3) $\Box p \to p$
4) $\Box p \to \Box\Box p$
5) $\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$

Şimdi her *H*-indirgenebilir (*X*,*Cl*) uzayı için; *Int*, topolojik iç operatörünü göstermek üzere, Grz nin (*X*,*Cl*) de bir yorumunu,

$$v(\Box\alpha)=Intv(\alpha)$$

dışında, aynen yukarıda yapıldığı gibi elde edilebilir. Ayrıca doğru ve geçerli formül tanımı da oradakiyle aynıdır.

Teorem 2.3.1 Bir α formülü *Grz* de ispatlanabilirdir $\Leftrightarrow$ α, her *HR* uzayda geçerlidir.

Grz ve *GL* arasında çok yakın bir ilişki vardır. $sp(\Box\alpha) = \alpha \wedge \Box\alpha$ dir. Buradan şunlara ulaşılabilir.

Teorem 2.3.2 $Grz \vdash \alpha \Leftrightarrow GL \vdash sp(\alpha)$

Her topolojik X uzayı için $A \subseteq X$ ve $Int(A) = A \cap \tau(A)$ olsun $(Cl(A) = A \cup d(A))$. Buradan saçılmış uzay ile *HR* uzay aynı anda gerçekleştiğinde $Grz \vdash \alpha$ $\Leftrightarrow$ tüm saçılmış uzaylarda α geçerlidir $\Leftrightarrow$ $sp(\alpha)$ tüm *H*-indirgenebilir uzaylarda geçerlidir $\Leftrightarrow$ $GL \vdash sp(\alpha)$.

Teorem 2.3.4 Her saçılmış uzay *HR* dir.

İspat *X* bir *HR* uzay değilse bir boş olmayan $A \subseteq X$ kümesi vardır, böylece $A \subseteq Cl(Cl(A) - A)$, $Cl(A) - A =$ $d(A)$ - A olduğundan;

$d(A)$- $A \subseteq d(A)$, $Cl(d(A))=d(Cl(A))$ ve Cl monoton operatör olmak üzere $A \subseteq Cl(Cl(A)\text{-}A) \Rightarrow A \subseteq Cl(d(A)\text{-}A) \subseteq Cl(d(A))$

$$\Rightarrow Cl(A) \subseteq Cl(d(A))=d(Cl(A)) \text{ dır.}$$

Buradan $B \subseteq X$ $(B = Cl(A))$ öyle ki $B \subseteq d(B)$ dir. B, X in boştan farklı kendi içinde yoğun alt kümesidir ve X saçılmış değildir.

Varsayım 2.3.1 Bir X topolojik uzayı saçılmıştır $\Leftrightarrow$ X, HR dir.

Şimdi de bunun ispatını Alexandroff uzayı için yapacağız.

Tanım 2.3.3

1) Bir topolojik uzayın açık alt kümelerinin keyfi kesişimleri yine açıksa o uzaya bir **Alexandroff uzay** denir. Kısaca ***A*-uzayları** diye anılır.

2) Eğer bir topolojik uzay $x_1, x_2, ..., x_n, \ldots$gibi sonsuz bir zincir içermiyorsa öyle ki $\forall\, i \in \mathbb{N}$ için $x_i \neq x_{i+1}$ ve $x_i \in Cl\, x_{i+1}$ dual olarak iyi kurulmuştur.

Tanım2.3.4 Her sonlu topolojik uzay yerel sonludur. Her yerel sonlu topolojik uzay **T_0- Alexandrof Uzay**dır.

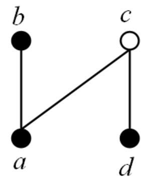
Örnek2.3.1 Diskret uzay birim kümelerin(singletons) açık olduğu bir uzaydır. Bu uzay yerel sonludur ve Alexandroftur.

T_0-Alexandroff uzayına bir kısmi sıralı küme (poset) üzerinde örnek verelim:

$(P, \leq)$ bir poset ve $B = \{\uparrow x : x \in P\}$ tek minimal bazı olsun. P üzerinde $\tau(\leq)$ indirgenmiş topolojik uzayı bir T_0-Alexandroff uzaydır. Eğer (X, τ) Alexandroff uzaysa, $a \in \overline{\{b\}}$ ise $a \leq_\tau b$ olacak şekilde X de özel bir $\leq_r$

sıralaması vardır. Bu sıralama yansıyan, ters simetrik ve geçişkendir (kısmi sıralı) eğer ve yalnız eğer *X*, T_0 dır. Ayrıca, eğer $(X, \leq)$ bir poset ve $\tau(\leq)$ onun indirgenmiş T_0-Alexandroff topolojisi ise $\tau(\leq)$ özel sıralaması kendi içinde $\leq$ sıralıdır ($\leq_{r(\leq)} = \leq$) Diğer taraftan $\leq_r$ sıralaması altında T_0-Alexandroff uzayı (X, τ) ise bu $\leq_r$ sıralaması altında indirgenmiş topolojisi orijinal topolojidir ($\tau(\leq_r) = \tau$).

Örnek 2.3.2 *X*={a,b,c,d} olsun. $a \leq b$, $a \leq c$ ve $d \leq c$ kısmi sıralaması aşağıdaki gibidir (Şekil.1).



Şekil 1

T_0-Alexandroff topolojisi:

$\tau = \{\varnothing, X, \{a,b,c\}, \{b\}, \{c\}, \{d,c\}, \{b,c,d\}, \{b,c\}\}$

$B = \{\{a,b,c\}, \{b\}, \{c\}, \{d,c\}\}$

$A = \{a,b,d\}$ bir down kümesidir. Böylece kapalıdır.

$A^c = \{c\} \in \tau$

Örnek 2.3.3 $X = \mathbb{R}$ ve doğal sıralamalı $(\mathbb{R}, \leq)$ verilsin. $V(x) = [x, +\infty)$ minimal bazı *x* in komşuluğudur. T_0-Alexandroff topolojisi ise $\mathbb{R}$ nin sağ topolojidir.

Örnek 2.3.4 X={a,b,c,d} olsun.

$\tau = \{\varnothing, X, \{a,b,c\},\{b\},\{c\},\{b,c,d\},\{b,c\}\}$ bir T_0-Alexandroff topolojisidir. Özel sıralama aşağıdaki gibi elde edilir:

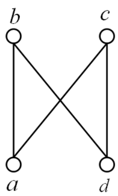
$\overline{\{a\}} = \{a\}$

$\overline{\{d\}} = \{d\}$

$\overline{\{b\}} = \{b, a, d\}$

$\overline{\{c\}} = \{c, a, d\}$

$a \leq b$, $d \leq b$, $a \leq c$ ve $d \leq c$ olur (Şekil.2).



Şekil 2

Teorem 2.3.5 Herhangi bir *A*-uzayı olan *X* uzayı saçılmıştır $\Leftrightarrow$ *X, HR* dir.

İspat Bunun için iki lemmaya gerek vardır.

Lemma 1 *A*-uzayı saçılmıştır $\Leftrightarrow$ Dual olarak iyi kurulmuştur.

İspat ($\Rightarrow$) *X* bir keyfi saçılmış uzay olsun ve *X* dual olarak iyi kurulmuş olmasın. O zaman *X* de bir $x_1, x_2, ..., x_n, \ldots$ sonsuz zinciri vardır öyle ki $x_i \in Cl\, x_{i+1}$ ve $x_i \neq x_{i+1}$ dir.

$A= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{ x_i \}$ kümesini oluşturarak A daki her noktanın bir limit noktası olduğu gösterilecektir. Gerçekten her $x_i \in A$ için ve tüm $U x_i$ komşulukları için $x_{i+1} \in U x_i$ dir.

Bundan dolayı, $(A\text{-}\{ x_i \}) \cap U_{x_i} \neq \emptyset$, $x_i \in A$ için ve dolayısıyla $A \subseteq d(A)$ yani X saçılmış değil çıkar ki bu da çelişki olur.

$(\Leftarrow) X$ dual olarak iyi kurulmuş saçılmış olmayan bir A-uzayı olsun. X saçılmış olmadığından boştan farklı bir $A \subseteq X$ kümesinin hiç ayrık noktası yoktur. Bundan dolayı herhangi bir $x_1 \in A$ ve onun en küçük komşuluğu (x_1 in tüm komşuluklarının kesişiminden oluşan) U_{x_1} için $(A\text{-}\{ x_1 \}) \cap U_{x_1} \neq \emptyset$ dir. $x_2 \in (A\text{-}\{ x_1 \}) \cap U_{x_1}$ verilsin. U_{x_1}, x_1 in en küçük komşuluğu olduğundan $x_1 \in Clx_2$ dir. x_2 nin en küçük komşuluğu U_{x_2} olsun. $x_2 \in A$ olduğundan $(A\text{-}\{ x_2 \}) \cap U_{x_2} \neq \emptyset$ dir.

$x_3 \in (A\text{-}\{ x_2 \}) \cap U_{x_2}$ olsun. $x_2 \in Cl\, x_3$ olduğu açıktır. İşlem böyle sürdürülürse $x_1, x_2 \ldots.. x_n, \ldots$ sonsuz zinciri elde edilir öyle ki $x_i \in Cl\, x_{i+1}$ ve $x_i \neq x_{i+1}$ dir.

Lemma 2 A-uzayı HR dir $\Leftrightarrow$ Dual olarak iyi kurulmuştur.

İspat $(\Rightarrow)$ X bir keyfi HR uzay olsun ve X dual olarak iyi kurulmuş olmasın. O zaman X de bir $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sonsuz zinciri vardır öyle ki $x_i \in Cl\, x_{i+1}$ ve $x_i \neq x_{i+1}$ dir.

$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{ x_i \}$ kümesi oluşturularak $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{ x_{2i-1} \}$ ve $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{ x_{2i} \}$ kümeleri göz önüne alınsın. Her $x_i \in A$ için $x_i \notin O$ olduğundan $x_i \in Cl\, x_{i+1}$ ve $x_{i+1} \in O$ bulunur. Bundan dolayı $x_i \in Cl(O)$ ve $A \subseteq Cl(O)$ dur. $A \subseteq Cl(E)$ olduğu da gösterilebilir. E=A-O nedeniyle $E \subseteq Cl(O) - O$ dur.

Cl monotonluğundan $Cl(E) \subseteq Cl(Cl(O) - O)$ dir.

$O \subseteq Cl(Cl(O) - O)$ olgusundan $O \subseteq A \subseteq Cl(E)$ sonuçlanır. Böylece ρ(O)= O olur. Bundan ötürü *X, HR* değildir. Çelişki doğar.

$(\Leftarrow) X$ dual olarak iyi kurulmuş bir *HR A*-uzayı ise $\rho(A) = A$ olacak şekilde bir $A \subseteq X$ vardır. $x_1 \in A$ ve en küçük komşuluğu U_{x_1} olsun. O zaman $x_2 \in U_{x_1} \cap (Cl(A) - A)$ vardır. x_2 nin en küçük komşuluğu U_{x_2} olsun. $x_2 \in Cl(A)$ olduğundan $x_3 \in U_{x_2} \cap A$ vardır. U_{x_3} , x_3 ün en küçük komşuluğu olsun.

$x_3 \in A$ ve $\rho(A) = A$ olduğundan $x_4 \in U_{x_3} \cap (Cl(A) - A)$ dır ve işleme böyle sürdürülürse $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sonsuz zinciri elde edilir öyle ki $x_i \in Cl\, x_{i+1}$ ($x_i \in U x_{i+1}$ olduğu için) ve $x_i \neq x_{i+1}$ (i tek sayı ise $x_i \in A$ ve i çift sayı ise $x_i \notin A$ olur.)dir. Böylece çelişki oluşur.

SONUÇ 1 Bir sonlu *X* topolojik uzayı *HR* dir $\Leftrightarrow$ *X* uzayı saçılmıştır.

SONUÇ 2 *A*-uzayı ile quasi (yansıyan ve geçişken) sıralı kümeleri arasında yakın bir ilişki vardır; buna göre aşağıdaki tüm ifadeler birbirine denktir:

1) *X* saçılmıştır.
2) *X HR* dir.
3) *X* dual olarak kurulmuştur.

Teorem 2.3.6 Tüm metrik ve kompakt topolojik *X* uzayları saçılmıştır $\Leftrightarrow$ *X*, *HR* dir.

İspat: ($\Rightarrow$) Teorem 2.3.1 e bakınız.

($\Leftarrow$) *X* saçılmış uzay olsun. *X* in boştan farklı hiç ayrık noktası olmayan bir alt kümesi *A* olsun. $B \subseteq Cl(Cl(B)-B)$ özelliğini sağlayan boştan farklı bir *B* kümesi vardır. Gerçekten *A* nın hiç ayrık noktası yoksa *Cl*(*A*) da da yoktur. Bundan dolayı, bir kompakt uzayda kapalı olduğu düşünülen her *A* alt kümesi kompakttır. *B* yi inşa edebilir ve sureti olan B_1 i tümevarımla oluşturulsun. Birinci adımda $B=\varnothing$ ve $B_1=\varnothing$ alınsın. n. adımda herhangi bir $x \in A$ için komşuluğunu $U_x^{\frac{1}{n}}$ oluşturalım ve $\bigcup_{x\in A} U_x^{\frac{1}{n}}$ kümesinde *A* yı kapsar.

A kompakt olduğundan, $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{k_n}$ vardır ki $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_n} U_i$, B_1 e ait olmayan $U_i \cap A$, $i=1,2,\ldots, k_n$ dan bir nokta alınsın ve B_1 e koyulsun. (Bu her adımda uygulanırsa *B* ve B_1 de birçok sonlu sayıda noktalar vardır ve *A* nın hiç ayrık noktası yoktur.) Böylece $B \cap B_1 = \varnothing$ ve hem *B* hem de B_1 in *A* da yoğun olduğu bulunur.

Gerçekten, *x*, *A* nın keyfi bir noktası ve U_x^{ε} –keyfi bir ε için- komşuluğu ise, $\frac{1}{\mathrm{n}} = \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde n i buluruz ve görülür ki n. adımda aşağıdaki çelişki oluşur.

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_n} U_i$ olduğundan $x \in U_j$ dir. $\exists j$, $1 \le j \le k_n$ için *B* de B_1 deki gibi U_j de bir nokta vardır. $y_1 \in B \cap U_j$ ve $y_2 \in B \cap U_j$ olsun. $x \in U_j$ olduğundan

$\left|x - y_1\right| < \dfrac{2}{n} \leq \varepsilon$ ve $\left|x - y_2\right| < \dfrac{2}{n} \leq \varepsilon$ dir. Böylece herhangi bir $x \in A$ ve $\varepsilon > 0$ için $U_x^{\varepsilon} \cap B \neq \varnothing$ ve $U_x^{\varepsilon} \cap B_1 \neq \varnothing$ dir. Hem *B* hem de *A* da yoğundur. Şimdi, *B, A* da yoğunsa *A*=*Cl*(*B*) dir. Bundan dolayı $B_1 \subseteq Cl(Cl(B) - B)$ ve $Cl(B_1) \subseteq Cl(Cl(B) - B)$ dir. B_1, *A* da yoğun olduğundan *A*=*Cl*(B_1) ve $B \subseteq Cl(Cl(B) - B)$ olur. Böylece *X*, *H*-indirgenebilirdir.

Sonuç olarak, tüm kompakt ve sayılabilir tabanlı Hausdorff uzayı bir metrik uzaydır.

SONUÇ 3: Her kompakt ve bir sayılabilir tabanı ile Hausdorff *X* uzayı *H*-indirgenebilirdir. $\Leftrightarrow$ *X* uzayı saçılmıştır.

3.HI VE HR UZAYLARI

3.1 HI ve HR nin Denk Olduğu Koşullar

Bu bölümde, “ X topolojik uzayı HI dır $\Leftrightarrow$ X, HR dir” ve HI ya da saçılmış uzay için teorik süzgeç karakterizasyonları verilecektir. $P(X)$, X in kuvvet kümesi olsun. F, $P(X)$ in boştan farklı bir alt kümesi olsun. F sonlu kesişimlere kapalı ve $A \in F$ ve $A \subseteq B$ için $B \in F$ ise X bir süzgeç olarak adlandırılır. Kapsama bağıntısına göre maksimal olan bir süzgece ultra süzgeç denir. A nın doğurduğu esas süzgeç şöyle tanımlanır:

$A \subseteq X$, $F_A = \{B \in P(X): A \subseteq B\}$

$\{x\}$tarafından doğurulmuş esas ultra süzgeç F_x ile gösterilir. Bu süzgecin X kümesinde saçılmış uzayı F_x, x olarak ifade edilsin. Esas olmayan ultra süzgece serbest denir. Eğer S, $P(X)$ in bir alt kümesi ise S tarafından üretilen süzgeç; $B \subseteq X$ $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$ vardır ki $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \subseteq B$ olarak tanımlanır.

X topolojik uzay için $\mathcal{D}(X)$, X in tüm yoğun alt kümelerinin kümesini göstersin. τ topolojisi ve $\mathcal{D}(X)$ arasında $\mathcal{D}(X, \tau)$ bağıntısı vardır.

$\mathcal{D}(X)$ bir süzgeçtir $\Leftrightarrow$ Herhangi iki yoğun kümenin kesişimi yine yoğundur.

Önerme 3.1.1

X bir topolojik uzay olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

1. $\mathcal{D}(X)$ bir süzgeçtir.
2. X in yoğun açık yoğun alt kümelerinden oluşan $\mathcal{D}(X)$ bir süzgeçtir.
3. Her $A \square X$ için, A, X de yoğun ise $Int(A)$ da yoğundur.
4. Her $A \square X$ için $Int(Cl(A)) \square Cl(Int(A))$ dır.
5. X deki her A alt kümesi için, $Int(Fr(A)) = \varnothing$ dır.
6. X deki her açık alt kümesi için U çözülemezdir.
7. X çözülemezdir.

İspat:

(4) $\Leftrightarrow$ (5): $Int(Fr(A))= Int(Cl(A)\cap Cl(A'))= Int(Cl(A))\cap Int(Cl(A'))$ olduğu bilinmektedir. Bu yüzden,

$$Int(Fr(A))= \varnothing \text{ (eye) } Int(Cl(A))\cap Int(Cl(A')) =\varnothing.$$

Eğer $Int(Cl(A))\square(Int(Cl(A')))'$ ise, X in tüm B alt kümeleri için $(Int(B))' = Cl(B')$ olduğundan, $(Int(Cl(A')))' = Cl(Cl(A'))' =$ $Cl(Int(A))$ dır.

(4) $\Rightarrow$ (3): (4) den (3) ü göstermek X deki A nın yoğunluğundan dolayı basittir. (4) den; $X= Int(X)= Int(Cl(A)) \square Cl(Int(A))$ olduğu için X içinde $Int(A)$ nın yoğun olması sonuçlandırılır.

(3) $\Rightarrow$ (2): A ve B yoğun olsunlar. O zaman, $Int(A)$ ve $Int(B)$ (3) den dolayı yoğundur, çünkü iki yoğun açık kümenin kesişimi $Int(A) \cap Int(B)$ de her zaman yoğundur. Dolayısıyla $A\cap B$ de yoğundur. Böylece, $\mathcal{D}(X)$

bir süzgeçtir. Ayrıca, (3) de belirtildiği gibi her yoğun küme bir yoğun açık küme içerdiğinden, $\mathcal{D}(X)$, X in yoğun açık alt kümelerinden oluşur.

(2) $\Rightarrow$ (1): Açıktır.

(1) $\Rightarrow$ (6): U, X in boş olmayan bir açık alt kümesi olsun. Eğer U çözülebilir ise U nun A, B gibi iki ayrık yoğun alt kümeleri vardır. Fakat o zaman $A\cup U'$ ve $B\cup U'$, X de yoğun olur ve (1) den X de $(A\cup U') \cap (B\cup U')$ nın yoğun olduğu ortaya çıkar.

Buna karşın, $(A\cup U')\cap(B\cup U') = (A\cap B)\cup U' = U'$, X in uygun bir kapalı alt kümesidir ve böylece X de yoğun olamaz. Bu çelişki U nun çözülemez olduğunu ispatlar.

(6) $\Rightarrow$ (3): A, X de yoğun ve U da herhangi bir boş olmayan açık alt kümesi olsun. $Int(A) \cup U \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim.

$U=(U-A) \cup (U\cap A)$ ve $(U-A) \cap (U\cap A) = \emptyset$ dır. Ayrıca $U \square Cl(U\cap A)$ dır, çünkü A, X de yoğun ve U açıktır. Şimdi, eğer, $Int(A) \cap U = Int(A \cap U) = \emptyset$ ise $U \square Cl(U-A)$ dır ve U, $U\cap A$ ve $U-A$ nın birleşimi olarak çözülebilirdir. Bu bir çelişkidir. Böylece $Int(A)\cap U\neq\emptyset$ ve $Int(A)$, X de yoğundur.

(3) $\Rightarrow$ (4): A, X in bir alt kümesi olsun. $Int(Cl(A)) \square Cl(Int(A))$ gösterilecektir. Eğer $Int(Cl(A)) = \emptyset$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. O halde $Int(Cl(A))\neq\emptyset$ olacak şekilde $x\in Int(Cl(A))$ olsun. U, x in bir komşuluğu olarak alındığında $U\cap Int(A)\neq\emptyset$ sonucu bulunmalıdır.

X de $A\cup Cl(A')$ yoğun olduğu için (3) den $Int(A\cup Cl(A'))$ da X de yoğundur. $Int(A)=Int(Cl(A))\cap Int(A\cup Cl(A'))$ dir. O zaman

$$U\cap Int(A)= U\cap Int(Cl(A))\cap Int(A\cup Cl(A'))$$
$$= (U\cap Int(Cl(A)))\cap Int(A\cup Cl(A')) \neq\emptyset$$

çünkü $U \cap Int(Cl(A))$ bir boş olmayan açık kümedir. Böylece $x \in Cl(Int(A))$ olur.

X in her A alt kümesi için $Int(Cl(A))$ □ $Cl(Int(A))$ olduğu da ispatlanabilir.

Böylece, ilk altı koşulun denk olduğu ispatlanmış oldu. Altı koşulun her birinden (7) nin sağlandığı kolaylıkla görülebilir. (6), (7) yi gerçekler. □

Örnek 3.1.1 Koşul (7) nin (6) koşulunu gerektirmediğine bir örnek verilebilir. Doğal topolojide $X=[0,1] \cup \{2\}$ alındığında tüm yoğun kümeler 2 yi içerdiği için 2, X in bir ayrık noktasıdır. Böylece X, (7) deki gibi ayrık yoğun kümeler içermez. Buna karşın X in bir açık alt kümesi olan [0,1] in $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ve $[0,1] - \mathbb{Q}$ ların birleşimi çözülebilirdir, dolayısıyla (6) gerçeklenmez.

Örnek 3.1.1 deki uzay ne kendi içinde yoğun ne de bağlantılıdır. 4. bölümde $\mathcal{D}(X)$ in bir süzgeç olmadığını gösteren bir kendi içine yoğun bağlı çözülemez X uzayı örneği verilecektir. Bu karşıt örneklere rağmen, [Gangster,1987, Teorem 3] den;

X çözülemezdir (eye) hem $\mathcal{D}(\mathrm{X})$ hem de $\{Int(A): A \in \mathcal{D}(\mathrm{X})\}$, X de esas süzgeçtir.

Diğer bir deyişle;

X çözülemezdir (eye) her $A,B \in \mathcal{D}(X)$ için $Int(A) \cap Int(B) \neq \emptyset$ dir.

(7) diğer koşulları gerçeklemezken X in tüm alt uzayları için sağlatılırsa o zaman diğer koşulları da sağlayacaktır. Böylece aşağıdaki bağıntıyı kanıtlamış olur.

Teorem 3.1.1 X bir topolojik uzay olsun. Eğer X bir HI ise o zaman Önerme 3.1.1deki 6 denk koşulun sağlandığı görülecektir.

İspat Eğer X bir HI ise o zaman 6. koşul Önerme 3.1.1 den kolaylıkla gösterilebilir. □

Teorem 3.1.1 inde yapılan ilişkilendirmenin HR uzaylarını karakterize etmek için önemli olduğunu vurgulamak yerinde olacaktır. Gerçekten bu durumda Önerme 3.1.1 deki her 6 koşul arasındaki ilişkilendirme X in alt uzayları, HR olan X e denk olduğunu gösterir. Hatırlayalım ki, X in bir A alt kümesi olan rezidü Haussdorf uzayı;

$\rho(A)=A\cap Cl(Cl(A)-A)$ idi.

Teorem 3.1.2

X bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

(1) X uzayı bir HR dır.

(2) X uzayı bir HI dır.

(3) X in her Y alt uzayı için Y nin yoğun alt kümesi $D(Y)$ kümesi Y de bir süzgeçtir.

(4) X in her Y alt uzayı için Y nin yoğun açık alt kümelerinden oluşan $D(Y)$ kümesi bir süzgeçtir.

(5) X in her Y alt uzayı için eğer A,Y de yoğunsa, $Int_y(A)$,Y de yoğundur.

(6) X in her Y alt uzayı için Y nin her alt kümesi için $Int_y(Cl_y(A))$ □ $(Cl_y(Int_y(A))$ dır.

(7) X in her Y alt uzayı için Y nin her alt kümesi için $Int_y(Fr_y(A))=\emptyset$ dır.

(8) X in her Y alt uzayı için $Y-\rho(Y)$ kümesi Y de yoğundur.

(3)-(7) koşullarında "alt uzay" yerine "kapalı alt uzay" alınsaydı; o zaman koşullar denk olurdu.

İspat Önerme 3.1.1 ve Teorem 3.1.1 den (2)-(7) koşulları birbirine denktir.

(1) $\Rightarrow$ (2) için karşıt ters ispat verilebilir: Y, A ve B ayrık yoğun alt uzayları içeren alt uzay olsun. O zaman; $Cl(A) = Cl(Y) = Cl(B)$ olur. Böylece, $Cl(Cl(A)\text{-}A) = Cl(Cl(Y)\text{-}A) \supseteq Cl(B) = Cl(Y)$ dir.
Böylece

$$A \subseteq Cl(Cl(A)\text{-}A)$$

ve $\rho(A)=A$ olur. Bu durumda, X uzayı HR değildir.

(7) $\Rightarrow$ (8) : $Y\text{-}\rho(Y)=Y\text{-}Cl(Cl(Y)\text{-}Y)$ ve $Fr_{Cl(Y)}(Y)=Cl(Cl(Y)\text{-}Y)$ olsun. $Cl(Y)$, X in bir kapalı alt uzayı olduğuna göre, (7) den $Int_{Cl(Y)}Cl(Y)\ (Fr_{Cl(Y)}(Y))= \varnothing$dir. Her A için $Int(A)=Cl(A')'$ tanımından

$$Int_{Cl(Y)}(Fr_{Cl(Y)}(Y))= Cl(Y)\text{-}Cl[Cl(Y)\text{-}Cl(Cl(Y)\text{-}Y)]$$

vardır. Böylece,

$Cl[Cl(Y)\text{-}\ Cl(Cl(Y)\text{-}Y)]=Cl(Y)$ dir.

$$Y\text{-}Cl(Cl(Y)\text{-}Y)= Cl(Y)\text{-}\ Cl(Cl(Y)\text{-}Y)$$

olduğundan

$$Cl[Y\text{-}Cl(Cl(Y)\text{-}Y)]= Cl(Y)$$

$$Cl(Y\text{-}\rho(Y))= Cl(Y)$$

olur.

(8) $\Rightarrow$ (1): $Y\text{-}\rho(Y)$, Y de yoğun olduğundan boştan farklıdır ve böylece X in her boş olmayan alt uzayı Y için $\rho(Y)$, Y nin bir öz alt kümesidir. Böylece sağladığı açıktır.

Sonuç olarak, "X uzayı bir HI dır (eye) X in her boş olmayan kapalı alt uzayı çözülemez." olduğunu görmek kolaydır. Bundan ve ilk başta bahsi geçenlerden de açıkça görülüyor ki alt uzay yerine kapalı alt uzay alındığında, 2. koşul ile 3. koşuldan 7. koşula kadar tüm koşulların denk olduğu açıktır. □

X in her Y alt uzayı için, özdeşlik $Cl(Y)=Cl(Y\text{-}\rho(Y))$ ile (8) in denk olduğu açıktır. Daha önce de belirtildiği gibi, Esakia bu özdeşliğin (1) e denk olduğunu göstermiştir. Ayrıca, Mc Kinsey "Modal system half a century later" adlı çalışmasında (6) ve (7) nin de (1) e denk olduğunu kanıtlamıştır.

Örnek 3.1.2 [Eklin, 1969] de, aşağıdaki maksimal olan kendi içinde yoğun bir indirgenemez T_1-uzayını örnek olarak vermiştir. X, bir sonsuz küme olsun. F, X de bir serbest ultra süzgeç ve $\tau=F\cup\{\varnothing\}$ kümesi olsun. [Hewitt, 1943, Teorem 23, 24], X in SI olduğundan söz eder. Bu örnek ve Teorem 2.1.4 gösterir ki, girişte bahsedilen sorunun bir negatif çözüm olarak üretilen saçılmış olmayan HR uzayları vardır. X uzayı kompakt değildir. Buna karşın X in sadece kompakt alt uzayları sonludur. Gerçekten Y, X in bir sonsuz alt uzayı olsun ve A_1 ve A_2, Y nin ayrık sonsuz alt kümeleri olmak üzere $Y=A_1\cup A_2$ yazılsın. Eğer F bir ultra süzgeç ise ne $A_1\in F$ ne de $X\text{-}A_1\in F$ dir. Öte yandan, $Y\text{-}U$ sonsuz olacak şekilde bir U açık kümesi vardır. $\{u\in\{y\}: y\in Y\text{-}U\}$, Y nin bir sonlu alt örtüsü olmayan açık alt örtüsüdür. Gelecek bölümde, SI olan bir kompakt indirgenemez T_1-uzayı üretmek için bu örneğin nasıl kullanıldığı görülecektir.

Uyarı 3.1.1 [Hewitt, 1943, Teorem 23, 24] deki bir sonraki önermenin ispatı yapılırken kullanılacaktır. Hewitt in Standing Hipotezi bir uzayı T_0-uzayı kılmak içindir. Ne T_0-uzayı ne de T_1-uzayı olmamasının iki nedeni vardır:

Birincisi eğer (X, τ) maksimal ise bir T_1-uzayıdır. İkincisi eğer (X, τ) alt maksimal ise o zaman T_0 -uzayıdır. Birinci durumu ispatlamak için X in bütün co-sonlu alt kümeleri ile birlikte τ ların birleşimi ile meydana gelen τ' topolojisi vardır. (X, τ) maksimal olduğundan, (X, τ) nun tüm boş olmayan açık kümeleri sonsuz olur, çünkü τ' daki her açık küme $U\in\tau$ ve $A\in\tau$ olacak şekilde $U\cap A$ şeklindeki kümelerin bir birleşimidir. τ' deki boş olmayan tüm açık kümelerin sonsuz olduğu görülür. (X, τ) maksimal olduğundan $\tau=\tau'$ dür. Bundan dolayı, τ, X in tüm co-sonlu alt kümelerini içerir ve bu durumda noktalar kapalıdır. Böylece, (X,τ), T_1-uzayıdır.

İkinci durumda, X bir T_0-uzayı değilse o zaman $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$ olacak şekilde $x,y\in X$ ayrık noktaları vardır. $\overline{\{x\}}-\{x\}$ kümesi $\overline{\{x\}}$ de yoğundur, çünkü $y\in\overline{\{x\}}-\{x\}$ dir. Böylece x-$\{x\}=(\overline{\{x\}}-\{x\})\cup(\overline{\{x\}})'$ X de yoğundur. Buna karşın X-$\{x\}$ açık değildir çünkü $\{x\}$ kapalı değildir. Bundan dolayı, X alt maksimal değildir. [Hewitt, 1943, Teorem 23] deki ispatta, aynı zamanda bir alt maksimal uzayın *HI* olduğu gösterilmiştir. X deki bir τ topolojisi eğer τ-$\{\varnothing\}$ X de bir süzgeçse süzgeçsel topolojidir.

Önerme 3.1.2

X deki bir süzgeç topolojisi τ için aşağıdaki koşullar denktir.

(1) X alt maksimaldir.

(2) X *HI* dır.

(3) X *HR* dır

(4) τ-$\{\varnothing\}$ bir ultra süzgeçtir.

(5) $D(X)=\tau$-$\{\varnothing\}$dır.

Bundan başka, τ-$\{\varnothing\}$ bir serbest ultra süzgeçtir (eye) X maksimaldir.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): Uyarı 3.1.1 den açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3): Teorem 3.1.2 den denk olduğu bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (4):

τ-$\{\varnothing\}$ bir ultra süzgeç olmasın. O zaman $A \notin \tau$-$\{\varnothing\}$ ve $A' \in \tau$-$\{\varnothing\}$ olacak şekilde $A \subseteq X$ vardır. τ-$\{\varnothing\}$ bir süzgeç olduğundan A nın veya A' nün boş olmayan alt kümelerinden hiçbiri açık değilse, $Int(A)$= $Int(A')$= $\varnothing$ olur. Böylece, $Cl(A')$=$Cl(A)$=X dir. Bu yüzden, X çözülebilir ise HI değildir.

(4) $\Rightarrow$ (5):

($\subseteq$:) τ-$\{\varnothing\}$, X de bir ultra süzgeç ve A, X in boş olmayan alt kümesi öyle ki $A \notin \tau$-$\{\varnothing\}$ olsun. Öyleyse, $A' \in \tau$-$\{\varnothing\}$ yani A' açıktır. O zaman A, X in kapalı öz alt kümesi ise $A \notin D(X)$ dir. Öyleyse , $D(X) \subseteq \tau$-$\{\varnothing\}$ dır.

($\supseteq$:)Eğer U boş olmayan bir açık küme ise, τ-$\{\varnothing\}$ bir süzgeç olduğundan, yoğundur. Bu durumda, $D(X) = \tau$-$\{\varnothing\}$ dır.

(5) $\Rightarrow$ (1): Açıktır.

X maksimal ise Uyarı 3.1.1 den T_1-uzayı idi. Böylece, [Hewitt, 1943] den X, MI dır. Aynı zamanda, şimdiye kadar yapılan ispattan τ-$\{\varnothing\}$ bir ultra süzgeçtir. Ayrıca X in sonlu boş olmayan açık alt kümeleri olmadığından τ-$\{\varnothing\}$ serbest olmalıdır. Tersi [El'kin, 1969, Önerme 37] de yer alır. İspatı şöyle verilebilir: F bir serbest ultra süzgeç ve $\tau = F \cup \{\emptyset\}$olsun. O halde τ sonlu olmayan kümeyi içermez. τ',τ nun bir öz genişlemesi olsun ve $A \in \tau' - \tau$ seçilsin. F bir ultra süzgeç olduğundan $A' \in F$ dir. Bundan dolayı herhangi bir $x \in A$ için $A' \cup \{x\} \in F$ vardır. Böylece $\{x\} = (A' \cup \{x\}) \cap A \in \tau$ olur. Dolayısıyla τ bir maksimaldir.□

Bu bölüm Teorem 3.1.2 ye benzer olarak, saçılmış uzayların bir betimlemesi verilerek sonlandırılabilir.

Önerme 3.1.3

X topolojik uzayı için aşağıdaki koşullar denktir.

(1) $Iso(X)$, X de yoğundur.

(2) $\mathcal{D}(X)$, $Iso(X)$ den oluşan bir süzgeçtir.

Dahası, bu iki koşul gerçeklenir.

(3) $\mathcal{D}(X)$, bazı $x \in X$ için bir esas ultra süzgeç F_x in içindeki bir süzgeçtir.

Son olarak, 3. koşul gerçeklenir.

(4) X bir ayrık noktaya sahiptir.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2): A, X de yoğun ise $Iso(\mathrm{X}) \subseteq A$ olduğu kaydedilmelidir. Böylece $Iso(X)$, X de yoğunsa o zaman $\mathcal{D}(X) = F_{Iso}(X)$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (1): Açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3): Eğer $\mathcal{D}(X)= F_{Iso}(X)$ ise $Iso(X)\neq\emptyset$ olduğundan her $x\in Iso(X)$ için $\mathcal{D}(X)\subseteq F_x$ dir.

(3) $\Rightarrow$ (4): Eğer $\mathcal{D}(X) \subseteq F_x$ ise X-$\{x\}$ yoğun değildir. Bundan dolayı X-$\{x\}$ kapalı olmalı ve böylece $\{x\}$ açıktır. □

Örnek 3.1.3 X, Örnek 3.1.1 deki gibi bir uzay olsun. X in koşul (4) ü sağladığını ama koşul (3) ü sağlamadığı gösterildi. X, bir tek ayrık noktaya sahiptir, örneğin 2 gibi. Buna karşın $\mathcal{D}(X)$ bir süzgeç değildir, çünkü $([0,1]\cap\mathbb{Q})\cup\{2\}$ ve $([0,1]-\mathbb{Q})\cup\{2\}$ kümeleri yoğundur fakat kesişimleri olan $\{2\}$ yoğun değildir.

Örnek 3.1.4 (X,τ) Örnek 3.1.2 nin uzayı olsun. Z, X in ve $\{p\}$ tek elemanlı kümesinin ayrık birleşimi olsun. O zaman $Iso(Z) = \{p\}$ olur. Z nin yoğun kümeleri $A\in\mathcal{F}$ olmak üzere $A\cup\{p\}$ şeklindedir. Bu yüzden $\mathcal{D}(Z)$ bir süzgeç değildir ve $\mathcal{D}(Z)$, $\mathcal{F}_p$ esas ultra süzgecinin içindedir. Buna rağmen $Iso(Z)$ yoğun değildir. Bu yüzden Z, (3) ü sağlar ama (2) yi sağlamaz.

Teorem 3.1.1 deki gibi, 4. koşul ile X in alt uzayları arasındaki ilişki, Önerme 3.1.3 deki şartları da etkileyecektir. Buna rağmen, 4. koşul ile X in tüm alt uzayları arasındaki ilişki, saçılmış uzayların tanımını verir. Böylece şu teoreme ulaşılır.

Teorem 3.1.3 X boş olmayan bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

(1) X saçılmış uzaydır.

(2) X in her Y alt uzayı için $Iso(Y)$, Y de yoğundur.

(3) X in her Y alt uzayı için $Iso(Y)$ den oluşan $\mathcal{D}(Y)$ bir süzgeçtir.

(4) X in tüm boş olmayan Y alt uzayları için $\mathcal{D}(Y)$, bazı $y\in Y$ için $\mathcal{F}_y$ esas ultra süzgecinin içinde bulunan bir süzgeçtir.

(5) X in her Y alt uzayı için $d(Y)=d(Y\text{-}d(Y))$ vardır.

Ayrıca, eğer "alt uzay" yerine "kapalı alt uzay" alınırsa (2) ile (4) arasındaki koşullar (5) e denk olur**.**

İspat Önerme 3.1.3 ele alındığında, (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4) ve (4) $\Rightarrow$ (1) bulunur.

(1) $\Rightarrow$ (2):

Y, X in bir alt uzayı olsun. Eğer V, Y nin boştan farklı açık alt kümesi ise hipotezden, V, y gibi bir ayrık nokta içerir. Y de V açık olduğundan $y\in Iso(Y)$ sonucuna ulaşılır.

Sonuç olarak, $V\cap Iso(Y) \neq\emptyset$ dir. Bu yüzden $Iso(Y)$**,** Y de yoğundur.

(2) $\Rightarrow$ (5):

Y nin her alt uzayı için $d(Y\text{-}d(y)) \subseteq d(Y)$ olduğu bilinmektedir.

$d(Y)\subseteq d(Y\text{-}d(Y))$ olduğu gösterilirse, (2) den $Cl(Y)=Cl(Iso(Cl(Y)))$ olduğu ortaya çıkar. Her $A\subseteq X$ için $Cl(A)=A\cup d(A)$ vardır ve $Iso(A)=A\text{-}d(A)$ dır.

O zaman

$$d(Y) \subseteq Cl(Y) = Cl(Iso(Cl(Y)))= Cl\,(Cl(Y) - d(Cl(Y)))$$

$$= (Cl(Y) - d(Cl(Y)) \cup d(Cl(Y) - d(Cl(Y)))$$

dır ve $d(Y)$, $Cl(Y) - d(Cl(Y))$den dolayı ayrık olduğundan,

$d(Y) \subseteq d(Cl(Y) - d(Cl(Y)))$

$= d([Y \cup d(Y)] - d[Y \cup d(Y)])$

$= d([Y \cup d(Y)] - d[Y \cup dd(Y)])$ ($d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$ olduğundan)

$= d([[Y \cup d(Y)] - d(Y)] - dd(Y))$

$= d([Y - d(Y)] - dd(Y))$

$\subseteq d(Y - d(Y))$

olup, X in her Y alt uzayı için, $d(Y) = d(Y - d(Y))$ dir.

(5) $\Rightarrow$ (1):

Y, X in boştan farklı herhangi bir alt uzayı olduğunda $d(Y) = d(Y - d(Y))$ den $Iso(Y) = Y - d(Y) \neq \varnothing$ olduğunu gerçeklemek kolaydır. Buradan,
X saçılmıştır (eye) her boştan farklı kapalı alt uzayın bir ayrık noktası vardır, sonucu elde edilir.

Böylece, (1), (2) den (4) e kadar tüm koşullara “alt uzay” yerine “kapalı alt uzay” alındığında denk olacaklardır. □

[Esakia,1981] çalışmasında, d bakımından saçılmış uzayların daha önceden doğruluğu kanıtlanmış aksiyomları kullanarak (1) $\Leftrightarrow$ (5) olduğunu göstermiştir.

Bir saçılmış uzayın *HI* olduğu açıktır. Bu yüzden Teorem 3.1.2 den bir saçılmış uzay *HR* dir. Ayrıca, Teoremler 3.1.2 ve 3.1.3 den kesinlikle *X, HR* uzayı ise saçılmıştır eğer $\mathcal{D}(Y)$, X in her boş olmayan kapalı alt uzayı Y için bir esas ultra süzgeç içindeyse ve X, bir esas ultra süzgeç $\mathcal{D}(X)$ i içermiyorsa saçılmış uzay değildir.

4.KOMPAKT *SI* UZAYLARI VE HAUSSDORF *SI* UZAYLARI

4.1 Kompakt *SI* Uzayları ve Haussdorf *SI* Uzayları

Bu bölümde, Elkin'in örneği *SI* olan bir indirgenemez kompakt T_1 uzayını oluşturmak için genişletilecek ve *MI* olan bağlantılı Haussdorf uzaylarını oluşturmak için Padmavally ve Anderson örneklerini ayrıntılı olarak incelenecektir.

Örnek 3.1.2 i kullanarak bir kompakt uzay üretmek için Alexandroff uzayın tek nokta kompaktifikasyonu kullanılacaktır. Birçok makalede, tek nokta kompaktifikasyonunun sadece yerel kompakt Haussdorf uzayı için olduğundan bahsedilir. Ancak, her uzay için verilebilir: Eğer (X,τ) bir topolojik uzay ise, $X^* = X\cup\{\infty\}$için τ^* topolojisini şöyle tanımlansın.

$$\tau^* = \tau\cup\{(X\text{-}C)\cup\{\infty\}: C\subseteq X, X \text{ kompakt ve kapalı bir uzay}\}$$

O zaman (X^*, τ^*) bir açık alt uzayı olan X i içeren bir kompakt uzaydır. X kompakt değilse o zaman X, X^* de yoğundur. Aynı zamanda X, T_1 ise X^* in de T_1 olduğunu görmek kolaydır.

X^* Haussdorff tur (eye) X yerel kompakt Haussdorf tur.

Sonuç olarak eğer X tamamen regular ise X^*, X yerel kompakt olmaması durumunda Haussdorf değildir. Örnek 3.1.2 deki uzayın tek nokta kompaktifikasyonunun *SI* olan indirgenemez kompakt T_1-uzayı olduğu gösterilecektir.

Önerme 4.1.1 Bir sonsuz X kümesinde, $\mathcal{F}$ bir serbest ultra süzgeç olmak üzere $\tau= \mathcal{F}\cup\{\varnothing\}$ olsun. O zaman (X,τ) nun tek nokta kompaktifikasyonu (X^* ,τ^*) bir indirgenemez kompakt T_1-uzayıdır, böylece $\mathcal{D}$ (X^* ,τ^*), $\mathcal{F}$ den türetilmiş X^* deki süzgeçtir. Hatta X^* , *SI* dır.

İspat:

($\Rightarrow$) X^* uzayının kompakt ve T_1- uzayı olduğu biliniyor. X^* nın X in yoğun açık alt uzayının indirgenemez olması durumunda indirgenemez olduğunu görmek kolaydır. $\mathcal{D}$ (X^* ,τ^*) in X^* de $\mathcal{F}$ den türetilmiş $\mathcal{G}$ süzgeci olduğu gösterilecektir. Bunu ispatlamak için $A\in \mathcal{F}$ olsun. U, X^* ın boş olmayan açık kümesi ise o zaman $U\cap X$, X in boş olmayan açık kümesi, böylece $A\in \mathcal{D}$ (X^* ,τ^*) olacak şekilde $A\cap(U\cap X)\neq\varnothing$ dır.Bundan dolayı, $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{D}$ (X^* ,τ^*) ve $\mathcal{G}\subseteq \mathcal{D}$ (X^* ,τ^*) dir.

($\Leftarrow$) $A\in \mathcal{D}$ (X^* ,τ^*) olsun. O halde A, X^* in boş olmayan her açık kümesiyle kesişir. X^* daki X in açık alt kümeleri de açıksa A-$\{\infty\}$ X in her boş olmayan açık kümesiyle kesişir. Böylece, A-$\{\infty\}\in \mathcal{F}$ dir. Bu yüzden $A\in \mathcal{G}$ dir. $\mathcal{D}$ (X^* ,τ^*)= $\mathcal{G}$ nin ispatı vardır. X kompakt olmadığında ∞ un X^* bir ayrık noktası olduğu biliniyor. Bu yüzden, X^* kendi içine yoğun bir uzaydır, çünkü X, X^* in kendi içinde yoğun bir açık alt uzayıdır.

Sonuç olarak, X^*nın *SI* olduğunu göstermek için Y, X^*nın bir boş olmayan kapalı alt kümesi olarak alınsın. O zaman, $Z=Y\cap X= Y$-$\{\infty\}$, X in bir kapalı alt kümesidir. Eğer $Z=X$ ise ya $Y=X$ ya da $Y= X^*$ dır. Diğer taraftan, $\mathcal{D}$ (Y) bir süzgeçtir. Tersine, Z, X in bir öz alt kümesi olsun. Z nin her noktasının Y nin bir ayrık noktası olduğunu görmek için, $y\in Z$ olsun. τ-$\{\varnothing\}$, X de bir süzgeç ise (X-Z) $\cup\{y\}$ kümesi, X de açıktır ve böylece X^* de de açıktır.

Böylece $((X\text{-}Z)\cup\{y\})\cap Y=\{y\}$, Y de açıktır. Çünkü Y nin her yoğun kümesi Y nin tüm ayrık noktalarını içerir. $\infty\in Y$ olmasından ve y nin bir ayrık noktası olmasından ötürü ya $\mathcal{D}(Y)=\{Y\}$ ya da $\mathcal{D}(Y)=\{Z,Y\}$ elde edilir. Her durumda $\mathcal{D}(Y)$ nin Y de bir süzgeç olduğu görülür. Dolayısıyla, Teorem 3.1.1 den X^*, SI dır. □

Örnek 3.1.2 deki (X,τ) uzayı, $\tau\text{-}\{\emptyset\}=\mathcal{D}(X,\tau)$ eşitliğini sağlar. Şimdi, aşağıdaki (X^*,τ^*) uzayının $\tau^*\text{-}\{\emptyset\}\subsetneq\mathcal{D}(X^*,\tau^*)$ yı sağladığı gösterilecektir.

$\mathcal{F}$ den meydana gelen $\mathcal{G}$ süzgecinin X^* deki $\mathcal{F}\cup\{A\text{-}\{\infty\}:A\in\mathcal{F}\}$ e denk olduğunu göstermek kolaydır, çünkü $X^*=X\cup\{\infty\}$ dır. U, X^* ın boş olmayan açık alt kümesi olsun. O zaman, X de C kapalı ve kompakt olduğunda, ya $U\in\mathcal{F}$ veya $U=(X\text{-}C)\cup\{\infty\}$ dır.Her durumda, $U\in\mathcal{G}$ olduğu açıktır, çünkü $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}$ ve $(X\text{-}C)\in\mathcal{F}$ dir. Bundan dolayı, X^* ın boş olmayan her açık kümesi yoğundur ve $\tau^*\text{-}\{\emptyset\}\subseteq\mathcal{D}(X^*,\tau^*)$ dır. Ancak bu doğru değildir, çünkü X^*ın açık olmayan yoğun kümeleri vardır. Bunu görmek için, C, X in bir sonsuz öz alt kümesi olsun. O zaman C, X de kapalı olur ama kompakt olmaz, çünkü Örnek 3.1.2 deki ispattaki gibi sadece X in kompakt alt kümeleri sonludur. Böylece, $U=(X\text{-}C)\in\mathcal{F}$ dir ve $U\cup\{\infty\}\in\mathcal{G}$ dir. Diğer yandan, $U\cup\{\infty\}$, τ^* tanımından hareketle, X^* de açık değildir.

Örnek 4.1.1 $\mathcal{D}(X)$ bir süzgeç olmayacak şekilde kendi içine yoğun bağlantılı çözülemez X uzayı ile ilgili bir örnek verelim. $|Y|>1$ olacak şekilde Y kendi içinde yoğun bağlantılı çözülebilir bir T_1-uzayı ve Z de kendi içinde yoğun bağlantılı çözülemez bir T_1-uzayı olsun. $y\in Y$ ve $z\in Z$ için $Z\text{-}\{z\}$ de çözülemez olsun. Örneğin, Y reel sayılar ve Z de Önerme 4.1.1 deki uzay olarak seçilsin ve z sonsuzlukta bir nokta olsun. X, (Y,y) ve (Z,z) noktalanmış kümelerinin $Y \wedge Z$ vektörü olarak alınsın. Bu, $z \in Z$ ile $y \in Y$ yi tanımlayarak Y ve Z yi birleştirmektir. $x \in X$ belirli bir nokta olsun. Y ve Z nin X in kapalı alt uzaylarına homeomorf olduğunu görmek gayet basittir ve X in alt uzayları ile Y ve Z nin varlığı altında Y-$\{y\}$ve Z-$\{z\}$, X de açıktır. O zaman, X çözülemezdir çünkü Z-$\{z\}$, X in çözülemez açık alt uzayıdır. Ayrıca X bağlantılıdır çünkü Y ve Z, X de birleşimi olan kesişen bağlantılı alt uzaylardır. Sonuç olarak X kendi içinde yoğundur çünkü Y ve Z nin her ikisi de kendi içinde yoğundur. $\mathcal{D}(X)$ in süzgeç olmadığını ispatlamak için A ve B, Y de ayrık yoğun kümeler kabul edilsin. $A \cap B$, X de yoğun değildir çünkü $|Y|>1$dir. Böylece, $\mathcal{D}(X)$ bir süzgeç değildir.

Bir bağlantılı kendi içinde yoğun çözülemez Haussdorf uzayın ilk örneğini [Padmavally, 1953] vermiştir. [Anderson, 1965] her sonsuz kardinali (K) için dispersiyon karakteri $\Delta \geq K$ olacak şekilde bir kendi içinde yoğun Haussdorf uzay olduğunu göstermiştir. Bir topolojinin kabul edilebilir genişlemesinin nosyonunu kullanarak (X,τ) bir topolojik uzay ise, $\tau' \supseteq \tau$, τ nun (admissible) kabul edilebilir genişlemesi olduğunu göstermiştir.

Eğer τ' nın, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(X,\tau)$ ile $\tau \cup \mathcal{D}$ formunda bir alt bazı varsa her $D \in \mathcal{D}$, (X, τ') da yoğundur. Ayrıca [Anderson, 1965, Lemma 1] de, τ', τ nun bir kabul edilebilir genişlemesi ise ve (X,τ) bağlantılı ise (X, τ') nın da bağlantılı olduğunu ispat etmiştir.

Bir bağlantılı Haussdorf *SI* uzayının var olduğunu göstermek için bu örneklerden yararlanılacaktır. Örneği inşa için bir kendi içinde yoğun (X,τ) uzayı ile başlanacak öyle ki tüm boş olmayan U açık kümeleri ve A yoğun kümeleri için $U \cap A$ kesişimi sonsuz olsun. Her kendi içinde yoğun T_1-uzayının bu şartı sağladığı ve böylece (X,τ) nun T_1-uzayı olduğu görülebilir. (X, $\hat{\tau}$), *SI* olacak şekilde $\hat{\tau} \supset \tau$ topolojisi göz önünde bulundurulacaktır. Hatta, (X,τ) Haussdorf ise (X, $\hat{\tau}$) da Haussdorf olan τ için (X,τ) nun yoğun kümelerinin bir esas süzgecini ekleyerek τ dan $\hat{\tau}$ inşa edilebilir. Bahsi geçen süzgecin varlığı aşağıdaki Lemmada gösterilmiştir.

Lemma 4.1.1 X bir topolojik uzay olsun. O zaman yoğun kümeleri içeren süzgeçlere bağlı X maksimalinde bir $\mathcal{F}$ süzgeci vardır.

İspat S, X uzayında yoğun kümeleri içeren tüm süzgeçlerin kümesi olsun. O zaman S boştan farklı bir kümedir çünkü eğer A herhangi bir yoğun küme ise $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}= \{B\in P(\mathrm{X}):A\subseteq B\}$ yoğun kümeleri içeren X de bir süzgeçtir. S nin kapsama bağıntısı ile sıralandığı biliniyor. S ye Zorn Lemmasını uygulamak için, $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ tüm yoğun kümeleri içeren bir süzgeç olan S de bir zincir olsun. $\cup_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ nın da bir süzgeç olduğunu ve yoğun kümeleri içerdiğini görmek kolaydır. Bu birleşim S nin bir elemanı olur. O zaman, Zorn Lemmasından, S nin bir $\mathcal{F}$ maksimal elemanı vardır. □

Önerme 4.1.2 (X,τ) bağlantılı bir kendi içinde yoğun T_1-uzayı olsun. $\mathcal{F}$ yoğun kümeleri içeren bir süzgeçlere bağlı maksimal uzay olsun. $\hat{\tau}$, $\tau\cup\mathcal{F}$ den doğan topoloji olarak belirlensin. O zaman $\mathcal{D}(X, \hat{\tau}) = \mathcal{F}$ dır. Ayrıca (X, $\hat{\tau}$) bağlantılı ve *MI* olur.

Sonuç olarak eğer (X,τ) Haussdorf ise (X, $\hat{\tau}$) da Haussdorf tur.

İspat $\hat{\tau}$ nun bir bazı, $\tau\cup\mathcal{F}$ nin elemanlarının sonlu kesişimlerini içersin. Hem τ hem de $\mathcal{F}$ sonlu kesişimlere kapalı olduğundan bu baz $\{U\cap A : U\in\tau,\ A\in\ \mathcal{F}\}$ dir. $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{D}(X,\ \hat{\tau})$ kapsamasını ispatlamak için $B\in\mathcal{F}$ verilsin. Eğer $U\in\tau$ ve $A\in\mathcal{F}$ ise $B\cap(U\cap A)=U\cap(A\cap B)\neq\varnothing$ dır çünkü $A\cap B\in\ \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{D}(X,\tau)$ dir.

Tersi için, $B\in\mathcal{D}$ (X,τ) verilsin. O zaman $B\in\mathcal{D}$ $(X,\hat{\tau})$ dir çünkü τ daha küçük bir topolojidir. $A\in\mathcal{F}$ ve $U\in\tau$ olsun. Bu durumda B, $(X,\hat{\tau})$ da yoğun olduğundan $B\cap(U\cap A)\neq\varnothing$ dır. Böylece $A\ \cap B$ her bir $U\in\tau$ ile kesişecektir, dolayısıyla $A\ \cap B\in\ \mathcal{D}(X,\tau)$ dır.

Bu da $\mathcal{F}\cup\{B\}$ tarafından türetilen $\mathcal{F}'$ süzgecinin yoğun kümeler süzgeci olduğunu gösterir. $\mathcal{F}$ maksimal olduğu için $\mathcal{F}'=\mathcal{F}$ dır ve böylece $B\in\mathcal{F}$ olur.

Böylece $\mathcal{D}$ $(X,\ \hat{\tau})=\ \mathcal{F}$ olduğu ispatlanmış olur, çünkü $\mathcal{F}\subseteq\ \hat{\tau}$ yüzünden $(X,\hat{\tau})$ nun alt maksimal olduğu görülür. $(X,\hat{\tau})$ nun kendi içinde yoğun olduğunu göstermek için $\{\ U\cap A : U\in\tau,\ A\in\ \mathcal{F}\}$ nın $\hat{\tau}$ için bir baz olduğu kabul edilmelidir ve X, T_1-uzayı olduğundan her $U\in\tau\text{-}\{\varnothing\}$ ve her $A\in\ \mathcal{F}$ için $U\cap A$ kesişimi sonsuzdur. İspat $(X,\hat{\tau})$ nun hiç ayrık noktası olmayışı ile devam eder ve böylece $(X,\hat{\tau})$ kendi-içinde- yoğun olduğu bulunur. Bu durumda, $(X,\ \hat{\tau})$ *MI* dır, çünkü $\tau\subseteq\hat{\tau}$ dır. (X,τ) nun Haussdorf olduğu açıktır. O halde $(X,\ \hat{\tau})$ da Haussdorf tur. Ayrıca $\hat{\tau}$ nun tanımından ve $\mathcal{D}$ $(X,\ \hat{\tau})=\ \mathcal{F}$ eşitliğinden bu topoloji, bağlantılı τ topolojisinin bir (admissible) öz genişlemesidir. Böylece $\hat{\tau}$ [Anderson, 1965, Lemma 1] den bağlantılıdır. □

Önerme 4.1.2 deki hipotezleri reel sayıların doğal topolojisi sağlamaktadır. Bundan dolayı, reel sayılar üzerinde doğal topolojiden daha kuvvetli bağlantılı bir τ Haussdorf topolojisi vardır öyle ki $(\mathbb{R},\tau)$ *MI* olsun.

SI uzayları ile ilgili üç tane örnek verelim. Örnek 3.1.2 deki uzayda, yoğun kümeler boştan farklı açık kümelerdir. Önerme 4.1.1 deki uzayda, boştan farklı açık kümeler yoğundur fakat tersi doğru değildir. Son olarak, Önerme 4.1.2 deki uzayda, yoğun kümeler açıktır fakat tersi doğru değildir. İlk durum Önerme 3.1.2 den, ikincisi Önerme 3.1.1 den sonra ve üçüncü de Önerme 4.1.2 den sonuçlanır.

(Z,τ) daki τ-$\{\varnothing\}$ ve $\mathcal{D}(Z,\tau)$ arasında bir kapsama ilişkisi yoktur ve saçılmış olmayan *SI* uzaylara örnekler verilebilir. (X, τ_X) SI ve (Y, τ_Y) saçılmış olsun. (Z, τ_Z), X ve Y nin ayrık birleşimi olsun. *SI* uzayların ayrık birleşimi *SI* dır. Z, *SI* dır. Ayrıca Z saçılmış uzay değildir, çünkü X, kendi içinde yoğundur. Hatta Z nin yoğun kümeleri kesinlikle X de yoğun kümelerin birleşimleri ve Y de de bir yoğun kümedir. (Y, τ_Y) seçiminden $\mathcal{D}(Y)$ ve τ_Y arasında kapsama ilişkisi yoktur. Bu durumda $\mathcal{D}(Z)$ ve τ_Z arasında da kapsama ilişkisi olmayacaktır.

5. SONUÇ

İkinci bölümde ***S4*** lojiğinin topolojik uzaylar ile var olan yakın ilişkisinden bahsedilerek, konu ile ilgili gerekli tanımlar verilmiştir. Seyrek indirgenebilir Haussdorf ve kalıtsal çözülemez uzaylar hakkında bilgiler verilmiş ve örneklerle aralarındaki ilişki gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, *HI* ve *HR* nin denk olduğu koşullar gösterilmiştir. Daha sonra bu sonuçlar genişletilmeye çalışılmıştır.

Son bölümde kompakt *SI* uzayları ve Haussdorf *SI* uzayları ele alınmış, böylece Eklin in örneğini *SI* olan bir indirgenemez kompakt T_1 uzayını oluşturmak için genişletmek ve *MI* olan bağlantılı Haussdorf uzaylarını oluşturmak için Padmavally ve Anderson örnekleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Abashidze M. and Esakia L., 1987, Cantor's scattered spaces and the provability logic.In *Baku International Topological Conference. Volume of Abstracts. Part I , page 3.*, In Russian.

Anderson D. R., 1965, On connected irresolvable Hausdorff spaces, Proceedings of the American Mathematical Society 16, no. 3, 463–466.

Artemov S. , Davoren J. , Nerode A., 1997, Modal Logics and topological semantics for hybrid systems, Cornell University, Technical Report MSI 97–05.

Aslım G., Genel Topoloji, 2004, Ege Üniversitesi Basımevi, Bornova, 29-103.

Başkent C., 2007, Topics in Subset Space Logic, Institute for Logic Amsterdam University .

Bezhanishvili G., Mines R. and Morandi P. , 2003, Scattered , hausdorff-reducible and hereditary irresolvable spaces. *Topology and its Applications*, no.132,291–306.

Chattopadhyay C. And Bandyopadhyay C., 1993, On Resolvable And Irresolvable Spaces, Burdwan University, Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. 16, no. 4, 657–662.

KAYNAKLAR (devam)

Davoren J. , 1998, *Modal Logics for continuous dynamics*, Ph. D. Thesis, Cornell University.

Dontchev J., Ganster M., and Rose D., 1997, α-scattered spaces. II, Houston Journal of Mathematics 23, no. 2, 231–246.

E. K. van Douwen., 1993, Applications of maximal topologies. *Topology and its applications*, no.51,125–240.

El'kin A.G., 1969, Ultrafilters and irresolvanle spaces, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. 24(5),51–56.

Engelking R., 1977, *General Topology*. PWN-Polish Scientific Publishers, Warzawa.

Esakia L. and Meskhi V., 1977, Five critical modal systems. *Theoria*, 43(1):52–60.

Esakia L.L., 1981, Diagonal Constructions, Löb's Formula and Cantor's Scattered Spaces, in: Studies in Logic and Semantics, Metsniereba,Tbilisi, pp. 128–143.

. KAYNAKLAR (devam)

Esakia L.L., 1995, McKinsey'smodal system half a century later, in: Methodology and Philosophy of Science, Vol.II (Moscow- Obninsk), RGNF Pres, pp. 95–98.

Feng, L. and Garcia-Ferreira, S., 1999, Some examples of MI-spaces and of SI-spaces, Topol. Proc. 24, 153–164 [ISSN 0146–4124].

Gabelaia, D., 1999, Modal Logics GL and Grz: Semantical Comprasion, semantical comparison in Proceedings of the ESSLLI Student Session, pp91-97.

Gabelaia D., 2001, Modal definability in topology. Master's thesis, ILLC, University of Amsterdam.

Ganster M., 1987, Prepopen sets and resolvable spaces, Kyungpook Math. J.27, 135–143.

Guram Benzhanishvili, Ray Mines, Patrick J.Morandi, 2002, Scattered, Haussdorf-reducible, and hereditarily irresolvable spaces, department of Mathematical Sciences, New Mexico State University.

Guram Bezhanishvili and Johan van Benthem, 2006, Modal Logıcs Of Space, ILLC Publications.

. KAYNAKLAR (devam)

Hausdorff F., 1957, Set Theory, Chelsea, New York.

Hısham B. Mahdı and Mohammed S. El Atrash, 2000, On To-Alexandroff Spaces, *Mathematics Subject Classification.*

Hewitt E., 1943, A problem of set-theoretic topology. *Duke Mathematical Journal*, no.10,309–333.

Hochster M., 1969, Prime ideal structure in commutative rings, Trans. Amer. Math. Soc. 142, 43–60.

J.C.C. Mckinsey and Tarski A., 1944, The algebra of topology. *Annals of Mathematics,* no.45*,*141–191

Johan van Benthem, Guram Bezhanishvili, and Mai Gehrke, 2003, Euclidean hierarchy in modal logic. *Studia Logica*, 75(3):327–344.

Kremer P., 2005, The Modal Logic of continuous functions on Cantor space, manuscript.

Kremer P. and Mints, G., 2005, Dynamic Topological Logic ; *Annals of Pure Applied Logic* 131, 133-158.

. KAYNAKLAR (devam)

Kunen K., Szyman´ ski A., and Tall F., 1986, Baire irresolvable spaces and ideal theory, Annales Mathematicae Silesianae, no. 14, 98–107.

Kuratowski K., 1966, Topology. Vol.I, Academic Pres, New York.

Mahmoud R. A. and Rose D., 1995, A note on submaximal spaces and SMPC functions, Demonstratio Mathematica 28, no. 3, 567–573.

Malyhin V. I., 1973, Products of ultrafilters and irresolvable spaces, Mathematics of the USSR-Sbornik 19, no. 1, 105–115.

Marco Aiello, Johan van Benthem , and Guram Bezhanishvili ; 2003, Reasoning about space : the modal way. *J. Logic Comput.*, 13(6): 889-920.

McKinsey and Tarski A., 1944, *The algebra of topology Annals of Mathematics* , 45, 141-191.

Mints G. and Zhang T., 2003, A proof of topological completeness of S4C for dynamic Cantor spaces, manuscript.

Mints G. and Kremer P., 1997, Dynamic topological logic,Bull. Symb. Logic v.3, no.3, 371–372.

. KAYNAKLAR (devam)

Nj ˙astad O., 1965, On some classes of nearly open sets, Pacific Journal of Mathematics 15, no. 3,961–970.

Padmavally K., 1953, An example of a connected irresolvable Hausdorff space, Duke Math. J. 20, 513–520.

Rasiowa and Sikorski, 1969, Metamathematics of Mathematics Polish scientific Publishers, Warzawa.

Rose D. and Hamlett T. R., 1991, Ideally equivalent topologies and semi topological properties, Mathematical Chronicle 20, 149–156.

Rose D., Sızemore K. and Thurston B., 2006, Strongly Irresolvable Spaces, Volume Article ID 53653, Pages 1–12.

Slavnov S., 2003, Two counter examples in the logic of dynamic topological systems, *Technical Report TR* – 2003015, Cornell University.

Semadini Z, 1971, Banach Spaces of Continuous Functions, Vol. I, PWN, Warsaw.

Tzannes V., 1990, A Note On Maximally Resolvable Spaces, University of Patras, Internat. J. Math. & Math. Sci, Vol. 13, no. 3, 513–516.

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında İzmir'in Bornova ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Afyon'da Kadınana İlkokulu'nda ve orta öğrenimini Kocatepe Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Ege Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 1998 yılında mezun oldu. Aynı yıl evlendi ve Tunceli Hozat Mohaç İlköğretim Okulu'nda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaya başladı. 2000 yılında tayin olduğu İstanbul Tuzla Lisesinde üç buçuk sene çalıştıktan sonra altı ay Amerika Saint Louis eyaletinde bulundu. 2004 yılında memlekete dönüşünde İzmir Bornova Hatice Güzelcan Anadolu Lisesi'ne atanıp görevine devam ederken birçok bilimsel etkinliğe önderlik etmiş, bilgi yarışmaları düzenlemiş, Tubitak yarışmalarında birçok bilimsel projelere danışmanlık yapmış ve okul kapsamında matematik kulübü öğrenci ve öğretmenleri ile dört sayı "Matematik Dergisi" çıkartmıştır. 2007 Ekim ayından beri Seyit Şanlı Anadolu Teknik Lisesinde çalışmaya başlamıştır. 2005 yılından beri Ege Üniversitesi'nde yüksek lisans yapmaktadır.