

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

DÜŞÜK-BOYUTLU YİTİMLİ DİNAMİK
SİSTEMLERİN KAOS GEÇİŞ EŞİĞİNDE ENTROPİ
ÜRETİMİ VE İLK KOŞULLARA BAĞLILIĞI

Ahmet ÇELİKOĞLU
Fizik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu : 404.06.01
Sunuş Tarihi : 03/07/2006

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Uğur TIRNAKLI

Bornova - İZMİR

III

Sayın Ahmet ÇELİKOĞLU tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan “Düşük-Boyutlu Yitimli Dinamik Sistemlerin Kaos Geçiş Eşiğinde Entropi Üretimi Ve İlk Koşullara Bağlılığı” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş vetarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı :

.....

Raportör Üye:

.....

Üye :

.....

ÖZET

**DÜŞÜK-BOYUTLU YİTİMLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN KAOS
GEÇİŞ EŞİĞİNDE ENTROPİ ÜRETİMİ VE İLK KOŞULLARA
BAĞLILIĞI**

ÇELİKOĞLU, Ahmet

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Uğur TIRNAKLI

Haziran 2006, 38 sayfa

Bu tezde, z-lojistik map in kaos geçiş eşiğinde ilk koşullara bağlılık özellikleri ve entropi artış hızı araştırılmıştır. Kaotik sistemler için ($\lambda > 0$) Boltzman-Gibbs entropisinin artış hızının doğrusal olduğu ve sistemin ilk koşullara kuvvetlice duyarlı olduğu iyi bilinen durumlardır. Son yıllarda, çeşitli çalışmalar $\lambda = 0$ marjinal olduğu durumu ve geliştirilmiş entropi üzerine odaklanmıştır. Değişik z ve çevrimlerde z-lojistik map için kaos geçiş eşiğinde sistemin ilk koşullara zayıfça duyarlı olduğu ve geliştirilmiş entropi tanımları kullanılarak doğrusal entropi artışının marjinal durumlarında da ortaya çıktığı sayısal olarak gösterilmiştir.

Anahtar sözcükler: Doğrusal olmayan dinamik sistemler, geliştirilmiş termostatistik, geliştirilmiş entropiler

ABSTRACT

SENSITIVITY TO INITIAL CONDITIONS AND ENTROPY PRODUCTION AT THE EDGE OF CHAOS FOR LOW- DIMENSIONAL DISSIPATIVE MAPS

ÇELİKOĞLU, Ahmet

MSc in Physics

Supervisor: Doç. Dr. Uğur TIRNAKLI

July 2006, 38 pages

In this thesis, we study sensitivity to initial conditions and entropy increase rate for z -lojistik map at the edge of chaos. It is well known that, for chaotic systems ($\lambda > 0$) entropy increase is linear and the system is strongly sensitive to initial conditions. In recent years, various researches focus on the marginal case $\lambda = 0$ and generalization of the entropy. We numerically analyzed that for different z and cycles for z -lojistik map at the edge of chaos, the system is weakly sensitive to initial conditions and linear entropy increase arises in the marginal case if specific generalization of the entropy is used.

Keywords: Nonlinear dynamic systems, generalized thermostatic, generalized entropies.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince yardımlarını benden esirgemeyen, kıymetli görüşlerinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Uğur Tırnaklı'ya teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	V
ABSTRACT	VII
TEŞEKKÜR.....	IX
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	XI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XIII
ÇİZELGELER DİZİNİ	XV
 1.GİRİŞ	 1
 2.MAP HAKKINDA BİLGİ.....	 3
2.1 z-lojistik Map ve Biyolojik Populasyon Modeli	3
2.2 Sabit Noktalar ve Kaos	5
2.3 Üçlü Çevrim.....	13
2.4 Kaos ve Lyapunov Üsteli.....	15
 3.GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİLER.....	 17
3.1 Genelleştirilmiş Entropi Tanımları	17
3.2 Kolmogorov-Sinai Entropisi.....	21
3.3 İlk Koşullara Bağlılık ve Duyarlılık Fonksiyonu.....	23
3.4 Pesin Benzeri Eşitlik	26

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
4.KULLANILAN YÖNTEMLER VE SONUÇ	28
4.1 Yöntemler	28
4.2 Sonuç	34
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	39

XIII

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Kaotik bölgede değişik z değerleri için z -lojistik map	5
2.2 $z = 2$ ve $a=0.5$ için geometrik olarak sabit nokta tayini	7
2.3 $z=2$ ve $a=0.3$ için $f^{(2)}(x)$ grafiği	9
2.4 $z=2$ ve $a=0.8$ için $f^{(2)}(x)$ grafiği	10
2.5 $z = 2$ için dallanma ve Lyapunov üsteli grafikleri.....	12
2.6 Periyod-3 grafiği	13
2.7 Üçlü Pencere	14
4.1 $z=2$ çevrim 3 için (a) $\langle \log(\xi) \rangle$ ve (b) $\langle S(t) \rangle$ grafikleri.....	29
4.2 $z=3$ çevrim 4 için (a) $\langle \log(\xi) \rangle$ ve (b) $\langle S(t) \rangle$ grafikleri.....	30
4.3 $z=4$ çevrim 5 için (a) $\langle \log(\xi) \rangle$ ve (b) $\langle S(t) \rangle$ grafikleri.....	31
4.4 $z=4$ çevrim 2 için $\langle \log(\xi) \rangle$ grafiği	33

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1 Çalışmada kullanılan z-lojistik mapin tüm çevrimleri için a_c değerleri	32
Çizelge 4.2 Genelleştirilmiş logaritmalar için (i) yaklaşık α değerleri (ii) genelleştirilmiş Lyapunov üstelleri λ (iii) entropi artış oranı K	35

1. GİRİŞ

Kaos, kompleks sistemlerin davranışını tanımlamada kullanılan bir terimdir. Son yıllarda üzerinde fazla çalışılan bir alan olan kaos doğrusal olmayan davranışla ilintilidir. Bir sistemin zamana bağıllığı doğrusal değilse örneğin ivmesi, konumu, basıncı, denklemi doğrusal olmayan hale getiriyorsa sistem doğrusal değildir. Kaos, kompleks davranışlı sistemleri anlamamızda ve katagorize etmemizde bize teorik ve kavramsal olarak yeni yollar açar. Kaotik davranış evrenseldir ve doğada her yerde karşımıza çıkar. Örnekleme istersek mekanik salıncı, elektirik devreleri, lazer, kimyasal reaksiyonlar ve benzeri örnekler verilebilir. Pek çok sistem daha önceleri özellikle son üçyüz yılda doğrusala idealize edilerek incelenmiştir.

Periyodik hareketten kaosa giden yol daha önceleri pek çok şekilde çalışılmıştır. Peryodik bölgenin bitip kaotik bölgenin başladığı sınıra kaos geçiş eşiği denir. Kaotik ve periyodik bölgeyi ayırmak için Lyapunov üstelinden yararlanılır. Eğer Lyapunov üsteli negatif ise sistemin hareketi peryodiktir ve başlangıçta birbirine sonsuz yakın seçilen iki nokta birbirine giderek yaklaşır. Bu ilk koşullara kuvvetli duyarsızlık olarak ifade edilir. Fakat Lyapunov üsteli pozitif ise sistemin hareketi kaotiktir. Kaotik davranışta birbirine sonsuz yakın seçilen iki nokta giderek birbirinden ayrılır. Kaotik bölgede ilk koşullara kuvvetli bağıllık vardır. Doğada karşılaşılan pek çok kaotik sistem Lyapunov üstelinin sıfır olduğu kritik durumda bulunmaktadır. Dolayısıyla bu

durumdaki sistemlerin davranışlarını ortaya koyabilmek oldukça önemlidir. Son yıllardaki çalışmalar tüm yarılımlarla beraber kaos geçiş eşiğini de içeren Lyapunov üstelinin sıfır olduğu bölgeye yoğunlaştırılmıştır. Aynı şekilde bu tezde de Lyapunov üstelinin sıfır olduğu kaos geçiş eşiği incelenecektir. Bu incelemede ise düşük boyutlu bir map olan z-lojistik map kullanılacaktır.

Şu ana kadar kaos geçiş eşiğini incelemek için literatüre girmiş üç farklı yöntem vardır. Kısaca değinmek istersek; (i) ele alınan infleksiyon noktasında tek bir ilk koşuldan başlayarak sistemin zaman evrimini izlemek, (ii) sistemin faz uzayı içersinde rasgele alınan bir bölgeden bir çok ilk koşul seçilerek bunların zaman evrimini izlemek ve (iii) faz uzayı içinde rasgele alınan tek ilk koşullar kümesi üzerinden ortalama alarak sistemin zaman evrimine bakmaktır.

Bu projenin amacı, z-lojistik map için 1988 den beri bilinen Tsallis entropisi ve son yıllarda yeni ortaya atılmış iki parametrelili Kaniadakis, Abe ve Gamma entropilerini kullanarak entropi artış hızını araştırmak ve ilk koşullara zayıf bağıllık özelliklerini ortaya koymaktır. Kullanılan tüm entropi tanımları için, hata payı dahilinde, aynı sonucun elde edilip edilmediği ve Tsallis entropisi dışındaki entropilerin z-lojistik map için Pesin benzeri bir eşitlik sağlayıp sağlamadığına bakmaktır. Böylelikle bahsi geçen dört entropi için düşük boyutlu bu mapten elde edilen bilgiler doğrultusunda daha kompleks sistemler hakkında bilgi sahibi olmak amaçlanmıştır.

2 MAP HAKKINDA BİLGİ

2.1 z-lojistik Map ve Biyolojik Popülasyon Modeli

Biyolojik popülasyon modeli kaos teorisinin gelişmesinde önemli bir kilometre taşıdır. Mayıs 1976'da biyolog R.M. May bu ve benzeri modellerin şaşırtıcı davranışlarını inceleyen bir makale yayınladı (May,1976). Şubat 1978'de Mitchell Feigenbaum bu makalede bazı nümerik olarak hesaplanabilir evrensel nicelikler olduğunu gördü. Kendi ismi verilen bu nicelikler kaos çalışmalarının temel taşlarından oldu (Feigenbaum,1978). Biyolojik evrim modeli standart lojistik maple ifade edildi.

Elimizde aynı yıl doğan ve ölen sinekler olsun ve bu sineklerin yıllara göre popülasyonu incelensin. Gelecek yılki sinek sayısı bulunmak istenirse

$$N_1 = AN_0 \quad (2.1)$$

şeklinde basit bir ifade yazılabilir. Burada N_1 birinci yıl sonundaki sineklerin sayısı, N_0 başlangıçtaki sinek sayısı ve A ise çevre koşullarına bağlı bir parametredir. $A > 1$ ise popülasyon artar, $A < 1$ ise azalır. A sabit kaldıkça popülasyon Malthusian popülasyon patlamasına gider. Daha gerçekçi bir yaklaşımda bulunmak istenirse popülasyonu sınırlı hale getirilmelidir. Çünkü popülasyon çok artarsa yiyecek, su vb. sıkıntılar sonucu ölümler olacaktır. N nin büyük değerlerinde etkin olacak bir parametre daha eklenirse

$$N_1 = AN_0 - BN_0^2 \quad (2.2)$$

elde edilir. $B \ll A$ olacak şekilde B seçilirse N çok çok büyük olmadıkça ikinci terim önemli olmaz. Sonraki yıllarda

$$\begin{aligned} N_2 &= AN_1 - BN_1^2 \\ N_3 &= AN_2 - BN_2^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklinde devam eder. Burada $N_{\max}$ değeri için

$$N_{\max} = \frac{A}{B} \quad (2.4)$$

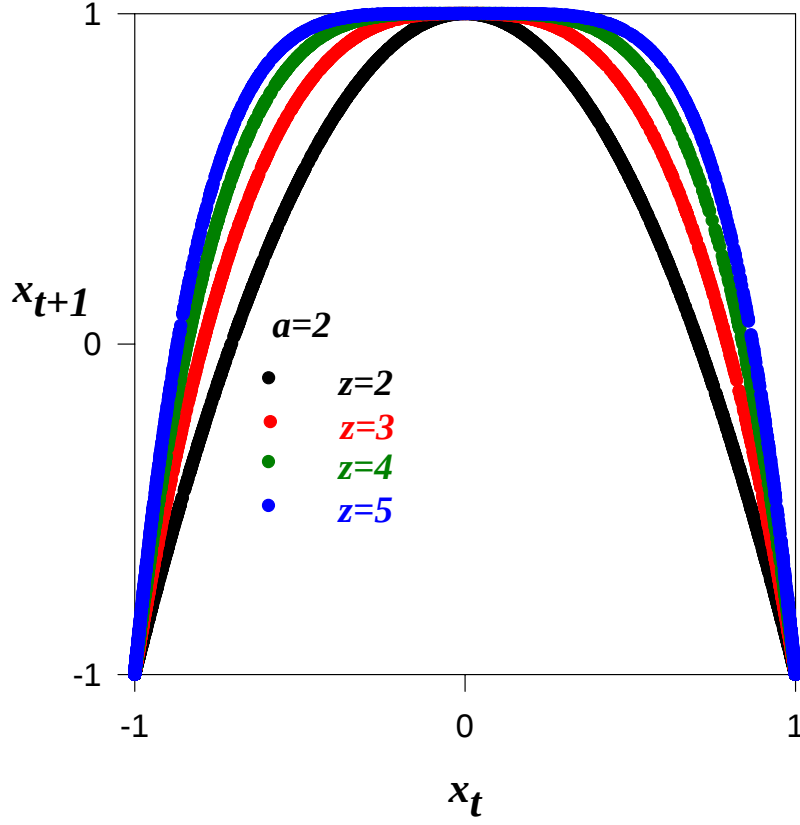
ifadesi yazılabilir. N_n nin $N_{\max}$ a oranına x_n dersek

$$f_A(x_n) = x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) \quad (2.5)$$

standart lojistik map elde edilmiş olur (Hilborn 1994). Kontrol parametresi $0 < A < 4$ aralığında tanımlıdır. x in tanım uzayı ise $0 \leq x \leq 1$ dir. Bu tarz kuadratik maplerin en genel hali ise tez konumuzda kullandığımız z-lojistik maptir. Map fonksiyonu

$$x_{t+1} = 1 - a|x_t|^z \quad (2.6)$$

şeklindedir. Denklem (2.6) deki fonksiyon $z = 2$ için standart lojistik mape eşittir. Burada x 'in tanım uzayı $|x_t| \leq 1$; $t = 0, 1, 2, \dots$ a parametresi $0 < a < 2$; z ise $z > 1$; şeklinde tanımlıdır. Görüldüğü gibi standart lojistik mapten z-lojistik mape geçerken sadece tanım aralıkları değişir. Şekil 2.1'de a parametresinin sabit bir değerine karşılık (kaotik bölge) değişik z değerleri için z-lojistik mapin değişimi gösterilmiştir. z büyüdükçe başlangıç, bitiş ve infleksiyon noktaları sabit kalmakla beraber eğrilerin genişliği artmaktadır.



Şekil 2.1 Kaotik bölgede değişik z değerleri için z -lojistik map grafiği

2.2 Sabit Noktalar ve Kaos

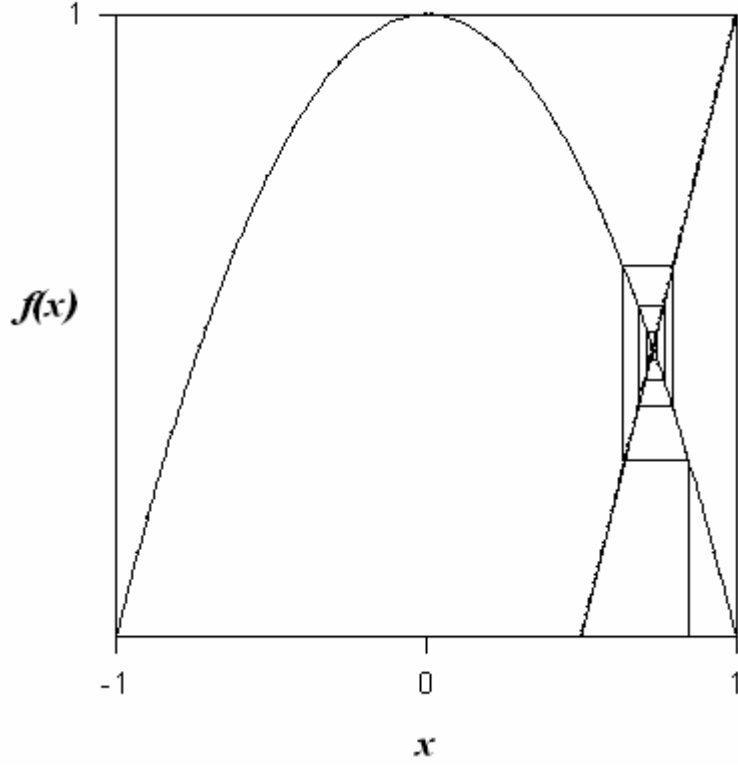
İterasyondan elde edilen x değerlerinin tanım uzayında oluşturduğu şekle yörünge denir. Bu yörüngeler üzerinde bazı noktalar diğerlerinden farklıdır. Bu noktalara sabit noktalar denir ve

$$x^* = f(x^*) \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer yukarıda verilen eşitlik sağlanmışsa yani tanım uzayından alınan bir x değeri itere edildikten sonra yine kendisine eşit oluyorsa bu x değerine sabit nokta denir ve x^* olarak gösterilir. Sabit noktalar a parametresine bağlı olarak değişirler. Sabit nokta geometrik bir yöntem kullanılarak basitçe bulununabilir. $f(x)$ 'in x 'e karşılık grafiği çizilir. Bu eğriye ek olarak bir $x = y$ doğrusu çizilir ve şekilde görüldüğü gibi herhangi bir x_0 noktasından başlanarak eğriye bir dik çizilir. Böylece $f(x_0)$ bulunur. Bu noktadan $x = y$ doğrusuna bir dik çizilerek $f(x_0)$ 'ın değeri bir sonraki x yani x_1 olarak alınır. Eğriye tekrar dik çizilip $f(x_1)$ değeri bulunur ve yine $y = x$ doğrusuna bir dik çizilerek bir sonraki x değeri bulunur. İşlem pek çok kez tekrarlanarak x^* değerine istenilen duyarlılıkta yaklaşılr. Şekil 2.2'de $a = 0.5$ ve $z = 2$ için sabit noktanın değeri $x=0.73205...$ dir.

Eğer n tane iterasyon sonra x_0 noktası x^* değerine yakınsıyorsa x^* çekici sabit nokta (kararlı sabit nokta ya da asimptotik kararlı nokta) diye adlandırılır. Eğer yörünge x^* dan uzaklaşıyorsa x^* itici sabit nokta veya kararsız sabit nokta adını alır. Matematiksel olarak sabit noktanın kararlılığı şöyle yazılır. Eğer $\left| \frac{df}{dx} \right|_* < 1$ ise x^* kararlı sabit nokta, $\left| \frac{df}{dx} \right|_* > 1$ ise x^* kararsız sabit nokta olarak isimlendirilir. x^* yakınındaki bir x_0 noktası için

$$x_1 = f(x_0) = f(x^*) + \frac{df}{dx}(x_0 - x^*) + \dots$$



Şekil 2.2 $z = 2$ ve $a = 0.5$ için geometrik olarak sabit nokta tayini

$$= x^* + \frac{df}{dx}(x_0 - x^*) + \dots$$

sadece birinci türevi alınıp x_t ile x^* arasındaki farka göre yeniden düzenlenirse

$$(x_t - x^*) = \frac{df}{dx}(x_{t-1} - x^*) \quad (2.8)$$

ifadesi elde edilir. Görüldüğü gibi eğer türevin değeri 1 den küçükse fark her iterasyonla giderek azalır ve kararlı nokta x^* değerine yaklaşır. Ama türevin değeri 1 den büyükse x_t ile x^* farkı giderek artar, x^* noktasından uzaklaşır. Bu nokta artık itici bir hale gelmiştir, dolayısıyla kararsız bir noktadır. a parametresinin belirli bir değerine kadar türev 1 den küçüktür ve iterasyon sonucu her a için bir tek noktaya yaklaşılır (Hilborn 1994).

Lojistik map için $a = 0.75$ değerine kadar her a için tek bir değere yakınsar daha sonra bu tek değer kararsız hale gelir ve yörünge ikiye yarılır, periyod-çiftlenmesi meydana gelir. $a = 0.75$ değerinde $x_1^* = 0.70763...$ ve $x_2^* = 0.62444...$ noktaları arasında salınım başlar. Bu iki nokta ikili çevrimin çekici sabit noktalarıdır. Bu matematiksel olarak

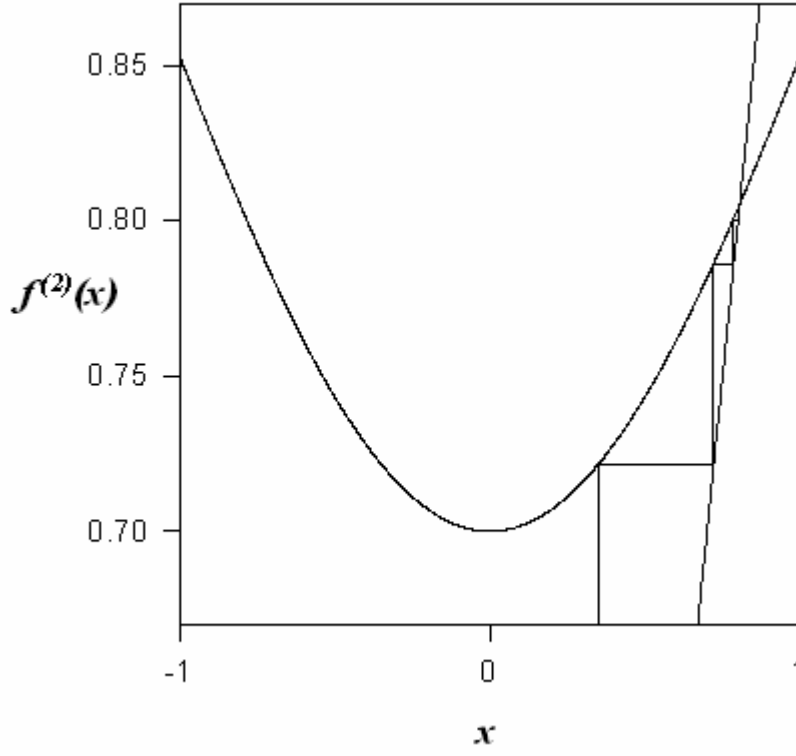
$$\begin{aligned} x_2^* &= f(x_1^*) \\ x_1^* &= f(x_2^*) \end{aligned} \quad (2.9)$$

şöyle gösterilebilir. Daha iyi anlamak için,

$$f^2(x) = f(f(x)) \quad (2.10)$$

şeklindeki f 'nin ikinci iterasyonuna bakalım. Bir x değerine karşılık gelen $f(x)$ değerini tekrar aynı fonksiyona x değeri olarak koyarak $f^{(2)}(x)$ bulunur. Şekil 2.3'de gösterildiği gibi $a < 0.75$ ise $f^{(2)}(x)$ grafiğinde tek bir sabit nokta bulunur. a değeri 0.75 in hemen

üzerindeyken iki tane sabit nokta arasında salınım yaptığı Şekil 2.4'ten görülebilir.



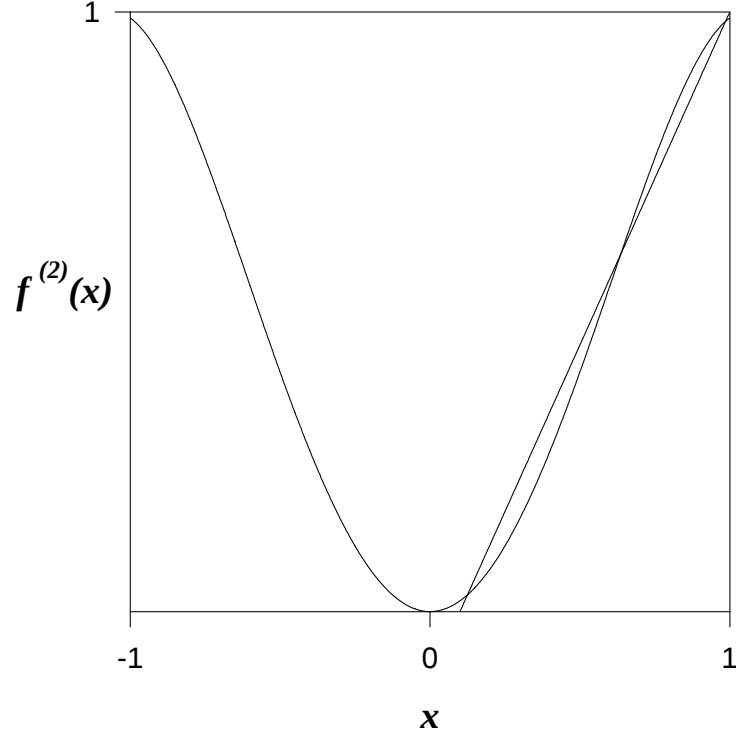
Şekil 2.3 $z=2$ ve $a=0.3$ için $f^{(2)}(x)$ grafiği

Bu iki çevrim noktası x_1^* ve x_2^* ikinci iterasyonun sabit noktalarıdır.

$$x_1^* = f^{(2)}(x_1^*)$$

$$x_2^* = f^{(2)}(x_2^*) \quad (2.11)$$

Denklem (2.11)'den de görüldüğü gibi ikinci iterasyonun bu iki sabit noktası kararlı sabit noktalardır. Her iki çevrimde bir kendilerini tekrar ederler. a parametresi büyüdükçe belirli bir değere kadar bu noktaların



Şekil 2.4 $z=2$ ve $a=0.9$ için $f^{(2)}(x)$ grafiği

değeri değişir fakat davranış aynı kalır. Tıpkı $a \leq 0.75$ durumunda tek bir sabit noktaya yaklaşp bu değer üzerinde yarıma olduğu gibi a nın belirli bir değerinden sonra bu iki noktada kararsız hale gelir ve yarırlrlar. Artık $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ şeklinde dört tane sabit nokta varolur. Bu durumu

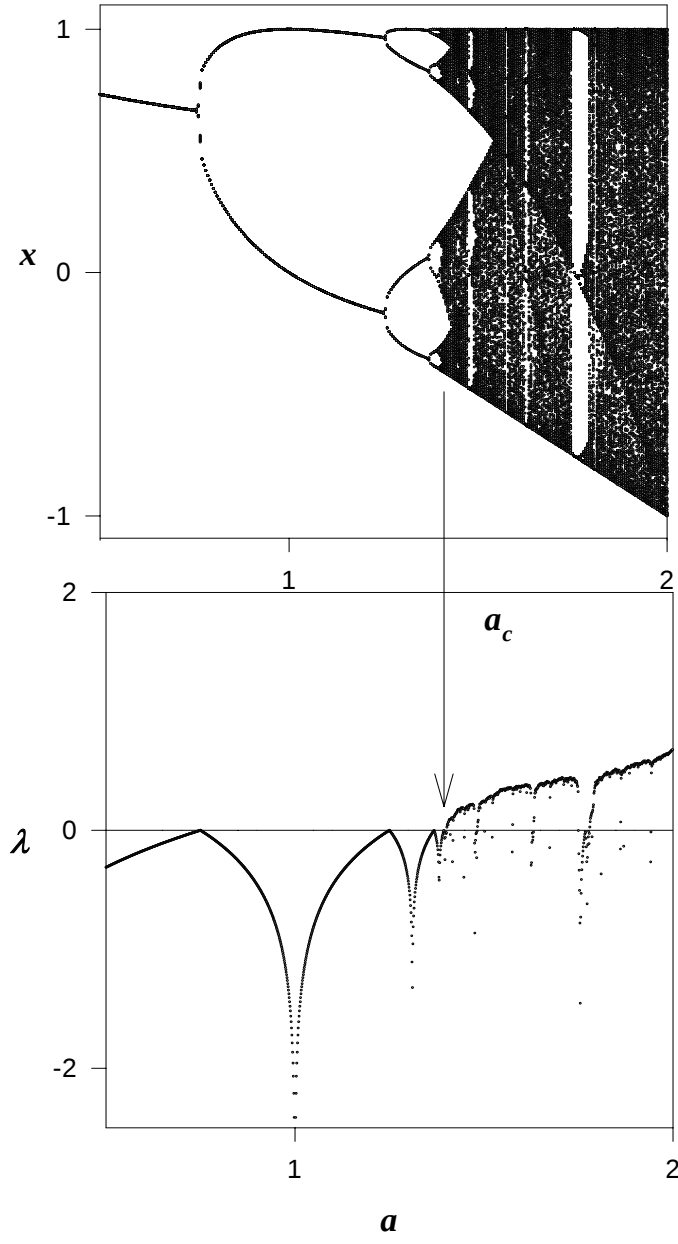
kavramak için $f^{(4)}(x)$ yani dördüncü iterasyona bakılır. Tıpkı periyod-2 de olduğu gibi periyod-4 de dördüncü iterasyonda kendini üretir.

$$\begin{aligned}x_1^* &= f^{(4)}(x_1^*) \\x_2^* &= f^{(4)}(x_2^*) \\x_3^* &= f^{(4)}(x_1^*) \\x_4^* &= f^{(4)}(x_2^*)\end{aligned}\tag{2.12}$$

Bu durum periyod-8 yarılmasına kadar devam eder ve türev -1 olduğunda kararsız hale gelip yarılr ve periyod-8 olur. $f^{(n)}$, n . iterasyonu için

$$f^{(n)}(x) = f(f(f(\dots f(x)))\tag{2.13}$$

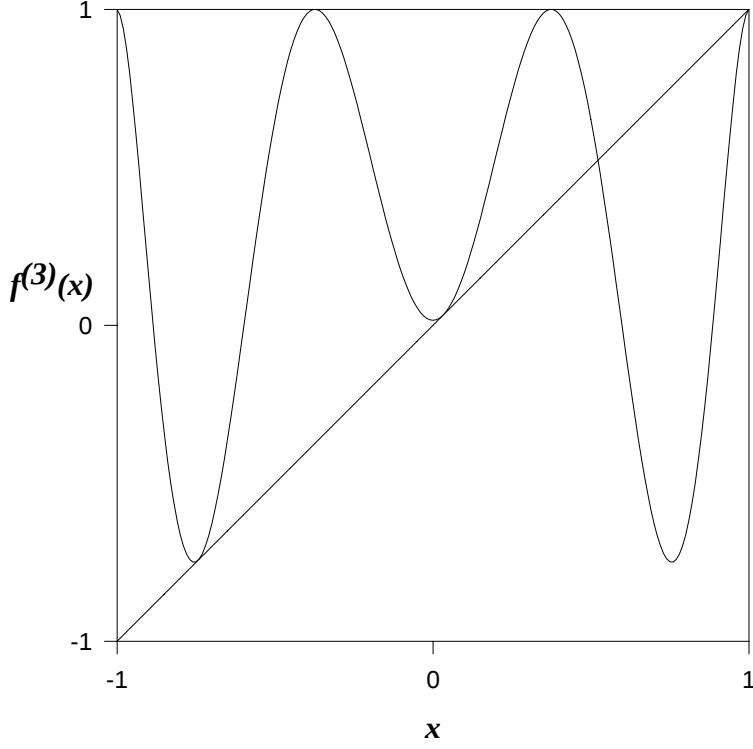
şeklinde olur. n . inci iterasyon için n tane sabit nokta vardır. $f(x)$ 'in sabit noktası x^* , $f^{(n)}(x)$ ' in de sabit noktasıdır. Eğer $f(x)$ 'in sabit noktası x^* kararlı ise $f^{(n)}(x)$ için de kararlıdır. a arttıkça sabit noktaların türevleri -1 olur ve yarılmalar sonsuza dek devam eder. a nın kritik değeri denilen bir değrinden sonra periyodik tekrarlar ortadan kalkar ve sistem kaosa gider. Bunu Şekil 2.5'teki dallanma grafiğinden görebiliriz. Lyapunov ve dallanma grafiklerine dikkatli bakılırsa yarılmaların ve kaos geçişinin Lyapunov üstelinin sıfır değerinde olduğu görülebilir (Hilborn, 1994).



Şekil 2.5 $z = 2$ için dallanma ve Lyapunov üsteli grafikleri

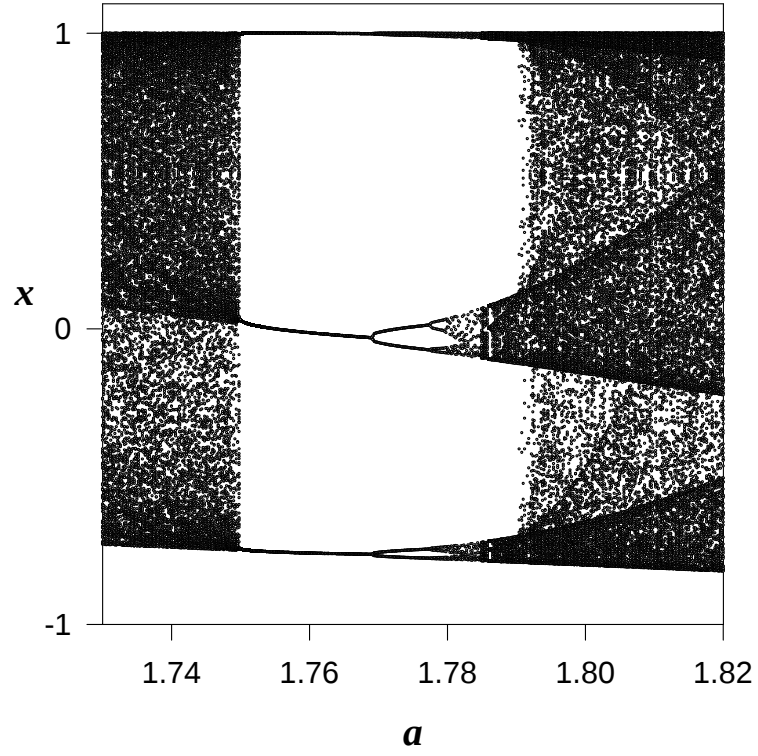
2.3 Üçlü Çevrim

İkili çevrim için kaotik olan bölgede a artmaya devam ettikçe değişik çevrimler görülmeye devam eder. Bir tane üçlü, iki



Şekil 2.6 Periyod-3 grafiği

tane dördlü, üç tane beşli vb. çevrimler karşımıza çıkar. Bunları açıklamak içinde yukarıdaki yöntem izlenir. Üçlü çevrim için a nın belirli



Şekil 2.7 Üçlü Pencere

bir büyüklüğünde, Şekil 2.7’de görüldüğü gibi kaostan x_1^*, x_2^*, x_3^* sabit noktalarına geçiş olur. Bu noktalar her üç çevrimde bir kendilerini tekrarlarlar.

$$f^{(3)}(x_1^*) = (x_1^*)$$

$$f^{(3)}(x_2^*) = (x_2^*)$$

$$f^{(3)}(x_3^*) = (x_3^*) \quad (2.14)$$

Yine türevlerinin -1 olduğu kritik değerlerde bu üç nokta altı noktaya yarılarak periyod-çiftlenmesi yapar. Bu durum ikili çevrimde bahsedilen şekilde periyod-6, periyod-12 vb. gibi artarak tekrar kaosa gider. Kaosa gidiş Şekil 2.7’de görülmektedir (Mullin, 1993).

2.4 Kaos ve Lyapunov Üsteli

Kaosun temel görünümlerinden biri yakın iki yörüngenin zamanla birbirinden ayrılmasıdır. x_0 gibi bir nokta alalım ve ε kadar yanında da $x_0 + \varepsilon$ noktasını alıp map içinde n defa itere edelim. Bu iki nokta arasındaki farkı şöyle yazabiliriz.

$$d_n = \left| f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0) \right| \quad (2.15)$$

Eğer davranış kaotikse fark üstel olarak büyüyecektir:

$$\frac{d_n}{\varepsilon} = \frac{\left| f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0) \right|}{\varepsilon} = e^{\lambda n} \quad (2.16)$$

Burada λ ’ yı yalnız bırakırsak,

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} \right) \quad (2.17)$$

bulunur. $\varepsilon \rightarrow 0$ a durumunda türevin tanımından yararlanarak ve $f^{(n)}$ için zincir kuralını da kullanarak λ yı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln(|f'(x_0)| |f'(x_1)| \dots |f'(x_n)|) \quad (2.18)$$

Çarpımları toplam halinde yazarak

$$\lambda = \frac{1}{n} (\ln|f'(x_0)| + \ln|f'(x_1)| + \dots + \ln|f'(x_n)|) \quad (2.19)$$

sonucu elde edilir. Görüldüğü gibi Lyapunov üstelinin pozitif çıkması türevin birden büyük olması demektir ve birbirine yakın iki noktanın birbirinden uzaklaştığı anlamına gelir (Hilborn, 1994).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİLER

3.1 Genelleştirilmiş Entropi Tanımları

1865'te Clausius entropiyi klasik termodinamik çerçevesinde ortaya koydu. Bundan birkaç yıl sonra o yıllarda genç bir fizikçi olan Boltzmann'ın ve daha sonrada Gibbs'in katkılarıyla entropi mikroskopik niceliklere dayalı bir şekilde ifade edildi. Böylece makroskopik ve mikroskopik dünyalar arasında bir bağlantı kurulmuş oldu. Boltzmann-Gibbs entropisi denilen bu entropi termik denge halindeki sistemlerin faz uzayında her hali eşit olasılıkla işgal ettikleri prensibine dayanır. Bir sistemin entropisi faz uzayında girilebilir durumların sayısı cinsinden ifade edilebilir. Bu girilebilir durumların işgal edilme olasılıkları eşit değilse entropi ,

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad (3.1)$$

olarak ifade edilebilir. Burada k Boltzmann sabiti, W girilebilir durumların sayısı, p_i ise i . durumun işgal edilme olasılığıdır. Eğer her hangi bir mikrohal işgal edilmemişse entropiye katkısı sıfır olur. Eğer bir sistemin N tane alt sistemden oluştuğunu düşünürsek ve bu alt sistemlerin olasılıkları eşitse $S_{BG} \propto N.S_{BG}(1)$ orantısı vardır. Bu alt sistemlerin etkileşimleri kısa erimli ise $S_{BG}(N) \propto N$ şeklinde basite indirgenebilir. Fakat dengede olmayan sistemler için Boltzmann-Gibbs entropisi yetersiz kalır. Tam bu noktada yine mikroskopik olasılık

terimleri içeren başka bir entropi ifadesini dengede olmayan sistemler için türetme gereksinimi ortaya çıkar. Böyle bir yaklaşım 1988'de Tsallis tarafından ilk kez ortaya kondu (Tsallis, 1988). Boltzmann-Gibbs entropisini içinde özel bir durum olarak içeren entropi tanımı

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} \quad (3.2)$$

şeklindedir. Tsallis entropisi ya da q entropi diye adlandırılır. Burada q nonekstensivlik parametresidir. A ve B gibi iki alt sistem için $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B, \forall (ij)$ ise sistemin toplam entropi

$$S_q(A+B)/k = [S_q(A)/k] + [S_q(B)/k] + (1-q)[S_q(A)/k][S_q(B)/k] \quad (3.3)$$

şeklinde nonekstensive olarak ifade edilir. q parametresinin özel bir halinde entropi artışı doğrusal olur. Bu özel halde q, q^* olarak gösterilir ve bu halde toplam entropi için

$$S_{q^*}(A+B) = S_{q^*}(A) + S_{q^*}(B)$$

ifadesi yazılabilir (Gell-Mann and Tsallis, 2004). Elbette Tsallis entropisinden başka entropilerde ortaya konulabilir. Bunlardan bazıları termostatistikte kullanılabilir, bazıları kullanılamaz. Son yıllarda ortaya konan Kaniadakis entropisi, Abe entropisi ve Gamma entropisi

(Kaniadakis et al, 2005; Lissa et al, 2005; Tonelli et al, 2006) kullanılabilir olanlardandır. Bu entropilerin ortak özellikleri iç bükeylik (sistemin termodinamik kararlılığı), Lesche kararlılığı (deneysel güvenilirlik ve deney sonuçlarının yeniden üretilebilmesi), ekstensivlik, her zaman adımımda üretilen entropinin sonlu olmasıdır.

Genelleştirilmiş herhangi bir entropi ifadesi, Boltzmann-Gibbs entropisi tanımındaki standard logaritma yerine,

$$\ln(x) \equiv \frac{x^\alpha - x^{-\beta}}{\alpha + \beta} \quad (3.4)$$

şeklindeki genelleştirilmiş logaritma tanımı kullanılarak ifade edilebilir, burada α ve β iki parametre, x ise fonksiyonun argümanıdır. Bu logaritma tanımı altında genelleştirilmiş entropilerin en genel formu

$$S(t) \equiv \left\langle \sum_{i=1}^w p_i(t) \ln \left(\frac{1}{p_i(t)} \right) \right\rangle \equiv \left\langle \sum_{i=1}^w \frac{p_i^{1-\alpha}(t) - p_i^{1+\beta}(t)}{\alpha + \beta} \right\rangle \quad (3.5)$$

şeklinde verilir (Coraddu et al, 2006). W faz uzayındaki girilebilir durumların sayısıdır. α ve β nın aldığı değerlere göre çeşitli entropi tanımları yapılabilir. Bu entropi tanımları ve genelleştirilmiş logaritmaları aşağıdaki gibi verilebilir.

Tsallis logaritması için; $\alpha = 1 - q$ ve $\beta = 0$ olmak üzere

$$\tilde{\ln}(x) = \ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (3.6)$$

kullanıldığında, Tsallis entropisi

$$S_q = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q(t) - 1}{1 - q} \right\rangle \quad (3.7)$$

olarak yazılabilir. Benzer olarak, Abe logaritması için; $\alpha = \frac{1-q_A}{q_A}$ ve

$\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha} = 1 - q_A$ alınarak

$$\tilde{\ln}(x) = \ln_A(x) \equiv \frac{x^{\frac{1-q_A}{q_A}} - x^{q_A-1}}{\frac{1-q_A}{q_A} + 1 - q_A} \quad (3.8)$$

verilirse, Abe entropisi

$$S_A = \left\langle \sum_i^W \frac{p_i^{\frac{2q_A-1}{q_A}}(t) - p_i^{2-q_A}(t)}{\frac{1-q_A}{q_A} + 1 - q_A} \right\rangle \quad (3.9)$$

olarak bulunur. Kaniadakis logaritması için; $\alpha = \beta = \kappa$ alarak

$$\tilde{\ln}(x) = \ln_{\kappa}(x) \equiv \frac{x^{\kappa} - x^{-\kappa}}{2\kappa} \quad (3.10)$$

elde edilir. Buradan Kaniadakis entropisi

$$S_{\kappa} = \left\langle \sum_i^w \frac{p_i^{1-\kappa}(t) - p_i^{1+\kappa}(t)}{2\kappa} \right\rangle \quad (3.11)$$

şeklinde bulunur. Son olarak, Gamma logaritması için; $\alpha = 2\beta = 2\gamma$ değerleri gözönüne alınarak

$$\tilde{\ln}(x) = \ln_{\gamma}(x) \equiv \frac{x^{2\gamma} - x^{-\gamma}}{3\gamma} \quad (3.12)$$

bulunur ve böylece Gamma entropisi

$$S_{\gamma} = \left\langle \sum_i^w \frac{p_i^{1-2\gamma}(t) - p_i^{1+\gamma}(t)}{3\gamma} \right\rangle \quad (3.13)$$

elde edilir.

3.2 Kolmogorov- Sinai Entropisi

Bizim ilgilendiğimiz aslında entropinin değeri değil onun değişimidir. Yani birim zamanda entropi artışıdır. Düzenli hareket eden

bir sistemin entropisi sıfır değildir fakat sistem değişirken entropisi sabit kalır. Entropinin değişimini Kolmogorov-Sinai entropisi ile karakterize edilir. Kolmogorov-Sinai entropisi sistem genişlerken entropinin zamanla değişim oranını tanımlar. Kolmogorov-Sinai entropisi sistem n . adımdan $n+1$. adıma evrilirken

$$K_n = \frac{1}{\tau} (S_{n+1} - S_n) \quad (3.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada K_n , $t = n\tau$ dan $t = (n+1)\tau$ ya giderken entropi değişim oranıdır. İfade N adım üzerinden ortalama olarak yazılmak istenirse

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (S_{n+1} - S_n)$$

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} [S_N - S_0] \quad (3.15)$$

ifadesi elde edilir. İyi bir ölçüm için zaman adım aralığı sıfıra ($\tau \rightarrow 0$) ve yine faz uzayındaki hücrelerin genişliği sıfıra ($L \rightarrow 0$) gitmelidir. Hem faz uzayı hem de zaman aralığı olabildiğince iyi parçalanmalıdır. Buna dayanarak Kolmogorov-Sinai entropisi yeniden yazılırsa

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} [S_N - S_0] \quad (3.16)$$

ifadesi ortaya çıkar. Bizim çalışmamızda da olduğu gibi eğer tüm ilk koşullar başlangıçta aynı hücrede alınırsa $S_0 = 0$ olur. İfade

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S}{t} \quad (3.17)$$

halini alır (Hilborn, 1994). Benzer şekilde bir ifadenin genelleştirilmiş entropiler kullanılarak yazılabileceği ve standard Lyapunov üstelinin sıfır olduğu marjinal durumlar için kullanılabileceği ilk kez 1997 yılında önerilmiş ve Tsallis entropisi için genelleştirilmiştir (Tsallis et al, 1997). Bu tip bir genelleştirme için Tsallis entropisi dışında S_A , S_K , S_γ entropileri de kullanılabilir. Denklem (3.7) ile verilen q -entropiyi kullanarak ve

$$S_q = \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (3.18)$$

olduğuna dikkat ederek, Kolmogorov-Sinai entropisinin Tsallis entropisi için genelleştirilmiş ifadesi

$$K_q = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \frac{[W(N)]^{(1-q)} - 1}{1 - q} \quad (3.19)$$

şeklinde verilir (Tsallis et al, 1997). Aynı yolla Kaniadakis, Gamma ve Abe entropileri için de Kolmogorov-Sinai entropisi genelleştirilmiş olarak yazılabilir.

3.3 İlk Koşullara Bağlılık ve Duyarlılık Fonksiyonu

Kaosun en belirgin özelliklerinden birisi ilk koşullara olan hassas bağılılığıdır. Bu bağılılık Lyapunov üsteli ile gösterilir. Bir boyutlu bir map ailesinin (standart lojistik, z-lojistik vb.) faz uzayından birbirine çok yakın iki x ve x' ilk koşulları seçilir ve bu noktaların map içinde t zaman (n tane iterasyon) boyunca evrimi izlenirse iki nokta arasındaki fark için;

$$\Delta x(t) \sim \Delta x(0) \exp(\lambda t) \quad (\Delta x(0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty) \quad (3.20)$$

yazılabilir, burada $\Delta x(0)$ $t = 0$ anında iki nokta arasındaki fark ve $\Delta x(t)$ ise t anındaki farktır. Bu ifadeden hareketle duyarlılık fonksiyonu

$$\xi(t) = \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)} \quad (3.21)$$

şeklinde ifade edilir. Duyarlılık fonksiyonu diferansiyel olarak

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi \quad (3.22)$$

şeklinde ifade edilirse bu denklemin çözümü

$$\xi = e^{\lambda t} \quad (3.23)$$

olur. Eğer $\lambda > 0$ ise sistem kaotik bölgededir. Görüldüğü gibi başlangıçta birbirlerine yakın seçilen iki nokta arasındaki fark giderek büyür, noktalar ıraksarlar. Burada ilk koşullara kuvvetli şekilde duyarlılık söz konusudur. Eğer $\lambda < 0$ ise dinamik sistem periyodik bölgededir. Denklem (3.23)'den görülebileceği gibi birbirine çok yakın seçilen iki nokta her t adımımda üstel olarak birbirlerine yaklaşırlar. İlk koşullara kuvvetli şekilde duyarsızlık söz konusudur. Bu iki bölge bugüne kadar çok iyi çalışılmış ve bilinen hallerdir. Fakat $\lambda = 0$ hali son yıllarda incelenen bir durumdur. Tüm periyod çiftlenmeleri, tanjant çatallanmaları ve kaos geçiş eşiği noktalarında $\lambda = 0$ olur. Fakat duyarlılık fonksiyonu $\lambda = 0$ olduğunda üstel ifadeye uymaz. Bunun yerine yeni duyarlılığı ifade edecek yeni bir fonksiyona ihtiyaç vardır. Duyarlılık fonksiyonu için daha genel bir diferansiyel ifade

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_q \xi^q \quad (3.24)$$

şeklinde yazılabilir, burada λ_q q -genelleştirilmiş Lyapunov üstelidir. Bu denklemin çözümü

$$\xi = \left[1 + (1-q)\lambda_q t \right]^{\frac{1}{1-q}} \equiv e_q^{\lambda_q t} \quad (3.25)$$

şeklindedir. Bu kuvvet yasası fonksiyonu $q=1$ de standart üstel ifadeye gider. Yine burada da eğer $\lambda_q > 0$ ve $q < 1$ ise başlangıçta seçilen iki

nokta arasındaki uzaklık daha yavaş bir şekilde artar yani ilk koşullara zayıf duyarlılık söz konusudur. Aynı şekilde $\lambda_q < 0$ ve $q > 1$ olursa başlangıçta seçtiğimiz iki nokta arasındaki fark yavaş bir biçimde kapanır, noktalar birbirlerine yaklaşırlar. İlk koşullara zayıf duyarsızlık gözlenir (Tirnakli et al, 2001; Tirnakli et al, 1999; Tirnakli et al, 2002; Ananos and Tsallis, 2004; Tirnakli, 2002; Boldovin and Robledo, 2002; Gell-Mann, 2004; Tsallis, 2004).

3.4 Pesin Benzeri Eşitlik

Birbirine yakın alınan iki noktanın birbirlerinden uzaklaşmalarının üstel olarak arttığından bahsetmiş ve bunu Denklem (3.20) ile ifade etmiştik. Buradan hareketle faz uzayında bir hücreye konulmuş N tane noktanın yayılmaları dolayısıyla hücrelerin işgal edilme hızında üstel arttığını söyleyebiliriz. $W(N)$, t zaman sonra işgal edilmiş hücre sayısı olmak üzere,

$$W(N) = W(1)e^{\lambda N t} \quad (3.26)$$

eşitliği yazılabilir. Kolmogorov-Sinai entropisi ise

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N \tau} \ln W(N) \quad (3.27)$$

olarak ifade edilir. Denklem (3.26) , Denklem (3.27)'de yerine yazılırsa

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \ln W(1) e^{\lambda N \tau} \quad (3.28)$$

elde edilir. Bu ifadeden çok önemli bir eşitliğe ulaşılır. Farklı iki nicelik arasında bağlantı kuran bu eşitliğe Pesin eşitliği denir. $\lambda > 0$ iken $K = \lambda$ (diğer durumlarda $K = 0$) dir. $\lambda = 0$ olduğu ve bizimde incelediğimiz marjinal durumda ise genelleştirilmiş entropiler cinsinden K-S entropiyi ve duyarlılık fonksiyonunu ifade edersek benzer bir eşitliğin olduğunu görürüz. İşgal edilmiş hücre sayısı

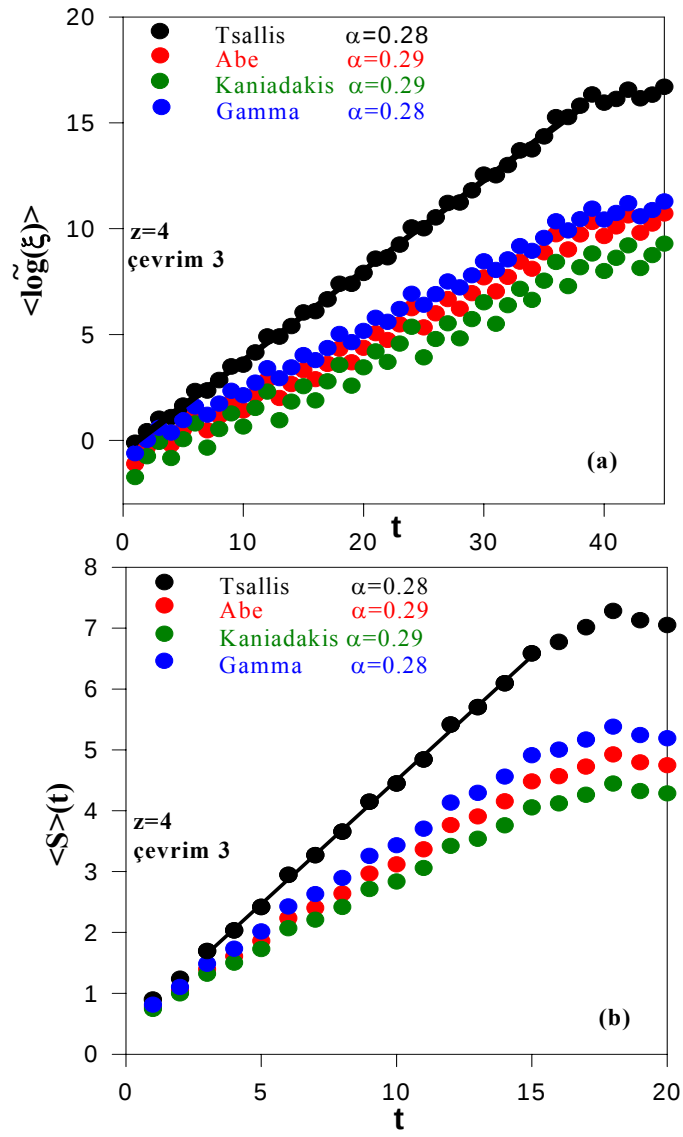
$$W(N) = W(1) \left[1 + (1-q)\lambda_q N \tau \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.31)$$

şeklinde bir kuvvet yasası olarak ifade edilir. Bu ifade Denklem (3.18)'de yerine yazılarak $K_q = \lambda_q$ şeklinde Pesin benzeri bir eşitlik ortaya çıkar. Buna benzer eşitlikler diğer genelleştirmiş entropiler olan Abe, Kaniadakis, Gamma entropilerinde de söz konusudur.

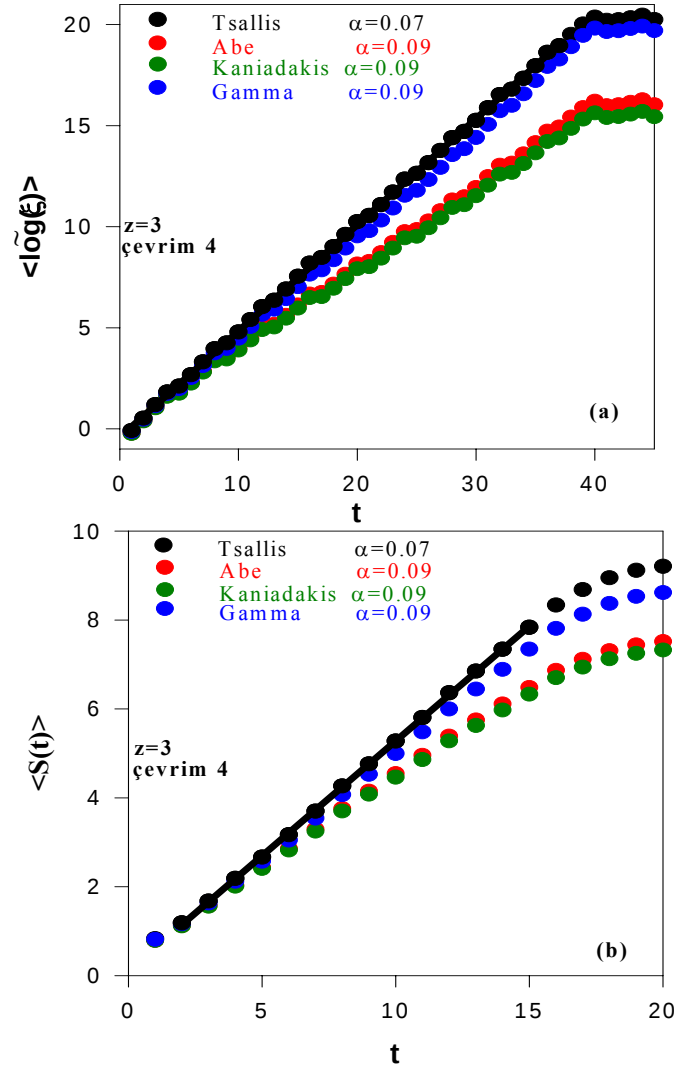
4. KULLANILAN YÖNTEMLER VE SONUÇ

4.1 Yöntemler

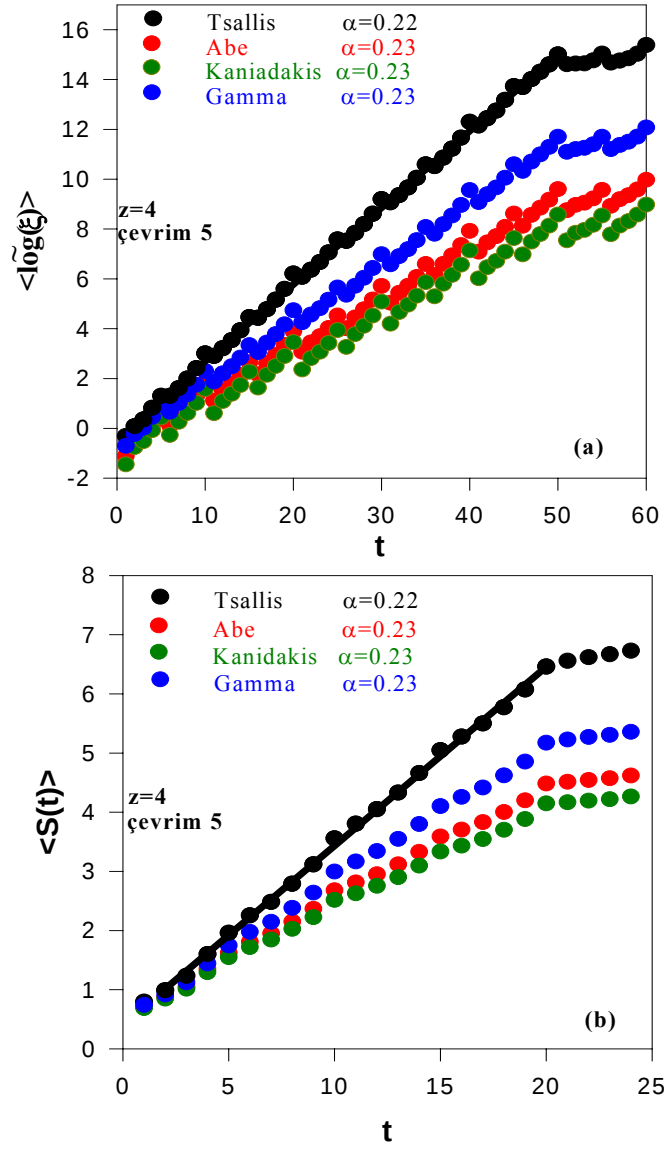
İlk olarak duyarlılık fonksiyonu kullanılmıştır. Bu fonksiyonun tanımı Denklem (3.21)'de verilmiştir. Başlangıçta faz uzayı içerisinde rasgele bir ilk koşul belirlendi ve hemen yakınına bir tane daha ilk koşul alınarak birbirine çok yakın iki nokta elde edildi. Öyleki çalışmamızda bu iki ilk koşul arasındaki fark $\Delta x(0) = 10^{-12}$ olarak alındı. Bu iki ilk koşul map içinde itere edilip her zaman adımında aralarındaki $\Delta x(t)$ farkı hesaplandı. Bu farktan yararlanarak duyarlılık fonksiyonu hesaplandı. Bu değer genelleştirilmiş logaritmalarda (Denklem (3.6), Denklem (3.8), Denklem (3.10), Denklem (3.12)) yerine koyuldu ve her logaritma için $\ln(\xi)$ ifadeleri hesaplandı. Bu işlem pek çok kez tekrarlanarak ortalama alındı. 4×10^7 deney üzerinden alınan bu ortalama $\langle \ln(\xi)(t) \rangle$ ifadesinin zamana bağlı grafiğinden en doğrusal artışın olduğu α_{sen}^{av} bulundu. Burada *sen* duyarlılığı, *av* ise ortalamayı göstermektedir. Bu doğrusal artışın olduğu α_{sen}^{av} eğrisinin eğiminden hangi genelleştirilmiş logaritma ile çalışılıyorsa o logaritmaya ait genelleştirilmiş Lyapunov üsteli bulundu. Bu yöntemle z-lojistik map için değişik z değerleri ve bu değerlerin değişik çevrimleri çalışıldı. Bu değerler ve bunlara ait kritik değerler Çizelge 4.1 de verilmiştir. Bazı sonuçların grafiği Şekil 4.1(a), 4.2(a), 4.3(a) da verilmiştir.



Şekil 4.1 $z=2$ çevrim 3 için (a) $\langle \log(\xi) \rangle$ ve (b) $\langle S(t) \rangle$ grafikleri



Şekil 4.2 $z=3$ çevrim 4 için (a) $\langle \log(\xi) \rangle$ ve (b) $\langle S(t) \rangle$ grafikleri



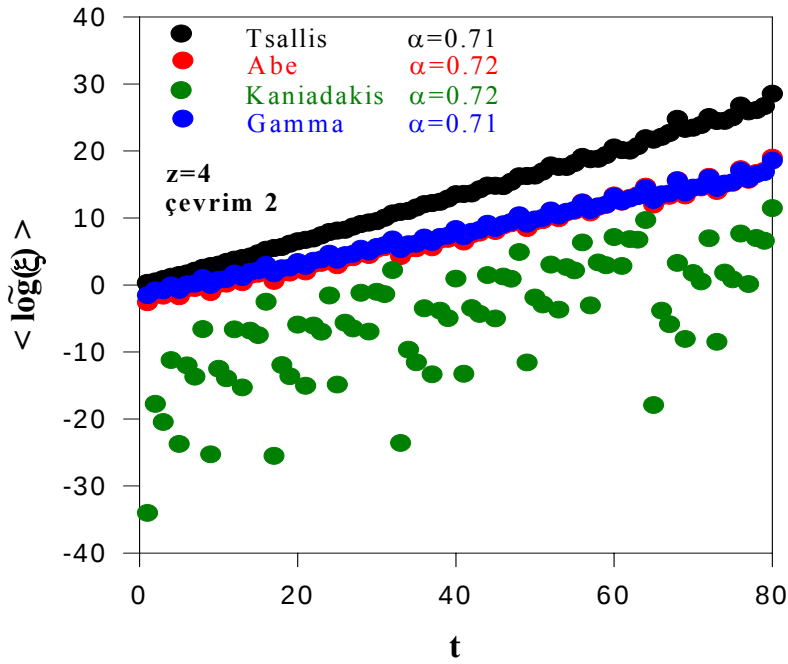
Şekil 4.3 $z=4$ çevrim 5 için (a) $\langle \log(\xi) \rangle$ ve (b) $\langle S(t) \rangle$ grafikleri

z	a_c			
	çevrim2	çevrim3	çevrim4	çevrim5
1.75	1.35506...	1.74730...	1.92764...	1.60749...
2	1.40115...	1.77981...	1.94217...	1.63101...
2.5	1.47054...	1.82886...	1.96144...	1.66954...
3	1.52187...	1.86299...	1.97302...	1.69944...
4	1.59490...	1.90597...	1.98524...	1.74282...

Çizelge 4.1 Çalışmada kullanılan z-lojistik mapin tüm çevrimleri için a_c değerleri.

İkinci olarak entropinin zamanla artışı ele alındı. Bunun için faz uzayı $W = 10^5$ eşit hücreye bölündü. Bu hücrelerden bir tanesinin içine $N = 10 \times W = 10^6$ tane ilk koşul koyuldu. Mapin evrilmesi ile bu ilk koşullar faz uzayına yayılmaya ve hücreleri işgal etmeye başladılar. Her zaman adımında her bir hücrede kaç tane nokta olduğu sayılarak hücrelerin işgal edilme olasılıkları hesaplandı. Bu olasılıklar yardımıyla genelleştirilmiş entropiler ve bunlara bağlı K-S entropisi hesaplandı. Bu süreç pek çok kez tekrarlanıp bir ortalama alındı. Biz bu çalışmada $W/2 = 5 \times 10^4$ tane deney yaptık ve ilk koşullarımızı faz uzayının başlangıcından yarısına kadar olan tüm hücrelere sırası ile koyuldu. $\langle S(t) \rangle$ nin t ye bağlı grafiğinde (Şekil 4.1(b), 4.2(b), 4.3(b)) daha önce duyarlılık fonksiyonu yardımı ile bulduğumuz α_{sen}^{av} değerlerini kullanıldı. Her entropi için bu eğrinin eğimi olan entropinin artış oranı K bulundu. Çizelge 4.2 den de görüldüğü gibi hata sınırı dahilinde her z ve çevrim için bulunan K ve λ değerleri eşit çıkmıştır.

z nin büyüyen değerlerinde flüktüasyonların baskın hale gelmesi dolayısıyla, özellikle Kaniadakis entropisi için, $z = 3$ ve $z = 4$ için çevrim-2 de herhangi bir değer hesaplanamamıştır. Buna hasaplanan ξ değerlerinin birden küçük olması durumunda genelleştirilmiş logaritmayı negatif yapması yol açmıştır. Kaniadakis dışındaki logaritmalarda sıfıra yakın kalan bu negatiflik, Kaniadakis logaritmasında baskın hala gelmekte ve anlamlı bir sonuc ortaya koymayı engellemektedir. Bu durum Şekil 4.4'te görülmektedir(Celikoglu and Tirnakli, in press).



Şekil 4.4 $z=4$ çevrim 2 için $\langle \log(\xi) \rangle$ grafiği

4.2 Sonuç

Daha önce pek çok z ve çevrim için çalışılmış Tsallis entropisi ve diğer üç genelleştirilmiş entropi arasında bir benzerlik olup olmadığı $z = 2$ nin ikili çevrimi için ortaya konulmuştu.(Coraddu at al,2006). Bu tez de z -lojistik mapin daha geniş bir yelpazesine bakılarak bu dört değişik genelleştirilmiş entropi hakkında kapsamlı bir bilgi edinildi. Sonuç olarak farklı z ve çevrimler için (i) duyarlılık fonksiyonunun zamanla doğrusal değiştiği ve yine zamanla doğrusal entropi artışının gözlemlendiği α_{sen}^{av} değerlerinin aynı olduğu (ii) bu α_{sen}^{av} değerindeki eğrilerin eğimleri olan K ve λ ların arasında ($K = \lambda$) Pesin benzeri bir eşitlik olduğu gözlenmiştir.

<u>Çevrim</u>	z	Tsallis			Abe			Kaniadakis			Gamma		
		α	K	λ	α	K	λ	α	K	λ	α	K	λ
2	2	0.64	0.26	0.27	0.65	0.17	0.18	0.65	0.14	0.15	0.65	0.19	0.19
	2..5	0.66	0.28	0.28	0.67	0.19	0.19	0.69	0.15	0.18	0.67	0.20	0.20
	3	0.67	0.28	0.28	0.67	0.18	0.18	--	--	--	0.67	0.19	0.19
	4	0.71	0.31	0.31	0.72	0.21	0.21	--	--	--	0.71	0.21	0.21
3	1.75	0.08	0.47	0.48	0.10	0.37	0.37	0.10	0.36	0.35	0.09	0.42	0.41
	2	0.12	0.48	0.49	0.14	0.35	0.36	0.14	0.33	0.34	0.13	0.40	0.40
	2..5	0.18	0.47	0.48	0.19	0.30	0.31	0.19	0.28	0.29	0.19	0.37	0.38
	3	0.22	0.44	0.45	0.23	0.29	0.29	0.23	0.26	0.26	0.23	0.35	0.35
4	4	0.28	0.41	0.41	0.29	0.26	0.26	0.29	0.23	0.23	0.28	0.28	0.28
	1.75	0.01	0.58	0.59	0.03	0.56	0.57	0.03	0.56	0.56	0.02	0.58	0.60
	2	0.02	0.57	0.57	0.05	0.53	0.55	0.05	0.53	0.54	0.03	0.55	0.56
	2..5	0.05	0.56	0.58	0.07	0.47	0.47	0.07	0.46	0.45	0.06	0.51	0.52
5	3	0.07	0.52	0.53	0.09	0.41	0.41	0.09	0.40	0.39	0.09	0.48	0.50
	4	0.11	0.46	0.46	0.13	0.34	0.34	0.13	0.32	0.32	0.13	0.40	0.42
	1.75	0.04	0.40	0.41	0.06	0.35	0.35	0.06	0.34	0.34	0.05	0.37	0.38
	2	0.07	0.39	0.42	0.09	0.32	0.32	0.09	0.31	0.31	0.08	0.35	0.36
5	2..5	0.12	0.37	0.38	0.14	0.28	0.28	0.14	0.26	0.26	0.13	0.31	0.31
	3	0.16	0.35	0.35	0.18	0.25	0.25	0.18	0.23	0.24	0.17	0.28	0.28
	4	0.22	0.30	0.30	0.23	0.19	0.19	0.23	0.18	0.18	0.23	0.23	0.23

Çizelge4.2. Genelleştirilmiş logaritmlar için (i)yaklaşık α değerleri (ii) genelleştirilmiş Lyapunov üstelleri λ (iii) entropi artış değerleri K .

KAYNAKLAR DİZİNİ

Hilborn, R.C., 1994, Chaos and Nonlinear Dynamics, Oxford University Press, New York

Mullin, T., 1993, The Nature of Chaos, Oxford University Press Inc., New York

Gell-Mann, M. and Tsallis, C., 2004, Nonextensive Entropy Interdisciplinary Applications, Oxford University Press Inc., New York

Ananos, G.F.J. and Tsallis, C., 2004, Ensemble Averages and Nonextensivity at the Edge of Chaos of One-Dimensional Maps, *Phys. Rev. Lett.*, 93.020601

Baldovin, F. and Robledo, A., 2002, Universal renormalization-group dynamics at the onset of chaos in lojistic maps and nonextensive statical mechanics, *Phys. Rev. E*, 66.0451904

Celikoglu, A. and Tirnakli, U., 2006, Sensitivity function and entropy increase rates for z-lojistic map family at the edge of chaos, *Physica A*, (in press)

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Coraddu, M., Lissia, M., and Tonnelli, R.,** 2006, Statistical Descriptions of Nonlinear System at The Onset of Chaos, *Physica A*, 365:252-272
- Feigenbaum, M.,** 1978, The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations, *J. Stat. Phys.*, 21:669-706
- Kaniadakis, G., Lissia, M. and Scarfeno, A. M.,** 2005, Two-parameter deformation of logarithm, exponential, and entropy: A consistent framework for generalized statistical mechanics, *Phys. Rev. E*, 71:046128
- May, R.,** 1976, Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics, *Nature*, 261:45-67
- Moura, F. A. B. F., Tirnakli, U., Lyra, M. L.,** 2000, Convergence to the critical attractor of dissipative maps: Log-periodic oscillations, fractality, and nonextensivity, *Phys. Rev. E*, 62(5)
- Tirnakli, U.,** 2002, Dissipative maps at the chaos threshold: numerical results for the single-site map, *Physica A*, 305:119-123
- Tirnakli, U., Tsallis, C., and Ananos, G.F.J.,** 2001, Generalization of the Kolmogorov-Sinai entropy: logistic-like and generalized cosine maps at the chaos threshold, *Phys. Lett. A*, 289:51-58

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Tirnaklı, U., Tsallis, C., and Lyra, M. L., 1999, Circular-like maps: sensitivity to initial conditions, multifractality and nonextensivity, *Eur. Phys. J. B*, 11:309-315

Tirnaklı, U., Tsallis, C., and Lyra, M. L., 2002, Asymmetric unimodal maps at the edge of chaos, *Phys. Rev. E*, 65.036207

Tonelli, R., Mezzorani, G., Meloni, F., Lissa, M. and Coraddu, M., 2006, Entropy Production and Pesin-Like Identity at the Onset of Chaos, *Prog. Theo. Phys.*, Vol. 115 No.1

Tsallis, C., Plastino, A.R. and Zheng, W.M, 1997, Power-law Sensitivity to Initial Conditions—New Entropic Representation, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol.8, No.6, pp 885-891

Tsallis, C., 1988, Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistic, *J. Stat.Phys.*, 52:479

Tsallis, C., 2004, Dynamical scenario for nonextensive statistical mechanics, *Physica A*, 340:1-10

ÖZGEÇMİŞ

1 Şubat 1980’de Afyon’un Dinar ilçesinde dünyaya geldi. Türkiye Cumhuriyeti vatandaşı olan Ahmet Çelikoğlu ilköğrenimini Yunus Emre İlkokulunda tamamladı. 1990’da Anadolu Liseleri sınavını kazanarak Dinar Anadolu Lisesi’nde orta öğrenimini tamamladı. Ekim 1995’te meydana gelen Dinar depremi dolayısıyla önce Afyon Anadolu Lisesi, daha sonra Isparta Anadolu Lisesi’nde öğrenimine devam etti. 1996’da tekrar doğduğu yere dönerek 1998’de Dinar Lisesi’nde lise eğitimini tamamladı. Aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü’nü kazanan Çelikoğlu 2003’te başarı ile fizik lisans eğitimini tamamladı.