T. C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ BOUSSİNESQ SİSTEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: İlhame AMİRALİYEVA
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU

VAN–2006

T. C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ BOUSSİNESQ SİSTEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: İlhame AMİRALİYEVA

VAN–2006

KABUL ve ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU danışmanlığında, Öğretim Görevlisi İlhame AMİRALİYEVA tarafından hazırlanan "*Singüler Pertürbe olmuş Boussinesq Sisteminin Nümerik Çözümleri*" isimli bu çalışma 11/05/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Elimhan Mahmudov
İmza:

Üye: Prof. Dr. Heybetkulu Mustafayev
İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Hakkı Duru
İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sinan Aydın
İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Musa Çakır
İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun… /… /… gün ve ………….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Aşkın Kor

Enstitü Müdürü

ÖZET

SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ BOUSSİNESQ SİSTEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

AMİRALİYEVA, İlhame
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU
Mayıs 2006, 40 sayfa

Bu çalışmada singüler pertürbe özellikli Boussinesq sistemi için başlangıç-sınır değer problemlerinin sonlu farklar metodu ile nümerik çözümleri incelenmiştir. Bu tip problemler matematiksel fiziğin ve akışkanlar mekaniğinin çeşitli alanlarında kullanılmaktadırlar. İlk olarak ele alınan problemler için asimptotik değerlendirmeler yapıldı. Daha sonra düzgün olmayan özel şebeke üzerinde üstel baz fonksiyonları ile ağırlık fonksiyonu ve integral biçiminde kalan terim içeren interpolasyon kuadratür formülleri kullanılarak uygulanan integral özdeşlikleri metodu ile singüler perturbasyon parametresine göre düzgün yakınsak iki katlı üstel fark şemaları kuruldu. Önerilen fark problemleri için yakınsama hızları değerlendirildi. Nümerik sonuçların teorik sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

Anahtar kelimeler: Boussinesq sistemi, Düzgün yakınsaklık, Fark şeması, Sınır katı, Singüler perturbasyon.

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED BOUSSINESQ SYSTEM

AMIRALIYEVA, Ilhame
PhD, Mathematics Science
Supervisor: Asist. Prof. Dr. Hakkı DURU
May 2006, 40 pages

In this study, we investigate the numerical solutions of the initial-boundary value problems for singularly perturbed Boussinesq system. The equations of this type arise in different areas of mathematical physics and fluid mechanics. Firstly, asymptotic estimates for the original problems are estabilished. Next, two level difference method on an special non-uniform mesh, based on using finite exponential functions in space and appropriate quadrature formulas with remainder term in integral form is presented. The difference schemes are shown to converge to the continuous solution uniformly with respect to the perturbation parameter. Numerical results are essentially in agreement with the theoretical analysis.

Key words: Boundary layer, Boussinesq system, Difference scheme, Singular perturbation, Uniform convergence.

ÖN SÖZ

Boussinesq sistemleri fiziğin ve akışkanlar mekaniğinin değişik alanlarında görülen süreçlerin matematik modellemesinde ortaya çıkmaktadır. Bu denklemler genelde nonlineerdirler ve bu sebepten nümerik metotların kullanılmasını zorunlu kılmaktadırlar. Ayrıca, ele alınan problemler singüler pertürbe özellikli oldukları için uygulanan nümerik yöntemler küçük parametreye göre düzgün yakınsak sonuçlar verebilirler.

Bu çalışma süresince göstermiş olduğu yakın ilgi ve yardımlarından dolayı Sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Hakkı Duru'ya ve çalışmam boyunca beni yönlendiren, tavsiye ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Gabil Amirali'ye teşekkür eder saygılarımı sunarım.

İlhame Amiraliyeva

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

ε	singüler pertürbe parametresi
x, t	bağımsız değişkenler
$u(x,t)$	kesin problemin çözümü
$u_0(x,t)$	indirgenmiş problemin çözümü
$y(x,t)$	problemin yaklaşık çözümü
h, τ	şebeke adımları
i, j	şebekedeki nokta indisleri
L	diferansiyel operatör
l	fark operatörü
$\theta_i (i = 0, 1, 2, 3)$	fark probleminin üstel katsayısı
	$C, c, C_i, c_i (i = 0, 1, ...)$ ε'a (ayrıca h ve τ'ya) bağlı olmayan pozitif sabitler
D	$(0,1) \times (0,T]$
$\overline{D}$	$[0,1] \times [0,T]$

Sürekli tek değişkenli fonksiyonlar için kullanılan notasyonlar:

$(f, g) = \int_0^l f(x) g(x)\, dx$	$L^2 [0, l]$'de tanımlanan skaler çarpım
$\lVert f \rVert = (f, f)^{1/2} = \left(\int_0^l f^2(x)\, dx \right)^{1/2}$	L_2 -normu
$\lVert f \rVert_{C[0,l]} = \max_{[0,l]} \lvert f(x) \rvert$	C-normu

İki değişkenli fonksiyonlar için kullanılan notasyonlar:

$\|f\|_D = \left(\iint\limits_D f^2(x,\mathrm{t})dxdt \right)^{1/2}$	$L^2(D)$ normu
$C_m^n(D)$	D bölgesinde tanımlı x 'e göre m 'inci, t 'ye göre n 'inci dereceden sürekli türevlere sahip $f(x,t)$ fonksiyonlar kümesi

Şebekede tanımlanan notasyonlar:

$\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 1, 2, ..., N-1,\ h = l/N\}$	$[0, l]$'de tanımlanan düzgün şebeke
$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \{0, l\}$	kapalı şebeke bölgesi
$y = y_i = y(x_i)$	$\overline{\omega}_h$ şebekesinde tanımlanan tek değişkenli fonksiyon
$\eta_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$	düzgün olmayan şebeke adımı
$y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$	x_i noktasındaki geri fark türevi
$y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$	x_i noktasındaki ileri fark türevi

$y_{\overset{\circ}{x}} = \frac{1}{2}\left(y_{x,i} + y_{\bar{x},i}\right) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$	x_i noktasındaki merkezi fark türevi
$y_{\bar{x}x} = \frac{y_x - y_{\bar{x}}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$	x_i noktasındaki 2. fark türevi
$y_{\hat{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\eta_i}$	düzgün olmayan şebekede ileri fark türevi
$y_{\bar{x}\hat{x},i} = \frac{y_{x,i} - y_{\bar{x},i}}{\eta_i}$	düzgün olmayan şebekede ikinci fark türevi
$(y, v) = (y, v)_{L_2(\omega_h)} = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$	şebekede tanımlanan skaler çarpım
$\\|y\\|_{L_2(\omega_h)} = \\|y\\| = \sqrt{(y, y)}$	ayrık L_2 normu
$\\|y\\|_C = \\|y\\|_{C(\bar{\omega}_h)} = \max_{1 \le i \le N} \|y_i\|$	ayrık C normu
$\omega_\tau = \{t_j = i\tau,\ j = 1,..., M-1,\ \tau = T/M\}$	zamana göre tanımlanan şebeke
$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0, T\}$	kapalı şebeke
$y = y^j = y(t_j)$	$\bar{\omega}_\tau$' de tanımlı şebeke fonksiyonu
$\hat{y} = y^{j+1} = y(t_{j+1})$	
$\check{y} = y^{j-1} = y(t_{j-1})$	

$y_t = (\hat{y} - y)/\tau$, $y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau$, $y_{\overset{0}{t}} = (\hat{y} - \check{y})/2\tau$	$\overline{\omega}_\tau$ 'de belirlenen 1. fark türevleri
$(y,v) = \sum_{i=1}^{N-1} h_{i+1} y_i v_i$	düzgün olmayan şebekede tanımlanan skaler çarpım
$(y,v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} \eta_i y_i v_i$	düzgün olmayan şebekede tanımlanan skaler çarpım
$\lVert y \rVert_0^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h_{i+1} y_i^2$	düzgün olmayan şebekede ayrık L_2 normu
$\lVert y \rVert_*^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \eta_i y_i^2.$	düzgün olmayan şebekede ayrık L_2 normu

1. GİRİŞ ve LİTERATÜR BİLDİRİŞİ

Sobolev denklemleri matematik ve fiziğin bir çok alanında kullanılır: ısı transferi problemleri (Chen ve Gurtin, 1968), çatlak kayalarda akışkanların akışı (Barenblatt ve ark., 1960), termodinamik (Chen ve Gurtin, 1968) ve diğer fiziksel uygulamalarda ortaya çıkar. Sobolev denklemlerinin varlık ve teklik tartışmaları Davis (1970) ve Ewing (1975) tarafından yapılmıştır. Bu tip denklemlerin regüler durumlardaki çeşitli nümerik sonuçları incelenmiştir (Ford ve Ting, 1974; Ewing, 1978; Amiraliyev, 1990; Gu, 1999; Sun ve Yang, 2002; Guo ve Cao, 1988; Liu ve ark., 2002; Nakao, 1985; Amiraliyev ve Mamedov, 1995). Nümerik çalışmalar için benzer problemler Ewing (1975) ve konveksiyon terimsiz lineer olmayan problemler için yine Ewing (1978) tarafından yapılmıştır. Fakat birçok problemde konveksiyon terimli Sobolev denklemini ele almak gerekir.

Singüler Perturbasyon Problemleri en yüksek mertebeden türev içeren terimlerinde küçük parametre bulunan problemlerdir. Perturbasyon parametresi sıfıra giderken, problemin çözümü, problemin türüne göre başlangıç veya sınırlarda hızlı değişir. Bunlara sınır katı veya başlangıç katı denir. Klasik nümerik metotlarda çözümün türevi sonsuz olacağı için klasik fark şemalarının düzgün şebekelerdeki nümerik çözümleri kesin çözüme yakınsamaz. Bu çalışmada singüler perturbe lineer başlangıç sınır-değer bir Sobolev sistemi (Boussinesq sistemi) için fark şemaları kurulacaktır. Kurulacak bu fark şeması üstel katsayılı terimler içerecektir. Zaten bu tür problemlerde ya düzgün şebeke üzerinde üstel katsayılı fark şemaları ya da sınır katlarında daha ince aralıkların kullanıldığı adaptiv veya parçalı düzgün şebeke kullanılır (Duru, 2004; Farell ve ark., 2000).

Boussinesq sistemi dispersiv efektleri dikkate alarak uzun dalgaların hareket dinamiğini modelize ediyor (Amiraliyev, 1988; Winther, 1982).

Boussinesq sistemi için başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlığı-tekliği, düzgünlük özellikleri Showalter (1975, 1977) ve Amick Charles (1984) tarafından incelenmiştir. Boussinesq sistemi için nümerik çözümler değişik yazarlar tarafından ele alınmıştır. Guo ve Manoranjan (1985) ve Guo ve Cao (1988) çalışmalarında regülize olmuş uzun dalga denklemi (RLW denklemi) için Fourier pseudospektral metodu kullanmıştır. Bhardwaj ve Shankar (2000) RLW denklemi için bir nümerik metot sunmuşlardır. Winther (1982) çalışmasında Boussinesq sisteminin bir versiyonu için sonlu elemanlar metodu kullanmıştır. Amiraliyev (1988) çalışmasında birinci tip sınır şartları içeren singüler pertürbe olmuş Boussinesq problemi için sonlu farklar metodu uygulamıştır.

Tezde, sınır katları içeren üçüncü ve periyodik tip Boussinesq başlangıç-sınır değer problemleri ele alınmıştır.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde giriş ve literatür bildirişi yer almaktadır.

İkinci bölümde tezde kullanılan ön bilgiler verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde aşağıdaki lineer olmayan sistem için başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır:

$$L_1[u,v] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t dx^2} + \alpha\varepsilon^2 u \frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$a_0(t,x)u + a_1(t,x)v = f_1(t,x), \tag{1.1}$$

$$L_2[u,v] \equiv \frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t dx^2} + \beta\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}(uv) +$$

$$b_0(t,x)v + b_1(t,x)u = f_2(t,x), \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\ v(0,x) = \psi(x), \tag{1.3}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \tag{1.4}$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(t,0) + \mu_1(t)\frac{\partial v}{\partial t}(t,0) = g_1(t), \tag{1.5}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(t,l) + \mu_2(t)\frac{\partial v}{\partial t}(t,l) = g_2(t), \tag{1.6}$$

burada $0 < \varepsilon < 1$ küçük parametre, α, $\beta =$ sabitler, $a_i(t,x)$, $b_i(t,x)$ $(i = 0,1)$, $f_i(t,x)$ $(i = 1,2)$ fonksiyonları yeteri kadar düzgün fonksiyonlardır. Bu problemin farklı yönü, küçük parametrenin (1.5) sınır şartlarına dahil olmasıdır, bu da söz konusu koşulların klasik yöntemlerden farklı bir yöntemle yaklaşımını gerektiriyor.

Dördüncü bölümde aşağıdaki periyodik tip başlangıç-sınır değer problemi incelenmiştir:

$$L_1[u,v] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \alpha\varepsilon^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + a_0(t,x)u + a_1(t,x)v = f_1(t,x) \tag{1.7}$$

$$L_2[u,v] \equiv \frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} + \beta\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}(uv) +$$

$$b_0(t,x)v + b_1(t,x)u = f_2(t,x) \tag{1.8}$$

$$(t,x) \in (0,T\ ] \times (0,l) \equiv (0,T\ ] \times \Omega,$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\quad v(0,x) = \psi(x), \tag{1.9}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad v(t,0) = v(t,l), \tag{1.10}$$

$$L^{*}v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(l,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(0,t) = \frac{g(t)}{\varepsilon}. \tag{1.11}$$

Küçük parametrenin (1.11) periyodik şartına dahil olduğu bu problem için fark şeması kurulmuş, hata eşitsizliği incelenmiş ve hata hızı verilmiştir.

Beşinci bölümde çalışmada ele alınan singüler pertürbe olmuş başlangıç sınır değer probleminin çözümünün asimptotik yaklaşımı verilmiştir. Örnek üzerinde farklı değerler için hata normu incelenerek teorik sonuçlarla uygunluğu denetlenmiştir.

Altıncı bölümde incelenen problemler için sonuç değerlendirmesi yapılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılan bazı tanımlar ve formüller verilmiştir.

2.1. Bazı İnterpolasyon Kuadratür Formülleri

Fark şemasının kurulmasında aşağıdaki interpolasyon kuadratür formülleri kullanılacaktır (Amiraliyev ve Mamedov, 1995):

i) $$\int_a^b p(t)f(t)dt = \left\{\int_a^b p(t)dt\right\}\{\sigma f(b) + (1-\sigma)f(a)\} +$$

$$f[a,b]\int_a^b p(t)(t - t^{(\sigma)})dt + R_1(f) \qquad (2.1)$$

Burada

$R_1(f) = \int_a^b dtp(t)\int_a^b f^{(n)}(\xi)K_{n-1}(t,\xi)d\xi$, $n = 1$ veya $n = 2$, $f \in C^n$,

$t^{(\sigma)} = \sigma b + (1-\sigma)a$ (σ -reel parametre),

$f[a,b] = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$,

$K_s(t,\xi) = T_s(t-\xi) - (b-a)^{-1}(t-a)(b-\xi)^s$, $s = 0,1$

ve

$$T_s(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^s}{s!}, & \lambda \ge 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

(2.1) formülündeki $f[a,b]\int_a^b p(t)(t - t^{(\sigma)})dt$ ifadesi kalan terime eklenirse $n = 1$ için kalan terim

$$R_1(f)=\int_a^b dtp(t)\int_a^b f'(\xi)\left[T_0(t-\xi)-\sigma\right]d\xi\,,$$

şeklinde olur.

ii) $$\int_a^b p(t)f'(t)dt=f\left[a,b\right]\int_a^b p(t)dt+R_2(f)\,. \qquad (2.2)$$

Burada

$$R_2(f)=-\int_a^b dtp'(t)\int_a^b f^{(n)}(\xi)K_{n-1}(t,\xi)d\xi\,,\ n=1 \text{ veya } n=2\,,\ f\in C^n\,,$$

$$R_2(f)=-\int_a^b dtp(t)\int_a^b f''(\xi)K_0(\xi,t)d\xi\,,\ f\in C^2$$

Ayrıca $K(t,\xi)$ fonksiyonu

$$K_0(a,\xi)=K_0(b,\xi)=0\,,$$

$$K_1(a,\xi)=K_1(b,\xi)=K_1(t,a)=K_1(t,b)=0\,,$$

$$K_1(t,\xi)=K_1(\xi,t)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}K_1(t,\xi)=-K_0(t,\xi)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}K_1(t,\xi)=-K_0(\xi,t)$$

özelliklerine sahiptir.

2.2. Bazı Eşitsizlikler

Aşağıda problemin değerlendirilmesinde kullanılacak bazı eşitsizlikler verilmiştir.

a) ***Gronwall eşitsizşliği:***

Negatif olmayan C, K sabitleri ile sürekli $u:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$$u(t)\le C+K\int_a^t u(s)ds\,,\quad a\le t\le b$$

ise

$$u(t)\le Ce^{K(t-a)},\quad a\le t\le b$$

eşitsizliği vardır.

b) ***Bernoulli eşitsizliği:***

Sürekli $v(t)\ge 0$ fonksiyonu

$$v(t)\le u_0+\int_0^t\left[\varphi_1(s)v(s)+\varphi_2(s)[v(s)]^{\mu}\right]ds\,,$$

eşitsizliğini sağlamış olsun, burada $u_0\ge 0,\mu\ge 0$ ve $\varphi_i(t)\ge 0$ $(0\le t\le T; i=1,2)$ süreklidir. Ayrıca $\mu>1$ için

$$u_0^{1-\mu}+(1-\mu)\int_0^t\varphi_2(s)\exp\left[-(1-\mu)\int_0^s\varphi_1(\tau)d\tau\right]ds>0\,,$$

olsun. Bu durumda

$$v(t)\le\exp\left(\int_0^t\varphi_1(s)ds\right)\left\{u_0^{1-\mu}+(1-\mu)\int_0^t\varphi_2(s)\exp\left[-(1-\mu)\int_0^s\varphi_1(\xi)d\xi\right]ds\right\}^{\frac{1}{1-\mu}}\,,\ \mu\ne 1$$

ve

$$v(t)\le u_0\exp\left(\int_0^t[\varphi_1(s)+\varphi_2(s)]ds\right)\,,\ \mu=1$$

olur. φ_1, $\varphi_2=Sbt$, $\mu=2$ özel durumunda ise

$$v(t) \leq \frac{u_0 \exp(\varphi_1 \mathrm{t})}{1-\varphi_1^{-1}\varphi_2 u_0 (\exp(\varphi_1 \mathrm{t}) - 1)}$$

olur.

c) μ ***-eşitsizliği:***

$$|ab| \leq \mu\, a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2, \quad \mu > 0$$

2.3. Fark Eşitsizlikleri (Amirali ve Duru, 2002)

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{\tau} \leq a_i y_i + b_i y_{i-1} + f_i, \quad i = 1,2,... \tag{2.3}$$

$$y_0 \leq \alpha \tag{2.4}$$

fark eşitsizliği verilmiş olsun. Burada $\tau > 0$ reel parametredir.

Lemma 2.1. (*Diferansiyel Eşitsizliğin Fark Benzeri*):

$y_i \geq 0$ fonksiyonunun (2.3) ve (2.4) eşitsizliklerini sağladığını kabul edelim ve $1 - \tau\, a_i > 0,\ i = 1,2,...$ olsun. Bu durumda

$$y_i \leq \alpha Q_i + \tau \sum_{k=1}^{i} \frac{f_k}{1-\tau a_k} Q_{i\text{-}k}, \quad i = 1,2,... \tag{2.5}$$

olur. Burada

$$Q_{i-k} = \begin{cases} 1, & k = i \\ \exp\left[\sum_{l=k+1}^{i} \frac{a_l + b_l}{1-\tau a_l}\right], & 0 \leq k \leq i-1. \end{cases}$$

Eğer $a_k = c_0 = sbt$, $b_k = c_1 = sbt$ ise, o zaman

$$y_i \le \alpha \exp\left[\frac{(c_0+c_1)t_i}{1-\tau c_0}\right] + \frac{\tau}{1-\tau c_0}\sum_{k=1}^{i} f_k \exp\left[\frac{(c_0+c_1)t_{i-k}}{1-\tau c_0}\right], \qquad (2.6)$$

$$t_i = i\tau, \quad i = 0,1,\ldots$$

olur.

Lemma 2.2 (*Bernoulli eşitsizliğinin fark benzeri):*

$y_j \ge 0$ fonksiyonu

$$y_j \le \alpha + \tau \sum_{k=0}^{j-1} (a_k y_k + b_k y_k^{\mu}), \; j = 1,2,\ldots$$

$$y_0 \le \alpha$$

($a_j, b_j \ge 0, \; j = 0,1,\ldots; \mu > 0$ *)* eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda

$$y_j \le \prod_{k=0}^{j-1}(1+a_k)\left[(\alpha)^{1-\mu} + (1-\mu)\sum_{k=0}^{j-1}\frac{b_k}{1+a_k}Q_k^{(\mu)}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}, \; j \ge 1 \qquad (18)$$

olur. Burada

$$Q_k^{(\mu)} = \begin{cases} 1, k = 0, \\ \prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)^{\mu-1}, k \ge 1 \end{cases}$$

($\mu > 1$ durumunda (18)'deki kare parantezler dâhilindeki ifadenin pozitif olduğu düşünülmektedir*).*

3. ÜÇÜNCU TİP SINIR ŞARTLARI İÇEREN BOUSSINESQ SİSTEMİ İÇİN FARK ŞEMALARI

3. 1. Sürekli Problemin Çözümünün Değerlendirilmesi

Bu bölümde sürekli problemin çözümünün asimptotik değerlendirmeleri yapılmıştır.

Lemma 3.1.

$$a_i(t,x), b_i(t,x) \in C_0^k\left(\bar{D}\right),\ i=0,1, \quad f_i\ (t,x) \in C_0^k\left(\bar{D}\right),\ i=1,2$$

$$\varphi(x), \psi(x) \in C^2[0,l], \qquad \mu_i(t),\ g_i(t) \in C^k[0,T] \quad (k = 0 \text{ veya } 1)$$

olmak üzere

$$\delta_* c_2 c_1^{-1}\left[\exp(c_1 T) - 1\right] < 1 \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlansın. Burada

$$\delta_* = \|\varphi(x)\|_0^2 + \|\psi(x)\|_0^2 + \varepsilon^2 \|\varphi'(x)\|_0^2 + \varepsilon^2 \|\psi'(x)\|_0^2 +$$
$$\mu_1(0)\psi^2(0) + \mu_2(l)\psi^2(l) + \int_0^T \exp(-c_1 t)\left[g_1^2(t) + g_2^2(t) + \|f_1(t)\|^2 + \|f_2(t)\|^2\right] dt$$

$$c_1 = \max\{-2a_0(t,x) + |a_1(t,x) + b_1(t,x)| + |\beta| + 1,$$

$$-2b_0(t,x) + |a_1(t,x) + b_1(t,x)| + \frac{1}{2}\varepsilon^4 |\beta| l + 1,$$

$$\mu_1^{-1}(t)\left(\mu_1'(t) + 1\right),\ \ \mu_2^{-1}(t)\left(\mu_2'(t) + 1\right)\},$$

$$c_2 = |\beta|\left(\frac{l}{2} + \frac{2}{l}\right).$$

Bu durumda (1.1)-(1.6) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\left\| \frac{\partial^{m_k+s} u}{\partial t^{m_k} dx^s} \right\|_{C(\overline{D})} \leq C\varepsilon^{-3}, \quad \left\| \frac{\partial^{m_k+ss}}{\partial t^{m_k} dx^s} \right\|_{C(\overline{D})} \leq C\varepsilon^{-3} \tag{3.2}$$

$$m_k = (\overline{0, k+1}, s = 0,1,2) .$$

İspat.

İspat birkaç aşamadan oluşmaktadır. Önce aşağıdaki değerlendirme ispatlanır:

$$\left\| \frac{\partial^s}{\partial x^s} u(t,x) \right\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} \leq C\varepsilon^{-s}, \quad \left\| \frac{\partial^s}{\partial x^s} v(t,x) \right\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} \leq C\varepsilon^{-s}. \tag{3.3}$$

Aşağıdaki eşitliğe bakılır:

$$\left(L_1[u,v],u\right)_{L_2(\Omega)} + \left(L_2[u,v],v\right)_{L_2(\Omega)} = \left(f_1,u\right)_{L_2(\Omega)} + \left(f_2,v\right)_{L_2(\Omega)}.$$

Basit işlemler sonrası,

$$(L_1[u.v],u) = \left(\frac{\partial u}{\partial t},u\right) - \varepsilon^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial k^2},u\right) + \alpha\varepsilon^2\left(u\frac{\partial u}{\partial x},u\right) +$$

$$\left(a_0(t,x)u,u\right) + \left(a_1(t,x)v,u\right) = \left(f,u\right)$$

bağıntısındaki terimler için

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t},u\right) = \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} u dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2,$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2},u\right) = -\varepsilon^2\int_0^l \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} u dx =$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} u \Big]_0^l + \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right\|^2$$

ifadesi doğru olacaktır, burada $-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} u \Big]_0^l = 0$ olduğu dikkate alınmıştır. Ayrıca,

$$\alpha\varepsilon^2\left|\left(u\frac{\partial u}{\partial x},u\right)\right| = \alpha\varepsilon^2\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x},u^2\right)\right|$$

yazılabilir. μ -eşitsizliği kullanılarak

$$\alpha\varepsilon^2\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x},u^2\right)\right| \le \alpha\varepsilon^2\left[\mu\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \frac{1}{4\mu}\|u\|^2\right]$$

yazılabilir. $\mu = \frac{1}{2}$ için

$$\alpha\varepsilon^2\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x},u^2\right)\right| \le \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2\left[\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \|u\|^2\right]$$

eşitsizliği, ayrıca,

$$|(f,u)| \le \frac{1}{2}\left(\|f_1\|^2 + \|u\|^2\right)$$

$$|(f,u)| \le \frac{1}{2}\left(\|f_2\|^2 + \|v\|^2\right)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Yine $\mu -$ eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\int_0^l a_1(t,x)uvdx\right| \le \frac{1}{2}\left[\int_0^l a_1(t,x)u^2dx + \int a_1(t,x)v^2dx\right]$$

$$\left|\int_0^l b_1(t,x)uvdx\right| \le \frac{1}{2}\left[\int_0^l b_1(t,x)u^2dx + \int b_1(t,x)v^2dx\right]$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 + \varepsilon^2\left\|\frac{du}{dx}\right\|^2 + \varepsilon^2\left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2 + \mu_1(t)v^2(t,0) + \mu_2(t)v^2(t,l)\right) \le$$

$$(-a_* + 0.5)\|u\|^2 + (-b_* + 0.5)\|v\|^2 + \varepsilon^2\beta\left(uv,\frac{dv}{dx}\right)_{L_2(\Omega)} +$$

$$\frac{1}{2}\mu_1'(t)v^2(t,0)+\frac{1}{2}\mu_2'(t)v^2(t,l)+g_1(t)v(t,0)+g_2(t)v(t,l)+$$
$$\frac{1}{2}\|f_1\|^2+\frac{1}{2}\|f_2\|^2 \tag{3.4}$$

eşitsizlikleri elde edilebilir, burada

$$a_* = \min_{\overline{D}}\left[a_0(t,x)-\frac{1}{2}|a_1(t,x)+b_1(t,x)|\right],$$

$$b_* = \min_{\overline{D}}\left[b_0(t,x)-\frac{1}{2}|a_1(t,x)+b_1(t,x)|\right],$$

$$\|v\|^2_{C(\overline{\Omega})}\le l\|v\|^2+\frac{2}{l}\left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2 .$$

Daha sonra aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\varepsilon^2\left|\beta\left(uv,\frac{dv}{dx}\right)\right|\le\frac{|\beta|}{2}\|u\|^2+\frac{|\beta|}{2}\varepsilon^4\|v\|^2_{C(\overline{\Omega})}\left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2\le$$

$$\frac{|\beta|}{2}\|u\|^2+\frac{|\beta|}{2}\varepsilon^4\left(l\|v\|^2+2l^{-1}\left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2\right)\left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2\le$$

$$\frac{|\beta|}{2}\|u\|^2+\frac{|\beta|}{2}\varepsilon^4\left(l\|v\|^2+2l^{-1}\left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2\right)\left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2\le$$

$$\frac{|\beta|}{2}\|u\|^2+\frac{|\beta|}{4}\varepsilon^4\|v\|^2+\left(\frac{|\beta|l}{4}+\frac{|\beta|}{l}\right)\varepsilon^4\left\|\frac{dv}{dx}\right\|^4 .$$

Bu eşitsizlik (3.4) ifadesinde dikkate alınırsa birkaç değişimden sonra aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\delta'(t) \leq c_1\delta(t) + c_2\delta^2(t) + \rho(t), \tag{3.5}$$

burada

$$\delta(t) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \varepsilon^2\left\|\frac{du}{dx}\right\|^2 + \varepsilon^2\left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2 + \mu_1(t)v^2(t,0) + \mu_2(t)v^2(t,l),$$

$$\rho(t) = \|f_1(t)\|^2 + \|f_2(t)\|^2 + g_1^2(t) + g_2^2(t).$$

(3.5)' den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\delta(t) \leq \delta(0)\exp(c_1 t) + \int_0^t \rho(\xi)\exp[c_1(t-\xi)]\,d\xi +$$

$$\int_0^t c_2\exp[c_1(t-\xi)]\,\delta^2(\xi)\,d\xi\,.$$

Bu eşitsizlik $\exp(-c_1 t)$ ile çarpılarak $V(t) = \exp(-c_1 t)\,\delta(t)$ fonksiyonu için

$$V(t) \leq \delta_* + c_2\int_0^t \exp(c_0\xi)\,V^2(\xi)\,d\xi$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikten de Bernoulli eşitsizliğine dayanarak

$$V(t) \leq \frac{\delta_*}{1 - \delta_* c_2 c_1^{-1}\left[\exp(c_1 t) - 1\right]}$$

değerlendirmesi elde edilir. Böylece $\delta(t)$ için

$$\delta(t) \leq \frac{\delta_*\exp(c_1 t)}{1 - \delta_* c_2 c_1^{-1}\left[\exp(c_1 t) - 1\right]}$$

sonucuna varılır, bu da (3.3) eşitsizliğini verir.

(3.2) ifadesinin doğruluğu aşağıdaki problemin $\mathrm{G}(x,s)$ Green fonksiyonu kullanılarak gösterilebilir:

$$\varepsilon^2 u'' - u = f(x),\ 0 < x < l$$

$$-\varepsilon^2 u'(0) + \mu_1 u(0) = 0, \quad \varepsilon^2 u'(l) + \mu_2 u(l) = 0, \quad (\mu_1, \mu_2 > 0).$$

Bu problem aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\int_0^l G(x,s)\,ds \le C, \qquad \left| \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} G(x,s)ds \right| \le C\varepsilon^{-1}.$$

(1.1)-(1.6) eşitliklerinden Green Fonksiyonu yardımıyla Volterra tipi integro-diferansiyel denklem elde edilir (1. tip sınır şartlarında olduğu gibi). İspatın sonraki kısmı birinci tip sınır şartları durumunda olduğu gibi devam edecektir.

Lemma 3.2.

(3.1) koşulu sağlanırsa ve

$$\frac{\partial^{k+1} a_i}{\partial t^k dx} \in C(\overline{D}), \quad \frac{\partial^{k+1} b_i}{\partial t^k dx} \in C(\overline{D}) \quad (i = 0,1), \quad \frac{\partial^{k+1} f_i}{\partial t^k dx} \in C(\overline{D}) \quad (i = 1,2),$$

$$\varphi(x), \psi(x) \in C^3(\overline{D}), \quad \mu_i(t), g_i(t) \in C^k[0,T], \quad (i = 1,2) \quad (k = 0 \text{ veya } 1)$$

ise (1.1)-(1.6) probleminin çözümü için

$$\left.\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{m_k+1} u}{\partial t^{m_k} \partial x} \right| &\le C\left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left(e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}} \right) \right\}, \\ \left| \frac{\partial^{m_k+1} v}{\partial t^{m_k} \partial x} \right| &\le C\left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left(e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}} \right) \right\} \\ (t,x) \in \overline{D}, \quad m_k &= \overline{0, k+1} \end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

asimptotik değerlendirmesi doğrudur.

İspat.

(3.2) ifadesi elde edildikten sonra ispat, tamamen 1.tip sınır-değer problemindeki uygun lemmaya benzer olarak yapılacaktır. Bu şöyle açıklanabilir: (3.2) yardımıyla

$$\frac{\partial^{m_k+s}u}{\partial t^{m_k}\partial x^s},\quad \frac{\partial^{m_k+s}v}{\partial t^{m_k}\partial x^s}\qquad (k,s\geq 0)$$

türevlerinin sınır değerleri bulunur. Bu sebepten gerçekte 1. tip sınır şartları söz konusu olacaktır.

3.2 Fark Şemasının Kurulması ve Hata Değerlendirmesi

Bu bölümde (1.1)-(1.6) problemi için düzgün olmayan şebekede üstel katsayılı fark şemaları kurulmuştur. Burada kullanılan $\hat{\varpi}_{\tau h}=\varpi_\tau\times\hat{\varpi}_h$ şebekesi

$$\varpi_\tau=\{t_j=j\tau;\ j=0,1,...,\mathrm{M},\ M\tau=T\ \},$$

$$\hat{\varpi}_h=\{x_i\in[0,l],\ \mathrm{i}=0,1,...,\mathrm{N},\ x_0=0,\ x_N=l,\ \ x_i-x_{i-1}=h_i\ \}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{\sinh(x-x_{i-1})/\varepsilon}{\sinh h_i/\varepsilon}, & x_{i-1}<x<x_i,\\ \dfrac{\sinh(x_{i+1}-x)/\varepsilon}{\sinh h_{i+1}/\varepsilon}, & x_i<x<x_{i+1},\\ 0, & x\in(x_{i-1},x_{i+1}),\end{cases}$$

$$i=1,2,...,N-1,$$

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{\sinh(x_i-x)/\varepsilon}{\sinh(h_1/\varepsilon)}, & x_0<x<x_1,\\ 0, & x\notin(x_0,x_1),\end{cases}$$

$$\varphi_N = \begin{cases} \dfrac{\sinh(x - x_{N-1})/\varepsilon}{}, & x_{N-1} < x < x_N \\ 0, & x \notin (x_{N-1}, x_N) \end{cases}$$

baz fonksiyonları ve uygun kuadratür formüller kullanılarak (1.1)-(1.6) problemi için aşağıdaki fark şeması yazılabilir:

$$l_1[y_1, y_2] \equiv \kappa_0 y_{1\bar{t}} - \varepsilon^2 (\kappa_1 y_{1\bar{t}\bar{x}})_{\hat{x}} + \alpha \frac{\varepsilon^2}{3} \kappa_0^{(1)} \left[(\breve{y}_1^2)_{\bar{x}} + \breve{y}_1 \breve{y}_{1\bar{x}} \right] +$$
$$\alpha \frac{\varepsilon^2}{3} \kappa_0^{(2)} \left[(\breve{y}_1^2)_x + \breve{y}_1 \breve{y}_{1x} \right] + \kappa_0 a_0 \left(t - \frac{\tau}{2}, x \right) \breve{y}_1 +$$
$$\kappa_0 a_1 \left(t - \frac{\tau}{2}, x \right) \breve{y}_2 = \kappa_0 f_1 \left(t - \frac{\tau}{2}, x \right), \quad (3.7)$$

$$l_2[y_1 y_2] \equiv \kappa_0 y_{2\bar{t}} - \varepsilon^2 (\kappa_1 y_{2\bar{t}\bar{x}})_{\hat{x}} + \beta \varepsilon^2 \kappa_0^{(1)} (\breve{y}_1 \breve{y}_2)_{\bar{x}} +$$
$$\beta \varepsilon^2 \kappa_0^{(2)} (\breve{y}_1 \breve{y}_2)_x + \kappa_0 b_0 \left(t - \frac{\tau}{2}, x \right) \breve{y}_2 +$$
$$\kappa_0 b_1 \left(t - \frac{\tau}{2}, x \right) \breve{y}_1 = \kappa_0 f_2 \left(t - \frac{\tau}{2}, x \right), \quad (t, x) \in \omega_\tau^+ \times \hat{\omega}_h, \quad (3.8)$$

$$y_1(0, x) = \varphi(x), \quad y_2(0, x) = \psi(x), \quad (3.9)$$

$$y_1(t, 0) = y_1(t, l) = 0, \quad (3.10)$$

$$l_1^* y_2(t, 0) \equiv -\varepsilon^2 \kappa_{1,1} y_{2\bar{t}x}(t, 0) + \overline{\mu}_1(t) y_{2\bar{t}}(t, 0) = \overline{g}_1(t), \quad (3.11)$$

$$l_2^* y_2(t, l) \equiv \varepsilon^2 \kappa_{1,N} y_{2\bar{t}\bar{x}}(t, l) + \overline{\mu}_2(t) y_{2\bar{t}}(t, l) = \overline{g}_2(t), \quad \ldots\ldots\ldots(3.12)$$
$$t \in \omega_\tau^+,$$

burada

$$\kappa_{0,i}^{(1)} = \varepsilon\, \eta_i^{-1} \tanh\left(\frac{h_i}{2\varepsilon} \right), \quad \kappa_{0i}^{(2)} = \varepsilon\, \eta_i^{-1} \tanh\left(\frac{h_{i+1}}{2\varepsilon} \right),$$

$$\kappa_0 = \kappa_0^{(1)} + \kappa_0^{(2)}, \quad \kappa_{1,i} = \frac{h_i}{\varepsilon \sinh \varepsilon^{-1} h_i}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$h_i = \frac{1}{2}\left(h_i + h_{i+1}\right), \quad y_{\hat{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\eta_i},$$

$$\overline{\mu}_1 = \mu_1 + \varepsilon \tanh\left(\frac{h_1}{2\varepsilon}\right), \quad \overline{\mu}_2 = \mu_2 + \varepsilon \tanh\left(\frac{h_N}{2\varepsilon}\right), \quad \overline{g}_s = g_s + O(\tau).$$

$z_1 = y_1 - u, \; z_2 = y_2 - v$ çözüm hataları aşağıdaki problemin çözümü olacaktır:

$$l_k\left[z_1 + u, z_2 + v\right] - l_k\left[u, v\right] = R_k, \; k = 1,2, \; (t, x) \in \omega_\tau^+ \times \hat{\omega}_h,$$

$$z_k(0, x) = 0, \; k = 1,2,$$

$$z_1(t, 0) = z_1(t, l) = 0,$$

$$l_1^* z_2(t, 0) = r_1(t) \equiv \overline{g}_1(t) - l_1^* v(t, 0),$$

$$l_2^* z_2(t, l) = r_2(t) \equiv \overline{g}_2(t) - l_2^* v(t, l).$$

R_k yaklaşım hatasının ifadesi 1. sınır-değer problemi örneğindeki gibi olup, aşağıdaki şekildedir:

$$R_k(t, x) = \varepsilon^2\left(R_k^{(0)}\right)_{\hat{x}} + R_k^{(1)} + \varepsilon^2 R_k^{(2)}, \quad k = 1,2.$$

Burada (sadece k=1 için veriliyor)

$$R_1^{(0)} = \frac{\alpha}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i^{(1)'}(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\left(t_{j-1}, \xi\right)\right) K_0^i(x, \xi)\, d\xi,$$

$$R_1^{(1)} = \tau^{-1} \eta_i^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(t, \xi) u(t, \xi)\right) K_0^{*i}(x, \xi)\, d\xi \right) +$$

$$\kappa_{0,i} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt a_0(t, x_i) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial}{\partial t} u(\xi, x_i) T_0(t - \xi)\, d\xi +$$

$$\tau^{-1}\kappa_{0,i}u(t_{j-1},x_i)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[t_j-\xi-\tau T_0\left(t_j-\frac{\tau}{2}-\xi\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}a_0(\xi,x_i)\,d\xi+$$

$$\tau^{-1}\eta_i^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}dt\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{\partial}{\partial x}(a_1(t,\xi)v(t,\xi))K_0^*(x,\xi)\,d\xi+$$

$$\kappa_{0i}\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}dta_1(t,x_i)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\partial}{\partial t}v(\xi,x_i)T_0(t-\xi)\,d\xi+$$

$$\tau^{-1}\kappa_{0i}v(t_{j-1},x_i)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[t_j-\xi-\tau T_0\left(t_j-\frac{\tau}{2}-\xi\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}a_1(\xi,x_i)\,d\xi-$$

$$\tau^{-1}\eta_i^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}dt\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{\partial}{\partial x}f_1(t,\xi)K_0^*(x,\xi)\,d\xi+$$

$$\tau^{-1}\kappa_{0i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[t_j-\xi-\tau T_0\left(t_j-\frac{\tau}{2}-\xi\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}f_1(\xi,x_i)\,d\xi,$$

$$K_0^i(x,\xi)=T_0(x-\xi)-h_i^{-1}(x-x_{i-1}),$$

$$K_0^{*i}(x,\xi)=T_0(x-\xi)-T_0(x_i-\xi),$$

$$T_0(\lambda)=1,\quad \lambda\ge 0;\quad T_0(\lambda)=0,\quad \lambda<0,$$

$$R_1^{(2)}=\frac{\alpha}{2}\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}d\xi(t_j-\xi)\left(\eta_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(u^2(\xi,x)\,dx)\right)-$$

$$\frac{\alpha}{2}\eta_i^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}d\xi\frac{\partial}{\partial x}(u^2(t_{j-1},\xi))\int_{x_i}^{x_{i+1}}K_0^{i+1}(x,\xi)\left[\varphi_i^{(2)'}(x)+\varphi_{i+1}^{(1)'}(x)\right]dx-$$

$$\frac{1}{6}\kappa_{0i}^{(1)}h_iu^2_{\bar{x},i}(t_{j-1},\quad)+\frac{1}{6}\kappa_{0i}^{(2)}h_{i+1}u_{x,i}(t_{j-1},\quad)$$

$r_1(t)$ ve $r_2(t)$ sınır şartlarının yaklaşım hatalarının sadeleşmiş ifadeleri aşağıdaki şekilde olacaktır (sadece $r_1(t)$ için):

$$r_1(t) = \bar{g}_1(t) - l_1^* v(t,0) \equiv \bar{g}_1(t) + \varepsilon^2 \kappa_{1,1} v_{\bar{t}x}(t,0) - \mu_1(t) v_{\bar{t}}(t,0) +$$

$$\tau^{-1} \int_{t-\tau}^{t} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0(x) \left[L_2[u,v] - f_2[\theta, x] \right] dx d\theta$$

Burada

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(x_1 - x)/\nu}{\sinh(h_1/\nu)}, & x_0 < x < x_1 \\ 0, & x \notin (x_0, x_1). \end{cases}$$

İnterpolasyon kuadratür formülleri kullanılarak ve $\varphi_0(x)$ fonksiyonunun ($\varepsilon\varphi_0''(x) - \varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_0(x_0) = 1, \quad \varphi_0(x_1) = 0, \quad \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0(x)\, dx = \varepsilon \tanh \dfrac{h_1}{2\varepsilon}$) özellikleri dikkate alınarak aşağıdakiler yazıla bilir:

$$\tau^{-1} \int_{t-\tau}^{t} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0(x) \left[-\varepsilon^2 \frac{\partial^3 v(\theta,\xi)}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial v(\theta,\xi)}{\partial t} \right] d\xi d\theta =$$

$$\tau^{-1} \int_{t-\tau}^{t} d\theta \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(\theta,0) + \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(\theta,\xi) \varphi_0'(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} v(\theta,\xi) \varphi_0(\xi)\, d\xi \right\} = \tau^{-1} \int_{t-\tau}^{t} d\theta$$

$$\left\{ \mu_1(\theta) \frac{\partial v}{\partial t}(\theta,0) - g_1(\theta) - \varepsilon^2 \kappa_{1,1} \frac{\partial}{\partial t} v_x(\theta,0) + \frac{\partial v}{\partial t}(\theta,0)\, \varepsilon \tanh(h_1/2\varepsilon) \right\} =$$

$$\tau^{-1} \int_{t-\tau}^{t} \mu_1(\theta) \frac{\partial v}{\partial t}(\theta,0)\, d\theta - \tau^{-1} \int_{t-\tau}^{t} g_1(\theta)\, d\theta -$$

$$\varepsilon^2 \kappa_{1,1} v_{\bar{t},x}(t,0) + \varepsilon \tanh(h_1/2\varepsilon) v_{\bar{t}}(t,0), \qquad t \in \omega_\tau^+$$

Bu nedenle $r_1(t)$ yaklaşım hatası aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$r_1(t)=\overline{g}_1(t)-\tau^{-1}\int_{t-\tau}^{t} g_1(\theta)d\theta+\tau^{-1}\int_{t-\tau}^{t}\mu_1(\theta)\frac{\partial v}{\partial t}(\theta,0)\,d\theta\text{-}$$

$$\mu_1(t)v_{\bar{t}}(t{,}0)+\tau^{-1}\int_{t-\tau}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\varphi_0(\xi)\Big[\beta\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}(uv)+$$

$$b_0(\theta,\xi)v(\theta,\zeta)+b_1(\theta,\xi)u(\theta,\xi)-f_2(\theta,\xi)\Big]d\theta\, d\xi\ .$$

$\tanh x/x\ (x>0)$ fonksiyonunun monoton azalan olduğu dikkate alınırsa

$$x_0^{-1}\int_{x_0}^{x_1}\varphi_0(x)dx=\frac{\varepsilon\tanh(h_1/2\varepsilon)}{\varepsilon h_i^{-1}\left[\tanh(h_i/2\varepsilon)+\tanh(h_{i+1}/2\varepsilon)\right)}\le$$

$$\frac{\tanh(h_1/2\varepsilon)}{2h^{-1}\tanh(h/2\varepsilon)}\le\frac{1}{2}h\quad\left(h=\max_i h_i\right)$$

yazılabilir. Bu sebepten

$$\overline{g}_1(t)=\tau^{-1}\int_{t-\tau}^{t} g_1(\theta)d\theta,\quad \mu_1(\theta)=sbt$$

durumunda Lemma 3.2 dikkate alınarak

$$(\kappa_{0*})^{-1}|\,r_1(t)\,|\le Ch\quad\left(\kappa_{0*}=\min_i\kappa_{0,i}\right)$$

elde edilecektir (benzer değerlendirme $r_2(t)$ için de doğru olacaktır).

(3.6) eşitsizliği (1.1)-(1.6) probleminin sınır katları alanlarının $[0,h_\varepsilon]$ve $[l-h_\varepsilon,l]$ aralıklarına ait olduğunu gösteriyor ($h_\varepsilon=\varepsilon|\ln\varepsilon|$). İleride aşağıdaki bağıntılarla ifade edilen $\hat{\omega}_h^*$ şebekesi kullanılacak:

$$\hat{\omega}_h^*=\hat{\omega}_{0h}\cup\hat{\omega}_{*h}\cup\hat{\omega}_{N,h},$$

burada

$$\hat{\bar{\omega}}_{0h} = \{x_i = -\varepsilon \ln[1-(1-\varepsilon)i\delta], i = 0, 1, ..., N_0, x_0 = 0, x_{N_0} = h_\varepsilon\},$$

$$\hat{\omega}_{*h} = \{x_i \in (h_\varepsilon, l-h_\varepsilon), i = N_0+1, ..., N\},$$

$$\hat{\bar{\omega}}_{N,h} = \{x_i = l + \varepsilon \ln[1-(1-\varepsilon)(N-i)\delta],$$
$$i = N_1+1, ..., N, x_{N_1+1} = l-h_\varepsilon, x_N = l\},$$

$$\delta = 1/N_0, \; N = N_0 + N_1 + 1.$$

Teorem 3.1.

$$\frac{\partial^{k+1} a_i}{\partial t^k dx} \in C(\overline{D}), \quad \frac{\partial^{k+1} b_i}{\partial t^k dx} \in C(\overline{D}) \quad (i = 0,1), \quad \frac{\partial^{k+1} f_i}{\partial t^k dx} \in C(\overline{D}) \quad (i = 1,2)$$

$$\varphi(x), \psi(x) \in C^3(\overline{D}), \quad \mu_i(t), g_i(t) \in C^k[0,T] \quad (i = 1,2) \quad (k = 0 \text{ veya } 1)$$

şartları k=1 için sağlansın. Bu durumda (3.6)-(3.12) fark şemasının hatası için aşağıdaki değerler doğrudur:

a) $$\sum_{k=1}^{2} (\|z_k\|_*^2 + \varepsilon^2 \kappa \|z_{k\bar{x}}\|_0^2) + \bar{\mu}_1 (\kappa_{0*})^{-1} |z_{2,0}|^2 +$$
$$\bar{\mu}_2 (\kappa_{0*})^{-1} |z_{2,N}|^2 \le C(\delta^2 + \tau^2 + h^2)$$

$\hat{\omega}_h^*, t \in \omega_\tau^+$ şebekesinde,

b) $$\sum_{k=1}^{2} \left(\|z_k\|_*^2 + \varepsilon^2 \kappa \|z_{k\bar{x}}\|_0^2\right) + \bar{\mu}_1 (\kappa_{0*})^{-1} |z_{2,0}|^2 + \bar{\mu}_2 (\kappa_{0*})^{-1} |z_{2,N}|^2 \le C(\tau + h)$$

$[0, l]$ aralığındaki keyfi düzgün olmayan şebekede

$a_i(t,x), b_i(t,x) = O(\varepsilon)$ ise, $i = 0,1$.

İspat.

Aşağıdaki eşitliğe bakılacak:

$$\sum_{k=1}^{2}(l_k[z_1+u,z_2+v]-l_k[u,v],z_k)_* = \sum_{k=1}^{2}(R_k,z_k)_* \tag{3.13}$$

$$(x_0 z_{2\bar{t}}, z_2)_* - \varepsilon^2((\kappa_1 z_{2\bar{t}\bar{x}})_{\hat{x}}, z_2)_* =$$

$$\frac{1}{2}\left\{(x_0 z_2, z_2)_* - \varepsilon^2(\kappa_1 z_{2\bar{x}}, z_{2\bar{x}}) + \overline{\mu}_2\left|z_{2,N}\right|^2 + \overline{\mu}_1\left|z_{2,0}\right|^2\right\}_{\bar{t}} +$$

$$\frac{\tau}{2}(\kappa_0 z_{2\bar{t}}, z_{2\bar{t}})_* + \frac{\tau}{2}\varepsilon^2(\kappa_1 z_{2\bar{t}\bar{x}}, z_{2\bar{t}\bar{x}}) +$$

$$\frac{\tau}{2}\overline{\mu}_2 z_{2\bar{t},N}^2 + \frac{\tau}{2}\overline{\mu}_1 z_{2\bar{t},0}^2 - r_2(t)z_{2,N} - r_1(t)z_{2,0}$$

dikkate alınırsa (3.13)'den birkaç kolay işlemden sonra

$$\delta_j \le C\left(\tau\sum_{k=0}^{j-1}\left\{\delta_k + |\beta|\delta_k^2\right\} + u_0\right) \tag{3.14}$$

değerlendirmesi elde edilir. Burada

$$\delta_j = \sum_{k=1}^{2}\left[(z_k(t_j),(z_k(t_j))_* + \varepsilon^2\kappa(z_{k\bar{x}}(t_j), z_{k\bar{x}}(t_j))\right] +$$

$$\overline{\mu}_1(\kappa_{0*})^{-1}\left|z_{2,0}(t,j)\right|^2 + \overline{\mu}_2(\kappa_{0*})^{-1}\left|z_{2,N}(t_j)\right|^2,$$

$$u_0 = (\kappa_{0*})^{-1}\tau\sum_{\omega^+\tau}\left\{\sum_{k=1}^{2}\left[\varepsilon^2\left\|R_k^{(0)}\right\|_{L_2(\hat{\omega}_h^+)}^2 + \left\|R_k^{(1)}\right\|_*^2 + \varepsilon^2\left(\left|R_k^2\right|,1\right)_*^2\right] +\right.$$

$$\left.\varepsilon^4(\overline{\mu}_1)^{-1}\left|R_{2,1}^{(0)}\right|^2 + \varepsilon^4(\overline{\mu}_2)^{-1}\left|R_{2,N}^{(0)}\right|^2\right\} +$$

$$(\kappa_{0*})^{-1}\tau\sum_{\omega_\tau^+}\left(\left|r_1(t)\right|^2 + \left|r_2(t)\right|^2\right).$$

(3.14)'den Bernoulli eşitsizliğinin fark benzeri yardımıyla yeterince küçük τ ve h için

$$\delta_j \leq \frac{Cu_0 \exp(Ct_j)}{1 - Cu_0 |\beta| \left[\exp(Ct_j) - 1\right] (1 + C\tau)^{-1}}$$

eşitsizliği elde edilir. Teoremin ispatı belirlenmiş düzgünlük şartları dahilinde

$$u_0 \leq \begin{cases} C(\tau^2 + h^2 + \delta^2), \hat{\omega}_h^* & \text{şebekesinde,} \\ C(\tau^2 + h^2), & \text{keyfi düzgün olmayan } \hat{\omega}_h \text{ şebekesinde} \end{cases}$$

(eğer $a_i(t,x), b_i(t,x) = 0(\varepsilon), i = 0,1$ ise)

kanıtlanmasıyla son buluyor.

4. PERİYODİK SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ PROBLEM İÇİN FARK ŞEMALARI.

Bu bölümde (1.7)-(1.11) problemi için fark şemaları önerilecek ve incelenecektir. Burada $0 < \varepsilon < 1$ küçük parametredir. $a_i(t,x),\ b_i(t,x)\ (i = 0,1)$ katsayılar, $f_i(t,x)\ (i = 1,2)$ sağ taraf fonksiyonları ve $\varphi(x),\ \psi(x)$ başlangıç fonksiyonları x 'e göre l -periyodik fonksiyonlardır. Bunun dışında bu fonksiyonlar yakınsama için gerekli ve yeterli şartlara sahiptirler.

(1.1)-(1.4) problemi ile uzun periyodik dalgaların suda yayılması incelendiği zaman karşılaşılıyor. Bu problemin farklı yönü, çözümün uzay değişkenine göre türevlerinin $x = 0$ ve $x = l$ noktaları yakınlığında sınır katı özelliğine sahip olmasıdır. Fark şeması $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{N-1}$ baz fonksiyonları yardımıyla kurulur, burada $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{N-1}(x)$ 3.bölümdeki fonksiyonlardır, fakat $\varphi_0(x)$ fonksiyonu (1.5) eşitliğinin periyodikliğini karakterize ediyor ve aşağıdaki şekildedir:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(x_1 - x)/\varepsilon}{\sinh(h_1/\varepsilon)} \equiv \varphi_0^{(1)}(x), & x_0 < x < x_1 \\ \dfrac{\sinh(x - x_{N-1})/\varepsilon}{\sinh(h_N/\varepsilon)} \equiv \varphi_0^{(2)}(x), & x_{N-1} < x < x_N \\ 0, & x \notin (x_0, x_1) \cup (x_{N-1}, x_N). \end{cases}$$

Fark şemaları adi diferansiyel denklemler ve eliptik denklemlerin konvektiv terim içeren durumları için incelenmiştir ve sadece $O(\sqrt{h})$ mertebeden hata değerlendirilmesi yapılmıştır (Beletskaya, 1984; Pechenkina, 1980). (1.5) eşitliğinde önerilen fark yaklaşımı daha hassastır ve h 'a $\left(h = \max\limits_{1 \le i \le N} h_i\right)$ göre 2. dereceden bir lokal yaklaşıma sahiptir. Aynı zamanda hatanın bulunması yöntemi yukarıda bahsedilen metotlardan farklıdır. Bu metotlar interpolasyon kuadratür formüllerinin kullanılmasına dayanıyor.

4.1. Kesin Çözüm için Asimptotik Değerlendirmeler

Lemma 4.1

$$a_i, b_i \in C_0^k\left(\overline{D}\right),\ i=0,1,\quad f_i \in C_0^k\left(\overline{D}\right),\ i=1,2$$

$$\varphi(x), \psi(x) \in W_2^1(0,l),\quad g(t) \in C^k[0,T]$$

(k -tamsayı, 0 veya 1 olabilir)

olmak üzere

$$\delta_* c_2 c_1^{-1}\left[\exp(c_1 T) - 1\right] < 1$$

eşitsizliği sağlansın.

Burada

$$c_1 = \max\Big\{-2a_0(t,x) + |\, a_1(t,x) + b_1(t,x)\,| + |\beta| + 1 - 2b_0(t,x) +$$

$$|\, a_1(t,x) + b_1(t,x)\,| + \frac{1}{2}|\beta| l\varepsilon^4 + l\varepsilon^2 + 1, \frac{2}{l}\varepsilon^2\Big\}$$

$$c_2 = |\beta|\left(\frac{1}{2}l + \frac{2}{l}\right)$$

$$\delta_* = \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|^2_{L_2(\Omega)} + \varepsilon^2\left(\|\varphi'\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\psi'\|^2_{L_2(\Omega)}\right) +$$
$$\int_0^T \exp(-c_1 t)\left[g^2(t) + \|f_1(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f_2(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right]dt.$$

Bu durumda (1.1)-(1.6) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\left\|\frac{\partial^{m_k} u}{\partial t^{m_k}}\right\|_{C\left(\overline{D}\right)} \le C, \qquad \left\|\frac{\partial^{m_k} v}{\partial t^{m_k}}\right\|_{C\left(\overline{D}\right)} \le C, \quad m_k = \overline{0, k+1} \tag{4.1}$$

Burada C, ε ’dan ve şebeke adımlarından bağımsız sabittir.

İspat.

Aşağıdaki eşitlik ele alınır:

$$\left(L_1[u,v],u\right)_{L_2(\Omega)} + \left(L_2[u,v],v\right)_{L_2(\Omega)} = \left(f_1,u\right)_{L_2(\Omega)} + \left(f_2,v\right)_{L_2(\Omega)}.$$

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x},u\right) = 0$$

olduğu dikkate alınırsa birkaç kolay işlemden sonra

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|u\|^2 + \varepsilon^2\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \varepsilon^2\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2\right) - \varepsilon v(t,0)g(t) \le$$

$$-a_*\|u\|^2 - b_*\|v\|^2 + \varepsilon^2\beta\left(uv,\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(f_1,u\right) + \left(f_2,v\right) \tag{4.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\|.\| \equiv \|.\|_{L_2(\Omega)},\quad (\ ,\ ) \equiv (\ ,\ )_{L_2(\Omega)},$$

$$a_* = \min_{\overline{D}}\left[a_0(t,x) - \frac{1}{2}\left|\, a_1(t,x) + b_1(t,x)\,\right|\right],$$

$$b_* = \min_{\overline{D}}\left[b_0(t,x) - \frac{1}{2}\left|\, a_1(t,x) + b_1(t,x)\,\right|\right].$$

Tek değişkenli fonksiyonlar için

$$\|w\|^2_{C(\overline{\Omega})} \le l\|w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2}{l}\left\|\frac{dw}{dx}\right\|^2_{L_2(\Omega)}$$

“embedding” eşitsizliği ve μ -eşitsizliği kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\varepsilon\left|\, v(t,0)g(t)\,\right| \le \frac{1}{2}\left|\, g(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 v^2(t,0) \le$$

$$\frac{1}{2}|\ g(t)\ |^2+\frac{l}{2}\varepsilon^2\|v\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{1}{l}\varepsilon^2\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Bu eşitsizliğin (4.2)'den elde edildiği dikkate alınırsa (Amiraliyev, 1989) aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\delta'(t)\le c_1\delta(t)+c_2\delta^2(t)+\rho(t)\,, \tag{4.3}$$

burada

$$\delta(t)=\|u\|^2+\|v\|^2+\varepsilon^2\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\varepsilon^2\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2,$$

$$\rho(t)=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2+g^2(t).$$

(4.3)'den Bernoulli diferansiyel eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki değerlendirmeler elde edilir:

$$\left\|\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right\|_{C([0,T];L_2(\Omega))}\le C\varepsilon^{-s},\qquad \left\|\frac{\partial^s v}{\partial x^s}\right\|_{C([0,T];L_2(\Omega))}\le C\varepsilon^{-s},\ \ s=0,1 \tag{4.4}$$

Şimdi (4.4) eşitsizliği kullanılarak (4.1)'in doğru olduğu gösterilebilir. Öncelikle

$$\varepsilon^2 w''-a^2w=f(x),\quad 0<x<l$$

$$w(l)-w(0)=\varphi^*,\quad w'(l)-w'(0)=\frac{\psi^*}{\varepsilon}$$

probleminin çözümünün

$$w(x)=\int_0^l G^*(x,s)f(s)\,ds+\varphi^*p(x)+\psi^*q(x)$$

formülüyle ifade edildiğini belirtilir. Burada

$$G^*(x,s)=\frac{a}{2\varepsilon}\cdot\frac{\sinh(ax/\varepsilon)+\sinh(a(l-x)/\varepsilon)}{[\cosh(al/\varepsilon)-1]\sinh(al/\varepsilon)}+$$
$$[\sinh(a\xi/\varepsilon)+\sinh(a(l-x)/\varepsilon)]\kappa(x)\,,$$

$$p(x)=\frac{\sinh(ax/\varepsilon)-\sinh(a(l-x)/\varepsilon)}{2\sinh(al/\varepsilon)}$$

$$q(x)=\frac{\sinh(ax/\varepsilon)+\sinh(a(l-x)/\varepsilon)}{2a[\cosh(al/\varepsilon)-1]}\equiv\frac{1}{2a}\cdot\frac{e^{-ax/\varepsilon}+e^{a(x-l)/\varepsilon}}{1-e^{-al/\varepsilon}},$$

ayrıca,

$$\int_0^l G^*(x,s)ds,\ \ |p(x)|,\ \ |q(x)|\le C. \tag{4.5}$$

(1.7) ve (1.8) denklemlerinde x değişkeni ξ ile değiştirilip, birinci denklem $G(x,\xi)$ fonksiyonu, ikinci denklem de $G^*(x,\xi)$ ile çarpılıp, ξ'ye göre 0'dan l'ye kadar integral alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\alpha}{2}\int_0^x u^2(t,\eta)\,d\eta+\int_0^l G(x,\xi)\times$$
$$\left\{-\frac{\alpha}{2}\int_0^\xi u^2(t,s)\,ds-a_0(t,\xi)u(t,\xi)-a_1(t,\xi)v(t,\xi)+f_1(t,\xi)\right\}d\xi+$$
$$\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sinh x/\varepsilon}{\sinh\varepsilon^{-1}l}\cdot\int_0^l u^2(t,\eta)\,d\eta, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\beta\int_0^x u(t,\eta)v(t,\eta)\,d\eta+\int_0^l G^*(x,\xi)\times$$
$$\left\{-\beta\int_0^\xi u(t,s)v(t,s)\,ds-b_0(t,\xi)v(t,\xi)-a_1(t,\xi)u(t,\xi)+f_2(t,\xi)\right\}d\xi+$$
$$p(x)\beta\int_0^l u(t,\eta)v(t,\eta)\,d\eta+q(x)g(t). \tag{4.7}$$

Bu eşitliklerin $t'\in(0,t)$'de integrali alınıp mutlak değerlerlerinin toplamında (4.4) ve (4.5) ifadeleri de göz önünde bulundurulursa Bernoulli tipi diferansiyel eşitsizlik elde edilir, buradan da $m_k=0$ için (4.1) değerlendirmesi çıkar.

Lemma 4.2.

$$a_i, b_i \in C_0^k\left(\overline{D}\right),\ i = 0,1, \quad f_i \in C_0^k\left(\overline{D}\right),\ i = 1,2$$

$$\varphi(x), \psi(x) \in W_2^1(0,l), \quad g(t) \in C^k[0,T]$$

(k -tamsayı, 0 veya 1 olabilir)

koşulları dahilinde ve

$$\frac{\partial^{k+s} a_i}{\partial t^k \partial x^s} \in C\left(\overline{D}\right), \quad \frac{\partial^{k+s} b_i}{\partial t^k \partial x^s} \in C\left(\overline{D}\right), \qquad (i = 0,1),$$

$$\frac{\partial^{k+s} f_i}{\partial t^k \partial x^s} \in C\left(\overline{D}\right), \qquad (i = 1,2),$$

$$\varphi(x), \psi(x) \in C^{2+s}\left(\overline{\Omega}\right), \quad g(t) \in C^k[0,T]$$

$$(k = 0 \text{ veya } 1; \quad s = 1 \text{ veya } 2)$$

olması durumunda, (1.7)-(1.11) probleminin çözümü için aşağıdakiler doğrudur:

$$\left|\frac{\partial^{m_k + n_s} u}{\partial t^{m_k} \partial x^{n_s}}\right| \le C\left\{1 + \frac{1}{\varepsilon^{n_s}}\left(e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}\right)\right\},$$

$$\left|\frac{\partial^{m_k + n_s} v}{\partial t^{m_k} \partial x^{n_s}}\right| \le C\left\{1 + \frac{1}{\varepsilon^{n_s}}\left(e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}\right)\right\}$$

$$\left((t,x) \in \overline{D}, \quad m_k = \overline{0, k+1}; \ n_s = \overline{1, s}, \ s = 1, 2\right).$$

Sadece ispatın önemli noktalarına vurgu yapılacaktır, çünkü ispat bir önceki bölümdekine benzerlik oluşturmaktadır.

Öncelikle, eğer

$$a_i, b_i \in C_{s-1}^k\left(\overline{D}\right) \quad (i = 0,1), \quad f_i \in C_{s-1}^k\left(\overline{D}\right) \quad (i = 1,2)$$

$$\varphi(x), \psi(x) \in C^{1+s}[0,l], \quad g(t) \in C^k[0,T] \quad (k = 0 \text{ veya } 1, s = 1 \text{ veya } 2)$$

ise aşağıdaki eşitsizlikler ispatlanır:

$$\left\| \frac{\partial^{m_k+n_s} u}{\partial t^{m_k} \partial x^{n_s}} \right\|_{C(\overline{D})} \le C\varepsilon^{-n_s}, \qquad \left\| \frac{\partial^{m_k+n_s} v}{\partial t^{m_k} \partial x^{n_s}} \right\|_{C(\overline{D})} \le C\varepsilon^{-n_s},$$

$(\, m_k = \overline{0, k+1};\ n_s = \overline{1, s+1},\ s = 1, 2\,)$. (4.8)

(4.8) eşitsizliği elde edildikten sonra ispatın devamı yapılır, yani (4.8) yardımıyla $\dfrac{\partial^{m_k+n_s} u}{\partial t^{m_k} \partial x^{n_s}}$, $\dfrac{\partial^{m_k+n_s} v}{\partial t^{m_k} \partial x^{n_s}}$ türevlerinin sınır değerlendirmeleri elde edilir (Amiraliyev, 1989).

4.2. Fark Şeması ve Düzgün Hata Değerlendirmesi

2. $\hat{\varpi}_{\tau h} = \varpi_\tau \times \hat{\varpi}_h$ şebekesinde (1.7)-(1.11) problemi aşağıdaki fark şeması ile değiştirilecek:

$$l_1[y_1, y_2] = \kappa_0 f_1(\bar{t}, x) \ , \tag{4.9}$$

$$l_2[y_1, y_2] = \kappa_0 f_2(t, x) \ , \ (t, x) \in^{+} \omega_\tau \times \hat{\omega}_h \, , \quad .. \tag{4.10}$$

$$y_1(0, x) = \varphi(x), \quad y_2(0, x) = \psi(x), \quad .. \tag{4.11}$$

$$y_1(t,0) = y_1(t,l) = 0, \quad y_2(t,0) = y_2(t,l), \quad ... \tag{4.12}$$

$$l_2^* y_2 = h_1 y_{2t,0} + \varepsilon^2 \kappa \left(y_{2t\bar{x},N} - y_{2tx,0} \right) + \frac{\beta \varepsilon^2 h_1}{2} \times$$

$$\left\{ (y_1 y_2)_{x,0} + (y_1 y_2)_{\bar{x},N} \right\} + h_1 b_0(\bar{t},0) y_{2,0} + h_1 b_1(\bar{t},0) y_{1,0} - h_1 f_2(\bar{t},0) =$$

$$\frac{\varepsilon}{\kappa_{0,0}} g(\bar{t}), \ \left(\bar{t} = t + \frac{\tau}{2} \right) . \tag{4.13}$$

$l_1[y_1, y_2]$, $l_2[y_1, y_2]$ fark operatörleri ve $\kappa_{0,i} \left(i = \overline{1, N-1} \right)$ sabitleri bundan önceki bölümde oldukları şekildedirler,

$$\kappa_{0,0} = h_1^{-1} \int_0^l \varphi_0(x) dx = \frac{1}{2} \varepsilon \, h_1^{-1} \tanh\left(\frac{h_1}{2\varepsilon} \right)$$

$$\kappa = \frac{h_1^2}{4\varepsilon^2 \sinh^2\left(\frac{h_1}{2\varepsilon} \right)} .$$

Ayrıca başlangıç fonksiyonlarının periyodik olmaları yanında $h_1 = h_N$ olduğu da varsayılıyor.

(4.9)-(4.10) şemasının $R_k(t, x)$ $(k = 1,2)$ yaklaşım hataları bir önceki problemde olduğu gibi formüllerle ifade edilebildiklerinden sadece (4.13) fark ifadesinin yaklaşım hatası değerlendirilecek.

$$r(t)=\frac{\varepsilon}{\kappa_{0,0}}g(\bar{t})-l_2^*v$$

hatası için aşağıdaki eşitliğe bakılır:

$$r(t)=\frac{\varepsilon}{\kappa_{0,0}}g(\bar{t})-l_1^*v\equiv\frac{\varepsilon}{\kappa_{0,0}}g(\bar{t})-l_2^*v+(\kappa_{0,0})^{-1}\tau^{-1}\times$$

$$\int_t^{t+\tau}\int_0^l\varphi_0(\xi)[L_2[u,v]-f_2(\eta,\xi)]\,d\eta d\xi$$

(2.1), (2.2) interpolasyon kuadratür formülleri, $\varphi_0^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha=1,2)$ fonksiyonunun özellikleri kullanılarak ve $v(t,x)$ fonksiyonunun periyodik olduğu göz önünde bulundurularak aşağıdakiler elde edilir:

$$\tau^{-1}(\kappa_{0,0})^{-1}\int_t^{t+\tau}\int_0^1\varphi_0(\xi)\left[-\varepsilon^2\frac{\partial^3v(\eta,\xi)}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{\partial v(\eta,\xi)}{\partial t}\right]d\eta d\xi=$$

$$-\frac{\varepsilon}{\kappa_{0,0}}\tau^{-1}\int_t^{t+\tau}g(\eta)\,d\eta+\varepsilon^2\kappa\left(v_{t\bar{x},N}-v_{tx,0}\right)+h_1v_t(t,x).$$

Bu sebepten $r(t)$ yaklaşımının hatası aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$r(t)=\frac{\varepsilon}{\kappa_{0,0}}g(\bar{t})-\tau^{-1}\frac{\varepsilon}{\kappa_{0,0}}\int_t^{t+\tau}g(\eta)\,d\eta+\beta\varepsilon^2\tau^{-1}(\kappa_{0,0})^{-1}\times$$

$$\int_t^{t+\tau}\int_0^l\varphi_0(\xi)\frac{\partial}{\partial x}\left(u(\eta,\xi)v(\eta,\xi)\right)d\xi d\eta\times$$

$$\beta\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{(uv)_{x,0}+(uv)_{\bar{x},N}\right\}+(\kappa_{0,0})^{-1}\tau^{-1}\int_t^{t+\tau}\int_0^l\varphi_0(\xi)\left[b_0(\eta,\xi)-b_0(\bar{t},x_0)\right]d\xi d\eta+$$

$$(\kappa_{0,0})^{-1}\tau^{-1}\int_t^{t+\tau}\int_0^l\varphi_0(\xi)\times\left[b_1(\eta,\xi)-b_1(\bar{t},x_0)\right]d\xi\,d\eta$$

$$(\kappa_{0,0})^{-1}\tau^{-1}\int_{t}^{t+\tau}\int_{0}^{l}\varphi_0(\xi)[f_2(\eta,\xi)-f_2(\bar{t},x_0)]d\xi\, d\eta .$$

Buradan, Lemma 4.2'nin koşulları $(s=1)$ dahilinde

$$|\, r(t)\,|\le C(\tau+h_1^2)$$

olduğu görülüyor. $[0,l]$ aralığında $x_0=0$ ve $x_N=l$ olan ve bir önceki bölümde kullanılan düzgün olmayan $\hat{\omega}_h^*$ ve $\hat{\omega}_h$ şebekeleri dahil edilsin. Bu durumda aşağıdaki Teorem doğrudur:

Teorem 4.1.

$$a_i, b_i \in C_0^k(\overline{D}),\ i=0,1,\quad f_i\in C_0^k(\overline{D}),\ i=1,2$$

$$\varphi(x),\psi(x)\in W_2^1(0,l),\quad g(t)\in C^k[0,T]$$

(k -tamsayı, 0 veya 1 olabilir).

$$\frac{\partial^{k+s}a_i}{\partial t^k\partial x^s}\in C(\overline{D}),\qquad \frac{\partial^{k+s}b_i}{\partial t^k\partial x^s}\in C(\overline{D}),\qquad (i=0,1)$$

$$\frac{\partial^{k+s}f_i}{\partial t^k\partial x^s}\in C(\overline{D}),\qquad (i=1,2)$$

$$\varphi(x),\psi(x)\in C^{2+s}(\overline{\Omega}),\quad g(t)\in C^k[0,T]$$

$(k=0$ veya $1;\quad s=1$ veya $2)$

koşulları dahilinde $(k=1$ ve $s=1$ ise$)$ (4.9)-(4.13) fark şemasının hatası için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\sum_{k=1}^{2}\{\kappa_*\varepsilon\|\, z_{kx}(t)\,\|_0+\|\, z_k(t)\,\|_*\}+(h_1)^{\frac{1}{2}}|\, z_2(t,0)\,|\le$$

$$\begin{cases} C(\tau+h+\delta), & \hat{\omega}_h^* \text{ şebekesinde} \\ C(\tau+h), & \hat{\omega}_h \text{ şebekesinde},\quad a_i,b_i=O(\varepsilon),(i=0,1)\text{ise}\end{cases}$$

burada

$$\kappa_* = \frac{\min\limits_{1\le i\le N-1} \kappa_{1,i}}{\min\limits_{1\le i\le N-1} \kappa_{0,i}}, \quad t\in^+ \omega_\tau$$

İspat.

Aşağıdaki eşitlik ele alınsın:

$$\sum_{k=1}^{2}\left(l_k\left[z_1+u, z_2+v\right]-l_k\left[u,v\right], z_k\right)_* = \sum_{k=1}^{2}\left(R_k, z_k\right)_* .$$

Buradan (4.13) şartı da dikkate alınarak birkaç işlemden sonra aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\delta_j \le C\left(\tau\sum_{k=0}^{j-1}\left\{\delta_k + |\beta|\delta_k^2\right\} + u_0\right),$$

burada

$$\delta_j = \sum_{k=1}^{2}\left\{\left\| z_k\left(t_j\right)\right\|_*^2 + \varepsilon^2\kappa_*\left\| z_{k\bar{x}}\left(t_j\right)\right\|_0^2\right\} + h_1\left| y_2\left(t_{j,0}\right)\right|^2 ,$$

$$u_0 = \left(\kappa_{0*}\right)^{-1}\tau\sum_{\omega_\tau}\left[\sum_{k=1}^{2}\left\{\varepsilon^2\left\|R_k^0\right\|_{L_2\left(\hat{\omega}_h^+\right)}^2 + \left\|R_k^{(1)}\right\|_*^2 + \varepsilon^2\left(\left|R_k^{(2)}\right|,1\right)_*^2\right\} + \left| r(t)\right|^2\right].$$

İspat, u_0 için olan ifadeye dahil olan normların değerlendirilmesi ve Bernoulli fark eşitsizliğinin kullanılması ile sona eriyor.

5. SAYISAL SONUÇLAR

Aşağıdaki singüler-pertürbe olmuş başlangıç sınır değer problemi incelendi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + 3\varepsilon^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = 2(1+\gamma t) + \cos^2 \pi x, \quad 0 < t \le 1, \quad 0 < x < 1, \tag{5.1}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = u(0,x) = 0. \tag{5.2}$$

Çözümün asimptotik yaklaşımı aşağıdaki şekildedir:

$$u_\varepsilon(t,x) = 2t\left\{\cos^2 \pi x - \frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}}{1 + e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\right\}$$

$$u(t,x) = u_\varepsilon(t,x) + O(\varepsilon).$$

(5.1)-(5.2) probleminin çözümü için (3.7)-(3.12) fark şeması kullanıldı. Probleme uygun bu fark şeması aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\kappa_0 \frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} - \varepsilon^2 \frac{1}{\eta_i}\left\{\kappa_{1,i+1}\left[\frac{y_{i+1}^j - y_{i+1}^{j-1} - y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau\, h_{i+1}}\right] - \right.$$

$$\left.\kappa_{1,i} \frac{y_i^j - y_i^{j-1} - y_{i-1}^j + y_{i-1}^{j-1}}{\tau\, h_i}\right\} +$$

$$\alpha \frac{\varepsilon^2}{3} \kappa_0^{(1)}\left[\frac{\left(y_i^{j-1}\right)^2 - \left(y_{i-1}^{j-1}\right)^2}{h_i} + y_i^{j-1} \frac{y_i^{j-1} - y_{i-1}^{j-1}}{h_i}\right] +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{3} \kappa_0^{(2)}\left[\frac{\left(y_{i+1}^{j-1}\right)^2 - \left(y_i^{j-1}\right)^2}{h_{i+1}} + y_i^{j-1} \frac{y_{i+1}^{j-1} - y_i^{j-1}}{h_{i+1}}\right] +$$

$$\kappa_0 a\left(t_{j-\frac{1}{2}}, x_i\right) y_i^{j-1} = \kappa_0 f\left(t_{j-\frac{1}{2}}, x_i\right).$$

Bu fark denkleminin yeniden düzenlenmesiyle

$$-A_i^j y_{i-1}^j + C_i^j y_i^j - B_i^j y_{i+1}^j = F_i^j, \quad 1 \le i \le N-1, \ j = 1,2,..., \tag{5.3}$$

$$y_0^j = 0, \ y_N^j = 0, \ y_i^0 = 0 \tag{5.4}$$

elde edilir, burada

$$A_i^j = \frac{\varepsilon^2 \kappa_{1,i}}{\tau h_i \eta_i}, \qquad B_i^j = \frac{\varepsilon^2 k_{1,i+1}}{\tau h_{i+1} \eta_i}, \qquad C_i^j = \frac{\kappa_0}{\tau} + \frac{\varepsilon^2 \kappa_{1,i+1}}{\tau h_{i+1} \eta_i} + \frac{\varepsilon^2 \kappa_{1,i}}{\tau h_i \eta_i},$$

$$F_i^j = \frac{\kappa_0}{\tau} y_i^{j-1} + \alpha \frac{\varepsilon^2}{\eta_i} \left\{ \kappa_{1,i+1} \frac{y_i^{j-1} - y_{i+1}^{j-1}}{\tau h_{i+1}} + \kappa_{1,i} \frac{y_i^{j-1} - y_{i-1}^{j-1}}{\tau h_i} \right\} -$$

$$\alpha \frac{\varepsilon^2}{3} \kappa_0^{(1)} \left[\frac{\left(y_i^{j-1}\right)^2 - \left(y_{i-1}^{j-1}\right)^2}{h_i} + y_i^{j-1} \frac{y_i^{j-1} - y_{i-1}^{j-1}}{h_i} \right] +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{3} \kappa_0^{(2)} \left[\frac{\left(y_{i+1}^{j-1}\right)^2 - \left(y_i^{j-1}\right)^2}{h_{i+1}} + y_i^{j-1} \frac{y_{i+1}^{j-1} - y_i^{j-1}}{h_{i+1}} \right] +$$

$$\kappa_0 a\left(t_{j-\frac{1}{2}}, x_i \right) y_i^{j-1} + \kappa_0 f\left(t_{j-\frac{1}{2}}, x_i \right).$$

(5.3)-(5.4) bağıntıları j. katta $y_1^j, ..., y_{N-1}^j$ değerlerine göre üç köşegenli bir lineer sistem oluşturmaktadırlar. Bu lineer sistem kovma yöntemi kullanılarak C Programlama dilinde çözülmüştür.

Hem düzgün hem de düzgün olmayan şebekelerdeki durumlar incelendi. Aşağıdaki tabloda farklı $\varepsilon, N, M, \gamma$ değerleri için $\|y-u\|_{C(\bar{\omega}_{\tau h})}$ hata normu verilmiştir:

N,M ε	ε *=M=10* *γ=* ε	*N=M=10* ε *=1*	*N=M=50* *γ=* ε	*N=M=50* *γ=1*	*N=M=50* N_0*=16, γ=1*
10^{-3}	$0{,}14\times10^{-3}$	$0{,}59\times10^{-1}$	$0{,}11\times10^{-3}$	$0{,}13\times10^{-1}$	$0{,}30\times10^{-4}$
10^{-6}	$0{,}12\times10^{-4}$	$0{,}59\times10^{-1}$	$0{,}12\times10^{-4}$	$0{,}12\times10^{-1}$	$0{,}58\times10^{-5}$

Son sütun, sınır katları dâhilinde 17'şer nokta, sınır katları haricinde ise 16'şar nokta bulunan düzgün olmayan şebeke için bulunan sonuçları ifade ediyor (sınır katları haricinde şebeke düzgündür). Tablodan da görüldüğü gibi $\gamma = \varepsilon$ olması durumunda da düzgün şebeke kurulabilir, bu da Teorem 3.1'in b) durumuna uygundur.

6. SONUÇ

Bu çalışmada singüler pertürbe özellikli Boussinesq sistemi için başlangıç sınır-değer problemleri ele alındı. Bu problemler için düzgün şebekede iki katlı üstel fark şemaları kuruldu. Önerilen fark şemaları açık tipli olup her katta üç köşegenli lineer cebirsel denklem sisteminin çözümünü gerektirmektedir. Enerji eşitsizlikleri metodu kullanılarak fark şemalarının perturbasyon parametresine göre düzgün yakınsama hızları değerlendirildi. Test sonuçlarının teorik sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü. Elde edilen bu sonuçlar daha komplike başlangıç sınır değer problemlerinin incelenmesinde kullanılabilirler.

KAYNAKLAR

Amick Charles, J., 1984. Regularity and uniqueness of solutions to the Boussinesque system of equations. ***J. Diff. Equat., 54***(2): 231-247.

Amiraliyev, G.M., 1988. On the numerical solution of the system of Boussinesque with boundary layers. ***USSR Modelling in mechanics, 3***: 3–14.

Amiraliyev, G.M., 1990. A difference method for solving a problem in the theory of dispersive waves**.** ***USSR Diff. Equat., 26***: 2146-2154.

Amiraliyev, G.M., Mamedov, Y.D., 1995. Difference schemes on the uniform mesh for a singularly perturbed pseudo-parabolic equations**.** ***Tr. J. Math., 19***: 207-222.

Barenblatt, G., Zheltov, I., Kochina, I., 1960. Basic concept in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. ***J. Appl. Math. Mech., 24*****:** 1286-1303.

Beletskaya, A.A., 1984. On the solution for periodic problem for elliptic equation with a small parameter. In ***Differential Equations with Small Parameter,*** 69–25.

Bhardwaj, D., Shankar, R., 2000. A computational method for reqularized long wave equation. ***Comput. Math. Appl., 40***: 1397-1404.

Chen, P.J., Gurtin, M.E., 1968. On a theory of heat condution involving two temperatures**.** ***Z.Angew. Math. Phys., 19***: 614-627.

Davis, P.L., 1970. A quasilinear parabolic and related third order problem. ***J. Math. Anal. Appl***., ***49***: 327-335.

Duru, H., 2004. Difference schemes for the singularly perturbed Sobolev periodic boundary problem. ***Appl. Math. Comput***., ***149***: 187-201.

Ewing, R.E., 1975. Numerical solution of Sobolev partial differential equations. ***SIAM J. Numer. Anal.***, ***12***: 345-363.

Ewing, R.E., 1978. Time-stepping Galerkin methods for nonlinear Sobolev partial differential equations. ***SIAM J. Numer. Anal.***, ***15***: 112-115.

Farell, P.A., Hegarty, A.F., Miller, J.J.H., O'Riordan, E., Shishkin, G.I.,2000. ***Robust Computational Techniques for Boundary Layers***. Chapman & Hall / CRC, Boca Raton.

Ford, W.H., Ting, T.W., 1974. Uniform error estimates for difference approximations to nonlinear pseudo-parabolic partial differential equations **.** ***SIAM J. Numer Anal., 15***: 155-169.

Gu, H., 1999. Characteristic finite element methods for non-linear Sobolev equations. ***Appl. Math. Comput., 102***: 51-62.

Guo, B.Y., Manoranjan, V.S., 1985. A spectral method for solving the RLW equation. ***IMA J. Numer. Anal., 5***: 307-318.

Guo, B.Y., Cao, W.M., 1988. The Fourier pseudospectral method with a restrain operator for the RLW equation. ***J. Comput. Phys., 74***: 110-126.

Liu, T., Lin, Y., Rao, M., Cannon, J.R., 2002. Finite element methods for Sobolev equations. ***J. Comput. Math., 20***: 627-642.

Nakao, M.T., 1985. Error estimates of a Galerkin method for some nonlinear Sobolev equations in one space dimension. ***Numer. Math., 47***: 139-157.

Pechenkina, A.A., 1980. Solution of the periodic problem for second order ordinary differential equation with small parameter in its leading derivatives. In ***Differential Equations with Small Parameter,*** Ural Scientific Centre, 111–117.

Showalter, R.E., 1975. A nonlinear parabolic Sobolev equation. ***J. Math. Anal. Appl., 50***: 183-190.

Showalter, R.E., 1977. Well-posed problems for some nonlinear dispersive waves. ***J. Math. Pures et Appl., 56***: 123-135.

Sun, T., Yang, D., 2002. The finite difference streamline diffusion methods for Sobolev equations with convection-dominated term. ***Appl. Math. Comput., 125***: 325-345.

Winther, R., 1982. A finite element method for a version of the Boussinesque equations. ***SIAM J. Numer. Anal., 19***: 561-570.

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Bakü'de doğdu. İlk, orta öğrenimini ve liseyi Bakü'de 1989'da tamamladı. Aynı yıl Bakü Devlet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı ve 1994 yılında mezun oldu. 1994-1996 yılları arasında Bakü'de Matematik öğretmenliği yaptı. 1996 yılında Türkiye'ye gelerek Van'da özel bir dershanede mesleğine devam etti. 1997 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans eğitimine başladı. 2000 yılında aynı üniversiteye Öğretim Görevlisi olarak atandı. 2001 yılında Yüksek Lisans eğitimini tamamladı ve 2003 yılında yine Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Doktora programına başladı. İki çocuk annesi.