

DÖNÜŞÜME BAĞLI YARIDEĞİŞMELİ
HALKALAR VE MODÜLLER

Nazım AĞAYEV

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MART 2006
ANKARA

Nazım AĞAYEV tarafından hazırlanan DÖNÜŞÜME BAĞLI YARIDEĞİŞMELİ HALKALAR VE MODÜLLER adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

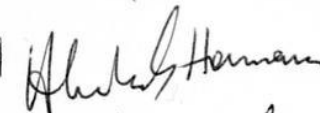
Prof.Dr. Abdullah HARMANCI

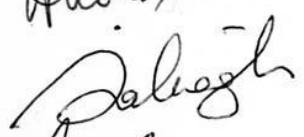
Tez Yöneticisi



Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Dursun TAŞCI 

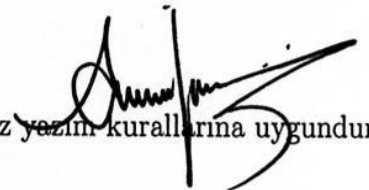
Üye : Prof. Dr. Abdullah HARMANCI 

Üye : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU 

Üye : Prof. Dr. Ali Bülent EKİN 

Üye : Doç. Dr. Ahmet ARIKAN 

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



**DÖNÜŞÜME BAĞLI YARIDEĞİŞMELİ
HALKALAR VE MODÜLLER
(Doktora Tezi)**

Nazım AĞAYEV

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mart 2006**

ÖZET

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölüm sonraki bölümlerde kullanılacak kavramlara ve önbilgilere ayrılmıştır. Üçüncü bölümde yarıdeğişmeli halka ve modüllerin özellikleri araştırılmıştır. Dördüncü bölümde halkanın dönüşümüne bağlı yarıdeğişmeli halka ve modüller incelenmiştir. Beşinci bölümde ise monoid halkasının yarıdeğişmeli olması ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Bilim Kodu	: 204.1.025
Anahtar Kelimeler	: α -yarıdeğişmeli halka, α -yarıdeğişmeli modül
Sayfa Adedi	: 70
Tez Yöneticisi	: Prof. Dr. Abdullah Harmancı

SEMICOMMUTATIVE RINGS AND MODULES
DEPENDING ON MAPPINGS

(Ph. D. Thesis)

Nazım AĞAYEV

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

March 2006

ABSTRACT

This work consists of five chapters. The first chapter contains introduction part and the second chapter is a preparatory section containing notions that will be needed. The third chapter concerns semicommutativity of rings and modules. In the fourth chapter it is dealt with semicommutativity of rings and modules depending on a given map of the ring. In the fifth chapter, some results on semicommutativity of monoid rings are obtained.

Science Code: : 204.1.025
Key Words : α -semicommutative ring, α -semicommutative module
Page Number : 70
Adviser : Prof. Dr. Abdullah Harmancı

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca her adımda bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım, tez çalışmamın her safhasında emeği olan, değerli ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman benden esirgemeyen, tecrübesiyle beni yönlendiren ve kendisinden pek çok şey öğrendiğim danışmanım Sayın Prof. Dr. Abdullah HARMANCI'ya, çok değerli fikirleri ile tez çalışmama önemli katkılarda bulunan Sayın Doç. Dr. A. Çiğdem Özcan'a, tezin teknik yapılandırmasındaki önemli katkılarından dolayı araştırma görevlisi Sayın Bülent SARAÇ'a, bu çalışmalarım boyunca doktora tez izlemesi aşamalarında yaptıkları değerli katkı ve aynı zamanda yönlendirmelerinden dolayı Sayın Prof. Dr. Dursun TAŞÇI ve Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU'na, bana her zaman değerli fikirlerini ve yardımlarını esirgemeyen eşim Vüsale HÜSEYNOVA'ya bütün gönlümle teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	2
2.1. Halka ve Modül Genişlemeleri	3
2.2. Armendariz ve α -Armendariz Halkalar ve Modüller.....	5
2.3. Baer ve Quasi-Baer Modüller.....	8
3. YARIDEĞİŞMELİ HALKALAR VE MODÜLLER	10
3.1. Yarıdeğişmeli ve Armendariz Modüller.....	10
3.2. Baer ve Benzeri Halka ve Modüllerle Bağlantılar.....	22
4. α -YARIDEĞİŞMELİ HALKALAR VE MODÜLLER	40
4.1. İnmiş ve α -Katı Halkalarla Bağlantı.....	40
5. MONOİD HALKASININ YARIDEĞİŞME ÖZELLİKLERİ	62
5.1. Monoid Halkalarının Yarıdeğişme Özelliği.....	63
KAYNAKLAR.....	68
ÖZGEÇMİŞ.....	70

1. GİRİŞ

Bu çalışmada R halkası birimli ve birleşmeli, modüller birimli sağ R -modül kabul edilecektir. M bir modül ve α , R nin kendi içine bir halka dönüşümü olsun. M nin $m \in M$ ve $r \in R$ için $mr = 0$ dan $mRr = 0$ elde edilirse M ye yarıdeğişmeli modül, M nin her $m \in M$ ve $r \in R$ için $mr = 0$ dan $mR\alpha(r) = 0$ elde edilirse M ye α -yarıdeğişmeli modül diyeceğiz. Burada R halkası kendi üzerinde sağ modül olarak yarıdeğişmeli ya da α -yarıdeğişmeli modül ise R ye yarıdeğişmeli ya da α -yarıdeğişmeli halka diyeceğiz. α dönüşümü kullanılarak α -yarıdeğişmeli modül ve halka kavramları araştırılacak ve bu halka sınıflarının diğer özellikleri yanında α -Armendariz, α -katı, Baer, Quasi-Baer halkalar ile ilgileri incelenecektir.

Giriş ve temel kavramlar verildikten sonra bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde yarıdeğişmeli halkalar tanımlanacak ve onlarla ilgili önemli ve ilginç özellikler irdelenecektir. Yarıdeğişmeli halkaların Armendariz halkaları ile olan bağlantıları, onların ne zaman aynı ve ne zaman farklı olduklarını gösteren örnek ve teoremlerle pekiştirilecektir.

Dördüncü bölümde dönüşüme bağlı olan α -yarıdeğişmeli halka ve modüllerin genel özellikleri ile beraber Baer ve benzeri halka ve modüllerle onların bağlantıları ele alınacaktır.

Beşinci bölümde ise halkaların yarıdeğişmeli özelliklerinin çokterimli halkalardaki davranışının nasıl olduğu sorusu araştırılacaktır. Bunun için M bir monoid ve R bir halka olmak üzere $R[M]$ monoid halkasından hareketle M nin ve R halkasının yapılarına göre $R[M]$ halkasının yarıdeğişmeli özelliğini araştıracağız. $R[M]$ halkası R bileşenli çokterimliler halkasının genel halidir. Bu yönde R halkası yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $R[M]$ yarıdeğişmelidir özelliği ispatlanacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu çalışmamızda R halkasını birleşmeli ve birimli halka olarak kabul edeceğiz. R halkasının boştan farklı X altkümesi için

$$r_R(X) = \{r \in R \mid Xr = 0\}$$

$$l_R(X) = \{r \in R \mid rX = 0\}$$

kümelerini sırayla X kümesinin R içindeki sağ sıfırlayanı ve sol sıfırlayanı olarak kabul edeceğiz. Çalışmamız boyunca aksi söylenmedikçe α dönüşümünü her zaman $\alpha : R \longrightarrow R$ halka homomorfizması olarak kabul edeceğiz ve aksi söylenmedikçe α , $\alpha(1) = 1$ şartının sağlamasını gerektirmeyen bir dönüşüm olacaktır. 1 veya id ile R nin birim dönüşümünü ve δ ile R nin bir α - türevini göstereceğiz, yani her $r, s \in R$ için

$$\delta(r + s) = \delta(r) + \delta(s)$$

$$\delta(rs) = \delta(r)\alpha(s) + \alpha(r)\delta(s)$$

şartlarını sağlayan bir $\delta : R \rightarrow R$ fonksiyonunu kabul edeceğiz.

R bir C^* -cebiri olsun. R nin bir p ögesi $p = p^2 = p^*$ şartını sağlarsa p ye izdüşüm denir. Her ögesinin sağ sıfırlayanı bir izdüşüm ile üretilen halkaları Rickart (33) inceledi ve bu tür halkalara Rickart halkalar denildi. Bu kavramı Kaplansky (18) AW^* -cebirlerine genişletti. R , C^* -cebirinin her boş olmayan alt kümesinin sıfırlayanı bir izdüşüm ile üretilirse R ye AW^* -cebiri denir. AW^* -cebir kavramları tamamen fonksiyonel analiz kavramlarıdır. Zaman içinde bu kavramlar cebir yönünde genelleştirildiler. Sıfırdan farklı nilpotent elemanı olmayan R halkasına inmiş halka denir. Her kare-eş ögesi merkezci olan halkaya ise Abel halka denmektedir. Her değişmeli halka abeldir. Kaplansky (18) Baer halkalarını tanımladı ve bu hal-

kaların yapılarını inceledi. Her boştan farklı altkümesinin sağ sıfırlayanı bir kare-eş(idempotent) öge tarafından üretilen halkaya Baer halka denildi. Clark (8), quasi-Baer halka tanımını verdi. Her sağ idealinin sağ sıfırlayanı bir kare-eş ögesi tarafından üretilen R halkasına quasi-Baer halkası denir. Her Baer halka quasi-Baer halkadır. Birkenmeier, Kim ve Clark (4) quasi-Baer halkaları p.q.-Baer halkalara genişlettiler. Tanım: Her temel sağ(ya da sol) idealinin sıfırlayanı bir kare-eş öge tarafından üretilen R halkasına sağ(ya da sol) p.q.-Baer halkası denir. Hem sağ, hem de sol p.q.-Baer halkasına p.q.-Baer halka denir.

Tanım: Herhangi elemanın sağ (sol) sıfırlayanı bir kare-eş (idempotent) öge tarafından üretilen R halkasına sağ (sol) p.p. halka denir.

2.1. Halka ve Modül Genişlemeleri

Aşağıdaki halkaları gözönünde bulunduralım:

$$R[x] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i : a_i \in R, n \in \mathbb{N} \right\} \quad [2.1]$$

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i : a_i \in R \right\} \quad [2.2]$$

$$R[x, x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=-s}^t a_i x^i : s, t \in \mathbb{N}, a_i \in R \right\} \quad [2.3]$$

$$R[[x, x^{-1}]] = \left\{ \sum_{i=-s}^{\infty} a_i x^i : s \in \mathbb{N}, a_i \in R \right\} \quad [2.4]$$

$$R[x, \alpha] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i : a_i \in R, n \in \mathbb{N} \right\} \quad [2.5]$$

sırasıyla bunlar R bileşenli x bilinmeyenli çokterimliler halkası, üstel seriler halkası, Laurent çokterimliler halkası, Laurent üstel çokterimliler halkası ve çarpık sağ üstel çok terimliler halkası olarak adlandırılmışlardır. $R[x, \alpha]$ da işlemler çokterimlilerdeki

bilinen eşitlik ve toplama işlemleri gibi tanımlanarak, ek olarak çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$xr = \alpha(r)x.$$

$$R[x, \alpha, \delta] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i : a_i \in R, n \in \mathbb{N} \right\} \quad [2.6]$$

halkasında ise δ , R de α ya bağlı türev, yani her $a, b \in R$ için $\delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b$ olacak şekilde alınmaktadır. $R[x, \alpha, \delta]$ ya, R nin Ore genişlemesi ya da çarpık çokterimliler halkası denir. $R[x, \alpha, \delta]$ da çokterimlilerdeki bilinen eşitlik ve toplama işlemlerine ek olarak çarpma işlemi:

$$xr = \alpha(r)x + \delta(r)$$

kuralına bağlı, diğer işlemler ise çok terimliler halkasındakilerle aynı olarak kabul edilmektedir.

M bir sağ R modül olsun. Halkalarda olduğu gibi M nin de modül genişlemeleri aşağıdaki şekillerde tanımlanmıştır:

$$M[x; \alpha] = \left\{ \sum_{i=0}^s m_i x^i : s \geq 0, m_i \in M \right\} \quad [2.7]$$

$$M[[x; \alpha]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i : m_i \in M \right\} \quad [2.8]$$

$$M[x, x^{-1}; \alpha] = \left\{ \sum_{i=-s}^t m_i x^i : s \geq 0, t \geq 0, m_i \in M \right\} \quad [2.9]$$

$$M[[x, x^{-1}; \alpha]] = \left\{ \sum_{i=-s}^{\infty} m_i x^i : s \geq 0, m_i \in M \right\} \quad [2.10]$$

Bunlar toplamaya göre değişmeli grupturlar. Bu modüllerde skaler işlemleri şu

şekilde tanımlanır: $M[x; \alpha]$, $R[x; \alpha]$ üzerinde aşağıdaki skalar çarpma işlemine göre modül olur: $m(x) = \sum_{i=0}^s m_i x^i \in M[x; \alpha]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^t a_j x^j \in R[x; \alpha]$ için

$$m(x)f(x) = \sum_{k=0}^{s+t} \left(\sum_{i+j=k} m_i \alpha^i(a_j) \right) x^k \quad [2.11]$$

Benzer şekilde $M[[x; \alpha]]$, $R[[x; \alpha]]$ üzerinde benzer çarpımla sağ modül olur. $M[x; \alpha]$ ya da M nin çarpık genişlemesi ve $M[[x; \alpha]]$ ya da M nin çarpık üstel seri genişlemesi denir. $Ot(R)$ ile R nin otomorfizma dönüşümlerini gösterelim ve $\alpha \in Ot(R)$ ise, o zaman $M[[x, x^{-1}; \alpha]]$ yı $R[[x, x^{-1}; \alpha]]$ üzerinde ve $M[x, x^{-1}; \alpha]$ yı da $R[x, x^{-1}; \alpha]$ üzerinde yukarıda tanımlanan (2.9) ya benzer bir işlem ile modül yapan skalar çarpma işlemi tanımlanabilir. Bu işlemle $M[x, x^{-1}; \alpha]$ modülüne M nin çarpık Laurent çokterimli genişlemesi ve $M[[x, x^{-1}; \alpha]]$ ya da M nin çarpık Laurent üstel seriler genişlemesi denir.

2.2. Armendariz ve α -Armendariz Halkalar ve Modüller

Armendariz halkalar ilk defa Rege ve Chhawchharia (32) tarafından geniş bir şekilde araştırılmıştır. Onlar E. Armendarizin R nin bir inmiş halka olması durumunda $f(x) = \sum a_i x^i$, $g(x) = \sum b_j x^j \in R[x]$ ve $f(x)g(x) = 0$ dan her i ve j için $a_i b_j = 0$ olduğunu ispatlamış olmasına dikkat çekerek başka hangi halkaların bu şartı sağladığını araştırdılar ((3), Lemma 1). Bundan böyle bu şartı sağlayan halkalara Armendariz halkalar denmektedir. Anderson ve Camillo (1), R herhangi bir halka olmak üzere, " R Armendarizdir ancak ve ancak $R[x]$ çokterimliler halkası Armendarizdir" olduğunu ispatladılar ve Armendariz halka tanımını modüllere taşıdılar. Ayrıca onlar Armendariz modül tanımını her $m(x) = \sum_{i=0}^s m_i x^i \in M[x]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^t a_j x^j \in R[x]$ ve $m(x)f(x) = 0$ den her i ve j için $m_i a_j = 0$ oluyorsa M ye Armendariz modül olarak vermişlerdir.

Armendariz modül kavramını Lee ve Zhou α yı ekleyerek genelleştirdiler (26): Bir M_R modülü aşağıdaki koşulları sağlarsa M_R ye α -Armendariz modül denir: (a) $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ dır ancak ve ancak $m\alpha(a) = 0$ dır. (b) $m(x) = \sum_{i=0}^s m_i x^i \in M[x]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^t a_j x^j \in R[x]$ ve $m(x)f(x) = 0$ ise her i ve j için $m_i \alpha^i(a_j) = 0$ dır. Böylece M modülü Armendarizdir ancak ve ancak M 1-Armendarizdir. R_R modülü Armendariz modül ise R ye Armendariz halka, eğer R_R modülü α -Armendariz modül ise R ye α -Armendariz halka denir. Örneğin R Armendariz halkadır ancak ve ancak $f(x) = \sum_{i=0}^s a_i x^i \in R[x], g(x) = \sum_{j=0}^t b_j x^j \in R[x]$ ve $f(x)g(x) = 0$ olması durumunda her i ve j için $a_i b_j = 0$ dır. $R[[x]]$ halkası Armendariz olan bir R halkasına üstel serili Armendariz halka denir (Bkz. (21)). Bir M_R modülü aşağıdaki koşulu sağlarsa M_R ye α -çarpık Armendariz modül diyeceğiz: $m(x) = \sum_{i=0}^s m_i x^i \in M[x; \alpha]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^t a_j x^j \in R[x; \alpha]$ ve $m(x)f(x) = 0$ ise her i ve j için $m_i \alpha^i(a_j) = 0$ dır. R_R modülü α -çarpık Armendariz modül ise R halkasına α -çarpık Armendariz halka denir. α -çarpık Armendariz halkalar detaylı olarak incelenmişlerdir (14):

2.1. Teorem

α , R halkasının bir dönüşümü, $\alpha(1) = 1$ ve R α -yarıdeğişmeli ve M , α -çarpık Armendariz modül olsun. O zaman M bir Baer modüldür ancak ve ancak $M[x, \alpha]$ bir Baer modüldür.

2.2. Teorem

α , R halkasının bir dönüşümü, $\alpha(1) = 1$ ve R α -yarıdeğişmeli ve M α -çarpık Armendariz modül olsun. O zaman M bir p.p.-modüldür ancak ve ancak $M[x, \alpha]$ bir p.p.-modüldür.

2.3. Teorem

α , R halkasının bir dönüşümü, $\alpha(1) = 1$ ve R α -yarıdeğişmeli ve R , α -çarpık Armendariz olsun. O zaman R bir Baer halkadır ancak ve ancak $R[x, ; \alpha]$ bir Baer halkadır.

2.4. Teorem

α , R halkasının bir dönüşümü, $\alpha(1) = 1$ ve R α -yarıdeğişmeli ve R α -çarpık Armendariz olsun. O zaman R bir sağ p.p. halkadır ancak ve ancak $R[x, ; \alpha]$ bir sağ p.p. halkadır.

M_R sağ modülünde aşağıdaki şartlar sağlansın: (a) $m \in M$ ve $a \in R$, $ma = 0$ ise $mR \cap Ma = 0$ ve (b) $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ dir ancak ve ancak $m\alpha(a) = 0$ dir. O zaman M_R ye α -inmiş modül denir. R_R , 1 -inmiş modüldür ancak ve ancak R inmiş halkadır. $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ dan $a = 0$ elde edilirse R halkasına α -katı halka denir.

Aşağıdaki önerme konumuz açısından önem arz etmektedir.

2.1. Önerme

Her α -katı halka inmiş halkadır.

İspat

R , bir α -katı halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. O zaman $a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a)) = a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = 0$. Böylece $a\alpha(a) = 0$ dir. R , α -katı olduğundan $a = 0$ bulunur.

2.2. Önerme

R halkası bir α -katı halka olsun. O zaman Ore genişleme halkası olan $R[x, \alpha; \delta]$ bir Armendariz halkadır, yani $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j \in R[x, \alpha; \delta]$ için $f(x)g(x) = 0$ dır ancak ve ancak her $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için $a_i b_j = 0$ dır.

İspat

Bkz. ((12), sayfa 219).

2.3. Baer ve Quasi-Baer Modüller

2.1. Tanım:

M_R sağ modülü verilmiş olsun.

- (1) M nin boştan farklı herhangi X altkümesi için $r_R(X) = eR$, $e^2 = e \in R$ şartı sağlanıyorsa M ye bir Baer modül denir.
- (2) M nin her N altmodülü için $r_R(N) = eR$, $e^2 = e \in R$ şartı sağlanıyorsa M ye bir quasi-Baer modül denir.
- (3) Her $m \in M$ için $r_R(mR) = eR$, $e^2 = e \in R$ şartı sağlanıyorsa M ye bir p.q.-Baer modül denir.
- (4) Her $m \in M$ için $r_R(m) = eR$, $e^2 = e \in R$ şartı sağlanıyorsa M ye bir p.p.-modül denir.

R_R modülü Baer (quasi-Baer, p.q.-Baer, p.p.-) modül olan halkaya Baer (quasi-Baer, p.q.-Baer, p.p.-) halka denir. R halkası p.p.-halkadır ancak ve ancak her elemanın sağ sıfırlayanı dik toplanandır ancak ve ancak her elemanın sağ sıfırlayanı bir kare-eş eleman tarafından üretilir.

Aşağıdaki tanımda R bir halka, M ise sağ ve sol R -modül kabul edilecektir.

2.2. Tanım

$T(R, M) = R \oplus M$ üzerinde bilinen sıradan toplama işlemi ve aşağıdaki çarpma işlemi tanımlanmış olsun:

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$$

Bu durumda $T(R, M)$ ye R nin M tarafından sıradan genişlemesi denir. Bu halka, $r \in R$ ve $m \in M$ olmak kaydıyla $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ şeklinde matrislerin halkasına izomorfiktir. Ayrıca biz bu çalışmamızda $T_n(R)$ ile R üzerinden $n \times n$ tipinde üst üçgen matrislerinin halkasını göstereceğiz.

3. YARIDEĞİŞMELİ HALKALAR VE MODÜLLER

Bu bölümde yarıdeğişmeli modül kavramını tanımlayarak onların yapılarını inceleyeceğiz. Böylece yarıdeğişme kavramı halkalardan modüllere genelleşmiş olacaktır.

3.1. Yarıdeğişmeli ve Armendariz Modüller

Herhangi elemanın sağ sıfırlayanı ideal ise R halkasına yarıdeğişmeli halka denilse de genel olarak bu tanıma denk olan aşağıdaki tanım kabul görmekte ve kullanılmaktadır.

3.1. Tanım

R halkasında her $a, b \in R$ için $ab = 0$ durumunda $aRb = 0$ elde edilirse R ye yarıdeğişmeli halka denir.

Yarıdeğişmeli halka kavramını ilk olarak Shin (34) ortaya atmış, daha sonra Narbone, (30) incelemeye devam etmiştir. Yarıdeğişmeli halkalar (22), (34) de araştırılmıştır. Aşağıda her inmiş halkanın yarıdeğişmeli ve her yarıdeğişmeli halkanın abel olduğu ispatlanacaktır. Ayrıca her inmiş halka üstel serili Armendariz halkadır ve her üstel serili Armendariz halka yarıdeğişmelidir (bkz. (21, Lemma 2.3)).

3.2. Tanım

Her $m \in M, a \in R$ için $ma = 0$ ise $mRa = 0$ oluyorsa M ye yarıdeğişmeli modül denir.

3.1. Önerme

Aşağıdaki ifadeler her zaman geçerlidir:

- (a) Her inmiş halka yarıdeğişmeli halkadır.
- (b) R yarıdeğişmeli halkası Armendariz halka ise $R[x]$ yarıdeğişmelidir.

İspat

$a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Her $r \in R$ için $axb = 0$ olduğunu gösterelim. Bu durumda $(ba)^2 = baba = 0$ ve R inmiş halka olduğundan $ba = 0$ buluruz ve böylece $(arb)^2 = 0 = arb$ bulunur. O zaman R yarıdeğişmelidir.

Diğer iddiayı göstermek için $f(x), g(x) \in R[x]$ ve $f(x)g(x) = 0$ alalım. $h(x) = \sum_{k=0}^t c_k x^k \in R[x]$ ögesini alalım. R Armendariz halka ve $f(x)g(x) = 0$ olduğundan her i ve j için $a_i b_j = 0$ olur. R yarıdeğişmeli olduğundan her i, j ve k için $a_i c_k b_j = 0$ olur. Buradan $f(x)h(x)g(x) = 0$ olur, yani $R[x]$ yarıdeğişmelidir.

Örnek

Her yarıdeğişmeli halkanın bir inmiş halka olmadığını bir örnekle gösterebiliriz. Her n doğal sayısı için $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ yarıdeğişmeli halkadır. Fakat n sayısı kare - bağımsız doğal sayı değilse $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ inmiş halka olmaz. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ değişmeli halka olduğundan yarıdeğişmeli olduğu açıktır. $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$ kare - bağımsız olmayan doğal sayı olsun. Burada $i = 1, \dots, n$ için p_i ler değişik asal sayılar, $e_i \in \mathbb{N}^+$ dir. n kare - bağımsız olmadığından en az bir i için $e_i > 1$ olur. O zaman $\overline{p_1^{e_1-1} p_2^{e_2-1} \dots p_n^{e_n-1}}^2 = \bar{0}$ olur. Fakat $\overline{p_1^{e_1-1} p_2^{e_2-1} \dots p_n^{e_n-1}} \neq \bar{0}$ olduğundan biz, böylece $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin inmiş halka olmadığını görmüş oluruz.

Not

$R[x]$ in yarıdeğişmeli olması durumunda R nin de yarıdeğişmeli olması $R \subset R[x]$ olduğundan açıktır. Fakat tersinin her zaman doğru olmadığını aşağıdaki örnekten görebiliriz.

Örnek

$\mathbb{Z}_2$ cismini ele alalım. $A = \mathbb{Z}_2[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c]$ ise değişmeli olmayan, bilinmeyenleri $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ olarak alınan, $\mathbb{Z}_2$ üzerinden katsayılı, sabit terimi sıfır olan polinomların serbest cebiri (free algebra) olsun. Dikkat edilirse A nın birimi olmayan bir halka olduğu görülebilir. $\mathbb{Z}_2 + A$ nın I ideali $a_0b_0, a_1b_2 + a_2b_1, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, a_2b_2, a_0rb_0, a_2rb_2, (a_0 + a_1 + a_2r)(b_0 + b_1 + b_2)$ ve r_1, r_2, r_3, r_4 elemanlarından üretilmiş olsun. Burada $r_1, r_2, r_3, r_4 \in A$. O zaman $A^4 \subset I$ olduğu görülür. $R = (\mathbb{Z}_2 + A)/I$ alalım. O zaman $(a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) \in I[x]$, fakat $(a_0 + a_1x + a_2x^2)c(b_0 + b_1x + b_2x^2)$ elemanı $I[x]$ te olmaz çünkü $a_0cb_1 + a_1cb_0$ elemanı I da değil. Buradan $R[x]$ yarıdeğişmeli olmaz. R nin yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ bilinmeyenlerinin herhangi çarpımına tekli (monomial) denir. n tane üretenin çarpımından oluşan tekliye n dereceli α tekli diyoruz. $H_n, \mathbb{Z}_2$ üzerinden derecesi n olan teklielerin tüm doğrusal kombinasyonlarının kümesi olsun. H_n , her n için sonlu ve R nin I ideali homojen olur. (Yani $\sum_{i=1}^s r_i \in I, r_i \in H_i$ ise $r_i \in I$).

1.İddia: Eğer $f_1g_1 \in I, f_1, g_1 \in H$ ise her $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $f_1rg_1 \in I$ olur.

I nin tanımından aşağıdaki durumları gözönünde bulundurmamız yeterli olacaktır:

(1) $f_1 = a_0, g_1 = b_0$; (2) $f_1 = a_2, g_1 = b_2$ veya $f_1 = a_0 + a_1 + a_2, g_1 = b_0 + b_1 + b_2$ durumu. I nin tanımını kullanırsak ispat tamamlanmış olur.

2. İddia: Eğer $f, g \in A$ için $fg \in I$ ise her $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $f_1 r g_1 \in I$ olur.

$f_1, g_1, r_1 \in H_1, f_2, g_2, r_2 \in H_2, f_3, g_3, r_3 \in H_3$ ve $f_4, g_4, r_4 \in I$ için $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4, g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4, r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ olsun. Her $i \geq 4$ için $H_i \subseteq I$ olduğu açıktır. O zaman $frg = f_1 r_1 g_1 + h$ olacak şekilde $h \in I$ vardır. $fg \in I$ ve I homojen olduğundan $f_1 g_1 \in I$ olur ve 1. iddiadan $f_1, r_1, g_1 \in I$ olur. Dolayısıyla $frg \in I$ bulunur.

R nin yarıdeğişmeli olduğunu görmek için $y, z \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $yz \in I$ ise her $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $yrz \in I$ olmasıdır. İkinci iddianın da yardımıyla aşağıdaki hesaplamaları yapabiliriz. $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ ve $y', z' \in A$ için $y = \alpha + y', z = \beta + z'$ olsun. O zaman $\alpha\beta + \alpha z' + y'\beta + y'z' = yz \in I$ olduğundan $\alpha = 0$ veya $\beta = 0$ olur. $\alpha = 0$ kabul edersek $y'\beta + y'z' \in I$ olur. $\beta = 0$ ise I homojen ve $\beta \in \mathbb{Z}_2$ olduğundan $y' \in I$ bulunur. Dolayısıyla her $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $yrz = y'rz \in I$ olur. $\beta = 0$ durumunda da benzer şekilde gösterilir. Böylece R yarıdeğişmeli halka olur.

Yarıdeğişmeli halkaların alt halkaları ve dik çarpımlarının, dolayısıyla diktoplamlarının yarı-değişmeli oldukları kolayca görülebilir. Yarı-değişmeli halkaların bölüm halkalarının, genişlemelerinin, sıradan genişlemeleri ve matris halkalarının yarı-değişmelilik özelliğini korumadığına dair örneklerle bakalım.

Örnek

I, R yarıdeğişmeli halkasının bir ideali ise R/I yarıdeğişmeli olmayabilir. D bir bölüm halkası ve x, y de D üzerinde değişmeli olmayan bilinmeyenler olmak üzere $R = D[x, y]$ çokterimliler halkasını ve R nin $I = (x^2)$ idealini alalım. $\bar{R} = R/I$ halkasında $\bar{x} = x + I$ ise $\bar{x}\bar{x} = \bar{0}$ dır. Fakat x ve y yer değiştirmedikleri, yani $xy \neq yx$ olduğu, için $\bar{x}\bar{y}\bar{x} \neq \bar{0}$ yani $\bar{x}\bar{R}\bar{x} \neq \bar{0}$ ve böylece $\bar{R} = R/I$ yarıdeğişmeli olmaz.

Örnek

S birimli herhangi bir halka (ya da inmiş halka) ve R, S üzerinde 2×2 tüm (ya da üst üçgen) matrisler halkası ise R yarıdeğişmeli olamaz. Yarıdeğişmeli her halkanın alt halkası da yarıdeğişmeli olduğu için S halkası üzerindeki üst üçgen matris halkalarının yarıdeğişmeli olamayacağını görmek yetecektir. e_{ij} ler (i, j) bileşeni 1 ve diğer bileşenleri sıfır olan matris birimlerini gösterebiliriz. O zaman $e_{11}e_{22} = 0$ dir. Fakat $0 \neq e_{12} \in e_{11}Re_{22}$ dan R yarıdeğişmeli olamaz.

Örnek

R halkasının bir I ideali için , I ve R/I yarıdeğişmeli halkalar ise R yarıdeğişmeli olmayabilir. F bölüm halkası, $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ üst üçgen matris halkası olsun. R nin yarıdeğişmeli halka olmadığı kolaylıkla görülebilir. R nin sıfırdan farklı her I ideali için R/I ve I nin yarıdeğişmeli olduğunu gösterebiliriz. R nin sıfırdan farklı öz idealleri

$$\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Önce

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alalım. O zaman $R/I \cong F$ izomorf ve dolayısıyla da R/I halkası yarıdeğişmeli olur. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olsun. Buradan $\begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, yani $ac = 0 = ad$

olur. Eğer $a = 0$ ise her $e, f \in F$ için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Eğer $a \neq 0$ ise $c = d = 0$ ve aynı sonuç bulunur. Dolayısıyla I yarıdeğişmeli olur.

$J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ olsun. Aynı yöntemle J ve R/J yarıdeğişmeli bulunur. Son olarak

$K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman $R/K \cong F \oplus F$ ve dolayısıyla R/K yarıdeğişmeli

olur. Ayrıca $K^2 = 0$ olması K nın yarıdeğişmeli olmasını verir.

3.2. Önerme

R nin bir I ideali için R/I yarıdeğişmeli halka olsun. Eğer I inmiş halkaysa R yarıdeğişmeli olur.

İspat

$a, b \in R$ ve $ab = 0$ olsun. O zaman $bIa \subseteq I$ ve $(bIa)^2 = bIabIa = 0$ olduğunda $bIa = 0$ ve ayrıca R/I yarıdeğişmeli olduğundan $aRb \subseteq I$ olur. $((aRb)I)^2 = aRbIaRbI = aR(bIa)RbI = 0$ olduğundan $aRbI = 0$ ve dolayısıyla $(aRb)^2 \subseteq aRbI = 0$ dan $(aRb)^2 = 0$ bulunur. Fakat $aRb \subseteq I$ olduğundan $aRb = 0$, yani R yarıdeğişmeli olur.

3.1. Önteorem

R bir Armendariz halka olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir:

- (a) $a, b, c \in R$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için $ab = 0$ ise $ac^n b = 0$ sağlanırsa $acb = 0$ dır.
- (b) $a, b, c \in R$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için $ab = 0$ ve c^n , R nin merkezi ögesi ise $acb = 0$ dır.

İspat

Bkz. (15, Lemma 7).

3.2. Önteorem

Her Armendariz halka abel halkadır, yani R nin her kare-eş elemanı diğer her öge ile yer değiştirir.

Bkz. (15, Sonuç 8).

Aşağıda vereceğimiz 3.3. Önerme, (15) de ispatlanmıştır. Bütünlüğü sağlamak ve dördüncü bölümde bu özelliği α -yarıdeğişmeli halkalara genelleştireceğimiz için burada ispatını tam olarak veriyoruz. Bir R halkasının her sonlu alt kümesi sonlu bir yarı-grup üretirse R ye *yerel sonlu* halka denir.

3.3. Önerme

Yerel sonlu bir Armendariz halkası yarıdeğişmelidir.

İspat

R bir yerel sonlu halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $aRb = 0$ olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $r \in R$ alalım. R yerel sonlu halka olduğu için, bir pozitif n sayısı var ve her $n \leq k$ için $r^n = r^{n+k}$ olur çünkü $\{r, r^2, r^3, \dots\}$ yarıgrubu sonlu olacaktır. Böylece $r^n = r^{n+k} = r^n r^k = r^n r^{2k} = \dots = r^n r^{nk} = r^n r^{n(k+1)}$ olur. $h = k + 1$ dersek o zaman $r^{(h-1)n} = r^{(h-2)n} r^n = r^{(h-2)n} (r^n)^h = r^{2(h-1)n} = (r^{(h-1)n})^2$ olacağından $r^{(h-1)n}$ kare-eş öge olur. 3.2. Önteoremden Armendariz halkalar abel oldukları için, $r^{(h-1)n}$ merkezi bir kare-eş öge olur. Böylece $ar^{(h-1)n}b = 0$ sağlanır. 3.1. Önteorem-

den $arb = 0$ elde edilir. Burada r , R nin keyfi bir ögesi olduğu için $aRb = 0$ olacaktır. Yani R yarıdeğişmelidir.

3.4. Önerme

Her yarıdeğişmeli halka abel halkadır.

İspat

$e^2 = e \in R$ kare-eş ögesi için $e(1 - e) = 0 = (1 - e)e$ yazabiliriz. R yarıdeğişmeli olduğundan $e(1 - e) = 0$ ise $ex(1 - e) = 0$, yani

$$ex = exe \quad [3.1]$$

ve ayrıca $(1 - e)e = 0$ ise $(1 - e)xe = 0$, yani

$$xe = exe \quad [3.2]$$

Eş.3.1 ve Eş.3.2 den $xe = ex$ bulunur. Dolayısıyla R abel halkadır.

Örnek

3.4. Önermenin tersi her zaman doğru değildir. Bunu örnekle gösterelim. $\mathbb{Z}$ tam-sayılar halkası olmak üzere

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a - d \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

halkasını gözönüne alalım. Bu halkada kare-eş öğeler sadece

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

öğeleridir. O zaman R abelyen olur. Fakat $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olacaktır, oysa biz R halkasından $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in R$ ögesini aldığımızda

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

bulmuş oluruz. Dolayısıyla R halkası yarıdeğişmeli değildir.

3.5. Önerme

M_R Armendariz modülü yarıdeğişmeli olsun. O zaman $M[x]_{R[x]}$ modülü yarıdeğişmeli olur.

İspat

$m(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_tx^t \in M[x]$ ve $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_sx^s \in R[x]$ için $m(x)f(x) = 0$ olsun. $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_rx^r \in R[x]$ alalım. M_R Armendariz olduğundan her $i = 0, \dots, t$ ve $j = 0, \dots, s$ için $m_ia_j = 0$ bulunur. Ayrıca M_R yarıdeğişmeli olduğundan her $k = 0, \dots, r$ için $m_ib_ka_j = 0$ bulunur. Böylece $m(x)g(x)f(x) = 0$, yani $M[x]_{R[x]}$ in yarıdeğişmeli olduğu elde edilir.

3.6. Önerme ve 3.1. Sonucun ispatları (15) de verilmiştir. Bölümle bütünlüğü

sağlamak ve beşinci bölüme birer örnek olmaları sebebi ile ispatlarını burada tekrar vereceğiz.

3.6. Önerme

R bir halka ve Ω , R nin her merkezi ve düzgün ögesini içeren, çarpmaya göre kapalı bir altkümesi olsun. O zaman R yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $\Omega^{-1}R$ yarıdeğişmelidir.

İspat

Yarıdeğişmeli halkaların alt halkaları da yarıdeğişmeli olduğundan "gereklidir" kısmını yapmamız yeterli olacaktır. $\alpha = u^{-1}a, \beta = v^{-1}b, u, v \in \Omega$ ve $a, b \in R$ için $\alpha\beta = 0$ olsun. Ω kümesi R 'nin merkezi tarafından kapsandığından $0 = \alpha\beta = u^{-1}av^{-1}b = (u^{-1}v^{-1})ab = (uv)^{-1}ab$ ve dolayısıyla $ab = 0$ bulunur. Buradan her $r \in R$ için $arb = 0$ olur, çünkü R yarıdeğişmelidir. Şimdi $\gamma = w^{-1}r, w \in \Omega, r \in R$ için $\alpha\gamma\beta = (uwv)^{-1}arb = (uwv)^{-1}0 = 0$ olur. Dolayısıyla $\Omega^{-1}R$ yarıdeğişmelidir.

3.1. Sonuç

Bir R halkası için $R[x]$ yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $R[x; x^{-1}]$ yarıdeğişmelidir.

İspat

$R[x]$ yarıdeğişmeli olsun. $\Omega = \{1, x, x^2, \dots\}$ alırsak Ω , $R[x]$ 'in çarpmaya göre kapalı altkümesi olur. $R[x; x^{-1}] = \Omega^{-1}R[x]$ olduğundan 3.6. Önermeden $R[x; x^{-1}]$ yarıdeğişmeli olur. Bir yarıdeğişmeli halkanın alt halkaları da yarıdeğişmeli olduğundan diğer yön açıktır.

Örnek

Armendariz olmayan fakat yarıdeğişmeli olan halkalar mevcuttur.

$$R = T(\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_8) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_8 \right\}$$

halkasını gözönüne alalım.

$$f(x) = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} x \text{ alırsak } (f(x))^2 = 0 \text{ olur. Fakat}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ olduğundan } R \text{ Armendariz değildir. } R$$

nin değişmeli olmasından yarıdeğişmeli olduğu anlaşılır.

Örnek

Yarıdeğişmeli olmayan fakat Armendariz olan halkalar mevcuttur. F cisim ve $A = F[a, b, c]$, F üzerinde ve a, b, c değişkenleri değişmeli olmayan ve sabit terimi sıfır olan polinomların serbest cebiri olsun. A nın birimsiz bir halka olduğu gözlemlenebilir. $I, F + A$ nın her $r \in A$ için cc, ac, crc tarafından üretilen ideali olsun. $R = (F + A)/I$ alalım. $ac \in I$ fakat $abc \in I$ olduğundan R yarıdeğişmeli olmaz. Çünkü R de, $(a + I)(c + I) = 0$, fakat $(a + I)(c + I)(b + I) \neq 0$. I_1 , A daki, her biri c değişkenini içeren teklilerden oluşan, F üzerinde bir doğrusal uzay olsun. $I_2 = F[a, b]$ ise F üzerinde ve a, b değişkenleri değişmeli olmayan, sabit terimi sıfır olan polinomların serbest cebiri olsun. $A = I + I_1 + I_2$ olduğu gözlemlenebilir. R nin Armendariz halka olduğunu gösterelim. Aşağıdaki gösterimlerde $A[x], I[x], I_1[x]$ ve $I_2[x]$ ile uygun olarak A, I, I_1 ve I_2 üzerinden birimsiz polinom halkaları kabul edilecektir, burada x , R üzerinde değişkendir.

İddia: $f(x), g(x) \in A[x]$ için $f(x)g(x) \in I[x]$ olsun. O zaman (eğer $f(x), I[x]$ in ögesi değilse) $f(x) \in I_1[x] + I[x]$ ve $g(x) \in I_1[x] + I[x]$ ya da (eğer $g(x), I[x]$ in ögesi değilse) $f(x) \in I_1[x] + I[x] + I_2[x]a$ ve $g(x) \in cI_2[x] + I[x]$ olur.

İddiayı ispatlamak için önce öyle $f_1, g_1 \in I_1[x], f_2, g_2 \in I[x]$ ve $f_3, g_3 \in I[x]$ var ki $f(x) = f_1 + f_2 + f_3$ ve $g(x) = g_1 + g_2 + g_3$ olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Hipotezden ve I nin tanımından $(f_1 + f_2)(g_1 + g_2) \in I[x]$ ve dolayısıyla $(f_1 + f_2)(g_1 + g_2) \in I[x] + I_1[x]$; fakat $f_1g_1 + f_1g_2 + f_2g_1 \in I[x] + I_1[x]$ ve dolayısıyla $f_2g_2 \in I[x] + I_1[x]$ olur. $f_2g_2 \in I_2[x]$ olduğundan sıfır olmak zorundadır ve buradan $f_2 = 0$ veya $g_2 = 0$ bulunur. $f_2 = 0$ olsun. O zaman $f_1(g_1 + g_2) \in I[x]$ olması bize, $f_1g_1 \in I[x]$ olduğundan $f_1g_2 \in I[x]$ verir. Bu durumda $f_1g_2 = 0$ ve dolayısıyla da $f_1 = 0$ ya da $g_1 = 0$ olması gerekir. Dolayısıyla aranılan sonuç elde edilir. Şimdi $g_2 = 0$ kabul edelim. O zaman $(f_1 + f_2)g_1 \in I[x]$ olması $f_1g_1 \in I[x]$ olduğundan $f_2g_1 \in I[x]$ verir. I_2 deki teklileri doğal sayılar kümesinin içerisine " $a \rightarrow 1, b \rightarrow 2$ " dönüşümü vasıtasıyla alabiliriz. O zaman onlar tam sıralı olurlar. (Örneğin $2 < 11 < 12$ olduğundan $b < aa < ab$ yazılabilir). Benzer şekilde I daki tekliler de rasyonel sayılar cismi içerisine " $a \rightarrow 1, b \rightarrow 2, c \rightarrow 0, 0$ " dönüşümüyle alınabilirler, bu durumda tam sıralı olurlar (Örneğin, $0,0222222 < 10,012 < 20,0$ olduğundan $cbbbbbb < acab < bc$ olur). Bazı $k_i, l_j \in F[x]$ ve h_i, t_j teklileri için $f_2 = \sum_{i=1}^M h_i k_i$ ve $g_1 = \sum_{j=0}^N t_j l_j$ yazabiliriz. Bu durumda, biz, $i_\alpha \neq i_\beta$ olduğundan $h_{i_\alpha} \neq h_{i_\beta}$ ve $j_\gamma \neq j_\delta$ olduğundan $t_{j_\gamma} \neq t_{j_\delta}$ kabul edebiliriz. h_{i_0} diğer h_i lerden ve t_{j_0} diğer t_j lerden büyük olsun. $f_2g_1 = (\sum_{i=1}^M h_i k_i)(\sum_{j=1}^N t_j l_j) = \sum_{i=1, \dots, M, j=1, \dots, N} h_i t_j k_i l_j$ olur. $f_2g_1 \in I[x]$ ve $h_{i_0} t_{j_0}$ diğer $h_i t_j$ lerden büyük olduğundan, I nin özelliğinden $h_{i_0} t_{j_0} k_{i_0} l_{j_0} \in I[x]$ olur. O zaman $h_{i_0} t_{j_0} \in I$. Fakat $h_{i_0} \in I_2$ olduğundan t_{j_0}, c ile başlamalıdır, çünkü $ac \in I$ dır, ayrıca diğer t_j ler de c ile başlamalıdırlar, çünkü t_{j_0} en büyüktür. Buradan bir $g' \in I_2[x]$ için $g_1 = cg'$ olur. Bazı $f', f'' \in I_2[x]$ için $f_2 = f'a + f''b$ olduğu görülebilir. $f_2g_1 \in I[x]$ olduğundan $f''bcg' \in I[x]$ ve dolayısıyla $f''bcg' = 0$ bulunur. Sonuç olarak $f'' = 0$ veya $g' = 0$ olacağından ispat tamamlanır.

Şimdi $y(x), z(x) \in (F + A)[x]$ için $y(x)z(x) \in I[x]$ olduğunu kabul edelim. $y(x) = y_1 + y_2, z(x) = z_1 + z_2$ olacak şekilde $y_1, z_1 \in F[x]$ ve $y_2, z_2 \in A[x]$ öğelerinin var olduğu kolayca görülebilir. $y(x)z(x) = (y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + y_2z_2 \in I[x]$ olmasını, I nin özelliğini ve $y_1z_2 + y_2z_1 + y_2z_2 \in I[x]$ olmasını kullanarak $y_1z_1 = 0$ buluruz. Dolayısıyla $y_1 = 0$ ya da $z_1 = 0$ bulunur. $y_1 = 0$ olsun. O zaman $y_2z_1 + y_2z_2 \in I[x]$ ve $z_1 \in F[x]$ olduğundan $y_2z_1 \in I[x]$ ve $y_2z_2 \in I[x]$ olur. $z_1 \neq 0$ ise I nin özelliğinden $y_2 \in I[x]$ de ve dolayısıyla da $y(x)$ ve $z(x)$ in katsayılarının her çarpımı da I da olur. $z_1 = 0$ olursa $y_2z_2 \in I[x]$ ve dolayısıyla iddianın yardımıyla yine aynı sonucu elde ederiz. $z_1 = 0$ durumunda da benzer çözüm uygulanacaktır. Böylece R Armendariz halka olur.

3.2. Baer ve Benzeri Halka ve Modüllerle Bağlantılar

3.7. Önerme

R yarıdeğişmeli bir halka olsun. O zaman herhangi bir M modülü için aşağıdakiler denktir:

- (a) M p.q.-Baer modüldür.
- (b) M nin her sonlu üreteçli alt modülünün sıfırlayan bir kare-eş öge ile üretilir.

İspat

M yarıdeğişmeli bir modül olsun. (b) $\Rightarrow$ (a): Her devirli alt modül sonlu üretilen olduğu için (b) kabulü altında M p.q.-Baer olur. (a) $\Rightarrow$ (b): M p.q.-Baer modül ve $N = \sum_{i=1}^k n_i R$ sonlu üreteçli bir alt modül olsun. O zaman $r_R(n_i R) = e_i R$ ve $e_i^2 = e_i$ olmak üzere $r_R(N) = \bigcap_{i=1}^k e_i R$ olur. R yarıdeğişmeli olduğu için, 3.4. Önermeden, e_i ler merkezdedir. Böylece $e = e_1 e_2 \dots e_k$ dersek e bir kare-eş öge olur.

Buradan $\bigcap_{i=1}^k e_i R = eR$ olduğunu görmek kolaydır. Sonuç olarak $r_R(N) = eR$ elde edilir.

3.3. Önteorem

Her inmiş M_R modülü yarıdeğişmelidir.

İspat

M_R inmiş modül olsun. $m \in M$, $a \in R$ ve $ma = 0$ olsun. M inmiş olduğundan $mR \cap Ma = 0$. $mRa \leq mR \cap Ma = 0$ olduğundan $mRa = 0$, yani M yarıdeğişmelidir.

3.8. Önerme

R bir abel halka ve M_R bir p.p.-modül olsun. O zaman M_R bir p.q.-Baer modüldür.

İspat

$m \in M$ alalım. M_R p.p.-modül olduğu için, $r_R(m) = eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ kare-eş ögesi vardır. Bu durumda $r_R(mR) \subseteq r_R(m)$ olacağı açıktır. Herhangi bir $x \in r_R(m)$ alalım. O zaman $x = ex$ ve $me = 0$ dir. R abel olduğundan, her $r \in R$ için, $mrx = mrex = merx = 0$ olacaktır. Buradan $x \in r_R(mR)$ olur. Böylece $r_R(mR) = r_R(m) = eR$ elde edilir ve M_R p.q.-Baer modül olur.

3.2. Sonuç

Her abel ve sağ p.p.-halka sağ p.q.-Baer dir.

3.1. Teorem

M_R yarıdeğişmeli modül olsun. O zaman her $a \in R, m \in M$ ve $e^2 = e \in R$ için $mea = mae$ olur.

İspat

$e^2 = e \in R$ olduğundan $e(1 - e) = (1 - e)e = 0$ olur. O zaman her $m \in M$ için $me(1 - e) = 0$ ve $m(1 - e)e = 0$ olur. M_R modülü yarıdeğişmeli olduğundan $meR(1 - e) = 0$ ve $m(1 - e)Re = 0$ bulunur. Böylece her $a \in R$ için $mea(1 - e) = 0$ ve $m(1 - e)ae = 0$ olur. Buradan $mea = meae$ ve $mae = meae$. Son iki eşitlikten her $a \in R$ için $mea = mae$ bulunur.

3.2. Teorem

M_R p.q-Baer modül olsun. O zaman M_R yarıdeğişmelidir ancak ve ancak M_R inmiş modüldür.

İspat

M_R modülünü inmiş modül kabul edelim. $m \in M, a \in R$ ve $ma = 0$ olsun. M inmiş modül olduğundan $mR \cap Ma = 0$ olur. $mRa \leq mR \cap Ma = 0$ olduğundan $mRa = 0$, yani M yarıdeğişmelidir. Tersine, M_R nin yarıdeğişmeli modül olduğunu kabul edelim. $m \in M, a \in R$ ve $ma = 0$ olsun. M_R yarıdeğişmeli ve p.q-Baer olduğundan $a \in r_R(m) = r_R(mR) = eR$, olacak şekilde $e^2 = e \in R$ kare-eş ögesi vardır. $x \in mR \cap Ma$ alalım. O zaman bir $r \in R$ ve $m' \in M$ için $x = mr = m'a$ olur. $a \in eR$ olduğundan $a = ea_1$ olacak şekilde $a_1 \in R$ vardır. Burada $ea = e^2a_1 = ea_1 = a$, yani $ea = a$ bulunur. 3.1. Teoremden $x = m'a = m'ea = m'ae = mre = mer = 0$. Yani $mR \cap Ma = 0$

bulunur. Dolayısıyla M_R inmiş modül olduğundan teoremi ispatlamış oluruz.

3.3. Sonuç

R halkası sağ p.q.-Baer halka olsun. O zaman R yarıdeğişmeli halkadır ancak ve ancak R inmiş halkadır.

3.3. Teorem

M_R yarıdeğişmeli modül olsun. Aşağıdaki şartları gözönünde bulundurursak (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) geçerli olur:

- (a) M_R Baer modüldür
- (b) M_R quasi-Baer modüldür
- (c) M_R p.p. - modüldür
- (d) M_R p.q.-Baer modüldür.

İspat

(a) $\Rightarrow$ (b) ve (b) $\Rightarrow$ (d) nin ispatları açıktır.

M_R yarıdeğişmeli modül olduğundan her $m \in M$ için $r(m) = r(mR)$ olur. Buradan (c) $\Leftrightarrow$ (d) nin ispatı tamamlanır.

(b) $\Rightarrow$ (a) yı ispatlayalım. M_R quasi-Baer modül ve X, M nin boştan farklı herhangi bir altkümesi olsun. O zaman $r_R(X) = \bigcap_{x \in X} r_R(x)$ olur. M_R yarıdeğişmeli modül olduğundan $\bigcap_{x \in X} r_R(x) = \bigcap_{x \in X} r_R(xR)$ olur. Fakat M_R quasi - Baer modül olduğundan $r_R(X) = \bigcap_{x \in X} r_R(xR) = r_R(\sum_{x \in X} xR) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Dolayısıyla $r_R(X) = eR, e^2 = e \in R$ olur , yani M_R Baer modüldür.

3.4. Teorem

M_R p.p. - modül olsun. O zaman M_R inmiş modüldür ancak ve ancak M_R yarıdeğişmeli modüldür.

İspat

M_R yarıdeğişmeli modül olsun. $m \in M, a \in R$ için $ma = 0$ alalım. M_R p.p.- modül olduğundan öyle $e^2 = e \in R$ vardır öyle ki $r_R(m) = eR$ 'dir. O zaman $a \in r_R$ olduğundan $a \in er$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $ea = e^2r = er = a$, yani $a = ea$ bulunur. 3.1. Teoremden $mae = mea$ olur. $x \in mR \cap Ma$ olsun. O zaman $x = mr_1 = m'a$ olacak şekilde $r_1 \in R$ ve $m' \in M$ vardır. Buradan $x = m'a = m'ea = m'ae$, dolayısıyla $x = mr_1e = mer_1 = 0$ bulunur, çünkü $er_1 \in r_R(m)$. Böylece $mR \cap Ma = 0$, yani M_R inmiş modül olur.

3.4. Sonuç

R sağ p.p.- halka olsun. O zaman R inmiş halkadır ancak ve ancak R yarıdeğişmeli halkadır.

3.4. Önteorem

R halkası abel olsun. M_R p.p.- modül ise M_R inmiş modüldür.

İspat

$m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ olsun. O zaman $a \in r_R(m)$ olur. M_R p.p.- modül olduğundan $r_R(m) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Buradan $a = ea$ ve

$me = 0$ bulunur. $x \in mR \cap Ma$ alırsak $x = mr = m'a$ olacak şekilde $r \in R$ ve $m' \in M$ bulunur. O zaman $x = m'ea = m'ae = mre = mer = 0$. Böylece M_R inmiş modül olur.

3.5. Sonuç

R abel halka olsun. R sağ p.p.-halka ise R inmiş halkadır.

3.5. Önteorem

R abel halka ve M_R p.p.-modül olsun. O zaman M_R p.q.- Baer modül olur.

İspat

$m \in M$ olsun. M_R p.p.-modül olduğundan öyle $e^2 = e \in R$ var ki $r_R(m) = eR$ olur. $r_R(mR) \subseteq r_R(m)$ olduğu açıktır. $x \in r_R(m)$ alırsak $x = ex$ ve $me = 0$ bulunur. Her $r \in R$ için R abel halka olduğundan $mrx = mrex = merx = 0$. Dolayısıyla $x \in r_R(mR)$, yani $r_R(m) \subseteq r_R(mR)$ ve dolayısıyla $r_R(mR) = r_R(m) = eR$ bulunur. Buradan M_R p.q. - Baer modül olur.

3.9. Önerme

R bir abel halka ve M_R bir p.p.-modül olsun. O zaman M_R yarıdeğişmeli modüldür ancak ve ancak M_R Armendariz modüldür.

İspat

M_R yarıdeğişmeli modül olsun. $m(x) = \sum m_i x^i \in M[x]$, $f(x) = \sum a_j x^j \in R[x]$ alalım ve $m(x)f(x) = 0$ sağlansın. Buradan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$m_0a_0 = 0 \quad [3.3]$$

$$m_0a_1 + m_1a_0 = 0 \quad [3.4]$$

$$m_0a_2 + m_1a_1 + m_2a_0 = 0 \quad [3.5]$$

.....

sağlanacak şekilde s ve t sayıları bulunur. Fakat $r(m_0) = e_0R, r(m_1) = e_1R, r(m_2) = e_2R, \dots, r(m_t) = e_tR$ olacak şekilde $e_0, e_1, e_2, \dots, e_t$ ler R de kare-eş öğelerdir ve kabalıden R de bu şartları sağlayacak şekilde bulunabilirler. O zaman $a_0 \in r(m_0) = e_0R$ dır. R abel olduğu için, $a_0 = e_0a_0 = a_0e_0$ olur. Eş.3.4, sağdan e_0 ile çarpılırsa

$$m_0a_1e_0 + m_1a_0e_0 = 0$$

elde edilir. M_R yarıdeğişmeli oluşundan ve $m_0e_0 = 0$ dan $m_0a_1e_0 = 0$ bulunur. Böylece $m_1a_0e_0 = m_1a_0 = 0$ olur. Eş.3.4 den $m_0a_1 = 0$ elde edilir. Eş.3.5 i sağdan e_0 ile çarparsak:

$$m_0a_2e_0 + m_1a_1e_0 + m_2a_0e_0 = 0$$

olur. M_R nin yarıdeğişmeli oluşundan ve $m_0e_0 = 0$ dan $m_0a_2e_0 = 0$ buluruz. O zaman $m_1a_1e_0 + m_2a_0e_0 = m_1a_1 + m_2a_0 = 0$ elde edilir. Böylece Eş.3.5 ten $m_0a_2 = 0$ olur. Bu işleme devam edilerek:

$$m_0a_0 = m_0a_1 = m_0a_2 = \dots = m_0a_s = 0$$

elde ederiz. Bu eşitlikler kullanılırsa, Eş.3.4, Eş.3.5 ,..., eşitliklerinden aşağıdakiler elde edilir:

$$m_1 a_0 = 0 \quad [3.6]$$

$$m_1 a_1 + m_2 a_0 = 0 \quad [3.7]$$

.....

Bu denklemlere aynı yöntemi uygulayarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$m_1 a_0 = m_1 a_1 = m_1 a_2 = \dots = m_1 a_s = 0$$

İşleme benzer şekilde devam edilirse

$$m_2 a_0 = m_2 a_1 = m_2 a_2 = \dots = m_2 a_s = 0 \dots m_t a_s = 0$$

buluruz. Böylece her i, j için $m_i a_j = 0$ bulunur.

M_R Armendariz modül olsun. Bir $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ kabul edelim. Herhangi bir $r \in R$ için $m(x) = mx + mr \in M[x]$ ve $f(x) = -ax + ra \in R[x]$ alalım. O zaman $m(x)f(x) = (mx + mr)(-ax + ra) = mr^2a$. Kabulden ve $ma = 0$ dan bir kare-eş $e \in R$ ögesi $a \in r(m) = eR$ olacak şekilde bulunur. Bu durumda $a = ae = ea$ olur. Böylece, R abel olduğu için $m(x)f(x) = mr^2a = mr^2ea = mer^2a = 0$ olur. Diğer taraftan M_R Armendariz olduğu için, herhangi bir $r \in R$ için $mra = 0$ olacaktır. Bu da ispatı bitirir.

3.6. Sonuç

R bir p.p.-halka olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (a) R yarıdeğişmelidir.
- (b) R Armendarizdir.

İspat

4.4. Teoremden $\alpha = id$ alınırsa, her yarıdeğişmeli halka abel olur. Böylece (a) $\Rightarrow$ (b) gerektirmesi elde edilir. ((19), Önteorem 7) de her Armendariz halkanın abel olduğu ispatlanmıştır. Buradan da (b) $\Rightarrow$ (a) bulunur.

3.10. Önerme

M_R yarıdeğişmeli bir modül ve R bir inmiş halka olsun. O zaman M_R Armendariz bir modüldür ancak ve ancak burulma alt modülü $T(M)$ Armendarizdir.

İspat

M nin burulma alt modülü $T(M)$ Armendariz olsun. $m(x) = \sum m_j x^j \in M[x]$, $f(x) = \sum a_i x^i \in R[x]$ alalım ve $m(x)f(x) = 0$ sağlansın. Buradan :

$$m_0 a_0 = 0$$

$$m_0 a_1 + m_1 a_0 = 0$$

$$m_0 a_2 + m_1 a_1 + m_2 a_0 = 0$$

.....

$$m_t a_s = 0$$

olacak şekilde s ve t doğal sayıları vardır. $a_0 \neq 0$ olarak kabul edebiliriz. a_0 ile çarptıktan sonra, bu denklemlerin ikincisinden $m_1 a_0^2 = 0$ bulunur. O zaman a_0^2 elemanı m_0 ve m_1 elemanlarının her ikisini sıfırlar. Şimdi üçüncü denklemden $m_2 a_0^3 = 0$ sonucu çıkar. Böylece devam ederek $m(x) \in T(M)[x]$ bulunur. $T(M)$, R -modül olarak Armendariz olduğundan, her i, j için $m_j a_i = 0$ sonucuna varırız. Diğer yönün ispatı açıktır.

3.6. Önteorem

R yarıdeğişmeli halka olsun. Bu durumda

- (a) $R[x]$ deki her kare-eş öge R dedir.
- (b) $R[[x]]$ deki her kare-eş öge R dedir.

İspat

((19), Önteorem 8) in kullanılması sonucunda ispat açıktır.

3.11. Önerme

R yarıdeğişmeli halka olsun. O zaman R p.p.-halkadır ancak ve ancak $R[x]$ p.p.-halkadır. Aynı durum Baer, p.q.-Baer ve quasi-Baer halkalar için de geçerlidir.

İspat

R p.p.-halka olsun. 3.6. Sonuç kullanılırsa R Armendariz halka olur. O zaman $R[x]$ p.p.-halka olur ((19), Theorem 9). Tersine, $R[x]$ p.p.-halka olsun. $a \in R$ alalım. 3.6. Önteoremden öyle kare-eş $e \in R$ elemanı varki $r_{R[x]}(a) = eR[x]$ olur. Buradan $r_R(a) = r_{R[x]}(a) \cap R = eR$ ve sonuç olarak R p.p.-halka olur.

R Baer halka olsun. O zaman R p.p.-halka olur. 3.6. Sonuçtan R Armendariz halkadır. O zaman $R[x]$ Baer halka olur ((19), Theorem.10). Tersine, $R[x]$ Baer halka olsun. B kümesini R nin boştan farklı alt kümesi alalım. 3.6. Önteoremden $r_{R[x]}(B) = eR[x]$ olacak şekilde kare-eş $e \in R$ vardır. O zaman $r_R(B) = eR$ ve R Baer halka olur.

R p.q.-Baer halka ve $t(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^k \in R[x]$ olsun. O zaman şarttan her $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $r_R(a_i) = e_iR = r_R(a_iR)$ olacak şekilde e_i kare-eş öğeleri vardır. 3.4. Önermeden $e = e_0e_1\dots e_n$ aldığımızda $\bigcap_{i=0}^n r_R(a_iR) = eR$ olur. $f(x) \in r_{R[x]}(t(x)R[x])$ olsun. O zaman her $j = 0, 1, 2, \dots, n$ için $t(x)R[x]f(x) = 0$ den $t(x)Rf(x) = 0$ ve $a_jRf(x) = 0$ olur. Böylece $a_jRb_i = 0$, dolayısıyla her i, j için $b_i \in \bigcap_{j=0}^n r_R(a_jR) = eR$ ve $b_i = eb_i$. Sonuç olarak $ef(x) = f(x)$ ise $f(x) \in eR[x]$ bulunur. Tersine, $R[x]$ p.q.-Baer olsun. $a \in R$ alalım. Öyle kare-eş $e \in R$ varki $r_{R[x]}(aR[x]) = eR[x]$ dir. O zaman $r_{R[x]}(aR[x]) \cap R = (eR[x]) \cap R = eR$. $r_R(aR) = r_{R[x]}(aR[x]) \cap R$ olduğundan, $r_R(aR) = eR$ elde ederiz.

R quasi-Baer halka olsun. $A, R[x]$ in ideali ve A^* ise A nın elemanlarının bütün kat-sayılarının kümesi olsun. O zaman $A^* R$ nin ideali olur, dolayısıyla bir kare-eş $e \in R$ için $r_R(A^*) = eR$. $e \in r_{R[x]}(A)$ olduğundan, $eR[x] \subseteq r_{R[x]}(A)$ elde ederiz. Şimdi $f = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n \in r_{R[x]}(A)$ alalım. $Af = 0$ olduğundan her $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $Ab_i = 0$ ve $A^*b_i = 0$. Dolayısıyla her i için $b_i \in r_R(A^*) = eR$ ve $b_i = eb_i$ bulunur. Sonuç olarak $f \in eR[x]$ olur. Tersine, $R[x]$ quasi-Baer ve A, R nin ideali olsun. o zaman $A[x] R[x]$ in ideali olur. Buradan $r_{R[x]}(A[x]) = eR[x]$. Her iki tarafı R ile kesiştirirsek, $r_{R[x]}(A[x]) \cap R = eR[x] \cap R = eR$ buluruz. $r_R(A) = r_{R[x]}(A[x]) \cap R$ olduğundan, $r_R(A) = eR$ elde edilir.

3.12. Önerme

M_R p.p.-modül olsun. O zaman M_R yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $m \in M, r \in R$ ve $e^2 = e \in R$ için $mre = mer$ dir.

İspat

$m \in M, a \in R$ için $ma = 0$ olsun. O zaman $a \in r(m)$ olur. Hipotezden bir

$e^2 = e \in R$ için $r(m) = eR$ olur. O zaman $me = 0$, $a = ea$, ve dolayısıyla $mra = mrea$ olur. Şarttan herhangi $r \in R$, için $mrea = mrae = mera = 0$. O zaman her $r \in R$ için $mra = 0$. Diğer yön, yani her $m \in M, r \in R$, ve $e^2 = e \in R$ için $mre = mer$ olacağı 3.1. Teoremden elde edilir.

Şimdi D.A.Jordanın inşa etmiş olduğu $A(R, \alpha)$ halkasını göz önüne alalım (16). $A = A(R, \alpha) = \{x^{-i}rx^i \mid r \in R, i \geq 0\}$ kümesi $R[x, x^{-1}; \alpha]$ çarpık Laurent çokterimliler halkasının altkümesi olsun, burada $\alpha : R \mapsto R$ dönüşümü birebir R halka endomorfizmasıdır. $R[x, x^{-1}; \alpha]$ 'ın öğeleri $x^{-j}rx^i$ formundaki öğelerin sonlu toplamlarıdır, burada $r \in R$ ve i, j ler pozitif doğal sayılardır. Çarpma işlemi için aşağıdakiler sözkonusudur: Her $r \in R$ için $xr = \alpha(r)x$ ve $rx^{-1} = x^{-1}\alpha(r)$. Her $j \geq 0$ için, $x^{-i}rx^i = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)x^{(i+j)}$ olduğu görülür. Bu sonuçtan yola çıkarak $A(R, \alpha)$ halkası, $R[x, x^{-1}; \alpha]$ nın alt halkası olur ve işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} x^{-i}rx^i + x^{-j}sx^j &= x^{-(i+j)}(\alpha^j(r) + \alpha^i(s))x^{(i+j)} \\ (x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) &= x^{-(i+j)}(\alpha^j(r)\alpha^i(s))x^{(i+j)} \end{aligned}$$

burada $r, s \in R$ ve $i, j \geq 0$.

3.13. Önerme

Aşağıdakiler R halkası için denktir:

- (a) R yarıdeğişmelidir.
- (b) $A(R, \alpha)$ yarıdeğişmelidir.

İspat

(a) $\Rightarrow$ (b): $(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) \in A(R, \alpha)$ olsun. $(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = 0$ olsun. O zaman

$x^{-(i+j)}(\alpha^j(r)\alpha^i(s))x^{(i+j)} = 0$ ve dolayısıyla buradan da $\alpha^j(r)\alpha^i(s) = 0$ bulunur. Buradan (a) dan $\alpha^k(\alpha^j(r)\alpha^i(s)) = \alpha^{k+j}(r)\alpha^{k+i}(s) = 0$ ve böylece $\alpha^{j+k}(r)\alpha^{j+i}(t)\alpha^{i+k}(s) = 0$. Her $x^{-k}tx^k \in A(R, \alpha)$ için $(x^{-i}rx^i)(x^{-k}tx^k)(x^{-j}sx^j)$
 $= x^{-(i+k)}(\alpha^k(r)\alpha^i(t))x^{(i+k)}(x^{-j}sx^j) = x^{-(i+k+j)}\alpha^j(\alpha^k(r)\alpha^i(t))\alpha^{i+k}(s)x^{(i+k+j)}$
 $= x^{-(i+k+j)}\alpha^{j+k}(r)\alpha^{j+i}(t)\alpha^{i+k}(s)x^{(i+k+j)}.$

(b) $\Rightarrow$ (a): $R \leq A(R, \alpha)$ olduğundan R yarıdeğişmeli olur.

3.14. Önerme

$S = R[x]/(x^n)$ halkası her $n = 2, 3, \dots$ için yarıdeğişmeli olsun. O zaman R yarıdeğişmeli halka olur.

İspat

$a, b \in r$ ve $ab = 0$ olsun. $f(x) = a + (x^n)$, $g(x) = b + (x^n) \in R[x]/(x^n) = S$ alalım. O zaman $f(x)g(x) = 0_S$ olur. Kabulden dolayı $(a + (x^n))((r + (x^n))(b + (x^n))) = 0_S$. Buradan $arb \in (x^n)$ olmasından her $r \in R$ için $arb = 0$ bulunur.

R inmiş halkası için, $T_n(R)$ nin hangi alt halkalarının yarıdeğişmeli olduğu merak edilebilir. Bunun için, aşağıdaki notasyonu tanımlayacağız. $n \geq 4$ doğal sayısı ve $1 \leq m \leq n$ şartını sağlayan her m sayısı için aşağıdaki kümeyi tanımlayalım:

$$T_n^m(R) = \left\{ \sum_{i=j}^n \sum_{j=1}^m a_j E_{(i-j+1)i} + \sum_{i=j}^{n-m} \sum_{j=1}^{n-m} r_{ij} E_{j(m+i)} : a_j, r_{ij} \in R \right\}$$

burada $E_{i,j}$ matrisi, i. satır ve j. sütunun kesişiminde birim, diğer yerlerde hep sıfır olan matrislerdir. $T_n^m(R)$ nin elemanlarını

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_{1(m+1)} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & & & a_{3n} \\ & & & \dots & & & \\ & & & & & & a_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada $a_1, \dots, a_m, a_{1(m+1)}, \dots, a_{(n-m)n} \in R$ dir.

3.15. Önerme

R inmiş halka olsun. O zaman $n \geq 4$ doğal sayıları ve $k = [n/2]$ için $T_n^k(R)$ yarıdeğişmeli, fakat $T_n^{k-1}(R)$ yarıdeğişmeli değildir.

İspat

$A = \sum_{i=1}^{n-k} E_{i(i+k-1)}$, $B = E_{(n-k+1)n} \in T_n^{k-1}(R)$ olsun. O zaman $AB = 0$ olur. Fakat $C = \sum_{j=i}^n \sum_{i=1}^n E_{ij} \in T_n^{k-1}(R)$, $ACB \neq 0$. O zaman $T_n^{k-1}(R)$ yarıdeğişmeli değildir. $n \geq 4$ ve $k = [n/2]$ için $T_n^k(R)$ nm yarıdeğişmeli olduğunun ispatını tamamlamak için, $n = 5$ durumunu irdelememiz yeterli olacaktır . Aynı ispat her $n \geq 4$ ve $k = [n/2]$ için de geçerli olacaktır . $n = 5$ olsun. O zaman $k = 2$ olur. $T_5^2(R)$ nin iki

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_1 & a_2 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ 0 & b_1 & b_2 & b_{24} & b_{25} \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix}$$

elemanlarını alalım ve $AB = 0$ olsun. Biz $AB = 0$ denkleminde ortaya çıkan

aşağıdaki her denklemin terimlerinin teker teker sıfır olduğunu göstereceğiz:

$$A_1B^1 : a_1b_1 = 0 \quad [3.8]$$

$$A_1B^2 : a_1b_2 + a_2b_1 = 0 \quad [3.9]$$

$$A_1B^3 : a_1b_{13} + a_2b_2 + a_{13}b_1 = 0 \quad [3.10]$$

$$A_1B^4 : a_1b_{14} + a_2b_{24} + a_{13}b_2 + a_{14}b_1 = 0 \quad [3.11]$$

$$A_1B^5 : a_1b_{15} + a_2b_{25} + a_{13}b_{35} + a_{14}b_2 + a_{15}b_1 = 0 \quad [3.12]$$

$$A_2B^4 : a_1b_{24} + a_2b_2 + a_{24}b_1 = 0 \quad [3.13]$$

$$A_2B^5 : a_1b_{25} + a_2b_{35} + a_{24}b_2 + a_{25}b_1 = 0 \quad [3.14]$$

$$A_3B^5 : a_1b_{35} + a_2b_2 + a_{35}b_1 = 0 \quad [3.15]$$

Bu denklemlerdeki her terimin sıfır olduğunu görmek için aşağıdaki şekilde işlem yapacağız: Önce her $1 \leq j \leq k$ için A_1B^j nin her teriminin sıfır olduğunu göstereceğiz. Sonra $0 \leq i \leq n - k - 2$ için $A_{n-k-i}B^{n-i}, A_{n-k-i}B^{n-i+1}, \dots, A_{n-k-i}B^n$ denklemlerindeki her terimin sıfır olduğunu ispatlayacağız. Önceki sonuçları kullanarak en son $A_1B^{k+1}, \dots, A_1B^n$ denklemlerindeki her terimin sıfır olduğunu göreceğiz. Hipotezden $rs = 0$ şartını sağlayan R deki her r ve s elemanı için $sr = 0$ ve $rRs = 0$ olur. Ayrıca $r^2s = 0$ olmasından $(rs)^2 = 0$ ve buradan da $rs = sr = 0$ bulunur. Biz bu sonuçları herhangi bir hipoteze dayanmadan, direk kullanacağız.

Şimdi Eş.3.9 u soldan a_1 ile çarparsak $a_1^2b_2 + a_1a_2b_1 = 0$ elde ederiz. Eş.3.8 den ve hipotezden $a_1a_2b_1 = 0$. O zaman $a_1^2b_2 = 0$ ve dolayısıyla $a_1b_2 = 0$. Eş.3.9 dan $a_2b_1 = 0$. Eş.3.10 u sol taraftan a_1 ile çarparsak, $a_1^2b_{13} = 0$ olur. Buradan $a_1b_{13} = 0$. O zaman Eş.3.10 şu şekilde olur: $a_2b_2 + a_3b_1 = 0$. Bu denklemi soldan a_2 ile çarparsak $a_2^2b_2 = 0 = a_2b_2$ elde ederiz. Buradan Eş.3.10 dan $a_{13}b_1 = 0$ elde edilir. Böylece Eş.3.8, Eş.3.9, Eş.3.10 da her terim sıfır olur. Şimdi Eş.3.15 i a_1 ile soldan çarparak $a_1^2b_{35} = 0$ elde ederiz, çünkü $a_1b_2 = 0$ ve $a_1b_1 = 0$ den $a_1a_2b_2 + a_1a_{35}b_1 = 0$

elde edilir. Eş.3.15 den $a_2b_2 + a_{35}b_1 = 0$ bulunur. Sonuncu denklemi soldan a_2 ile çarpıp $a_2b_1 = 0$ olduğunu kullanırsak $a_2^2b_2 = 0$ buluruz. Buradan $a_2b_2 = 0$. Eş.3.15 den $a_{35}b_1 = 0$ olur. Eş.3.13 ü soldan a_1 ile çarpıp $a_1b_2 = 0$ ve $a_1b_1 = 0$ olduğunu kullanırsak $a_1b_{24} = 0$ olur. Eş.3.13 den $a_{24}b_1 = 0$ olur, çünkü $a_2b_2 = 0$. Eş.3.14 ü soldan a_1 ile çarpalım ve $a_1b_{35} = 0$, $a_1b_2 = 0$ ve $a_1b_1 = 0$ olduğunu kullanırsak $a_1b_{25} = 0$ elde ederiz. O zaman Eş.3.14 şu şekilde olur: $a_2b_{35} + a_{24}b_2 + a_{25}b_1 = 0$. Sonuncuyu soldan a_2 ile çarparsak $a_2b_{35} = 0$ elde ederiz. Eş.3.14 den $a_{24}b_2 + a_{25}b_1 = 0$ bulunur. Bu denklemi soldan b_1 ile çarparsak ve $a_{24}b_1 = 0$ olduğunu kullanırsak $b_1^2a_{25} = 0$ olur. Buradan $b_1a_{25} = 0$. Şimdi Eş.3.12 ye geçelim. Onu soldan a_1 ile çarparak $a_1b_{35} = 0$, $a_1b_{25} = 0$, $a_1b_2 = 0$, $a_1b_1 = 0$ olduğunu kullanırsak, $a_1^2b_{15} = 0$ elde ederiz. O zaman $a_1b_{15} = 0$. Eş.3.12 den $a_2b_{25} + a_{13}b_{35} + a_{14}b_2 + a_{15}b_1 = 0$ olur. Aynı işlemi kullanarak son denklemde: $a_2b_{25} = 0$, $a_{13}b_{35} = 0$, $a_{14}b_2 = 0$, $a_{15}b_1 = 0$ sonuçlarını buluruz. Eş.3.11 de, soldan onu a_1 ile çarptığımızda $a_1^2b_{14} = 0$ olur, çünkü $a_1b_{24} = 0$, $a_1b_2 = 0$ ve $a_1b_1 = 0$ dır. O zaman $a_1b_{14} = 0$. Eş.3.11 den $a_2b_{24} + a_{13}b_2 + a_{14}b_1 = 0$. Bunu soldan a_2 ile çarpıp $a_2b_2 = 0$ ve $a_2b_1 = 0$ olduğunu kullanırsak benzer şekilde $a_2b_{24} = 0$ buluruz. Geriye kalan $a_{13}b_2 + a_{14}b_1 = 0$ denklemini soldan b_2 ile çarpıp $a_{14}b_2 = 0$ olduğunu kullanırsak $b_2^2a_{13} = 0$ olur. Buradan $b_2a_{13} = 0$. Böylece $a_{14}b_1 = 0$. R nin yarıdeğişmeli olduğunu kullanırsak, geriye kalanın ispatı açık olarak çıkar.

3.7. Sonuç

R asal halka olsun. O zaman $R[x]/(x^n)$ Armendarizdir ancak ve ancak $R[x]/(x^n)$ yarıdeğişmelidir.

3.8. Sonuç

R inmiş halka ise $R[x]/(x^n)$ yarıdeğişmeli olur.

3.9. Sonuç

R Armendariz halka olsun. O zaman R yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $R[x]/(x^n)$ yarıdeğişmelidir.

Örnek

R nin inmiş olması durumunda $T(R, R)$ nin yarıdeğişmeli olduğu bilinmektedir. Fakat aynı durum R nin yarıdeğişmeli olması durumunda sözkonusu değildir. yani yarıdeğişmeli olan öyle R halkası vardır ki $T(R, R)$ yarıdeğişmeli değildir. Bunu görmek için F bir cisim, $K = F[y]$ ise F üzerinde y bilinmeyenli çok terimliler halkası ve $\alpha : K \rightarrow K$, $\alpha(f(y)) = f(y^2)$ ile tanımlı dönüşüm alalım. K nin $S = K[x; \alpha] = F[y][x; \alpha]$ Ore genişlemesini alalım. O zaman S , $xf(y) = \alpha(f(y))x = f(y^2)x$ şartını sağlayan, değişmeli olmayan tamlık bölgesi olduğundan inmiş halka olur. Bu durumda 3.15. Önermeden $U = T(S, S)$ halkası yarıdeğişmeli olan bir halkadır. Fakat $R = T(U, U)$ nin yarıdeğişmeli olmadığını görelim. R nin iki

$$a = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -y^2x & 0 \\ 0 & -y^2x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

öğelerini alırsak $xy = y^2x \in S$ olduğundan $ab = 0$ olur. Şimdi R de

$$r = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

ögesini alalım. O zaman $y^2xy = y^4x \in S$ olduğundan

$$arb = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & (-y^3 + y^4)x \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq 0$$

olur. Dolayısıyla R yarıdeğişmeli olmaz.

3.15. Önermede R halkasının inmiş olması durumunda $S = T_n^k(R)$ nin yarıdeğişmeli olduğu ispatlandı. Fakat şimdi R nin değişmeli olması durumunda böyle olamayacağını, yani S nin yarıdeğişmeli olacağı sonucunu vermeyeceğini gösteren örneği ele alalım.

Örnek

R yarıdeğişmeli (değişmeli) fakat $T_3^1(R)$ nin yarıdeğişmeli olmadığı halkalar vardır. $R = \mathbb{Z}_4$ değişmeli halkasını gözönüne alalım.

$$S = T_3^1(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

halkasının yarıdeğişmeli olmadığını gösterelim. $a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in S$ alırsak

$a^2 = 0$ buluruz. Fakat

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S \text{ aldığımızda} \quad 0 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ara \in aSa \text{ olduğundan}$$

S halkası yarıdeğişmeli olmaz.

4. α -YARIDEĞİŞMELİ HALKA VE MODÜLLER

İnmiş ve Armendariz halka kavramları, Lee ve Zhou (25) tarafından halkanın bir α dönüşümüne bağlı olarak α -inmiş halkaya, α -inmiş modüle, α -Armendariz halkaya ve α -Armendariz modüllere genişletildi. Bu bölümde yarıdeğişmeli halka kavramını modüllere ve halkanın bir α halka dönüşümü yardımı ile α -yarıdeğişmeli modüllere ve α -yarıdeğişmeli halkalara genişleteceğiz. α , R halkasının bir halka dönüşümü olsun. Burada α , $\alpha(1) \neq 1$ de olabilen bir dönüşüm kabul edeceğiz.

4.1. Tanım

R bir halka ve α , R nin bir halka dönüşümü olsun. Bir M modülü, her $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ dan $mR\alpha(a) = 0$ sağlanırsa M ye α -yarıdeğişmeli modül denir.

4.1. İnmiş ve α -Katı Halkalarla Bağlantı

Yarıdeğişmeli halka tanımı (34) ve (30) da değişik adlar altında verilmiştir. Tanımdan " R yarıdeğişmeli bir halkadır ancak ve ancak R_R bir 1-yarıdeğişmeli modüldür" olduğu açıkça görülebilir. Bir R halkası için $a \in R$ ve $a\alpha(a) = 0$ dan $a = 0$ elde edilirse R ye α -katı halka denir. Üstel sıfır ögesi bulundurmeyen halkaya inmiş halka denir. İnmiş bir halkada $ab = 0$ dır ancak ve ancak $ba = 0$ dır. Gerçekten, $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. O zaman $(ba)^2 = baba = 0$ ve R inmiş olduğundan $ba = 0$ bulunur. Böylece inmiş bir halkada sağ ve sol sıfırlayanlar eşittir. Her α -yarıdeğişmeli halkanın α -katı ve inmiş olmasını gerektirmediğini aşağıdaki örnekle görelim:

Örnek

$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olsun.

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasını gözönünde bulunduralım. $\alpha : R \longrightarrow R$ endomorfizması aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Bu durumda $b \neq 0$ değerleri için $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olduğundan R halkası inmiş ve dolayısıyla α -katı halka olmaz. α nın otomorfizma olduğu kolayca görülebilir.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$$

ve $AB = 0$ olsun. O zaman $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ olur. Herhangi $\begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix} \in R$ ögesi için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix} \alpha \left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ahc & -ahd + akc + bhc \\ 0 & ahc \end{pmatrix}$$

bulunur. $ac = 0$ olduğundan $a = 0$ veya $c = 0$ olur. $a = 0$ ise $bc = 0$ ve $bhc = 0$ olur. O zaman $AR\alpha(B) = 0$ bulunur. $C = 0$ ise $ad = 0$ ve $-ahd = 0$ olur. Böylece yine $AR\alpha(B) = 0$ bulunur. Sonuç olarak R halkası α - yarıdeğişmeli olur.

Örnek

Her yarıdeğişmeli halkanın α -yarıdeğişmeli halka olmasını gerektirmediğini örnek üzerinde görelim. $\mathbb{Z}_2$, 2 moduna göre kalan sınıfının oluşturduğu halka ve $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ de bileşensel toplama ve çarpıma işlemlerine göre bir halka olsun. Bu halkanın yarıdeğişmeli olduğu kolay hesaplamalarla görülebilir, çünkü R inmiş ve

değişmeli halkadır. $\alpha : R \longrightarrow R$, $\alpha((a, b)) = (b, a)$ alırsak α bir R otomorfizması olur. $(1, 0), (0, 1) \in R$ için $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$ fakat $(1, 0)(1, 1)\alpha((0, 1)) \neq (0, 0)$ yani $(1, 0)R\alpha((0, 1)) \neq 0$ olur. Dolayısıyla R , α - yarıdeğişmeli halka değildir.

4.1. Önerme

R α -yarıdeğişmeli halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. O zaman $aR\alpha(b) = 0$ ve özel olarak $a\alpha(b) = 0$ olur. Buradan $aR\alpha^2(b) = 0$ ve böyle devam ederek induksiyondan her $k \in \mathbb{N}$ için $aR\alpha^k(b) = 0$ bulunur.

4.1. Önteorem

Her α -katı halka inmiş halkadır.

İspat

R α -katı halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. $a\alpha(a)\alpha(a(\alpha(a))) = a\alpha(a^2\alpha(a)) = 0$ olur. R α -katı olduğundan $a\alpha(a) = 0$ ve dolayısıyla $a = 0$ olur. Yani R inmiş halka olur.

4.1. Teorem

R α -katı halkadır ancak ve ancak R inmiş α -yarıdeğişmeli halka ve α 1-1 bir halka dönüşümüdür.

İspat

$a, b \in R$ ve $ab = 0$ olsun. R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. O zaman her $r \in R$ için $ar\alpha(b)\alpha(ar\alpha(b)) = ar\alpha(ba)\alpha(r)\alpha^2(b) = 0$. R α - katı olduğundan

$aR\alpha(b) = 0$. Buradan $aR\alpha(b) = 0$, yani R, α -yarıdeğişmeli olur. Tersine, $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. R inmiş ve α -yarıdeğişmeli olduğundan $\alpha(a)a = 0$ ve dolayısıyla $\alpha(a)R\alpha(a) = 0$ olur. O zaman $\alpha(a^2) = 0$ ve α 1-1 olduğundan $a^2 = 0$ bulunur. R inmiş olduğundan $a = 0$ buluruz. Dolayısıyla R α -katı halkadır.

4.2. Önerme

R α -yarıdeğişmeli inmiş halka olsun. O zaman R, α -çarpık Armendariz halka olur.

İspat

$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^t b_j x^j \in R[x; \alpha]$ ve $f(x)g(x) = 0$ olsun.

$$a_0 b_0 = 0 \tag{4.1}$$

$$a_0 b_1 + a_1 \alpha(b_0) = 0 \tag{4.2}$$

$$a_0 b_2 + a_1 \alpha(b_1) + a_2 \alpha^2(b_0) = 0 \tag{4.3}$$

.....

olsun. O zaman $a_0 R\alpha(b_0) = 0$ olur. Eş.4.2 yi sağdan $\alpha(b_0)$ la çarparsak, $a_0 b_1 \alpha(b_0) + a_1 \alpha(b_0)^2 = 0$ ve dolayısıyla $a_1^2 \alpha(b_0)^2 = 0$ ve $a_1 \alpha(b_0) = 0$ bulunur. Eş.4.3 ü sağdan $\alpha(b_0)^2$ ile çarparsak, $a_0 b_2 \alpha^2(b_0) + a_1 \alpha(b_1) \alpha(b_0) + a_2 \alpha^2(b_0) \alpha^2(b_0) = 0$ olur. R nin α -yarıdeğişmeli olduğunu kullanarak $a_2 \alpha^2(b_0) \alpha^2(b_0) = 0$ ve buradan da $a_2 \alpha^2(b_0) = 0$ elde edilir. O zaman Eş.4.3 ten $a_0 b_2 + a_1 \alpha(b_1) = 0$ olur. Sağdan $\alpha(b_1)$ ile çarparsak sonuçta $a_1 \alpha(b_1)^2 = 0$ ve dolayısıyla $a_1 \alpha(b_1) = 0$ bulunur. Böyle devam ederek $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ bulunur.

4.2. Teorem

R inmiş halka ve α, R nin monomorfizması ise aşağıdakiler denktir:

- (a) $R[x; \alpha]$ inmiş halkadır.
- (b) R , α -çarpık Armendariz halkadır.
- (c) R , α -katı halkadır.
- (d) R , α -yarıdeğişmeli halkadır.
- (e) $R[x; \alpha, \delta]$ inmiş halkadır.

İspat

(a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c): Bkz. ((29), Teorem A).

(c) $\Rightarrow$ (d): $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. Herhangi $r \in R$ için $ar\alpha(b)ar\alpha(b) = ar\alpha(b)\alpha(a)\alpha(r)\alpha^2(b) = ar\alpha(ba)\alpha(r)\alpha^2(b) = 0$ olur. (c) den $ar\alpha(b) = 0$ bulunur. Dolayısıyla R yarıdeğişmeli olur.

(d) $\Rightarrow$ (c): $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. R inmiş olduğundan $\alpha(a)a = 0$ olur. (d) den $\alpha(a)1\alpha(a) = (\alpha(a))^2 = 0$. Buradan R inmiş olduğundan $\alpha(a) = 0$ bulunur. α nın birebirliği $a = 0$ olduğunu gösterir.

(c) $\Rightarrow$ (e): $R[x; \alpha, \delta]$ nın inmiş halka olmadığını varsayalım. O zaman $0 \neq f \in R[x; \alpha, \delta]$ vardır öyle ki $f^2 = 0$. R inmiş olduğundan f , R nin ögesi olmaz. $f = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, $a_i \in R$, $0 \leq i \leq m$ ve $a_m \neq 0$ alalım. $f^2 = 0$ olduğundan $a_m \alpha^m(a_m) = 0$ olur. R inmiş olduğundan $\alpha^m(a_m)a_m = 0$ ve her α -katı halka α -yarıdeğişmeli olduğundan 4.1. Önermeden $\alpha^m(a_m)\alpha^m(a_m) = 0$, yani $(\alpha^m(a_m))^2 = 0$ ve $\alpha^m(a_m) = 0$ olur. α birebir olduğundan $a_m = 0$ olur. Bu ise çelişkidir. O zaman $R[x; \alpha, \delta]$ inmiş halkadır.

(c) $\Rightarrow$ (a): Bu yön için (c) $\Rightarrow$ (e) ispatında $\delta = 0$ almamız yeterli olacaktır.

(e) $\Rightarrow$ (a): $\delta = 0$ alırsak ispat açıktır.

4.2. Önteorem

α , R halkasının otomorfizması, R inmiş ve α -yarıdeğişmeli bir halka olsun. O zaman R nin herhangi öğesinin sağ sıfırlayanının α altındaki görüntüsü değişmez kalır.

İspat

Herhangi $a \in R$ için $x \in r(a)$ olsun. O zaman $ax = 0$ olur. R α -yarıdeğişmeli olduğundan $a\alpha(x) = 0$ olur. Buradan $\alpha(r(a)) \subset r(a)$ bulunur. Ayrıca R nin inmiş olmasından $xa = 0$ olur. R nin α -yarıdeğişmeli olmasından ise $x\alpha(a) = 0$ ve dolayısıyla $\alpha^{-1}(x)a = 0$ olur. Yine R nin inmiş olmasından $a\alpha^{-1}(x) = 0$, yani $\alpha^{-1}(x) \in r(a)$ olur. Buradan $x \in \alpha(r(a))$, yani $r(a) \subset \alpha(r(a))$ ve sonuç olarak $r(a) = \alpha(r(a))$ buluruz.

4.1. Sonuç

R α -katı ve α , R 'nin bir otomorfizması olsun. O zaman R nin herhangi elemanının sağ sıfırlayanının α altındaki görüntüsü değişmez kalır.

İspat

α -katı halkalar inmiş ve α -yarıdeğişmeli olduklarından ispat 4.2. Önteoremden açıktır.

4.3. Önteorem

R halkası α -yarıdeğişmeli ve $\alpha^k = id$ (birim homomorfizma) olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$

sayısı bulunsun. O zaman $a, b \in R$ için $ab = 0$ dır ancak ve ancak herhangi i ve j doğal sayıları için $\alpha^i(a)\alpha^j(b) = 0$ dır.

İspat

($\Rightarrow$): $ab = 0$ olsun. Bu eşitliğin i kez α altında görüntüsünü alırsak $\alpha^i(a)\alpha^i(b) = 0$ olur. $j = i$ ise ispat biter. $j > i$ olsun. R nin α -yarıdeğişmeli olmasını $j - i$ kez uygularsak

$$\alpha^i(a)\alpha^{i+1}(b) = \alpha^i(a)\alpha^{i+2}(b) = \dots = \alpha^i(a)\alpha^j(b) = 0$$

buluruz. $j < i$ olsun. 1. durumdaki işlemlerin aynısını uygularsak belli bir adımdan sonra $\alpha^i(a)b = 0$ durumuna ulaşırız. Yeniden j kez α -yarıdeğişmeli olma özelliğini kullanarak $\alpha^i(a)\alpha^j(b) = 0$ buluruz.

($\Leftarrow$): Herhangi i ve j doğal sayıları için $\alpha^i(a)\alpha^j(b) = 0$ olduğundan özel olarak $i = j$ alırsak $\alpha^i(a)\alpha^i(b) = \alpha^i(ab) = 0$ olur. $\alpha^k = id$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ sayısı bulunduğundan α altında görüntü almaya devam edersek $\alpha^i(ab) = \alpha^{i+1}(ab) = \dots = \alpha^k(ab) = ab = 0$ buluruz.

4.4. Önteorem

R inmiş halka olsun. $\alpha^k = id$ (birim homomorfizma) olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ sayısı bulunsun ve δ , R nin α -türevi olsun. O zaman R , α -yarıdeğişmeli halka ise aşağıdakiler $a, b \in R$ için geçerlidir:

$ab = 0$ ise $R[x; \alpha, \delta]$ halkasında m, n doğal sayıları için $ax^m bx^n = 0$ ve her i, j doğal sayıları için $\delta^i(a)\delta^j(b) = 0$ olur.

İspat

Önce $\delta^i(a)\delta^j(b) = 0$ olduğunu gösterelim. $a, b \in R$ ve $ab = 0$ olsun. R halkası inmiş olduğundan $ba = 0$ olur ve dolayısıyla 4.3. Önteoremden $b\alpha(a) = 0$ bulunur. Böylece $0 = \delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b$ olur ve buradan da $[\alpha(a)\delta(b)]^2 = -\delta(a)b\alpha(a)\delta(b) = 0$ ve $\alpha(a)\delta(b) = 0$ olur. 4.3. Önteoremden $a\delta(b) = 0$ olur. Benzer şekilde $ba = 0$ olmasını kullanarak $\delta(a)b = 0$ sonucunu bulabiliriz. Bu işlemlerin gerektiği kadar tekrarlanması bize her i, j doğal sayıları için $\delta^i(a)\delta^j(b) = 0$ sonucunu verir.

Her $r \in R$ için $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$ olmasını kullanarak

$$ax^m bx^n = c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + \dots + c_1x + c_0$$

şeklinde gösterirsek $c_{m+n} = a\alpha^m(b)$, $c_{m+n-1} = \sum_{i=0}^{m-1} a\alpha^{m-i-1}\delta\alpha^i(a)$ olur. Genel olarak c_k katsayısı, $i_1 + j_1 + \dots + i_t + j_t = m$ olacak şekilde bazı $a\alpha^{i_1}\delta^{j_1}\alpha^{i_2}\delta^{j_2}\dots\alpha^{i_t}\delta^{j_t}(b)$ katsayılarının toplamına eşittir. 4.3. Önteorem ve $\delta^i(a)\delta^j(b) = 0$ kullanarak her $i_1, \dots, i_t$ ve $j_1, \dots, j_t$ için $a\alpha^{i_1}\delta^{j_1}\alpha^{i_2}\delta^{j_2}\dots\alpha^{i_t}\delta^{j_t}(b) = 0$ bulunur ve dolayısıyla her $k = 0, 1, \dots, m+n$ için $c_k = 0$ elde ederiz.

4.3. Teorem

R inmiş halka, $\alpha : R \rightarrow R$ halka homomorfizması, R nin bir δ α -türevi için $\alpha^k = id$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ sayısı bulunsun. R α -yarıdeğişmeli ise $R[x; \alpha, \delta]$ daki tersinir elemanların kümesi R deki tersinir elemanların kümesine eşit olur.

İspat

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \text{ ögesi } R[x; \alpha, \delta] \text{ da tersinir olsun ve } f(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \text{ de onun tersi}$$

olsun. O zaman $1 = f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i x^i b_j x^j \right) = c_{m+n} x^{m+n} + c_{m+n-1} x^{m+n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ yazabiliriz. $f(x)$ öğesinin R de olduğunu ispatlayalım. Tersine, $m > 0$ ve $a_m \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

İddia: $s + t \geq m$ için $a_s b_t = 0$ dır.

İlk olarak $c_{m+n} = a_m \alpha^m(b_n) = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. 4.3. Önteorem-den $a_m b_n = 0$ elde ederiz. Buradan $s + t = m + n$ için iddia ispatlanmış olur. p tamsayısını $m + n > p \geq m$ olacak şekilde alalım ve $s + t > p$ için $a_s b_t = 0$ olduğunu farzedelim. Biz $s + t = p$ için $a_s b_t = 0$ olduğunu ispatlayacağız. 4.4. Önteoremden $u = m + n, m + n - 1, \dots, p + 1$ için $\sum_{i+j=u} a_i x^i b_j x^j = 0$ bulunur. O zaman

$$c_p = \sum_{i+j=p} a_i \alpha^i(b_j) = 0 \quad [4.4]$$

$s + t > p$ için $a_s b_t = 0$ olduğundan $s + t > p$ durumunda 4.3. Önteoremden $a_s \alpha^s(b_t) = 0$ ve dolayısıyla R inmiş halka olduğundan $s + t > p$ için $\alpha^s(b_t) a_s = 0$ olur. Eş.4.4 ü eşitliğini sağdan a_p ile çarparsak $0 = \left[\sum_{i+j=p} a_i \alpha^i(b_j) \right] a_p = a_p \alpha^p(b_0) a_p$ bulunur. R inmiş olduğundan $a_p \alpha^p(b_0) = 0$ ve 4.3. Önteoremden $a_p b_0 = 0$ olur. Şimdi Eş.4.4

$$\sum_{i+j=p, j \geq 1} a_i \alpha^i(b_j) = 0 \quad [4.5]$$

eşitliğine dönüştü. Eş.4.5 i eşitliğini sağdan a_{p-1} ile çarparsak $a_{p-1} \alpha^{p-1}(b_1) a_{p-1} = 0$ ve dolayısıyla $a_{p-1} \alpha^{p-1}(b_1) = 0$ bulunur. Buradan da $a_{p-1} b_1 = 0$ buluruz. Bu işlemleri tekrarladığımızda $i + j = p$ şartını sağlayan i, j ler için $a_i b_j = 0$ buluruz. Böylece $s + t \geq m$ için $a_s b_t = 0$ ispatlanmış olur. Buradan özel olarak $a_m b_n = a_m b_{n-1} = \dots = a_m b_0 = 0$ yazarsak 4.4. Önteoremden $a_m x^m g(x) = 0$ ve

dolayısıyla $\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i\right) g(x) = 1$. Buradan biz $\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i = \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i\right) g(x) f(x) = f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ buluruz. Dolayısıyla $a_m = 0$ olur, fakat bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

R nin bir α endomorfizması için ne zaman R α -yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $R[x]$ α -yarıdeğişmelidir sorusunun cevabı ilgi çekici olabilir.

4.5. Önteorem

R inmiş halka ve α , R nin monomorfizması olsun. O zaman R α -yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $R[x]$ α -yarıdeğişmelidir.

İspat

R α -yarıdeğişmeli olsun. O zaman 4.1. Teoremden R , α -katı halka olur. Önce $R[x]$ in α -katı halka olduğunu ispatlayalım. α yı $R[x]$ ye genişletelim ve genişleyenini de tekrar α ile gösterelim. $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x]$ için $\alpha(f(x)) = \sum_{i=0}^n \alpha(a_i) x^i$ ile tanımlayalım. α , $R[x]$ nin bir monomorfizma dönüşümü olur. Bu α dönüşümü ile $R[x]$ nin α -yarıdeğişmeli olduğunu görelim. Bunun için $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x]$ için $f(x)\alpha(f(x)) = 0$ olsun. $f(x) = 0$ olduğunu görelim. $f(x)\alpha(f(x)) = 0$ dan

$$a_0 \alpha(a_0) = 0 \quad [4.6]$$

$$a_0 \alpha(a_2) + a_1 \alpha(a_1) + a_2 \alpha(a_0) = 0 \quad [4.7]$$

$$a_0 \alpha(a_4) + a_1 \alpha(a_3) + a_2 \alpha(a_2) + a_3 \alpha(a_1) + a_4 \alpha(a_0) = 0 \quad [4.8]$$

denklemleri elde edilir. R α -katı halka olduğu için Eş.4.6 dan $a_0 = 0$, Eş.4.7 den $a_1 = 0$, Eş.4.8 den $a_2 = 0$ tümevarımla her $1 \leq i \leq n$ için $a_i = 0$ yani $f(x) = 0$ bulunur. 4.1. Teoremden $R[x]$ α -yarıdeğişmeli olur. Her α -yarıdeğişmeli halkanın

her alt halkası da yarıdeğişmeli olduğundan ispat biter.

4.6. Önteorem

R α -yarıdeğişmeli halka olsun. O zaman $\alpha(1) = 1$ dir ancak ve ancak her $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ dir.

İspat

$\alpha(1) = 1$ olduğunu kabul edelim. Eğer $e^2 = e \in R$ ise $e(1 - e) = 0$ ve $(1 - e)e = 0$ olur. O zaman R α -yarıdeğişmeli halka olduğundan $eR\alpha(1 - e) = 0$ ve $(1 - e)R\alpha(e) = 0$ bulunur. Buradan $e\alpha(1 - e) = 0$ ve $(1 - e)\alpha(e) = 0$ olduğundan $e = e\alpha(e)$ ve $\alpha e = e\alpha(e)$ olur. O zaman $e = \alpha(e)$.

Tersi açıktır: Her $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ kabul edelim. R halkasının birimi de $1^2 = 1$ eşitliğini sağladığı için kabuldan $\alpha(1) = 1$ olacaktır.

4.4. Teorem

R α -yarıdeğişmeli bir halka ve $\alpha(1) = 1$ olsun. O zaman R abeldir.

İspat

$e \in R$ herhangi bir idempotent olsun. O zaman $e^2 = e$ olduğundan $e(1 - e) = 0$ ve $(1 - e)e = 0$. R α -yarıdeğişmeli halka olduğundan $eR\alpha(1 - e) = 0$ ve $(1 - e)R\alpha(e) = 0$ olur. 4.6. Önermeden $\alpha(e) = e$ olacağından $eR(1 - e) = 0$ ve $(1 - e)Re = 0$ bulunur. O zaman her $r \in R$ için $er(1 - e) = 0$ ve $(1 - e)re = 0$. Buradan $er = ere = re$ bulunur. Dolayısıyla R abel halkadır.

4.3. Önerme

R bir α -yarıdeğişmeli halka, α R nin $\alpha(1) = 1$ olan bir halka dönüşümü, δ R nin bir türevi ve e , R nin bir kare-eş ögesi ise $\alpha(e) = e$, $\delta(e) = 0$ ve $R[x, \alpha; \delta]$ halkasının her kare-eş ögesi R dedir.

İspat

R α -yarıdeğişmeli bir halka ve R de $\alpha(1) = 1$ sağlandığı için 4.4. Teorem den R nin her kare-eş ögesi merkezdedir. 4.6. Önteorem den $\alpha(e) = e$ elde edilir. Buradan, 4.4. Teorem ve δ nın tanımından

$$\delta(e) = \delta(e^2) = \alpha(e)\delta(e) + \delta(e)e = e\delta(e) + e\delta(e) \quad [4.9]$$

bulunur. Eş.4.9 e ile çarpılırsa $\delta(e)e = 0$. Bu, Eş.4.9 da kullanılırsa $\delta(e) = 0$ bulunur.

$f(x)^2 = f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x_i \in R[x, \alpha; \delta]$ olsun.

$$f(x) = f(x)^2 = a_0 a_0 + a_0 a_1 x + \dots + a_1 a_0 + a_1 x a_1 x + a_1 x a_2 x^2 + \dots \quad [4.10]$$

den $a_0 = a_0^2$ bulunur. Böylece $\alpha(a_0) = a_0$ ve $\delta(a_0) = 0$ olur. [4.4.2] de x lerin katsayıları kıyaslanırsa $a_0 a_1 + a_1 a_0 = a_1$ ve bu ifade a_0 ile çarpılır ve a_0 nın merkezde olduğu kullanılırsa $a_1 = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ bulunur. Böylece $R[x, \alpha; \delta]$ nin kare-eş $f(x)$ ögesi R ye ait olur.

$R[x, \alpha; \delta]$ halkasının Baer ya da temel izdüşel halka olma özellikleri incelenmiştir (28). Bu yönde aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

4.5. Teorem

R α -yarıdeğişmeli bir halka, $R[x, \alpha; \delta]$ Armendariz ve $\alpha(1) = 1$ olsun. O zaman R Baer halkadır ancak ve ancak $R[x, \alpha; \delta]$ Baer dir.

İspat

X , $R[x, \alpha; \delta]$ nin boş olmayan bir alt kümesi ve Y de X ye ait olan çokterimlilerin katsayıları olsun. R Baer halka kabul edelim. O zaman R de bir e kare-eş ögesi $r_R(Y) = eR$ olacak şekilde vardır. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in X$ ise $a_ie = 0$ dir. 4.6. Önteorem, 4.4. Teorem ve 4.3. Önermeden $(a_ix^i)e = a_iex^i$ olacağından $f(x)e = 0$ yani $Xe = 0$ bulunur. Böylece $eR[x; \alpha, \delta] \leq r_{R[x; \alpha, \delta]}(X)$ olur. ters kapsamı görelim. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in X$ ve $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m \in r_{R[x; \alpha, \delta]}(X)$ alalım. O zaman $f(x)g(x) = 0$ ve R Armendariz olduğundan her $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için $a_ib_j = 0$. Böylece her j için $Yb_j = 0$ yani $b_j \in r_R(Y) = eR$ ve $b_j = eb_j$ olur. Buradan $g(x) = eg(x) \in eR[x; \alpha, \delta]$ ve $eR[x; \alpha, \delta] = r_{R[x; \alpha, \delta]}(X)$ elde edilir. $R[x; \alpha, \delta]$ Baer halka olsun. X , R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. O zaman $R[x; \alpha, \delta]$ de bir kare-eş $e(x)^2 = e(x)$ ögesi $r_{R[x; \alpha, \delta]}(X) = e(x)R[x; \alpha, \delta]$ olacak şekilde vardır. 4.3. Önermeden $e(x) = e$, R ye ait olan bir kare-eş öge olur. $r_{R[x; \alpha, \delta]}(X) = e(x)R[x; \alpha, \delta]$ eşitliği R ile ara kesit yapılırsa $r_R(X) = (r_{R[x; \alpha, \delta]}(X)) \cap R = (e(x)R[x; \alpha, \delta]) \cap R = eR$ elde edilir. Böylece R Baer halka olur.

4.1. Uyarı

α -yarıdeğişmeli R halkasının herhangi farklı A, B altkümesi için $AB = 0$ sağlansın. $a \in A$ ve $b \in B$ için $ab = 0$ olacağından $aR\alpha(b) = 0$ olur. Dolayısıyla $AR\alpha(B) = \Sigma_{a \in A, b \in B} aR\alpha(b) = 0$ olur. Buradan R α -yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $AB = 0$ ise $AR\alpha(B) = 0$ dir.

α uyumlu halka ve halkada SA1 koşulu (11) de verildi. Bir R halkasının α dönüşümü , δ türev işlemi ve her a, b öğeleri için $ab = 0$ dır ancak ve ancak $a\alpha(b) = 0$ oluyorsa R ye α -uyumlu halka denir. $f(x) = \sum a_i x^i, g(x) = \sum b_j x^j \in R[x, \alpha, \delta]$ ve $f(x)g(x) = 0$ dan her i, j için $a_i b_j = 0$ elde edilirse R ye SA1 şartını sağlar denir. Armendariz halka tanımından hareketle R nin SA1 şartını sağlaması $R[x, \alpha, \delta]$ halkasının Armendariz olması demektir. (11) de R halkasının α -uyumlu ve (SA1) şartının sağlaması kabulü altında R ve $R[x, x^{-1}; \alpha]$ nin Baer ya da temel içdüşüm halka özellikleri incelenmiştir. Biz de R nin α -yarıdeğişmeli olma durumunda araştıracağız.

4.6. Teorem

α , R halkasının bir otomorfizması, R α -yarıdeğişmeli ve $R[x, x^{-1}; \alpha]$ Armendariz olsun. O zaman R bir Baer halkadır ancak ve ancak $R[x, x^{-1}; \alpha]$ bir Baer halkadır.

İspat

$R[x, x^{-1}; \alpha]$ nin her öğesi $f(x) = a_k x^k + \dots + a_{-1} x^{-1} + \sum_{i=0}^n a_i x^i$ şeklinde yazılabilir. R yi Baer halka kabul edelim. C de $R[x, x^{-1}; \alpha]$ nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. C deki çok terimlilerin katsayıları kümesi C' ise kabulden $e \in R$ kare-eş öğesi $r_R(C') = eR$ olacak şekilde vardır. Böylece $Ce = 0$ olur çünkü $f(x) \in C$ ise $f(x)$ nin her a_i katsayısı için $a_i e = 0$ dır ve 4.6. Önteoremden $\alpha(e) = e$ dır. Bu da $f(x)e = 0$ yı yani $e \in r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(C)$ ve $eR[x, x^{-1}; \alpha] \leq r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(C)$ gerektirir. Kapsamın diğer yönü için $f(x) = a_k x^k + \dots + a_{-1} x^{-1} + \sum_{i=0}^n a_i x^i \in r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(C)$ alalım. Her $g(x) = b_t x^t + \dots + b_{-1} x^{-1} + \sum_{i=0}^m b_i x^i \in C$ için $g(x)f(x) = 0$ ve $R[x, x^{-1}; \alpha]$ Armendariz olduğundan $b_i a_j = 0$ yani $C' a_j = 0$ her $k \leq j \leq n$ için. Böylece $a_j \in r_R(C') = eR$ ve $a_j = e a_j$, yani $f(x) = e f(x) \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ olur. Bu da $eR[x, x^{-1}; \alpha] = r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(C)$ demektir.

Şimdi $R[x, x^{-1}; \alpha]$ yi Baer halka kabul edelim. I , R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. O zaman $R[x, x^{-1}; \alpha]$ de bir $e(x)$ kare-eş ögesi var öyle ki, $e(x)R[x, x^{-1}; \alpha] = r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(I)$ olur. $e(x) = e_k x^k + \dots + e_{-1} x^{-1} + e_0 + \sum_{i=1}^n e_i x^i$ ise $Ie(x) = 0$ özel olarak $Ie_0 = 0$ olacaktır. Fakat $e_0 = e(x)e_0$ dan $e_0^2 = e_0$ bulunur. Buradan $e_0 \in r_R(I)$ ve $e_0 R \leq r_R(I)$ olur. $r \in r_R(I)$ alalım. $r_R(I) \leq e(x)R[x, x^{-1}; \alpha] = r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(I)$ dan $r = e(x)r$, buradan da $r = e_0 r$ yani $r \in e_0 R$ elde edilir. Böylece $r_R(I) \leq e_0 R$ yani $r_R(I) = e_0 R$ bulunur.

4.7. Teorem

α R halkasının bir otomorfizması ve R α -yarıdeğişmeli ve $R[x, x^{-1}; \alpha]$ Armendariz olsun. O zaman R bir sağ p.p. halkadır ancak ve ancak $R[x, x^{-1}; \alpha]$ bir sağ p.p. halkadır.

İspat

$R[x, x^{-1}; \alpha]$ yi sağ p.p. halka kabul edelim. $a \in R$ olsun. Kabulden $R[x, x^{-1}; \alpha]$ de bir $e(x)$ kare-eş ögesi var ve $e(x)R[x, x^{-1}; \alpha] = r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(a)$ olur. $e(x) = e_k x^k + \dots + e_{-1} x^{-1} + e_0 + \sum_{i=1}^n e_i x^i$ ise $ae(x) = 0$, özel olarak $ae_0 = 0$, buradan $e_0 R \leq r_R(a)$ olur. Kapsamın diğer yönünü görmek için $r \in r_R(a)$ alalım. $r_R(a) \leq r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(a) = e(x)R[x, x^{-1}; \alpha]$ den $r \in e(x)R[x, x^{-1}; \alpha]$ ve $r = e(x)r$ olacaktır. Bu da $r = e_0 r$ yani $r \in e_0 R$ yi gerektirir. Böylece $r_R(a) \leq e_0 R$ ve $r_R(a) = e_0 R$ elde edilir. Şimdi R halkasını bir p.p.-halka kabul edelim. $f(x) = a_k x^k + \dots + a_{-1} x^{-1} + \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ alalım. $e(x)R[x, x^{-1}; \alpha] = r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(f(x))$ olacak şekilde $R[x, x^{-1}; \alpha]$ de bir $e(x)$ kare-eş ögesi bulacağız. 4.4. Teoremden R nin her kare-eş ögesi merkezdendir. Böylece R de bir $e^2 = e$ kare-eş ögesi $\bigcap_{i=k}^n r_R(a_i) = eR$ olacak şekilde vardır. $a_i e = 0$ ve $\alpha(e) = e$ den $f(x)e = 0$ yani $e \in r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(f(x))$ ve $eR[x, x^{-1}; \alpha] \leq r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(f(x))$ olur. $g(x) = b_t x^t + \dots + b_{-1} x^{-1} + \sum_{i=0}^m b_i x^i \in r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(f(x))$ alalım. O zaman $f(x)g(x) = 0$ olur. $R[x, x^{-1}; \alpha]$ Armendariz olduğu için her i ve j için

$a_i b_j = 0$ yani her j için $b_j \in \bigcap_{i=k}^n r_R(a_i) = eR$ ve buradan $b_j = eb_j$ yani $g(x) = eg(x)$ ve $g(x) \in eR[x, x^{-1}; \alpha]$ olur. Buradan $r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(f(x)) \leq eR[x, x^{-1}; \alpha]$ ve sonuç olarak $r_{R[x, x^{-1}; \alpha]}(f(x)) = eR[x, x^{-1}; \alpha]$ olur, bu da ispatı bitirir.

Örnek

Yarıdeğişmeli halkaların abel olma özelliği olmasına rağmen α -yarıdeğişmeli halkalar bu özelliği sağlamıyor. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olsun.

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasını gözönünde bulunduralım ve $\alpha : R \longrightarrow R$ endomorfizmasını şu şekilde tanımlayalım :

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O zaman R α - yarıdeğişmeli halka, $\alpha(1) \neq 1$ olduğu kolayca ispatlanır fakat R abel halka olmaz, çünkü :

$$e^2 = e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

öğelerini alırsak, bu değerler için abellik şartının sağlanmadığını görürüz:

$$ae = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq ea = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R nin bir I ideali için $\alpha(I) \subseteq I$ ise $\bar{\alpha} : R/I \longrightarrow R/I$, $\bar{\alpha}(a + I) = \alpha(a) + I$ dönüşümü R/I bölüm halkasının endomorfizması olur.

Aşağıdaki örnekte şunu göstereceğiz: R halkasının birim olmayan öyle α otomorfizması varki R nin sıfır olmayan bir I öz ideali için R/I ve I α - yarıdeğişmelidir fakat R , α - yarıdeğişmeli değildir:

Örnek

F cisim , $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkası , $\alpha : R \longrightarrow R$ endomorfizması şu şekilde tanımlansın:

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için $AB = 0$ olur. Fakat $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ buluruz. Dolayısıyla

R α - yarıdeğişmeli halkadır. R nin sıfır olmayan öz idealleri

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

idealleridir. Bu I, J, K ideallerinin α - yarıdeğişmeli oldukları kolayca görülebilir.

Ayrıca $R/I \cong F$ ve $R/J \cong F$ halkaları da tamlık bölgeleri olduklarından $\bar{\alpha}$ -

yarıdeğişmelidirler. $K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ için

$$R/K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + K \mid a, c \in F \right\}$$

bölüm halkası inmiş halkadır ve $\bar{\alpha}$ dönüşümü R/K nın birim dönüşümü olur.

Dolayısıyla R/K aynı zamanda $\bar{\alpha}$ - yarıdeğişmeli halka olur. R halkası ve (R, R) - bimodülü olan M verilmiş olsun. $T(R, M) = R \oplus M$ üzerinde bilinen sıradan toplama işlemi ve aşağıdaki çarpma işlemi tanımlanmış olsun:

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

Bu durumda $T(R, M)$ ye R nin M tarafından sıradan genişlemesi denir. Bu halka, $r \in R$ ve $m \in M$ olmak kaydıyla $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ şeklinde matrislerin halkasına izomorftur. Şimdi R nin α -yarıdeğişmeli halka olması durumunda $T(R, R)$ nin uygun bir $\bar{\alpha}$ dönüşümü vasıtasıyla $\bar{\alpha}$ - yarıdeğişmeli olup olamayacağı sorusunu araştıralım. α, R nin bir endomorfizması ve $T(R, R)$, R nin sıradan genişlemesi olsun. $\bar{\alpha} : T(R, R) \longrightarrow T(R, R)$

$$\bar{\alpha} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ 0 & \alpha(a) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanırsa $T(R, R)$ nin bir endomorfizması olur. $T(R, 0)$, R ye izomorf olduğundan $\bar{\alpha}$ nın $T(R, 0)$ a kısıtlanmış halini α ile gösterebiliriz. Aşağıdaki örnekten R , α -yarıdeğişmeli halka ise $T(R, R)$ nin $\bar{\alpha}$ -yarıdeğişmeli halkası olması gerekmediğini görebiliriz.

Örnek

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasında $\alpha : R \longrightarrow R$ dönüşümü, $\alpha \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ olacak şekilde verilen R α - yarıdeğişmeli halkasını gözönünde bulunduralım.

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T(R, R)$$

alalım. O zaman $AB = 0$ olur. Fakat

$$\bar{\alpha}(B) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ için } C = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

ögesini aldığımız zaman

$$AC\bar{\alpha}(B) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq 0$$

olur. O zaman $AT(R, R)\bar{\alpha}(B) \neq 0$ ve $T(R, R)$ $\bar{\alpha}$ -yarıdeğişmeli halka olmaz.

4.7. Önteorem

R inmiş halka olsun. Eğer R , α - yarıdeğişmeli halkaysa $T(R, R)$, $\bar{\alpha}$ - yarıdeğişmeli halka olur .

İspat

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R, R)$ ve $AB = 0$ olsun. O zaman $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ olur. R inmiş olduğundan $ca = 0$ olur. Ayrıca $0 = ad + bc = c(ad + bc) =$

$(ca)d + cbc = cbc$ olduğunda $(bc)^2 = 0$ ve dolayısıyla $bc = 0$ ve $ad = 0$ bulunur.

Buradan R α -yarıdeğişmeli olduğundan $aR\alpha(c) = 0, bR\alpha(c) = 0$ ve $aR\alpha(d) = 0$.

O zaman herhangi $C = \begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix} \in T(R, R)$ için

$$AC\bar{\alpha}(B) = \begin{pmatrix} ah\alpha(c) & ah\alpha(d) + ak\alpha(c) + bh\alpha(c) \\ 0 & ah\alpha(c) \end{pmatrix} = 0 \in T(R, R)$$

bulunur. Yani

$AT(R, R)\bar{\alpha}(B) = 0$ ve böylece $T(R, R)$ bir $\bar{\alpha}$ -yarıdeğişmeli halka olur.

4.2. Sonuç

R α -katı halka olsun. O zaman $T(R, R)$ $\bar{\alpha}$ -yarıdeğişmeli halka olur.

4.8. Önteorem

R bir α -Armendariz halka olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir:

(a) R nin a, b, c öğeleri ve pozitif n sayısı $ab = 0$ ve $ac^n b = 0$ sağlarsa o zaman $aca\alpha(b) = 0$ dır.

(b) R nin a, b, c öğeleri ve pozitif n sayısı $ab = 0$ ve c^n , R nin merkezi öğesi ise $aca\alpha(b) = 0$ dır.

İspat

$f(x) = a(1 - cx)$ ve $g(x) = (1 + cx + cx^2 + \dots + c^{n-1}x^{n-1})b$ alalım. O zaman $ac^n b = 0$ den $f(x)g(x) = 0$ ve buradan $acb = 0$ buluruz. R , α -Armendariz olduğu için $aca\alpha(b) = 0$ elde edilir. Diğer iddia tanımlardan elde edilir.

4.9. Önteorem

R bir α -Armendariz halka ve $\alpha(1) = 1$ ise R abel halkadır, yani R nin her kare-eş elemanı diğer her öge ile yer değiştirir.

İspat

R bir α -Armendariz halka ve $e^2 = e$ ögesini alalım. $r \in R$, $a = e$, $b = 1 - e$ ve $c = er(1 - e)$ alınrsa $ab = 0$, $c^2 = 0$ dir. Böylece $ac^2b = 0$ olur. 4.8. Önteorem ve R α -Armendariz olduğu için $aca\alpha(b) = 0$ buluruz. 4.6. Önteoremden $\alpha(e) = e$ ve $\alpha(b) = \alpha(1 - e)$ den $\alpha(b) = 1 - e$ buluruz. Böylece $aca\alpha(b) = ac(1 - e) = ac = 0$, yani $er = ere$ elde edilir. Benzer şekilde her $r \in R$ için $re = ere$ olduğu ispatlanabilir. Her $r \in R$ için $er = re = ere$ bulunur.

α , R halkasının bir homomorfizması olsun. α yı $R[x]$ den $R[x]$ ye α ile göstereceğimiz ve $\alpha(\sum a_i x^i) = \sum \alpha(a_i) x^i$ ile tanımlı bir dönüşüme genişletebiliriz.

4.8. Teorem

M_R Armendariz ve α -yarı değişmeli olsun. O zaman $M[x]_{R[x]}$ de α -yarı değişmelidir.

İspat

$m(x) = \sum m_i x^i \in M[x]$ ve $f(x) = \sum a_i x^i \in R[x]$ ve $m(x)f(x) = 0$ olsun. M Armendariz olduğu için $m_i a_j = 0$ olur. R α -yarı değişmeli olduğundan $m_i R\alpha(a_j) = 0$ olur. x ögesi $R[x]$ in merkezi ögesi olduğu için $m_i R\alpha(a_j) = 0$ ifadesi x in kuvvetleri ile sağdan çarpılır ve gerekli sonlu toplama işlemleri yapılırsa $m_i R[x]\alpha(a_j) = 0$ elde edilir.

4.4. Önerme

R yerel sonlu bir α -Armendariz halka ve $\alpha(1) = 1$ olsun. O zaman R α -yarıdeğişmelidir.

İspat

R bir yerel sonlu bir α -Armendariz halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $aR\alpha(b) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $r \in R$ alalım. R yerel sonlu halka olduğu için, bir pozitif n sayısı var ve her $n \leq k$ için $r^n = r^{n+k}$ olur çünkü $\{r, r^2, r^3, \dots\}$ yarıgrubu sonlu olacaktır. Böylece $r^n = r^{n+k} = r^n r^k = r^n r^{2k} = \dots = r^n r^{nk} = r^n r^{n(k+1)}$ olur. $h = k + 1$ dersek o zaman $r^{(h-1)n} = r^{(h-2)n} r^n = r^{(h-2)n} (r^n)^h = r^{2(h-1)n} = (r^{(h-1)n})^2$ olacağından $r^{(h-1)n}$ kare-eş öge olur. 4.9. Önteoremden α -Armendariz halkalar abel oldukları için, $r^{(h-1)n}$ merkezi bir kare-eş öge olur. Böylece $ar^{(h-1)n}b = 0$ sağlanır. 4.8. Önteoremden $ar\alpha(b) = 0$ elde edilir. Burada r , R nin keyfi bir ögesi olduğu için, $aR\alpha(b) = 0$ olacaktır. Yani R halkası yarıdeğişmelidir.

5. MONOİDE GÖRE YARIDEĞİŞMELİ HALKALAR

Bu bölümde M ile bir monoidi göstereceğiz. Böylece M de her f ve g için $fg \in M$ olan kapalı bir işlem ve M de her f için $ef = fe = f$ yapan bir e birimi var. Bir R halkası ve bir M monoidi için

$$R[M] = \{ \gamma \mid \gamma : M \rightarrow R, \text{ sonlu tane } m \in M \text{ için } \gamma(m) \text{ sıfırdan farklı} \}$$

monoid halkasını gözönüne alalım. O halde $R[M]$, M den R ye tanımlı fonksiyonlar içinde sonlu sayıda sıfırdan farklı değer alanlarının topluluğudur. $R[M]$ de işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır. Eşitlik olarak fonksiyon eşitliği, toplama işlemi olarak fonksiyon toplamı, çarpma işlemi ve 0, 1 ögeleri aşağıdaki gibi tanımlıdır: $m, n \in M$, $\gamma, \beta \in R[M]$ olsun.

$$\gamma = \beta \text{ ancak ve ancak her } m \in M \text{ için } \gamma(m) = \beta(m)$$

$$(\gamma + \beta)(m) = \gamma(m) + \beta(m)$$

$$(\gamma\beta)(m) = \sum_{xy=m} \gamma(x)\beta(y)$$

$$0(m)=0$$

$$1(m)=1.$$

Her $\gamma \in R[M]$ fonksiyonu, her $m \in M$ için $\gamma(m) = r \in R$ ile tek türlü belirlidir. Herhangi bir $a \in R$ ve bu a ile

$$\gamma_a : M \rightarrow R, \gamma_a(e) = a, m \neq e \text{ için } \gamma_a(m) = 0$$

ile γ_a y1,

$$\psi : R \rightarrow R[M], \psi(a) = \gamma_a$$

ile de ψ yı tanımlayalım. O zaman ψ 1-1 bir halka dönüşümüdür. Bu ψ yardımı ile R yi $R[M]$ nin bir alt halkası olarak kabul ederiz. Benzer şekilde herhangi bir $m \in M$ alarak, bu m ile

$$\gamma_m : M \rightarrow R, \gamma_m(m) = 1, m \neq n \text{ için } \gamma_m(n) = 0$$

ile γ_m yi,

$$\phi : M \rightarrow R[M], \phi(m) = \gamma_m$$

ile de ϕ yı tanımlayalım. O zaman ϕ , 1-1 bir monoid dönüşümüdür ve $\phi(M)$, $R[M]$ nin çarpım monoidinin bir altmonoididir. Bu ϕ yardımı ile M yi $R[M]$ nin çarpımsal alt monoidi kabul ederiz. $R[M]$ nin her β ögesinin, sıfırdan farklı değerleri $\beta(m_1) = a_1, \beta(m_2) = a_2, \dots, \beta(m_t) = a_t$ ise, $\beta(m_i)$ ile m_i yi ve $\beta(a_i)$ ile a_i yi eşdeşleyerek $\beta = \sum_{i=1}^t a_i m_i$ biçiminde tektürlü yazabiliriz.

5.1. Monoid Halkalarının Yarıdeğişme Özelliği

Monoid halkaları çokterimli halkaların bir genellemesi olarak görülebilir. Monoid halkalarının diğer özellikleri yanında yarıdeğişmeli özelliklerinin araştırılması gerekir. Bu yönde (35) monoid halkalarının Armendariz, inmiş ve Baer özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde monoid halkalarının diğer bazı özellikleri yanında yarıdeğişme özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım

$\alpha, \beta \in R[M]$ için eğer $\alpha\beta = 0$ dan $\alpha R[M]\beta = 0$ elde edilirse R halkasına M -yarıdeğişmeli, ya da M ye göre yarıdeğişmeli denir .

Örnek

3.6. Önermede verilen R halkasını ve Ω , R nin her merkezi ve düzgün ögesini içeren, çarpmaya göre kapalı bir altkümesini alırsak R yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $\Omega^{-1}R = \{a/v \mid a \in R, v \in \Omega\}$ yarıdeğişmeli olduğu ispatlanmıştır. Burada Ω , R halkasındaki çarpma işlemine göre bir monoiddir. Diğer taraftan $M = \{1/v \mid v \in \Omega\}$, $\Omega^{-1}R$ halkasındaki çarpma işlemine göre bir monoiddir ve $\Omega^{-1}R = R[M]$ dir.

Örnek

3.1. Sonuçta bir R halkası için $R[x]$ yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $R[x; x^{-1}]$ yarıdeğişmeli olduğu gösterilmiştir. Bir taraftan $M = \{1/x^i \mid i = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ alınırsa M $R[x, x^{-1}]$ halkasındaki çarpmaya göre bir monoid oluşturur. Diğer taraftan $R[x; x^{-1}] = R[x][M]$ olacaktır. Ayrıca $R[x; x^{-1}] \cong R[\mathbb{Z}]$ dir.

Örnek

$M = (\mathbb{N} \cup 0, +)$ ise herhangi bir R halkası için $R[M] \cong R[x]$ dir.

M bir monoid olsun. Eğer M nin herhangi iki boştan farklı ve sonlu $A, B \subseteq M$ kümelerine karşılık öyle $g \in M$ varsa ve $g = ab, a \in A, b \in B$ olacak şekilde tek türlü yazılabilirse M ye t.ç.-monoid (tek tür çarpanlı monoid) denir. Bir serbest grubun altmonoidleri, sağ ya da soldan sıralı monoidler t.ç.-monoidlerme örneklerdir. Bir t.ç.monoidinde birimden farklı sonlu mertebeden öge bulunmaz.

5.1. Uyarı

Yarıdeğişmeli olan fakat Armendariz olmayan $R[M]$ halkaları mevcuttur.

İspat

$M = \{e, a\}$ ve M de işlemler e birim ve $a = a^2$ ve $R = \mathbb{C}$ karmaşık sayılar halkasını alalım. $\mathbb{C}[M]$ de $\alpha = 1.a$, $\beta = 1.e + (-1)a$ alalım. O zaman $\alpha\beta = 0$ olur. $\mathbb{C}[M]$ değişmeli olduğu için $\alpha\mathbb{C}[M]\beta = 0$ olacaktır. $\mathbb{C}$ de $1(-1) \neq 0$ olduğu için $\mathbb{C}[M]$ Armendariz yani $\mathbb{C}, M$ -Armendariz olamaz.

5.1. Uyarıda $\mathbb{C}$ yerine, birimli ve birimi sıfırdan farklı herhangi bir R halkası ve M de sonlu mertebeli devirli bir monoid alınırsa bu örnek yine geçerlidir.

$(M, \leq)$ sıralı monoid olsun. Her $g, g', h \in M$ için $g \leq g'$ ise $gh \leq gh'$ ve $hg \leq hg'$ oluyorsa $(M, \leq)$ ye kesin sıralı monoid denir. Her $g, g' \in M$ için $g \leq g'$ veya $g' \leq g$ oluyorsa $(M, \leq)$ ye kısmi sıralı monoid denir. M monoid olsun. M nin a, b, c öğeleri için $ab = ac$ den $b = c$ elde edilirse M ye kısaltma monoidi denir.

5.1. Önteorem

Her t.ç.-monoid kısaltma monoididir.

İspat

M bir t.ç.-monoidi olsun. M nin farklı a, b, c öğelerini alalım. $ab \neq ac$ yı görelim. Aksini, yani $ab = ac$ kabul edelim. M nin $A = \{a\}$ ve $B = \{b, c\}$ alt kümelerini göz önüne alalım. M bir t.ç.-monoidi olduğundan, A da a öğesi için B de tek bir öğe vardır, bu öğe b olursa ab de tektir. Böylece $ab \neq ac$ olacaktır. Bu ise kabul ile çelişir. Böylece a, b, c öğeleri, M nin farklı öğeleri ise $ab \neq ac$ dir. Yani M kısaltma monoididir.

5.1. Önerme

M t.ç.-monoid ve R inmiş halka olsun. O zaman $R[M]$ yarıdeğişmeli halka olur.

İspat

$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i g_i$, $\beta = \sum_{j=1}^m b_j h_j \in R[M]$ ve $\alpha\beta = 0$ olsun. Her i, j için $a_i R[M] b_j = 0$ olduğunu ispatlayalım. n ve m 'ye göre tümevarım uygulayalım. $n = 1$ olsun. O zaman $\alpha = a_1 g_1$ olur. ((35), Önteorem 1.1) den $i \neq j$ için $g_1 b_i \neq g_1 b_j$ olur. Buradan her j için $a_1 b_j = 0$ olur. R yarıdeğişmeli olduğundan $a_1 R b_j = 0$. Aynı şekilde $m = 1$ durumunda her i için $a_i b_1 = 0$ ve $a_i R b_1 = 0$ bulunur. Dolayısıyla $a_1 R[M] b_j = 0$ ve $a_i R[M] b_1 = 0$. $\alpha\beta = 0$, $a_1 b_1 = 0$ ve R inmiş olduğundan $b_1 R a_1 = 0$ ve $(b_1 \alpha)\beta = (b_1 \sum_{i=1}^n a_i g_i)\beta = \sum_{j=1}^m b_j h_j = 0$. Tümevarımdan $b_1 a_i b_1 = 0$ ve dolayısıyla $a_1 R[M] b_j = 0$. Bu durumda $\alpha\beta = 0$ ise her i, j için $a_i R[M] b_j = 0$ olur.

5.1. Sonuç

M kesin sıralı monoid ve R inmiş halka olsun. O zaman $R[M]$ yarıdeğişmeli halka olur.

İspat

Her kesin sıralı monoid t.ç.-monoid olduğundan ispat açıktır.

5.2. Sonuç

$M = (\mathbb{N} \cup 0, +)$ alalım. O zaman R inmiş halka olarak alınırsa, RM - yarıdeğişmelidir ancak ve ancak R yarıdeğişmelidir.

İspat

R , M -yarıdeğişmeli halka ise M ye bağlı olmadan R yarıdeğişmelidir. R inmiş halka olsun. Bu durumda $R[M]$ halkası $R[x]$ çokterimliler halkasına izomorf olur çünkü $M = (\mathbb{N} \cup 0, +)$ ile $R[x]$ halkasının $M' = \{x^i : i = 0, 1, 2, \dots\}$ monoidleri izomorfturlar. 3.1. Önermeden $R[M]$ yarıdeğişmeli halka olur.

KAYNAKLAR

1. Anderson, D. D. and Camillo, V., "Armendariz rings and Gaussian rings", ***Comm. Algebra*** , 26(7): 2265-2272(1998).
2. Anderson D. D. and Camillo, V., "Semigroups and rings whose zero products commute", ***Comm. Algebra*** 27(6): 2847-2852(1999).
3. Armendariz E. P., "A note on Extensions of Baer and P.P.-rings", ***J. Austral.Math.Soc.***,18: 470-473(1974).
4. Birkenmeier, G. F., Kim, J. Y. and Park, J. K., "On extensions of quasi-Baer and Principally quasi-Baer rings", ***Comm. Algebra***, Baskıda.
5. Birkenmeier, G. F., Kim, J. Y. and Park, J. K., "Principally quasi-Baer rings", ***Comm. Algebra***, 29: 639-660(2001).
6. Birkenmeier, G. F. and Park, J. K., "Triangular matrix representations of ring extensions", ***Journal of Algebra***, 265: 457-477(2003).
7. Buhphang, A. M. and Rege, M. B., "Semicommutative Modules and Armendariz Modules", ***Arab Journal of Math. Sciences***, 8: 53-65(2002).
8. Clark, W. E., "Twisted matrix units semigroup algebras", ***Duke Math.J.***, 34: 417-424(1967).
9. Cohn, P. M., "Reversible rings", ***Bull. London Math. Soc.*** 31: 641-648(1999).
10. Habeb, J. M., "A note on zero commutative and duo rings", ***Math. J. Okayama Univ.*** 32: 73-76(1990).
11. Hashemi, E., Moussavi, A. and Javadi, H. H. S., "Polynomial Ore Extensions of Baer and P.P.-Rings", ***Bull. Iranian Math.Soc.***29(2):65-86(2003).
12. Hong, C. Y., Kim N. K. and Kwak, T. K., "Ore extensions of Baer and p.p.-rings", ***J. Pure and Appl. Algebra*** 151(3): 215-226(2000).
13. Hong, C. Y., Kim, N. K. and Kwak, T. K., "Extensions of Generalized Reduced Rings", ***Alg.Coll.***,12(2): 229-240(2005).
14. Hong, C. Y., Kim, N. K. and Kwak, T. K., "On Skew Armendariz Rings", ***Comm. Algebra*** 31(1): 103-122(2003).
15. Huh, C., Lee, Y. and Smoktunowicz, A., "Armendariz rings and Semicommutative rings", ***Comm.Algebra***, 30: 751-761(2002).
16. Jordan, D. A., "Bijective extension of injective ring endomorphisms", ***J.London Math. Soc*** 35(2): 435-448(1982).
17. Hong, C. Y., Kwak, T. K. and Rizvi, S. T., "Rigid ideals and radicals of Ore extensions", ***Algebra Colloq.*** 12(3): 399-412(2005).
18. Kaplansky, I., "Rings of operators", Mathematics Lecture Notes Series, ***Benjamin***, New York, (1968).

19. Kim, N. K. and Lee, Y., "Armendariz rings and reduced rings", *J. Algebra* 223: 477-488(2000).
20. Kim, N. K. and Lee, Y., "Extensions of reversible rings", *J. Pure and Appl. Algebra* 185: 207-223(2003).
21. Kim N. K., Lee, K. H and Lee, Y., "Power series rings satisfying a zero divisor property", *J. Pure and Appl. Algebra*, Baskıda.
22. Krempa, J., "Some examples of reduced rings", *Algebra Colloq.* 3(4): 289-300(1996).
23. Lam, T. Y., "Lectures on Modules and Rings", *Springer-Verlag*, New York, (1999).
24. Lambek, J., "On the representation of modules by sheaves of factor modules", *Canad. Math. Bull.* 14(3): 359-368(1971).
25. Lee, T. K. and Zhou, Y., "Armendariz Rings and Reduced Rings", *Comm. Algebra*, 6: 2287-2299(2004).
26. Lee, T. K. and Zhou, Y., "Reduced Modules: Rings, modules, algebras, and abelian groups", Lecture Notes in Pure and Appl. Math., *Dekker*, New York, 236: 365-377, (2004).
27. McCoy, N. H., "Remarks on divisors of zero", *Amer. Math. Monthly* 49: 280-295(1942).
28. Mousavi, E. H and Javadi, H. H. S., "Polynomial Ore extensions of Baer and P.P.-Rings", *Bull. Iranian Math. Soc.*, 29(2): 65-86(2003).
29. Matczuk, J. A., "Characterization of σ -Rigid Rings", *Comm. Algebra*, 11: 4333-4336 (2004).
30. Narbonne, L. M., "Anneaux semi-commutatifs et unit riels anneaux dont les idaux principaux sont idempotents", Proceedings of the 106th National Congress Learned Societies (Perpignan), *Bib. Nat. Paris.* , 71-73(1982).
31. Nicholson, W. K. and Yousif, M. F., "Quasi-Frobenius rings", Cambridge Tracts in Mathematics, *Cambridge University Press*, Cambridge, (2003).
32. Rege, M. B. and Chhawchharia, S., "Armendariz rings", *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 73: 14-17(1997).
33. Rickart, C. E., "Banach Algebras with an adjoint operation", *Ann. of Math.*, 47: 528-550(1946).
34. Shin, G. Y., "Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring", *Trans. Amer. Math. Soc.* 184: 43-60(1973).
35. Liu, Z., "Armendariz rings relative to a monoid", *Comm. Algebra*. 33: 649-661(2005).

ÖZGEÇMİŞ

Nazım AĞAYEV, 1975 yılında Azerbaycan, Gence’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Gence 39 ve 27 nolu okullarda ve liseyi Bakü 1 nolu Matematik ve Fizik yoğunluklu Fen lisesinde tamamladı. 1993 yılında Ankara Üniversitesi TÖMER’i bitirerek Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı ve 1999 yılında mezun oldu. 1999 yılında Hacettepe Üniversitesi Yabancı Diller Okulu’nda İngilizce Dil Hazırlık kursunda okudu ve 2000’ de aynı Üniversitenin Matematik Bölümünde Yüksek Lisansa başladı. 2002’ de orayı bitirerek aynı yılda Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora eğitimine başladı.