

**T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**POZİTRON EMİSYON TOMOGRAFİDE GÖRÜNTÜ  
OLUŞTURMA YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ VE  
İYİLEŞTİRİLMESİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Elektrik-Elektronik Yük. Müh. Halil EROL**

**Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜH.**

**Enstitü Bilim Dalı : ELEKTRONİK**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Etem KÖKLÜKAYA**

**Eylül 2006**

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# POZİTRON EMİSYON TOMOGRAFİDE GÖRÜNTÜ OLUŞTURMA YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ VE İYİLEŞTİRİLMESİ

## DOKTORA TEZİ

Elektrik-Elektronik Yük. Müh. Halil EROL

Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜH.  
Enstitü Bilim Dalı : ELEKTRONİK

Bu tez 14 / 09 / 2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

|                        |                       |                       |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Prof.Dr.Etem KÖKLÜKAYA | Prof.Dr.Osman ÇEREZCİ | Prof.Dr. Hüseyin EKİZ |
| Jüri Yöneticisi        | Jüri Üyesi            | Jüri Üyesi            |

Doç.Dr.Bekir ÇAKIR  
Jüri Üyesi

Doç.Dr.Yaşar BECERİKLİ  
Jüri Üyesi

## TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında sağladığı destek ve yardımlardan dolayı tez danışmanım Prof. Dr. Etem KÖKLÜKAYA olmak üzere bilgi dağarcığımın gelişimine katkı yapan bütün hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım. Özellikle, bilgi ve deneyimlerini aktarmaktan çekinmeyen Doç. Dr. İrfan Karagöz'e şükranlarımı sunarım. Ayrıca, bana verdikleri destek ve gösterdikleri fedakârlıklardan dolayı eşim ve çocuklarıma sonsuz şükranlarımı sunarım. Bu tezin, bundan sonraki çalışmalara faydalı olmasını dilerim.

Halil EROL

## İÇİNDEKİLER

|                                       |      |
|---------------------------------------|------|
| TEŞEKKÜR .....                        | ii   |
| İÇİNDEKİLER .....                     | iii  |
| SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ ..... | vii  |
| ŞEKİLLER LİSTESİ .....                | ix   |
| TABLolar LİSTESİ .....                | xiii |
| ÖZET .....                            | xiv  |
| SUMMARY .....                         | xv   |

### BÖLÜM 1.

|             |   |
|-------------|---|
| GİRİŞ ..... | 1 |
|-------------|---|

### BÖLÜM 2.

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| PET TOMOGRAFİ .....                                                      | 6  |
| 2.1. PET Tomografide Kullanılan Radyokimyasallar .....                   | 10 |
| 2.2. Foton Radyasyonunun Taraması .....                                  | 13 |
| 2.3. PET Detektörler .....                                               | 15 |
| 2.3.1. Çözünürlüğü etkileyen fiziksel faktörler .....                    | 19 |
| 2.3.2. Değişik detektör konfigürasyonları.....                           | 24 |
| 2.3.3. Tarama için yardımcı ekipmanlar.....                              | 26 |
| 2.4. SPECT Tomografi.....                                                | 28 |
| 2.4.1. SPECT görüntüleme yöntemi.....                                    | 28 |
| 2.4.2. SPECT görüntülerini etkileyen fiziksel ve aygıtsal faktörler..... | 30 |
| 2.4.3. SPECT aygıtları.....                                              | 32 |
| 2.4.4. Çok detektörlü SPECT sistemleri.....                              | 32 |
| 2.4.5. Kamera tabanlı SPECT sistemleri.....                              | 34 |

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| 2.4.6. Farklı SPECT sistem tasarımları .....                  | 35  |
| 2.4.7. SPECT sistemleri için özel kolimatör tasarımları ..... | 36  |
| 2.5. Geri Oluşturma Yöntemi .....                             | 37  |
| 2.6. Kompanse Yöntemleri .....                                | 38  |
| 2.6.1. Zayıflama telafisi.....                                | 38  |
| 2.6.2. Kırılma telafisi.....                                  | 40  |
| 2.6.3. Kolimator – Detektör telafisi.....                     | 41  |
| <br>BÖLÜM 3.                                                  |     |
| GENEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİ .....                                | 43  |
| 3.1. Radon Dönüşümü .....                                     | 43  |
| 3.1.1. Eğik yığma .....                                       | 43  |
| 3.1.2. Dik çizgili görüntülerin eğik yığımı.....              | 44  |
| 3.2. Normal Radon Dönüşümü .....                              | 47  |
| 3.3. Ayırık Radon Dönüşümü .....                              | 54  |
| 3.3.1. Radon dönüşümün örnekleme özellikleri.....             | 56  |
| 3.4. Hough Dönüşümü .....                                     | 58  |
| 3.5. Hough dönüşümü ile çizgi taraması.....                   | 62  |
| <br>BÖLÜM 4                                                   |     |
| DİREK GERİ OLUŞTURMA YÖNTEMLERİ.....                          | 68  |
| 4.1. Dönüşüm Yöntemi.....                                     | 69  |
| 4.2. Filtrelenmiş Geri Oluşum Yöntemi .....                   | 71  |
| 4.2.1. Örnekleme özellikleri .....                            | 76  |
| 4.3. Geri Projeksiyondan Sonra Filtreleme.....                | 78  |
| 4.4. DFT ile Fourier dönüşümünün yaklaşık çözümü.....         | 83  |
| 4.4.1. FFT'nin filtreleme için kullanımı.....                 | 85  |
| 4.5. Linogram Yöntemi.....                                    | 90  |
| 4.6. Fourier Dilim Teoreminin Gerçeklenimi.....               | 92  |
| <br>BÖLÜM 5                                                   |     |
| DOĞRUSAL CEBİRLE GERİ OLUŞTURMA ALGORİTMALARI .....           | 96  |
| 5.1. Matris Elemanlarının Hesaplanması .....                  | 100 |

|                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1.1. Piksel tabanlı en yakın komşular yöntemi.....               | 101 |
| 5.1.2. Ayırık Radon dönüşümü.....                                  | 102 |
| 5.1.3. Birinci derece piksel tabanlı interpolasyon stratejisi..... | 102 |
| 5.1.4. Sinc interpolasyon stratejisi.....                          | 102 |
| 5.2. Matris Operasyonları ve Radon Dönüşümü Arasındaki İlişki..... | 103 |
| 5.3. Sınırlama ve Düzenlemeler .....                               | 104 |
| 5.4. Tekil Değerler Ayrışımı .....                                 | 106 |
| 5.5. ART Kullanılarak Ötelemeli Geri Oluşturma.....                | 108 |
| 5.5.1. Kısıtlarla ART algoritması.....                             | 111 |
| 5.5.2. Regüle edilmiş en az kareler yöntemi .....                  | 111 |
| 5.5.3. Başlangıç değeri atama.....                                 | 114 |
| 5.5.4. Çarpımsal ART .....                                         | 115 |
| 5.6. Beklenti Maksimizasyonu Algoritması .....                     | 116 |
| 5.7. Maksimum Olabilirlik Kestirimi.....                           | 122 |
| 5.7.1. Gibbs önceliği.....                                         | 127 |
| 5.7.2. Bir adım geç algoritması.....                               | 128 |
| 5.8. Ortanca Kök Önceliği .....                                    | 129 |
| 5.8.1. Transmisyon algoritması.....                                | 130 |
| 5.8.2. Yakınsama önceliği.....                                     | 133 |

## BÖLÜM 6

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| GÖRÜNTÜ OLUŞTURMA VE İYİLEŞTİRME UYGULAMALARI .....                               | 135 |
| 6.1. Sistem Matrisi Depolama Yöntemi.....                                         | 138 |
| 6.2. 41x41 Görüntü Elde Edilmesi.....                                             | 138 |
| 6.3. 81x81 Görüntü Oluşturma İşlemi.....                                          | 141 |
| 6.3.1. Beklenti maksimizasyonu yöntemi ile görüntü oluşturma işlemi.....          | 143 |
| 6.3.2. Eşlenik Gradyan yöntemi ile görüntü oluşturma işlemi .....                 | 150 |
| 6.3.3. ART yöntemi ile görüntü oluşturma işlemi.....                              | 158 |
| 6.3.4. Filtrelenmiş geri projeksiyon yöntemi ile oluşturulan görüntüler .....     | 164 |
| 6.4. 101x101 görüntü oluşturma işlemi, EM yöntemi ile oluşturulan görüntüler..... | 168 |

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| BÖLÜM 7.                  |     |
| SONUÇLAR .....            | 169 |
| <br>BÖLÜM 8.              |     |
| TARTIŞMA VE ÖNERİLER..... | 172 |
| <br>KAYNAKLAR .....       | 174 |
| EKLER .....               | 185 |
| ÖZGEÇMİŞ .....            | 212 |

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

|          |                                                   |
|----------|---------------------------------------------------|
| ACF      | : Zayıflama Düzeltme Faktörü                      |
| ART      | : Cebirsel geri oluşturma                         |
| $a_{ij}$ | : Projeksiyon ağırlık faktörü                     |
| $b_i$    | : Detektör $i$ 'de ölçülen sayımlar               |
| CT       | : Bilgisayarlı Tomografi                          |
| EG       | : Eşlenik Gradyan                                 |
| CTS      | : Central Slice Teoremi(merkezi dilim teoremi)    |
| DFT      | : Ayrık Fourier Dönüşümü                          |
| EM       | : Beklenti Maksimizasyonu                         |
| FBP      | : Filtrelenmiş Geri Projeksiyon                   |
| FFT      | : Hızlı Fourier Dönüşümü                          |
| FOV      | : Görüntü Kesiti(Field Of View)                   |
| FT       | : Fourier dönüşümü                                |
| Gray     | : 1 J/kg. 1 kg lık maddede 1 J enerji depolanması |
| IDFT     | : Ters Ayrık Fourier Dönüşümü                     |
| IFFT     | : Ters Hızlı Fourier Dönüşüm                      |
| IFT      | : Ters Fourier Dönüşüm                            |
| $i$      | : Detektör (LOR) indeksi                          |
| $j$      | : piksel indeksi                                  |
| keV      | : Kilo Elektron Volt                              |
| LOR      | : yanıt çizgisi(Line Of Response)                 |
| MART     | : Çarpımsal Cebirsel geri oluşturma               |
| MLEM     | : Maksimum Olabilirlik Kestirimi                  |
| MRI      | : Manyetik Rezonans Görüntüleme                   |
| PET      | : Pozitron Emisyon Tomografisi                    |
| PMT      | : Foto Çarpıcı Tüp                                |

|                 |                                                                                            |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| PSF             | : Nokta Yayılma Fonksiyonu(Point Spread Function)                                          |
| SNR             | : Sinyalin Gürültüye Oranı                                                                 |
| SPECT           | : Tek Foton Bilgisayarlı Tomografi<br>: (Single Photon Emission Computed Tomography)       |
| SVD             | : Tekil Değerler Ayrışımı                                                                  |
| $\mu\text{Ci}$  | : Mikro Curie.1 gr saf $^{226}\text{Ra}$ aktivitesi<br>:3.7x10 <sup>10</sup> Bq(Becquerel) |
| $\lambda_i$     | : Detektör i`deki ortalama sayımlar                                                        |
| $\lambda_j$     | : Piksel j`deki ortalama sayımlar                                                          |
| $\lambda^{<k>}$ | : k`nci ötelemenin görüntüsü                                                               |
| $x_{ij}$        | : Ful veri, i`de algılanan j`deki sayımlar                                                 |

## ŞEKİLLER LİSTESİ

|             |                                                                                                                                          |    |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1.  | Hibrit SPECT/CT tarayıcı Hawkeye, GE madikal sistemler ...                                                                               | 6  |
| Şekil 2.2.  | Hibrit PET/CT tarayıcı; Discovery LS ,GE tıbbi cihazları .....                                                                           | 7  |
| Şekil 2.3.  | PET (b) ve MRI (a) görüntülerinin karşılaştırılması .....                                                                                | 8  |
| Şekil 2.4.  | (a) Özel yüksek aktiviteli nötron fazlalı radyonükleidler genellikle $(n,.)$ , $(n, p)$ veya $(n,.)$ reaksiyonları ile üretilirler ..... | 10 |
| Şekil.2.5.  | Pozitron Emisyon Tomografinin temel yapısı .....                                                                                         | 15 |
| Şekil 2.6.  | Çok katmanlı tarayıcı .....                                                                                                              | 15 |
| Şekil 2.7.  | Skintilatör ve ışın tüplerinin yapısı .....                                                                                              | 16 |
| Şekil 2.8.  | PET tomografinin çözünürlüğünü etkileyen faktörler .....                                                                                 | 17 |
| Şekil 2.9.  | Çözünürlüğün evrimi .....                                                                                                                | 18 |
| Şekil 2.10. | Merkez dışı olaylarda çözünürlük astigmatı .....                                                                                         | 19 |
| Şekil 2.11. | Logaritmik olarak istatistiksel gereksinim ve uzaysal çözünürlük .....                                                                   | 23 |
| Şekil 2.12. | Anger kamera detektör tasarımı .....                                                                                                     | 24 |
| Şekil 2.13. | Anger kamerada bir dizin PMT'lerin X ve Y çıkışlarına bağlantılarının gösterilmesi .....                                                 | 25 |
| Şekil 2.14. | Genel detektör sisteminin şematik gösterimi .....                                                                                        | 25 |
| Şekil 2.15. | Foto çarpıcı tüpün (PMT) şematik gösterimi .....                                                                                         | 26 |
| Şekil 2.16. | Geleneksel nükleer tıp görüntüleme sistemi .....                                                                                         | 28 |
| Şekil 2.17. | Çok detektör tabanlı SPECT sistemleri .....                                                                                              | 32 |
| Şekil 2.18. | Sıra dışı bir SPECT sistem tasarımı .....                                                                                                | 34 |
| Şekil 2.19. | Kamera tabanlı SPECT sistemlerinde kullanılan kolimatör tasarımları .....                                                                | 35 |
| Şekil 3.1.  | Dik çizgiye sahip bir çizgi .....                                                                                                        | 45 |
| Şekil 3.2.  | $f(x,y)$ nesnesi ve onun $\varphi$ açısı için Radon Dönüşümü $f^*_{\varphi}(\rho_1)$ ' in gösterimi .....                                | 46 |

|            |                                                                                                                                                                                        |     |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 3.3. | Paralel projeksiyon yöntemi, farklı açılardan bir grup çizginin ölçümlerinin alınması ile elde edilir .....                                                                            | 47  |
| Şekil 3.4. | Septalı 2 boyutlu PET sistemlerinin geometrik gösterimi .....                                                                                                                          | 49  |
| Şekil 3.5. | Fan-Beam projeksiyon yöntemi .....                                                                                                                                                     | 50  |
| Şekil 3.6. | Fan-Beam projeksiyon yöntemi ile çalışan 3. nesil CT cihazı ..                                                                                                                         | 51  |
| Şekil 3.7. | Düzlem üzerinde bir nokta(a), ve noktanın Radon dönüşümü ...                                                                                                                           | 53  |
| Şekil 4.1. | Radon dönüşümünün sembolik gösterimi .....                                                                                                                                             | 68  |
| Şekil 4.2. | Merkezi Katman Teoremi .....                                                                                                                                                           | 70  |
| Şekil 4.3. | Direk Fourier Geri oluşturma algoritmasının şematik gösterimi                                                                                                                          | 71  |
| Şekil 4.4. | 2 tabanlı FFT kullanılırken $h(n)$ dizisinin daha geniş olan $g(n)$ dizinine dönüştürülmesi .....                                                                                      | 84  |
| Şekil 4.5. | Kareler ve spektrumları yanına çizilmiştir .....                                                                                                                                       | 85  |
| Şekil 4.6. | Rampa filtresinin 256 numunesinin frekansa göre değişimini ve bunun DFT sinin mutlak değerini göstermektedir .....                                                                     | 87  |
| Şekil 4.7. | Rampa, Ram-Lak, Shepp-Logan, ve genellenmiş Hamming filtresinin $\alpha = 0.5$ için genliğinin, yukarı sınır frekansı $v_u$ 'ya göre normalize edilmiş frekansa göre değişimleri ..... | 89  |
| Şekil 4.8. | Açısal ve kuadratik spektrumun birbirini karşılama durumları                                                                                                                           | 93  |
| Şekil 5.1. | Matris elemanı $a_{ij}$ , i endeksli sinogram değeri ile j endeksli görüntü pikseli arasındaki ağırlık faktörü olarak değerlendirilebilir .....                                        | 99  |
| Şekil 5.2. | $(\rho_k, \phi_l)$ ye karşılık gelen i endeksli çizgi, $(x_m, y_n)$ de merkezlenmiş kare pikseli keser .....                                                                           | 101 |
| Şekil 5.3. | İki parametrelili problemin ART kullanılarak üç farklı ötelemesi                                                                                                                       | 109 |
| Şekil 5.4. | Görüntü ve veri alımının ayırık hale getirilmesi .....                                                                                                                                 | 123 |
| Şekil 6.1. | 891x981 Shepp-Logan fontomu .....                                                                                                                                                      | 136 |
| Şekil 6.2. | Shepp-Logan fontomunun Radon dönüşümü .....                                                                                                                                            | 137 |
| Şekil 6.3. | 41x41 Shepp-Logan fontomu .....                                                                                                                                                        | 139 |
| Şekil 6.4. | 63x41 Shepp-Logan fontomu sinogramı .....                                                                                                                                              | 139 |
| Şekil 6.5. | 41x41 EM1 kullanılarak, 5 öteleme ile oluşturulmuş Shepp-Logan fontomu .....                                                                                                           | 140 |

|             |                                                                                                              |     |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 6.6.  | 41x41 EM2 kullanılarak, 1 öteleme ile oluşturulmuş Shepp-<br>Logan fontomu .....                             | 140 |
| Şekil 6.7.  | 41x41 EM1 kullanılarak, 5 öteleme ile oluşturulmuştur.<br>Laplace düzenlemesi ile gerçekleştirilmiştir ..... | 141 |
| Şekil 6.8.  | 81x81 Shepp-Logan fontomu .....                                                                              | 142 |
| Şekil 6.9.  | 81x81 Shepp-Logan fontomunun sinogramı .....                                                                 | 142 |
| Şekil 6.10. | EM1 kullanılarak, 1 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                               | 143 |
| Şekil 6.11. | EM1 kullanılarak, 2 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                               | 144 |
| Şekil 6.12. | EM1 kullanılarak, 3 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                               | 144 |
| Şekil 6.13. | EM1 kullanılarak, 4 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                               | 145 |
| Şekil 6.14. | EM1 kullanılarak, 5 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                               | 145 |
| Şekil 6.15. | EM1 kullanılarak, 6 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                               | 146 |
| Şekil 6.16. | EM1 kullanılarak, 7 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                               | 146 |
| Şekil 6.17. | EM1 kullanılarak, 8 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                               | 147 |
| Şekil 6.18. | EM1 kullanılarak, 9 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                               | 147 |
| Şekil 6.19. | EM1 kullanılarak, 10 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                              | 148 |
| Şekil 6.20. | EM1 kullanılarak, 20 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                              | 148 |
| Şekil 6.21. | EM1 kullanılarak, 40 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                              | 149 |
| Şekil 6.22. | EM1 kullanılarak, 60 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                              | 149 |
| Şekil 6.23. | EM1 kullanılarak, 10 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                              | 150 |
| Şekil 6.24. | EG yöntemi ile 1 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                    | 150 |
| Şekil 6.25. | EG yöntemi ile 2 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                    | 151 |
| Şekil 6.26. | EG yöntemi ile 3 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                    | 151 |
| Şekil 6.27. | EG yöntemi ile 4 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                    | 152 |
| Şekil 6.28. | EG yöntemi ile 5 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                    | 152 |
| Şekil 6.29. | EG yöntemi ile 6 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                    | 153 |
| Şekil 6.30. | EG yöntemi ile 7 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                    | 153 |
| Şekil 6.31. | EG yöntemi ile 8 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                    | 154 |
| Şekil 6.32. | EG yöntemi ile 9 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                    | 154 |
| Şekil 6.33. | EG yöntemi ile 10 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                   | 155 |
| Şekil 6.34. | EG yöntemi ile 20 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                   | 155 |
| Şekil 6.35. | EG yöntemi ile 40 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                   | 156 |
| Şekil 6.36. | EG yöntemi ile 60 ötelemeye oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                   | 156 |

|             |                                                                                                               |     |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 6.37. | EG yöntemi ile 80 ötelemede oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                    | 157 |
| Şekil 6.38. | EG yöntemi ile 100 ötelemede oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                   | 157 |
| Şekil 6.39. | ART yöntemi ile 1 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                  | 158 |
| Şekil 6.40. | ART yöntemi ile 2 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                  | 159 |
| Şekil 6.41. | ART yöntemi ile 3 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                  | 159 |
| Şekil 6.42. | ART yöntemi ile 4 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                  | 160 |
| Şekil 6.43. | ART yöntemi ile 5 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                  | 160 |
| Şekil 6.44. | ART yöntemi ile 6 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                  | 161 |
| Şekil 6.45. | ART yöntemi ile 7 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                  | 161 |
| Şekil 6.46. | ART yöntemi ile 8 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                  | 162 |
| Şekil 6.47. | ART yöntemi ile 9 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                  | 162 |
| Şekil 6.48. | ART yöntemi ile 10 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                 | 163 |
| Şekil 6.49. | ART yöntemi ile 20 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                 | 163 |
| Şekil 6.50. | ART yöntemi ile 40 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                 | 164 |
| Şekil 6.51. | ART yöntemi ile 60 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                 | 164 |
| Şekil 6.52. | ART yöntemi ile 80 öteleme ile oluşturulan 81x81 örüntü .....                                                 | 165 |
| Şekil 6.53. | 119x81 sinogram .....                                                                                         | 165 |
| Şekil 6.54. | Şekil 6.53'ün renkli görünümü.....                                                                            | 166 |
| Şekil 6.55. | Şekil 6. 53-54' deki sinogramdan elde edilen 81x81 Shepp-<br>Logan fontomunun FBP ile geri oluşturulması..... | 166 |
| Şekil 6.56. | 119x81 sinogram, sinogram.....                                                                                | 167 |
| Şekil 6.57. | 81x81 Shepp-Logan fontomunun FBP ile geri oluşturulması...                                                    | 167 |
| Şekil 6.58. | 101x101 Shepp-Logan fontomunun sinogramı.....                                                                 | 168 |
| Şekil 6.59. | EM2 kullanılarak oluşturulan 101x101 örüntü .....                                                             | 168 |

## TABLÖLER LİSTESİ

|            |                                                                                                                                 |     |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tablo 2.1. | İvmelendirilmiş protonlardan üretilen temel Positron yayan<br>Radyo-nükleidler .....                                            | 9   |
| Tablo 2.2. | Gama ışını taraması .....                                                                                                       | 11  |
| Tablo 2.3. | Kurşun kolimatörler kullanarak görüntüleme yöntemleri .....                                                                     | 12  |
| Tablo 2.4. | Detektör maddeleri ve hacimsel yapıları, zayıflatıcının atom<br>sayısı, enerji çözünürlük kapasitesi bakımından incelenmesi ... | 13  |
| Tablo 2.5. | Anger kamera kullanarak elde edilen sayım sayısı .....                                                                          | 14  |
| Tablo 5.1. | Matris operasyonlarının anlamı .....                                                                                            | 104 |
| Tablo 6.1. | 81x81 görüntünün değişik yöntemlerle oluşturulan<br>örüntüsünün norm değerleri .....                                            | 170 |

## ÖZET

Anahtar Kelimeler : Tomografi, Pozitron Emisyon Tomografisi(PET), Geri Oluşturma, Filtrelenmiş Geri Oluşum, Cebirsel Geri Oluşum

Bu çalışmada tomografik görüntüleme yöntemleri, iki bölüm altında incelenmiştir. Bu yöntemlerden birincisi Direk geri oluşturma yöntemidir. Direk geri oluşturma yöntemi, Fourier dönüşüm yöntemi, filtrelenmiş geri projeksiyon, geri projeksiyondan sonra filtreleme olmak üzere üç ana başlık altında toplanmıştır. Bu yöntemler ayrıntılı olarak ele alınmış ve bu yöntemlerin ayrık(sayısal) gerçeklenimi de anlatılarak Matlab ortamında çeşitli fontomlar üzerine uygulaması gerçekleştirilmiştir.

Bu yöntemlerden ikincisi ise ötelemeli geri oluşturma yöntemidir. Ötelemeli geri oluşturma yöntemi, cebirsel geri oluşum(ART), çarpımsal cebirsel geri oluşum(MART), eşlenik gradyan(CG), beklenti maksimizasyonu(EM), maksimum olabilirlik beklenti maksimizasyonu(MLEM) yöntemlerinden oluşmaktadır. Matlab ortamında bu yöntemlerle ilgili algoritmalar geliştirilmiş ve değişik fontomlara uygulaması yapılmıştır.

Ayrıca bu çalışmada direk ve ötelemeli yöntemlerle elde edilen görüntüler, görüntü kalitesi ve geri oluşturma zamanları bakımından karşılaştırılması yapılmıştır. Ötelemeli yöntemlerin zorluklarından en önemlisi, büyük sistem matrislerinin hesaplanması ve kullanımından dolayı ortaya çıkan karmaşıklığıdır. Sistem matrisi genelde oldukça seyreklerdir. Matlab 7’de yüz milyondan fazla elemanı olan matrislerle işlem yapılamamakta ve kaydedilememektedir. Cebirsel yöntemlerde çözünürlüğü artırabilmek için sistem matrisinin bu değerlerden büyük olması kaçınılmazdır. Bu problemin çözülmesine yönelik olarak bu çalışmada, yeni bir matris depolama yöntemi geliştirilmiş ve yöntemin görüntüler üzerine uygulanması gerçekleştirilmiştir. Yöntemin avantaj ve dezavantajları incelenerek yorumlanmıştır.

# **IMAGE ENHANCEMENT AND INVESTIGATION OF RECONSTRUCTION METHODS IN POSITRON EMISSION TOMOGRAPHY**

## **SUMMARY**

**Key words:** Tomography, Positron Emission Tomography(PET), Backprojection, Filtered Backprojection, Algebraic Reconstruction.

Tomographic imaging and reconstruction methods are investigated in this PhD thesis. Reconstruction is implemented by using two methods. The first one is direct reconstruction method. This method has three sub-methods which are Fourier Slice, Filtered Back Projection, Filtering After Backprojection methods. Theoretical background of these methods are explained in detail, also implementation of these methods in Matlab environment is obtained. These methods are applied to different primitive figures and some fontoms. The second one is Algebraic reconstruction method. This method consists of five sub-methods. These are ART, multiplicative ART, Expectation Maximization(EM), Conjugate Garadient(CG) and Maximum Likelihood Expectation Maximization methods. In this thesis algorithms for these methods are obtained in Matlab environment. By using these algorithms some fontoms are reconstructed.

Reconstruction time and image quality by using direct reconstruction methods and Algebraic reconstruction methods are compared in this thesis. The great advantage of iterative methods is that correction to attenuation and depth-dependent detector response can be incorporated to the reconstruction process. One of the drawbacks of the iterative reconstruction methods is the huge computation, due to large system matrices. This system matrix is very sparse. In Matlab 7, matrices having elements more than 100 million can not be executed or stored due to its size restriction. To overcome this problem we have implemented a new storage technique. By this technique, large system matrices can be manipulated in Matlab7 in image reconstruction. Advantages and disadvantages of this method is discussed.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Tomografi, kısımlara, bölümlere ayırarak görüntüleme yöntemidir. Tomografide kullanılan cihaza tomograf, oluşturduğu görüntüye de tomogram denmektedir. Tomografi bir çok alanda kullanılmaktadır. Bunlar, tıp, arkeoloji, metalurji, jeoloji, biyoloji, ormancılık gibi oldukça geniş bir kullanım alanına sahiptir. Tomografi yöntemleri de oldukça çeşitlidir. Bunlar ;

- 1- Atom prob tomografi (APT)
- 2- Bilgisayarlı tomografi (BT)
- 3- Konik odaklı lazer tarama mikroskopi (LSCM)
- 4- Cryo-electron tomografi (Cryo-ET)
- 5- Elektrik kapasitans tomografi (ECT)
- 6- Elektrik empedans tomografi (EIT)
- 7- Manyetik rezonans görüntüleme (MRI)
- 8- Fonksiyonel manyetik rezonans görüntüleme (fMRI)
- 9- Manyetik endüksiyon tomografi (MIT)
- 10- Optik koherens tomografi (OCT)
- 11- Optik projeeksiyon tomografi (OPT)
- 12- Positron emisyon tomografi (PET)
- 13- Quantum tomografi
- 14- Tek foton emisyon bilgisayarlı tomografi(Single photon emission computed tomography) (SPECT)
- 15- Sismik tomografi
- 16- X-ışını Tomografi

Bilgisayarlı tomografi, 1963 yılında Cormak tarafından teorize edilmiş ve radyolojide yeni bir çağır açmış kesitsel görüntüleme yöntemidir. İlk bilgisayarlı tomografi cihazlarında, tek bir kesit oluşturabilmek için gerekli verileri toplamak 5

dakika gibi uzun bir süre gerektirmekteydi. Bu olay bilgisayarlı tomografi'nin kullanılmasını engellemiş ve geciktirmiştir. Bilgisayarlı tomografi uygulaması sadece beyin incelemesinden ibaret kalmış, sürenin uzunluğu dolayısı ile solunum, intestinal peristaltizm(iç eklemlerin oynaklığı) gibi sınırlamalar bilgisayarlı tomografinin toraks, batin gibi uygulama alanlarında da kullanılmasını geciktirmiştir. Bilgisayarlı tomografi cihazları, geliştirilme ve rutinde kullanılma aşamalarında bir dizi evrim geçirmiş ve bu gibi dezavantajlarından arındırılmıştır.

Daha sonraları PET tomografi yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntem radyo aktif izotopun konsantrasyonunun algılanması ilkesine dayanmaktadır. Kısa ömürlü radyoaktif izleme izotopu, pozitron yayarak çürür. Bu izotop aktif bir molekülle(genelde şekerle) birleştirilmiştir. Bu moleküller genelde kan yolu ile görüntülenecek canlıya enjekte edilir. Canlı üzerinde bu moleküllerin belirli bir konsantrasyona ulaşması için belirli bir süreye ihtiyaç vardır. Konsantrasyon yeterli düzeye erişince tarama işine başlanır. Kısa ömürlü izotop pozitron yayarak çürür. Birkaç milimetre kayarak bir elektronla anihilasyona(yok olma) girer ve iki adet zıt yöne giden foton üretir. Fotonların her biri genelde 511 keV potansiyele sahiptir. Bu fotonlar tarama cihazı üzerindeki skintilatörler tarafından algılanır ve ışığa dönüştürülür. Işıklar foto çarpıcı tüpe yönlendirilerek, genlik olarak büyütülürler. Skintilatörlere eşzamanlı ulaşmayan fotonlar dikkate alınmaz. Değişik projeksiyonlardan binler veya milyonlarca foton kaydedilince, bu fotonların çıkış yerlerinin bir haritalaması yapılır. Oluşturulan görüntüye, geri projeksiyon görüntüsü denir. Saçınan foton konsantrasyonunun yüksek olduğu bölgeler tümörlü hücrelerdir.

PET tomografi ile birlikte diğer BT veya MRI taramaları yapılarak, hem anatomik hem de metabolik yapı hakkında veri elde edilerek, teşhis konusunda daha net kararlar verilebilmektedir. Bu nedenle yeni nesil tomografi cihazları birkaç tomografi yöntemini uygulayabilen cihazlardır. Böylece, hem hasta fazla yorulmaz, tarama süresi kısılır ve cihaz kalabalığı önlenilmiştir. PET tomografi daha çok klinik onkolojide, tümör görüntüleme ve metastaz araştırmalarında, insan beyni ve kalbi incelenirken kullanılır.

BT ve MRI vücuttaki organik anatomik değişiklikleri algılayamaz iken, PET tomografi moleküler biyolojik yapıyı detaylı olarak algılayabilir. Bu, radyo

işaretlenmiş moleküllerin, dokunun yapısına göre bu molekülleri emmesi özelliğinden faydalanılarak gerçekleşir.

PET görüntülemesi, PET tarayıcılar dışında gama kameralar ile de yapılmaktadır. Fakat gama kameraların tarama kalitesi düşük ve süreleri uzundur. Gama kameraların kurulumu kolay olduğu için küçük ve orta ölçekli merkezlerde kullanılmaktadır.

PET tarayıcının kullandığı radyonükleidler yarı ömürleri kısa olan izotoplardır. Tipik olarak 2 dakika ile 110 dakika arasındadır. Bu kısa ömürlerinden dolayı radyonükleidler PET cihazının yanında üretilmek durumundadır. Bu nedenle PET tomografi taramasının kurulum maliyeti yüksektir. Radyonükleidler saykilotron tarafından üretilirler. Bazen yakındaki birkaç tomografi merkezi maliyeti azaltmak için, ortak bir saykilotron kurarak, ortaklaşa kullanılmaktadırlar. Bu radyo nükleidler şeker, su ve amonyak gibi maddelerle karıştırılarak kullanılırlar. Bu işaretlenmiş karışımlara radyotracer denmektedir.

PET tomografi onkolojide, nörolojide, kardiyolojide, nöro-psikolojide, psikiyatri ve ilaç alanında kullanılmaktadır. Florodeoksiglikoz(FDG,  $^{18}\text{F}$ ) klinik onkolojide en çok kullanılan, şeker karışımı, radyo işaretleyicidir. Bu karışım, en çok enerji harcayan organlar olan beyin ve ciğerler ile habis tümörler tarafından emilir. Bu nedenle FDG-PET kanser teşhis ve tedavisinde, özellikle Hodgkin hastalığı, Hodgkin olmayan lenf tümörleri, ciğer kanserleri gibi, kullanılmaktadır. FDG PET taraması, genel PET taramasının % 90'ını oluşturmaktadır.

PET, nöro görüntülemeye, beyindeki yüksek radyo aktiviteli bölgeler beynin çalışan bölgelerini gösterdiği hipotezi üzerine kuramlanmıştır. Beynin farklı bölgelerine giden kan akış miktarının tespiti, işaretlenmiş oksijen( $^{15}\text{O}$ ) kullanılarak yapılmaktadır. Fakat oksijenli işaretçilerin yarı ömrünün 2 dakika olması nedeniyle, oksijenlerin saykilotrondan direk alınmasını gerektirmekte ve bu nedenle kullanımında zorluklar olmaktadır. Oksijen yerine FDG kullanılarak da görüntüleme yapılmaktadır, çünkü, oksijen kullanılan yerde şeker de ihtiyaç vardır. Bu yöntemlerle Alzheimer hastalığının diğer bunama gibi zihinsel hastalıklardan ayrıştırılması ile erken teşhisinde kullanılmaktadır. Değişik nöro alıcı tipleri için, bir

çok radyo işaretleyici (dopamin D2, serotonin 5-HT1A gibi), veya enzim parçaları(6-FDOPA, AADC enzimi için) geliştirilmiştir. Bu ajanlar, nöro-alıcı havuzların nöro-psikiyatrik ve nörolojik hastalıklarının algılanmasında kullanılmaktadır.

Pittsburgh üniversitesi tarafından geliştirilen bir ajan PIB( Pittsburgh karışım B) Alzheimer hastalarında beyindeki amloid plakalarının görüntülenmesinde kullanılmaktadır.

Biyolojik psikiyatride ilgi duyulan nöro-alıcılar için uygun radyo-işaretlenmiş karışımlar  $^{11}\text{C}$  ve  $^{18}\text{F}$  ile üretilmektedir. Dopamin alıcılarına(D1, D2,) , serotonin alıcılarına(5HT1A, 5HT2A) ve diğer alıcılara tutunabilen radyo-nükleidler psikiyatrik incelemelerde kullanılmaktadır. Bu alıcıların durumları sağlam deneklerle, şizofren, madde bağımlısı ve bunamış hastalarla karşılaştırılarak psikiyatrik durumlarının incelenmesi konusunda çalışmalar yapılmaktadır.

PET tomografi hastaya zarar vermeyen bir yöntemdir, ancak iyonizasyon radyasyonuna maruz kalınmaktadır. Radyasyon dozu, 7mSv(millisievert) gibi düşük bir düzeydir. İngiltere de yıllık yer altı radyasyonu 2.2 mSv olarak, radyasyon merkezince ölçülmüştür.

Emisyon görüntüleri vücudun kimyasal bileşimini, uzaysal düzlemde gösterir. Tracer'in konsantrasyonu, canlı dokunun aktif metabolizması hakkında bilgi verir. Emisyon tomografisi medikal görüntüleme yöntemi olarak önemli miktarda veri işlenmesini gerektirir. Ölçülen verilerden elde edilen trans-aksiyel görüntü, geri oluşturma işleminde kullanılan algoritmalar, gürültü ve verilerin istatistiksel yapısından dolayı görüntü kalitesi düşmektedir.

PET tomografide bir milat teşkil eden istatistiksel model geliştirilmesi, Shepp L., Vardi Y., Kaufman L. tarafından yayınlanan makale ile başlamıştır[23]. Daha sonraları yine Kaufman L. tarafından, maksimum olabilirlik yönteminin PET tomografide uygulaması yapılmıştır.[25]

Jaszack ve arkadaşları tarafından SPECT tomografi üzerine değişik araştırmalar yapılmıştır[7, 35,36,45,57,103]. Yine Jaszack tarafından kendi adı ile anılan bir

fontom geliştirilmiştir. Bu fontom tomografik görüntü kalitesi araştırmalarında test aracı olarak kullanılmaktadır.

Michigan üniversitesinden Fessler ve arkadaşları PET tomografide istatistiksel yöntemlerin kullanılması ile ilgili çalışmalar yapmaktalar[30, 96,100,110]. Yine Washington üniversitesi, radyoloji bölümünde nükleer tıp kısmında PET tomografi araştırmaları yapılmaktadır. Burada küçük hayvanların tomografilerinin oluşturulması üzerine bir tomografi cihazı tasarlanmış ve bunun geliştirilmesine yönelik çalışmalar yapılmaktadır. Bu cihazda kullanılmak üzere SimSET adında bir yazılım geliştirmektedirler[40].

Gabor T. Herman ve arkadaşları tarafından New York şehir üniversitesinde Bilgisayar mühendisliği bölümünde, PET tomografi üzerine araştırmalar yapılmakta ve konu ile ilgili oldukça fazla yayın referansları bulunmaktadır[53,22,24,75].

## BÖLÜM 2. PET TOMOGRAFİ

Nükleer tıp, hastalara tedavi ve terapi amaçlı radyoaktif bileşimler uygulanmasıdır. Radyoaktivite iğne ile enjekte edilebilir, solunumla alınabilir veya ağız yoluyla sindirim sistemi tarafından alınabilir. Nükleer tıbbı, tedavisel radyolojiden ve onkolojiden ayırt eden özellik genel olarak radyoaktif maddenin içindeki sirkülasyonudur.

Radyoizotoplar biyolojik olarak aktif ve radyoaktif olarak işaretlenmiş ilaçlardır. Bunlar biyo-kimyasal işlemleri ortaya koymak veya belirli bir dokuyu görüntülemek ve incelemek için kullanılır. Positron Emisyon Tomografi(PET)'de bu radyoaktif izotoplar (radiotracers) pozitron yayıcılarıdır( $\beta^+$  çürümesi) . Salıverilen pozitron yayıcılar, kullanılan radyoizotopun tipine bağlı olarak değişmekle beraber, dokuda kısa bir yol aldıktan sonra elektron ile birleşerek pozitron oluşturur. Momentum ve enerjinin korunumu kanununa göre iki parçacık anihilasyona(imha) uğrayarak  $e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma$  bir birine zıt iki 511 keV foton üretirler. Bu fotonlar radyoizotopun bulunduğu yeri kesen iki karşılıklı radyasyon detektörleri tarafından yakalanırlar. Bu çizgi yanıt çizgisi(LOR-line of response) veya kiriş (Chord) diye anılmaktadır. Aktif hale gelen kirişlerin toplanması ile PET için gerekli olan veri elde edilmiş olur. Bu veriler görüntü oluşumu için kullanılır.

Tümör algılama ve teşhisi konusunda onkolojide PET tarayıcıların kullanımı nükleer tıpta son zamanlarda yaygınlaşan bir alan olmuştur. Beyindeki glikoz tüketiminin ölçümü ve görüntülenmesi konusundaki gelişmeler, tümör tarama konusunda bu yöntemin kullanılması yönünde cesaretlendirici etkisi olmuştur. Tümör hücrelerinin karakteristik özelliği glikoz tüketiminin fazla olmasıdır. Bunun gerekçeleriyle ilgili birçok neden sunulmuş ve araştırma konusu olmaya devam etmektedir. Glikoz tüketiminin artmasının temel nedeni Pasteur etkisi olarak da bilinir. Louis Pasteur, fermentasyon sürecinde oksijen olmadığı zaman, glikozun daha fazla tüketildiğini

keşfetmiştir. Bunun nedeni tam aerobik glikoliz olayı, hücreler için enerji kaynağı olarak 36 ATP molekülü üretirken, anaerobik glikoliz olayı ise yalnızca 2 ATP üretir. Bu nedenle hücre anaerobik solunumda daha fazla enerji tüketebilmek için daha fazla glikoz yakar. Tümör hücrelerinin hızlı büyümesi, yeni kan damarlarının oluşmasını gerekli kılar, bu nedenle o bölgede oksijen azlığı oluşur.

Nükleer tıp iki bakımdan başarılıdır. Birinci olarak; kullanılan kimyasallar oldukça düşük seviyededir (pikomolar seviyededir) ve çalışılan insan veya nesne üzerinde bir etki bırakmaz. İkincisi; kullanılan radyonükleid vücutta saçınırken vücut dışında algılanmaktadır.



Şekil 2.1. Hibrit SPECT/CT tarayıcı Hawkeye( GE medical sistemler). Tarayıcı, düşük çözünürlüklü ve düşük fiyatlı olan X-ışın CT kamera, bu karmanın parçaları olan X ışın tüpü (b), 384 adet  $CdWO_4$  çizgi tarayıcı(c) ile çift kafalı SPECT( (a) ile gösterilmiştir)ten oluşmaktadır .

Positron emisyon tomografisi iki kısımdır. Birincisi Tek Foton Emisyon Tomografisi (Single Photon Emission Tomography) SPECT diye bilinir. Diğeri ise PET Pozitron emisyon tomografisidir.

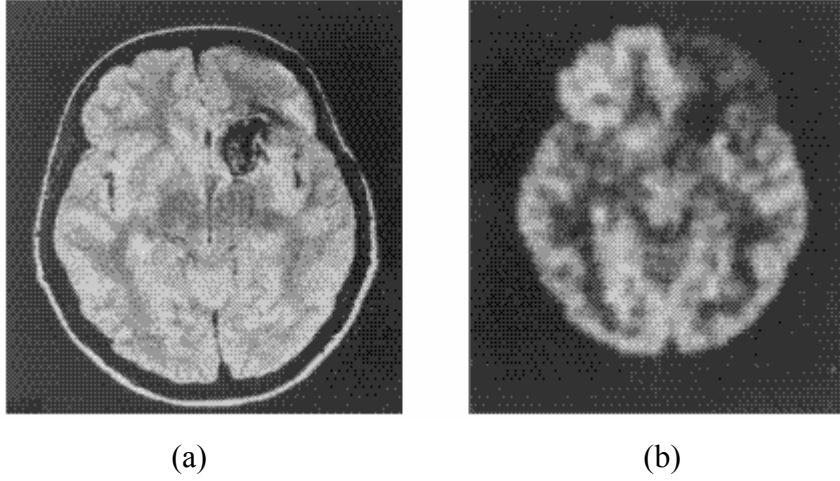
1950 yıllarında Boston'daki araştırmacılar tarafından ilk defa radyoaktif nesneler kullanarak medikal görüntüleme olasılığı araştırılmıştır. Daha sonraları, positron anhilasyonundan oluşan yüksek enerjili fotonlar, üç boyutta özel kimyasal bileşimlerin fizyolojik dağılımını tespit için kullanılmaya başlanılmıştır. Gelişen sofistike görüntü oluşturma algoritmaları ile bu teknik daha da gelişmiştir. 1980'lerin ortalarında ise medikal bir yöntem olarak tıp alanında kullanılmaya başlamıştır. PET tomografinin milyon fold hassasiyetinden dolayı MRI(Manyetik Rezonans Görüntüleme) göre tracer tespitinde daha kullanışlıdır. Tracer, positron emisyon izotopu taşıyan biyolojik molekül demektir.



Şekil 2.2. Hibrit PET/CT tarayıcı; Discovery LS ( GE tıbbi cihazları).

PET kimyasal özelliğinden dolayı, beyindeki nero reseptör ve diğer vücut dokularında oluşan deformasyon tespitinde kullanılır. MRI Anatomik yapı ve akış çalışmalarında mili-molar seviyesinde tespitler yapabilir, oysa ki vücuttaki bir çok protein reseptörleri nano-molar seviyesindedir[31].

PET in fiziksel kullanımı beyin tümörleri, meme, ciğer, prostat kanserleri teşhisinde kullanılır. PET görüntülenmesi metabolik aktif tracer enjeksiyonu ile başlar. Birkaç



Şekil 2.3. PET (b) ve MRI (a) görüntülerinin karşılaştırılması. MRI görüntüsü, kan akışının azlığından dolayı oluşan sinyal kaybının görüntülediği damar bozukluğunu, arteriovenous malformation (AVM), göstermektedir. PET görüntüsü ise, AVM bölgesi olarak glikoz metabolizmasından yoksun ve ön beyin zarındaki düşük metabolizmalı yerleri göstermektedir. Bu AVM'nin beyin üzerine metabolik etkisidir ve hastanın bulgularını açıklayabilir.

dakika sonra molekül izotopları kendisine akrabalığı olan yerde, vücut bölgesinde, toplanır. Örneğin  $^{14}\text{C}$  ile işaretlenmiş glikoz veya  $^{18}\text{F}$  ile işaretlenmiş, glikoz türevi beyinde veya glikozu temel enerji kaynağı olarak kullanılan tümörde kümelenir. Sonra Radyoaktif çekirdek pozitron emisyonu ile çürür. Pozitron emisyonunda, nükleer pozitron, pozitif elektron ve nötrona dönüşür. Atom ağırlığını korur ama atom sayısı 1 azalır. Açığa çıkan pozitron bir elektronla hemen birleşir ve bu iki kütle yok olma (anihilasyon) işlemine girer pozitron ve elektron partiküllerinin kütleleri ile ilgili olan enerji miktarı 1.022 MeV tür. Bilindiği gibi kütle, enerji bağıntısı

$$E=mc^2 \quad (2.1)$$

dir. Burada,  $c$  ışık hızı,  $m$ 'de kütledir. Yok oluş sırasında açığa çıkan enerji 2 foton arasında eşit paylaşılır ve bir diğerine  $180^\circ$  açı yapacak şekilde hareket ederler. Her bir foton 511 keV enerjiye sahiptir. Bu yüksek enerjili gama ışınları vücuttan ters yönlerde dışa doğru çıkarlar. Bu ışınlar hastayı çevreleyen detektörler tarafından algılanırlar. Aynı anda bir çift detektör tarafından iki foton ölçülürse, yok olma yeri, bu iki detektörü birleştiren doğru üzerinde bir yerde olması gerekir. Eğer fotonlardan

biri bir kırılmaya uğrarsa, detektörler arası seçtiğimiz çizgi yanlış olur. 100 bin veya daha fazla yok olma kaydedildiğinde, pozitron saçan tracerlerin konsantrasyonları geri oluşturma yöntemleri ile tespit edilir. PET'te 2 boyutlu görüntü (2-D), farklı açılardan oluşan 1 boyutlu(1D) projeksiyonlardan geri oluşturma yöntemi ile oluşturulur. Üç boyutlu görüntüleme de, bir çok açıdan elde edilen 2 D görüntülerden elde edilir[19].

Tablo 2.1. İvmelendirilmiş protonlardan üretilen temel Positron yayan Radyonukleidler.

| Radyo nükleidler | Yarı ömrü(dakika) | Reaksiyon                                                                                                                                                           |
|------------------|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Karbon- 11       | 20                | $^{12}\text{C} (p,pn) ^{11}\text{C}$                                                                                                                                |
| Nitrojen- 13     | 10                | $^{14}\text{N} (p,\alpha) ^{11}\text{C}$                                                                                                                            |
| Oksijen- 15      | 2                 | $^{16}\text{O} (p,\alpha) ^{13}\text{N}$<br>$^{13}\text{C} (p,n) ^{13}\text{N}$                                                                                     |
| Florin- 18       | 110               | $^{15}\text{N} (p,n) ^{15}\text{O}$<br>$^{14}\text{N} (d,\alpha) ^{15}\text{O}$<br>$^{18}\text{O} (p,n) ^{18}\text{F}$<br>$^{20}\text{Ne} (d,\alpha) ^{18}\text{F}$ |

## 2.1. PET Tomografide Kullanılan Radyokimyasallar

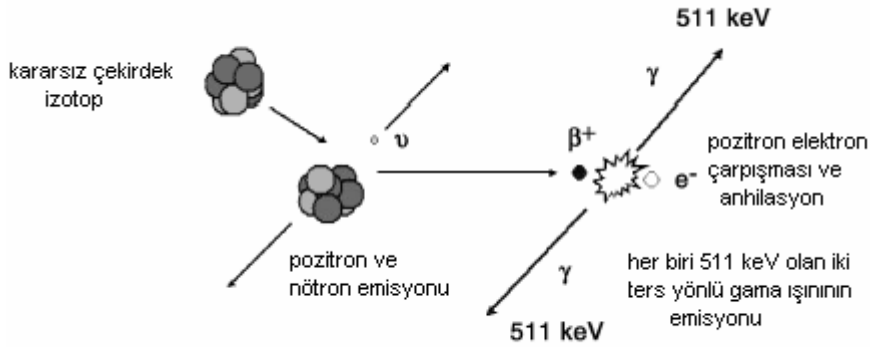
Tomografide kullanılan elementler,  $^{11}\text{C}$ ,  $^{13}\text{N}$ ,  $^{15}\text{O}$  ve  $^{18}\text{F}$  gibi atomlar kısa ömürlü pozitron yayıcılarıdır. Florin 18( $^{18}\text{F}$ ) en çok kullanılan pozitron yayan izotoptur. İki farklı izotopu ile  $^{+}\text{F}$ ,  $^{-}\text{F}$  tıbbi olarak kullanışlı bir çok değişik şekli geliştirilebilir.

Radyo nükleidin yarı ömrüne ve hedefe erişen atom sayısına bağlı olarak ,birim saniyede üretilen aktivite şöyledir.

$$A(t) = \frac{N\sigma\phi}{3.7 \times 10^{10}} \left( 1 - e^{-\frac{0.693t}{T_{1/2}}} \right) \quad (2.2)$$

$A(t)$  : Aktivite miktarı (atom sayısı/saniye)

- $N$  : Çekirdek sayısı ( $N$ , Hedef Kütle/Atom Ağırlığı).  
 $\sigma$  : Reaksiyonun olduğu yüzey alanı( $\text{cm}^2$ )  
 $\phi$  : Yüklü kütlenin manyetik akısı(nötron/sn)  
 $T_{1/2}$  : Ürünün yarı ömrü(sn)



Şekil 2. 4. (a) Özel yüksek aktiviteli nötron fazlalı radyonükleidler genellikle  $(n, \cdot)$ ,  $(n, p)$  veya  $(n, \cdot)$  reaksiyonları ile üretilirler. Üretilen nükleidler önce  $\beta$  sonra  $\gamma$  ışını şeklinde çürürler. Reaktörle üretilen radyo nükleidlerin bir çoğu  $(n, \gamma)$  reaksiyonu ile üretilirler (b) Saykolotronlar ve diğer doğrusal ivmelendiriciler proton, deütron, helyum iyonlarının ışın demetinin kaynaklarıdır. Bunlar nötron eksikliği olan radyo nükleid üretmek için hedefi bombalarlar.

Radyoaktif maddelerin birçok türünde olduğu gibi fotonlar da insan dokusundan geçebilecek kadar küçüktürler veya başka bir ifadeyle insan dokusunda fotonları geçirebilecek yeterli boşluklar vardır. Dışarı çıkan fotonlar algılanırlar. Radyasyon, beta ışını üretilen yerden değil birleşiminin olduğu yerden olur. Pozitronlar veya beta partikülleri elektronlarla yok oluşa girerler ve gama ışını oluştururlar. Böylece algılanabilirler. Bazı radyonükleidler için bu oluşum X ışınıdır ve 50 ile 100 keV arası enerji şeklinde algılanır.

Nükleer tıpta kullanılan materyallerin yarı ömürleri birkaç dakikadan birkaç haftaya kadar devam edebilir. Yarı ömürler seçilirken iki şey dikkate alınmalıdır. Yapılacak işlemin alacağı süre ve hedef organı etkileyen radyasyon dozu, yani o organın en yüksek doza en uzun süre boyunca sahip olması gerekir. Genellikle hedef organın 0,05 Gray'in altında kalması gerekir. Enerji aralığını seçerken iki kriter

bulunmaktadır. Dokudan ayrılan fotonların kolimatörlerden geçtikten sonra detektörler tarafından algılanabilecek miktarda olması, yani ideal enerji miktarı, yapılan tetkikin türüne ve kullanılan detektörün özelliğine bağlıdır. Tablo 2.2’de gama ışını tarama türü, aktivite ve enerji aralığı ve elde edilen bilgi türü gösterilmiştir. Düşük uzaysal çözünürlük ile az miktarda aktivite kullanılırsa, hassasiyet fazla elde edilir. Teşhiste alfa radyasyonu kullanılmamaktadır. Ayrıca ilkel beta radyasyonlu maddelerden kaçınılmalıdır. Çünkü beta radyasyonu, radyasyon dozunu arttırırken elde edilen bilgiye (veriye) katkı yapamaz. Yine gama ışınları ile tarama yapılırken, gama ışınlarının fazla miktarda olması kolimatörde orijinal ışınla çakışmaya neden olur ve yanlış veri alınmasına neden olur.

Tablo 2.2. Gama ışını taraması

| Örnekleme türü                                                                      | Aktivite miktarı | Enerji miktarı | Cihaz türü                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Hasta örnekleri, yani, kan, idrar vs. gibi.                                         | 0,001 $\mu$ Ci   | 20 – 5000 keV  | Halkasal NaI (TI) detektörlü Gamma sayıcı , 1 veya 2 PMT’li, dıştan Pb yalıtımlı. |
| 60 cm görüş alanında olan, 30 cm’den küçük organ fonksiyonları                      | 5 – 200 $\mu$ Ci | 20 – 1500 keV  | Flarlı Pb kolimatörlü 2 – 4 in. NaI (TI) detektör                                 |
| Vücut parçalarının statik görüntülenmesi, yani, akciğer, karaciğer gibi.            | 0,2 – 30 mCi     | 50 – 650 keV   | Düz çizgi ilerleyen(Rectilinear) odaklanmış Pb kolimatör.                         |
| Vücut parçalarının dinamik görüntülenmesi, yani, havayollarındaki ksenon gazı gibi. | 2 – 30 mCi       | 80 – 300 keV   | Anger kamera ve paralel – delikli Pb kolimatör.                                   |

Ağır metal kolimatörlerle görüntü oluşturmak için insan vücudundan çıkan fotonların enerji aralığı 50 ile 500 keV aralığında tutulmuştur. Detektörler, iyon radyasyonunu emdiğinde, algılanacak bir değişim gösterebilmelidir. Ayrıca oldukça fazla miktarda saçınan gama ışınlarını durdurabilecek, yeterli yoğunlukta ve yüksek atom numarasına sahip olmalıdır. Kaynaktan yalnızca gama ışınları saçılmadığından diğer ışınları ayırt edebilecek özelliğe sahip olmalıdır. Enerji miktarına göre darbe hacmi

üretebilme özelliği olmalı, yani enerji miktarını ve yerini tespit edebilmek için detektör oransal olmalıdır.

Gaz detektörleri yoğunlukları büyük olmadığından pratik değildir. Sıvı detektörler de dönme sırasında sıvı birikmesine neden olacağından tercih edilmemektedir. İyi detektörlerin bir diğer özelliği de birim zamanda oldukça fazla gama ışını algılayabilmelidir. 100.000 sayım/saniye veya  $2\mu\text{s}$  ölü zamanı olan bir detektör ( $10 \times 10$  cm bir alan üzerindeki)  $1 \text{ cm}^2$ 'sinde 1000 sayım/sn yapacaktır. Elde edilen bilginin doğruluğu Poisson istatistiği ile yapılmaktadır[26].

Tablo 2.3. Kurşun kolimatörler kullanarak görüntüleme yöntemleri

| <i><b>Kolimatör türü</b></i>                                                                                                          | <i><b>Kullanım şekli</b></i>      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| Hareketli prop                                                                                                                        | Düz çizgisel tarama               |
| Çoklu kristal dizisi                                                                                                                  | Oto floroskop, “fly-eye” kamera   |
| İki hareketli prop                                                                                                                    | Çift kafalı düz doğrusal tarayıcı |
| Geniş tek kristal sistem                                                                                                              | Anger kamerası                    |
| İki görüntü elde edebilmek için karşılıklı iki kristalli Anger mantıklı yapı<br>Anger mantıklı SPECT için geniş çoklu kristal sistemi |                                   |

$1 \text{ cm}^2$ 'de birim saniyede alınan verilerde 1 standart sapma seviyesinde oluşan hata  $\pm\% 3$ 'tür. Eğer  $1 \text{ cm}^2$ 'den daha iyi bir çözünürlük elde etmek isteniyorsa hassasiyet daha da kötü olacaktır. Bu nedenle ne kadar çok detektör olursa, o kadar çok hassasiyet olacaktır. Tablo 2.3'de en az duyarlı geometriden en çok duyarlı geometriye doğru sıralanmış liste gösterilmiştir.

## 2.2. Foton Radyasyonunun Taraması

Algılanan gama ışınları detektördeki atomları iyonize ederler. İyonlar gazlı veya yarı iletken sistemlerde olduğu gibi ya direkt olarak veya önce iyonlar ışığa, ışıktan elektronlara (foto çarpıcı tüplerde olduğu gibi) dönüştürülerek algılanırlar. Her iki durumda da foton emildiğinde, bir darbe meydana getirebilecek gerilim oluşturur. Gama ışınlarının yayılması Poisson istatistiğine göredir. Her bir birim zamanda çekirdeğin çürümesi diğerlerinden bağımsız ve eşit olasılığa sahiptir. Gama ışını

üretimindeki belirsizlik, üretilen gama ışınları miktarının karekökünün tersinin biraz üzerindedir.

Tablo 2.4. Detektör maddeleri ve hacimsel yapıları, zayıflatıcının atom sayısı, enerji çözünürlük kapasitesi bakımından incelenmesi

| <i>Detektör maddeleri</i>                                | <i>hacimsel yapıları</i>  | <i>Zayıflatıcının atom sayısı</i> | <i>enerji çözünürlüğü</i>                                         |
|----------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| PMT bağlı;<br>NaI (TI)                                   | çaprazlama 50 cm ye kadar | 63                                | 5 – 10%                                                           |
| Plastik skintilatörler                                   | sınırsız                  | 6                                 | Görütülemde gama ışınları için yalnız Kompton emilmesi kullanılır |
| CsI (TI)                                                 | <3 cm x 3 cm              | 53, 55                            | NaI (TI)'den daha kötü                                            |
| BiGermanit                                               | <3 cm x 3 cm              | 83                                | NaI (TI)'den daha kötü                                            |
| <b>Yarıiletkenler:Sıvı nitrojen işlemi ve saklanması</b> |                           |                                   |                                                                   |
| GeLi                                                     | <3 cm x 3 cm              | 32                                | < %1                                                              |
| SiLi                                                     | <3 cm x 3 cm              | 14                                | < %1                                                              |

Bu nedenle ne kadar çok gama ışını olursa o kadar az belirsizlik olacaktır. Bu nedenle birim yüzeyden alınan veri sayısı artınca görüntü kalitesi de artacaktır. Ayrıca detektörün de bunları anında çözmesi gerekir. Detektörlerin enerji çözünürlüğü Tablo 2.4'de verilmiştir. Bütün durumlarda kırılıma uğrayan veya zayıflamaya uğrayan fotonların algılanması problemi vardır ve bu da çözünürlüğü etkilemektedir.

Düzlemsel tek bir kamera kullanılarak yapılan taramalarda yalnızca  $2\pi$ 'lik bir yüzeyi tarayacak ve tek bir kamera olduğu için ancak o an kameraya doğru gelen ışınları algılayacaktır. Bu da çözünürlüğü azaltacaktır. Genel olarak 2 mm çözünürlükten daha küçük çözünürlük değerinin yakalanması gerekir. Tabii ki sistemler geliştikçe daha iyi çözünürlük değeri yakalanabilecektir.

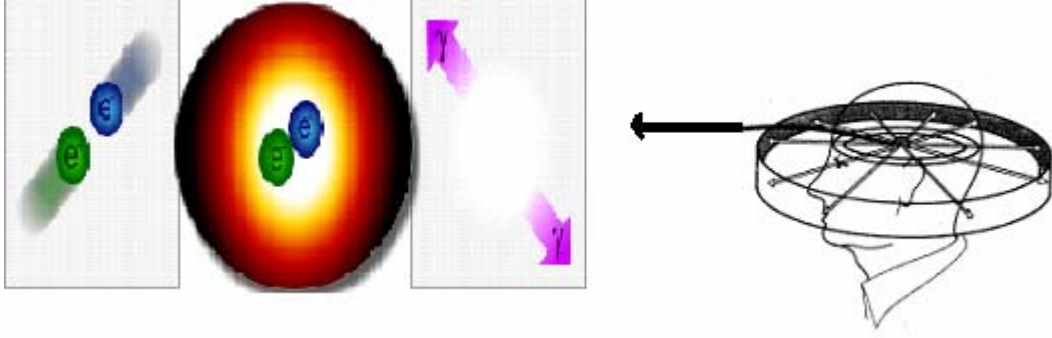
Tablo 2.5. Anger kamera kullanarak elde edilen sayım sayısı

|                                                        | <i>Sayım/dak</i>   | <i>sayım/saniye</i> |
|--------------------------------------------------------|--------------------|---------------------|
| Aktivite                                               | 0,001              |                     |
| mCi/cm <sup>3</sup>                                    |                    | $3.7 \times 10^7$   |
| Sayım/sn                                               | $2.22 \times 10^9$ |                     |
| Sayım/dak                                              | $1.11 \times 10^9$ | $1.85 \times 10^7$  |
| 3 cm kalınlığında ve 0,12 /cm ile zayıflatılmış        | $7.44 \times 10^8$ | $1.29 \times 10^7$  |
| 0,0006 verimli, X kamera                               | $4.64 \times 10^5$ | 7744                |
| Karaciğere iyi intikal 0,005 mCi/gr (5mCi/1000gr)      | $2.32 \times 10^6$ | $3.8 \times 10^4$   |
| Tc-99m'in troid'e intikali 0,001 mCi/gr (2mCi/37gr)*%2 | $4.6 \times 10^5$  | $7.7 \times 10^3$   |

Aygıtın uzaysal çözünürlüğü, detektörün duyarlılığına, çözünme zamanına ve anlık çözünme değerine bağlıdır. Kızartı (Blush) oluşturmaktan daha ziyade görüntü oluşturmak için kolimasyona ihtiyaç duyulur ve bu da nükleer tıbbi görüntülerin oluşturulmasında Poisson istatistiğini en önemli belirleyici yapar. Tablo 2.5, NaI (TI) tabanlı Anger kamerasının hesaplarını göstermektedir. Detektörün verimliliği %0,06'dır. Böylece her bir saniyedeki sayım miktarı yüksek değildir ve detektörün ani çözünürlük kapasitesi içindedir. Problem olan %0,06 olan verimlilik. Verimliliğin düşük olması kristal kalınlığına ve kurşun kolimasyona bağlıdır. Bu iki faktördeki gelişmeler verimliliği arttıracaktır.

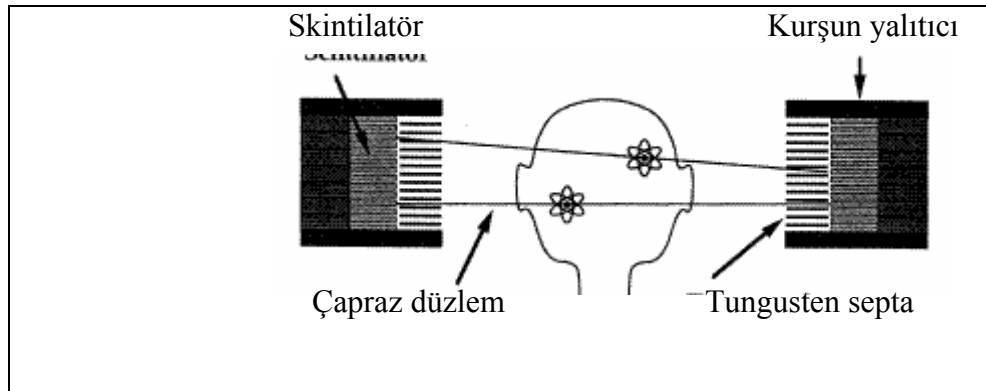
### 2.3. PET Detektörler

Fotonların verimli şekilde taranması için bir kristal kombinasyonuna ihtiyaç vardır. Bu kristal, fotonları görülebilir foton ışığına dönüştürür. Ayrıca bir de foto çarpıcıya ihtiyaç vardır. Bu çarpıcı, foto katot'a çarpan foton sayısı ile orantılı olarak bir elektrik akım sinyali üretir.

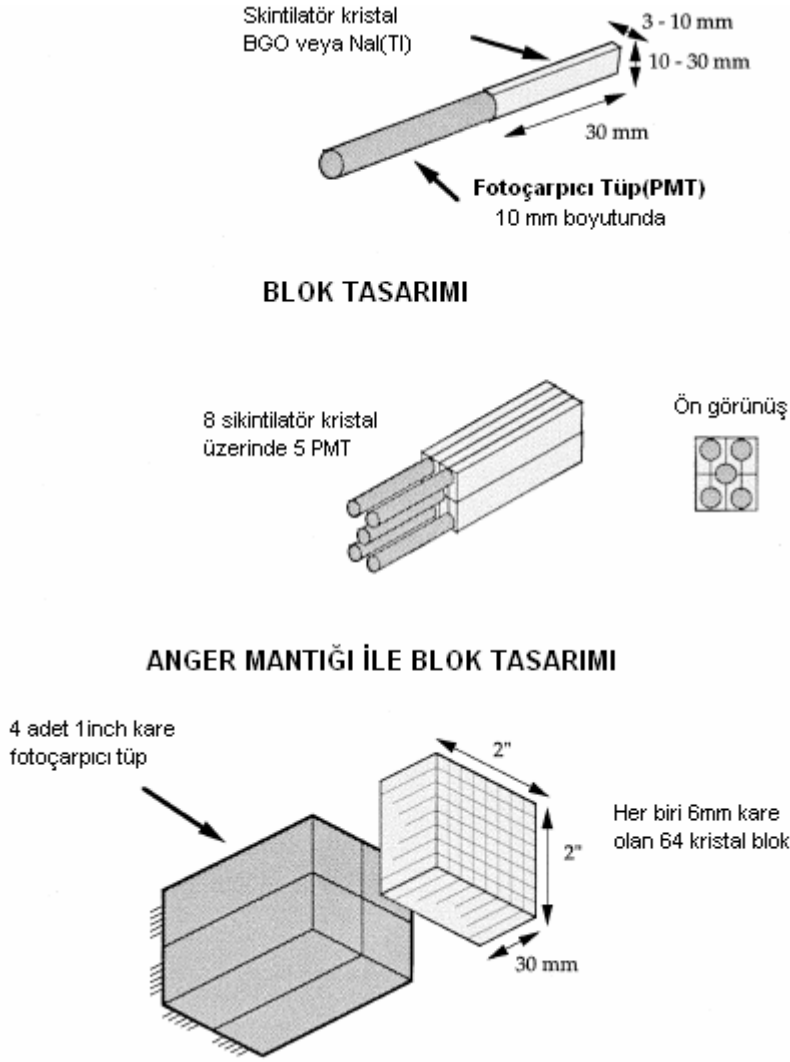


Şekil 2.5. Pozitron Emisyon Tomografinin temel yapısı. Positronlar, metabolik olarak aktif, işaretlenmiş moleküller, elektronlarla çarpışınca yok olmaya girmesi ile bir çift yüksek enerjili foton oluşumunu sağlar. Fotonlar hemen hemen birbirine zıt yönlerde hareket ederler ve böylece kaynaklarının yerini tam olarak işaret ederler. İşaretlenmiş molekülün biyolojik aktivitesi bir çok fizyolojik fonksiyonu tanımda ve tanı koymada kullanılabilir.

Görüntüleme sisteminin hassasiyeti detektör verimliliğinin karesi ile doğru orantılıdır. Bundan dolayı detektörlerin verimliliği önem arz eder. Bundan dolayı detektörler hemen hemen %100 verimli olmalıdırlar. Plastik skintilatörler (ışık yayıcı) veya gaz doldurulmuş kablo çemberler gibi tipik verimliliği % 20 veya daha az olan detektör sistemleriyle oluşturulan görüntülerde rastlantısal verimlilik % 4 veya daha az olur. Bir çok modern PET kameralar 15'le 47 arasında çok katmanlıdır veya transaksiyel (yatay) katmanlardan oluşur.



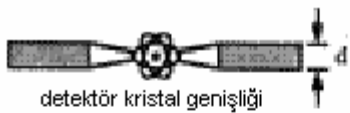
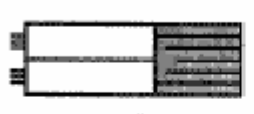
Şekil 2.6. Çok katmanlı tarayıcı. Birçok modern PET kameralar 15 ile 47 arasında değişen çok katmanlı veya transaksiyel katmanlıdır. Kurşun kılıf tomografik halkada hastadan gelen aktivitelerin yanlış sayılmaması içindir. Tungusten septa ise 511 keV fotonların bir veya ikisinin de Compton saçınımına uğrayanlarını reddetmesi içindir. Bu tasarımın duyarlılığı çapraz düzlemlerden veri toplanarak iyileştirilir.



Şekil 2.7. Skintilatör ve ışın tüplerinin yapısı . Tekil eşleştirmeli (“individually coupled”) tasarım yüksek çözünürlüğe sahiptir , ayrıca tasarım paralel olduğu (bütün fotoçarpıcı tüpler ve skintilatör kristalleri bağımsız çalışırlar) için veri iletişim hızı oldukça yüksektir. Blok detektörler ise birkaç foto çarpıcı tüpü bir skintilatör kristal grubu ile eşleştirilir. Işının nereye çarptığını tahmin için bir kodlama şeması kullanılır. İki katmanlı blokta beş foto çarpıcı tüp sekiz skintilatör kristaliyle eşleştirilmiştir.

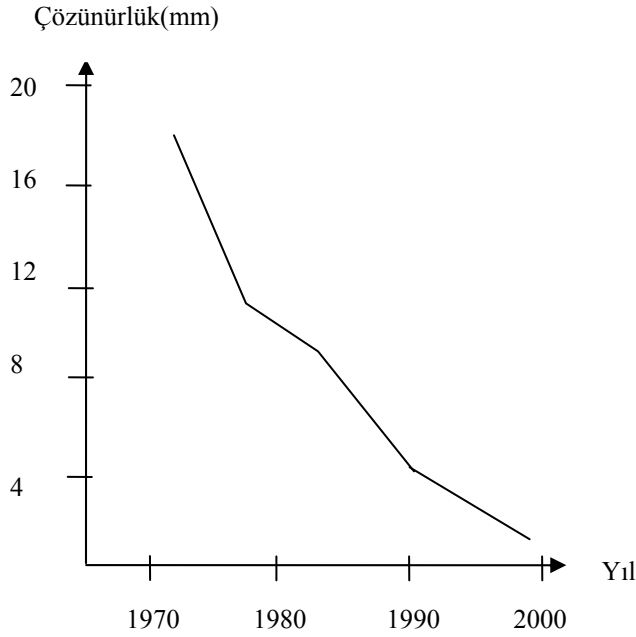
Kurşun yalıtım ile fotonların birden fazla sayılması önlenir. Ayrıca tungsten septa hasta vücudunda oluşan Compton kırılmalarını oluşturan bazı fotonların alınmamasını sağlar. Bu tasarımın hassasiyeti bir çok düzlemde veri alınarak artırılabilir. Bireysel kuplajlı tasarımın çözünürlüğü çok yüksektir. Ayrıca bütün ışık sayıcılar (skintilatörler) ve foto çarpıcı kristaller bir birinden bağımsız çalıştıklarından veri oldukça fazla olarak alınabilir. Bu tasarımın dezavantajları, bir

çok pahalı foto çarpıcıya ihtiyaç duyması, ayrıca dairesel foto çarpıcı tüpleri; dikdörtgensel (kartezyen) şekildeki skintilasyon kristallerine bağlama, olarak söylenebilir.

| Faktör                                                                                                          | Şekli                                                                               | FWHM(full width half maximum)                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| <br>detektör kristal genişliği |    | $d/2$                                                                         |
| <br>Anger mantığı              |    | 0 ( bireysel kuplajda)<br>2,2mm (Anger mantığı)<br>Ampirik olarak alınmıştır. |
| <br>Fotonun doğrusal olmayışı  |    | 1,3 mm (kafatası)<br>2,1 mm (kalp)                                            |
| <br>Pozitron menzili         |  | 0,5 mm ( $^{15}\text{F}$ )<br>4,5 mm ( $^{82}\text{Rb}$ )                     |

Şekil 2.8. PET tomografinin çözünürlüğünü etkileyen faktörler.

Skintilatörleri hasta çevresine yerleştirebilmenin modern yolu, blok detektör tasarımıdır. Bu tasarımda, bir çok foto çarpıcı tüp, bir skintilatör bankası ile eşleştirilir ve kodlama yöntemi ile hangi skintilatörün etkin olduğu tespit edilir. İki katmanlı blokta 5 foto çarpıcı, 8 Skintilatör üzerine monte edilmiştir. Her zaman dış 4 foto çarpıcı tüpten birisi ateşlerse 511 keV'luk foton iki kristalden birine çarpacaktır ve merkezdeki foto çarpıcı tüp yardımı ile hangi tüpe çarptığı belirlenebilir. Blok detektör tasarımı çok katmanlı kameralar için fazla pahalı olmayan ve pratik olandır. Kod çözücü hataları, uzaysal çözünürlüğü azaltır. Bu nedenle bir çok blok kodlama yöntemi, analog kodlama yöntemini kullanır.

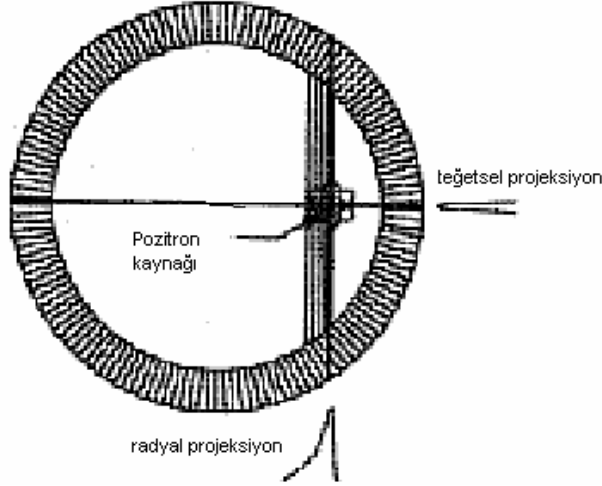


Şekil 2.9. Çözünürlüğün evrimi. Son on yılda PET çözünürlüğü 9mm'den 2 mm'ye doğru iyileştirilmiştir. Bu iyileşim grafikte gösterilmiştir. Yapay örneklemede gözüktüğü gibi daha önce görüntülenemeyen sıcak benekler, çözünürlük iyileştirmesiyle görüntülenebilmiştir.

### 2.3.1 Çözünürlüğü etkileyen fiziksel faktörler

PET'in uzaysal çözünürlüğünü etkileyen faktörler şekil 2.8'de verilmiştir. Detektör hacmi, sistemin geometrik çözünürlüğünü belirleyen önemli faktördür. Blok tasarım kullanıldığında, BGO detektörlerinde geometrik çözünürlük zayıflaması 2,2 mm'dir. Zayıflama muhtemelen BGO'nun sınırlı düşük çıkışı ve her bir fototüpe düşen kristal sayısının oranıdır. Bazı yüzeysel kinetik enerji hareketinden dolayı (Fermi hareketi) yok olma sürecine giren fotonların açısı  $180^\circ$ 'den farklı sapabilir. Detektör halkasının çapı arttığında, bu sapma, çözünürlüğü artan oranda etkiler. Pozitronun çekirdekten ayrılıp, yok olma sürecine girmeden önce hareket etmesi (gezinmesi) uzaysal çözünürlüğün bozulmasına yol açar. Bu mesafe çekirdeğin özelliğine bağlıdır. Örneğin;  $^{18}\text{F}$  Florin izotopunun (Bir çok PET uygulamasında kullanılır) gezinmesi diğer izotoplara göre oldukça kısadır. Bu verilerin ışığında, PET-600 tomograf için 2 mm detektör çözünürlüğü ve 2,6 mm oluşturulan görüntü

Çözünürlüğü değerini tahmin edebiliriz. Fakat bir çok ticari tomograf cihazları blok detektör tasarımı kullanmakta ve çözünürlüğü 5 mm üzerindedir.



Şekil 2.10. Merkez dışı olaylarda çözünürlük astigmatı. Anhilasyon ışınları kristallere farklı derinliklerde etkilerler, bundan dolayı çözünürlük bütün yönlerde, özellikle görüntü kenarlarında, aynı değildir. Yeni nesil PET cihazlarında bu tip astigmatizm dikkate alınmaktadır.

Çözünürlük gelişimi tomografinin en önemli noktasıdır. Nesne kenarlarındaki çözünürlük iki nedenden düşüktür. Birinci neden merkezde olmayan yok olma farklı yolları kat etmelerini gerektirir. Bu özünürlük kaplama fonksiyonunun transaksiyel düzlemin yarı çapı boyunca uzatılmasına neden olur. Çözünürlük kaybı, kristal yoğunluğu ve tomografi cihazının halka çapına bağlıdır. 60 cm çaplı bir cihazda çözünürlük, eksenden 10 cm'ye kadar iki katı kadar bozulabilir.

Rastlantısal devresi, rastlantısal olayları 10 ns'den 20 ns'ye kadar bir çözünürlükle belirleyebilmelidir. Zamanlama koşulu, detektör halkalarının bir taraftan diğer tarafa uçuş süresi olan 4 ns'dir ve kristal-kristal çözünme zamanı tipik olarak 3 ns'dir. En önemli gereksinim oldukça fazla olan kortlardaki rastlantısal olayları tespit etmektir (Septa kullanarak 24 katmanlı kamera için 1,5 milyondan fazla, Septasız 18 milyondan fazla).

Her bir kort (kristal-kristal) kombinasyonu için rastlantısal devre oluşturmak pratik değildir. Cihaz üreticileri bu problemi paralel organizasyon ile çözmektedirler. Yüksek frekanslı saat darbesi (tipik olarak 4-200 MHz) erişen fotonların erişim

zamanının tespiti için kullanılır. Aynı zamanda rastlantısal olayların tespiti için dijital rastlantısal işlemci zaman tespitlerinden yararlanarak kısa sürede yapılabilir.

Maksimum olay sayısı özellikle septasız sistemlerde önemlidir. Tek kristal detektörlerde maksimum oran, flüoresan skintilator (kıvılcım yayıcı)'ların ömrü (her bir olay için tipik olarak 1  $\mu$ sn) ile sınırlıdır. Skintilator kristallerin geride kalanları varsa olay oranı artabilir (kristal sayısı x 1  $\mu$ sn). kristalleri beraberce birleştirme, maksimum olay sayısı oranını düşürür. Çünkü flüoresan ömrü tüm blok için geçerli olur.

#### Rastlantısal Olaylar:

Eğer iki yok olma olayı cihazın çözünürlük zamanı içinde olursa (yani 10 ns), rastlantısal olaylar tomografi aktivitesine hatalı veri eklenmesine neden olur ve yüksek olay oranlarında önem arz eder. Bu hata, kord'dan korda bazında düzeltilebilir. Rastlantısal olmayan olay oranları her bir kristal çift için ölçülür. Ölçülme işlemi, rastlantısal zaman penceresinin ötesindeki olayları gözlemleyerek yapılır. Bir kristal çiftine denk olan bir  $R_{ij}$  kordu, rastlantısal oran:

$$R_{ij} = r_i \times r_j \times 2\tau \quad R_{ij} = R_{ji} \quad (2.3)$$

$r_i$ ,  $r_j$  kristal i ve j'nin olay oranı,  $\tau$  rastlantısal pencere genişliğidir. Nesnelerin aktivite oranı artarsa, her bir detektördeki olay oranı artar.

#### Hassasiyet:

Tomografi cihazının hassasiyeti, cihazın rastlantısal (coincident: aynı anda zıt detektörlere gelen foton) olayları ne kadar verimlilikle algıladığına bağlıdır. Bu 20 cm çapındaki radyo çekirdek konsantrasyonu bilinen içi su dolu bir silindirin görüntü alanına (FOV) yerleştirilerek ölçülür. Bu silindir Fontom olarak anılır. Bu silindir Fontom cihaza yerleştirilir ve rastlantısal olay oranı ölçülür. Yüksek hassasiyet önemlidir, çünkü emisyon görüntülemeye her bir olay tek tek kaydedilmektedir ve olay sayısı CT tomografiden 1000 kat daha fazladır. 511 keV fotonlar için bir çok

cihazın verimliliği %90'ın üzerindedir. Böylece hassasiyet çoğunlukla geometrik faktörlere bağlıdır. Cihazın gördüğü katı açı şöyle hesaplanır;

$$S = \frac{A \varepsilon^2 \gamma * 3,7 \times 10^4}{4\pi r^2} (\text{olay / s}) / (\text{mCi/ cc}) \quad (2.4)$$

$r$  : Cihazın yarı çapı(cm)

$A$  : Objedeki noktadan detektör materyalinin görünen alanı;  $2\pi r^2$ (eksenel boşluk)(cm<sup>2</sup>)

$\varepsilon$  : Skintilator verimliliği

$\gamma$  : Zayıflama faktörü

Tek bir katman için, 2 cm eksenel kristali olan 90 cm çaplı bir cihazın hassasiyeti 15000 olay/s (μCi/ml). (1 cm kalınlığı ve 20 cm çapı olan aktif disk için). Tek katmanlı 20 cm çaplı septalı veya septasız bir cihaz içinde hassasiyet aynıdır. Septa, farklı katmanlardan gelen fotonların detektörlere gelmesini sağlar. Modern, çok katmanlı cihazlar bitişik yüzeylerden gelen fotonların da algılanmasını sağlayacak şekilde septalı olarak tasarlanmaktadır. Bu, hassasiyeti artırır. Bu artış aynı zamanda kırılmayı da artırır. Bu ise istenmeyen bir durumdur. Hassasiyette iyileşme 7 kat gürültü iyileştirmesinden sonra ise 4 kattır. Gürültüye eş değer hassasiyet  $S_{NE}$  şöyledir;

$$S_{NE} = \frac{\left( \text{gerçek olaylar} \right)^2}{\text{gerçek} \times \text{saçınım} \times \text{random}} \quad (2.5)$$

PET'in İstatistiksel Özelliği:

Pozitron-emisyon izotopunu, kantitatif olarak uzaysal dağılımını haritalarken karalıtdan kaçınmak için yeterli uzaysal çözünürlüğü sağlayabilmek gerekir. Buna ilave olarak yeterli miktarda veri olması gerekir. Böylece tracer konsantrasyonunu rahatça belirleyebiliriz. Elde edilebilir veri, biyomedikal birikime, görüntüleme sisteminin hassasiyetine ve enjekte edilen radyoaktivitenin miktarına bağlıdır. Geri

oluşturmadan dolayı hatanın yayılması, hata miktarının artmasına neden olur. Bu artış emisyon geri oluşumu (PET, SPECT) için;

$$\% \text{ belirsizlik} = \frac{1.2.100 \left( \text{toplam olay sayisi} \right)^{3/4}}{\left( \text{toplam olay sayisi} \right)^{1/2}} \quad (2.6)$$

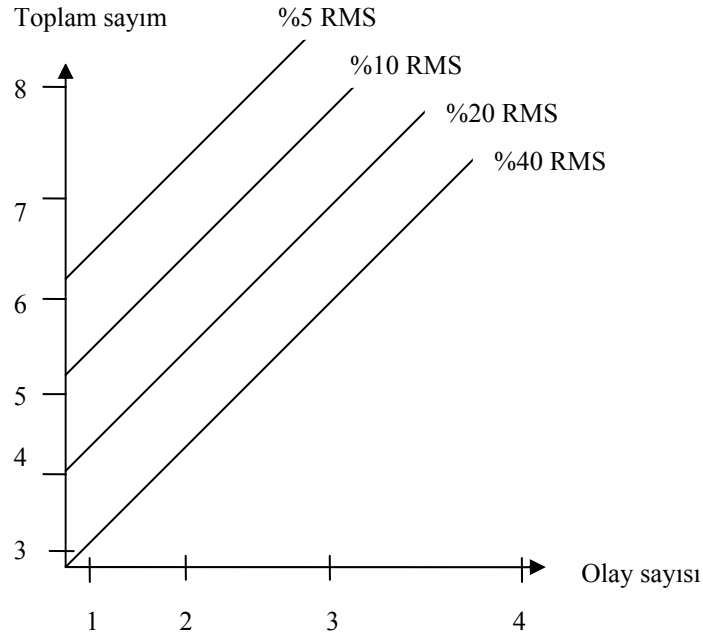
Düzgün dağılım için yüksek çözünürlüklü sistemde gerekli olay sayısı ile düşük çözünürlüklü sistemde gerekli olay sayısının oranı, iki sistemdeki efektif çözünürlük elemanlarının oranının 3/2'nci kuvveti ile doğru orantılıdır. Denklem 2.5 ve 2.6. da, görüntüdeki toplam piksel sayısı kullanılmamalıdır. Buradaki piksel sayısı efektif çözünürlük sağlayan hücre sayısıdır. Efektif çözünürlük hücre sayısı şöyle bulunur. Her bir elemanın içindeki aktivite miktarına göre çözünürlük elemanları ağırlık kazanır. Bu çözünürlük elemanlarının kapladığı toplam eleman sayısı efektif çözünürlük hücre sayısıdır. Aktivitenin birkaç çözünürlük hücresinde (Ör: 100 olay hücre ) olduğunu düşünelim ve geri kalan 10.000 hücrenin her birine bir olay düşsün bu durumda efektif çözünürlüğe sahip hücre sayısı 100'den azdır. Bu durum için yukarıdaki denklemi modifiye etmek gerekir.

% belirsizlik =

$$\frac{1200 \left( \text{çözünürlük hücre sayısı} \right)^{3/4}}{\left( \text{hedefteki herbir çözünürlük hücre sayısına düşen olay sayısı} \right)^{3/4}} \quad (2.7)$$

İyi çözünürlük, algılanan olay sayısını çok fazla artırmadan, verimli sonuçlar alınmasını sağlar. Bir objeyi algılamada ihtiyaç duyulan olay sayısı kontrastın karesinin tersiyle orantılıdır.

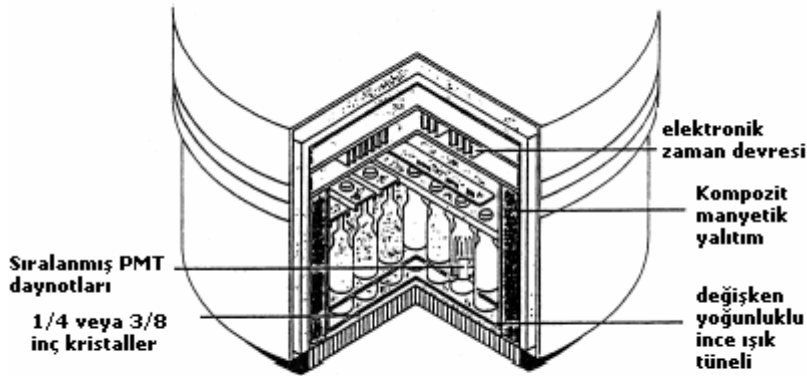
$$\text{Olay sayısı} = \frac{1}{\text{Kontrast}^2} \quad (2.8)$$



Şekil 2.11. Logaritmik olarak(Log10) istatistiksel gereksinim(y-ekseni) ve uzaysal çözünürlük(x-ekseni). Görüntü için algılanan olay sayısı ile çözünürlük eleman sayıları arasındaki ilişki değişik doğruluk seviyelerinde grafiksel olarak gösterilmiştir. Bu ilişki sabit kalınlıktaki yüzeyler içindir.

### 2.3.2 Değişik detektör konfigürasyonları

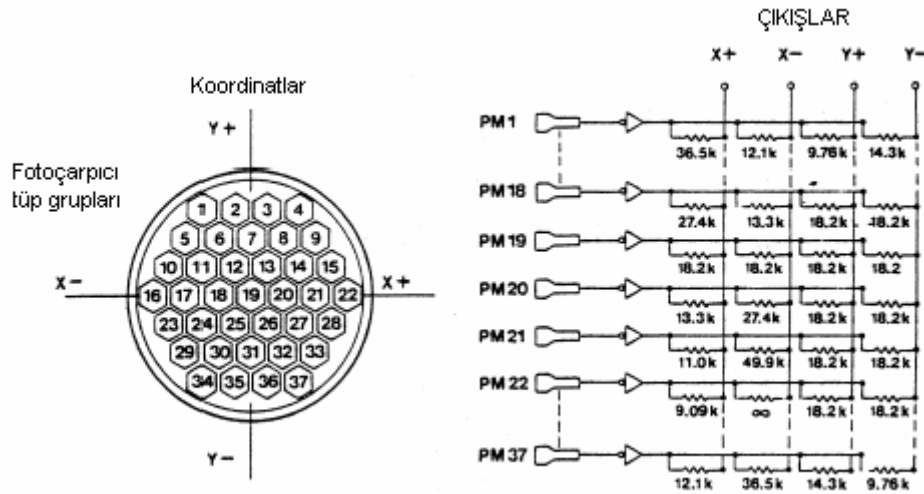
Klinik nükleer tıpta daha çok NaI (TI) kristalleri kullanılmaktadır. Araştırma grupları tarafından diğer maddeler de kullanılmaktadır. Fakat bunların yapısı oldukça karmaşıktır. İlk yüzey görüntüleme cihazı hareketli bir proba sahip ve düz çizgili tarayıcı olarak bilinir. Prob önceleri NaI (TI), sonraları yarı iletken malzemeden yapılmış detektöre sahiptir. Detektör uygun kalınlıkta ve uygun delik hacmine sahip (genelde 2 inç kurşun veya daha fazla) kolimatörlerle donatılmıştır. Kolimatörlerin septa boyutları görüntülenecek organın hacmine ve derinliğine uygun olarak seçilir. Kolimatörlü detektör hasta etrafında sabit hızla çevrilir. Detektörden gelen darbeler görünür ışığa ya (ince tabaka üzerine sanal işaretlerle) işaretlenir veya bir film üzerine düşürülür. Bu detektör her bir zamanda yalnızca bir spot görür. Bu nedenle ancak, aktivitedeki küçük değişimler kaydedilebilir. Bu cihazla küçük organlar, troid bezleri gibi, iyi bir şekilde görüntülenebilir. Bu cihazın yeni versiyonları ile kemik görüntülemesi de yapılabilmektedir.



Şekil 2.12. Anger kamera detektör tasarımı. Resimde kameranın kafa kesiti görülmektedir. Aşağıya doğru duran nesneler aktif kısımlardır.

Detektör boyutlarını büyütmek için birden fazla prob kullanılabilir. Hastanın iki zıt tarafını aynı anda görüntüleyen çift problu cihazlar da bunlardandır. Daha büyük görüntü alanı oluşturabilmek için çoklu kristaller, oto floroskop kristaller, dikdörtgensel şekilde dizilmiştir. Her birinin bir foto çarpıcı tüpü olunca, oldukça çok PMT'ye ihtiyaç olmuş böylece ışık tüpleri ile tasarlanmıştır. Birincisi satırı ikincisi de sütunu gösterecek şekilde her bir kristal PMT ile tüpe bağlanmıştır. Kristaller kırılmış fotonların bir kristalden diğerini etkilememesi için kurşun septalarla ayrılmıştır. Çok sayıdaki PMT ve kristalden dolayı cihaz oldukça hızlıdır. Fakat kristal boyutlarından dolayı çözünürlük kabadır. Çözünürlüğü arttırmak için kolimatörler baskı altında kalır (jiterlenir) böylece kristaller daha geniş bir alanı görebilirler. Büyük NaI (TI) kristaller üretildikten sonra kullanımı da çeşitlenmiştir. Bunlardan biri de Anger kameralarıdır (Şekil 2.12)[1]. Bu kameralar büyük bir kristalle vücudun belirli bir bölgesini taramak için büyük çapta bir kristal kullanır. Kristallerin gerisindeki foto çarpıcılar, çarpan fotonun yerini belirleyebilecek şekilde bağlanmışlardır (Şekil 2.13). Bir foton kristali çarptığında, bu birkaç PMT tarafından algılanır. Fotonun pozisyonu her bir tüpten elde edilen sinyalin, genliği karşılaştırılarak ve enerji miktarı bu sinyallerin toplanması ile elde edilir. (Z darbesi). Eğer Z darbesi diskriminatörden geçerse sinyal kaydediciye veya A/D

dönüştürücüye oradan da bilgisayara aktarılır. Anger kamera nükleer tıpta en çok kullanılan kamera tipidir.

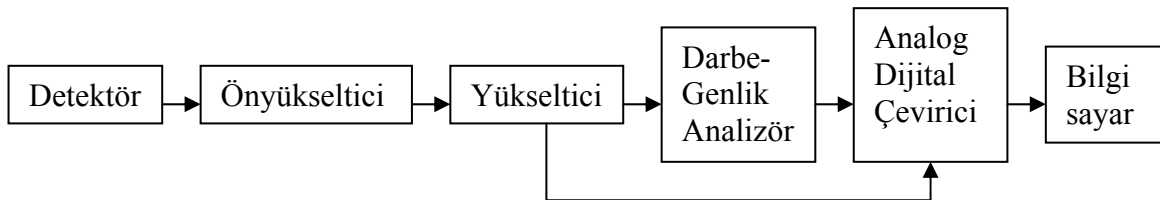


Şekil 2.13. Anger kamerada bir dizin PMT'lerin X ve Y çıkışlarına bağlantılarının gösterilmesi

TC 99m kullanılarak 140 keV radyasyon için optimize edilmişlerdir, fakat kolimatörleri, yüksek ve alçak enerji seviyelerine, ayrıca yüksek ve düşük hassasiyete ayarlanabilir. Önceki sistemler dairesel yapıya sahipken yeni sistemler kare veya dikdörtgen yapıya sahiptir.

### 2.3.3 Tarama için yardımcı ekipmanlar

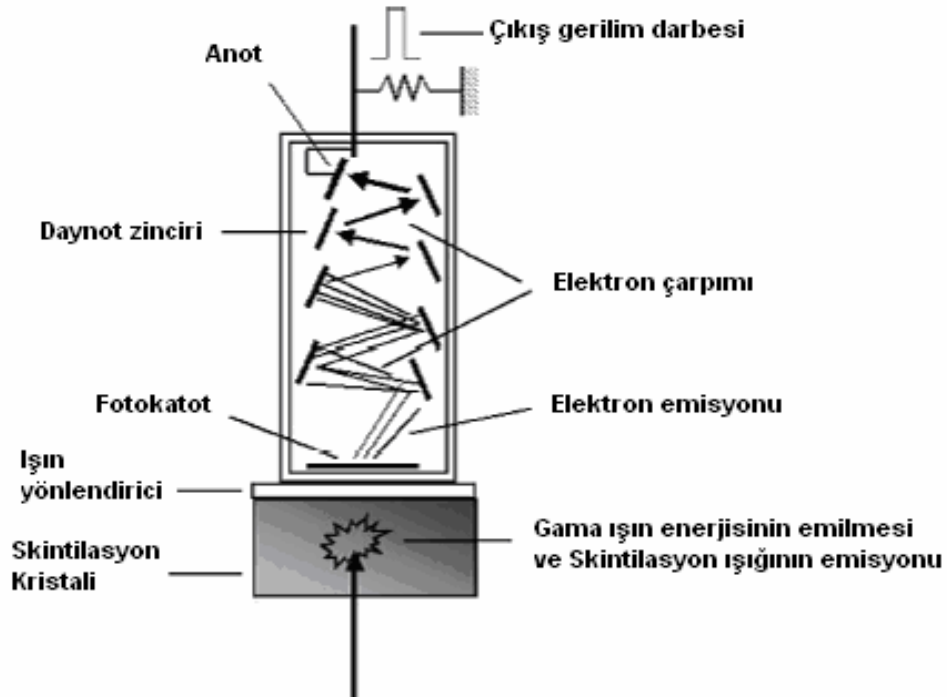
Nükleer tıpta kullanılan detektörler ön yükselticilere, yükselticilere ve darbe şekillendiricilere, algılanan fotonun enerji durumunu bir sinyal şeklinde üretebilmek için bağlanırlar. Şekil 2.14'de bu şematik yapı gösterilmiştir. Enerji diskriminatörü referans radyonükleide göre belirlenen bir düşük ve yüksek pencere limiti vardır. Bu pencere aralığındaki enerjiye sahip fotonların oluşturduğu gerilimler alınır, diğerleri alınmazlar.



Şekil 2.14. Genel detektör sisteminin şematik gösterimi. NaI(Tl)-PMT detektör sistemlerinde yüksek voltajlı güç kaynağına ihtiyaç vardır.

Foton çarpıcı tüpler, kuartz pencereli ve foton algıladığında elektron salıveren bir yapıya sahiptir (Şekil 2.15). Salıverilen elektron sayısı, üzerine düşen ışık miktarı ile doğru orantılıdır. Elektronlar özel bir boşlukta foton çarptığında ilk dynoda gidecek şekilde yataklanmıştır. Dynodlar elektron çarptığında, elektron salıverecek şekilde tasarlanmıştır. Daynotlarda, bir daynottan, elektronu, bir sonraki daynoda çekebilecek gerilim vardır.

Yüzey kaplaması yalnızca elektron salıvermez, aynı zamanda bir çarpıcıdır da, 10 ile 12 dynodun seri bağlanması ile yaklaşık  $10^6$ 'lık bir çarpma katsayısı oluşur. Böylece birkaç elektronla  $10^{-12}$  Amperlik bir akım oluşturulmuş olur. Bir dynottan diğerine gerilim düşümü olmazsa elektron geçişi olmamış ve sayımda yapılmamış demektir. Görüntülenen objenin radyoaktivite dağılımını doğru tespit edebilmek için sistemin ilk değerleri doğru seçilmelidir ve aralıklarla test edilmelidir.



Şekil 2.15. Foto çarpıcı tüpün (PMT) şematik gösterimi. Her bir dynot ve anot tüp soketinde farklı yerlere bağlanır. Tüpün içi boştur. Dynotlar, elektron çoğaltımı için oksitli kaplamalı yapıldıkları ve bakırdandır.

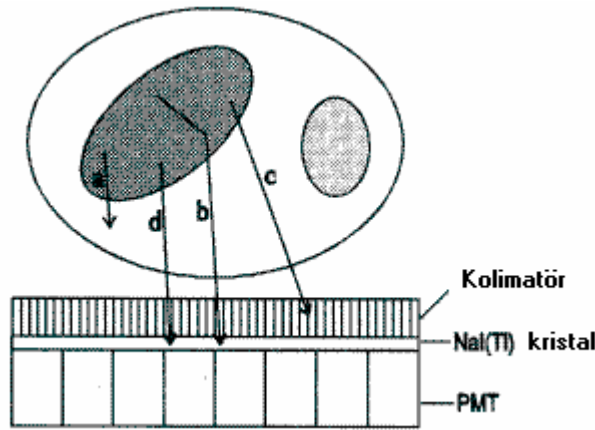
## 2.4. Tek Foton Emisyonlu Bilgisayarlı (SPECT) Tomografi

SPECT tomografi beyindeki kan akışına direkt olarak bakan ve beyin aktivitesine (metabolizmasına) dolaylı olarak bakan gelişmiş bir nükleer tıp çalışmasıdır. Bu çalışmada radyoaktif izotop (oldukça fazla uyarı ışıklarına benzeyen) beyin hücreleri tarafından alına bilinen bir maddeye ilişitirilmiştir. Bu karışımın küçük miktarı hastanın damarına enjekte edilir. Bu karışım kan akışıyla bütün vücuda yayılır ve beyindeki belirli alıcılar bu karışımı alırlar. Daha sonra hasta bir sedyeye yatırılır ve 14–16 dakika gama kamerası hastanın kafasının etrafında yavaşça çevrilir. Kamera radyo izotopun nereye gideceğini algılayacak kristallere sahiptir. Kamera bilgileri bir süper bilgisayara aktarılır. Ve süper bilgisayarda bu verileri görüntüye dönüştürür. Yeterli miktarda beyinden veri alınmasıyla beyindeki kan akışı veya metabolizma haritası oluşturulur. Bu haritalarla doktorlar belirli seviyedeki beyin aktivitesine göre hastada psikolojik veya nörolojik hastalık olup olmadığı teşhisini koyar. Kararlı olmayan atomlar gama ışını yadıklarından ve bu ışında ışık olarak bulundukları yerde çürüdüğünden SPECT çalışmalarında radyoaktif karışımlı maddeler kullanılır. Bunlara Radyofarmasötikler (Radiopharmaceutial) denir. Durağan olmayan atom her zaman kararlı olmaya çalışır. Bunun için sürekli değişime girer ve redüksiyona uğrar. Tabi durağan hale varıncaya dek çürümenin her bir adımında gama ışını yayar. Bilim adamları bu çürümeleri bir film veya özel kristallerle algılar ve beynin her bir bölgesinden gelen bu ışınımın yoğunluğunu kaydeder. Bu durağan olmayan atomlar iz bırakıcıdırlar. Bunlar, en aktif ve en çok kan akışı olan hücrelerde iz bırakırlar[2].

### 2.4.1. SPECT görüntüleme yöntemi

SPECT'in görüntü oluşturma işlemi basit olarak şekil 2.16'da gösterilmiştir. Hasta tarafından alınan radyofarmasötiklerden yayılan gama ışınları tek veya çoklu kolimatörlü radyasyon detektörleri tarafından algılanır. Saçılan ışıklar vücut dokularından geçerken bazı değişime uğrar. Fotoelektrik etki, ışınların bütün enerjisini emer ve hasta vücudundan ayrılmasını engeller. Diğer bir ana etkileşim de Compton etkisidir. Bu etkileşimde ışın, enerjisinin bir miktarını boş elektronlara verir. Orijinal ışın azalmış enerjisi ile kırılır, yani farklı bir yöne doğru hareket eder.

Vücuttan saçılan ışınlar kırınımına uğramamış ve uğrayanların hepsini de kapsamamaktadır. SPECT`te kullanılan radyonükleidler TC-99m, 140 keV ve TI 201 ~ 70 keV enerjiye sahiptirler ve çift ışın üretme olasılığı sıfırdır. Piyasada kullanılan SPECT sistemlerinin çoğunun radyasyon detektörü NaI(Tl) kıvılcım, titreşim (Skintilasyon) detektörlerdir. Nükleer tıpta en önemli gelişme titreşim kameralarının (Anger kameraları) bulunmasıdır. Bu kameralar NaI(Tl) kristallerinden ve tipik olarak 40 cm çapa sahip olarak üretilmektedir. Foto çarpıcı tüpler (PMT) titreşim kristallerinin hemen arkasına yerleştirilmiştir. PMT`ye gelen sinyalleri elektronik devre işler ve titreşim kristallerinin hangisine foton çarptığını belirler. Ayrıca titreşim kameraları gelen ışınların kırınımına uğramayanları ve küçük açıyla kırılanları belirleme özelliği olan bir elektronik devresi bulunmaktadır.



Şekil 2.16. Geleneksel nükleer tıp görüntüleme sistemi. İçeride dağılmış radyo aktif maddelerin salıverdiği gama ışınları ya fotoelektrik veya kırınım olayına karışır. Kolimatörün kabul açısından farklı açılarda gelen fotonlar kurşun kolimatörler tarafından emilirler. Kolimatörlerin kabul açısında gelen veya kolmatörlere çarpmayan fotonlar algılanırlar.

Titreşim kameraları optik sistemlerdeki lensler gibi NaI(Tl) kristallerin önüne yerleştirilmiş bir kolimatörden oluşmaktadır. En çok kullanılan kolimatör tipleri, kurşun septalarla ayrılmış bir çok paralel deliklerden oluşmaktadır[35]. Kameranın geometrik yapısı, uzunluğu, hacmi ve kolimatör aparatlarının şekli, titreşim kristalleri tarafından algılanan ışının yönünü belirler. Böylece aynı zamanda kolimatörün geometrik yanıt fonksiyonunu belirler. Kaynak ile kolimatör arasındaki uzaklık arttıkça geometrik yanıt fonksiyonunun genişliği artar yani uzaysal görüntü kalitesi bozulur. Kolimatör deliklerinden geçemeyen ışınlar kurşun olan kolimatör

duvarlarınca emilir. Genel olarak, algılama verimliliği, kolimatorün yanıt fonksiyonunun genişliğinin karesi ile doğru orantılıdır. Uzaysal çözünürlükle algılama verimliliği arasındaki bu çelişki SPECT sistemlerinin ana özelliğidir. Hastaya verilecek genel radyasyon miktarının değerleri uluslararası standartlar çerçevesinde belirlenmiştir. Özel doz miktarını belirlemek ise görüntüleme süresi, kolimatorün verimliliği, algılanan ışın miktarları gibi parametrelere bağlıdır. Bu parametrelerin çokluğundan dolayı SPECT'te uzaysal çözünürlük oldukça zayıftır. Örneğin tipik bir beyin SPECT'i 500K'lık sayım/görüntü dilimine ve 8 mm civarında da uzaysal çözünürlüğe sahiptir. TI-201 kullanarak bir kardiyak SPECT'inde her bir katmanda 150K'lık bir sayım/katman ve yaklaşık 18 mm'lik uzaysal çözünürlük elde edilmiştir [3].

Kullanılan Radyo-farmasötiklerin bio-kinetik yapısı, hastanın anatomisi, veri toplayan cihazın yapısı, ön işlem yöntemleri, görüntü oluşturma yöntemleri ve uygulanan telafi yöntemleri SPECT görüntünün kalite ve nicel doğruluğunu etkileyen faktörlerdir. Bu faktörler tam olarak kavranılmadan SPECT tam anlamıyla anlaşılmış olamaz. Aşağıdaki konularda bunları ayrı ayrı incelenecektir.

#### **2.4.2. SPECT görüntülerini etkileyen fiziksel ve aygıtsal faktörler**

SPECT'te görüntü kalitesini etkileyen bir çok fiziksel ve aygıtsal faktör vardır. Bu faktörlerin karakteristiğini ve etkilerini birkaç yeniden inceleme makalelerinde bulabiliriz[36]. Hasta vücudundan çıkan gama ışınları vücudun içinde fotoelektrik emilmesine neden olur ve algılanan verilere katkı yapmaz veya bazıları Compton kırılmasına uğrayarak hem enerjilerinin bir kısmını kaybederler hem de esas gidecekleri yönden farklı bir yöne yönelirler. Fotoelektrik ve Compton kırınımaları SPECT'in kalite ve nicel bakımdan doğruluğunu etkilemektedir.

Foton zayıflaması, foto elektrik ve Compton ilişkileri nedeniyle gerçekte algılanması gereken foton sayısından daha az fotonun algılanması olayıdır. Zayıflama derecesi, doğrusal zayıflama katsayısı (zayıflama ortamının materyal yapısına ve miktarına bağlıdır) ile belirlenir. Örneğin; TC-99m'den saçılan 140 keV'luk ışınların su ve yumuşak dokudaki zayıflama katsayıları  $0,15\text{cm}^{-1}$ 'dir. Bu demektir ki 3,3 cm su

içinden giden 140 keV`luk bir ışının enerjisi 70 keV enerjiye düşecektir. Organların farklılığından hastanın zayıflama katsayısı bölgeden gölgeye göre değişmektedir. Zayıflama katsayısının en fazla değiştiği bölge göğüs bölgesidir. Akciğerler için 0,05  $\text{cm}^{-1}$  ile en düşük, yoğun kemik 0,18  $\text{cm}^{-1}$  ile en yüksek; 140 keV`ta zayıflama katsayısına sahiptirler. X ışını tomografide zayıflama katsayıları dağılımı görüntü oluşturma amaçlıdır. SPECT`te ise zayıflama katsayılarının genişliği ve hastaya göre bu katsayıların değişebilmesi doğru görüntü oluşturmada en büyük zorluklardandır.

Zayıflama için telafi yapılması, SPECT`te kaliteli ve nicel görüntüler elde etmek için kaçınılmazdır. Telafi yöntemleri ile ilgili detaylı açıklamalara geri oluşturma yöntemleri kısmında değinilmiştir. Tam bir enerji ayırt edebilme özelliğine sahip radyasyon detektörleri kırımla gelen düşük enerjili ışınları tamamen almayabilirler. Fakat tipik bit titreşim kamerasında 140 keV`luk bir enerjide çözünürlük %10 düzeyindedir. Bu enerji çözünürlüğü ile titreşim detektörleri tarafından algılanan kırılıma uğramış ışınların, toplam kırılıma uğramış ışınlar oranı, beyinde %20 ile %30, Kardiyak ve vücut SPECT çalışmalarında %30 ile %50 (140 kV enerjiye sahip ışınlar için) bunlara ilave olarak kırılma, Radyo-farmasötik dağılımına, kaynak organın hedef organa uzaklığına, kullanılan enerji penceresinin ve titreşim detektörlerinin enerji çözünürlüğüne bağlıdır. Telafi yöntemleri SPECT`te kaliteli ve nicel görüntüler elde etmek için geliştirilen diğer yoldur. SPECT`teki gelişme, yeni Radyo-farmasötiklerin, yeni aygıtların, yeni geri oluşturma yöntemlerinin aynı zamanda geliştirilmesine ve klinik uygulamalarının yapılmasına bağlıdır. Geleneksel nükleer tıp için geliştirilen çoğu farmasötikler, SPECT`te de kullanılırlar. Bu farmasötiklerin geliştirilmesi ve yöntemleri bizim konumuzun ötesinde olan problemlerdir.

İyot ve teknetyum ile işaretlenmiş yeni farmasötikler beyin perfuzyonunda ve kardiyak çalışmalarında kullanılmaktadır. Ayrıca tanımlanmış antibiyotiklerin ve reseptör ajanlarının kullanımı son zamanlarda keşfedilmiştir. Radyo-farmasötiklerdeki bu gelişmeler (kavrayış dağılımı geliştirilmiş, bio-kinetik özelliği gelişmiş) potansiyel yeni uygulamaları beraberinde getirmiştir. Bir sonraki konuda aygıtsal gelişim ve geri oluşturma yöntemlerine değineceğiz.

### 2.4.3. SPECT aygıtları

SPECT`le ilgili gelişmeleri, kritiğinin yapıldığı son yıllarda yayınlanan makalelerde bulabilirsiniz.[37]. Tipik bir SPECT sistemi bir veya daha fazla radyasyon detektör ünitesi olan ve özel tasarlanarak, farklı projeksiyon açılarından veri elde edebilirler.

Genel olarak SPECT`in aygıtsal yapısı üç ana kategoride toplanabilir:

- 1) Düzenlenmiş çok titreşimli detektörler
- 2) Bir veya daha fazla titreşim kameraları
- 3) Yukarıdaki iki özelliği taşıyan karma sistemli detektörleri

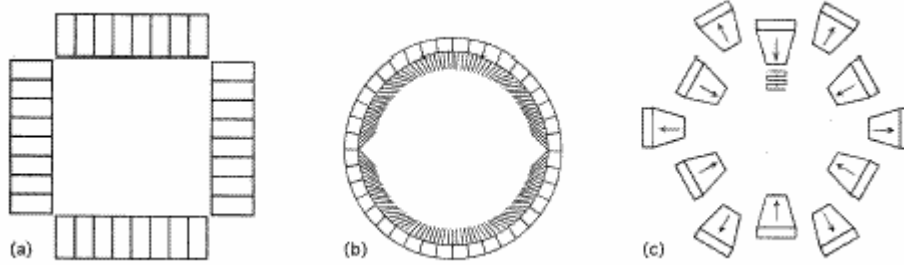
Özel amaçlar ve özel klinik uygulamaları için ayrıca özel kolimotor tasarımları sunulmuştur. Sonraki konularda bunlar incelenecektir[6].

### 2.4.4. Çok detektörlü SPECT sistemleri

İlk tam fonksiyonel SPECT görüntüleme sistemi Kuhl ve Edwards tarafından tasarlanmış ve yapılmıştır [38]. X ışını tomografi yönteminden çok önce şekil 2.17-a`da Mark IV beyin SPECT sistemi gösterilmiştir. Bu sistemde 8 ayrı NaI (TI) titreşim detektörleri dört doğrusal çizgide kare şeklinde oluşturulmuş bir geometriye sahiptir. Projeksiyon verileri, kare detektörü hastanın kafası çevresinde dolaştırılarak elde edilmiştir. Öncü olan Mark IV`ten elde edilen görüntüler uygun geri oluşturma yöntemi kullanılmadan görüntülendiğinde pek etkileyici değildir. Daha sonraları Chou ve diğerleri tarafından Gammatom I geliştirilmiştir [39]. Bu tasarım konsepti dinamik SPECT sistemlerinde [40] ve ticari çok detektörlü SPECT sistemlerinde (Tomomatik-32) kullanılmıştır. Geçen yıllarda sistem tasarımı çok katmanlı SPECT tasarımına da (Tomomatik-896) uygulanmıştır. Bu sistemde 96 titreşim detektörü 8 katman halinde oluşturulmuştur. Sistemin boşluk hacmi değiştirilerek beyin ve vücut SPECT görüntülemesinde kullanılabilmektedir.

Şekil 2.17.b`de Shimadzu şirketinin, Headtome II [Hirose ve diğerleri 1982][41]. SPECT tomografi sisteminin yapısı gözükmemektedir. Burada titreşim detektörleri sabit olarak dairesel dairesel halkalar şeklinde dizilmiştir. Projeksiyon verileri ayrı

detektörlerin önünde bulunan sallanabilen bir grup kolimatör vanaları tarafından sağlanır.



Şekil 2.17. Çok detektör tabanlı SPECT sistemleri. (a) Mark IV sistemi, sekiz bağımsız NaI(Tl)'den oluşan dört dizinli ve kare şeklindedir. (b) Headtome II dairesel detektörlerden oluşmaktadır. Detektörden projeksiyon verileri alabilmek için kolimatörleri değişik yönlere hareket ettirebilecek kanatlar konmuştur. (c) Oniki detektörden oluşan, radyal ve eğimli tarama yapabilen Cleon beyin SPECT sistemi.

1970'lerin sonlarında geliştirilen Cleon beyin SPECT sistemi, Union Carbide şirketi tarafından geliştirilmiştir[42]. Bu sistem iki detektörden oluşur. Ve hem radyal (aksiyel) hem de eğik (tangentially) tarama yapabilmektedir. Orijinal sistemden alınan verilerle elde edilen görüntüler uygun olmayan örnekleme, kötü eksenel çözünürlük, sistem tasarımı ve veri iletimi stratejisini tam olarak dikkate almayan bir geri oluşturma yöntemi gibi nedenlerle pek çekici olmamıştır. Bu sistemin veri geri oluşturma yöntemi [Moore et.al. 1984][43] daha çok geliştirilmiş versiyonu Strichman şirketi tarafından pazarlanmaktadır.

Çok detektörlü SPECT sistemlerinin avantajı, her bir görüntü katmanına düşen görüntü çözünürlüğünün yüksek olması ve hastayı tamamen çevreleyen detektörlerle yüksek sayma kapasitesinin olmasıdır. Dezavantajları ise bitişik olmayan bir veya birkaç yüzeysel görüntü katmanı sağlamalarıdır. Ayrıca bu sistemler kamera tabanlı sistemlere göre daha pahalı olmasıdır. Çok kameralı SPECT sistemleri gelişme gösterdiğinden dolayı, çok detektörlü SPECT sistemlerinin yerini almaktadır. Bundan dolayı detektörlü sistemler kliniklerde daha az bulunmaktadır[7].

#### 2.4.5. Kamera tabanlı SPECT sistemleri

En popüler SPECT kameraları dönen bir ray üzerine monte edilmiş bir veya daha fazla titreşim kameralarından oluşmuştur. Başarılı tasarım aynı zamanda üç ayrı grup tarafından aynı zamanlarda gerçekleştirilmiştir. [Budinger ve Gullberg 1977, Jaszczak ve diğerleri 1977, Keyes ve diğerleri 1977][45]. 1981’de General Elektrik Medikal şirketi tek döner kameralı SPECT sistemini ticari alana sürmüştür. Günümüzde 10’dan fazla üretici firma bulunmaktadır. [ADAC, Elscint, General Elektrik, Hitachi, Picker, Siemens, Sopha, Toshiba, Trionix] ve bir dizi ticari SPECT sistemleri pazarlamaktadırlar.

Kamera tabanlı SPECT sistemlerinin avantajı her yerde bulunabilecek geleneksel nükleer tıpta kullanılan kameraları kullanmalarıdır. Bu sistemler geleneksel düzlemsel ve SPECT görüntülemeye kullanılır. Ayrıca kamera tabanlı SPECT sistemleri, ilgi duyulan organı tamamen çevreleyen oldukça fazla bitişik transaksiyel görüntü sağladıklarından üç boyutlu (3D) görüntü oluşturulmasına olanak sağlar. Bu sistemler kameraların dönme çapını ayarlayarak beyin ve vücut SPECT’inin çekilmesine olanak sağlar.

Dezavantajı ise sayma hız kapasitesinin oldukça düşük olmasıdır. Gelişmiş bir tipik titreşim kamerasının ölçü zamanı %20 oranında (80 K sayım/saniyede) gerçek sayımlardan az sayım yaptırır. Birkaç özel yüksek hızlı sistem aynı sayım oranı kaybını yaklaşık 150 K sayım/saniyede yaparlar. Tek titreşimli, kameralı SPECT sistemlerinin her bir görüntü katmanı için duyarlılığı, çok detektörlü SPECT sistemlerine göre oldukça düşüktür.

Son zamanlarda çok kameralı SPECT sistemleri popüler olmuştur. İki kameralı [Jaszczak ve diğerleri ][45] üç kameralı [Lim ve diğerleri 1985][46] ve dört kameralı sistemler, kamera sayısına göre her bir görüntü katmanının duyarlılığı da artmaktadır. İki kameralı sistemler, kameralar karşılıklı yerleştirilmiş, tüm vücut taraması ve SPECT için kullanılabilir. Kameralar bir diğerine dik yerleştirilmiş sistemlerde özellikle Kardiyak SPECT’inin elde edilmesinde kullanılır. Kamera sistemlerinin

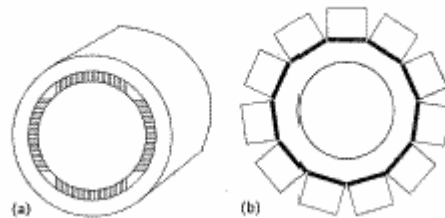
duyarlılığı, fan , koni, astigmatik tipleri gibi iç bükey delikli kolimator kullanılarak arttırılabilir.

#### 2.4.6. Farklı SPECT sistem tasarımları

Yukarıdaki iki kategoriye de uymayan özel birkaç SPECT sistemi vardır. Bunlar ticari olarak da piyasada bulunan CERESPECT (daha önce ASPECT olarak bilinir) [Genna ve Smith 1988][47] özel beyin SPECT sistemidir. Şekil 2.18-a da gösterildiği gibi tek bir sabit halka şeklinde bütün beyni çevreleyebilecek bir yapıya sahiptir. NAI (TI) kristalli detektörlerden oluşmaktadır.

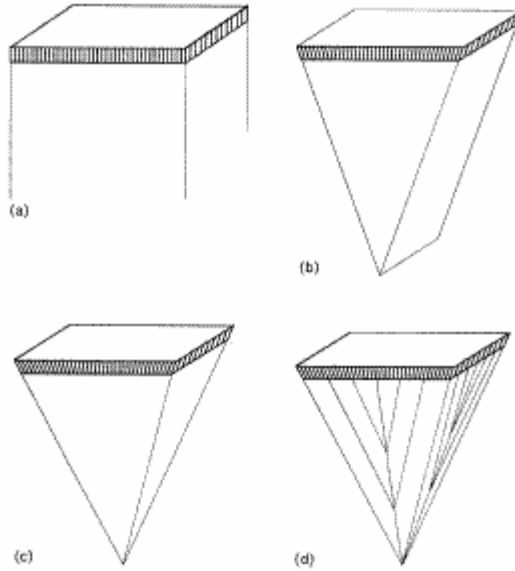
Kristal kameraların arkasına, PMT'ler ve kristale çarpan fotonun enerjisi ve yerini tespit edecek elektronik devreler dizilmiştir. Paralel delikli dilimlenmiş dairesel kolimatörler dairesel hareket ettirilerek projeksiyon verilerinin alınması sağlanır. Benzer sistem Larasson ve diğerleri tarafından 1991'de İsveç'te de gerçekleştirilmiştir.

Birçok SPECT kamera sistemleri değişik laboratuarlarda geliştirilmektedir. Bunlar hastayı çevreleyen küçük titreşim kameralarından oluşmaktadır. Karma tasarım çok detektörlü sistemlerde, sistem tasarımında esneklik getirdiğinden avantaj sağlamaktadır. Şekil 2.18-b' deki sistem Michigan Üniversitesi tarafından geliştirilen 11 detektör modüllü, hasta kafatasını çevreleyen halka şeklinde bir yapıya sahiptir. Her bir detektör modülü 44 adet bir boyutlu çubuk üzerine NaI (TI) monte edilmiş titreşim(skintilator) kameralarından oluşmaktadır.



Şekil 2.18. Sıra dışı bir SPECT sistem tasarımı. (a) tek bir sabit halkalı NaI(TI) kristalden oluşan döner halkalı beyin SPECT detektörü, CERESPECT . (b) yarıklı döner halkalı kurşunlu, 11 modüllü, beyin SPECT detektörü, SPRINT.

Projeksiyon verileri detektör karkası üzerine monte edilmiş dairesel kurşun halkalar arasındaki ince yarıklar arasından geçen fotonlardan elde edilir. Benzer bir sistem Iowa Üniversitesinde [Chang ve diğerleri 1990][48] tarafından her biri 4 çubuk üzerine monte edilmiş 22 detektör modüllü bir sistem geliştirilmiştir. Bu sistemde odaklanmış döner kolimatörlerle projeksiyon verileri alınmaktadır. Arizona Devlet Üniversitesinde farklı bir SPECT sistemi geliştirilmiştir. [Milster ve diğerleri 1990][49] bu sistem 20 modüllü titreşim kameralarından oluşmaktadır. Kameralar hastanın kafatasını çevreleyen yarım küre şeklinde [Rowe ve diğerleri 1992][50] tasarlanmıştır. Projeksiyon verileri (kamera dizinleri üzerine monte edilmiş) küçük deliklerden geçen fotonlardan elde edilir.



Şekil 2.19. Kamera tabanlı SPECT sistemlerinde kullanılan kolimatör tasarımları. (a) En çok kullanılan paralel delikli kolimatörler. (b) Fan-beam kolimatörler. Bunlarda kolimatör delikleri, dönüş eksenine paralel olan bir çizgi üzerine düşerler. (c) Kolimatör delikleri bir noktaya düşen, Cone-beam kolimatör. (d) Kolimatör delikleri değişik odak noktalarına düşen,değişken odaklı kolimatörler .

#### 2.4.7. SPECT sistemleri için özel kolimatör tasarımları

Geleneksel nükleer tıptaki görüntüleme gibi, kamera tabanlı SPECT sistemlerinde de genellikle paralel delikli kolimatörler kullanılır. Tarama verimliliği ile uzaysal

çözünürlük arasında paralel delikli kolimatörler için olan ters ilişki, SPECT'teki en büyük sınırlayıcı faktördür. SPECT sistemini geliştirmek bu iki ilişki arasındaki bağıntıyı optimize etmeye bağlıdır. Bu amacı yakalamak için gelen ışınların algılanma açısını arttıran iç bükey kolimatörler geliştirilmiştir. Bunlar çözünürlükten ödün vermemektedir. Örnek olarak fan-beam (ışın demeti) (Jazsczak 1979, Tsui ve diğerleri 1986)[51] cone-beam (konik ışın demeti) (Jazsczak ve diğerleri 1987)[52], astigmatik ve geçen yıllardaki değişken odaklı fan-beam kolimatörlerde, kolimatör delikleri dönüş eksenini üzerindeki çizgide toplanırlar[53]. Cone-beam de tek bir noktaya toplanır. Değişken odaklı sistemlerde de değişik noktalarda toplanabilir. Aynı uzaysal çözünürlüğe sahip fan-beam ve cone-beam kolimatörlerin, paralel delikli kolimatörlere göre tarama verimliliği 1.5, 2 kat daha fazladır[10].

Tarama verimliliğindeki beklenen kazanç ve buna karşılık görüntüdeki gürültü düşüklüğü iç bükey kolimatörlerin kullanılmasındaki temel nedenlerdendir. Tarama verimliliğinin artmasına karşın iç bükey kolimatörlerin SPECT'te kullanılması yeni problemler ortaya çıkarmaktadır. Şekil 2.16'da görüldüğü gibi tarama verimliliğini arttırırken görme alanını kısıtlamaktadır. Bu nedenle iç bükey kolimatörler beyin ve kalp gibi küçük organ görüntülemesinde kullanılabilir. (Gullberg ve diğerleri 1991, Tsui ve diğerleri 1986)[54]. İç bükey kolimatör kullanılması özel veri alma yöntemlerine ve özel görüntü oluşturma yöntemlerine ihtiyaç duyar. Örneğin cone-beam tomografide tek bir dairesel yörünge kullanılarak elde edilen veriler, transaksyonel düzlem görüntülerini (ki bu düzlem cone-beam geometrisinin merkezinden uzaktadır) oluşturmak için yeterli değildir. Cone-beam SPECT için üç boyutlu (3D) görüntü oluşturmak için dairesel yörünge tespitine yönelik çalışmalar sürmektedir.

## 2.5. Geri Oluşturma Yöntemi

SPECT ve PET konvansiyonel nükleer tıp görüntüleme teknikleri ile değişik projeksiyonlardan görüntü oluşturma yöntemlerini birleştirirler. Radyofarmasötikler ve teçhizatlardan farklı olarak görüntü oluşturma yöntemleri PET ve SPECT'in diğer önemli Mühendislik ve teknolojik yönünü oluştururlar. X-ışını CT' de standart algoritmalarından olan görüntü oluşturma yöntemi kullanılarak hassas transaksyonel

görüntüler elde edilir. Bunun sonucu da hastanın vücudundaki organların zayıflama katsayıları dağılımının görüntülenmesidir. SPECT veya PET’te ise görüntü oluşturma amacı hasta tarafından alınan Radyo-farmasötiklerin dağılımını görüntülemektir. Fotonların zayıflaması ölçülen projeksiyon verilerini etkiler. Eğer zayıflatma etkileri dikkate alınmadan, konvansiyonel görüntüleme yöntemleri ile görüntü oluşturulursa, doğru olmayan görüntüler oluşturulur. Ayrıca kırılma ve sınırlı kolimatör detektör cevaplama zamanı görüntü oluşturmada ekstra zorluklar oluştururlar. PET ve SPECT’te doğru görüntü oluşturma için özel geri oluşturma yöntemlerine ihtiyaç vardır. Kantitatif olarak doğru görüntü oluşturma yöntemi iki ana parçadan oluşur. Bunlardan birincisi; projeksiyonlardan görüntü oluşturan standart algoritmalar ve diğeri, görüntü bozukluklarını kompanse eden yöntemlerdir. Genelde görüntü bozukluklarını kompanse etme geri oluşturma yöntemleriyle ayrılmaz bir bütün oluştururlar.

## **2.6. Kompanse Yöntemleri**

Tipik bir SPECT sistemi zayıflama, kırınım ve kolimatör–detektör yanıtlarından oldukça fazla etkilenir. Ölçülen projeksiyon verileri bu etkilerden arındırılmadan görüntü oluşturulması görüntü bozukluğu, kaybı, fazlalığı gibi değişik durumların oluşmasına neden olur. Bu etkilerin aza indirilmesi için oldukça fazla çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar sonucu görüntü kalitesinde oldukça iyi gelişmeler sağlanmıştır. Bir sonraki konuda bu yöntemlerin bazılarını kısaca değineceğiz.

### **2.6.1. Zayıflama telafisi**

Zayıflama telafisi için kullanılan yöntemler iki grupta toplanabilirler. Birinci yöntemde zayıflama katsayısı bütün vücut için aynıdır, diğer yöntemde ise vücudun değişik bölgeleri için farklı zayıflama katsayısı dağılımı kullanılır. Zayıflama katsayısının kabulü kafatası ve karın SPECT görüntülerine uygulanır. Kardiyak ve göğüs görüntülenmesinde ise farklı zayıflama katsayıları kullanılır. Çünkü göğüs bölgesinde bulunan bir çok organın zayıflama katsayıları farklıdır. Burada zayıflamış Radon transformunun tersinin hesaplanması gibi daha karmaşık bir problemin çözülmesi gerekir.

Sabit zayıflama katsayıları için değişik yaklaşık çözümler üreten yöntemler bulunmaktadır. Bunlar ya projeksiyon verilerini ön işlemde geçirirler yada son işlemde geçirirler. Tipik ön işlem uygulayan yöntemler ters projeksiyonlardaki verilere aritmetik veya geometrik ortalama uygulanır. Bu yöntemler bağımsız ve tek bir kaynaklı uygulamalar için oldukça kullanışlıdır. Fakat bu yöntemler çok karmaşık kaynak dağılımları için oldukça yanlış sonuçlar vermektedir. Diğer bir yöntem Sinogramların Fourier transformunu alıp kullanarak sabit zayıflama telafisi sağlamaktadırlar.

Popüler zayıflama telafisi yöntemlerinden biride Chang tarafından geliştirilendir. Bu yöntem vücudun genel dağılım haritasına gereksinim duyar. Bu bilgi her bir görüntü noktasının bütün projeksiyonlardan elde edilen değerlerinin ortalama zayıflama faktörünü hesaplamada kullanılmaktadır. Dizilmiş zayıflama faktörleri, zayıflama faktörü dikkate alınmadan elde edilen görüntü ile çarpılır ve sonuçta zayıflama telafili görüntü oluşur. Daha kaliteli görüntü için ötelemeli yöntemde kullanılabilir. Chang'ın yöntemi düzgün dağılımlı zayıflama katsayıları için iyi sonuçlar vermektedir[55]. Fakat öteleme sayısı arttıkça görüntüdeki gürültüde artmaktadır. Bu nedenle bir veya ikiden fazla öteleme önerilmemektedir. Bir diğer sabit zayıflama telafisi için geliştirilen yöntemde, iç bükey ortamlar için ters Radon Transformunun analitik çözümüdür. Bu telafi yöntemi projeksiyon verilerinin üstsel bir fonksiyonla çarpılmasını gerektirir. Daha sonra FBP algoritması (filtrelemeli geri projeksiyon) görüntü oluşturmada kullanılır. Yalnız rampa fonksiyonu değeri 0 ile  $\mu/2\pi$  frekans aralığında sıfır olarak değiştirilir. Burada  $\mu$  sabit zayıflama katsayısıdır. Bu telafi yöntemi uygulaması kolay ve iyi sonuçlar verir. Fakat bu yöntemde gürültüyü kuvvetlendirici özelliğe sahiptir, bundan dolayı düzleme yapılması iyi bir görüntü elde etmek için kaçınılmazdır.

Sabit olmayan zayıflama katsayılı ters Radon Transformunun analitik yöntemle çözülmesi oldukça karmaşıktır. Bunun yerine ötelemeli yöntemlerle sonuca ulaşılmaya çalışılmaktadır. Uygulama, özellikler kalp ve akciğerlerin görüntülenmesinde önemlidir. Ötelemeli yöntem projeksiyon ve geri projeksiyon işlemleri içindeki zayıflama dağılımını modeller. ML kriterleri ile EM algoritması

başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Telfi yöntemi görüntüsü oluşturulacak bölgenin zayıflama katsayı dağılımları hakkında bilgi gereklidir. Hastadan zayıflama dağılımını ölçmek için transmisyon taraması yapılır.

### 2.6.2. Kırılma telfisi

Kırılmaya uğrayan fotonlar kaynak dağılımı hakkında yanlış bilgi edinilmesine neden olurlar. Bundan dolayı oluşturulan görüntü zıtlığı (kontrast) bozukluğu ve yanlış görüntü oluşturulmasına neden olurlar. Kırılmanın telfi edilmesi görüntü zıtlığı ve nesnedeki gerçek kaynak dağılımının görüntülenmesini sağlar. Bu konu üzerinde bir çok araştırma yapılmıştır. Yapılan çalışmalar genel olarak iki kategoride toplanabilirler. Birinci yöntemde ölçülen verilerdeki kırınımı tahmini olarak tespit edebilmek için birçok değişik yöntem geliştirilmiştir. Kırınım parçası, ölçülen verilerden veya oluşturulan görüntülerden çıkarılarak kırınımından bağımsız görüntü elde edilir. Bu yaklaşımla elde edilen telfi yöntemleri gürültü seviyesinde artışa neden olurlar[4].

Diğer bir yöntem kırınımın katkısını, empirik türetilmiş bir fonksiyon ile ölçülen projeksiyon verilerinin konvolüsyonunu alarak tahmin etmiştir. Bir başka yöntem, kırılma olmayan projeksiyon verilerinin bir üstsel fonksiyonla konvolüsyonunu alarak tahmin etmeye çalışmışlardır (Floyd 1985)[56]. Konvolüsyon yöntemi, 2 boyutlu kırınımından faydalanarak, 3 boyutlu kırınımalar içinde geliştirilmiştir. (Yanch ve diğerleri 1988)[57] bu konvolüsyon yöntemleri kırınım yanıt fonksiyonlarının sabit olduğunu varsaymaktadır ki bu bir varsayımdır. Diğer bir yöntemle de değişik enerji pencereleri (daha çok iki pencere) kullanılarak veri içindeki kırınım parçası tahmin edilmiştir. Bu yöntem, ölçülen verilerden elde edilen esas enerji pencerelerinden daha düşük enerji pencerelerini çıkararak telfi sağlamaya dayanır. Jaszack ve diğerleri 1985[52], Çift Foto Tepe Pencereleme yöntemi (dual peak window, DPW) inde esas enerji penceresini kapsayan birbiriyle çakışmayan iki enerji penceresi kullanmışlardır. (King ve diğerleri 1992)[ 58]. Bu yöntem oldukça doğru bir kırınım telfisi sağlamaktadır [9].

Bir başka yöntem esas ana pencerenin sağ ve soluna birer pencere yerleştirerek, (fototepe pencerenin alt ve üst dilim enerji bölgesine birer pencere yerleştirilerek)

merkezi penceredeki kırınımı tahmin etmeye çalışmışlardır. (Ogawa ve diğerleri 1991)[59].

Bir başka yöntem de her bir görüntü pikseline düşen enerji spektrumu kullanılarak, kırınım katkısı tahmin edilmiştir. [Koral ve diğerleri 1988]. Enerji ağırlıklı (EWA) veri toplama yönteminde, enerji pencereleri kullanılır. Bu yöntemle oluşturulan verilerde, veriler kırınım katkısını azaltmak için enerjiye bağımlı bir ağırlık katsayısı ile ilişkilendirilmiştir. (DeVito ve diğerleri 1989, DeVito ve Hamill 1991)[60].

Son olarak Holo-spektral yöntem (Gagnon ve diğerleri 1989)[61] kırınımı çok enerjili pencerelerden elde edilen bir seri karakteristik(eigen) görüntüden elde etmektedir. Bir diğer yöntem ise kırınım ve kolimator–detektör geometrik yanıt kaybı ile birleştirilerek görüntüleme sisteminin toplam yanıtını oluşturmuştur. Toplam yanıt fonksiyonu daha sonra geometrik ve kırınım telafisi için oluşturulan onarım filtresinin tasarımında kullanılmıştır. Başka bir yöntem, tam kırınım fonksiyonunu karakterize ederek bunu ötelemeli yöntemlerle birleştirmiş ve daha iyi bir telafi sağlamaya çalışmışlardır. (Floyd ve diğerleri 1985, Frey ve Tsui 1992)[62]. Tam kırınım fonksiyonları durağan ve simetrik olmayan bir şekle sahip olduklarından gerçekleştirilmeleri oldukça fazla hesap gerektirmektedir. Fakat bu dezavantajlarının azaltılması için çalışılmaktadır. (Frey ve diğ. 1993)[63].

### 2.6.3. Kolimator – detektör telafisi

Kolimator yüzey uzaklığı arttığında kolimator – detektör yanıt fonksiyonu genişler. Bu da uzaysal çözünürlüğün azalmasına ve görüntü bozukluklarının oluşmasına neden olur. Uzaysal olarak değişken olan detektör yanıt fonksiyonları izotropik olmayan noktasal yanıtların oluşmasına neden olur, Maniawski ve diğerleri 1991[64]. Uzaysal değişkenli kolimator–detektör yanıt fonksiyonu, telafide en büyük zorluk oluşturur.

Ortalama ve sabit kolimator–detektör yanıt fonksiyonu varsayımı ile, kolimator–detektör yanıt fonksiyonunun etkileri, onarma filtreleri kullanılarak kısmi veya yakınlaşmalı telafi edilmesi mümkündür. Bunlara örnek olarak Metz (King ve

diğerleri 1986)[65], ve Wiener (Penney et.al 1990)[66] filtreleri kolimator–detektör yanıt fonksiyonunun ortalamalarının tersi alınarak onarım filtreleri tasarlamışlardır. İki boyutlu telafi işlemi, bir boyutlu projeksiyon verilerine bir boyutlu onarım filtrelerinin uygulanması ile yapılır. Üç boyutlu telafi işlemi iki boyutlu projeksiyon verilerine iki boyutlu onarım filtreleri uygulanarak yapılır , Tsui ve diğerleri 1994[67].

Uzaysal değişkenli detektör yanıtlarının telafisi için analitik yöntemler de geliştirilmiştir. Uzaysal değişkenli filtrelemeli frekans uzaklık ilişkili (FDP) telafi yöntemi, uzaysal değişkenli detektör yanıtları için geliştirilmiştir, Lewit ve diğ. 1989[68]. Bu yöntemle SPECT`te izotopik noktasal yanıt fonksiyonu elde edilmiştir, Glick ve diğerleri 1993[69]. Ötelemeli yöntemlerle de uzaysal değişkenli kolimator–detektör yanıt fonksiyonlarının telafisi yapılmıştır. Bunlar projeksiyon ve geri projeksiyon durumlarında detektör yanıt fonksiyonunu modellemişlerdir. Telafi yöntemleri iki boyutlu geri oluşturmalar için (Formiconi ve diğ. 1990[70] ve üç boyutlu uygulamalar için, Tsui ve diğerleri 1994[67], uygulanmıştır. Bu uygulamalardan da anlaşıldığı gibi ötelemeli yöntemler geleneksel onarım filtreleme yöntemlerine göre daha iyi ve daha doğru görüntü kalitesi yakalamıştır.

## BÖLÜM 3. GENEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde genel dönüşüm yöntemlerinden olan Radon dönüşümü ve Hough dönüşümü incelenecektir. Bu dönüşüm yöntemlerinin özellikleri detayları ile incelenerek, değişik çizgi ve şekillerin dönüşümleri Matlab ortamında elde edilmiştir. Ek-A'da değişik çizgi ve şekillerin Radon dönüşümleri, Ek-B'de ise değişik çizgi ve şekillerin, elde edilen Hough dönüşümleri verilmiştir. Öncelikle Radon dönüşümü incelenecektir.

### 3.1. Radon Dönüşümü

Radon dönüşümü genellikle sinogram olarak da bilinmektedir. Sinogramlar tomografi cihazlarının detektörlerinden alınan görüntülerdir. Bu nedenle Radon dönüşümü tomografide önemli yer işgal etmektedir. Radon dönüşümü iki şekilde hesaplanmaktadır. Bunlar; eğik yığılma yöntemi ve açılal düzlemde Radon dönüşümüdür[5].

#### 3.1.1. Eğik yığılma

Radon dönüşümün sismik araştırmalarda kullanılan türü eğik yığılmadır. Bu tip Radon dönüşüm muhtemelen anlaşılması en kolay dönüşüm türüdür. İki boyutlu sürekli bir fonksiyon  $f(x,y)$  nin, dönüşümü olan  $f^*(p,\tau)$ 'ın değeri,  $f^*$ 'yi eğik çizgiler boyunca yığılarak veya entegre ederek bulunur. Çizginin yeri, çizgi parametreleri olan eğim  $p$  ve çizgi ofseti  $\tau$  yardımı ile bulunur.

$$f^*(p, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, px + \tau) dx \quad (3.1)$$

Bu lineer Radon dönüşümüne  $\tau$ - $p$  dönüşüm veya eğik yığılma'da denir.[11]

Delta fonksiyonu kullanılarak eğik yığılma şöyle yazılabilir;

$$f^*(p, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(y - px - \tau) dx dy \quad (3.2)$$

$f^*(p, \tau)$ 'nin değerleri iki boyutlu uzayın değişkenleridir.  $(p, \tau)$  uzayı, Radon uzayı veya parametre uzayıdır. Genel olarak iki parametrenin ne alt sınırı ne de üst sınırı vardır. Fakat ayrık uzayda (Discrete Space) ileride gösterileceği gibi iki parametre içinde sınırlı sayıda örnekleme kullanılacaktır.

### 3.1.2. Dik çizgili görüntülerin eğik yığını

Radon dönüşümünü ayrık yaklaşımlarla veri kaybı olmadan elde edilebilmesi için parametre uzayı yeterli yoğunlukta örneklenmelidir. Diğer bir problem de eğer çizgiler çok dik veya çok yatık ise yani eğimi çok yüksek veya çok küçük ise bu çizgilerin Radon dönüşümlerinde de hatalar oluşmaktadır. Bu hataların giderilmesi için parametre uzayında oldukça sık örnekleme yapılması gerekir. Bu da daha fazla zaman ve hafıza gerektirecektir. Ayrıca çizginin olmadığı boş alanlarda sık örnekleneceğinden gereksiz, oldukça fazla örnekleme yapılmış olacaktır. Bunun önlenmesi için çizginin konumu ve eğimi hakkında ön bilgiye sahip olmak gerekir. Eğer çizginin konumu biliniyorsa, yalnız çizginin olduğu aralığa ayrık Radon dönüşümü daha sık bir şekilde yapılır. Böylece zaman ve hafızadan kazanç sağlanmış olur.

Dikey çizgilerin Radon dönüşümü alınınca, aşağıda gözüktüğü gibi çizgi yerinden bağımsızdır. Yani çizginin yerinin nerede olduğu önemsizdir.

$$f(x, y) = A \delta(x - x^*) \Rightarrow f^*(p, \tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x^*) dx = A \quad (3.3)$$

Bu parametre uzayında bilginin tam olarak korunmadığını gösterir ve dikey çizgilerin eğik yığınlarla algılanamayacağını ifade eder. Bu problemleri aşmak için

iki parametre uzayında ayrı ayrı işlem yapmak gerekir. Birinci olarak  $f^*(p, \tau)$   $-p_{\lim} < p \leq p_{\lim}$  ve diğeri  $f^*(r, \eta)$  geri kalan çizgi kısımları için sınırlandırılmalıdır.

$$f^*(p, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, px + \tau) dx \quad (3.4)$$

$$f^*(r, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ry + \eta, y) dy \quad (3.5)$$

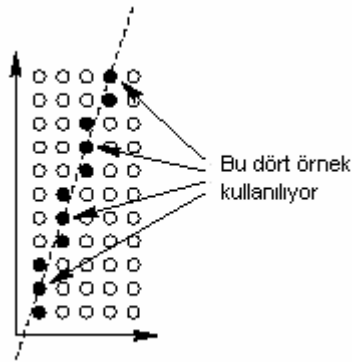
çizgiyi belirleyen iki yol şöyle ilişkilendirilmişlerdir,

$$y = px + \tau \Rightarrow x = ry + \eta \quad \text{where} \quad \begin{cases} r = \frac{1}{p} \\ \eta = -\frac{\tau}{p} \end{cases} \quad (3.6)$$

Eğer  $p$ ,  $-p_{\lim} \leq p \leq p_{\lim}$  aralığında ise diğeri eğim  $r$ ,  $-\frac{1}{p_{\lim}} \leq r \leq \frac{1}{p_{\lim}}$  olacaktır.

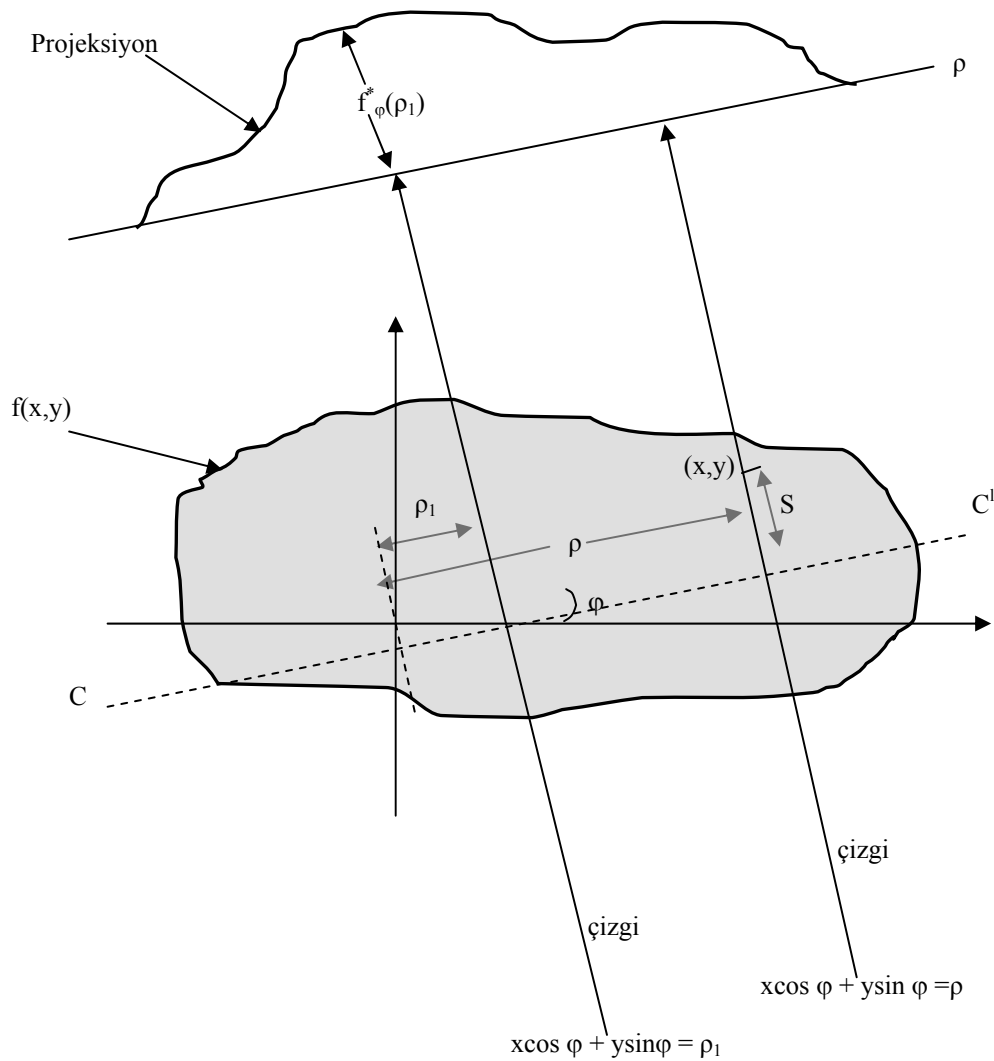
Eğimi sınırlayıcı makul bir değer ise şöyle olabilir.

$$P_{\lim} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3.7)$$



Şekil 3.1 Dik çizgiye sahip bir çizgi. İçi dolu olanlar değeri 1 olan pikseller, diğerleri ise sıfır olan piksellerdir. Noktalı çizgi entegrasyon çizgisini göstermektedir. Yalnızca 4 pikselin ayrık Radon dönüşümüne katkı yaptığına, diğeri birkaçının ise katkı yapmadığına dikkat edelim.

Bu limit şekil 3.3'teki problemi elemine eder. Ayırık Radon dönüşümü alınırken bir sonraki m'e geçerken dikey yöndeki değişim miktarı 1'den küçük olacaktır. Bu, çizginin sayısal eğimi olarak alınabilir.  $p \frac{\Delta x}{\Delta y}$  -1 ile 1 arasında olacaktır. Bu şekildeki  $p_{\lim}$  değeri  $\Delta\gamma = \pi$  değerini sağlamış ve daha önce belirtilen  $|\alpha| < 1$  varsayımını da gerçekleştirmiş olur. Denklem (3.5) Radon dönüşümü alınırken ekstra yük bindirmez. Dijital görüntünün devriğine (transpose), ayırık Radon dönüşümü uygulanılarak ve örnekleme parametreleri denklem (3.6) 'deki şekilde dönüştürülerek elde edilen ayırık parametre uzayı kestirimleri, Radon dönüşümüdür.

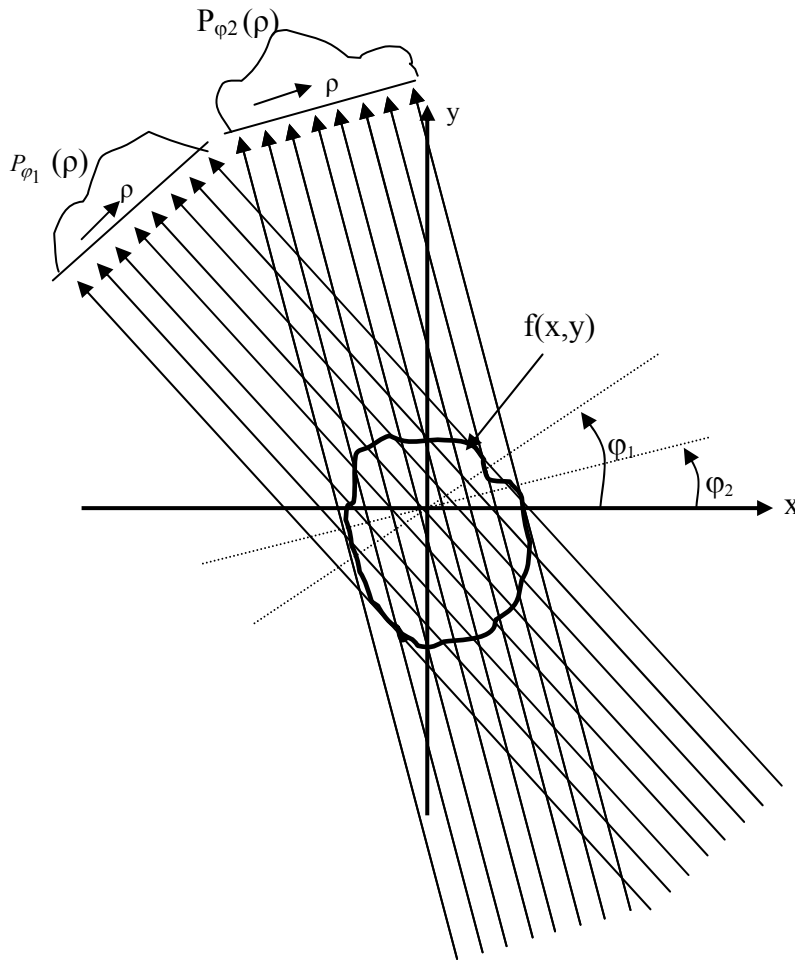


Şekil 3.2.  $f(x,y)$  nesnesi ve onun  $\phi$  açısı için Radon Dönüşümü  $f^*_{\phi}(\rho_1)$ ' in gösterimi

### 3.2. Normal Radon Dönüşümü

Bu kısımda Radon dönüşümünün diğer popüler formları incelenecektir. Ayrık Radon dönüşümü yöntemlerinden bahsedilecektir. Önceki konuda bahsi geçen eğik yığımlar yöntemi, doğrusal Radon dönüşümünün bir şeklidir. Radon dönüşüm genel şekliyle şöyle ifade edilir.

$$f^*(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\Gamma_0 - \Gamma_1 x - \Gamma_2 y) dx dy \quad (3.8)$$



Şekil 3.3. Paralel projeksiyon yöntemi, farklı açılardan bir grup çizginin ölçümlerinin alınması ile elde edilir.

Bu yapıda çizgi, üç değişkenle ifade edilmiştir. Bu bir çizgi tanımlama için birden çoğula bir yöntemdir. Üç değişkende, her zaman birbiriyle bağıntılıdırlar, böylece

serbestlik derecesi birdir. Literatürde iki form ön plana çıkmaktadır. Birincisi eğik yığımlardır. Eğik yığımlarda parametreler şöyledir[20].

$$(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2) = (-\tau, p, -1) \quad (3.9)$$

Tomografi, astronomi, mikroskopi v.s. gibi yerlerde kullanılan bir diğer Radon dönüşüm tanımı da temel fonksiyon  $f(x,y)$ 'nin tercih edilen bir şekli, tipi yoktur. Bu çizginin normal formu şeklinde gösterilmesini gerektirir.

$$\rho = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad (3.10)$$

yani  $(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2) = (\rho, \cos \varphi, \sin \varphi)$ 'dir. Eğik yığınlardan farklı olan bu dönüşüm formülü şöyledir[21].

$$f^*(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\rho - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy \quad (3.11)$$

Şekil 3.6'daki D detektörü temsil etmektedir. Döndürülmüş eksen,  $\varphi$  kadar açısal kaydırılmış orijinal eksendir. AK uzunluğu  $u$  olarak, detektör üzerindeki her bir nokta  $\rho$  olarak alınmıştır. Denklem (3.11), farklı bir şekilde de yazılabilir. Bu şekil aşağıda türetilcektir.

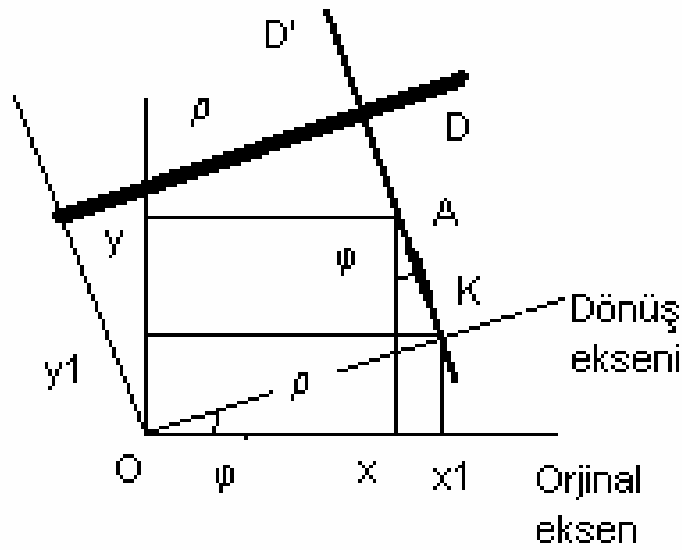
Kolimatör, fotonların delik eksenleri ile paralel olan saçınımların detektöre ulaşmasına izin verir. Bu nedenle yalnız detektöre dik gelen fotonlar algılanacaktır. Bu dik çizgi  $D'$  ise, bu çizginin denklemi şöyledir;

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad y_1 = \rho \sin \varphi \quad (3.12)$$

ve

$$x_1 - x = u \sin \varphi, \quad y - y_1 = u \cos \varphi \quad (3.13)$$

$x_1$  ve  $y_1$ 'den kurtulmak için denklem (3.12) ve (3.13) birleştirilirse



Şekil 3.4. Septal 2 boyutlu PET sistemlerinin geometrik gösterimi. Buradaki amaç, görüntü alanı olan D noktasına dik projeksiyon oluşturan A(x,y) nokta kümelerini tespit etmektir.

$$x = \rho \cos \varphi - u \sin \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi - u \cos \varphi$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

buradan da  $\rho$  ve  $u$  elde edilebilir.

$$\rho = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad (3.15)$$

$$u = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

Çizgi D', denklem  $\rho = x \cos \varphi + y \sin \varphi$  ile tanımlanan P noktasında D üzerine dik olarak projeksiyon yapmıştır. Bu nedenle çizgi D', görüntü alanı üzerindeki A(x,y) nokta kümeleridir. Bu nokta kümelerinden gelen fotonlar, detektör  $\varphi$  kadar açı yapmış iken, detektör merkezinden  $\rho$  kadar uzakta algılanmış olacaklardır. Projeksiyon operatörü Radon dönüşümü olarak tanımlana bilinir.  $f(x,y)$  fonksiyonunun Radon dönüşümü  $f^*(\rho, \varphi)$ ,  $f(x,y)$  fonksiyonunun x eksenine  $\varphi$  kadar

açı yapan ve merkezden  $\rho$  kadar uzakta olan bir çizgi üzerinde, çizgi(line) entegralini almaktır.

$$f^*(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho \cos \varphi - u \sin \varphi, \rho \sin \varphi + u \cos \varphi) du \quad (3.16)$$

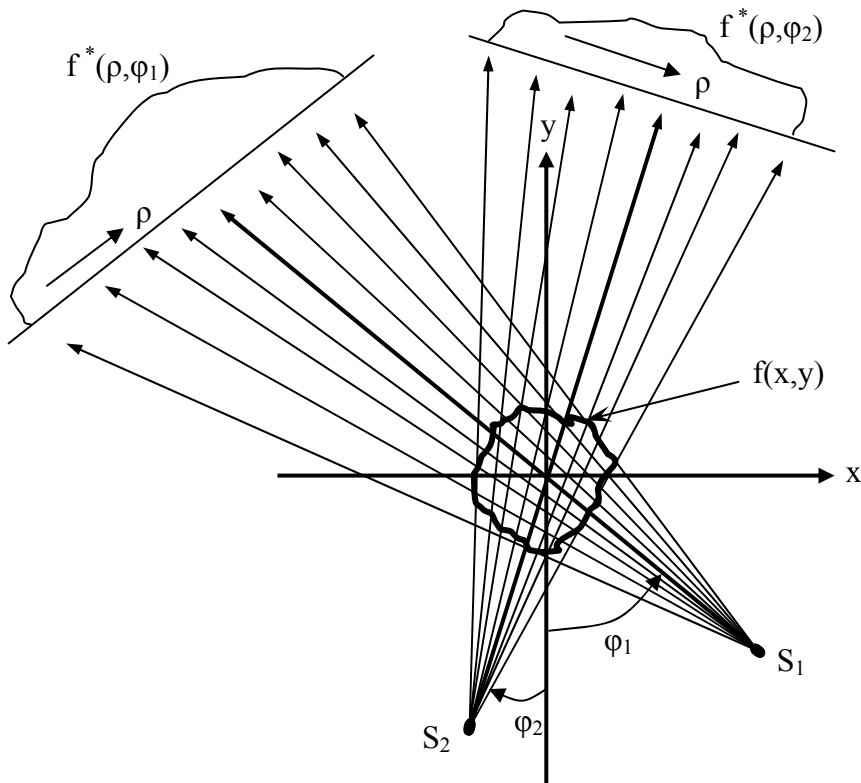
$x = \rho \cos \varphi - u \sin \varphi$  denkleminde  $u$  çekilirse ;

$u = \frac{\rho \cos \varphi - x}{\sin \varphi}$  olur.  $x$ 'e göre türevi ise  $du = -dx/\sin \varphi$  olur. Bu değerler denklem (3.16) de yerlerine yazılırsa;

$$= \frac{1}{|\sin \varphi|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, \frac{\rho}{\sin \varphi} - x \cot \varphi\right) dx \quad (3.17)$$

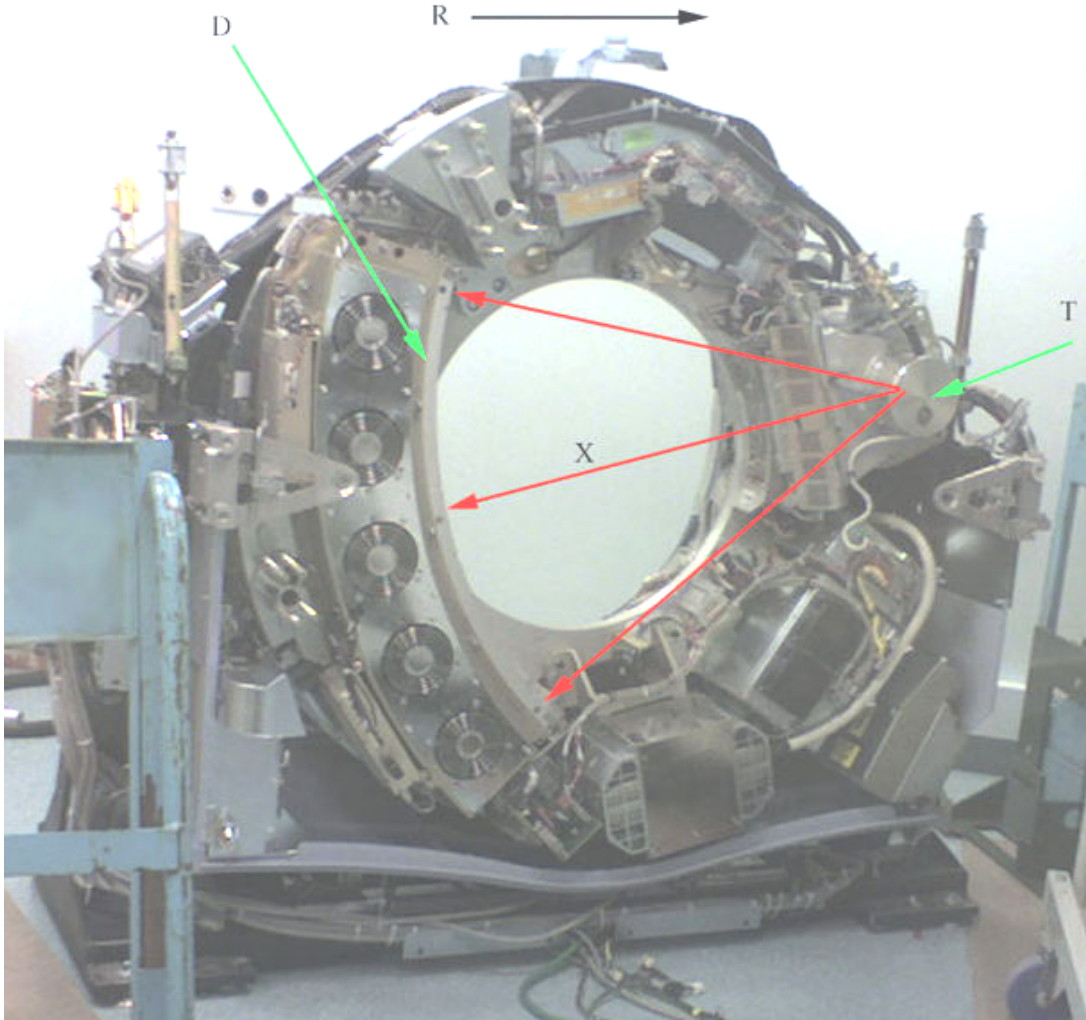
$$= \frac{1}{|\sin \varphi|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta\left(y - \frac{\rho}{\sin \varphi} + x \cot \varphi\right) dx dy \quad (3.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\rho - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy \quad (3.19)$$



Şekil 3.5. Fan-Beam projeksiyon yöntemi

Buradaki  $\rho$ 'nin anlamı, koordinat sisteminin orjininden çizgiye olan minimum uzaklığı,  $\phi$  ise çizginin açısal olarak konumunu gösterir. Projeksiyon çizgi entegrallerinin birleşiminden oluşur. Bu paralel projeksiyon diye tanımlanır. Şekil 3.3 (CT) gösterilmiştir.



Şekil 3.6. Fan-Beam projeksiyon yöntemi ile çalışan 3. nesil CT cihazı. T, X-ışın kaynağı; X, x-ışın yolu; D, algılama detektörleri; R, sistemin dönüş yönü. Gücü 150 kW'a kadar çıkabilir, veri hızı 5 GBbps.

Dijital projeksiyon x ışını kaynağı ve detektörleri nesnenin zıt iki tarafına yerleştirilerek oluşturulabilir. Bir diğer projeksiyon yöntemi de kaynağın çizgi detektörlerine göre sabit bir pozisyona yerleştirilmesi ile oluşturulur. Bu şekil 3.5 ve

3.6`da (CT) gösterilmiştir. Çizgi entegralleri fanlar boyunca ölçüldüğünden bu tip projeksiyonlara fan-beam projeksiyon yöntemi denir.

Normal Radon dönüşüm ile eğik yığımlar yöntemi arasındaki ilişki şöyledir.

$$f^*(\rho, \varphi) = \frac{1}{|\sin \varphi|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, \frac{\rho}{\sin \varphi} - x \cot \varphi\right) dx = \frac{1}{|\sin \varphi|} f^*\left(p = -\cot \varphi, \tau = \frac{\rho}{\sin \varphi}\right) \quad (3.20)$$

$\varphi$  açısı sıfıra yakinken denklem (3.20) problem üretecektir. Bu durumda denklem (3.5) `deki Radon dönüşümü ile bağlantı kurulabilir.

$$f^*(\rho, \varphi) = \frac{1}{|\cos \varphi|} \int_{-\infty}^{\infty} f(r, y + \eta, y) dy \quad \text{burada} \quad \begin{cases} r = -\tan \varphi \\ \eta = \frac{\rho}{\cos \varphi} \end{cases} \quad (3.21)$$

Bazı fonksiyonların Radon dönüşümü analitik olarak yapılabilir. Bunlardan bazıları ileride anlatılacaktır. Bir nokta kaynağın, normal Radon dönüşümünü inceleyelim. Nokta kaynak, uzayda  $(x_0, y_0)$  gibi herhangi bir noktada olsun.

$$f(x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \Rightarrow \quad (3.22)$$

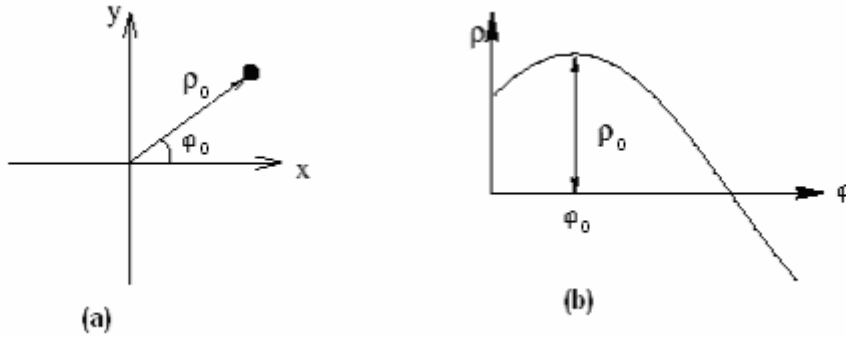
$$\begin{aligned} f^*(\rho, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(\rho - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy \\ &= \delta(\rho - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Şekil 3.7 nokta şeklindeki kaynak ve Radon dönüşümünü göstermektedir. Şekilden anlaşılacağı üzere noktanın Radon dönüşümü, sinüzoidal bir şekildir. Herhangi bir  $f(x, y)$  fonksiyonunun Radon dönüşümü ise şöyledir.

$$f^*(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx_0 dy_0 \quad (3.24)$$

$$\text{burada, } x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0 \quad \text{ve} \quad y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0 \quad \text{dir.} \quad (3.25)$$

Yukarıdaki denklemden anlaşılacağı gibi nokta kaynağının Radon dönüşümü parametre uzayında sinüs şeklini alan bir fonksiyondur. Nokta kaynağının Radon dönüşümü, kesilmiş, kısıtlı bir parametre uzayında sınırlandırılabilir, şöyle ki;



Şekil 3.7 Düzlem üzerinde bir nokta(a), ve noktanın Radon dönüşümü(b) de gösterilmiştir.

$$f(x, y) = 0 \quad \text{eger} \quad \sqrt{x^2 + y^2} > \rho_{\max} \Rightarrow f^*(\rho, \varphi) = 0 \quad \text{eger} \quad |\rho| > \rho_{\max} \quad (3.26)$$

Delta fonksiyonu ile modellenilecek ve parametreleri  $(\rho, \varphi)$  olan çizginin, Radon dönüşümü şöyledir,

$$f(x, y) = \delta(\rho_0 - x \cos \varphi_0) \Rightarrow \quad (3.27)$$

$$f^*(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho_0 - (\rho \cos \varphi - u \sin \varphi) \cos \varphi_0 - (\rho \sin \varphi + u \cos \varphi) \sin \varphi_0) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho_0 - \rho \cos(\varphi - \varphi_0) + u \sin(\varphi - \varphi_0)) du \quad (3.28)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\sin(\varphi - \varphi_0)|} \delta\left(\frac{\rho_0 - \rho \cos(\varphi - \varphi_0)}{\sin(\varphi - \varphi_0)} + u\right) du, \quad \text{eger} \quad \sin(\varphi - \varphi_0) \neq 0$$

$$= \frac{1}{|\sin(\varphi - \varphi_0)|} \quad (3.29)$$

Eğer  $\varphi = \varphi_0$ , yani,  $\sin(\varphi - \varphi_0) = 0$  ise

$$f^*(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho_0 - \rho) du = \begin{cases} 0, & \text{eger } \rho_0 \neq \rho \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) du, & \text{eger } \rho_0 = \rho \end{cases} \quad (3.30)$$

Tepe değeri,  $\rho = \rho_0$  ve  $\varphi = \varphi_0$  iken gerçekleşir. Ayrıca çizginin konumunda(nerede olduğu konusunda) herhangi bir sınırlama yoktur, ki bu, eğik yığının tanımlama şeklinden kaynaklanan bir problemdir.

### 3.3. Ayrık Radon Dönüşümü

Ayrık eğik yığınlar yönteminde olduğu gibi, ayrık Radon dönüşümünde de parametreler doğrusal olarak örneklenmiştir.

$$\begin{aligned} x &= x_m = x_{\min} + m\Delta x, \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \\ y &= y_n = y_{\min} + n\Delta y, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ \varphi &= \varphi_t = \varphi_{\min} + t\Delta\varphi, \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \\ \rho &= \rho_r = \rho_{\min} + r\Delta\rho, \quad r = 0, 1, \dots, R-1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Denklemlerden anlaşılacağı gibi dönüşümün oldukça fazla serbest parametreleri vardır. Fakat normal olarak bunların bazıları sabitlenmiştir.  $\rho$  yönünde en az örnekleme alabilmek için denklem (3.26)'de gözüktüğü gibi  $f(x,y)$ 'nin koordinat sisteminin merkezine doğru kaydırılması gerekir. şimdi görüntünün kare olduğunu varsayalım.

$$\Delta x = \Delta y \quad (3.32)$$

$$M = N \quad (3.33)$$

Bu denklemler sıfır etrafında simetrik olarak sıralanmış olduğunu ifade eder.

$$x_{\min} = -x_{\max} = -\frac{(M-1)}{2} \Delta x \quad (3.34)$$

$$\rho_{\min} = -\rho_{\max} = -\frac{(R-1)}{2} \Delta\rho \quad (3.35)$$

Açısal örnekleme göz önüne alınarak açısal başlama noktası;

$$\varphi_{\min} = 0 \quad (3.36)$$

seçilebilir. Ayrıca örnekleme aralığı  $\pi$ 'yi tarayabilecek şekilde seçilmelidir.

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{T} \quad (3.37)$$

bundan sonra serbest parametre olarak yalnız  $\Delta x$ ,  $M$ ,  $R$ ,  $T$  kalmıştır. Ayrık normal Radon dönüşümünü gerçekleştirmenin bir yolu denklem (3.19)'e yakınsayan denklemler oluşturmaktır.

$$f^*(\rho_r, \varphi_t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho_r \cos \varphi_t - u \sin \varphi_t, \rho_r \sin \varphi_t + u \cos \varphi_t) du \quad (3.38)$$

$$\approx \Delta u \sum_{j=0}^{J-1} f(\rho_r \cos \varphi_t - u_j \sin \varphi_t, \rho_r \sin \varphi_t + u_j \cos \varphi_t) \quad (3.39)$$

Buradaki  $u_j$  değişken  $u$ 'nun denklem (3.31)'dekiler gibi, doğrusal örnekleme noktalarıdır. Bu yaklaşımın bazı dezavantajları vardır. Bunların en önemlisi, verilen bir  $j$  değeri için denklem (3.39) ile bulunan görüntü noktaları, (yani  $(x, y) = (\rho_r \cos \varphi_t - u \sin \varphi_t, \rho_r \sin \varphi_t + u \cos \varphi_t)$ ) prensip olarak beklenen görüntünün noktaları ( $f(m, n) = f(x_m, y_n)$ ) ile asla uyuşmaz, bu nedenle her iki  $x$  ve  $y$  değişkeni içinde interpolasyona ihtiyaç vardır. Bir boyutlu interpolasyona göre ekstra eklenen gürültüden dolayı 2 boyutlu interpolasyondan da kaçınılması gerekir. Diğer bir belirsizlik de  $u$ 'nun hangi sıklıkla artırılacağıdır. ( $\Delta u$ 'in değerinin ne olacağıdır). Diğer bir Ayrık Radon dönüşümü gerçekleştirme yöntemi için ise denklem (3.22) ve (3.23)'da belirtilen interpolasyona ihtiyaç vardır. Bu interpolasyon ya aşağıda olduğu gibi (hızlı) en yakın komşular yaklaşımı veya doğrusal interpolasyon yöntemi ile gerçekleştirilebilir.

$$\sin \varphi > \frac{1}{\sqrt{2}} : f^*(\rho, \varphi) = \frac{1}{|\sin \varphi|} f^* \left( p = -\cot \varphi, \tau = \frac{\rho}{\sin \varphi} \right) \quad (3.40)$$

$$\approx \frac{\Delta x}{|\sin \varphi|} \sum_{m=0}^{M-1} f(m, [am + \beta]) \quad (3.41)$$

$$\text{burada } \alpha = -\cot \varphi \text{ ve } \beta = \frac{\rho - x_{\min}(\cos \varphi + \sin \varphi)}{\Delta x \sin \varphi} \quad (3.42)$$

$$\sin \varphi \leq \frac{1}{\sqrt{2}} : f^*(\rho, \varphi) = \frac{1}{|\cos \varphi|} f^* \left( r = -\tan \varphi, \eta = \frac{\rho}{\cos \varphi} \right) \quad (3.43)$$

$$\approx \frac{\Delta x}{|\cos \varphi|} \sum_{n=0}^{M-1} f([an + \beta], n) \quad (3.44)$$

$$\text{burada } \alpha = -\tan \varphi \text{ ve } \beta = \frac{\rho - x_{\min}(\cos \varphi + \sin \varphi)}{\Delta x \cos \varphi} \quad (3.45)$$

burada  $\Delta x = \Delta y$ ,  $M = N$  ve  $x_{\min} = y_{\min}$  olarak seçilmiştir. Denkleme bakıldığında integrallerin önündeki projeksiyon faktörlerine  $\left( \frac{1}{|\sin \varphi|}, \text{ve}, \frac{1}{|\cos \varphi|} \right)$  ilaveten iki entegralin yaklaşık çözümü bölüm 3.2 ye benzemektedir. Algoritma 3.1'de bu düşünce gerçekleştirilmiştir. Algoritmada çizgi entegralin projeksiyonu iki eksene (x,y) bölünerek birbirinden bağımsız olarak gerçekleştirilmiştir. Her bir parça, algoritma 3.1'den sonra adı geçen optimizasyon yöntemi ile optimize edilmiştir.

### 3.3.1. Radon dönüşümün örnekleme özellikleri

Örnekleme ilişkileri hakkında bilgi sahibi olabilmek için Sinc açılımı kullanılmıştır. Sonuca ulaşmak için entegral almak yerine daha önce konuda adı geçen Sinc İnterpolasyon yöntemi ile eğik yığınlar ve normal Radon dönüşümü arasındaki

ilişkiyi gösteren denklem (3.21) kullanılarak sonuç elde edilmiştir. Bu Radon dönüşümü hakkında bilgi elde edebilmek için oldukça iyi bir yöntemdir. Bazı durumların eğik yığınlar yöntemi ile gerçekleştirilmesi ve anlaşılması daha basittir.

$$f^*(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta x}(x - x_m)\right)}{\frac{\pi}{\Delta x}(x - x_m)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta y}(y - y_n)\right)}{\frac{\pi}{\Delta y}(y - y_n)} \Rightarrow \quad (3.46)$$

$$f^*(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) I\left(p = -\cot \varphi, \tau = \frac{\rho}{\sin \varphi}, x_m, y_n\right) \quad (3.47)$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) P(\rho, \varphi, x_m, y_n) \quad (3.48)$$

$$P(\rho, \varphi, x_m, y_n) = \frac{\Delta x}{\phi} \sin\left(\min\left\{\frac{1}{|\sin \varphi|}, \frac{1}{|\cos \varphi|}\right\}\right) \quad (3.49)$$

$$\text{burada} \quad \phi = \frac{\pi}{\Delta x} (\rho - x_m \cos \varphi - y_n \sin \varphi) \quad (3.50)$$

Normal Radon dönüşümünün örnekleme özellikleri  $\phi$  tarafından belirlenmektedir.  $\phi$ 'nin fonksiyonu olarak fonksiyon  $\left\{\frac{1}{|\sin \varphi|}, \frac{1}{|\cos \varphi|}\right\}$ , 1 ve  $\sqrt{2}$  arasında değerler sahiptir.

Maksimum değer olan  $\sqrt{2}$  kullanılarak  $\phi$ 'in örnekleme aralığı  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 'den büyük olmamalıdır. Bu sınır iki parametre içinde kullanıldığında;

$$\Delta \phi = \left| \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right| \Delta \rho = \frac{\pi}{\Delta x} \Delta \rho \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Delta \rho \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2}} \quad (3.51)$$

$$\Delta \phi = \left| \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right| \Delta \varphi \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Delta \varphi \leq \min_{x_m, y_m} \frac{\Delta x}{\sqrt{2} \sqrt{x_m^2 + y_n^2}} = \frac{\Delta x}{2|x_{\min}|} \quad (3.52)$$

elde edilir.  $(x_m, y_n)$ 'in tüm değerlerinin geçerli olması için oldukça kapalı varsayımlar yapılmıştır. Yukarıdaki denklemler parametre uzayında örnekleme aralığı için bir alt limitin olduğunu göstermektedir. Bu sınırların çiğnenmesi görüntü bozukluğuna (aliasing) neden olur. Her birinin örnekleme aralığına göre  $\rho$  veya  $\varphi$ 'nın örnekleme aralığının değiştirilmesi durumunda çizgi pozisyonunun değişimi bir örnek uzaklığından daha az olmalıdır[16]. Verilen bir  $f(m,n)$  görüntüsü için örnekleme aralığı  $\Delta x$  için açısal örnekleme aralığı  $\Delta\theta$  denklem (3.52) kullanılarak set edilebilir. Açısal örnekleme aralığı,

$$T = \lceil \pi(M-1) \rceil \quad \text{and} \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{T} \quad (3.53)$$

gibi olacaktır. Burada  $x_{\min} = -\Delta x (M-1)/2$ 'dir denklem (3.50) ve (3.35) kullanılırken geriye yalnızca belirlenecek R (veya  $\rho_{\min} = \rho_{\max}$ ) kalmaktadır.

$\Delta\rho = \frac{\Delta x}{\sqrt{2}}$ 'ye eşit olduğu var sayılarak ve denklem (3.33) – (3.35)'in denklem (3.27)'ye yerleştirilmesi ile  $\rho$  elde edilebilir.

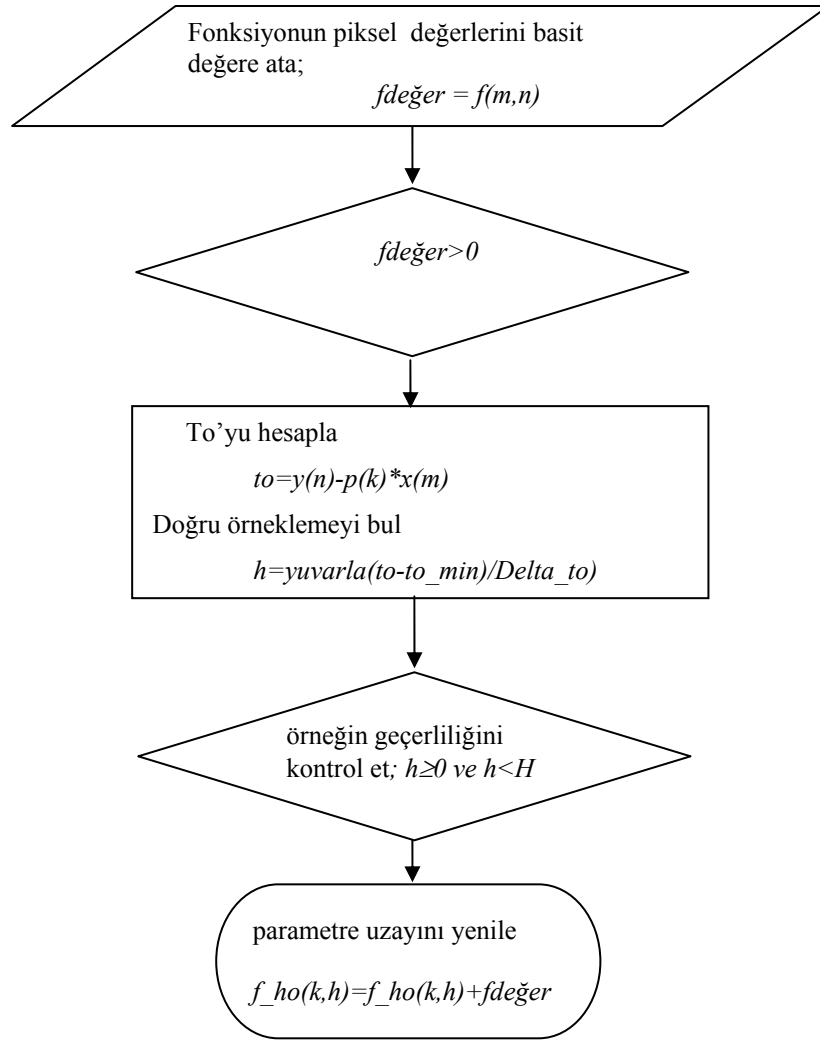
$$\rho_{\max} = \max_{x_m, y_n} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} |x_{\min}| \Rightarrow \quad (3.54)$$

$$R = 2 \frac{\sqrt{2} |x_{\min}|}{\Delta\rho} + 1 = 2M - 1 \quad \text{ve} \quad \rho_{\min} = -\frac{R-1}{2} \Delta\rho \quad (3.55)$$

### 3.5. Hough Dönüşümü

Radon dönüşümü çizgi taraması yapmak için geliştirildiği, geçen konularda değinildi. Hough dönüşümü de benzer şekilde aynı işi yapmaktadır. İki değişik yöntem seçimi ile elde edilen sonuçlar temelde aynıdır. Yani dönüşüm, parametre uzayındaki her bir nokta için, görüntü uzayındaki piksel değerlerini bir çizgi boyunca toplama ve sonucu uygun ölçekleme ile o pozisyonda saklanması olayıdır.

Algoritma 3.3 Hough dönüşümü



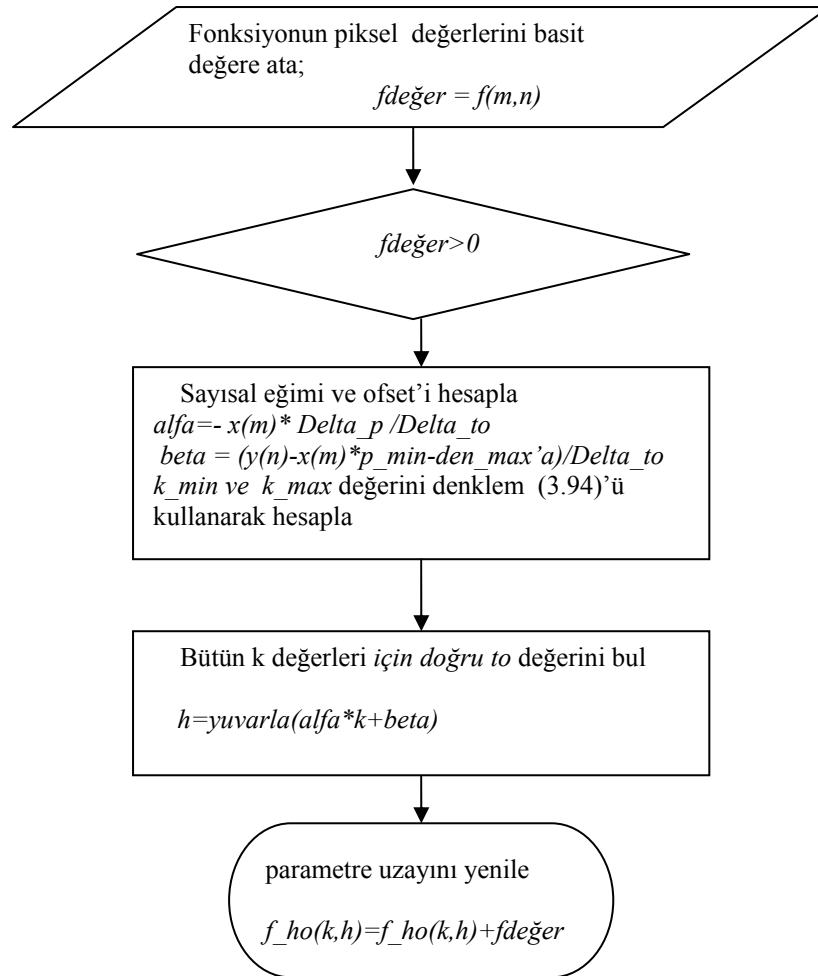
Eğer görüntü seyrek ise yani sayısal görüntünün sıfırdan farklı piksel sayısı az ise, bilgisayar parametre uzayında bir katkısı olmayan sıfırları toplayarak zaman geçirir. Görüntü işleme literatüründe en fazla referans gösterilmiş yayın olan [23]'de P.V.C. Hough hesaplama süresini kısaltabilmek için yukarıda anılan ön bilgiyi dönüşümde kullanmıştır. Fikir ilk önceleri eğimi ve offseti verilen çizgiler için kullanılmıştır. Daha sonraları bir çok araştırmacı normal çizgi  $(\rho, \phi)$  için de geliştirilmiştir [24, 25, 26]. Radon ve Hough dönüşümünün birbiri arasındaki ilişkinin belirlenmesinde literatürde karışıklık bulunmaktadır. Genel kabul gören Hough dönüşümünün tanımı şöyledir: Hough dönüşüm, görüntü uzayındaki her bir pikseli parametre uzayında bir şekil olarak haritalar. Radon dönüşümünde ise görüntü uzayındaki bir şekil, parametre uzayında bir piksel(nokta) olarak haritalanır. Hough dönüşümünün ana

fikri görüntü uzayındaki her bir pikselin ayrı olarak parametre uzayına dönüşümünü sağlamaktır[15]. Hough dönüşümü, Radon dönüşümünden elde edilebilir.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx_0 dy_0 \Rightarrow$$

$$f^*(p, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \delta(\tau - y_0 + px_0) dx_0 dy_0 \quad (3..56)$$

Algoritma 3.4 Optimum Hough dönüşümü



Yukarıdaki denklem Hough`nun tanımına en uygun şekildir. Görüntü uzayındaki her bir nokta için, dönüşüm uzayında (parametre uzayında) çizgi çizilir. Son delta fonksiyonunun değişkenini sıfıra eşitleyerek çizgi bulunur.

$$\tau = y_0 - px_0 \quad (3..57)$$

Algoritma 3.3 parametre uzayının tahmininde Hough dönüşüm yöntemi için temel oluşturur. Buradaki örnekleme parametreleri denklem (3.31)'de tanımlanan özelliklerin aynısına sahiptirler. Bu algoritmanın en önemli noktası, görüntüdeki sıfırdan farklı her bir piksel ve  $p_k$  değeri için bir  $\tau$  değeri hesaplanır. Bu algoritmada bu değer en yakın komşuya yuvarlanmıştır.

$$\tau = y - px \Rightarrow$$

$$h \approx \frac{y_n - (k\Delta p + p_{\min})x_m - \tau_{\min}}{\Delta \tau} = \Psi k + \Gamma \quad \text{burada} \quad \begin{cases} \Psi = -\frac{x_m \Delta p}{\Delta \tau} \\ \Gamma = \frac{y_n - x_m p_{\min} - \tau_{\min}}{\Delta \tau} \end{cases} \quad (3..58)$$

En yakın komşular yöntemi uygulanarak Hough dönüşümünün ayırık gerçekleştirilmesi Algoritma 3.4'de gösterilmiştir. Piksellerin gerçekte ayırık parametre uzayında olup olmadığını saptamak için, optimizasyon amaçlı olarak Denklem (3.58) kullanılmıştır.

$$0 \leq h = (\Psi k + \Gamma) \leq H - 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\Gamma + 0,5}{\Psi} & \text{eger } \Psi > 0 \\ \frac{H - 0,5 - \Gamma}{\Psi} < k < \frac{\Gamma + 0,5}{\Psi} & \text{eger } \Psi < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (3..59)$$

$$k_{\min} = \max \left\{ 0, \left\lceil -\frac{\Gamma + 0,5}{\Psi} \right\rceil \right\} \quad \text{ve} \quad k_{\max} = \min \left\{ K - 1, \left\lfloor \frac{H - 0,5 - \Gamma}{\Psi} \right\rfloor \right\} \quad \text{eger } \Psi > 0$$

$$k_{\min} = \max \left\{ 0, \left\lceil \frac{H - 0,5 - \Gamma}{\Psi} \right\rceil \right\} \quad \text{ve} \quad k_{\max} = \min \left\{ K - 1, \left\lfloor -\frac{\Gamma + 0,5}{\Psi} \right\rfloor \right\} \quad \text{eger } \Psi < 0 \quad (3.60)$$

Bu algoritmada, piksel değeri sıfırdan farklı olan değerler yalnızca dönüşüm için kullanılmıştır. Sayısal olmayan görüntüler (tam sayı olmayan değerler) için bir eşik değeri seçilebilir. Fakat bu değer görüntünün yapısıyla doğrudan ilişkilidir.

### 3.6. Hough Dönüşümü ile Çizgi Taraması

Hough dönüşümünde örnekleme parametreleri ve ayrık indisleri hesaplama yöntemi, Radon Dönüşümünün benzeri olduğundan, Hough Dönüşümünün parametre uzayı ile, Radon Dönüşümünün parametre uzayları da benzeşeceklerdir. Radon dönüşümünde n şöyle bulunmuştur:

$$n = \left\lceil \frac{p_k x_m + h \Delta \tau + \tau_{\min} - y_{\min}}{\Delta y} \right\rceil \quad (3.61)$$

Eğer örnekleme parametreleri  $\Delta \tau = \Delta y$  ve  $\tau_{\min} = y_{\min}$  seçilirse, ayrık Radon dönüşümüne denk gelen, denklem (3.61) oldukça sadeleşir.

$$n = \left\lceil \frac{p_k x_m + h \Delta y}{\Delta y} \right\rceil = h + \left\lceil \frac{p_k x_m}{\Delta y} \right\rceil \quad (3.62)$$

Hough Dönüşümü içinde aynı seçim yapılırsa,  $\Delta \tau = \Delta y$  ve  $\tau_{\min} = y_{\min}$  seçilirse, denklem (3.57)'da verilen haritalama fonksiyonu şöyle olur,

$$h = \left\lceil \frac{n \Delta y + y_{\min} - p_k x_m - \tau_{\min}}{\Delta \tau} \right\rceil \quad (3.63)$$

$$= \left\lceil \frac{n \Delta y - p_k x_m}{\Delta y} \right\rceil \quad (3.64)$$

$$= n - \left\lceil \frac{p_k x_m}{\Delta y} \right\rceil \quad (3.65)$$

ki bu denklem (3.62) ile tamamen aynıdır. En yakın komşular yöntemi ile eğim ve offset parametreleri kullanılarak yapılan her iki dönüşüm de ayrık parametre uzayında eğer  $\Delta \tau = \Delta y$  ve  $\tau_{\min} = y_{\min}$  seçilirse aynı sonucu verirler. Hough Dönüşümünün, ayrık Radon Dönüşümü ile aynı sonucu verebilmesi için, x ölçekleme katsayısı,  $\Delta x$  ile çarpılmalıdır.

Hough Dönüşümünde örnekleme parametreleri şöyle seçilir. Denklem (3.68)'de gösterildiği gibi görüntü vektörünün bir bandı, parametre vektöründe aynı noktaya haritalanır.

$$h = \left[ \frac{y_n - p_k - \tau_{\min}}{\Delta \tau} \right] \Rightarrow \quad (3.66)$$

$$0 = \left[ \frac{(n\Delta y + y_{\min}) - p_k(m\Delta x + x_{\min}) - \tau_h}{\Delta \tau} \right] \Rightarrow \quad (3.67)$$

$$|n - \alpha m - \beta| < \frac{1}{2} \frac{\Delta \tau}{\Delta y} \quad burada \quad \begin{cases} \alpha = p_k \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ \beta = \frac{p_k x_{\min} + \tau_h - y_{\min}}{\Delta y} \end{cases} \quad (3.68)$$

n yönünde piksel olarak ölçülen,  $n = ml + \beta$  sayısal çizgisinin etrafındaki,  $\frac{\Delta \tau}{\Delta y}$  bant genişliği içerisinde kalan bütün pikseller, ayrık parametre uzayında aynı noktaya ((k,h) noktasına) haritalanırlar. Yoğun örnekleme yapıldığında, örneğin  $\Delta \tau = 0,1\Delta y$  ise, görüntü uzayındaki bant genişliği, örnekleme 1/10'unu kapsar. İstatistiksel olarak bunun anlamı, sayısal çizgi üzerindeki her on pikselden yalnız biri ayrık parametre uzayına katkı yapar. Kaba örneklenmiş parametre uzayında ise örneğin  $\Delta \tau = 5 \Delta y$  ise  $x_m$  'in değerine bağlı olarak ayrık parametre uzayında verilen bir nokta için görüntü uzayındaki 5 piksel, eğer değerleri sıfırdan farklı ise katkı yapacaktır. Görüntü hakkında ön bilgi yok ise  $\Delta \tau = \Delta y$  seçmek makul bir seçimdir. Hough dönüşümünde kaba örnekleme parametresi seçilerek, tam çizgi üzerinde olmayan piksellerin de, parametre uzayına katkısı olacak ve tepe oluşmasına katkı sağlayacaktır.  $\Delta p$  parametresi ise şöyle bir kriterle seçilebilir; denklem (3.58)'deki sayısal çizginin mutlak (sayısal) eğimi, 1'i aşmamalıdır. Bunun nedeni, görüntü uzayındaki pikselin haritalanması yapılırken, ayrık parametre uzayında tırtıklı(perforeli) çizgilerin üzerine düşmesini önlemek içindir. Bu tırtıklılık problemi, tepenin ayrık parametre uzayında olmasını ortaya çıkarır.

$$|\Psi| = \left| -\frac{x_m \Delta p}{\Delta \tau} \right| \leq 1 \Rightarrow \Delta p < \frac{\Delta \tau}{\max|x|} = \frac{2\Delta \tau}{(M-1)\Delta x} \quad (3.69)$$

Dikkat edilirse, bu limit, ayrık  $(p, \tau)$  Radon dönüşümü için üretilen denklem ile,  $\Delta\tau = \Delta y$  iken uyusacaktır.

Normal parametreler  $(\rho, \varphi)$  kullanılarak Hough Dönüşümü şöyledir.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx_0 dy_0 \Rightarrow \\ f^*(\rho, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \delta(\rho - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi) dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

$(\rho, \varphi)$  Hough dönüşümünün özü, görüntü üzerindeki her bir nokta, ayrık parametre uzayında sinuzoidale dönüşmektedir. Algoritma 3.5`de  $(\rho, \varphi)$  Hough Dönüşümü gerçekleştirilmiştir. En kolay gerçekleştirme, her bir  $\varphi_t$  değeri için, piksel değerlerinin dağıtılmasıdır. Bu algoritmada görüntünün kuadratik(iki değişkenli) olduğu varsayılmıştır. Bu algoritmada denklem (3.10)`da ifade edilen örnekleme parametreleri kullanılmıştır.

En yakın komşular yöntemi ile haritalama yapıldığında örnekleme parametreleri şöyle olur.

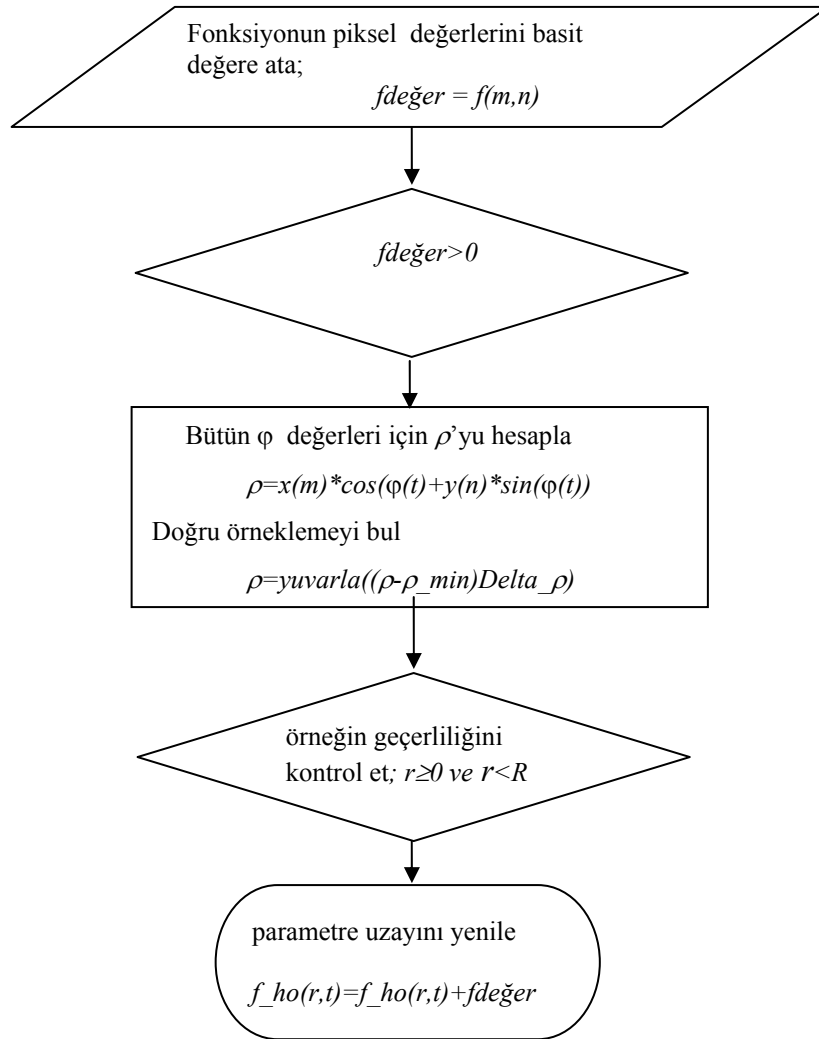
$$r_0 = \frac{x_m \cos \varphi_t + y \sin \varphi_t - \rho_{\min}}{\Delta \rho} \quad \text{ve} \quad r = [r_0] \Rightarrow \quad (3.71)$$

$$\left| m \cos \varphi_t + n \sin \varphi_t - \left( \frac{\rho_{\min} - x_{\min} (\cos \varphi_t + \sin \varphi_t)}{\Delta x} \right) \right| < \frac{1}{2} \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \quad (3.72)$$

Yukarıdaki denklem Hough dönüşümünün,  $\frac{\Delta \rho}{\Delta x}$  bant genişliği içerisinde bulunan bütün piksellerin, ayrık parametre uzayında aynı noktaya haritalandığını gösterir. Bant genişliği, çizgiye dik olan pikseller cinsinden ölçülür. Bu  $\Delta \rho$ `nın oldukça geniş seçilmesini,  $\Delta x$ `in daha küçük seçilmesini gerektirir.

$$\Delta \rho \geq \Delta x \quad (3.73)$$

Algoritma 3.5  $(\rho, \varphi)$  Hough dönüşümü



$\Delta\varphi$ , görüntü uzayındaki piksellerin tırtıklı (perfore) olmuş sinizoidlere haritalanmasından kaçınılacak şekilde, seçilmelidir.

$$\max_{x_m, y_n} \left| \frac{\partial r^*}{\partial \varphi} \right| \Delta\varphi < 1 \Rightarrow \max_{x_m, y_n} \frac{\sqrt{x_m^2 + y_n^2}}{\Delta\rho} \Delta\varphi < 1 \Rightarrow \Delta\varphi < \frac{\sqrt{2}}{(M-1)} \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \quad (3.74)$$

Algoritma 3.5`ün daha verimli ve optimum olabilmesi için, döngülerin gözden geçirilmesi ve optimize edilmesi gerekir. Bu nedenle aşağıda belirtilen hususların algoritma içerisinde gözden geçirilmesi gerekir. Temel haritalama, dört vektörün

hesaplanmasıyla gerçekleştirilir. Bunlar muhtemel  $\varphi_t$  değerleri için, bağıl(relatif) x, y değerleri ile, sinüs ve kosinüs değerleridir.

$$x_b(m) = \frac{x_m}{\Delta\rho}, \quad y_b(n) = \frac{y_n}{\Delta\rho}, \quad \text{ve} \quad rooff = \frac{\rho_{\min}}{\Delta\rho} \quad (3.75)$$

$$\cos teta(t) = \cos \varphi_t \quad \text{ve} \quad \sin teta(t) = \sin \varphi_t$$

Bu diziler yalnız bir defaya mahsus hesaplanır ve t döngüsünde kullanılır. Aşağıdaki denklemde gözüktüğü gibi sinüs ve kosinüslerin extra hesabından kaçınılmış olunur.

$$r = x_b(m)\cos\varphi + y_b(n)\sin\varphi + rooff \quad (3.76)$$

Ayrıca algoritma 3.5'te, r'nin görüntünün içinde olup olmadığının kontrol edilmesi gerekir. Bu ayrık parametre uzayında R'nin artırılması ile sağlanabilir. R'nin artırımı,  $\rho$  yönündeki örneklerin aşağıdaki bağıntıyı sağladığı zaman gerçekleşir.

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\min} &= -\frac{R-1}{2}\Delta\rho \\ 0 \leq \left[ \frac{x_m \cos \varphi_t + y_n \sin \varphi_t - \rho_{\min}}{\Delta\rho} \right] < R \quad \text{bütün} \quad (m,n) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (3.77)$$

$$\max_{x_m, y_n} |x_m \cos \varphi_t + y_n \sin \varphi_t| = \max_{x_m, y_n} \sqrt{x_m^2 + y_n^2} = \sqrt{2} |x_{\min}| < \frac{R}{2} \Delta\rho \Rightarrow \quad (3.78)$$

$$R > \frac{\Delta x}{\Delta\rho} \sqrt{2} (M-1) \quad (3.79)$$

Burada  $x_{\min} = -\Delta x (M-1) / 2$  olarak kullanılmıştır. Parametre uzayının genişletilmesi extra hafıza gerektirir ve bu amaç için pratik olarak extra hesap gerektirmez. İki matrisin haritalanması durumunda, bir önceki duruma benzer şekilde belirtilen vektörlerden hesaplanır.

$$xc(m,t) = xrel(m) * \cos teta(t) \quad \text{ve} \quad ys(n,t) = yrel(n) * \sin teta(t) - rooff \quad (3.80)$$

Böylece haritalama için basit olarak şöylece kullanılabilir:

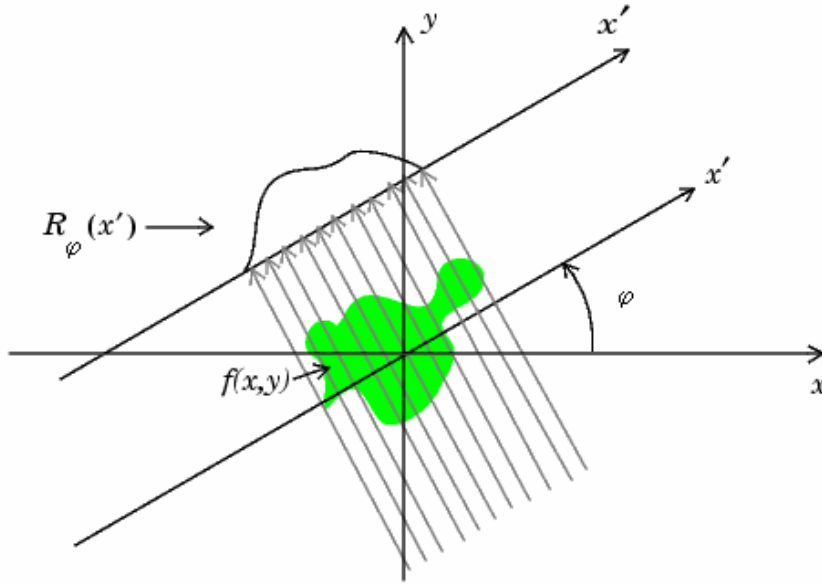
$$r = [x \ c(m,t) + y \ s(n,t)] \quad (3.81)$$

Bir sinizoid'in hesaplanma optimizasyon stratejisi, farklı bir yöntemle, [26]'da bulunabilir. Buradaki temel fikir,  $\rho$ 'nun  $\tilde{\rho}_{m,n} \cos(\varphi_t - \varphi_{m,n})$  şeklinde

yazılabileceğinden yola çıkılarak geliştirilmiştir. Burada  $x_m + jy_n = \rho_{m,n} e^{j\tilde{\varphi}_{m,n}}$  dir. Bu strateji bir tablo kosinüs fonksiyonunun değerini gerekli kılar. Ayrıca tabloda, çarpma ve interpolasyon yapılması gerekir.

## BÖLÜM 4. DİREK GERİ OLUŞTURMA YÖNTEMLERİ

Elimizde üç boyutlu yapısı bilinmeyen bir nesne bulunmaktadır. Bu nesneye ya bir radyasyon dışarıdan üzerinden geçecek şekilde verilmekte( CT veya Transmisyon tomografide olduğu gibi) veya nesnenin içine enjekte edilmektedir(PET veya SPECT tomografide olduğu gibi) ve aynı zamanda radyasyon ölçülmektedir. Amaç bu ölçümlerden elde edilen verilerle, nesnenin iç yapısını oluşturmaktır. Bu problem literatürde ters problem olarak bilinir. Aksi belirtilmedikçe burada iki değişkenli bir fonksiyonun çizgi integralinden tahminler yaparak fonksiyonun kendisi oluşturulacaktır. Her çalışmada olduğu gibi fonksiyon uzayı sınırlı bir alandır.



Şekil 4.1. Radon dönüşümünün sembolik gösterimi

F fonksiyonu açısız düzlemde  $\rho$  ve  $\phi$  değişkenlerinin fonksiyonu olduğunu varsayalım.  $[Rf](l, \phi)$ 'de f fonksiyonunun, dikey eksenle  $\phi$  kadar bir açı yapan ve merkezden l kadar uzakta olan bir çizginin, çizgi boyunca integrali M ile gösterilsin.

Bu  $\rho$  operatörü genellikle Radon dönüşüm olarak bilinir. Geri oluşturma algoritmasının giriş verileri, sınırlı sayıdaki  $(l, \varphi)$  için,  $[Rf](l, \varphi)$ 'nin tahmini değerleridir. Çıkışı ise  $f$  olacaktır. Daha net olarak, bir  $i$  çifti için  $(l_i, \varphi_i)$  ( $1 \leq \varphi_i \leq I$ ),  $[Rf](l_i, \varphi_i)$  biliniyor olduğunu var sayalım.  $Y$ ,  $i$  boyutlu kolon vektörü (ölçüm vektörü) olarak gösteriliyor. Bu vektörün  $i$ 'inci parçası olan  $y_i$ ,  $[Rf](l_i, \varphi_i)$ 'nin mümkün tahminidir. Geri oluşturma algoritmasının amacı;

$Y$  verileri verilmiştir  $\Rightarrow f$  fonksiyonunu tahmin et.

Geri oluşturma algoritmaları ya, seri açılım metodu veya dönüşüm metodu olarak iki kısma ayrılmışlardır. Bir sonraki konuda bu iki yöntem hakkında detaylı bilgi verilecektir.

#### 4.1 Dönüşüm Yöntemi

Radon Dönüşümünün tersi  $R^{-1}$  olarak gösterilir ve şöyledir.  $l$  ve  $\varphi$ 'nin fonksiyonları olan bir  $p$  için;

$$f(x, y) = [R^{-1}p](\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r \cos(\varphi - \phi) - \ell} P_1(\ell, \varphi) dl d\varphi \quad (4.1)$$

$P_1(l, \varphi)$  :  $l$ 'ye göre  $p$ 'nin kısmi türevini gösterir.

Denklem (4.1) den anlaşılacağı gibi, denklemdeki integralin çözülebilmesi için  $P_1$ 'in oldukça düz bir fonksiyon olması gerekir. Bu nedenle  $P_1$ ,  $p$ 'nin  $l$ 'ye göre kısmi türevi olarak alınmıştır. Bazı fiziksel şartları sağlayan (Devamlılık ve Sınırlılık gibi) her fonksiyon  $f$  de olduğu gibi, her  $(r, \varphi)$  noktaları için;

$$[R^{-1}Rf](\rho, \varphi) = f(\rho, \varphi) \quad (4.2)$$

Dönüşüm yöntemleri denklem (4.1)'deki çift integralin değerini, verilen  $P(l_i, \varphi_i)$  değerleri için, tahmin eden sayısal yöntemlerdir ( $1 \leq i \leq I$ ). Aşağıda, en çok

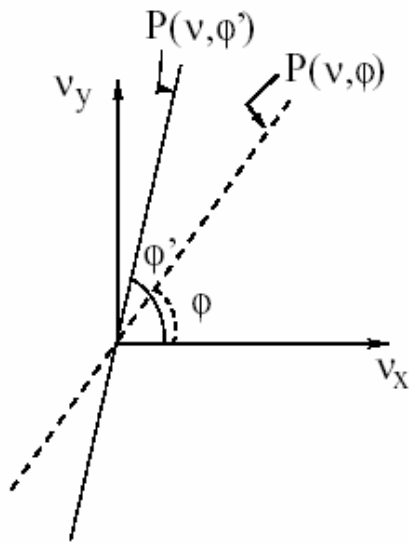
kullanılan yöntem olan Filtrelenmiş Geri oluşum (FBP) ve son zamanlarda geliştirilen yöntemlerden olan linogram yönteminden bahsedilecektir. İlerleyen konularda Radon dönüşümü hakkında daha detaylı bilgiler verilecektir.

Başka bir dönüşüm şekli ise şöyledir; geri projeksiyon,

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} p(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi \quad (4.2)$$

buradaki  $p$  fonksiyonu sinogramı(Radon dönüşümü alınmış sinyali) temsil etmektedir. Bölüm 3'te Radon dönüşümü alınan sinyal  $f^*$  olarak gösterilmişti. Radon dönüşümünün terslenmesi Merkezi katman teoremi(Central Slice Theorem,CST) kullanılarak şöyle gerçekleşir. Merkezi katman teoremi,  $f(x,y)$ 'nin 2D Fourier dönüşümü olan  $F(v_x, v_y)$  ile,  $f(x,y)$  arasındaki ilişkiyi kurmaktadır. Ayrıca  $p(\rho, \varphi)$ 'nin 1D Fourier dönüşümü olan  $P(v, \varphi)$  ile,  $p(\rho, \varphi)$  arasındaki ilişkiyi de kurar. Formülasyon olarak;

$$P(v, \varphi) = F(v \cdot \cos \varphi, v \cdot \sin \varphi) \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

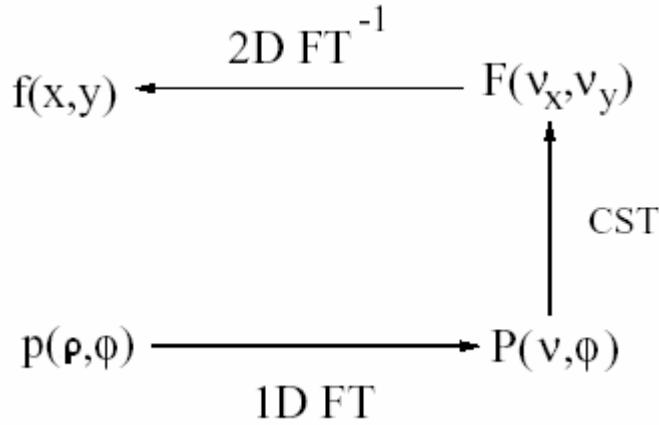


Şekil 4.2. Merkezi Katman Teoremi

$P(v,\varphi)$ 'nin simetri özelliği vardır;

$$P(v, \varphi + \pi) = P(-v, \varphi) \quad (4.5)$$

Merkezi katman teoremi, “ $f(x,y)$  fonksiyonun  $\varphi$  kadar açılı bir çizgi boyunca 2D Fourier dönüşümü, yine  $\varphi$  açısı ile alınmış  $p(\rho,\varphi)$  sinogramın 1D Fourier dönüşümüne eşittir”,demektedir. Bu, yeterince alınan  $P(v,\varphi)$  projeksiyonlarının  $v_x, v_y$  uzayını,  $F(v_x,v_y)$ 'yi elde etmek için dolduracağını ifade eder.



Şekil 4.3. Direkt Fourier Geri oluşturma algoritmasının şematik gösterimi

## 4.2 Filtrelenmiş Geri Oluşum Yöntemi

$F(v_x,v_y)$  fonksiyonu kartezyen uzayda tanımlanmıştır. Oysa,  $P(v,\varphi)$  ise açısız uzayda tanımlanmıştır. Fourier dönüşümünün alınabilmesi için bunlar arasında bir bağıntı kurulmalıdır. Bu bağıntı konvolüsyon uygulanarak gerçekleştirilir.

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(v_x, v_y) e^{-j2\pi \cdot v \cdot (v_x + v_y)} dv_x dv_y \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v \cdot F(v \cos \varphi, v \sin \varphi) e^{-j2\pi \cdot v \cdot (x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dv
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v.P(v, \varphi) e^{-j2\pi.v(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dv \quad (4.7)$$

denklem (4.8) kullanılarak,  $\varphi$  aralığı iki parça halinde alındığında,  $0 < \varphi < \pi$  ve  $\pi < \varphi < 2\pi$  ;

$$\begin{aligned} & \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v.P(v, \varphi) e^{-j2\pi.v(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dv \\ & \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v.P(-v, \varphi) e^{-j2\pi.v(x \cos(\varphi+\pi) + y \sin(\varphi+\pi))} dv \\ & = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v.P(-v, \varphi) e^{-j2\pi.v(x \cos(\varphi+\pi) + y \sin(\varphi+\pi))} dv \\ & = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v.P(-v, \varphi) e^{-j2\pi.v(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dv \end{aligned} \quad (4.8)$$

Bu nedenle

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} |v|.P(v, \varphi) e^{-j2\pi.v(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dv \\ &= \int_0^{\pi} p'(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (4.9)$$

burada

$$p'(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} |v|.P(v, \varphi).e^{-j2\pi.v.\rho} dv \quad (4.10)$$

$$= p(\rho, \varphi) * b(\rho) \quad (4.11)$$

Böylece,  $p'(\rho, \varphi)$ 'nin geri projeksiyonunu alarak  $f(x, y)$ 'yi elde edebiliriz. Filtrelenmiş projeksiyon profili olan  $p'(\rho, \varphi)$ ,  $p(\rho, \varphi)$ 'yi Rampa filtresi ile filtreleyerek elde edilir. Rampa filtresi frekans uzayında,  $B(v) = |v|$  dir. Filtrelenmiş geri oluşum kliniklerce en çok kullanılan yöntemdir.

Tersleme algoritmaları arasında filtrelenmiş geri projeksiyon yöntemi, ayrık gerçeklenimi en kolay olan yöntemdir. Filtrelenmiş geri oluşum yöntemi iki kısımdan oluşur, filtreleme kısmı ve integral kısmı; filtreleme kısmı ileride incelenmiştir. Bu kısımda geri projeksiyonun gerçeklenimi anlatılacaktır.

Geri projeksiyon operatörü denklem (4.9) da elde edilmişti. Burada  $p'$  filtrelenmiş sinogramı göstermektedir (filtrelenmiş geri projeksiyon yöntemi için). Geri projeksiyondan sonra filtreleme yöntemi için ise orijinal sinogramı göstermektedir. Denklem (4.9) için en sık kullanılan yakınsama yöntemi şöyledir.

$$f(x_m, y_n) \approx \Delta\varphi \sum_{t=0}^{T-1} f^*(x_m \cos \varphi_t + y_n \sin \varphi_t, \varphi_t) \quad (4.12)$$

Burada  $\rho$  yönünde 1D interpolasyona gereksinim vardır. Normal olarak ya en yakın komşular yaklaşımı veya doğrusal interpolasyon kullanılır. Şimdilik sinogramın ayrık indisleri kullanılacaktır. Algoritma 4.1'de Geri projeksiyondan önce başlangıç algoritması, 4.2'de ise hızlı geri projeksiyon gösterilmiştir.

En yakın komşular yakınsaması:

$$f(x_m, y_n) \approx \Delta\varphi \sum_{t=0}^{T-1} f^*([r^*], t), \quad (4.13)$$

burada,

$$r^*(m, n, t) = \frac{x_m \cos \varphi_t + y_n \sin \varphi_t - p_{\min}}{\Delta p} \quad \text{dir.}$$

## Doğrusal İnterpolasyon

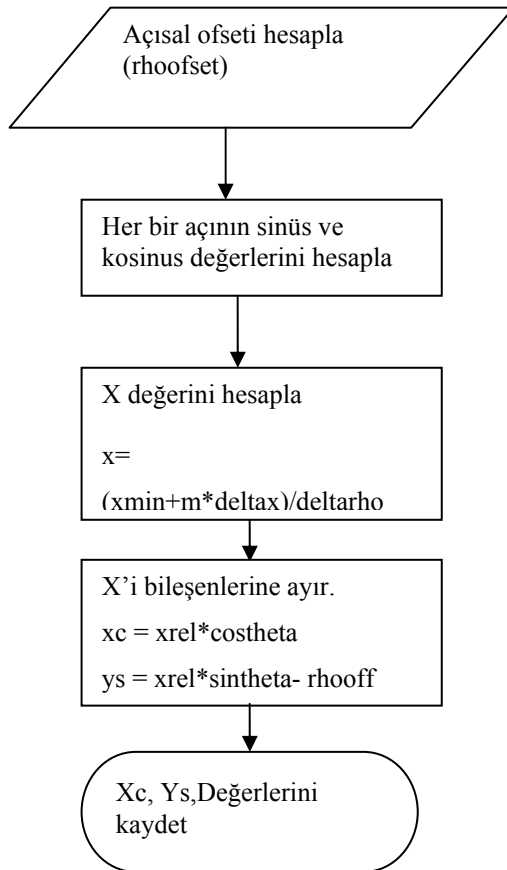
$$f(x_m, y_n) \approx \Delta \varphi \sum_{t=0}^{T-1} (1-w) \tilde{f}^*(r_l, t) + w \tilde{f}^*(r_l + 1, t) \quad (4.14)$$

burada

$$r^*(m, n; t) = \frac{x_m \cos \varphi_t + y_n \sin \varphi_t - \rho_{\min}}{\Delta \rho} \quad (4.15)$$

$r_l = \lfloor r^*(m, n; t) \rfloor$  ve  $w = r^* - r_l$  dır.

Algoritma 4.1. Geri projeksiyondan önce başlangıç

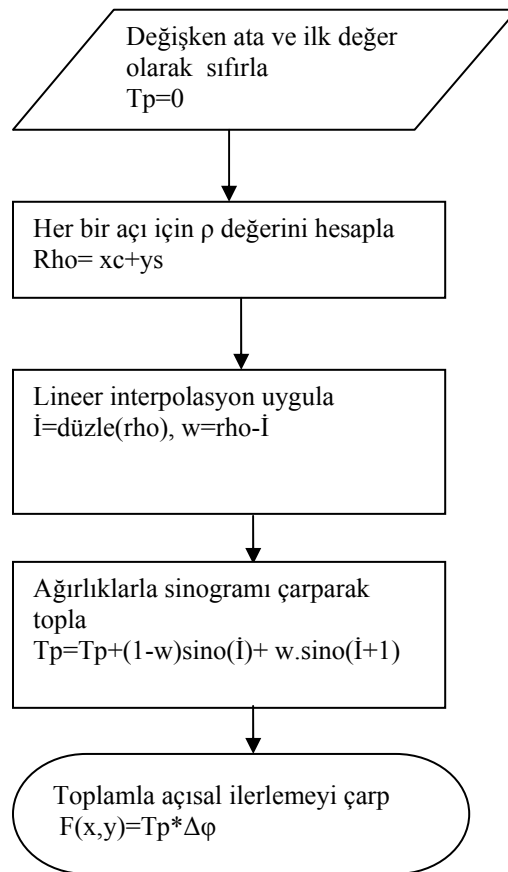


Yüksek dereceli interpolasyon nadiren kullanılmaktadır, çünkü hesaplamadaki artış kadar hassasiyette düzelme olmamaktadır. Geri projeksiyonun karmaşıklığı (döngü

miktarı) görüntü boyutu ile açısal örnekleme sayısının çarpımına eşittir. Genel olarak geri projeksiyon kısmı, 1D filtrelemeden daha fazla hesap gerektirdiği kabul edilir, fakat geri projeksiyon kısmı optimize edilirse, benzer ölçekli sinogramlar için yaklaşık aynı zamana gereksinim duyabilirler. Bu doğal olarak kullanılan donanımın özellikleri ile de ilgilidir.

Denklem (4.13) ve (2.14) teki  $r(m,n;t)$  fonksiyonunun optimize edilmesi gerekir, ki bu, hesaplama zamanını oldukça azaltacaktır. Dikkat edilirse Hough dönüşümünde tek bir sinyal değeri sinuzoid boyunca dağıtılmış iken burada aynı sinuzoid boyunca tüm sinyal değerleri toplanmaktadır.

#### Algoritma 4.2. Hızlı geri projeksiyon



Algoritma 4.1 ve 4.2 de geri projeksiyon gerçekleştirilmiştir. Burada kodlama iki kısma bölünmüştür. Birinci kısım başlangıç kısmı olup kurma parametreleri için bir

defa hesaplanması gerekir. İkinci kısım geri projeksiyon kısmı olup, aynı parametreleri kullanan değişik görüntüler için birçok defa kullanılması gerekecektir. Bu çok katmanlı 2D geri oluşturma PET görüntülerinde oluşan bir durumdur. Algoritma 4.1 de  $r_l$  görüntü içindeki piksele denk gelip gelmediği kontrol edilmemiştir, yani  $r_l$  'in aralığının  $0 < r_l < R-1$  aralığında olup olmadığı test edilmemiştir. Bu döngünün en iç kısmında yapılması gerektiğinden çok fazla zaman tüketen bir işlemdir. Eğer ilk sinogram  $\rho$  yönünde sıfır takviyesi ile genişletilirse kontrol işlemine gerek kalmayabilir, böylece aşağıdaki şart sağlanmış olur.

$$0 < \frac{x_m \cos \varphi_t + y_n \sin \varphi_t - \rho_{\min}^*}{\Delta \rho} < R-1 \quad \forall (x_m, y_n, \varphi_t) \Rightarrow R^* > \sqrt{2}(M-1) \frac{\Delta x}{\Delta \rho} + 1 \quad (4.16)$$

Burada  $R^*$ , aynı örnekleme aralığı  $\Delta \rho$  kullanıldığında, yeni sinogram için gerekli olan örnek sayısıdır.  $\rho$ 'nun simetrik örneklemesini koruyabilmesi için  $\rho_{\min}$  şöyle ayarlanmalıdır.

$$\rho_{\min}^* = -\Delta \rho \frac{R^* - 1}{2}$$

Algoritma 4.1 ve 4.2 deki gerçekleştirim iki tane MT boyutu matris gerektirmektedir ve hesaplama miktarı oldukça azalmıştır.

#### 4.2.1. Örnekleme özellikleri

Önceki kısımlarda direk geri oluşturma yöntemleri, eklenmiş Radon dönüşümünü, geri projeksiyon operatörü olarak kullanmaktadır. Bu, konusu geçen geri oluşturma algoritmalarının, toplam yaklaşımı kullanılarak (ayrık olarak) gerçekleştirilebileceğini gösterir. Fakat örnekleme parametrelerinin dikkatli seçimi ve sürekli formüllerin ayrıştırılmalarının uygun bir şekilde yapılması gerekir.

Birçok gerçeklemede bütün değişkenlerin doğrusal örnekleme kullanılır ve merkezlenmiş kare görüntü olduğu varsayılır.

$$\begin{aligned}
x &= x_m = x_{\min} + m\Delta x \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \\
y &= y_n = y_{\min} + n\Delta y \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\
\rho &= \rho_r = \rho_{\min} + r\Delta\rho \quad r = 0, 1, \dots, R-1 \\
\varphi &= \varphi_t = \varphi_{\min} + t\Delta\varphi \quad \varphi = 0, 1, \dots, T-1
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\Delta x = \Delta y \quad M = N \tag{4.18}$$

$$X_{\min} = -X_{\max} = -(M-1) \Delta x / 2 \tag{4.19}$$

Bu seçim genel olarak optimum nümerik kararlılık sağlamayacaktır, fakat, kolay ve oldukça hızlı gerçekleşme sağlayacaktır. Sinogramın simetri özelliği, parametre uzayının limitlerinin belirlenmesinde bir seçenek sunmaktadır.  $\rho \geq 0$  seçenek olasıdır, bu durumda  $0 \leq \varphi < 2\pi$  olması gerekir.  $\varphi$ 'yı  $0 \leq \varphi < \pi$  arasında seçmek de olasıdır. Bu durumda  $\rho$ 'nın hem pozitif, hem de negatif değerlerinin alınması gerekir. Belirli bir gerçekleştirme için bu seçimin yapılması zorunludur. Aşağıda  $\varphi$ 'nın aralığı  $0 \leq \varphi \leq \pi$  ve  $\varphi_{\min}=0$ , ki bu,  $\Delta\varphi = \pi / T$ , olmasını gerektirir. Çünkü, bu seçim kullanılan limitler ile uyum sağlar, yani filtrelenmiş geri projeksiyon gibi yöntemler için uygundur. Radon veya ters Radon dönüşümü gerçekleştirirken, performansın kabul edilebilir bir düzeyde olabilmesi için bazı kriterlerin sağlanması gerekir. Bunlar, birinci olarak, örnekleme bütün parametrelerde uygun, yeterli olmalıdır. Bu, örnekleme aralığında sınırlamaların olmasını gerekli kılar. İkinci olarak fonksiyon  $f(x,y)$  nin yoğun bir desteğe sahip olması veya başka bir ifade ile  $\sqrt{x^2 + y^2} > |\rho_{\max}|$  olmalıdır. Bu istek,  $|\rho| > |\rho_{\max}|$  ise  $p(\rho, \varphi) = 0$  olmasını gerektirir. Bu olmazsa, sayısal problemler ortaya çıkması kaçınılmazdır. Çünkü bu durumda, sayısal gerçekleştirme fonksiyonu, geri oluşturma için gerekli olan tüm sıfırdan farklı bilgilere sahip olmayacaktır.  $f(x,y)$  nin kompakt bir desteğe sahip olduğu varsayılırsa,  $(x,y) = (0,0)$ 'ın  $|\rho_{\max}|$ 'ı minimize edebilmek için seçilmesi gerekir. Bu ayrık Radon dönüşümünde kullanılan veri dizisinin,  $\rho$ 'ya nispeten daha az boyutlu olmasını sağlar. Normalde  $\rho_r$ ,  $\rho=0$  çevresinde simetrik olarak yerleştirilmiştir ve  $r$  tek sayı olarak seçilmiştir. Bu durumda  $\rho_{\min}$  şöyle kullanılır.

$$\rho_{\min} = -\Delta\rho \frac{R-1}{2} \quad (4.20)$$

Bu  $\rho_{\min} = -\rho_{\max}$ 'a eşit seçildiğini göstermektedir. Geri oluşturulacak görüntüdeki M parametresi, bütün sinogramın sınırları içerisinde kalacak şekilde seçilmelidir. Ancak böylece sinogramın bütün sıfırdan farklı parçaları geri oluşturulmuş olur.

$$\max_{x_m, y_n} \sqrt{x^2 + y^2} = x_{\min} \frac{\sqrt{2}}{\Delta x} > \rho_{\max} \Rightarrow M \left[ \sqrt{2} \frac{|\rho_{\min}|}{\Delta x} \right] + 1 \quad (4.21)$$

Verilen bir sinogram için hâlâ belirlenmesi gereken tek parametre, örnekleme aralığı olan,  $\Delta x$ 'dir. Daha önce kullanılan sinc interpolasyon stratejisi kullanılamaz. Radon uzayındaki sınırlı setlerden seri açılımı yapmak ve bu konuda daha önce konu edilen direkt geri oluşturma şemalarından birini kullanarak geri oluşturma zordur.  $\Delta x$  örnekleme aralığının optimal seçimi, ayrık gerçekleştirilmede kullanılan ek filtreler tarafından belirlenir. Genel olarak alt sınır;  $\Delta\rho = \Delta x$  dir. Eğer alçak geçiren filtre sinogramlarda kullanılırsa veya taranan yapılar oldukça geniş ise daha kaba bir seçim yapılabilir.

### 4.3. Geri Projeksiyondan Sonra Filtreleme

Geri projeksiyon, filtrelemeden önce de yapılabilir. Bu durumda değişik bir filtre kullanılması gerekir. Delta fonksiyonu kullanarak  $f(x,y)$ 'nin tekrar yazılması ile aşağıdaki gibi bir denklem oluşur.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx_0 dy_0 \quad (4.22)$$

$$p(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \delta(\rho - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi) dx_0 dy_0 \quad (4.23)$$

Denklem (4.23), her bir nokta  $(x_0, y_0)$ , Radon uzayında bir sinüs eğrisine dönüştüğünü göstermektedir.  $f(x, y)$ 'nin Radon dönüşümü, bütün sinüs eğrilerinin entegrallerine (toplamlarına) eşittir. Aşağıda  $x_0$  ve  $y_0$ 'a göre entegraller kullanılmamıştır (alınmamıştır). Doğrusal dönüşümler kullanıldığından bu yapılabilir. Şimdi, bir nokta kaynağının verildiğini ve Adjoint(eklenmiş) Radon dönüşümünün, filtrelemeden önce uygulandığını varsayalım.

$$f(x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (4.24)$$

$$p(\rho, \varphi) = \delta(\rho - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi) \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} p'(x, y) &= \int_0^\pi p(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{\left| (x - x_0) \sin \varphi - (y - y_0) \cos \varphi \right|} \Big|_{(x - x_0) \cos \varphi + (y - y_0) \sin \varphi = \rho} \\ &= \frac{1}{\left| - (x - x_0) \sin \arctan \left( \frac{x - x_0}{y - y_0} \right) - (y - y_0) \cos \arctan \left( \frac{x - x_0}{y - y_0} \right) \right|} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{x - x_0}{y - y_0} \right)^2}}{\frac{(x - x_0)^2}{y - y_0} + (y - y_0)} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Bunun iki boyutlu bir konvolüsyon olduğu anlaşılmaktadır.

$$p'(x, y) = f(x, y) ** h(x, y) \quad (4.27)$$

ki burada;

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{dir.}$$

Denklem (4.30)'un bütün (x,y)'ler için geçerli olduğu, denklem (4.23)'teki teknik kullanılarak ispatlanabilir. Bu nedenle denklem (4.30), farklı bir terslenme şemasını ortaya çıkarmaktadır.  $p'(x,y)$ 'nin Fourier dönüşümü  $P(v_x, v_y)$  olduğu varsayımı ile, Denklem (4.30)'ün iki boyutlu Fourier dönüşümü şöyledir.

$$P(v_x, v_y) = F(v_x, v_y) H(v_x, v_y)$$

$$F(v_x, v_y) = \frac{P(v_x, v_y)}{H(v_x, v_y)} \quad (4.28)$$

İki boyutlu standart Fourier dönüşümü tablolarından aşağıdaki sonuçlar bulunabilir.

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leftrightarrow H(v_x, v_y) = \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad (4.29)$$

Bu  $f(x,y)$ 'nin şöyle bulunabileceğini gösterir.

$$p'(x, y) = \int_0^{\pi} p(x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi$$

$$P(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p'(x, y) e^{-j2\pi(v_x x + v_y y)} dv_x dv_y$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} P(v_x, v_y) e^{j2\pi(v_x x + v_y y)} dv_x dv_y \quad (4.30)$$

Burada sunulan geri oluşturma yöntemi, geri projeksiyondan sonra filtreleme diye anılmaktadır. Bu yöntem iki boyutlu yüksek geçirgen filtreden önce entegralin alınmasını gerektirir. Bu yöntem filtrelenmiş geri oluşum yöntemine oldukça benzemektedir.

Ayrık Gerçeklenmesi, geri projeksiyon operatörünün ayrık gerçeklenimini gerektirir. Geri projeksiyondan sonra,  $f(m,n)$  matrisi yüksek geçirgen filtreden geçirilmektedir. Görüntünün spektrumu iki yöntemle elde edilebilir. Birinci olarak çok boyutlu FFT

algoritmaları kullanarak veya ikinci olarak 1D FFT yi görüntünün önce bütün satırlarına sonra bütün sütunlarına uygulayarak spektrum elde edilir. İkinci yöntem ayrık spektrum şöyle yazılabileceğinden , 2 tabanlı ( radix-2) FTT kullanılacaksa kullanılabilir.

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j2\pi(mu/M + nv/N)} \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j2\pi mu/M} \right] e^{-j2\pi mv/N} \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Görüntü boyutları M ve N nin değeri, 2 nin kuvvetleri şeklinde olmalıdır. Eğer görüntü boyutları 2 nin kuvveti değilse görüntü kenarlarına ekstra sıfır takviyesi gerekir. Filtreleme için ekstra sıfır takviyesi gerekmez . Geri oluşturulacak olan görüntü bir disk şeklinde olsun, geri projeksiyon yapılan sinogram (görüntü uzayına) diskin merkezinden uzaklaştıkça, denklem (4.33) de gösterilen nedenden dolayı, daha büyük sıfırdan farklı değerler alacaktır. Bu FTT'nin periyodik davranışından dolayı, görüntü uzayındaki filtrelemede problemler oluşabileceğini gösterir . Bu kenar problemi gereğinden fazla bir alana ( 2 tabanlı FTT kullanılıyorsa , bir üst 2 nin kuvvetlerine denk bir alana ) geri projeksiyon yapılarak çözümlenmelidir; daha sonra genişletilmiş görüntü filtrelenir ve belirlenen görüntü boyutuna uygun kesilerek çözümlenir.

Görüntünün periyodik ve reel sayılı sinyaller için spektrumun kompleks eşlenik simetriye sahip olduğu varsayılmıştır . Reel değerli görüntü, kompleks eşlenik şeklinde spektrum verir.

$$f(m, n) = f(m+M, n) = f(m, n+N)$$

$$F(u, v) = F(m+M, n) = F(m, n+N) \quad (4.32)$$

$$f(m, n) = f(m, n)^* \rightarrow F(u, v) = F(-u, -v)^* = F(M-u, N-v)^* \quad (4.33)$$

Spektrumun hızlı hesaplanabilmesi için spektrum simetrisinden faydalanılır fakat, dağınık bir depolama stratejisi gerekli olduğundan hafıza gereksinimini azaltıcı bir simetriden faydalanmak zordur. Spektrum uygun şekilde hesaplanırsa 2D filtreleme oldukça kolaydır. Kompleks spektrum, filtrenin örneklenmiş versiyonu ile  $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  kolayca çarpılabilir.

$$v_x \rightarrow \frac{u}{M\Delta_x} \quad \text{ve} \quad v_y \rightarrow \frac{v}{N\Delta_x}$$

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{u}{M\Delta_x}\right)^2 + \left(\frac{v}{N\Delta_x}\right)^2} \quad (4.34)$$

Eğer negatif frekanslar söz konusu ise  $v_x < 0$  ise  $v$ ,  $v-N$  ile değiştirilmelidir. Simetri bu şekilde kullanılarak kompleks spektrumun yarısı filtre ile çarpılmış olur ve diğer yarısı, birinci kısımdan kompleks eşlenik simetri özelliği kullanılarak türetilir. Filtre ile çarpılmasından sonra ters iki boyut DTF ( veya FTT ) kullanılır ve sonucun reel kısmı çıkarılır ve sanal kısım sıfır olmalıdır. Spektrum periyodik davranışından dolayı yüksek geçirgen filtrenin 2D ,DTF gerçeğinde kenar etkisini azaltmak için apodize pencere ile çarpılmalıdır. Oldukça fazla sayıda pencereleme seçenekleri olmasına karşın iki tanesi incelenecektir.

Kesilmiş 2D Rampa Filtresi: Teorik olarak türetilen 2D rampa filtresi belirli bir frekans değeri  $k_l$  de kesilir.

$$H(v_x, v_y) = \begin{cases} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} & \text{eger } \sqrt{v_x^2 + v_y^2} < k_l \\ 0 & \text{diger durumlarda} \end{cases} \quad (4.35)$$

Burada  $v_l$  yönlerin birisindeki yukarı sınır frekansının, altında bir değere set edilir, yani  $v_l < 1/2\Delta x$  olmalıdır.

Hanning Penceresi : 2D rampa filtresi , Hanning penceresi ile çarpılabilir. Burada da  $k_l$  , yönlerin birisindeki yukarı sınır frekansının altında bir değere set edilir, yani  $v_l < 1/2\Delta x$  olmalıdır.

$$H(v_x, v_y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \left( 1 + \cos \left( \pi \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_l} \right) \right) & \text{eger } \sqrt{v_x^2 + v_y^2} < v_l \\ 0 & \text{diger durumlarda} \end{cases} \quad (4.36)$$

Her iki filtrede kesme frekansı olarak  $v_l$  kullanılmaktadır ve bu değişken gürültünün seviyesine göre ayarlanabilir. Yüksek gürültü seviyesi düşük  $v_l$  değerini anımsatır ve bu da geri oluşturulan görüntünün bir parça bulanık olmasını gerektirir. Geri oluşturulan görüntünün ortalama değeri her zaman sıfır olacaktır. Geri oluşturulan görüntüde bu değer ön sezgi ile tahmin edilebilir. Beyin tomografisinde ilgili bölge beyin dışında olabilir.

#### 4.4. DFT ile Fourier Dönüşümünün Yaklaşık Çözümü

Sunulan bütün direkt geri oluşturma algoritmaları Fourier dönüşümünü, ya filtreleme veya spektrumun geri haritalanması için (Fourier Dilim Teoreminde olduğu gibi) kullanılır. Sayısal sinyaller için DFT (Ayrık Fourier Dönüşümü) spektrum tahmininde kullanılabilir. Pratikte spektrum hızlı Fourier dönüşümü(FFT) kullanılarak tahmin edilir.

Bir boyutlu sürekli t değişkenli bir fonksiyon,  $f(t)$ 'nin, düzgün şekilde örneklendiğini varsayalım. Yani  $f_s(n) = f(n\Delta t)$  olsun. Ayrıca bu fonksiyonun yalnızca N değeri sıfırdan farklı olsun. Bu durumda FT, DFT ile yakınsanabilir.

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f_s(n) e^{-j2\pi \cdot m \cdot n / N} = F_s(m) \quad (4.37)$$

Böylece  $f_s(m)$  sürekli spektrumu yakınsayacaktır.

$$\Delta t F_s(m) \approx F\left(\frac{m}{N\Delta t}\right) \quad (4.38)$$

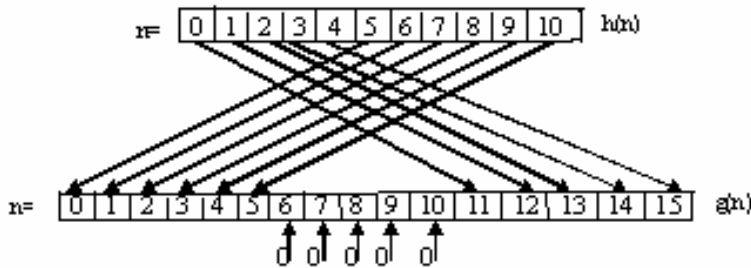
Denklem (4.37)'deki ayrık spektrum,  $f_s(n)$ 'in DFT'si kullanılarak hesaplanır.

$$f_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_a(f) e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} df \approx \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=0}^{N-1} F_d(m) e^{j2\pi \cdot m \cdot n / N} = f_d(n) \quad (4.39)$$

Burada  $f_a$  analog(sürekli) sinyali,  $f_d$  de digital(ayrık) sinyali temsil etmektedir. Bu yöntem iki veya daha fazla boyutlara uyarlanabilir. Dikkat edilirse Ters Fourier dönüşümü (IFT), FFT kullanılarak ta gerçekleştirilebilir. Fourier dönüşümünü DFT ile yakınsarken, spektrumun ayrık örneklerden ve örneklerin ayrık sinyal  $f_s(n)$ 'in Fourier dönüşümünün periyodik tekrarından(periyodu N olan) oluştuğunun bilinmesi gerekir. Ayrıca  $m$ 'in fonksiyonu olarak ayrık spektrum, periyot N ile periyodiktir. Yani

$$F_s(m) = F_s(m + N) \quad (4.40)$$

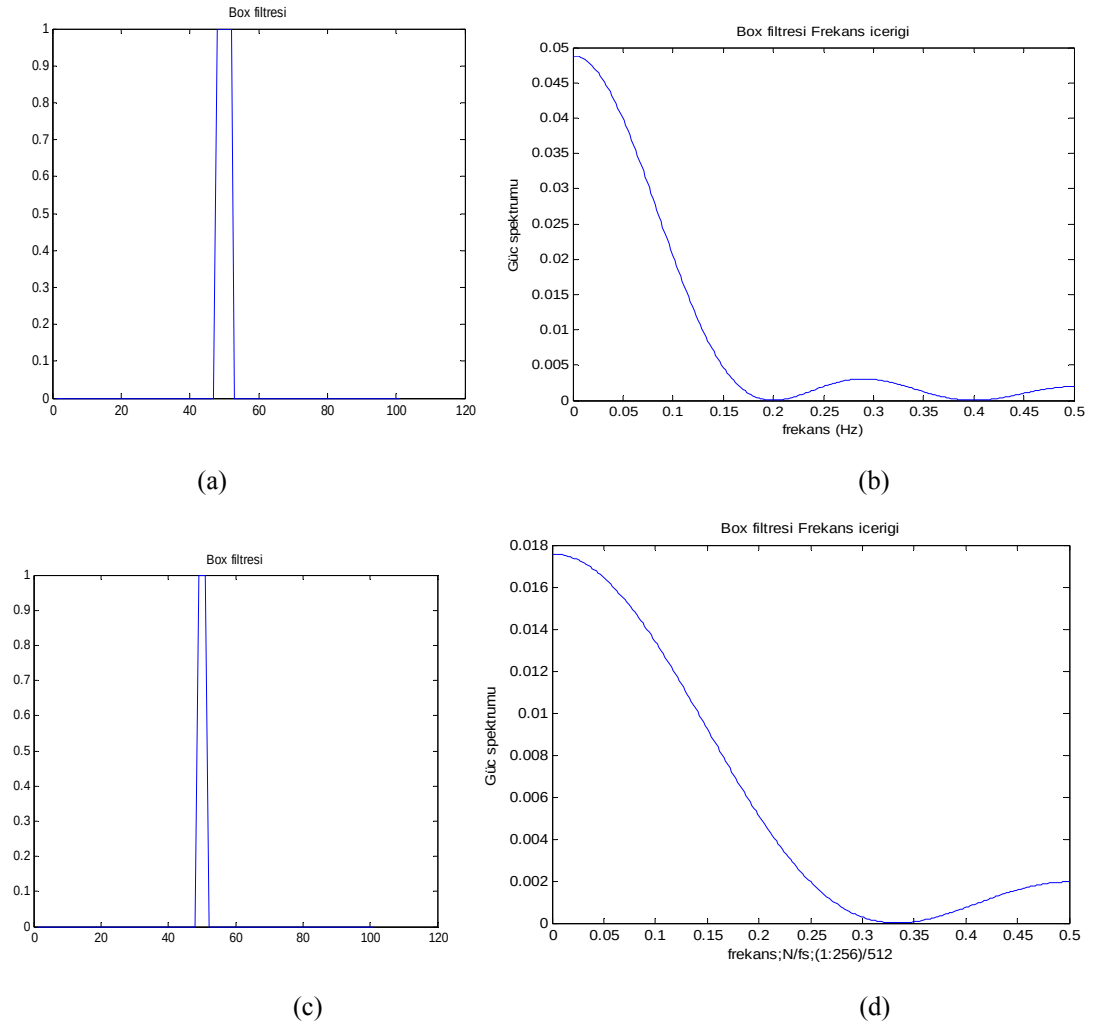
Bu maksimum mutlak frekansın  $m = N/2 \Rightarrow f_u = 1/2\Delta t$  olmasını gerektirir, yani yukarı frekans  $f_u$ , örnekleme frekansının yarısına eşittir. Ayrık spektrumun periyodik davranışından dolayı, sayısal spektrumun son yarısı ( $m = N/2$  den  $m = N-1$  'e) negatif frekanslara karşılık gelir.



Şekil 4.4: 2 tabanlı FFT kullanılırken  $h(n)$  dizisinin daha geniş olan  $g(n)$  dizinine dönüştürülmesi

#### 4.4.1. FFT'nin filtreleme için kullanımı

DFT, IFT'nin pratik olarak gerçeklenimi için kullanılacaktır. DFT'nin, sinyalleri dizi şeklinde kullandığının, bilinmesi gerekir. Yani  $f(n)$   $n=0,1,...,N-1$  ki, burada son yarım negatif, sürekli değişkenlerden oluşmaktadır. Bu durumda lüzumlu sinyal,  $\phi_t$  değerine denk gelen sinogramın ayırık örnekleridir. Yani  $h(r) = f^*(\phi_t, \rho_r)$  dir. Burada  $\rho$ 'nin değerleri '0'(sıfır) etrafında simetrik olarak bulunmektedir. Spektrumun fazını doğru olarak elde edebilmek için, DFT için kullanılan dizi ekil 4.3 deki gibi doldurulmalıdır. Sarma şekline dikkat edilirse,  $\rho$ 'nun negatif değerleri, dizinin son yarısına doldurulmuştur.



Şekil 4.5: Kare(a)(48-52 arası 1) ve spektrumu(b) yanına çizilmiştir. Frekansı 0'dan rneklemeye frekansının yarısına kadardır. Yine kare(c)(49-51 arası 1) ve spektrumu(d) yanına çizilmiştir. ikinci spektrum oldukça düz gözükmektedir.

Hızlı, iki tabanlı FFT algoritmalarını kullanabilmek için, DFT dönüşüm uzunluğu 2'nin kuvveti şeklinde seçilmelidir.  $f(n)$  dizisinin ortasındaki bilinmeyen girişleri, sıfırlarla doldurulmalıdır. Bu işleme sıfır takviyesi denir ve spektrumu etkiler.

Fazla miktarda sıfır olması spektrumun düz olmasını sağlar (daha yoğun örnekleme aralığından dolayı). Bu durum, spektrumda interpolasyon gerekiyorsa uygun olacaktır. Böylece ekstra sıfırların olması sayısal kararlılığın oluşmasına katkı yapacaktır. Şekil 4.5'de yukarı sol köşede kare bir sinyal gösterilmiş ve bunun spektrumu yanındaki şekilde gösterilmiştir. Sıfırlar takviye edilip spektrum yeniden elde edildiğinde oluşan şekiller alttaki resimlerde gösterilmiştir.

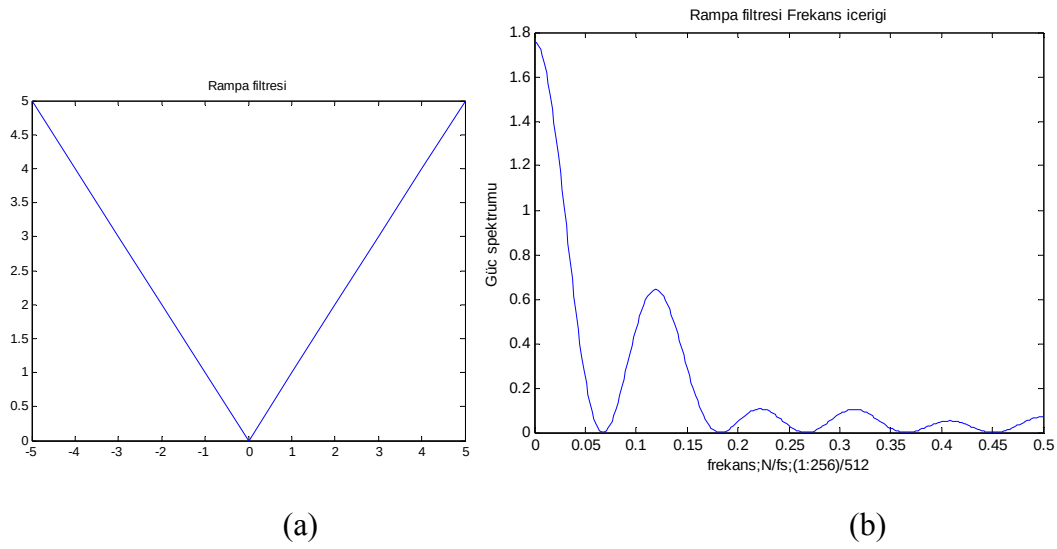
Fourier dönüşümünü yakınsamak için DFT kullanılınca, sinyal, dönüşüm uzunluğundaki periyotlarla , periyodik bir sinyal'e dönüşür. Bu bazen problem olabilir. Bu periyodik etkileşimi kurabilmek için, sinyal bir pencere ile çarpılabilir(yani sinyalin kenarlarını zayıflatan bir ağırlık fonksiyonu ile). Hesap süresini kısaltmak için reel değerli(kompleks olmayan )sinyaller kullanılmalıdır.  $f(n)$ 'in periyodik, ayrık, reel değerli bir sinyal olduğunu varsayalım,

$$F(m) = F(-m)^* = F(N - m)^* \quad (4.41)$$

Burada \* kompleks eşleniği ve  $f(n) = f(n+N)$  dir. Bu simetri denklem (4.37)'deki DFT tanımından kolayca tanımlanabilir ve yalnızca reel sinyal varsa kullanılmalıdır. Örneğin filtrelenmiş (kompleks değeri olmayan ) sinogramlar gibi. Bu şekilde ihtiyaç duyulan FFT'nin uzunluğu yarıya düşürülmüş olacaktır. FFT'nin verimli hesaplanması için nümerik algoritmalar hemen hemen her pakette bulunmaktadır.

Bazı paketler reel değerli  $f(n)$  sıralamasının (uzunluğu  $2^p$  dir ) DFT'sini hesaplayacak fonksiyonlarda eklemişlerdir. Genel olarak FFT algoritması 2 tabanlı algoritmadır. Bu geri oluşturma amaçlıdır; kabalık için değildir. Sıfır takviyesi yapıldığında bu unutulmamalıdır. Filtrelenmiş geri oluşum yönteminin gerçekleşiminde sinogramın bir boyutlu filtrelenmesi gerekir. Burada filtre frekans parametresinin mutlak değerine eşittir, yani  $|v|$  dir. Bu filtre bir çok şekilde yakınsanabilir, fakat, FFT tabanlı filtreleme algoritması, denklem (4.37)'den de

anlaşılacağı gibi aynıdır. Algoritma 4.3, denklem (4.41)'i kullanarak kazanılacak hızı, hesaba katmamaktadır. yani  $f(n)$  dizini, kompleks olarak alınabilir. Ayrıca algoritma sinyal değerlerini şekil 4.4 deki gibi parçalara bölmez ; çünkü filtreleme spektrumun gerçek fazını kullanmaz. Filtre Algoritma 4.1'in 1.kısımında hesaplanmaktadır.(Denklem (4.38)'in örneklenmesi). Bu filtre, rampa veya Ram–Lak filtre diye anılır. Genellikle filtre, bir ağırlık fonksiyonu veya başka bir basit fonksiyonla çarpılarak, daha iyi SNR (sinyalin gürültüye oranı) elde edilir.



Şekil 4.6: Resim(a) Rampa filtresinin 256 numunesinin frekansa göre değişimini göstermektedir. Şekil(b) ise bunun DFT sinin mutlak değerini göstermektedir. Burada Rampa filtresinin DFT'sinin sıfıra yakın frekanslarda etkisini gözlemlemek için alçak frekans bölgesi gösterilmiştir.

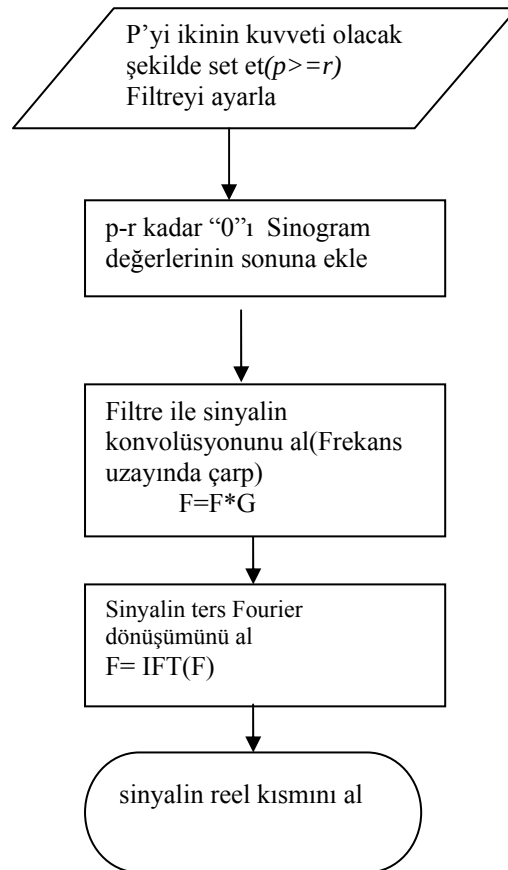
Bütün filtrelerin ortak noktası  $|v|$ 'yi düşük frekanslarda yakınsamalarıdır. Farklılık ise,  $|v|$ 'nin örnekleme frekansının yarısına yaklaşıncaya ortaya çıkmaya başlar, yani  $V_u = 1/2\Delta f$ . Aşağıda, literatürde kullanılan filtre türleri verilmiş olup, bunlarla yalnızca  $V_d \leq V_u$  dan daha küçük frekanslar örneklenmiş ve kullanılmıştır. Bu ağırlık fonksiyonları, pencereler veya apodizing fonksiyonlar diye bilinirler ve gürültüyü bastırmak için kullanılırlar.  $|v|$  filtresi yüksek geçirgen filtredir ve sinogramdaki gürültüyü zayıflatacaktır. Birçok pencereleme fonksiyonu olmakla birlikte burada yalnız dört tanesi ele alınacaktır.

Kesilmiş Ram-Lak/Rampa filtresi : $V_l$  oluncaya kadar filtreyi  $|v|$  örnekle, yani filtre şöyledir;

$$H(v)_{\text{Ram-Lak}} = |v| \quad (4.42)$$

$V_l$ ,  $V_l < V < V_u$  ise filtre sıfıra set edilir. Rampa filtresi oldukça kullanılmakla birlikte, eğer  $V_l$  büyük seçilirse, gürültüyü de yükseltecektir.

#### Algoritma 4.3 Ayırık Fourier dönüşümü kullanarak filtreleme



Genellenmiş Hamming Filtresi:

Hamming penceresi (V) filtresi ile çarpılmıştır.

$$H(v)_{\text{Genellenmiş Hamming}} = |v| (\alpha + (1-\alpha)\cos(\pi v/v_u)) \quad (4.45)$$

tipik olarak  $\alpha$  değeri 0,5-0,54 arasındır. Yine  $V$ ,  $V_l < V < V_u$  arası sıfır seçilmiştir.

Shep-Logan filtresi: Sinc penceresi, Rampa filtresi ile çarpılarak elde edilmiştir

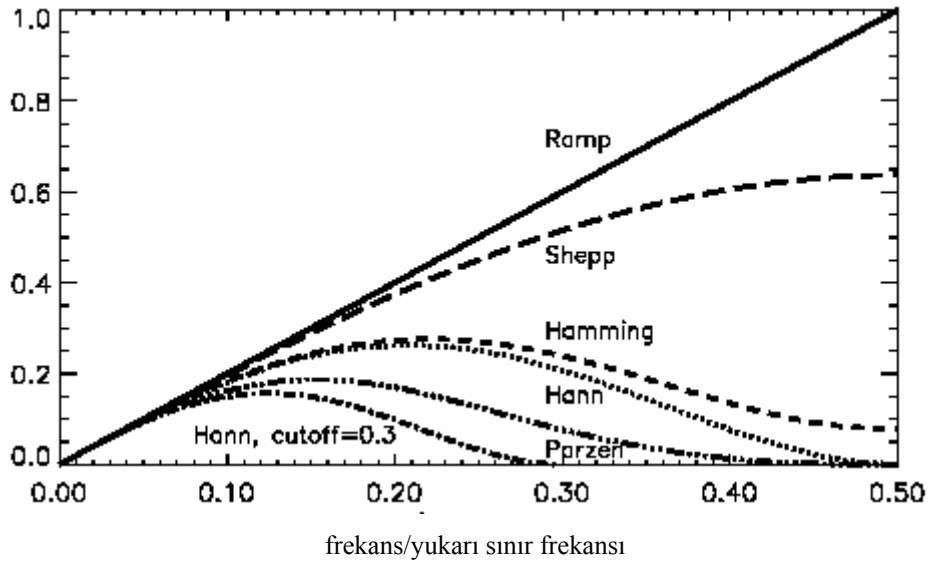
$$H(v)_{Shepp-Logan} = |v| \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot v}{2v_l}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot v}{2v_l}\right)} \quad (4.43)$$

$V_l < |v| < V_u$  ise, filtre sıfıra eşlenmiştir.

Hann filtresi: Hann penceresi,  $|v|$  filtresi ile çarpılmıştır.

$$H(v)_{Hann} = |v| \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi \cdot v}{v_l}\right) \right) \quad (4.44)$$

$V_l < |v| < V_u$  ise, filtre sıfıra eşitlenmiştir.



Şekil 4.7: Rampa, Ram-Lak, Shepp-Logan, ve genellenmiş Hamming filtresinin  $\alpha = 0.5$  için genliğinin, yukarı sınır frekansı  $v_u$ 'ya göre normalize edilmiş frekansa göre değişimleri.

Stokastik filtreler: Gerçek gürültü seviyesine göre parametreleri değişebilen filtrelerdir. Şekil 4.7’de altı filtrenin şekilleri görülmektedir. Bunların hepsi teorik olarak türetilmiş rampa filtresi ile apodize pencere’nin çarpımından meydana gelmektedir. Gürültü olduğu durumda performansı etkilenmektedir. Genel olarak apodize pencere düşük kesme frekansına sahipse çözünürlük kötüye gider, fakat gürültü bastırımı iyileştirilmiş olur.

Şekil 4.6, rampa fonksiyonunu spektrumunu göstermektedir. Spektrumda logaritmik ölçek kullandığına dikkat ediniz. Şekilden anlaşılacağı gibi darbe yanıtının uzantısı oldukça fazladır. Bu araya sıfır eklenilmesi gerektiğini gösterir. Eğer sıfır eklemesi yapılmazsa, DFT nin periyodik davranışı, filtrelenmiş sinyali etkileyebilir.

#### 4.5. Linogram Yöntemi

Bu yöntem çok bilinen geri oluşum teoremine dayanır. Bu teorem “iki boyutlu Fourier Dönüşümü gerçekleştirmek, Radon Dönüşümü alıp daha sonra birinci değişkene göre Fourier Dönüşüm almakla aynıdır.” İlkesidir. Bu yöntemin sunulmasının amacı hızlı olduğunun söylenmesidir. Linogram yönteminde veriler özel bir yöntemle toplanmıştır. Veri toplanan noktaların yerleri tam olarak tanımlanmıştır. Eğer tanımlanmamış ise, geri oluşturmadan önce interpolasyon yapılması gerekir. Eğer fonksiyon, kartezyen koordinattaki noktaları, dizilerinden (array) tahmin edilecekse (bu dizi geri oluşturulacak nesneyi kapsadığını varsayıyoruz)

$$\{(i_d, j_d) \mid -N \leq i \leq N, -N \leq j \leq N\} \quad (4.46)$$

böylece veri fonksiyonu P’nin, aşağıdaki noktalarda bilinmesi gerekir.

$$(nd_m, \varphi_m), \quad -2N-1 \leq n \leq 2N+1, \quad -2N-1 \leq m \leq 2N+1 \quad (4.47)$$

$$\left( nd_m, \frac{\pi}{2} + \theta_m \right), \quad -2N-1 \leq n \leq 2N+1, \quad -2N-1 \leq m \leq 2N+1$$

Burada  $\varphi_m = \tan^{-1} \frac{2m}{4N+3}$  ve  $d_m = d \cos \varphi_m$

Linogram yöntemi, fonksiyonun istenilen noktadaki değerini, çok adımlı işlem basamağı kullanarak veri tahmini yapar. Bu adımlardan bahsetmeden önce iki noktaya dikkat çekilmesi gerekir. Birinci olarak, Ayırık Fourier Dönüşüm (DFT)'nin işlem süresinin uzun olmasıdır. Bu hızlı Fourier dönüşümleri (FFT) (muhtemelen araya sıfırlar yerleştirilmekle) ile çözümlenebilir. İkincisi de; herhangi bir adımın çıkışı, tam olarak bir sonraki adımın ayırık hesabının gerektiği noktalardaki, fonksiyonun değerini tahmin etmesidir. Bu nedenle adımlar arasında interpolasyona gerek kalmamaktadır. Bu iki nokta linogram yönteminin ilgi çekici olmasını sağlamıştır.

Birinci adım, Verinin Fourier Dönüşümünün Alınması;

İkinci değişkenin her bir değeri için, denklem (4.23)'ün birinci değişkene göre DTF'si alınır. Bu projeksiyon teoremine göre, bize, nesnenin aşağıda belirtilen noktalarındaki Fourier Dönüşümünün tahmini değerlerini verir (kartezyen koordinat sisteminde).

$$\left( \frac{k}{(4N+3)d}, \frac{k}{(4N+3)d} \tan \varphi_m \right), \quad -2N-1 \leq k \leq 2N+1 \quad (4.48)$$

$$-2N-1 \leq m \leq 2N+1$$

ve ayrıca şu noktalarda (kartezyen koordinat sisteminde de aynıdır )

$$\left( \frac{k}{(4N+3)d} \tan \left( \frac{\pi}{2} + \varphi_m \right), \frac{k}{(4N+3)d} \right), \quad -2N-1 \leq k \leq 2N+1 \quad (4.49)$$

$$-2N-1 \leq m \leq 2N+1$$

İkinci adım, Pencereleme;

Gürültü ağırlıklı olduğundan şüphelenilen frekansları bastırmak için pencereleme fonksiyonu kullanılır. Pencereleme, FBP'de konvolüsyona karşılık gelir.

Üçüncü adım, İki Fonksiyonu Ayırma:

Geri oluşturulacak objenin örneklenmiş Fourier Dönüşümü (F), iki fonksiyonun (K,L) toplamı şeklinde yazılır. K, denklem (4.48) 'de tanımlanan aralıkta F'nin değerlerinin merkez (orijin) dışında aynısını alır, diğer bütün noktalarda sıfırdır.

L, denklem (4.49)'da tanımlanan aralıkta F'nin değerlerinin merkez (orijin) dışında aynısını alır, diğer bütün noktalarda sıfırdır. Buradan da anlaşılacağı gibi, merkez dışında,  $F = K + L$ 'dir. Önce K ve L'nin 2 boyutlu Fourier Dönüşümünün birbirinden bağımsız şekilde alınmasındaki ve daha sonra sonuçların toplanmasındaki amaç, F'nin tahmini değerini elde etmektir. (DC terim hariç, çünkü sıfır noktasında eşitlik verilmedi). K için elde edilen algoritmanın aynısını L için uygulayabiliriz.

Dördüncü adım, Chirp(Cırlıtı) Z Dönüşüm:

İkinci değişkene Chirp Z dönüşümü uygulanır. Dikkat edilirse denklem (4.48) 'de  $\phi_m$  öyle seçilmiştir ki, eğer k değeri sabitlenir ise, denklemdeki ikinci değişkene göre örnekleme düzgün dağılımlı (uniform) olacaktır. Örneklenmiş bölge dışında G'nin değeri sıfırdır. Böylece her bir sabit k için  $0 < k \leq 2N + 1$  aşağıdaki noktalarda Ters Ayırık Fourier (IDFT) dönüşümünün değerlerini (ikinci değişken için) Chirp Z Dönüşümü kullanılarak gerçekleştirilebilir.

$$\left( \frac{k}{(4N+3)d}, j_d \right), \quad -2N-1 \leq k \leq 2N+1, \quad -N \leq j \leq N \quad (4.50)$$

Chirp Z dönüşümü 3 adet FFT kullanılarak gerçekleştirilebilir.

Beşinci adım, Birinci Değişkene Göre Ters Dönüşüm:

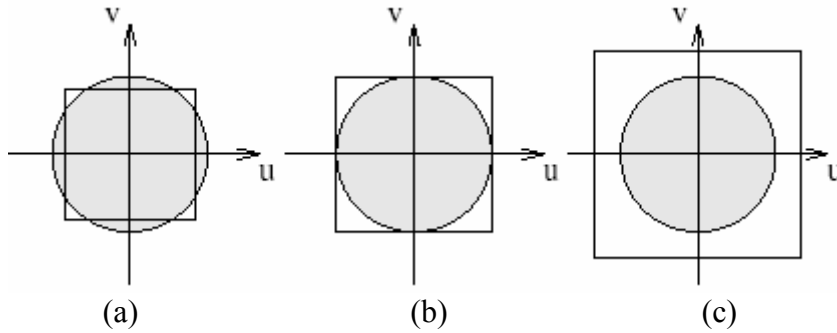
G'nin istenilen her bir noktadaki Ters Fourier Dönüşümü her bir sabit j değeri için, birinci değişkene göre denklem (4.50)'deki noktalardaki değerleri kullanılarak, ters FFT'si alınarak elde edilir.

#### 4.6. Fourier Dilim Teoreminin Gerçeklenimi

Fourier dilimleme teoreminin gerçekleniminde, sinogramın ayırık spektrumu, her bir açısal örnekleme için hesaplanacaktır. DFT'de olduğu gibi burada faz önemlidir, bu

nedenle Şekil 4.4 de gösterilen kayma dikkate alınmalıdır. Bu spektrum, açısal örnekleme olarak alınmıştır ve kuadratik frekans uzayına haritalanmalıdır. Bu, frekans uzayında 2D interpolasyonu gerektirir ki, ileride geniş olarak tartışılacaktır. Son olarak 2D kuadratik spektrum, 2D IFFT kullanılarak, geri oluşturulacak görüntüyü elde etmek için terslenir.

Açısal spektrumu, kuadratik spektruma haritalama için gerekli zaman hesaba katılırsa, bu zaman en yakın komşular yöntemi kullanılırsa ihmal edilecek kadar azdır. Eğer iki tabanlı FFT kullanılıyorsa, Fourier dilimleme teoreminin gerçekleşimi, filtrelenmiş geri projeksiyon ve geri projeksiyondan sonra filtreleme yöntemlerinden daha az zaman istemektedir. Şimdi bu yöntemin gerçekleşiminde ortaya çıkan bazı problemler incelenecektir. Şekil 4.4 de söz konusu olan kayma probleminden başka açısal ve kuadratik spektrum üç farklı şekilde birbirlerine uydurulabilir. ( Şekil 4.8 )



Şekil 4.8. Açısal ve kuadratik spektrumun birbirini karşılama durumları

Sınır, maksimum frekanslara karşılık gelmektedir ( örnekleme frekanslarının yarısına). Şekilden anlaşılacağı gibi geri oluşturulacak görüntü merkezlenmiş ve kare şeklinde olduğu varsayılmıştır. Yani  $M=N$  ,  $x_{\min} = y_{\min}$  ,  $\Delta x = \Delta y$  dir.

Birinci durumda (a) kuadratik spektrum çok küçüktür , açısal spektrumun bazı parçaları kuadratik spektruma haritalanamamaktadır. Bu oldukça kötü bir durum olup, şu şartlarda durum vahimdir.

$$\max |k_x| = \frac{1}{2\Delta x} < v_{\max} = \frac{1}{2\Delta p} \Leftrightarrow \Delta x > \Delta p \quad (4.51)$$

İkinci durumda ise (b) bütün açısal spektrum kuadratik spektruma haritalanır. Bu durum  $\Delta x = \Delta p$  iken oluşur, üçüncü durumda ise (c) açısal spektrum, kuadratik spektrum tarafından kaplanmıştır. Bu çıkış görüntüsünün bütün spektrumu kullandığını göstermekle beraber, geri oluşturulan görüntü alçak filtrelenmiş gibi gözükecektir. Çünkü açısal spektrumun, açısal örnekleme frekansının yarısından daha büyük frekanslara sahip olan değerlerinin, sıfır olduğu kabul edilmesi gerekir.

İki boyutlu interpolasyonda en yakın komşular yöntemi oldukça hızlı olmakla beraber geri oluşturulan görüntüde bazı bozukluklar olması muhtemeldir. Bir diğer seçimde, yavaş fakat oldukça kararlı bir yöntem olan, bi-linear (çift doğrusal) interpolasyon yöntemini kullanmaktır. Bu yöntemde, kuadratik spektrumdaki her bir örneğin değeri, açısal spektrum(grid)daki dört en yakın komşusunun ağırlıklı toplamına eşittir. İlk olarak kuadratik gridin frekansları açısal kordinatta gösterilmelidir. Denklem (4.4) kullanılarak bu sağlanır  $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ . Daha sonra dört en yakın komşu bulunur.

Önce tamsayı t bulunur,

$$t = \left\lfloor \frac{\varphi}{\Delta \varphi} \right\rfloor \Rightarrow \varphi_t \leq \varphi < \varphi_{t+1} \quad \text{ve} \quad w_\varphi = \frac{\varphi - \varphi_t}{\Delta \varphi} \quad \text{secilir} \quad (4.52)$$

Sonra tamsayı r bulunur

$$r = \left\lfloor \frac{v}{\Delta v} \right\rfloor \Rightarrow v_r \leq v < v_{r+1} \quad \text{ve} \quad w_v = \frac{v - v_r}{\Delta v} = \Delta p (v - v_r) \quad \text{secilir} \quad (4.53)$$

Burada son formül yalnızca pozitif frekans değerleri için geçerlidir. Negatif frekans değerleri durumunda, spektrumun periyodik davranışı göz önüne alınmalı ve uygun kaydırma yapılmalıdır. Son olarak , dört değerin açısal koordinattaki bi-lineer interpolasyonu kullanılır.

$$F(v_x, v_y) = (1 - w_\varphi)((1 - w_v)F(v_r, \varphi_t) + w_v F(v_{r+1}, \varphi_t)) + w_\varphi ((1 - w_v)F(v_r, \varphi_{t+1}) + w_v F(v_{r+1}, \varphi_{t+1})) \quad (4.54)$$

Çıkış görüntüsünün örneklenmesi, polar spektrumdaki bilgi seviyesini karşılayacak kadar oldukça yoğun olmalıdır. Fakat açısal spektrumda merkeze doğru gidildikçe ( (0.0) noktasına doğru ) yoğunluk atmaktadır, buda kuadratik spektrumun merkeze doğru fazla örnekleme yapamadığından çakışmaların oluşmasına neden olur. Diğer taraftan, yüksek açısal frekanslarda yoğunluk oldukça düşmekte ve quadratik spektrum, açısal spektrumun gereğinden hızlı örneklemesine neden olur.

Açısal uzayda, örnekler arası açısal uzaklık  $\Delta$  ve radyal parametre  $v$  cinsinden, örnekler arası açısal uzaklık,  $\Delta v = 1/R\Delta p$  dir. Kartezyen uzayda, her bir koordinatın uzaklığı  $\Delta v_x = \Delta v_y = 1/M\Delta x$  dir. Eğer  $\Delta p = \Delta x$  seçilirse, radyal parametre  $v$  örnekleme aralığı, kartezyen düzlemdekini karşılamalıdır, yani

$$\Delta v_x = \Delta v_y = \frac{1}{M\Delta x} = \Delta v = \frac{1}{R\Delta p} \Rightarrow M = R \quad (2.55)$$

burada  $M$  ve  $R$  değerleri genişletilmiş değerlere denk olmalıdır. İki tabanlı FFT kullanılıyorsa , 2'nin kuvveti olmalıdır. Sunulan geri oluşturma algoritması geri projeksiyon algoritmalarından daha çok gürültü birikimine neden olur. Özellikle halka (ringing ) problemi oldukça fazladır, bu problem yüksek dereceli interpolasyon veya Radon uzayında lineer olmayan grid kullanılarak çözümlenebilir.

Dikkat edilirse yüksek dereceli filtreler oldukça iyi nümerik sonuçlar sağlamakla beraber, hesap yükü kabul edilemez seviyelere çıkabilir. Diğer bir yöntem de, açısal örneklerin her birini kartezyen koordinata uygun ağırlıklarla dağıtmaktadır ki, böylece bütün açısal örnekler her zaman kuadratik gridde temsil edilecektir. Örneklerin düzensiz (uneven ) dağılımı ekstra filtreleme gerektirir. Fourier dilimleme teoreminin gerçekleşimindeki en temel problem, frekans uzayındaki iki boyutlu interpolasyon olup ve yöntem bu nedenle klinik kullanımda oldukça az bir başarıya sahiptir.

## BÖLÜM 5. DOĞRUSAL CEBİRLE GERİ OLUŞTURMA ALGORİTMALARI

Bu yöntem, geri oluşturulacak  $f$  fonksiyonunu bilinen, sabit sınırlı sayıda baz fonksiyonlarının doğrusal kombinasyonu ile yaklaşık olarak oluşturulmasına dayanmaktadır.

$$f(r, \phi) \cong \sum_{j=1}^J x_j b_j(r, \phi) \quad (5.1)$$

Buradaki amaç ise, bilinmeyen  $x_j$ 'lerin elde edilmesidir. Eğer ölçümlerin geri oluşturulan nesnelerle doğrusal bir bağıntısı olduğu varsayılırsa (ki çizgi entegrallerin özel durumları için kesinlikle doğrudur), ayrıca, geri oluşturulacak nesne, baz fonksiyonlarından ( $r_{ij}$ ,  $j$ 'nci fonksiyonunun  $i$ 'inci ölçüm değerini gösterir) birisi ise ve bu durumda ölçmenin değerinin ne olacağı kestirilebiliyorsa,  $f$  fonksiyonunun  $i$ 'inci ölçümünün, yaklaşık olarak şöyle olacağı sonucu çıkarılabilir ;

$$\sum_{j=1}^J r_{i,j} x_j \quad 1 \leq i \leq I \quad (5.2)$$

Böylece problem, ölçülen yaklaşık problemlerden,  $x_j$  değerini kestirebilme olacaktır.(tahmin değeri, bazı optimizasyon kriterlerini sağlayan, bir değer olacaktır).

Gösterimi basite indirgemek için görüntü, görüntü vektörü  $x$ ,  $j$  boyutlu (parçaları  $x_j$  ile) ve veri ölçüm vektörü  $y$ ,  $i$  boyutlu olarak gösterilmiştir. Varsayılan projeksiyon matrisi  $R$ , ( $r_{ij}$  girişleri ile)  $r_i$   $i$ 'inci satırın transpozu olsun. ( $1 \leq i \leq I$ ) böylece iç çarpım (inner product) ( $r_i, x$ ) denklem (5.2) ile aynı olur.

Böylece  $y$ , yaklaşık olarak  $Rx$ 'dir. Ayrıca  $x$ ,  $R^j$ 'in alt kümesi olan, sanal değeri olmayan,  $C$ 'ye aittir. Bu formülasyonda  $R$ ,  $C$ ,  $y$  bilinenler ve  $x$  tahmin edildir. Tahmini  $x_j$  değerleri, denklem (5.1) 'de yerine yazılınca, bu denklem  $f$ 'nin yaklaşık değerini verir. Baz fonksiyonlarının seçiminin en basit yöntemi şöyledir: Düzlem piksellere bölünür (veya uzay, voxellere bölünür) ve belirli piksel'de (voxel'de) değeri 1 olan diğer yerlerde "0 (sıfır)" olan bir baz fonksiyonu seçilir. Ayrıca bazı farklı seçimlerde mümkündür. Örneğin [71] yalnızca uzaysal sınırlı olmayan, ayrıca oldukça düz bir küresel simetrik baz fonksiyonu kullanmıştır. Baz fonksiyonunun düz olması oluşacak görüntünün düz olacağının belirtisidir. Bunun yanında küresel simetri  $r_{ij}$ 'in kolay hesaplanmasını sağlar. [72]'de tamamen üç boyutlu PET tomografide bu fonksiyonlar kullanılmıştır. Bu çalışmada seri açılım yöntemine göre daha iyi istatistiksel veriler elde edilmiştir. Bir çok durumda  $r_{ij}$ 'nin çok az bir kısmı sıfırdan farklıdır. Örneğin baz fonksiyonları  $200 \times 200 \times 100$  dizili bir voxelden oluşsun ve ölçümler yaklaşık çizgi entegralleri olsun; bu durumda sıfır olmayan  $r_{ij}$ 'lerin yüzdesi, %1'dir. Çünkü tipik bir çizgi 400 voxelden daha az bir voxeli keser. Bu, ötelemeli yöntemlerle,  $x_j$  tahmini yapmayı verimli kılar. Bu nedenle  $r_{ij}$  sıfırdan farklı durumda,  $i$ 'nin herhangi bir değerinde,  $j$ 'nin listesini ve  $r_{ij}$ 'in değerini veren bir sabrutin kullanılabilir. Cebirsel Geri oluşturma, ART ve diğer Beklenti Maksimizasyonu (EM) algoritmaları gibi bir çok yöntem bu konu başlığı altındadır. Bu yöntemler bir sonraki konularda detaylı bir şekilde tartışılacaktır.

Sürekli fonksiyonlarla geri projeksiyon yapmak yerine ayrık fonksiyonlar kullanarak geri projeksiyonla görüntü oluşturulabilir. Bu radon dönüşümünün ayrık olarak gerçekleştirilmesini zorunlu kılar.  $f(x,y)$  fonksiyonuna göre Radon dönüşümü doğrusal bir dönüşümdür. Aynı şekilde Ayrık Radon dönüşümü de doğrusal bir dönüşümdür. Radon dönüşümünün integralleri ile ilgilenmek yerine Matris şeklindeki eşdeğerleri ile ilgilenilebilir.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{b} & = & \mathbf{A} \quad \mathbf{x} \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\
 f^*(\rho, \theta) & = & R \quad f(x, y)
 \end{array} \tag{5.3}$$

Radon dönüşümünün ayrık değer kümesi,  $f^*(\rho_k, \theta_l) = f_d^*(k, l)$  olsun. geri oluşturma için örneklenen görüntü  $f(x_m, y_n) = f_d(m, n)$  olsun. Eğer  $f^*(k, l)$  matrisi vektör şeklinde yeniden düzenlenirse, yani;

$$b_i = b_{kL+l} = f^*(k, l) \quad (5.4)$$

ve aynı teknik görüntüye uygulanırsa, yani;

$$x_j = x_{nM+m} = f(m, n) \quad (5.5)$$

Böylece, denklem (5.6)'da gösterilen seri açılımı kullanılarak Radon dönüşümü denklem (5.11)'deki gibi yazılabilir. Vektör boyutları  $I = KL$  ve  $J = MN$  ise,  $A$  matrisinin eleman sayısı  $K*L*M*N$ 'dir ve oldukça fazladır[24].

$$f(x, y) = \sum_m \sum_n f(m, n) \phi(x - x_m, y - y_n) \Rightarrow$$

$$f^*(k, l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_m \sum_n f(m, n) \phi(x - x_m, y - y_n) \right) \delta(\rho_k - x \cos \varphi_l - y \sin \varphi_l) dx dy \quad (5.6)$$

$$= \sum_m \sum_n f(m, n) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - x_m, y - y_n) \delta(\rho_k - x \cos \varphi_l - y \sin \varphi_l) dx dy \quad (5.7)$$

Sistem matrisinin elemanları şöyle hesaplanır;

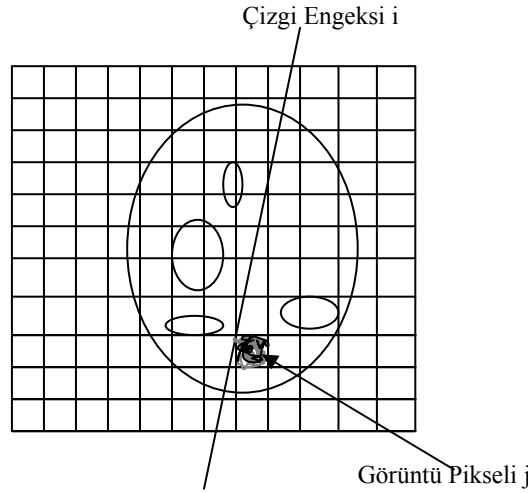
$$a_{i,j} = a_{kL+l, nM+m} \quad (5.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - x_m, y - y_n) \delta(\rho_k - x \cos \varphi_l - y \sin \varphi_l) dx dy \quad (5.9)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) \delta((\rho_k - x_m \cos \varphi_l - y_n \sin \varphi_l) - x \cos \varphi_l - y \sin \varphi_l) dx dy$$

$$= \phi^*(\rho_k - x_m \cos \varphi_l - y_n \sin \varphi_l, \varphi_l) \quad (5.10)$$

$\phi(\dots)$  fonksiyonu görüntü uzayında açılım fonksiyonudur.  $(x_m, y_n)$  noktasındaki pikselin,  $(x, y)$  sürekli noktaları ile görüntü uzayını, nasıl modelleyeceğini belirler. Denklem (5.10), matris elemanı genişletme (yayma) fonksiyonunun Radon dönüşümü olduğunu gösterir. Burada  $\rho$  parametresi piksel pozisyonuna göre kaydırılmıştır.



Şekil 5.1: Matris elemanı  $a_{ij}$ ,  $i$  endeksli sinogram değeri ile  $j$  endeksli görüntü pikseli arasındaki ağırlık faktörü olarak değerlendirilebilir.

Sunulacak olan yöntem, iki birbirine bağımlı vektörden oluşur. Bu vektörler bilinen  $I$  boyutlu  $b(I=KL)$  sinogram vektörü ve bilinmeyen  $j$  boyutlu  $x(j=M^2)$  vektörüdür. Tomografi için  $b$  vektörü, denklem (5.4) kullanılarak bir vektöre katlanmış, sinogram değerleri içerir.  $X$  ise görüntüde geri oluşturulmuş piksellerin kümesidir ve denklem (5.5) kullanılarak vektör halinde yazılmıştır. Bundan sonra ters radon dönüşümü için integral formülasyonu yerine, doğrusal cebir kullanılacaktır. Daha sonra algoritmaları gerçeklemek için yaklaşık değerler kullanılacaktır. Geri oluşturma problemi matris vektör formatında şöyle yazılabilir.

$$b = Ax \quad (5.11)$$

Burada  $A \in K^{I \times J}$  sinogramdan her biri görüntü pikselleri ile her bir çizgi yerleri arasındaki ilişkiyi belirleyen, ağırlık elemanlarının oluşturduğu sistem matrisidir. Radon tabanlı direkt geri oluşturma yöntemleriyle karşılaştırılınca bu yöntemde bazı

yeni kolaylıklarla beraber parametrelerde oluşur. Bunlar şöyle sıralanabilir; Doğrusal cebirin matematikte oldukça fazla altyapısı bulunmaktadır. 2 ve 3 boyutlu PET geri oluşturma problemi için formülasyon yapılabilir. Düzensiz tarayıcı geometrisi, yani: sınırlı çizgi yerlerinin olması direkt yöntemler için oldukça kötüdür. Doğrusal cebirde ise sinogramdaki eksik veriler matris formülasyonu ile çözülebilir. Sınırlı sıfırdan farklı detektör boyutu, sistem içerisinde modellenenebilir. Böylece model, çizgi yakınsaması temeline dayanmaz ve detektör duyarlılığının değiştirilmesi sistem denklemleri içinde modellenenebilir. Böylece fiziksel tarayıcı kısmı daha iyi modellenmiş olur.

Sistem matrisi  $A$  genel olarak quadratik değildir ( $I+J$ ). Bu'da denklem (5.20)'de gösterileceği gibi normal denklem oluşturulmazsa uygulanabilir teknikleri sınırlar. Sistem matrisi tekil veya tekile yakın bir matristir. Yani tekil değerleri çok küçüktür. Doğrusal cebir yöntemi ile oluşturulmuş geri oluşturma şekli hastalıklı problemdir. Görüntü uzayındaki projeksiyon çizgilerinin (sinogramların) düzgün dağılmamış olması nedeniyle bazı görüntü değerleri gerçeğinden çok büyük, bazıları ise çok küçük değer alabilirler. Bu problem sınırlayıcı veya düzenleyiciler kullanarak çözümlenebilir. Sistem matrisi,  $M \times M$  görüntü piksellerinin yalnızca yaklaşık olarak  $M$  tanesinin sinogramdaki belirli kutulara katkı yapmasından dolayı, dağınık bir matristir. Bant matrisinde olduğu gibi,  $A$  matrisi basit bir yapıya sahip değildir. Bu nedenle  $A$ 'nın terslenmesi oldukça yavaştır.  $A$ 'nın basit bir yapıya sahip olmamasının nedenlerinden biride denklem (5.4) ve (5.5)'de ifade edilen kolay sınıflandırma işleminden kaynaklanır. Bir diğer neden de çizgi parametreleri ( $\rho, \phi$ ) ile, görüntü koordinatları ( $x, y$ ) arasında basit bir ilişkinin olmamasıdır.  $A$  matrisi normal olarak oldukça büyüktür. Örneğin,  $256^2 \times 256^2$  elemanlı, bu nedenle matrisin tersini almak zaman ve hafıza gerektiren bir iştir.

### 5.1 Matris Elemanlarının Hesaplanması

$A$  matrisi, bir çok tahmin yöntemi ile tahmin edilebilir. En genel yaklaşımlardan birisi en yakın komşular tahmin yöntemidir. Ayrıca, birinci derece yaklaşım ve iyi bir interpolasyon'da kullanılabilir. Görüntü pikseli destekli matris elemanı oluşturulmasına alternatif yöntemler yayın [71]'de bulunabilir. Aşağıda konu

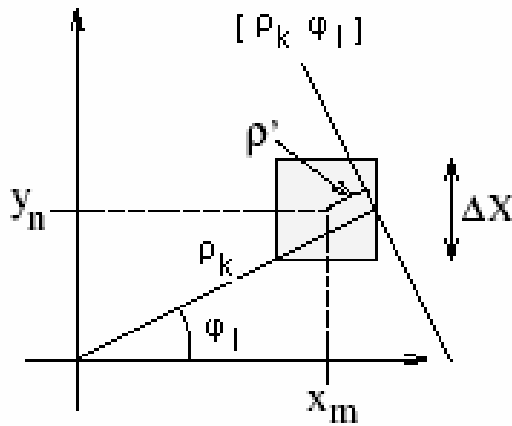
edilecek interpolasyon şemaları oldukça basittir. Eğer hızlı hesaplanabilirse çekici de olabilirler. Çünkü geniş matrisler, hafızada depolanmadan ötelemeli geri oluşturma yöntemi ile bir çok kez hesaplanırlar. İyi bir interpolasyon şeması kaba olan interpolasyona oranla daha fazla zaman gerektirir.

### 5.1.1. Piksel tabanlı en yakın komşular yöntemi

Her bir pikselin etrafına,  $(x_m, y_m)$  noktası,  $\Delta x * \Delta x$  kare genişliğinde yerleştirilmiştir. Çizgi parametreleri  $(\rho_k, \varphi_l)$  kareyi keserlerse matris elemanı  $a_{ij}$   $\Delta x$ 'e set edilir. Kesmezlerse "0" a set edilir. Şekil 5.2'den de anlaşılacağı gibi test kriteri şöyle yazılabilir.

$$\rho' = \rho_k - x_m \cos \varphi_l - y_n \sin \varphi_l \quad (5.12)$$

$$|\rho' \cos \varphi_l| < \frac{\Delta x}{2} \quad \text{ve} \quad |\rho' \sin \varphi_l| < \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow a_{kL+l, nM+m} = \Delta x \quad (5.13)$$



Şekil 5.2.  $(\rho_k, \varphi_l)$  ye karşılık gelen i endeksli çizgi,  $(x_m, y_n)$  de merkezlenmiş kare pikseli keser.

Endeks  $kL+l$ , terslenip aşağı tam sayıya yuvarlama yapılarak ve mod operatörü kullanılarak  $l$  ve  $k$  elde edilebilir. Aynı durum  $nM+m$  içinde geçerlidir. Bu, matris oluştururken anlamlıdır. Yani, satır veya sütun boyunca, genelde çizgi pikseli keserse matris elemanı 1'e, kesmezse "0" a set edilir. Bu  $x$ 'in çözümünün genel olarak ölçeklenmesi anlamına gelir.

### 5.1.2 Ayırık Radon dönüşümü

İleri matris çarpımını yaklaşık elde etmenin bir yöntemi de ayırık Radon dönüşümü kullanmaktır. Bu, algoritma 5.1 kullanılarak ya bir defa (sistem matrisinin depolanmasını gerektirir) veya ihtiyaç duyulduğu zaman yapılabilir. Matrisin devriği ile çarpılması gerekiyorsa, ayırık geri projeksiyon operatörü, (2 ile çarpılarak) kullanılabilir.

### 5.1.3. Birinci derece piksel tabanlı interpolasyon stratejisi

$(x_m, y_n)$  pozisyonundaki piksellerin  $\Delta x * \Delta x$  genişliğinde kare ve genliğinin sabit olduğu varsayılarak çizgi izleme stratejisi kullanılabilir. Matris elemanı olarak çizgi yeri  $(\rho_k, \varphi_l)$  olan piksel boyunca olan uzunluk kullanılmıştır. Dönüşüm ve ölçekleme kuralları kullanılarak temel karenin Radon dönüşümü elde edilebilir.

$$a_{kL+l, nM+m} = \frac{\Delta x}{2} f_{kare}^* \left( 2 \frac{\rho_k - x_m \cos \varphi_l - y_n \sin \varphi_l}{\Delta x}, \varphi_l \right) \quad (5.14)$$

Bu yöntemin bir varyasyonu da, bir çok çizgi kullanıp, sonra bunların ortalamasını almaktır. Çizgiler, kare içerisinde olan ve örnekleme aralığını gösteren parametere uzayında simetrik olarak yerleştirilmiş spotlar şeklinde gösterilebilir. Bu şekilde piksel çözünürlüğünün sınırlı olması ve detektör hacmi (çizgi genişliği) modellenebilir.

### 5.1.4. Sinc interpolasyon stratejisi

Bir başka yaklaşım olan Sinc İnterpolasyonu daha önce konu olan aşağıdaki denklemi kullanır.

$$U(\rho, \varphi, x_m, y_n) = \frac{\Delta x}{\psi} \sin \left( \psi \min \left\{ \frac{1}{|\sin \varphi|}, \frac{1}{|\cos \varphi|} \right\} \right) \quad (5.15)$$

Bu ifade A matrisinin elemanlarını verir.

$$a_{kL+l,nM+m} = \frac{\Delta x}{\psi} \sin \left( \psi \min \left\{ \frac{1}{|\sin \varphi_l|}, \frac{1}{|\cos \varphi_l|} \right\} \right) \quad (5.16)$$

$$\psi = \frac{\pi}{\Delta x} (\rho_k - x_m \cos \varphi_l - y_n \sin \varphi_l) \quad (5.17)$$

Bu şekilde matris elemanlarının elde edilmesi, bir kısmının negatif olmasını gerektirir, ki bu fiziksel açıdan kötü bir durumdur. Görüntüde yalnız bir pikselin sıfırdan farklı olduğu varsayılırsa; negatif sayımlar bazı çizgi yerleri için ölçülebilir. Denklem (5.16) sayısal işleme perspektifinden bakıldığında, daha iyi bir interpolasyonu temsil eder. Bu yöntemin bir diğer olumsuz tarafı, matrisi bu yöntemle oluşturmak diğer yöntemlerle karşılaştırılınca oldukça masraflıdır.

### 5.1. Matris Operasyonları ve Radon Dönüşümü Arasındaki İlişki

Matris formülasyonundaki her bir matris operasyonunun, Radon Dönüşümü işleminde bir eş değeri vardır. Denklem 5.18 ayırık görüntü  $f(m,n)$ 'in tam ayırık parametre uzayı, Radon dönüşümünü ifade eder.

$$B = Ax \quad (5.18)$$

ART ve MART gibi ötelemeli geri oluşturma yöntemleri A'nın i'nci satır ile ( $a_i$  ile) hali hazırdaki geri oluşturulan görüntü  $x$ 'i skalar olarak çarpar. Yani;  $a_i^T x$  ki bu görüntü  $x$ 'in parametre uzayında bir belirli örnekleme Radon dönüşümüdür.

Tablo 5.1. Matris operasyonlarının anlamı

| Operasyon           | Anlamı                                                       |
|---------------------|--------------------------------------------------------------|
| $Ax=b$              | parametre uzayının tamamı için Radon dönüşümü                |
| $b_i = a_i^T x$     | parametre uzayının bir elemanı için Radon dönüşümü           |
| $\tilde{x} = A^T b$ | Sinogramın, görüntü uzayına Adjoint(eklenmiş) Radon dönüşümü |

Ötelemeli algoritmelerde, diğer ortak operatör, matrisin devriğinin alınmasıdır.  $\tilde{x} = A^T b$  ayrık parametre uzayının, görüntü uzayına geri projeksiyonu işlemidir. Bu gerçek, literatürde pek kavranamamıştır. Matrisin transpozu (devriği) (karmaşık değerler olmadan) adjoint (eklenmiş) operatörüdür. Bu durumda eklenmiş Radon dönüşümü iki defa geri projeksiyon işlemi demektir ve matrisin devriğine eşittir. Kare olmayan sistem matrislerinin çözümünde en çok kullanılan yöntem, normal denklemler oluşturmaktır.

$$A^T b = (A^T A)x \quad (5.19)$$

Denklem (5.22)'deki elemanların eş değerleri direkt geri oluşturma metodundaki parametreler kullanılarak türetilmiştir.

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (5.20)$$

$A^T$  geri projeksiyon operatörünü  $(A^T A)^{-1}$  de daha önce konusu geçen filtrelemeyi temsil eder. Filtrelemeli geri oluşum denklem (5.22)'den,  $A$ 'nın tam derecesi (full rank) olduğu varsayılarak şöyle kestirilebilir.

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (5.21)$$

$$= (A^T A)^{-1} A^T (AA^T) (AA^T)^{-1} b \quad (5.22)$$

$$= (A^T A)^{-1} (A^T A) A^T (AA^T)^{-1} b \quad (5.23)$$

$$= A^T (AA^T)^{-1} b \quad (5.24)$$

Burada  $(AA^T)^{-1}$  daha önce konusu geçen  $|v|$  filtresini,  $A^T$  geri projeksiyon işlemini temsil etmektedir. Tam dereceli varsayımı genel olarak daha önce bahsedildiği gibi pek geçerli değildir.

### 5.3. Sınırlama ve Düzenlemeler

Doğrusal cebirde hastalıklı denklemlerin çözümünü durağan yapabilmek için sınırlama ve düzenlemeye ihtiyaç vardır. Denklem (5.11)'in iki norm algılama

şeklindeki çözümü olan denklem (5.25) genel olarak çözümdeki istenmeyen büyük dalgalanmadan dolayı kullanışsızdır.

$$x = \arg \min \left\{ \|b - Ax\|_2^2 \right\} \quad (5.25)$$

Bu yaklaşık olarak sistem matrisinin bağımlılık sayısı ile ilgilidir. Bu problemle başa çıkmanın bir yolu, kısaltılmış SVD kullanmaktır. Dikkat edilirse, denklem 5.25 genel bir, en az kareler uydurmasıdır ve PET sinogramlarında oldukça fazla olan gürültü istatistiğini dikkate almaz. Ötelemeli geri oluşturma algoritmalarını durağan yapabilmenin yolu çözüm üzerine sınırlamalar getirmektir. Örneğin, eğer bir beyin aktivitesi belirleniyorsa negatif olmama şartı getirilebilir. Ayrıca aktivitenin üst limiti de belirlenebilir. Böylece alt ve üst sınırları aşan değerler kesilirler. Bunlar geçici bir yaklaşım olarak gözükse de ötelemeli geri oluşturma algoritmalarının durağanlığını düzeltirler. Teorik noktadan bakıldığında kısıtların içeriğinin analizi oldukça zordur. Ötelemeli yöntemlerin çözümünü durağan hale getirmenin en genel yolu düzenleme yapmaktır. Bu denklem (5.26)'ya başka terimler eklenerek gerçekleştirilir.

$$x = \arg \min \left\{ \|b - Ax\|_2^2 + \lambda^2 \|L(x - x^*)\|_2^2 \right\} \quad (5.26)$$

buradaki  $x^*$  tahmini çözümdür. Eğer değeri yoksa sıfır alınabilir.  $L$  bir matristir, birim matris olarak seçilebildiği (büyük değerleri sınırlar) gibi,  $x$  çözümünün 1. ve 2. derece türevlerine de eşitlenebilir (hızlı değişimi sınırlar).  $\lambda$  düzenleme teriminin ağırlığını belirler.  $\lambda$ 'nın optime değerinin tahmini, yayın [73]'den incelenebilir.

Düzenleme terimlerini geri oluşturma algoritmasına dahil etmenin en kolay yöntemi orijinal denklem setlerinin altlarına, düzenleme setlerini ilave etmekle yapılır.

$$\begin{pmatrix} A \\ \lambda L \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ \lambda L x^* \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Genişletilmiş ve orijinal denklem setlerinin gürültü özellikleri tamamen farklıdır ve belirli bir geri oluşturma algoritmasını nasıl etkileyeceğini teorik olarak kestirmek kolay değildir.

#### 5.4. Tekil Değerler Ayrışımı

Sistem matrisi  $A$ , SVD kullanılarak analiz edilebilir. SVD'nin temel yapısı,  $A$  matrisini parçalara ayırmaktır.

$$A = U\Sigma V^T \quad (5.28)$$

burada  $\Sigma$ ,  $A$ 'nın tekil değerlerini içeren diyagonal bir matristir.  $U$  ve  $V$  matrisleri ise dik matrislerdir.  $\Sigma = \text{diya}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j)$ . Tekil değerler normalde büyükten küçüğe doğru sıralanmıştır,  $(\sigma_i > \sigma_{i+1})$ .  $A$ 'nın şartsal sayısı, en büyük tekil değer en küçük tekil değere oranıdır.

$$S.S(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_j} \quad J \leq I \quad (5.29)$$

Sistem matrisinin özelliklerini göstermek için,  $A$ , denklem (5.15) kullanılarak hesaplanır. Örneklem parametreleri denklem (5.32-35)'deki gibi seçilmiştir ve buna karşılık gelen sistem matrisi incelenmiştir.

Boyutları 21 x 21 olan basit bir görüntü için değişkenlerin alacağı değerler şöyledir.

$$x_m = -1 + m \cdot 0.1, \quad m = 0, 1, \dots, 20 \quad (5.30)$$

$$y_n = -1 + n \cdot 0.1, \quad n = 0, 1, \dots, 20 \quad (5.31)$$

$$\rho_k = -1 + k \cdot 0.1, \quad k = 0, 1, \dots, 20 \quad (5.32)$$

$$\varphi_l = l \cdot \frac{\pi}{20}, \quad l = 0, 1, \dots, 19 \quad (5.33)$$

Sistem matrisindeki tekil değerlerin dağılımına bakıldığında, 20 büyük tekil değeri, 255 yavaşça azalan tekil değerler izlemekte ve daha sonra dramatik bir değişimle hızlı bir düşüşe geçmekte olduğu gözlemlenmiştir. İlk 20 büyük tekil değerler sistem matrisinin boyutuna ve gerçek örneklemeye karşılık gelir. Buradaki problem hastalıklı bir problemdir. Bu,  $x$ 'in değişimini düzenleme kullanıp sınırlandırarak çözülebilir. Hastalıklı matrisi tersleyebilmenin bir yolu da  $\Sigma$  matrisini biri büyük

tekil değerler, diğeri küçük tekil değerler olmak üzere iki parçaya ayırarak yapmaktır.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$\Sigma_2$ 'deki tekil değerler fazla önemli olmayanlardır. Matrisin rankını P seçerek  $\Sigma$ 'un tersini şöyle yazabiliriz;

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Bu tersleme basitçe gerçekleştirilebilir ve sonuç denklem (5.11)'in terslenmesinde kullanılabilir.

$$x = V\Sigma^+U^T b \quad (5.36)$$

bu çözüm, aşağıdaki en az kareler probleminin minimum norm çözümüdür.

$$\min_x \| b - A_x \|_2 \quad (5.37)$$

SVD'nin çözüm için hesaplaması gereken döngü miktarı,  $(4I^2J+8IJ^2)$ 'dir. I ve J değerleri sistem matrisi A'nın, satır ve sütun sayılarıdır. Karmaşıklık, yaklaşık olarak  $(M^6)$  kadardır, M, görüntü uzayında her bir eksen üzerindeki piksel sayısıdır. Tarayıcı geometrisi sabit ise, SVD yalnız bir kere hesaplanacaktır. Sistem matrisinin SVD yapıldıktan sonra minimum norm çözümü, matris çarpımı ve rank değiştirme veya tekil değerlerin bazılarını filtreleyerek (örneğin Thikhanov sınırlayıcıları gibi) kolayca gerçekleştirilebilir. SVD'nin hesaplama karmaşasına rağmen SPECT'in oluşturulmasında kullanılmaktadır. 7080 x 4436 matrisin SUN Sparc 10/40 sisteminde hesaplanması 35 saat sürdüğü belirtilmektedir. Üç boyutlu görüntü oluşturma probleminde fazla sayıda sinogram veya voxel alınrsa, SVD'nin kullanımı için hesaplama şeklinde değişime gereksinim vardır.

### 5.5. ART Kullanılarak Ötelemeli Geri Oluşturma

Denklem (5.11)'i çözerken en çok kullanılan yöntem ART (Algebraic Reconstruction Technique), cebirsel geri oluşturma yöntemidir. ART biyomedikal alanında 1970'li yıllarda ilk defa Cormack ve Hounsfield tarafından basit tomografi görüntülerinde kullanılmıştır. Daha sonraları ART yönteminin Kaczmarz [74] tarafından 1937 yılında geliştirilen algoritmanın benzeri olduğu keşfedilmiştir. ART'deki gerekli temel operatör, sistem matrisi içindeki belirli bir satır ( $a_i$ ) ile çözüm vektörü  $x$ 'in skalar olarak çarpılmasıdır.

$$\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^J a_{ij} \tilde{x}_j = a_i^T \tilde{x} \quad (5.38)$$

ART'de yenileme,  $k$ 'nci ötelemeye, çözüm vektörüne sistem matrisinin  $i$  satırının ölçeklenmiş şekli eklenerek yenileme yapılır.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{b_i - a_i^T x^{(k)}}{a_i^T a_i} a_i \quad (5.40)$$

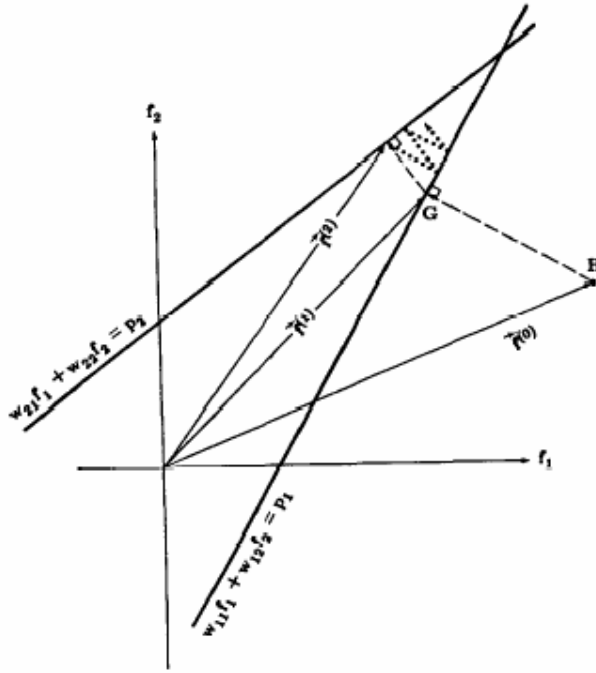
$k$ 'nci ötelemeye denklem  $i$ 'nin çözümü sağlanır.

$$a_i^T x^{(k)} = a_i^T x^{(k-1)} + \frac{b_i - a_i^T x^{(k-1)}}{a_i^T a_i} a_i^T a_i = b_i \quad (5.41)$$

Radon dönüşümü terminolojisi kullanılacak olursa, ART  $k$ 'nci ötelemeye oluşturulacak görüntüyü,  $(p_k, \theta_l)$ 'de, doğru Radon dönüşümünü oluşturmak için yeniler.  $(k, l)$ , denklem (5.2)'de gösterilen sinogram sınıflama şemasıdır.

İlgi duyulan bölgedeki ART kalitesini, o bölgeden geçen çizgi sayısını,  $i$  sayısını, karşılar şekilde seçerek artırılır. Genelde  $i$ ,  $k$ 'nın fonksiyonu olarak seçilir. Örneğin  $i = k \bmod I$ , mod modül operatörüdür. Fakat bu seçim fazla iyi bir seçim değildir. Diğer bir  $i$  seçme yaklaşımı ise,  $i$ 'nin düzgün yoğunluklu dağılımlı olasılık fonksiyonu kullanılarak rasgele seçimidir. İlk olarak  $x^{(0)}$ , sıfır veya iyi bir tahmini

değere atanabilir. Diğer bir seçimde bütün çözüm değerlerini sabit bir değere atamaktır. ART algoritması geometrik olarak da incelenebilir. Şekil 5.4'de ART, iki projeksiyon çizgili, iki parametrelili problemin tahmininde kullanılmıştır. Denklem (5.41)'de gösterildiği gibi  $k$ 'nci ötelemedeki çözüm  $x^k$ ,  $b_{i(k)} = a_i^T x^{(k)}$  ile belirlenen hiper düzlem üzerine dik olarak ( $a_i^T$ 'nin yönü boyunca) projeksiyon edilir. Yakınsama hızı hiper düzlemler arasındaki açıyla oldukça ilişkilidir[22].



Şekil 5.3. İki parametrelili problemin ART kullanılarak üç farklı ötelemesi. Çizgilerin dikliğine bağlı olarak yakınsama hızlı (en sağ şekil), veya yavaş (en sol şekil) olabilir.

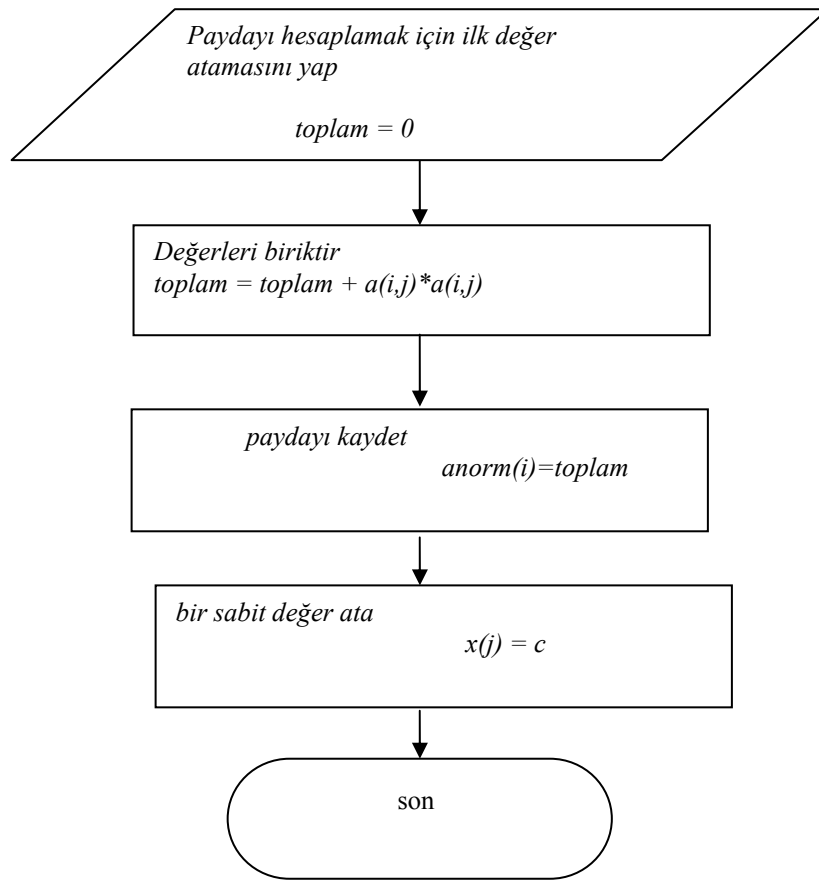
ART'deki her bir öteleme, yalnızca  $a_i$  ile eldeki çözüm  $x^{(k)}$  arasında skalar çarpımı gerektirir. Bu nedenle her bir öteleme hızlıdır. Fakat bir öteleme ile kazanılan kalite çok düşüktür. ART'i iyileştirme yöntemlerinden birisi'de, ağırlık faktörleri şeklinde rahatlatma parametreleri kullanmaktır, şöyle ki;

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \lambda_k \frac{b_i - a_i^T x^{(k-1)}}{a_i^T a_i} a_i^T \quad (5.42)$$

$\lambda_k$ ,  $k$ 'nın basit bir fonksiyonu (lineer bir fonksiyon veya üstsel çürüyen bir fonksiyon) olarak seçilebilir. Denklem (5.41)'deki sonuç verilmiş olmasına rağmen

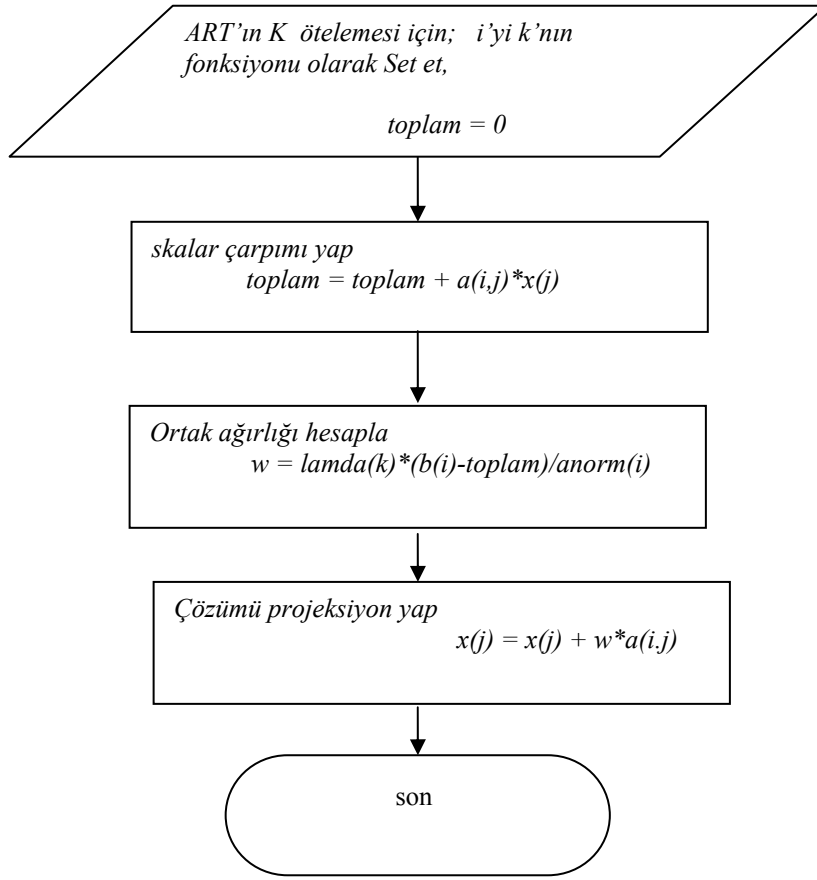
$\lambda_k$ 'nin 1'den farklı bir değere set edilmesi, yakınsama hızını iyileştirdiği literatürde belirtilmiştir[75].  $\lambda_k$ 'nin optimum değerini elde etmek,  $k$ 'nın fonksiyonu olmasına, sinogram değerlerine ve oluşturulan görüntünün örnekleme parametrelerine bağlıdır. [75]'de,  $\lambda_k$ 'nin her öteleme optimizasyonu ve  $k$ 'nın fonksiyonu olarak, satır endeksi  $i$ 'nin dikkatlice seçilmesi, böylece hesaplama zamanı azaltılmış olarak, oluşturulan görüntü kalitesini EM algoritması kadar iyi elde edilebileceği gösterilmiştir.

Algoritma 5.1 ART algoritmasının başlangıç işlemi.



Algoritma 5.1 ve 5.2'de gösterildiği gibi ART oldukça basit bir yöntemdir. Algoritma 5.1'de payda da olan  $a_i^T a_i$  sabit değeri hesaplanmıştır. Bu değer aynı geometri için bir defa hesaplanacaktır. Eğer aynı geometri ile birden fazla sinogram oluşturulacaksa yalnız algoritma 5.2'nin birden fazla kullanılması gerekir.

Algoritma 5.2 ART algoritması



### 5.5.1. Kısıtlarla ART algoritması

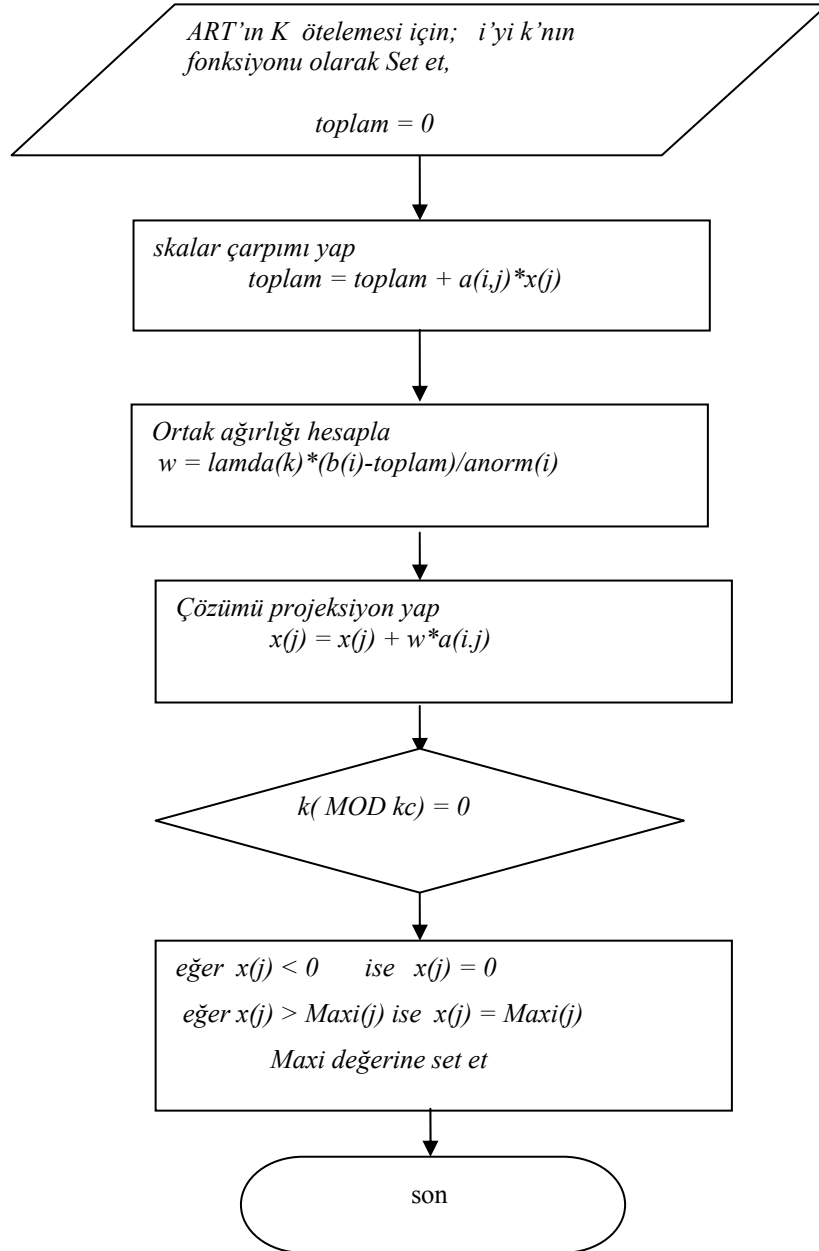
ART'nin çözümü, fiziki olarak yorumlandığında anlaşılacağı gibi her zaman pozitif olmayabilir. Bunu engellemenin en kolay ve kaba olan yolu her bir piksel için belirli bir ötelemeye sınırlamaktır. Yani vektör elemanı veya her bir ötelemeye bir yukarı sınır sabiti kullanarak bir üst limit belirlenebilir. Pozitif kısıt algoritma 5.3'deki gibi sağlanabilir. Bu algoritmanın başlangıcı algoritma 5.1'dir.

### 5.5.2. Regüle edilmiş en az kareler yöntemi

ART'in temel versiyonu şöyle çalışır; her bir birim zamanda bir ölçümü dikkate alarak, ölçümler arasında sürekli dolaşır. Şu anki  $i$  ölçümünde,  $b_{ji}$  değerleri sıfırdan farklı olan,  $x_j$  değerleri yenilenir, ve  $x_j$ 'in değişimi  $b_{ji}$ 'nin değeri ile doğru orantılıdır.

Orantı katsayısı, denklem (5.11)'de yerine yazılan  $x_j$  değeri için elde edilen sonuçla, ölçülen sonucun ( $i$ 'inci ölçümde), aynı olmasını sağlayacak şekilde seçilir. ART

Algoritma 5.3 Kısıtlarla ART algoritması



ART için diğer kısıt türleri [76]'da bulunabilir.

yönteminin diğer varyantlarında, bir öteleme adımı, ölçümlerden bir blok kullanılır, ve  $x_j$ 'in yenilenmesi belirlenen kriterleri sağlayacak şekildedir[25]. Burada, bir özel optimizasyon kriteri ve onunla ilgili algoritma tartışılacaktır.

Buradaki amaç;  $B^j$  uzayında aşağıdaki fonksiyonu minimize eden  $x$  değerinin, verilen skalar  $b$  (düzenleme parametresi) sabit değeri ve sabit vektör  $\mu_x$  için, tespit edilmesidir.

$$b^2 \|y - B_x\|^2 + \|x - \mu_x\|^2 \quad (5.43)$$

$\| \cdot \|$  geleneksel Öklid normudur. Algoritma,  $I$  boyutlu  $u$  vektörü ve her bir ölçüm için bir değişken kullanır. Öncelikle  $u^0$ ,  $I$  boyutlu sıfır vektörü ve  $x^0$ ,  $J$  boyutlu sıfır vektörü olarak tanımlayalım. Daha sonra  $k \geq 0$  için, şöyle set edelim,

$$u^{k+1} = u^k + c^k l_{ik} \quad (5.44)$$

$$x^{k+1} = x^k + b c^k b_{ik} \quad (5.45)$$

Burada  $l_i$ ,  $i$ 'inci elemanı 1, diğer elemanları sıfır olan,  $I$  boyutlu bir vektördür.

$$C^k = \lambda^k \frac{b(y_{ik} - \langle b_{ik}, x^k \rangle) - u_{ik}^k}{1 + b^2 \|b_{ik}\|^2}, \quad (5.46)$$

$i_k = k \pmod{I} + 1$ 'dir.

Teorem 1:  $Y$  herhangi bir ölçüm vektörü,  $r$  herhangi bir reel sayı ve  $\mu_x$ ,  $R^j$ 'in herhangi bir elemanı olduğunu varsayalım. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan herhangi bir reel sayı  $\lambda^k$

$$0 < \varepsilon_1 \leq \lambda^k \leq \varepsilon_2 < 2 \quad (5.47)$$

için  $x^0, x^1, x^2, \dots$  dizisi yukarıda belirtilen algoritmayla belirlenebilir ve denklem 14'ü minimize eden tek bir vektöre yakınsar. Bu algoritmanın gerçekleştirilmesi, bu konunun başında bahsedilen temel ART algoritmasından oldukça daha komplikedir. Burada, ekstra  $I$  boyutlu  $u^k$  vektörlerine gereksinim vardır ve yalnızca  $k$ 'inci ötelemede  $u^k$ 'nin bir elemanına ihtiyaç vardır veya değiştirilir.  $I_k$ 'ler çevrimsel sıralı olarak tanımlandıklarından,  $u^k$ 'nin elemanlarına ancak sırasal olarak erişmek mümkündür. (ölçüm vektörü  $y$ 'de olduğu gibi). Veri erişim sırasının tam anlamıyla doğru seçimi hızlı ilk yakınsama için çok önemlidir. [77]'de bu konudan bahsedilmektedir.

Adımların herhangi bir alt sıralamasında, mümkün olduğunca, birbirinden bağımsız bir şekilde gerçekleştirilmeye çalışılmalıdır. Ayrıca her tam sayı  $k \geq 0$  için bir reel sayı  $\lambda^k$  kullanılmalıdır. Bunlar rahatlatma parametreleri olarak anılırlar. Bunlar, algoritmanın serbest parametreleridir ve pratikte optimize edilmeleri gerekir.  $r_i$ 'ler tamamen hafızaya kaydedilmezler, ancak, ihtiyaç duyulduğunda, sıfırdan farklı elemanlarının yeri ve değeri gerektiğinde hesaplanır. Böylece denklem (5.11) ve (5.43) temel ART'ın hafıza verimli özelliğini paylaşırlar ve hesaplanma gereksinimleri temel olarak aynıdır.  $r_{ij}$ 'in sıfırdan farklı eleman sayısının  $j$  kadar olduğu varsayılırsa, veriyi bir defa çevirebilmek için  $IJ$  kadar döngü gerekir. Bu da FBP'nin geri oluşturma yöntemine yaklaşık eşittir. Ayrıca Teorem 1'in tutarlılığında, herhangi bir sınırlama yoktur. Bu nedenle gerçek veriler kullanıldığında, denklem (5.11), denklem (5.43)'i minimize ederek yakınsayacaktır ki bu, regüle edilmiş en aşağı kareler (Regularized Least Square) yöntemidir.

### 5.5.3. Başlangıç değeri atama

Ötelemeli algoritmanın kullanılması, çözüm vektörü  $x$ 'e bir başlangıç değeri atanmasını gerektirir. Bu değer sabit veya sabit olmayan bir tahmin değeri olabilir. Fourier Slice (yığın) tabanlı hızlı direkt yöntemler başlangıç tahmininde kullanılabilir. Eğer başlangıç tahmini iyi ise ötelemeli algoritmanın çözüme yakınsaması çabuk olacaktır. Fakat algoritmanın davranışı direkt yöntemle

desteklenecektir. Başlangıç değeri için, başlangıç değerinin pozitif olmasından başka bir kısıt yoktur. Çözümün sabit olduğu düşünülürse denklem (5.11)'in ortalaması alınarak başlangıç değeri şöyle atanabilir.

$$x_j^0 = \frac{\sum_{i=1}^I b_i}{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I a_{i,j}} \forall j \quad (5.48)$$

bu başlangıç ataması, sistem matrisinin hesaplanmasını gerektirir. Bu algoritma 1'in başlangıcı ile birleştirilerek gerçekleştirilebilir. Daha hızlı şema, şu yaklaşımı kullanmaktadır: i'nin her bir belirli değeri için, bir çizgi her birinin değeri yaklaşık olarak  $\Delta x$  olan M kadar pikseli keser, böylece

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I a_{i,j} \approx IM\Delta x \Rightarrow x_j^0 = \frac{1}{IM\Delta x} \sum_{i=1}^I b_i \forall j \quad (5.49)$$

Denklem (5.49) kullanılarak daha hızlı hesaplanabilen bir başlangıç değeri ataması yapılabilir.

#### 5.5.4. Çarpımsal ART

Diğer bir öteleme yöntemi de MART'tır. Fakat MART geri oluşturma problemlerinde çok fazla kullanılmamıştır. MART'ın özü, çözümün entropisini denklem (5.51)'deki kısıtlarla maksimize etmektir.

$$-\sum_{j=1}^J x_j \log x_j \quad (5.50)$$

$$b_i = a_i^T x^{(k)} \quad \text{ve} \quad x_j \geq \theta, \forall j \quad (5.51)$$

ART gibi bu yöntem de oldukça hızlı ve kolaydır. Bu tür görüntü değerleri sabit bir değerle başlangıç yapar.

$$x^0 = e^{-1} \quad (5.52)$$

Daha sonra genel öteleme adımları şöyledir.

$$x_j^{(k+1)} = \left( \frac{b_i}{a_i^T \cdot x^{(k)}} \right)^{\lambda_k a_{ij}} x_j^{(k)} \quad (5.53)$$

$\lambda_k$  ayarlanabilir, rahatlatma parametresidir. MART'ta, ART'ta olduğu gibi, öteleme endeksi  $k$ 'ya bağlı fonksiyon olarak satır endeksi  $i$ 'nin seçilmesi için bir şemaya ihtiyaç duyar. Bunun için iki strateji vardır. Birincisi; dögüsel olan ( $i = k \text{ MOD } I$ ) veya rasgele olarak düzgün olasılık dağılımı içerisinde seçmektir. [76]'ya göre özellikle gürültünün sinogramı nasıl etkilediği başta olmak üzere, yöntemin davranışı hakkında net bir bilgi yoktur.

## 5.6. Beklenti Maksimizasyonu Algoritması

Buraya kadar geri oluşturma yöntemleri, projeksiyonları, çizgi integralleri şeklinde modelleyip, ters Radon dönüşümünü ayırık hale getirerek görüntü oluşturdu. Özellikle emisyon tomografide her bir bin'in sınırlı sayıda foton yakalaması nedeniyle gürültü hakimiyeti fazla olabilir. Bu bir çok bilim adamını istatistiksel yöntemler kullanmaya itmiştir. Burada, gerçek ölçümleri gözlemleyerek,  $i$ . ölçümün Poission dağılımlı olduğu varsayılarak, aritmetik ortalaması denklem (5.2)'de verilen, beklentiye maksimize eden  $x$  değeri elde edilmek istenmektedir. Burada elde edilecek görüntünün düzgün dağılımlı olduğunu varsayarak, optimizasyon yapan bir beklenti algoritması oluşturulacaktır. ART ve EM algoritmaları arasındaki fark, ART her bir birim zamandaki ölçüme göre tahmini değeri yenilerken, EM bütün ölçümlerle aynı anda ilgilenmektedir.

Emisyon tomografisi için en çok kullanılan ötelemeli yöntem EM algoritması kullanılarak en yüksek olabilirlik (EM), geri oluşturma (Maximum Likelihood

Reconstruction, MLEM) yöntemidir. Shepp ve Vardi [77] tarafından yazılan ve Vardi, Shepp ve Kaufman [78] tarafından yazılan ünlü makalelerde geri oluşturma istatistiksel tabanı anlatılmıştır. Ölçümlerin Korrelasyonsuz Poisson üreticiden çıktığı varsayılmıştır. Zayıflatma düzeltmesi gibi problemler ise Poisson dağılımı ile modellenmezler. EM algoritmasının bir diğer özelliği ise pozitiflik kısıtının olmasıdır. EM algoritmasının temel özelliği, olabilirliği maksimize etmeye çalışmasıdır.

$$L(x) = P(b / x) = \prod_{i=1}^I \frac{(b_i^*)^{b_i}}{b_i!} e^{-b_i^*} \quad (5.54)$$

$b^*$ ,  $b$ 'nin bilinmeyen ortalama değerlerini göstermektedir; yani gürültüsüz, gerçek sinogram ve  $b^*$  aşağıdaki tam olarak sağlar.

$$b^* = Ax \quad (5.55)$$

Sistem matrisinin katsayıları geçiş olasılıkları olarak değerlendirilmiş ve şöyle normalize edilmiştir.

$$1 = \sum_{i=1}^I a_{i,j} \quad (5.56)$$

Bunun PET'teki anlamı, detektör çifti  $i$ 'deki foton çifti beyin içerisindeki bir noktadan (görüntü içindeki piksellerden birinden) çıkma olasılığı 1'dir. Olabilirliğin beklenilen log Likelihood  $l(x)$ 'in türevi alınıp sıfıra eşitlenerek bulunur.

$$\frac{\partial l(x)}{\partial x_j} = -\sum_{i=1}^I a_{i,j} + \sum_{i=1}^I \frac{a_{i,j} b_i}{\sum_{j'=1}^J a_{i,j'} x_{j'}} = -1 + \sum_{i=1}^I \frac{a_{i,j} b_i}{\sum_{j'=1}^J a_{i,j'} x_{j'}} = 0 \quad (5.57)$$

Buna ilave olarak pozitiflik kısıtı eklenebilir. Bu kısıt Kuhn-Tucker şartlarının aynısıdır.

$$x_j \frac{\partial l(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \forall \quad j \quad \text{where} \quad x_j > 0 \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial l(x)}{\partial x_j} \leq 0 \quad \forall \quad j \quad \text{where} \quad x_j = 0 \quad (5.59)$$

Denklem (5.58) ötelemeli haritalamayı formülize etmekte kullanılır.

$$0 = x_j \frac{\partial l(x)}{\partial x_j} = x_j \left( -1 + \sum_{i=1}^I \frac{a_{i,j} b_i}{\sum_{j'=1}^J a_{i,j'} x_{j'}} \right) \Rightarrow \quad (5.60)$$

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} \sum_{i=1}^I \frac{a_{i,j} b_i}{\sum_{j'=1}^J a_{i,j'} x_j^{(k-1)}} \quad (5.61)$$

Bu denkleme istatistiksel geri oluşturma literatüründe oldukça sık rastlanır. Fakat sistem matrisinin elemanları uygun şekilde normalize edilmelidir. [113]'de EM algoritmasının başka bir versiyonu sunulmuş ve [79]'da gayet iyi sonuçlar alındığı belirtilmektedir. Bunlar denklem (5.56)'daki varsayımı gerektirmeyen daha önce bahsedilen normalizasyonu kullanmışlardır.

$$x_j^{(k)} = \frac{x_j^{(k-1)}}{\sum_{i'=1}^I a_{i',j}} \sum_{i=1}^I \frac{a_{i,j} b_i}{\sum_{j'=1}^J a_{i,j'} x_j^{(k-1)}} \quad (5.62)$$

Denklem (5.62) oldukça kapalı bir formattadır. Bu denklemi gerçeklemek için dört basamağa ihtiyaç vardır.

$$b^f = A x^{(k-1)} \quad (5.63)$$

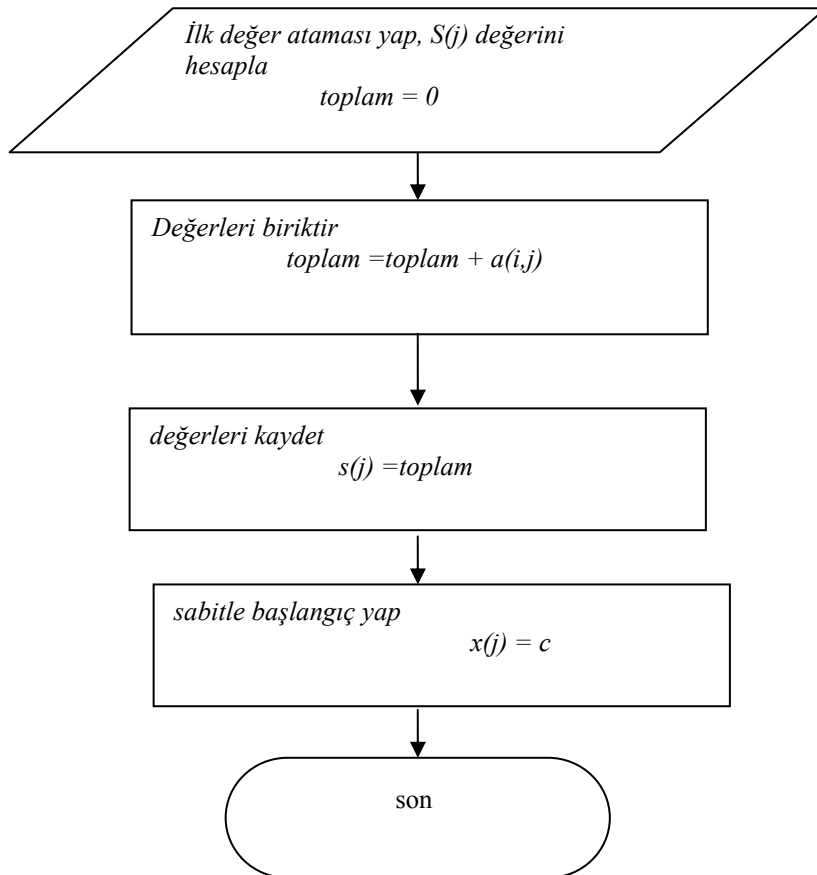
$$b_i^q = \frac{b_i}{b_i^f} \quad (5.64)$$

$$x^b = A^T b^q \quad (5.65)$$

$$x_i^{(k)} = \frac{x_j^{(k-1)} x_j^b}{s_j} \quad (5.66)$$

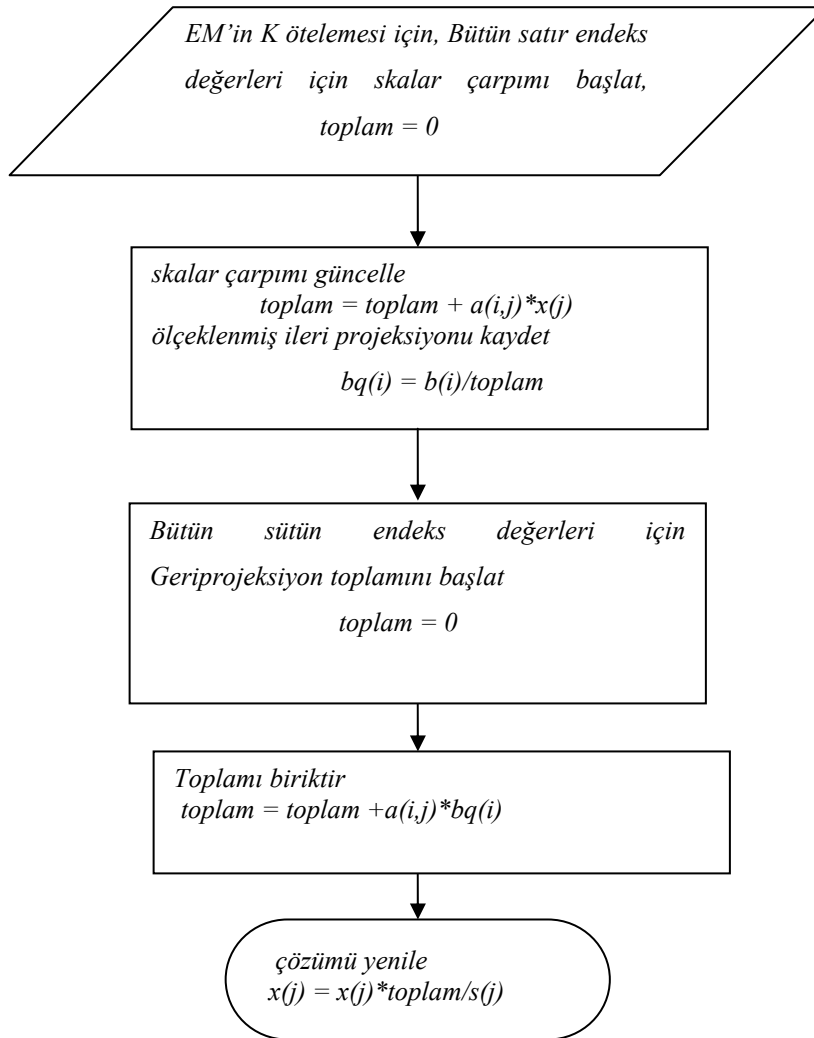
buradaki  $s_j = \sum_{i=1}^I a_{i,j}$  normalizasyon vektörünü oluşturur ve algoritma süresince bir kere hesaplanır. Denklem (5.64)'de açıklanacak durumda belirsizlik meydana gelebilir. Şöyle ki; PET'te görüntülemeye i aktivite bölgesinde olmayan bölgeden geçen bir çizgi ve  $b_i^f$ 'de bunun projeksiyon değeri ise,  $b_i^f$  sıfırdır. Payda sıfır olduğundan, potansiyel belirsizlik söz konusudur.

Algoritma 5.4 EM algoritmasının başlangıç şekli



EM algoritması, denklem (5.63)'den de anlaşılacağı gibi her bir öteleme, eldeki çözümün ileri projeksiyonunu gerektirir ve bu oldukça zaman alacaktır. Ölçülen sinogram  $b_i$ , ileri projeksiyon edilmiş çözüm  $b_i^f$ 'e bölünecek ve daha sonra  $b^q$  görüntü uzayına geri projeksiyon edilecektir. Son olarak denklem (5.66)'da  $s_j$  ağırlıklı geri projeksiyon çözümü  $x_i^b$  ile her bir  $j$  endeksi için (eldeki tahmin  $x_i^{k-1}$ ) çarpılarak çözümün bir sonraki tahmini yapılacaktır.

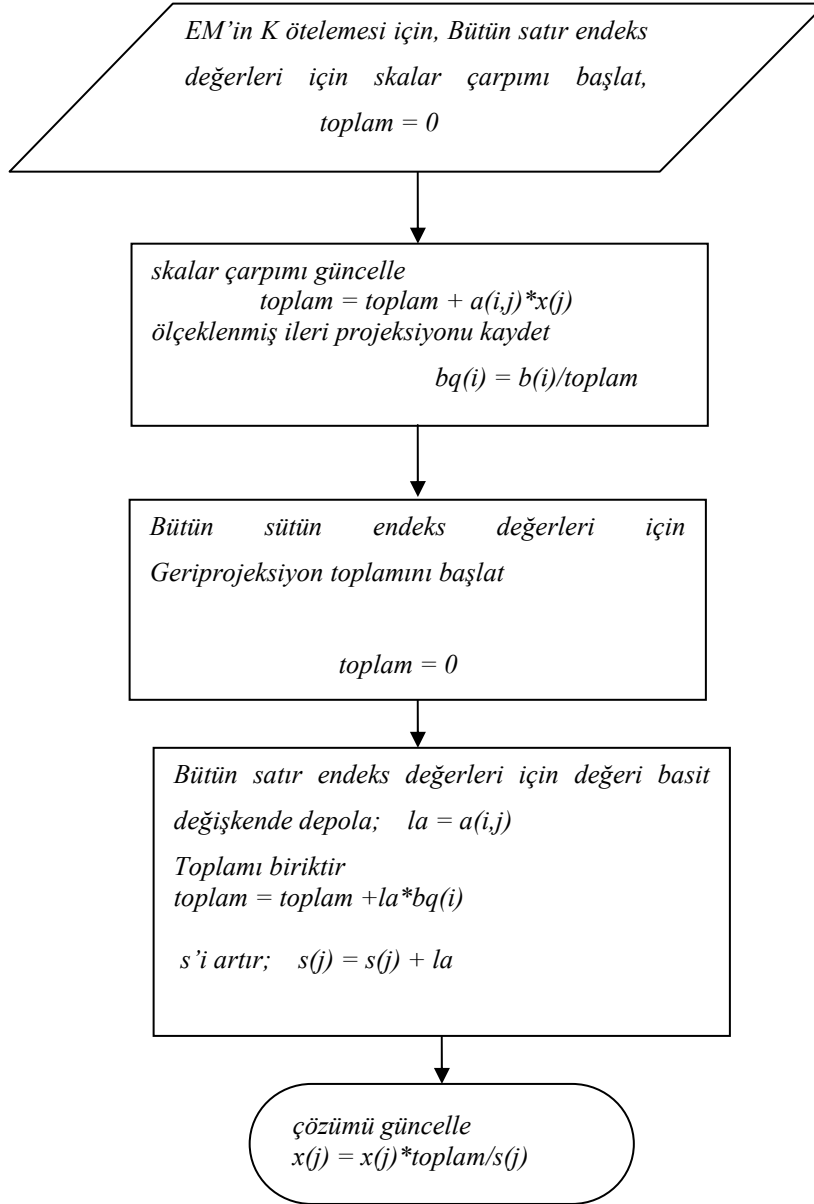
Algoritma 5.5 EM algoritması



Bu da EM'nin her bir ötelemesinin Filtrelenmiş geri oluşum (FB) yönteminden daha masraflı olduğunu gösterir. EM algoritması doğrusal olmadığından sinogramdaki gürültü, direkt olarak geri oluşturulan görüntüyü etkilemez. Fakat daha önceki bütün metotlarda direkt etki söz konusu idi. Algoritma 5.4 ve 5.5 EM algoritmasının

gerçeklenmesini göstermektedirler. Algoritmanın iki parçaya bölünmesinin amacı, birinci kısım aynı geometri için bir defa hesaplanırken ikinci kısım birkaç görüntü oluşturmak için kullanılabilir[33].

Algoritma 5.6 EM algoritmasının ilk öteleme işlemi



Başlangıç kısmında sistem matrisi bir defa oluşturulmakta ve sabit kalmaktadır. Bu aynı geometri ve aynı çözünürlükteki uygulamalar için bir sorun oluşturmaz. Fakat, farklı geometri veya farklı bir çözünürlük söz konusu ise, bu sakınca algoritma 5.6 ile giderildikten sonra algoritma 5.5 kullanılırsa daha iyi olacaktır. Bu durumda

algoritma 5.5'teki indeks sayıcı bütün "k" değerlerini kapsayacak şekilde tanımlanmalıdır.

### 5.7. Maksimum Olabilirlik Kestirimi

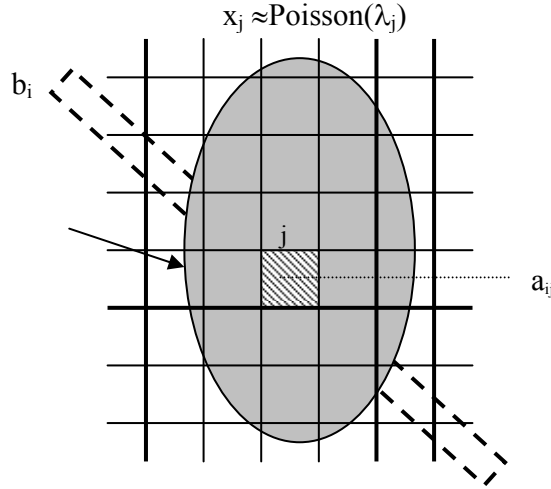
Maksimum olabilirlik kestirimi(Maximum Likelihood Expectation Maxsimization) kısaca MLEM yöntemi olarak da bilinmektedir. Bu yöntemde kullanılacak kısaltmalar ve ifade ettiği anlamlar kısaltmalar kısmında verilmiştir. Şekil 5.5'te piksel j'nin ortalama sayımı  $\lambda_j$ , elde edilecek bilgidir. Çünkü bu pikselin tracer konsantrasyonu ile ilgilidir. Radyoaktif çürüme işlemi her bir piksel için, ortalaması pozitif  $\lambda_j$  olan Poisson dağılımından çekilmiş rastlantısal bir emisyon değeri  $x_j$ 'yi ortaya çıkarır. Algılanan sinogram sayımları, çizgi boyunca bağımsız rastlantısal değişkenlerin realize edilen sonuçlarının toplamıdır.

$$n_i = \sum_j x_{ij} \approx \sum_j \lambda_j a_{ij} \quad (5.67)$$

Her bir detektör çifti,  $a_{ij}$  gibi bir aralığa sahiptir ki bu piksel j'in detektör i'ye katkısını gösterir. Bu fiziksel özellikleri taşıyabilir, zayıflama, ışın mesafesi ve izotropik olmayan PSF (Point Spread Function) gibi. Fakat genellikle basit geometrik kurallarla, örneğin; kesişim alanı veya pikselden LOR(Line of Response) çizgisine olan uzaklığına, lineer interpolasyon şeklinde tanımlanır[30]. Çizgi boyunca olan rastlantısal değişkenlerin ortalamalarının toplamı ölçülen verinin ortalamasına eşittir.

$$\lambda_i = \sum_j \lambda_{ij} = \sum_j \lambda_j a_{ij} \quad (5.68)$$

Yukarıdaki denklem aranan  $\lambda$  değerini içerir. Fakat ortalama  $\lambda_i$  bilinmiyor. Gerçek veri toplamada gürültü, b'ye katkı yapar. Ve  $\lambda_i \neq b_i$  dir ve denklem (5.67), denklem (5.68) gibi çözülemez.  $\lambda$ 'nın çözümü için  $\lambda$  ile b arasında bir istatistiksel bağlantı kurulmalıdır. MLEM algoritması (bilinmeyen  $\lambda$  görüntüsü için) verilen şartlı olasılığı maksimize eden  $\lambda$ 'nın tahmini değerlerini, bilinmeyen görüntünün fonksiyonu olarak araştırır.. Bu, likelihood (olabilirlik) fonksiyonu olarak anılır.



Şekil 5.4. Görüntü ve veri alımının ayrık hale getirilmesi,  $n_d$  piksellerdeki emisyon miktarının, detektör  $d$ 'nin LOR'u ile kesişen ağırlıklı ortalamasıdır.

$$l(\lambda) = f(n / \lambda) \quad (5.69)$$

burada  $f(\cdot)$ ,  $b$  verisinin PSF'sidir. Her bir ötelemede gerçek görüntünün eldeki tahmini veri ile karşılaştırılır. Eğer görüntü gerçek olsaydı, gerçek ölçüme uygun bir veri oluşturulmalıdır. Uygunluk olabilirlik kriteri ile gerçekleşir ve bir sonraki tahmin bir öncekinden daha iyidir. Geri oluşturulan ML görüntüsü şöyle bir tahmindir[23].

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} [l(\lambda)] \quad (5.70)$$

İfadeleri sadeleştirmek için olabilirlik yerine logaritmik olabilirlik ( $\ln(l(\lambda)) = L(\lambda)$ ) kullanılabilir. Gözlemlenmemiş tam veri  $x$ , maksimum olabilirlik kestiriminin (MLEM) türetilmesinde yol gösterici olur. Tam veri, gözlemlenen veri  $b$  ile birden çoğula haritalama yapılarak ilişkilendirilir.  $x$ 'i tanıtmamanın nedenini daha iyi anlamak için önce tam veriyi kullanmadan logaritmik olabilirliği yazalım. Her bir sinogram bin'i (çizgisi)  $b_i$ , Poisson ( $\lambda_i$ ) dağılımına sahiptir. Böylece amaç fonksiyon;

$$L(\lambda) = \ln(f(b|\lambda)) = \ln \left( \prod_i e^{-\lambda_i} \frac{(\lambda_i)^{b_i}}{b_i!} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i [-\lambda_i + b_i \ln(\lambda_i) - \ln(b_i!)] \\
&= \sum_i \left[ -\sum_j \lambda_j a_{ij} + b_i \ln \left( \sum_j \lambda_j a_{ij} \right) \right] + C,
\end{aligned} \tag{5.71}$$

$C$ ,  $\lambda_j$ 'den bağımsız terimleri içerir. Denklem (5.71),  $\lambda_j$ 'e göre maksimize edilmelidir. Bu da logaritmik bir çok döngü gerektirdiğinden gerçekleşmesi zordur. Eğer tam veri  $x$ , kullanılırsa denklem (5.71) ile uğraşmak daha kolay olur. Her bir  $x_{ij}$  Poisson ( $\lambda_{ij}$ ) dağılımı şeklinde dağılmıştır. Bu nedenle logaritmik olabilirlik;

$$\begin{aligned}
\ln(f(x|\lambda)) &= \ln \left( \prod_{ij} e^{-\lambda_{ij}} \frac{(\lambda_{ij})^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \right) \\
&= \sum_{i,j} \left[ -\lambda_{ij} + x_{ij} \underbrace{\ln(\lambda_{ij})}_{=\lambda_j a_{ij}} - \ln(x_{ij}!) \right] \\
&= \sum_{i,j} [-\lambda_j a_{ij} + x_{ij} \ln(\lambda_j)] + C.
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Denklem (5.72)'deki  $x_{ij}$  kullanılamaz olduğundan yerine şartlı beklenen değeri kullanılır. Verilen  $b$  verisi ve eldeki tahmin  $\lambda^{<k>}$  için;

$$Q(\lambda, \lambda^{<k>}) = E \left[ \ln[f(x|\lambda)] \mid b, \lambda^{<k>} \right] \tag{5.73}$$

toplamı  $b_i$  üzerine şartlandırılan  $x_{ij}$  poisson değişkeni bir çok terimli (multinomial) dir ve beklenen değeri şöyle hesaplanır.

$$E[x_{ij} | b_i, \lambda^{<k>}] = NP = b_i \frac{\lambda_{ij}^{<k>}}{\sum_{j'} \lambda_{ij'}^{<k>}} = \frac{b_i \lambda_j^{<k>} a_{ij}}{\sum_{j'} \lambda_{j'}^{<k>} a_{ij'}} \stackrel{\Delta}{=} \bar{x}_{ij}, \tag{5.74}$$

NP çarpımı çok terimlinin ortalamasıdır. Denklem (5.74) MLEM algoritmasının beklenen (E) adımıdır. Denklem (5.72)'deki  $x_{ij}$ 'i denklem (5.74)'de elde edilen

$\bar{x}_{ij}$  ile değiştirilirse tam verinin beklenen log – olabilirliği (denklem (5.73)),  $\lambda_j$ 'ye göre maksimize edilmiş olur. Bu, ayrıca gözlemlenen veri olabilirliğinde  $f(n|\lambda)$ , maksimize eder. M adımı böylece;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \{Q(\lambda, \lambda^{(k)})\} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left\{ \sum_{i,j} [-\lambda_j a_{ij} + \bar{x}_{ij} \ln(\lambda_j)] + C \right\} \\ &= -\sum_i a_{ij} + \sum_i \bar{x}_{ij} / \lambda_j = 0 \\ \Rightarrow \hat{\lambda}_j &= \frac{\sum_i \bar{x}_{ij}}{\sum_i a_{ij}}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

olur. MLEM  $\lambda^{<k>}$  görüntüsünü sırasal olarak yeniler. Denklem (5.75)'u bir sonraki ötelemedeki piksel j'in tahmini değeri için kullanılır. Denklem (5.74) ve (5.75) birleştirilerek, MLEM şöyle olur;

$$\lambda_j^{(k+1)} = \frac{\lambda_j^{(k)} \sum_i b_i a_{ij}}{\sum_i a_{ij} \sum_{j'} \lambda_{j'}^{(k)} a_{ij'}} = \frac{\lambda_j^{(k)} c_j^{L(k)}}{\sum_i a_{ij}} \quad (5.76)$$

MLEM algoritması (denklem (5.76), yeni piksel değerini eldeki piksel değerini olabilirlik katsayısı  $c_j^{L(k)}$  değeri ile çarparak hesaplar. Ön düzeltme kullanılmadı ise  $\sum_i a_{ij}$  terimi nesnenin zayıflatmasını saçınımlı ve detektör verimliliğini kapsayacak şekilde düzenlenebilir. Ön düzeltme, bütün salınan ışınların detektörlerce algılandığı varsayımdır.

$$\sum_i a_{ij} = 1 \quad (5.77)$$

MLEM'de ilk görüntü düzgün dağılımlı disk olarak tanımlanır. Diski görüntü alanı FOV (Field of view) ile sınırlı ve piksel değerlerinin toplamı, sinogram sayımlarının toplamına eşit olmalıdır. MLEM bütün ötelemelerde toplam sayımı korur.

$$\sum_j \lambda_j^{(k)} = \sum_i b_i \quad (5.78)$$

Bazen veriye iyi uymuş şekilde elde edilen görüntü tahmini, sezinlenen görüntü kadar iyi olmayabilir. Bu geri oluşum probleminin hastalıklı olmasındandır. Bu ölçülen verilerdeki küçük değişimlerin, elde edilen görüntülerde büyük değişimler oluşmasına neden olur. Ayrıca eğer veri gürültülü ise iyi uyum görüntüyü daha da gürültülü yapar. Çünkü Poisson dağılımının ortalama sayımı tahmin edilirken, o piksel içinde gerçekleşen sayım miktarı en iyi tahmindir. MLEM`de genel bir problem öteleme ilerledikçe görüntünün gürültü miktarında artış olmasıdır. Bu aşırı uyum (over-fitting) durumu, ötelemenin yakınsamadan önce durdurulması ile çözümlenir[34].

Bayes Sıralamaları ve Öncelikleri; Hastalıklı problemi, iyi durumlu problem haline getirmek için fazladan kontrol eklenerek çözümün daha iyi olması sağlanır. Bu geri oluşturulan görüntünün değerleri ile verinin uyuşmasını gerektirmez. Fakat şartların sağlanmasını gerektirir. Bu şartlar, veriden bağımsız olarak oluşturulur. Bu sınırlamalar Tikhonov sınırlamaları [80], penaltı fonksiyonları [81] veya Bayesian öncelikleri [82] olabilir. Bunların hepsi görüntünün doğasında olan tahminlere çözümü götürecek sınırlamalardır[29].

Bayes tahmininde  $\lambda$  bilinmeyen belirleyici bir sabit değil, bir random değişkendir. Öncelikli PDF  $f_a(\lambda)$ , ölçülen veri  $b$ `den bağımsız olarak görüntü hakkında ekstra bilgi verir. Amaç fonksiyon, olabilirlik fonksiyonu (denklem (5.69)) değil, sonraki PDF`dir

$$f(\lambda|b) = \frac{f(b|\lambda)f_a(\lambda)}{f(b)} \propto f(b|\lambda)f_a(\lambda) \quad (5.79)$$

$f(b)$  görüntüden bağımsız olduğu için, amaç fonksiyondan çıkarılabilir.  $f(b|\lambda)$  olabilirlik fonksiyonu (denklem (5.69))`dür. Geri oluşturulan görüntü şöyle tahmin edilebilir.

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} [f(b|\lambda)f_a(\lambda)] = \arg \max_{\lambda} [l(\lambda)f_a(\lambda)] \quad (5.80)$$

Bu tahmin edici, sonraki maksimum (Maksimum a Pastiori, MAP) diye anılır[28]. Denklem (5.70) ile (5.80) arasındaki fark  $f_a(\lambda)$  önceliğinin eklenmesidir. Logaritmanın alınması denklem 5.80'in toplamalarla ifade edilmesini sağlar.

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} [\ln(l(\lambda)f_a(\lambda))] = \arg \max_{\lambda} [L(\lambda) + P(\lambda)] \quad (5.81)$$

Şimdi sağlanması gereken iki şart vardır. Birincisi  $L(\lambda)$  olabilirlik ki bu görüntü  $\lambda$ 'nın, veri ile uyum içinde olmasını gerektirir. İkincisi,  $P(\lambda)$  ceza fonksiyonu, elde edilen görüntünün önceden yeğlenen görüntüden sapması durumunda, cezalandırma sağlar. MAP tahmini, iki terim arasında balansı sağlayacak şekilde araştırma yapar. Gürültülü görüntü, veri ile uyum içinde olsa dahi ikinci terim tarafından cezalandırılır.

### 5.7.1 Gibbs önceliği

Genel Bayes önceliği Gibbs dağılımı kullanılarak gerçekleştirir ve genel formu şöyledir;

$$f_a(\lambda) = Ce^{-\beta U(\lambda)} = Ce^{-\beta \sum_j U(\lambda, j)} \quad (5.82)$$

$\beta$  Bayes önceliğinin ağırlığı ve  $C$  normalleştirme sabitidir. Pozitif olan enerji fonksiyonu tahminleri karşılırsa,  $U(\lambda)$  minimuma, öncelik değeri maksimuma erişir,  $\lambda$  öncelikli  $U(\lambda, j)$  piksel  $j$ 'de  $\lambda$  ile gerçekleştirilen enerji fonksiyonunun değeridir.  $U$  enerji fonksiyonu genel olarak, komşu pikseller arasındaki enerji farkından faydalanılarak elde edilir.

$$\beta U(\lambda, j) = \beta \sum_{ii \in N_j} w_{ij} v(\lambda_j - \lambda_i) \quad (5.83)$$

$w_{ij}$ : piksel  $i$  için, piksel  $j$ 'in komşuluğundaki ağırlığıdır[83].  $\beta$  parametresi önceliğin güvenilirlik derecesini gösterir.  $\beta$  sıfıra yakınsa, öncelik  $f_a(\lambda)$ , geniş bir  $\lambda$  aralığı için öncelik oldukça tepelidir ve bazı görüntüler oldukça uygundur.  $(N_j)$  piksel  $j$ 'deki komşuluk uzaysal olarak sınırlı olduğundan  $U(\lambda)$ 'nin yerel desteği vardır ve Gibbs dağılımı Markov random alanı (MRF)'i tanımlar [81]. Görüntü MRF olarak ele alınırsa görüntünün yerel karakteristiği Gibbs öncelikleri ile kullanışlı bir şekilde modellenir.

### 5.7.2 Bir adım geç algoritması

Bir adım geç algoritmasında,  $M$  adımı log – sonraki olasılık olabilirliğini ( $\lambda_j$ 'e göre sabit terimi ihmal ederek) maksimize etmeye çalışır.

$$L_a(\lambda, \lambda^{(k)}) = E \left[ \ln[f(x|\lambda)] \mid b, \lambda^{(k)} \right] + \ln(f_a(\lambda)) = Q(\lambda, \lambda^{(k)}) - \beta U(\lambda) \quad (5.84)$$

Bu, aşağıdaki denklem çözülerek maksimize edilir.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} L_a(\lambda, \lambda^{(k)}) = 0 \quad (5.85)$$

Denklem (5.75) kullanılarak;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} L_a(\lambda, \lambda^{(k)}) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_j} Q(\lambda, \lambda^{(k)}) - \beta \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \sum_{j'} U(\lambda, j') \\ &\quad - \sum_i a_{ij} + \sum_i \bar{x}_{ij} / \lambda_j - \beta \frac{\partial}{\partial \lambda_j} U(\lambda, j) = 0 \end{aligned} \quad (5.86)$$

Bir adım geç (OSL) algoritması enerji fonksiyonu  $U(\lambda)$ 'nin türevini hesaplarken eldeki görüntü  $\lambda^{(k)}$ 'yi kullanır. Bu  $\lambda_j$ 'i öncelikli terimden ayırıştırır ve denklem (5.74) kullanılarak OSL yenilemesi şöyle olur;

$$\lambda_j^{(k+1)} = \frac{\lambda_j^{(k)} C_j^{L(k)}}{\sum_i a_{ij} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda_j} U(\lambda, j) \Big|_{\lambda = \lambda^{(k)}}} = \lambda_j^{(k)} C_j^{L(k)} C_j^{P(k)} \quad (5.87)$$

$C_j^{<k>}$  MLEM kullanılarak hesaplanır. Pikseli yenileyen katsayılar iki parçadan oluşur ( $C_j^{L<k>}$  ve  $C_j^{a<k>}$ ). Normalleştirme varsayımı  $\sum_i a_{ij} = 1$ , ile sadeleştirerek ceza katsayısı, görüntü  $j$ 'deki ön koşulu sağlarsa 1'e yakındır.

$$C_j^{P(k)} = \frac{1}{1 + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda_j} U(\lambda, j) \Big|_{\lambda = \lambda^{(k)}}} \quad (5.88)$$

Böylece  $\frac{\partial}{\partial \lambda_j} U(\lambda, j)$ 'in değeri küçüktür. Türevin büyük değerinin olması demek görüntü  $\lambda^{<k>}$ 'nin ön tahminden sapması anlamını taşır.

### 5.8. Ortanca Kök Önceliği

Bu yöntemde bilinmeyen emisyon görüntüsü için; istenilen görüntü lokal olarak monotoniktir varsayımı, kullanılmaktadır. “Lokal bir komşuluk içerisinde, piksel değerlerinin değişimi azalmayan veya artmayandır”, bu varsayım, MLEM’de cezalandırıcı olarak kullanılmış ve ortaya ortanca kök önceliği (Median Root Prior, MRP) çıkmıştır. Ortanca(medyan) filtreleme altında değişmeyen görüntüler, kök görüntülerdir ve bunlar lokal olarak monotoniktirler[108]. Lokal medyana karşı, piksel cezalandırması set edilerek lokal komşuluk içerisinde eğer monotonik olmayan bir yapı varsa ceza verilmesi sağlanır. Komşu piksel değerleri arasındaki fark MRP’de cezalandırılmaz ve böylece enerji fonksiyonunun türevinin ayarlanması gibi bir zorluğu yoktur[27].

Cezanın Bayesian kestirimli olması, MRP’nin öncelikleri lokal monotonik görüntülere, görüntü iyileştirmesi yönünde destek sağlar. Görüntü kızıağının (grid) yoğunluğu varsayımının ne kadar iyi olacağını etkiler. Eğer az piksel varsa lokal

monotoniklik iyi gerçeklenemeyebilir. Fakat makul sayıdaki piksel miktarı için varsayım oldukça geçerli kabul edilebilir. Ötelemeli geri oluşturma yönteminde görüntü, MRP tarafından kök'e doğru yönlendirilir. Sonuç olarak elde edilen görüntü, kök olabilirliği gibi olmayabilir de. OSL formu kullanılarak MRP algoritması emisyon görüntüleri için şöyle tanımlanmıştır [109].

$$\lambda_j^{(k+1)} = \frac{\lambda_j^{MLEM^{(k+1)}}}{1 + \beta \frac{\lambda_j^{(k)} - M_j}{M_j}} = \lambda_j^{(k)} C_j^{L^{(k)}} C_j^{P^{(k)}} \quad (5.89)$$

Burada  $M_j = \text{Ort } \{\lambda_i^{<k>} \mid i \in N_j\}$  ( $j$ 'de odaklanan ve  $N_j$ 'in komşuluğunda olan piksellerin medyanlarıdır).  $\beta$  önceliğin ağırlığıdır. Piksel için pozitiflik kısıtlı;  $0 < \beta < 1$ 'dir.  $C_j^{P^{<k>}}$  ceza katsayısı eğer eski piksel değeri lokal medyan değerine yakın değilse ceza uygular. Bu, çözümü lokal monotonik görüntüye doğru taşır. MRP'nin ceza miktarı merkezi pikselin lokal medyandan sapma miktarı ile doğru orantılıdır. Tablo 5.2'deki önceliklerin aksine tekil piksel farklılıkları cezalandırılmaz. Medyan bir kenarı izlediğinden basit bir ceza fonksiyonu kullanılabilir. Öncelik, açıkça düz veya kenarlı görüntü bölgelerinde farklı davranması için komutlandırılmamıştır. Eğer görüntü monotonikse, herhangi bir ceza uygulanmaz. Lokal monotonluk kısıtı, ılımlı bir kısıttır. Çünkü, gerçek nesnenin görüntü şekli hakkında, herhangi bir varsayımda bulunmaz. Tipik olarak gürültü monotonik değildir ve ET görüntüsü monotoniktir. Böylece gürültü cezalandırılmış olacaktır.

### 5.8.1. Transmisyon algoritması

Nicel PET çalışmaları, emisyon verisindeki doku zayıflatma etkisini telafi etmek için, zayıflatma düzeltme faktörünün (ACF) hesaplamasını gerekli kılar. Emisyon verileri, ACF'lerle çarpıldığında, düzleme nedeniyle oluşan bulanıklık veya gürültü ACF'den emisyon verisine geçer. Eğer doğrusal kütle absorpsiyon katsayıları ( $\mu$ )'nın görüntüsü elde edilirse, ACF'ler döndürülmüş koordinat sisteminde bahsi geçen prensiplerin gerçekleşmesi ile elde edilebilir. Geri oluşturulan  $\mu$  görüntüsünden, ACF'ler şöyle elde edilir;

$$ACF_i = e^{R(l_i, \mu)} \quad (5.90)$$

Burada  $R(l_i, \mu) = \sum_j l_{ij} \mu_{ij}$ ,  $\mu$  görüntüsünün, LOR  $i$ 'ye ileri projeksiyonudur.  $l_{ij}$ 'de piksel  $j$ 'in LOR  $i$ 'ye katkısının ağırlığını ifade eder.

Transmisyon görüntüleri, FBP kullanılarak boş ve transmisyon ölçümlerinden elde edilebilir. Fakat, FBP görüntüleri gürültülü ve biraz besleme(bias), transmisyon görüntüsüne karışmış olabilir [110]. Genellikle gürültü ve artefakları (yapay bozukluk) azaltmak için görüntü (denklem (5.103)) uygulanmadan önce kısımlara bölünür. Bu, doku tipi ve onların tipik M değerleri hakkında bazı tahminlerin yapılmasına ihtiyaç hissettirmez. Çeşitli tipteki zayıflatma katsayılarının olması nedeniyle, bölümleme yöntemi oldukça komplikedir. Pratikte bazı detaylar ACF'lere uygun şekilde katkı yapmazlar [111]. Böylece, hassas zayıflatma düzeltmesi yapabilmek için, yüksek kaliteli transmisyon görüntülerine ihtiyaç vardır.

Veri uydurma ; Ötelemeli yöntemler genel olarak ACF'lerin

$$ACF_i = \frac{B_i e^0}{B_i e^{-a_i}} = e^{a_i}, \quad (5.91)$$

logaritmalarını geri oluşturmazlar. Fakat, tarama için daha hassas istatistiksel maddeler kullanırlar [112]. Ölçülen transmisyon verisi için, olabilirlik, Poisson dağılımlıdır.

$$f(T|\mu) = \prod_i e^{-B_i e^{-R(l_i, \mu)}} \frac{(B_i e^{-R(l_i, \mu)})^{T_i}}{T_i!}, \quad (5.92)$$

Burada B boş sinogram, T'de transmisyon sinogramıdır.  $\mu_j$ ,  $j$ 'in her bir birim uzunluğuna düşen proton yakalama olasılığıdır. Poisson dağılımının ortalaması  $r_j$ , raslantısal olayları kapsayabilir. Kazaralar ve saçılanlar gibi;  $B_j e^{-R(l_j, \mu)} + r_j$ . Eğer

mümkün ise log-olabilirlik fonksiyonu olan denklem (5.93) maksimize edilecektir[110].

$$L(\mu) = \sum_i \left[ -B_i e^{-R(l_i, \mu)} - T_i R(l_i, \mu) \right] + C. \quad (5.93)$$

Denklem (5.93) için MLEM algoritması K. Lange ve R. Carson tarafından tam bir veri fonksiyonu kullanılarak geliştirilmiştir [113]. Fakat pratik olarak çok yavaştır [113]. Transmisyon görüntüleri için Lange ve diğerleri [114] tarafından geliştirilen konveks algoritma daha çok kullanılmaktadır. Bu algoritma pikselleri yenilemede Newton'un öteleme yöntemini kullanır.

$$\mu_j^{C(k+1)} = \mu_j^{(k)} + \frac{\mu_j^{(k)} \sum_i l_{ij} \left[ B_i e^{-R(l_i, \mu^{(k)})} - T_i \right]}{\sum_i l_{ij} R(l_i, \mu^{(k)}) B_i e^{-R(l_i, \mu^{(k)})}} \quad (5.94)$$

Eğer B ve T farklı zamanlarda alınmış ise B buna göre ölçeklenir. B ve T detektör telafisi için normalize edilir. Anatomik öncelikler opsiyon değildir. Çünkü CT veya MRI görüntüleri ET transmisyon görüntüsü yerine kullanılabilir. OS hızlandırma yöntemi konveks algoritmaya uygulanabilir [115].

TMRP Algoritması: PDF'nin olabilirlik fonksiyonu hastalıklıdır ve bazı düzenlemelere ihtiyaç vardır. Çünkü gerçek görüntünün lokal monotonik olduğu varsayımı Transmisyon ve Emisyon görüntülerinin her ikisi için de geçerlidir. MRP cezalandırıcı olarak kullanılabilir. Amaç mümkün olduğunca kısa veri alma süresinde yüksek kaliteli transmisyon görüntüsünü oluşturmaktır. Bu görüntüler düşük gürültülü ACF katsayılarının elde edilmesinde kullanılır. MRP algoritması denklem (5.94)'e uygulanabilir. Benzer olarak emisyon OSL algoritmasına uygulanabilir. Transmisyon görüntüsü, tMRP (transmisyon MRP) kullanarak hesaplanabilir [116].

$$\mu_j^{(k+1)} = \frac{1}{1 + \beta \frac{\mu_j^{(k)} - M_j}{M_j}} \mu_j^{C(k+1)}, \quad (5.95)$$

burada  $\mu^{<k>}$  hali hazırdaki transmisyon görüntüsü,  $M_j = \text{Ort } \{\mu_i^{<k>} \mid i \in N_j\}$ .  $\beta$  parametresinin rolü emisyon OSL algoritmasındaki ile aynıdır.

Denklem (5.95), MRP cezasını transmisyon algoritmalarına uygulamanın en basit yöntemidir. Konveks transmisyon algoritması (denklem (5.94)) üstsel fonksiyonlar barındırmasından dolayı oldukça yavaştır. Başka transmisyon algoritmaları da bulunmakta [110] ve bunların hızı algoritmanın yenileme stratejisi ile iniltidir.

tMRP kullanarak, ACF'ler, düzleme veya bölümlleme yapmadan fakir istatistik ile sınırlı sayıdaki veriden elde edilebilir. Doku tipi ve  $\mu$  değerleri hakkında herhangi bir varsayıma da, gerek yoktur. tMRP aynı anda transmisyon – emisyon taraması gibi değişik transmisyon tarama yöntemlerinde de kullanılabilir. tMRP, emisyon geri oluşturmada, zayıflatmanın projeksiyon ağırlık faktörlerine  $a_{ij}$  dahil edildiği durumlarda, zayıflatma haritasını elde etmede de kullanılabilir.

### 5.8.2 Yakınsama önceliği

MRP OSL algoritmasının yakınsama özelliklerini paylaşır [86]. Örneğin; yenileme algoritmasının yakınsaması üzerine etkisi, amaç fonksiyonunun log-öncelik kısmının incelenmesi ile elde edilir [87].  $M_j$ ,  $\lambda_j$ 'e lineer olmayan şekilde bağlı olduğundan MRP'nin yakınsama özelliklerinin türetilmesini zorlaştırır. MRP, Gama önceliklerinin kullanılmasını motive eden özelliklerin benzeridir. MRP, yalnızca yenileme algoritmaları (MLEM veya diğerleri) ile elde edilen eldeki tahmin üzerine çalışır. MRP'nin çok düşük beslemeye (bias)'e sahip olduğu umulmaktadır. Gürültü bastırımı, herhangi bir nesnenin genel tanımına dayanmakta; ki bu yenileme algoritmasını gerekli sayıda yenileme yapması için özgür kılar.

Komşuluk Boyutu: Medyan maskesinin boyutu, monotonluk kriterinin gerekli olduğu alanı tanımlar. Başka bir deyimle; ilişkili MRF'in komşuluk sistemini tanımlar. Bu korunması gereken en küçük detayın genişliğini önceden set etme

imkanı sağlar. Kök sinyalin kapsayacağı en küçük yatay veya dikey detayın genişliği, maskeleme boyutunun yarısıdır.

$$iw = \frac{(mg + 1)}{2} pg = \frac{(mg + 1)fov}{2 \cdot ig \cdot zoom} \quad (5.96)$$

mg: medyan genişliği (piksel olarak), pg: piksel genişliği (mm), fov: FOV'un genişliği (mm), ig: görüntü genişliği (piksel olarak), **zoom** =  $fov / (iw \cdot pw)$ . Görüntü boyutunu, zoom faktörünü, maske boyutunu set ederek (böylece küçük komşu hücrelerin her ikisi de maskenin içine düşmez), MRP yalnızca bilinen biçimden daha küçük detayları cezalandırır. Bu görüntüdeki piksel sayısının yeteri kadar fazla alınmasını gerektirir. Böylece, piksellerin içindeki maskeleme hacmi makul olur (3x3 veya 5x5). Bu küçük komşu nesnelerin hacimlerini set etmek, kantitatif eşiklerin set edilmesinden daha kolaydır. Mask boyutu duyarlılığın çözünürlüğünü etkilemekten çok, taneselliği etkiler. Algoritmanın veri uydurma kısmının hesaplama zamanı, görüntü boyutu ile orantılı olarak artar.

Komşuluk hacmi seçildikten sonra, önceliğin ağırlığı seçilmelidir. MRP algoritmasında transmisyon ve emisyon görüntü oluşumunda Bayes ağırlığı  $\beta$ 'dan başka kullanıcı tanımlı parametre bulunmamaktadır. Medyanın sağlamlığı,  $\beta$ 'nın seçimini fazla kritik kılmaz. Deneysel olarak  $\beta$ 'nın denklem (5.89)  $mg = 3$  için  $\beta \approx 0,3$  uygundur [88]. Eğer  $mg = 5$  ise maske içinde daha çok piksel var demektir ve  $\beta$  daha küçük olabilir.  $\beta \approx 0,3 * 3^2 / 5^2 \approx 0,11$ .  $\beta$  değerinin büyük olması yeni piksel değerini  $M_j$ 'e daha yakın olacak şekilde kaydırır. Daha fazla ağırlığın set edilmesi görüntünün lokal monotonik olmasını sağlar. Görüntü, medyan filtrelenmiş görüntüye ne kadar yakınsa, görüntüyü değiştirmeye yarayan öncelik, o kadar önemini kaybeder. MRP medyan filtrelemeyi direkt operasyon olarak kullanmaz, referans cezayı hesaplamada bir yöntem olarak kullanır. Düzleme önceliği, FIR filtresini ceza referansı olarak kullanır. Alçak geçirgen FIR ve medyan arasındaki düz alanın farkı, oldukça azdır. Özellikle 5x5 gibi büyük maskelerde fark, medyan kenar koruma özelliğini, hiper parametreleri ayarlamadan sağlar.

## **BÖLÜM 6. GÖRÜNTÜ OLUŞTURMA VE İYİLEŞTİRME UYGULAMALARI**

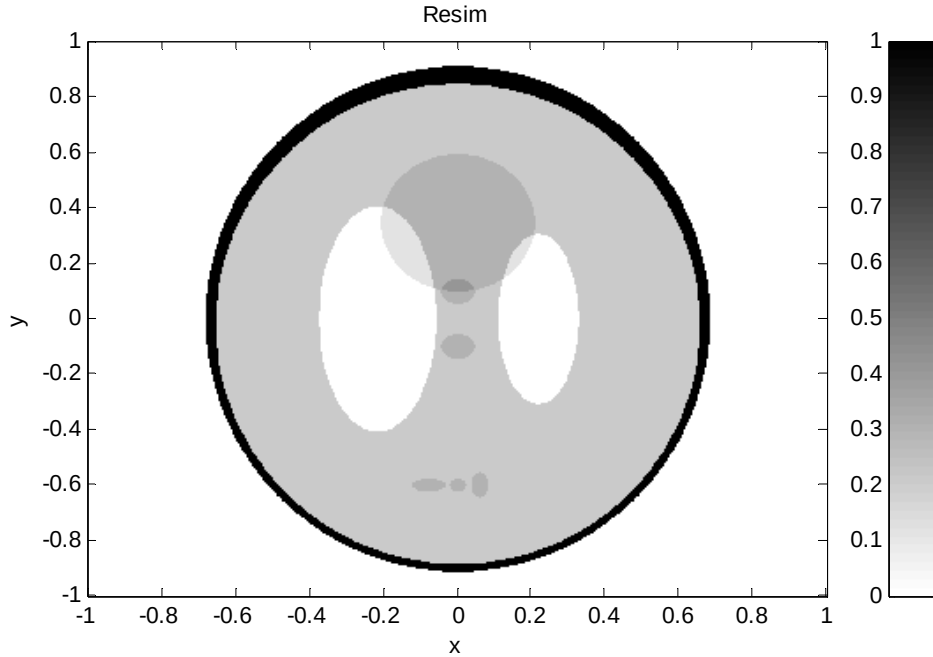
Bu bölümde PET tomografide kullanılan geri oluşturma yöntemlerinin uygulamaları yapılacaktır. Uygulaması yapılacak geri oluşturma yöntemleri, Filtrelenmiş geri projeksiyon, Cebirsel geri oluşturma (ART), Eşlenik gradyan yöntemidir. Simülasyon ortamında, Geri oluşturma işlemini gerçekleştirilmesi için sinogramlara ihtiyaç vardır. Öncelikle kullanılacak fontomların sinogramlarının elde edilmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, Sinogramlar Radon veya Hough dönüşümü alınarak elde edilmiştir. Elde edilen sinogramlar geri oluşturma işleminde kullanılmıştır.

Geri oluşturma işlemi değişik çözünürlüklerde uygulanmıştır. Öncelikle, en küçük boyut olarak 41x41 piksellik görüntü çözünürlüğüne sahip geri oluşturma yapılmış, daha sonra 81x81 piksellik görüntü çözünürlüğüne sahip geri oluşturma yapılmış ve en yüksek çözünürlük olarak 101x101 çözünürlüğe sahip görüntüler oluşturulmuştur. Daha yüksek çözünürlüğe sahip görüntülerin oluşturulması, P4 3Ghz PC de çok uzun zamanlar gerektirdiğinden bu çalışmada gerçekleştirilememiştir. Örneğin 101x101 görüntünün AMD Athlon2000 ile 1 öteleme ile oluşturulması, 2114dk da gerçekleştirilmiştir.. Aynı geri oluşturma P4 3Ghz PC’de daha uzun zaman gerektirmektedir. Daha yüksek çözünürlüğe sahip görüntülerin makul bir zaman içinde elde edilebilmesi için yüksek hızlı bilgisayarlara ihtiyaç vardır.

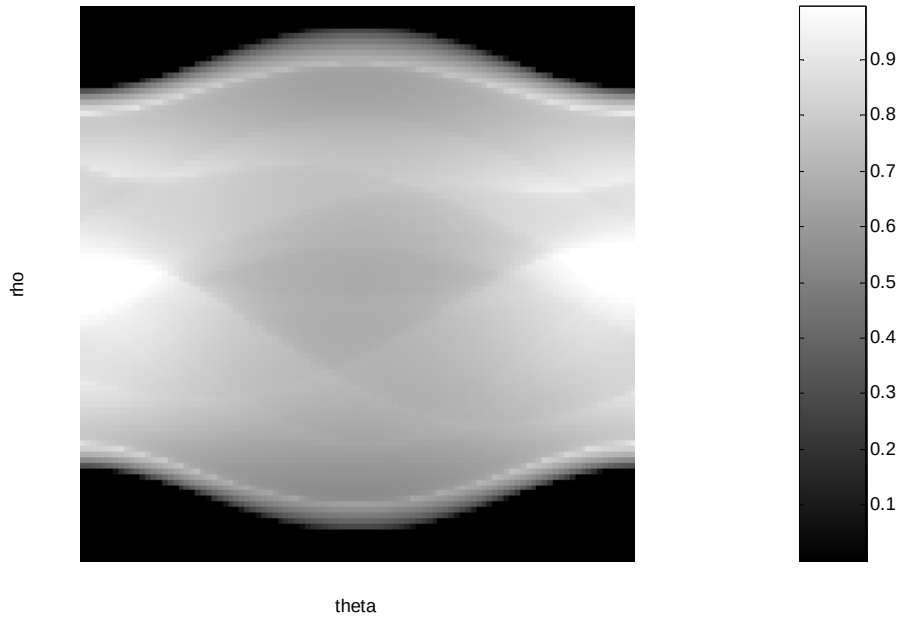
Radon dönüşümü alınırken eksenel ve açısal yönde örnekleme aralıklarının seçilmesi gerekmektedir. Eksenel yöndeki değişken genel olarak  $\rho$  ile gösterilmekte açısal yöndeki değişkende  $\phi$  olarak alınırsa, elde edilecek sinogramın boyutu  $\rho \times \phi$  olacaktır. Ötelemeli geri oluşturma yöntemlerinin kullanılması durumunda Tomografi cihazının geometrik durumunu tanımlayan ve içerisine diğer detektör verimliliği,  $M \times N$  boyutunda bir görüntü oluşturabilmek için gerekli sistem matrisinin boyutu,  $\rho \phi \times M \times N$  boyutundadır. 101x101 görüntü oluşturabilmek için, veri kaybetmeden

yapılabilecek maksimum örnekleme aralıklı sinogram boyutu ( $p \times \phi$ )  $149 \times 101$  olmaktadır. Yine bu görüntüyü oluşturabilmek için gerekli sistem matrisinin boyutu ( $\phi \times MN$ )  $15049 \times 10201$  olmaktadır. Bu kadar büyük boyuta sahip bir matrisin depolanması ve işlemlerde kullanılması oldukça zordur. Bu sistem matrisi aynı zamanda oldukça (dağınık)sparsdır. Sistem matrisi toplam indislerinin ancak %5'i civarında sıfırdan farklı değerler içermektedir. Bu nedenle sistem matrisini bir bütün olarak kaydetmek yerine, sıfırdan farklı değerlerini ve bu değerlerin bulunduğu indis değerlerini kaydetmek depolama açısından daha uygun olacaktır. Sistem matrisinin değerleri ve indisleri farklı iki matris olarak kaydedilmiştir. Bu matris tekrar kullanılacağı zaman, satır veya sütun şeklinde tekrar oluşturularak işlemde kullanılmıştır.

$101 \times 101$  çözünürlüğe sahip bir görüntü elde edebilmek için yaklaşık olarak en az  $149^2 \times 101^2 = 226.472.401$  elemanlı sistem matrisine ihtiyaç vardır. Cebirsel yöntemlerde çözünürlüğü artırabilmek için sistem matrisinin bu değerlerden büyük olması kaçınılmaz olmaktadır. Bu problemi çözmek için bu çalışmada, yeni bir matris depolama yöntemi geliştirilmiştir.

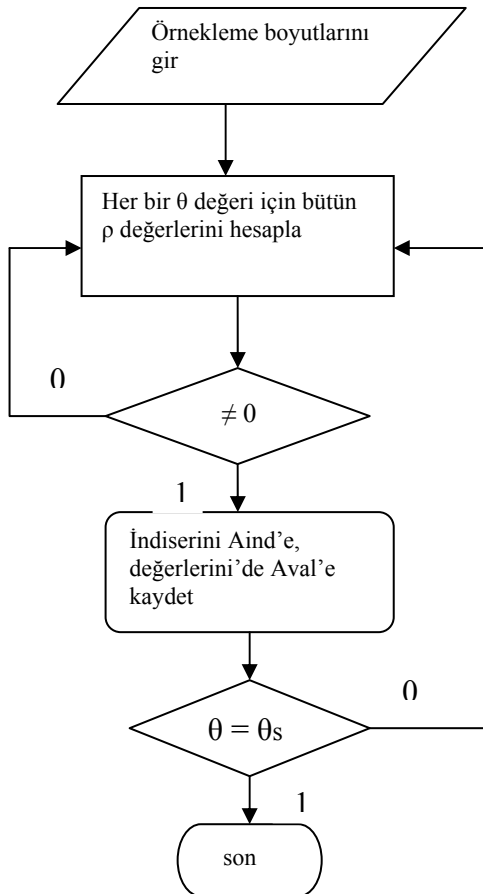


Şekil 6.1:  $891 \times 981$  Shepp-Logan fontomu



Şekil 6.2. Shepp-Logan fontomunun Radon dönüşümü.

Algoritma 6.1 Büyük sistem matrislerinin değişik yöntemle elde edilip, depo edilmesi



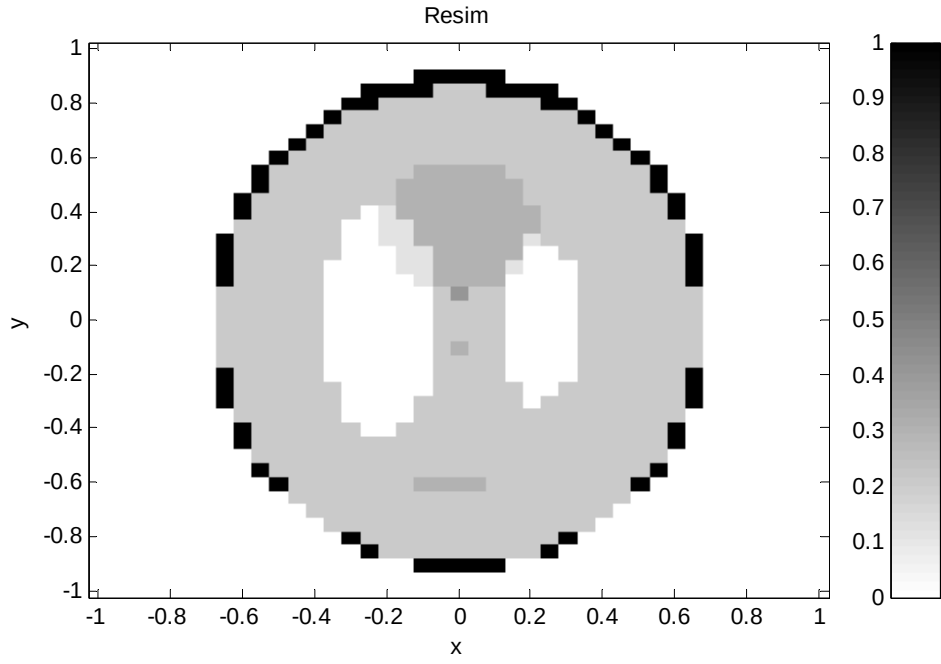
### 6.1. Sistem Matrisi Depolama Yöntemi

Sistem matrisi A oldukça seyrek bir matristir. Elemanlarının en fazla %10'u sıfırdan farklıdır. Bu nedenle A matrisi oluşturulurken matrisi direkt oluşturmak yerine elemanlarını bir kayıt altında tutmak, matris boyutunu oldukça küçültecektir. Başlangıç aşamasındaki görüntü ve sinyal işlemeciler genelde Matlab'ı kullanırlar. Matlab 7 ise yüz milyondan fazla elemanı olan matrislerle işlem yapamamakta ve kaydedememektedir. Piksel boyutu 100x100 olan bir görüntü matrisinin, sistem matrisi (açısal örnekleme sayısı da 100 alınırsa) 10000x10000 boyutunda olmaktadır. Cebirsel yöntemlerde çözünürlüğü artırabilmek için sistem matrisinin bu değerlerden büyük olması kaçınılmazdır. Geliştirilen algoritma çözünürlüğü yüksek geri oluşturma yöntemlerinde kullanılacaktır. Bu yöntemin dezavantajı ise işlem süresinin artmasıdır.

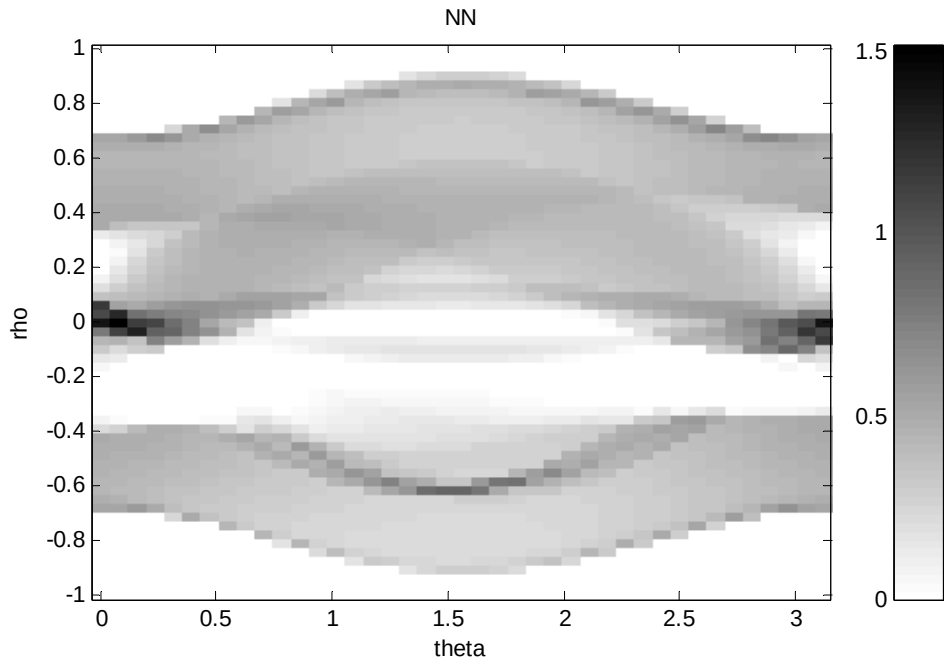
### 6.2. 41x41 Görüntü Elde Edilmesi

Bu görüntüler çözünürlük kalitesi oldukça düşük olan görüntülerdir. Resmin kendisi oldukça kötü bir çözünürlüğe sahip olduğundan oluşturulacak görüntünün kalitesi de düşük olacaktır.

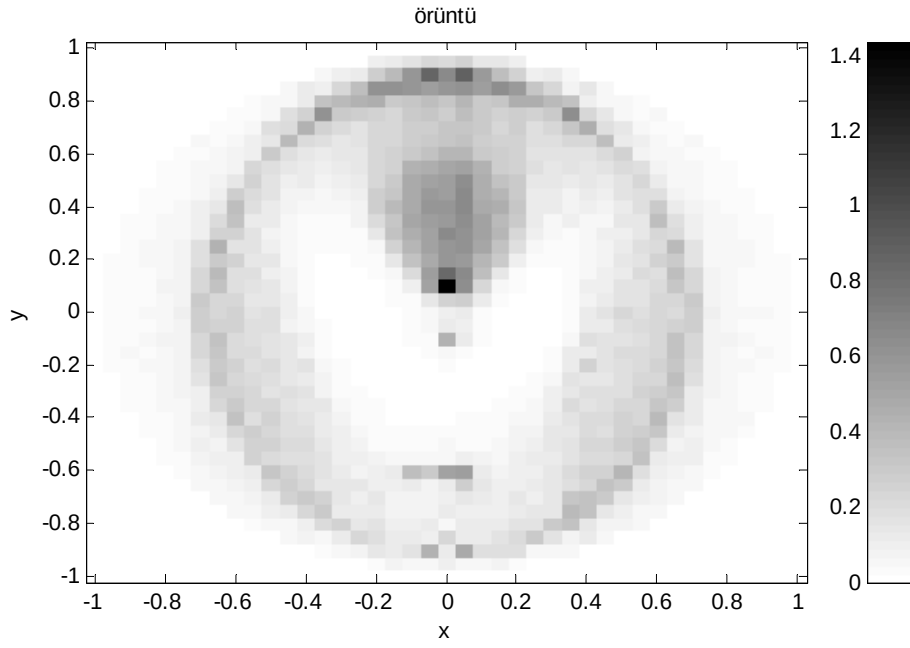
Şekil 6.3'ün sinogramı elde edilerek Şekil 6.4'te gösterilmiştir. Bu sinogram değişik geri oluşturma yöntemleri için girdi olarak kullanılmış ve fontom tekrar oluşturulmuştur. Aşağıda beklenti maksimizasyonu(EM) yöntemi ile elde edilen görüntüler gösterilmiştir. Burada kullanılan EM1 yönteminde sistem matrisi ayrıştırılmadan direk olarak kullanılan bir yöntemdir. Çünkü, çözünürlük düşük olduğundan gerekli olan sistem matrisinin boyutları da direk kullanıma uygundur.



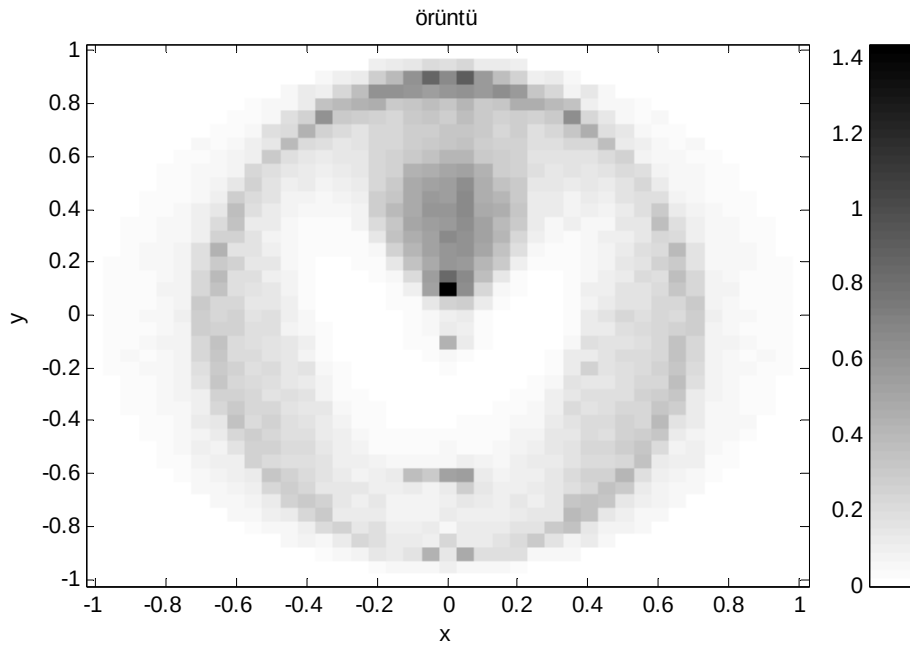
Şekil 6.3. 41x41 Shepp-Logan fontomu



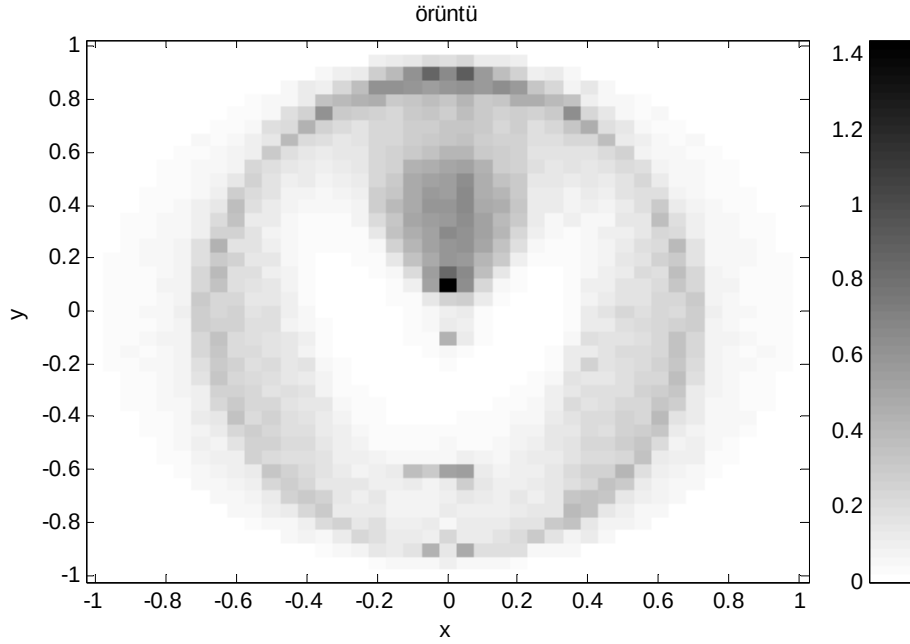
Şekil 6.4. 63x41 Shepp-Logan fontomu sinogramı. 4,21 dakikada gerçekleştirilmiştir.



Şekil 6.5. 41x41 5 öteleme ile oluşturulmuş Shepp-Logan fontomu . em1 5 iter için 94,39 sn de gerçekleşmiştir..



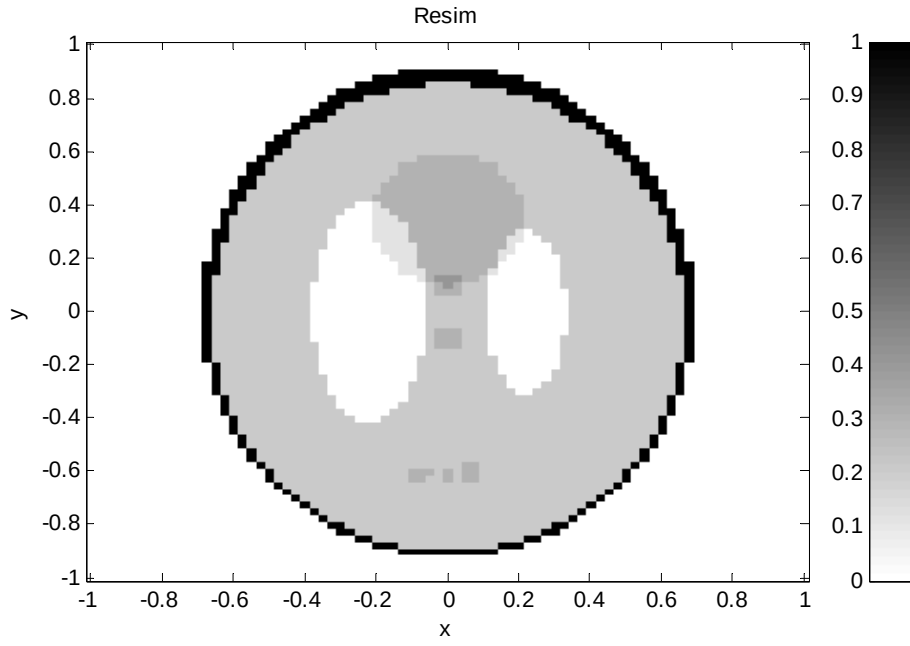
Şekil 6.6. 41x41 EM1 kullanılarak, 10 öteleme ile oluşturulmuş Shepp-Logan fontomu . EM1, 10 öteleme için 165 sn de gerçekleşmiştir..



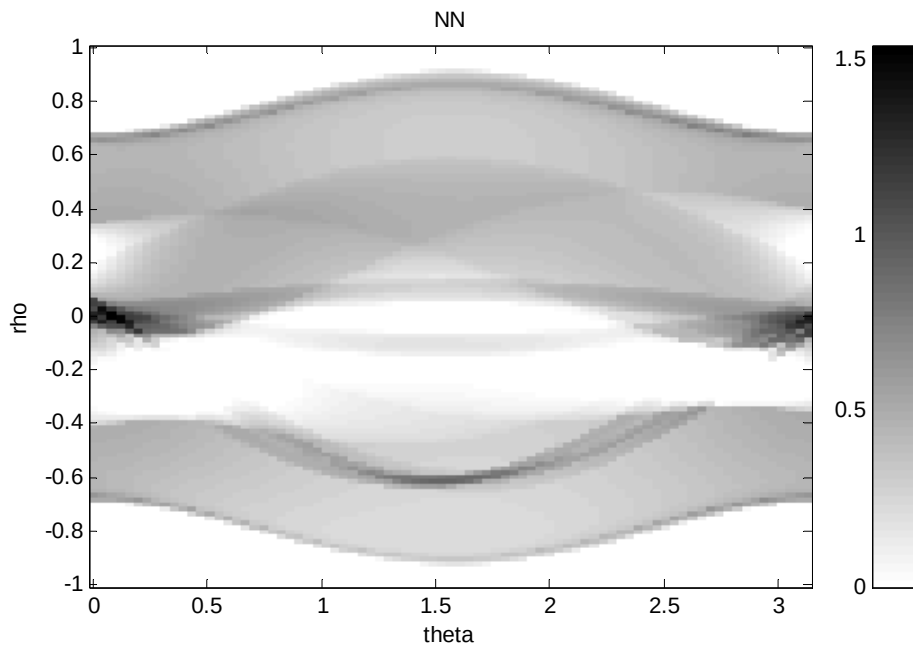
Şekil 6.7. 41x41 EM1 5 öteleme ile oluşturulmuştur. Laplace düzenlemesi (regularizasyon) ile gerçekleştirilmiştir. EM1 5 öteleme için 12,5dk da gerçekleştirilmiştir..

### 6.3. 81x81 Görüntü Oluşturma İşlemi

81x81 çözünürlüğe sahip Shepp-Logan fontom resmi Şekil 6.8’de gösterilmiştir. Şekilden de gözükebildiği gibi bu fontomun çözünürlüğü 41x41 fontoma göre oldukça iyidir. Bu şeklin sinogramı elde edilmiş ve Şekil 6.9’da gösterilmiştir. Bu sinogram değişik geri oluşturma yöntemleri için girdi olarak kullanılmış ve fontom tekrar oluşturulmuştur. Ötelemeli geri oluşturma yöntemlerinden olan, beklenti maksimizasyonu(EM), Eşlenik gradyan(CG) ve Cebirsel geri oluşturma(ART) yöntemleri ile elde edilen görüntüler gösterilmiştir. Burada kullanılan EM1 yönteminde sistem matrisi ayrıştırılmadan direk olarak kullanılan bir yöntemdir. 81x81 resimden elde edilen sinogramın boyutu 119x81 dir. Geri oluşturma için gerekli olan sistem matrisinin boyutu ise 9639x6561’dir.



Şekil 6.8. 81x81 Shepp-Logan fontomu

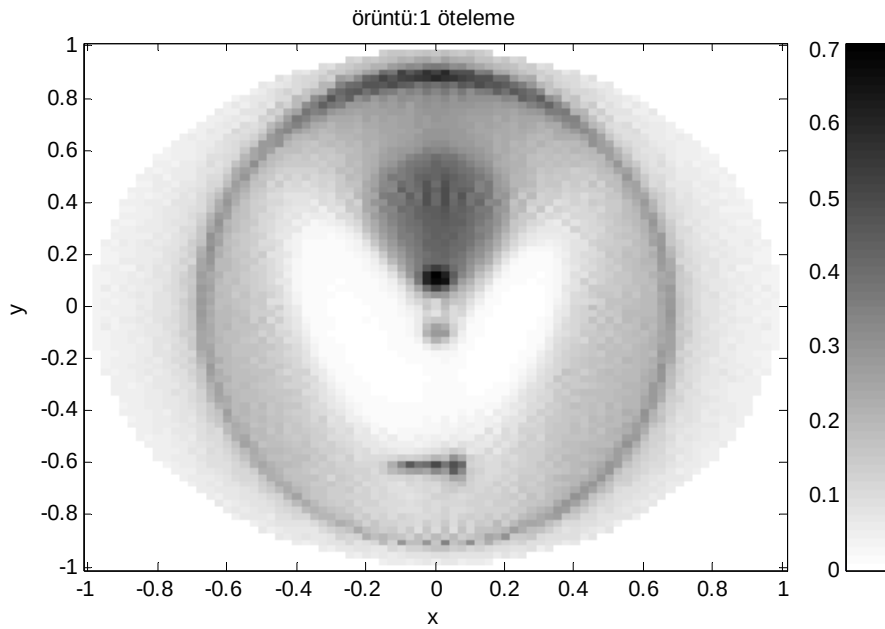


Şekil 6.9. 81x81 Shepp-Logan fontomunun sinogramı. sinogram 16,56 dak da oluşturulmuştur

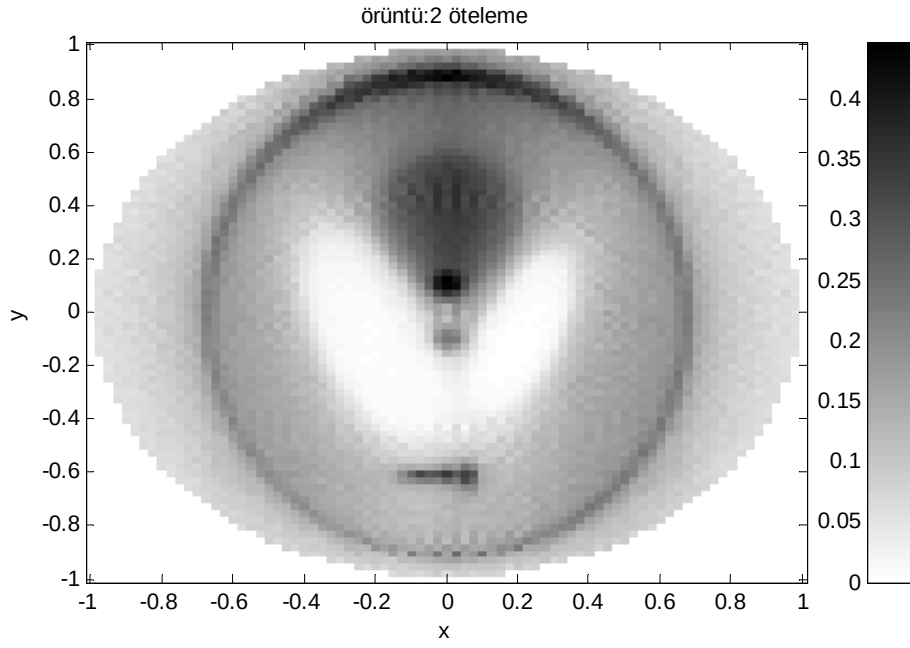
Sinogramın ve görüntülerin elde edilmesinde kullanılan örnekleme parametreleri şöyledir.

$X_{\text{Örnek}} = 81$   
 $X_{\text{min}} = -1$   
 $\Delta X = 0,025$   
 $Y_{\text{Örnek}} = 81$   
 $Y_{\text{min}} = -1$   
 $\Delta Y = 0,025$   
 $\Delta \text{Teta} = 2,25$   
 $\text{RhoMin} = 0$   
 $\Delta \text{Rho} = 0,017678$   
 $\text{TetaÖrnek} = 81$   
 $\text{RhoÖrnek} = 119$

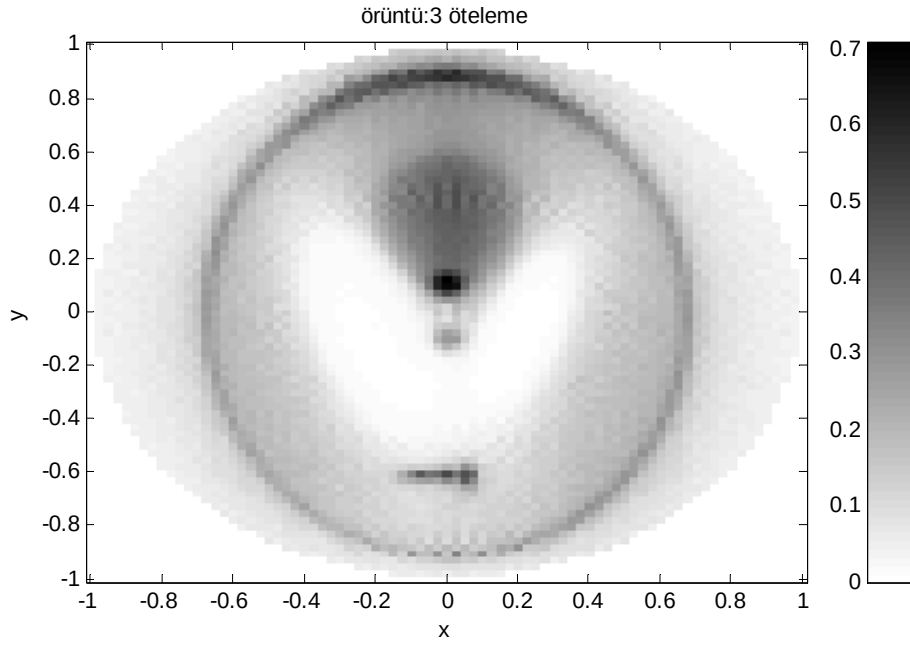
### 6.3.1 Beklenti maksimizasyonu yöntemi ile görüntü oluşturma işlemi



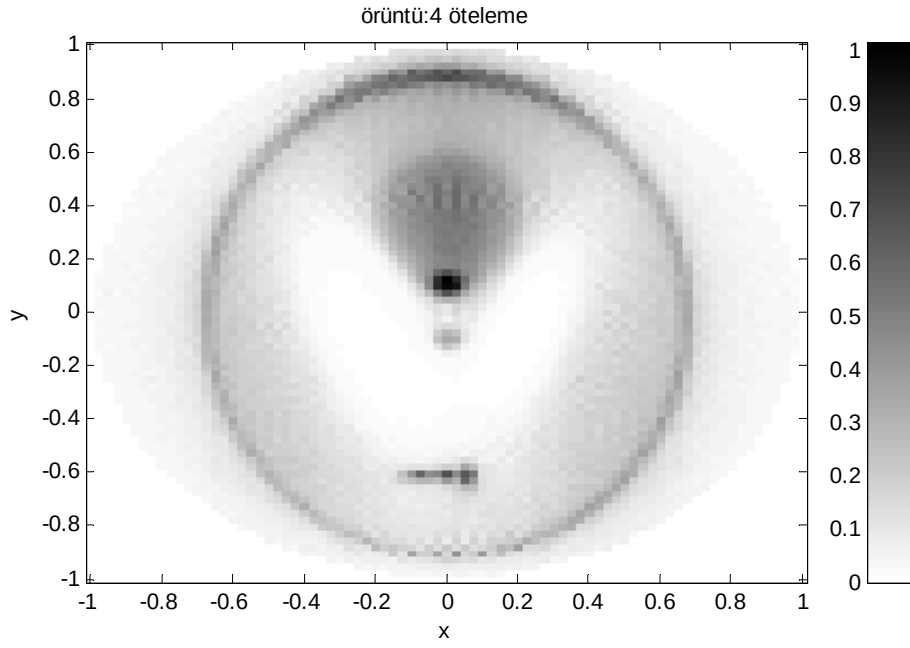
Şekil 6.10. Buradaki 81x81 görüntü, EM1 kullanılarak, 1 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 1 öteleme için 5dk da gerçekleşmiştir..



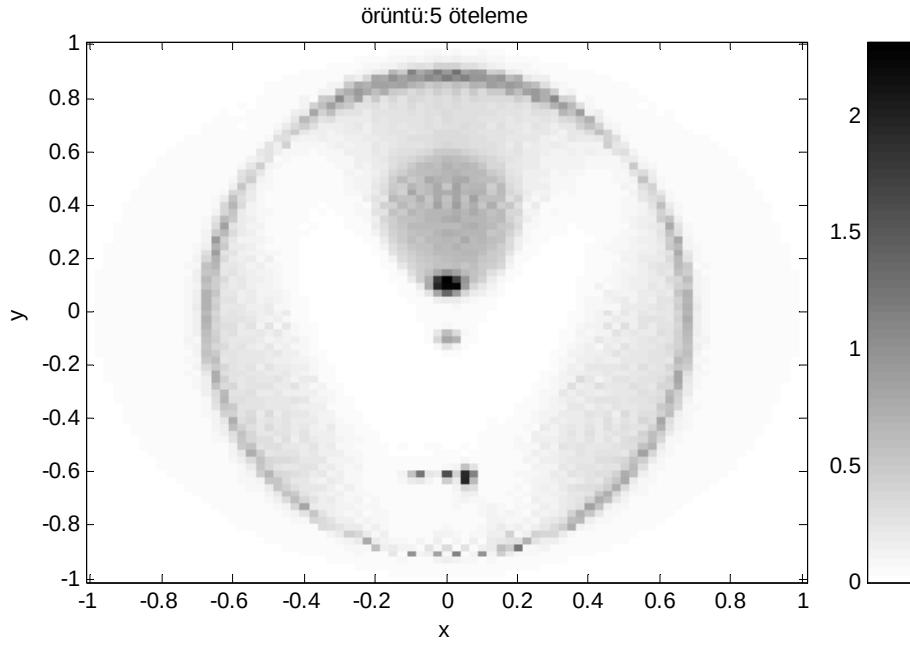
Şekil 6.11. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak 2 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 2 öteleme için 9dk da gerçekleşmiştir..



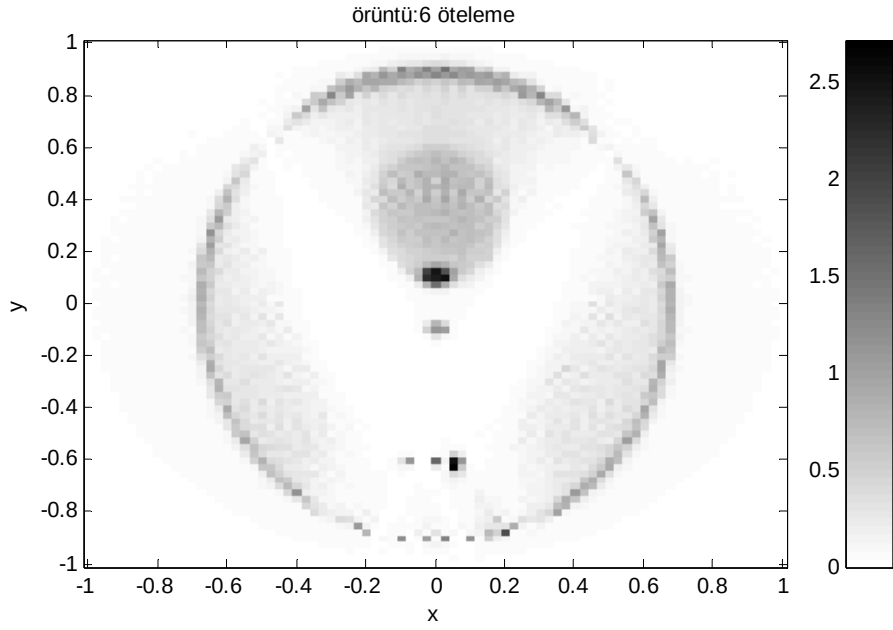
Şekil 6.12. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 3 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 3 öteleme için 13dk da gerçekleşmiştir..



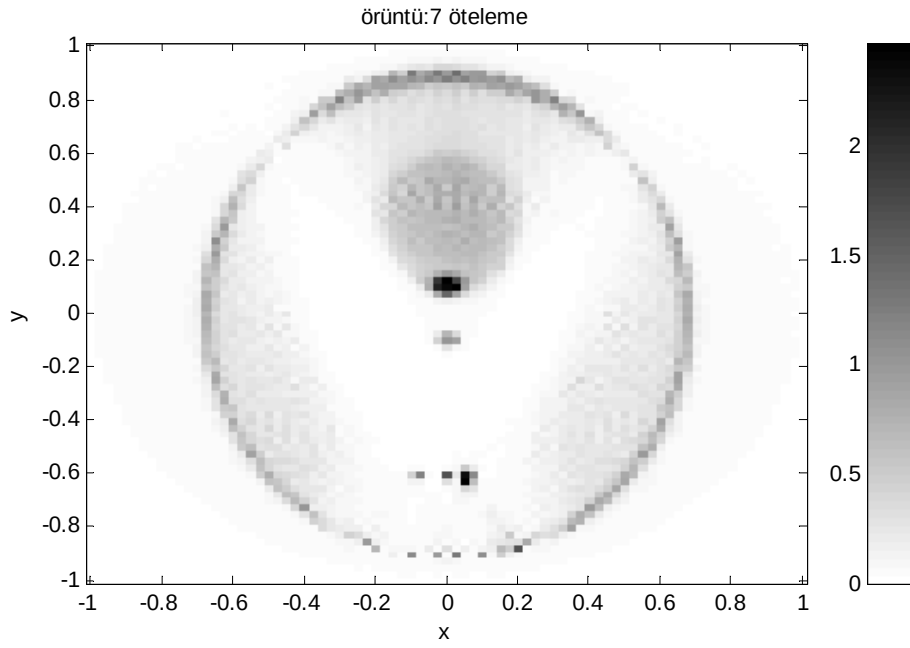
Şekil 6.13. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 4 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 4 öteleme için 17dk da gerçekleşmiştir..



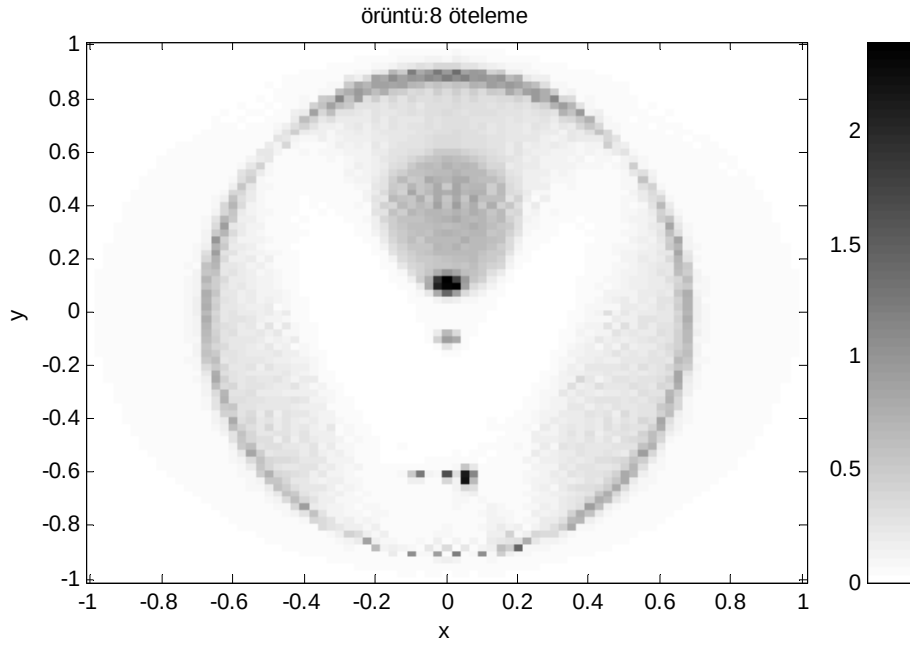
Şekil 6.14. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 5 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 5 öteleme için 22dk da gerçekleşmiştir..



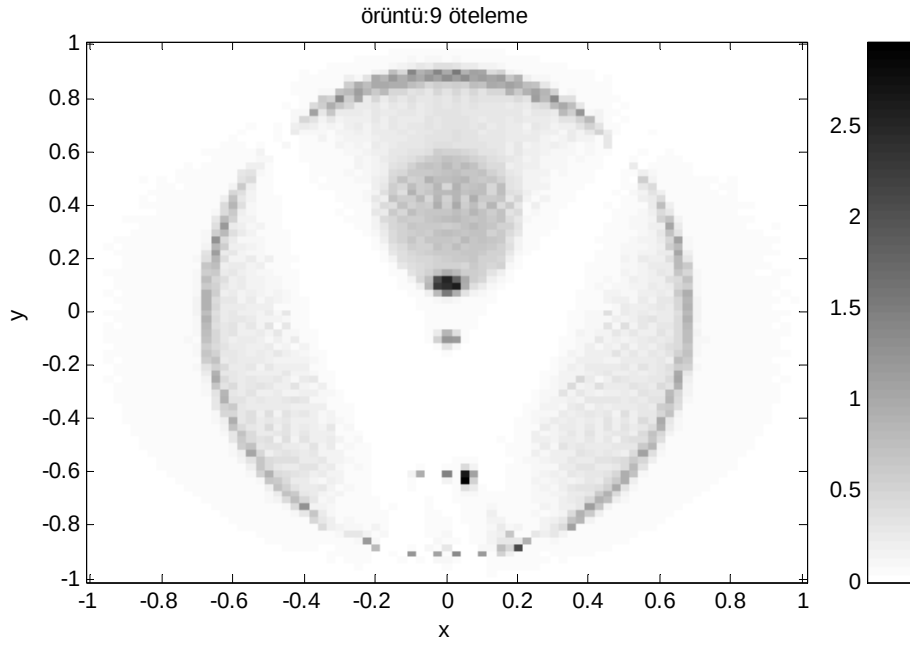
Şekil 6.15. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 6 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 1 öteleme için 26,5dk da gerçekleşmiştir..



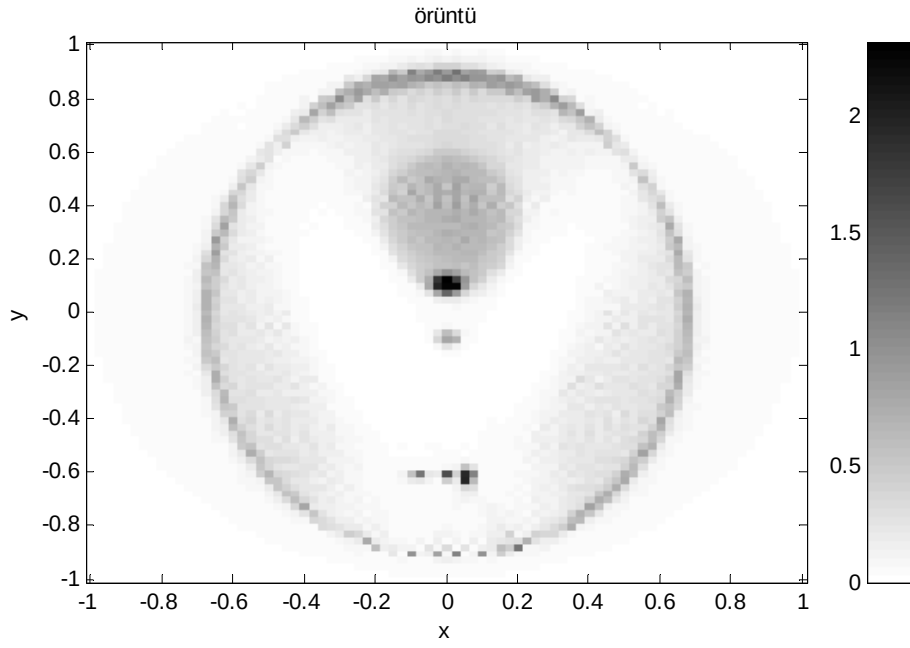
Şekil 6.16. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 7 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 7 öteleme için 31dk da gerçekleşmiştir..



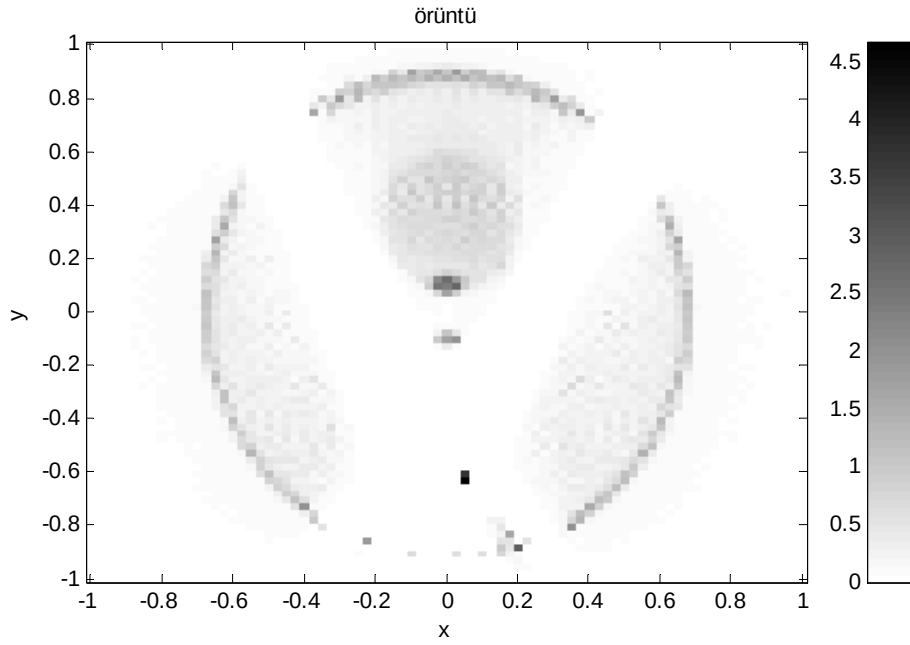
Şekil 6.17. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 8 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 8 öteleme için 35,5dk da gerçekleşmiştir..



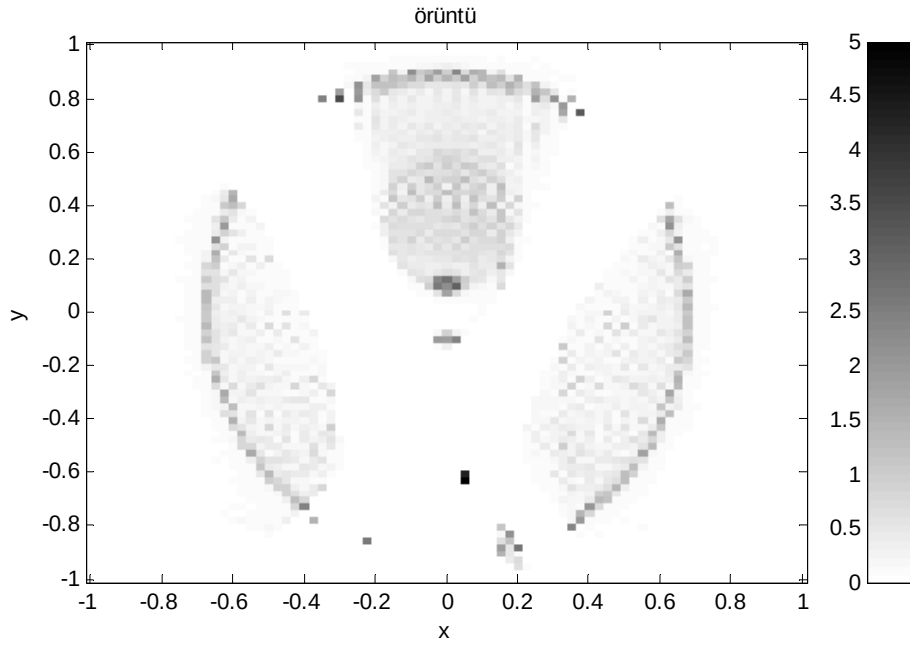
Şekil 6.18. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 9 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 9 öteleme için 40dk da gerçekleşmiştir..



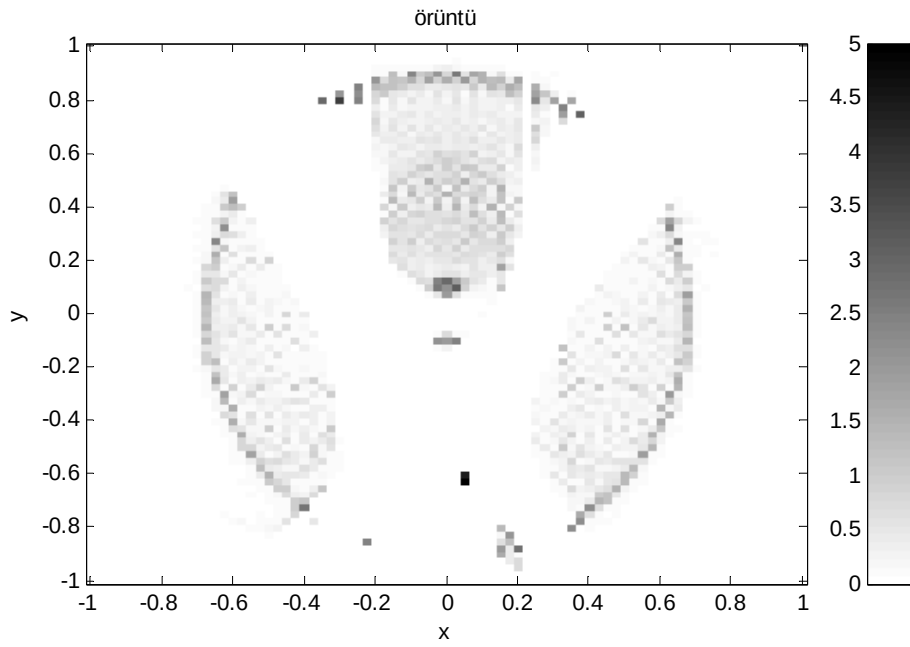
Şekil 6.19. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 10 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 10 öteleme için 45dk da gerçekleşmiştir..



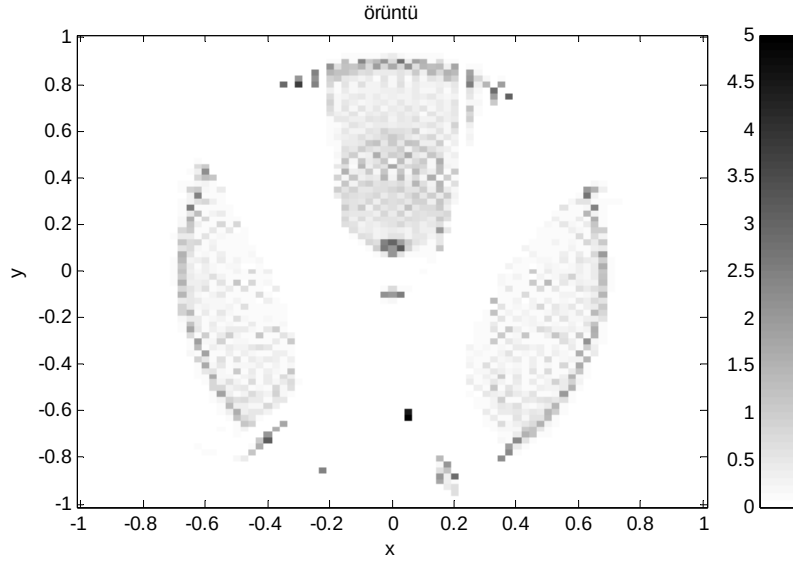
Şekil 6.20. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 20 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 20 öteleme için 89dk da gerçekleşmiştir..



Şekil 6.21. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 40 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 40 öteleme için 134dk da gerçekleştirilmiştir..



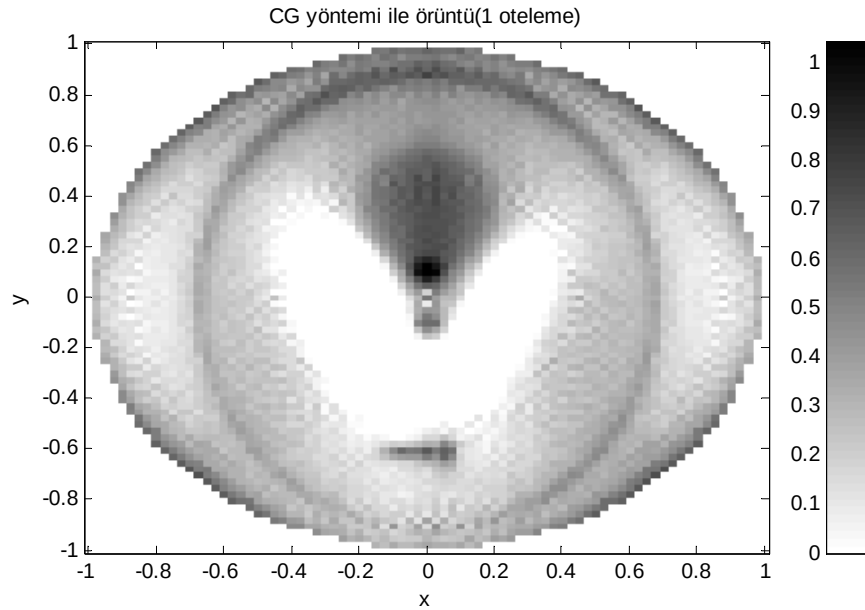
Şekil 6.22. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 60 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 60 öteleme için 179dk da gerçekleştirilmiştir..



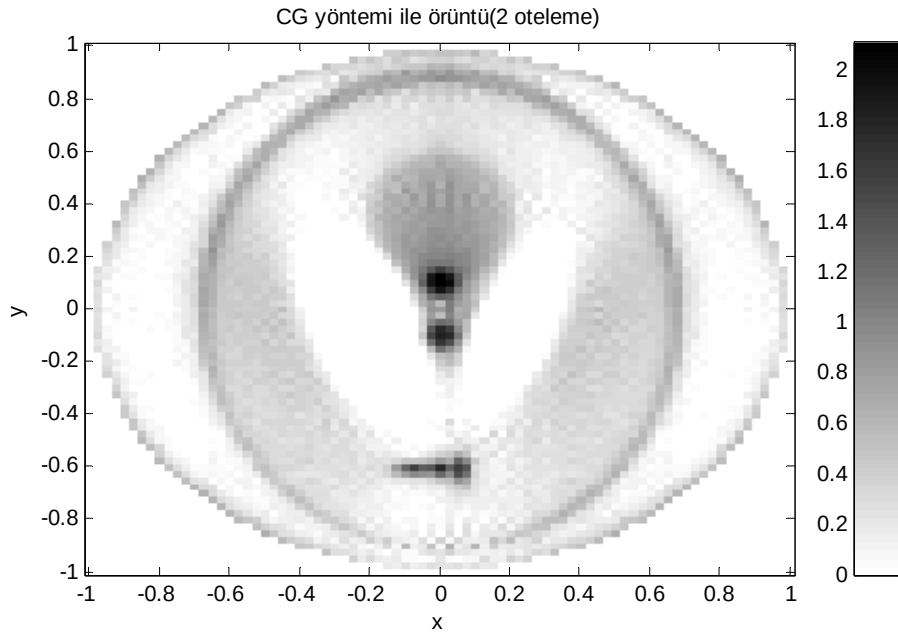
Şekil 6.23. Buradaki 81x81 görüntü EM1 kullanılarak, 80 öteleme ile oluşturulmuştur. EM1 80 öteleme için 214dk da gerçekleşmiştir..

Oluşturulan resimlerin incelenmesinden de anlaşılacağı gibi EM yönteminde 5. ötelemekten sonra bozulmalar başlamaktadır. Bu nedenle ötelemenin 5. ötelemekten sonra durdurulması gerekmektedir. Ötelemeli yöntemlerin bir sorunu da ötelemenin ne zaman durdurulacağıdır. Buna durdurma kriterleri denmektedir. Durdurma zamanı farklı fontomlarda farklı öteleme sayısında olmaktadır.

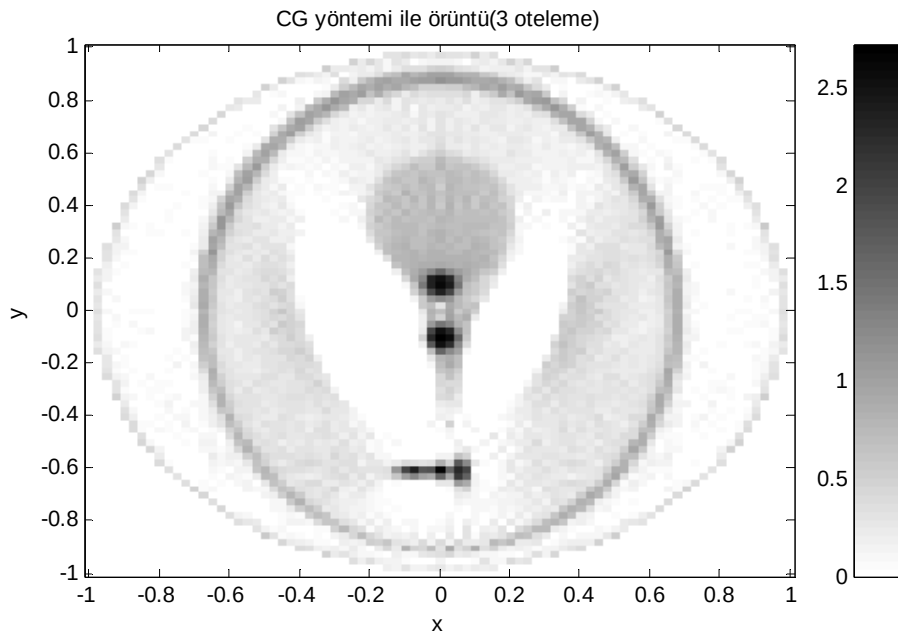
### 6.3.2 Eşlenik gradyan yöntemi ile görüntü oluşturma işlemi



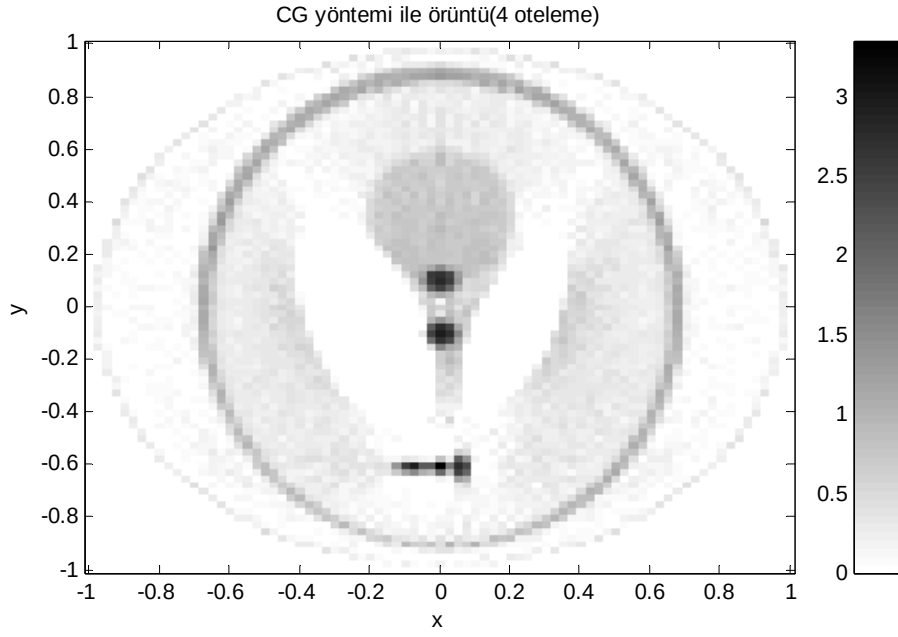
Şekil 6.24. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 1 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 1 öteleme için 32,87 sn de gerçekleşmiştir..



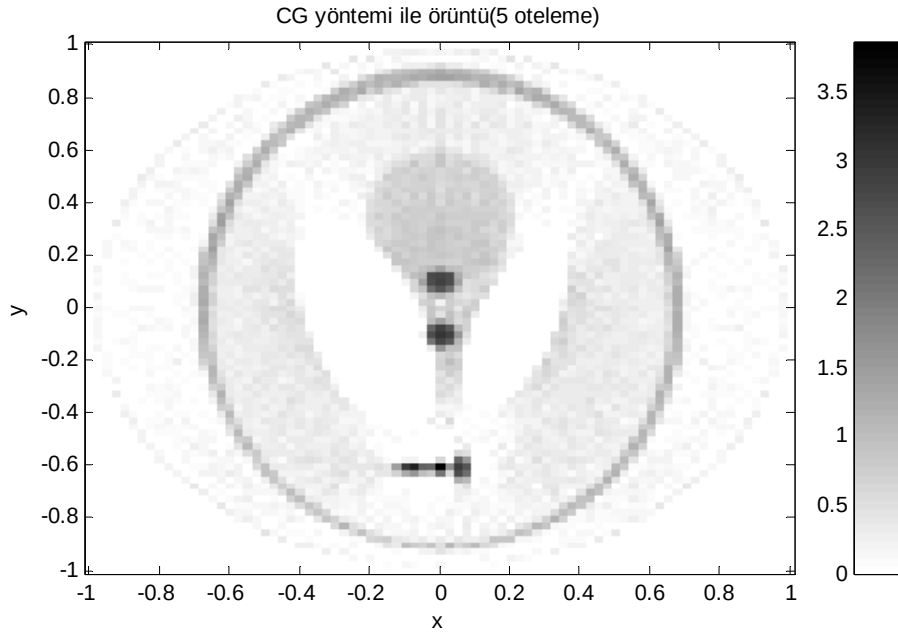
Şekil 6.25. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 2 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 2 öteleme için 35 sn de gerçekleşmiştir..



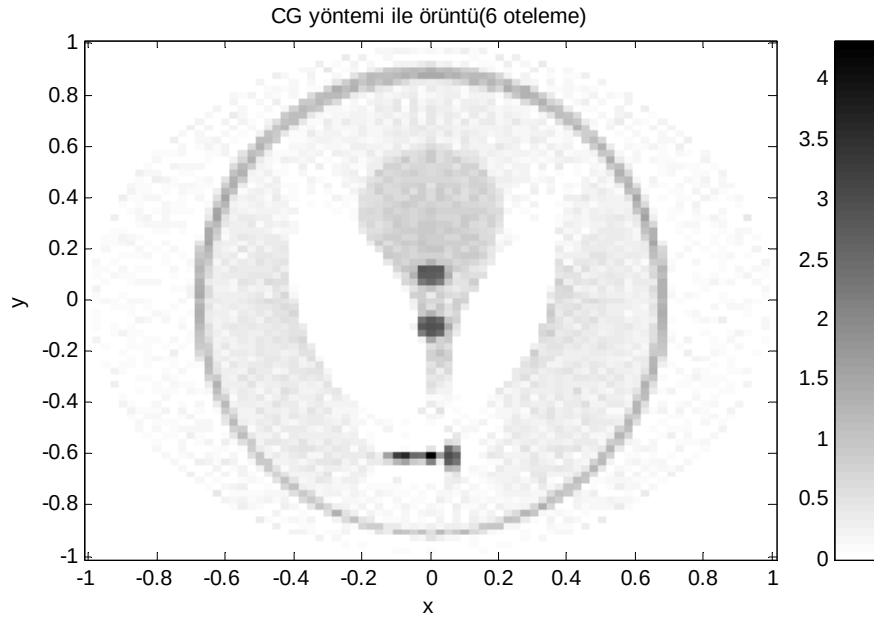
Şekil 6.26. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 3 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 3 öteleme için 37 sn de gerçekleşmiştir..



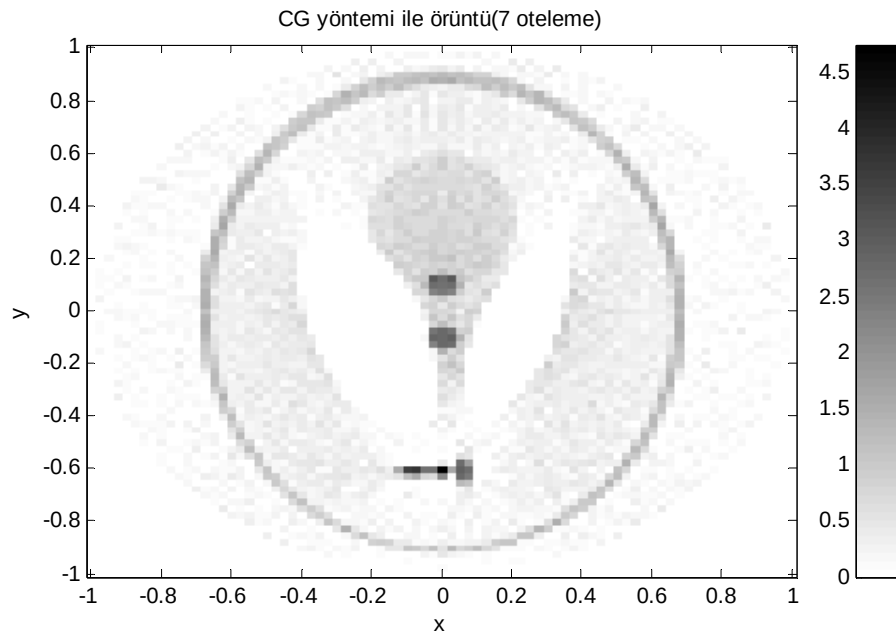
Şekil 6.27. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 4 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 4 öteleme için 40 sn de gerçekleşmiştir..



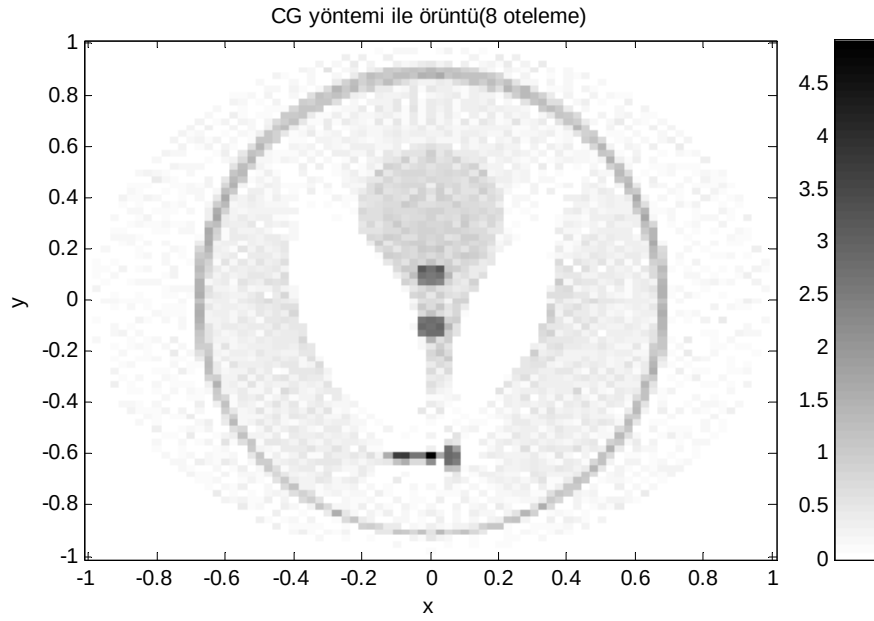
Şekil 6.28. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 5 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 5 öteleme için 42 sn de gerçekleşmiştir..



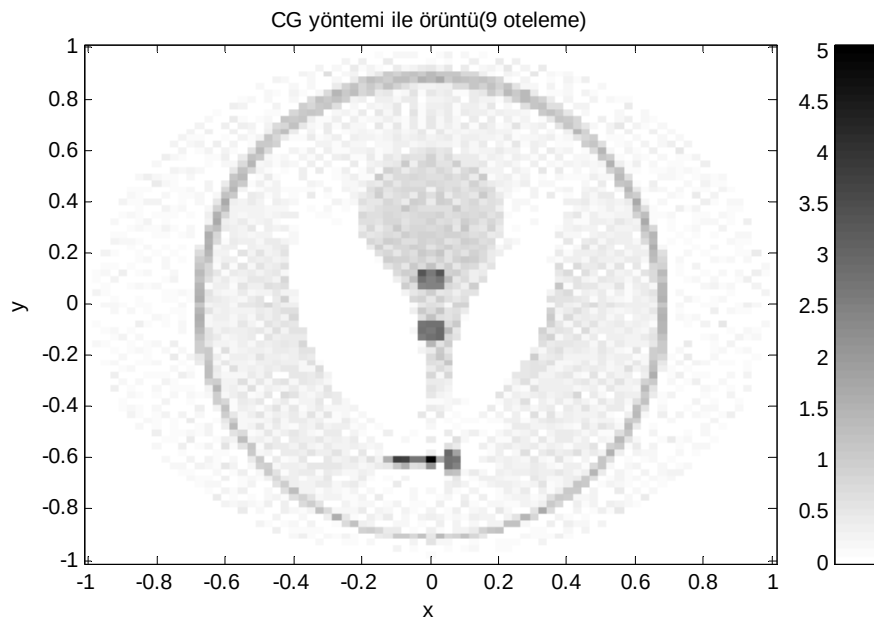
Şekil 6.29. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 6 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 6 öteleme için 44 sn de gerçekleşmiştir..



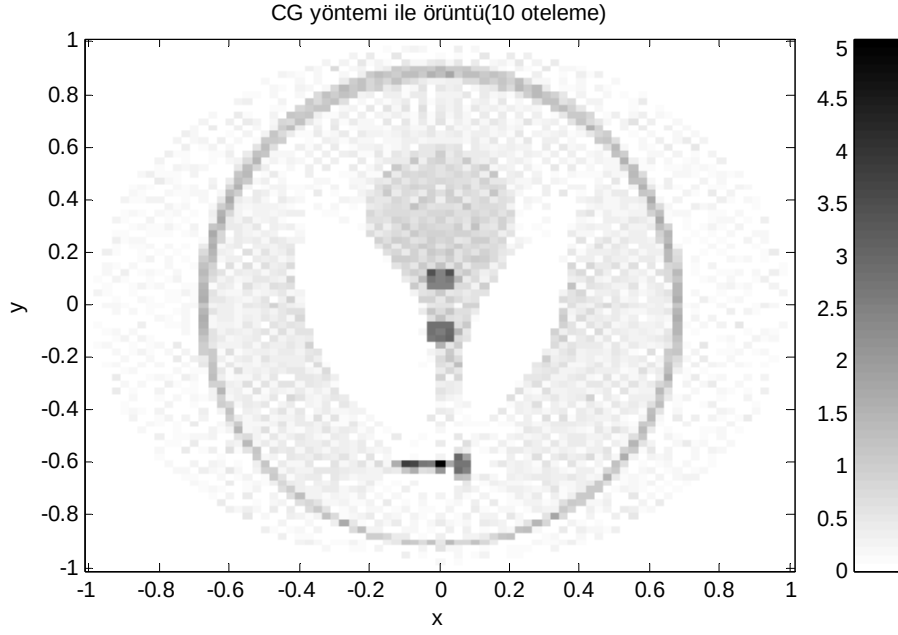
Şekil 6.30. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 7 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 7 öteleme için 46 sn de gerçekleşmiştir..



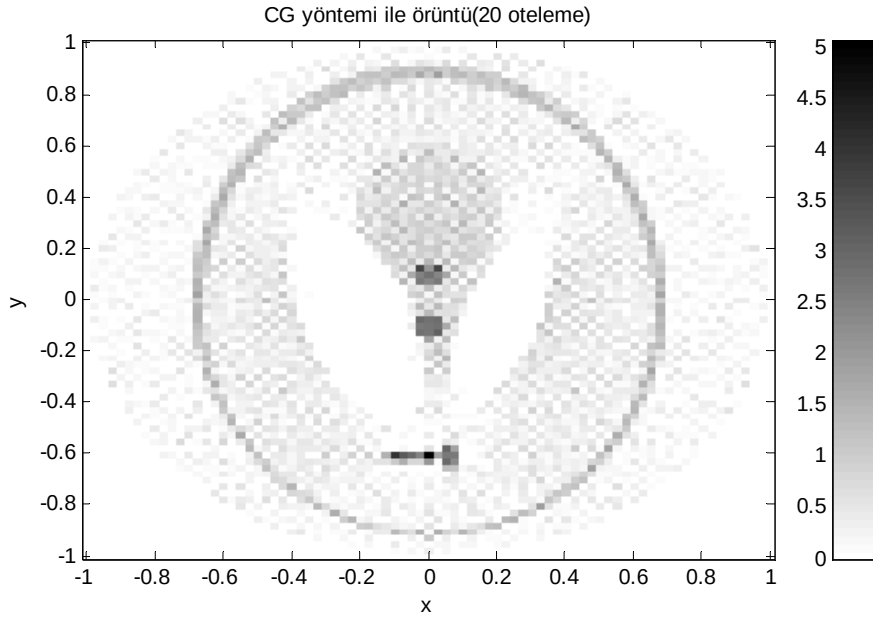
Şekil 6.31. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 8 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 8 öteleme için 48 sn de gerçekleşmiştir..



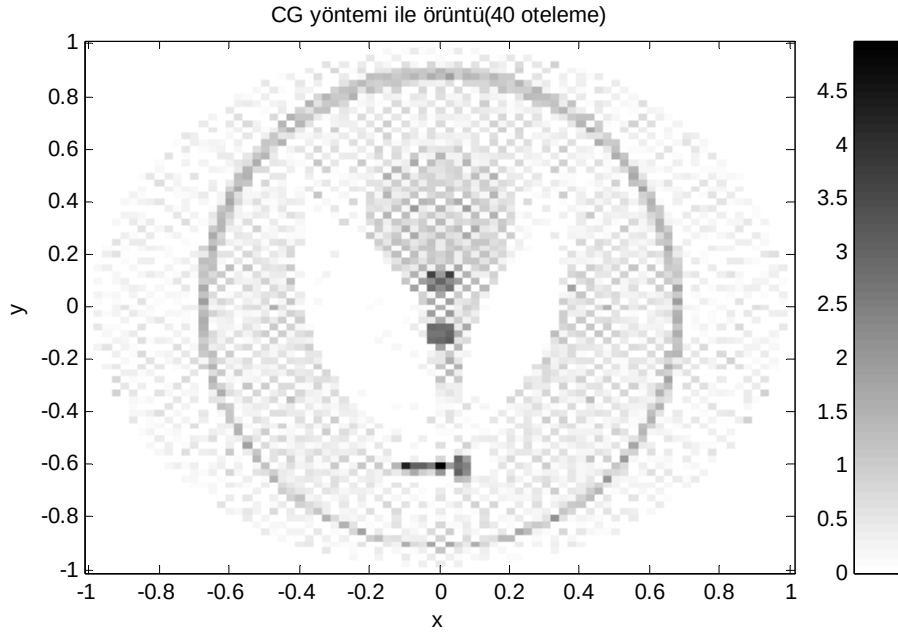
Şekil 6.32. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 9 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 9 öteleme için 50 sn de gerçekleşmiştir..



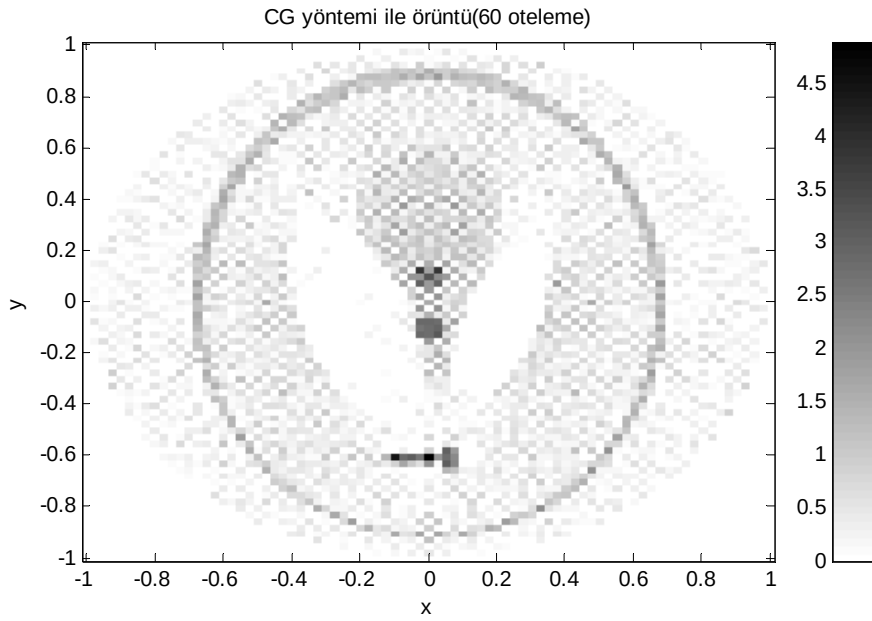
Şekil 6.33. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 10 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 10 öteleme için 52 sn de gerçekleşmiştir..



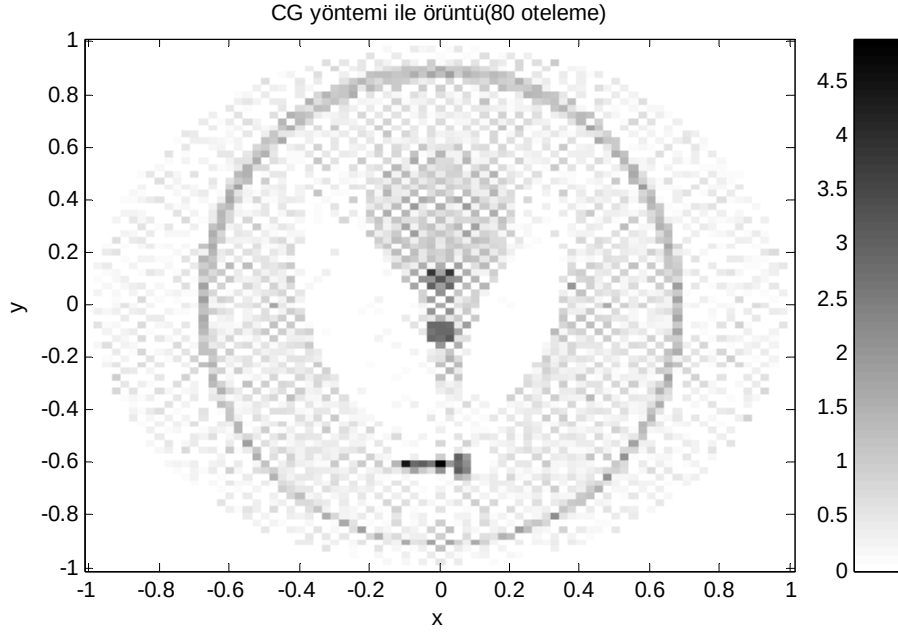
Şekil 6.34. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 20 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 20 öteleme için 62 sn de gerçekleşmiştir..



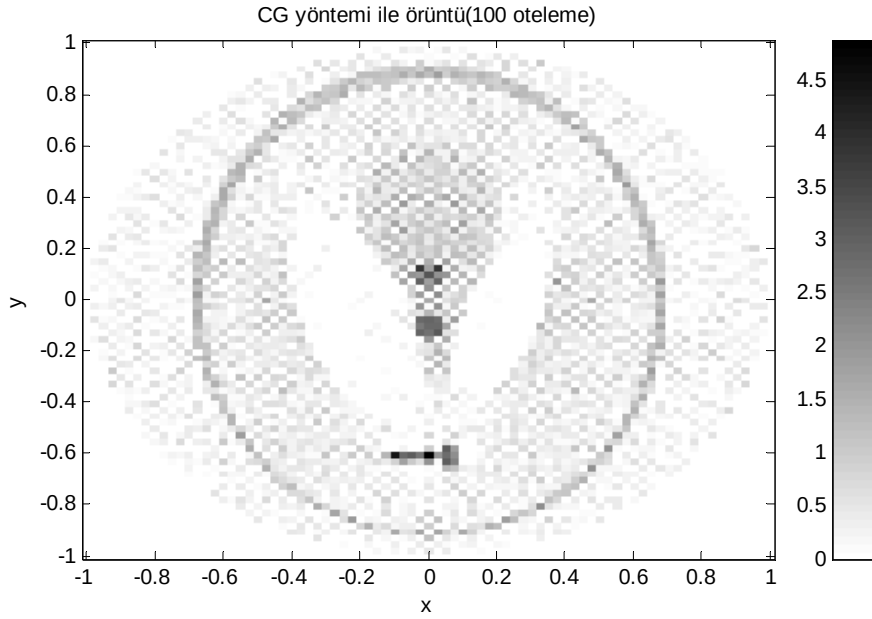
Şekil 6.35. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 40 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 40 öteleme için 84 sn de gerçekleşmiştir..



Şekil 6.36. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 60 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 60 öteleme için 106 sn de gerçekleşmiştir..



Şekil 6.37. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 80 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 80 öteleme için 128 sn de gerçekleşmiştir..



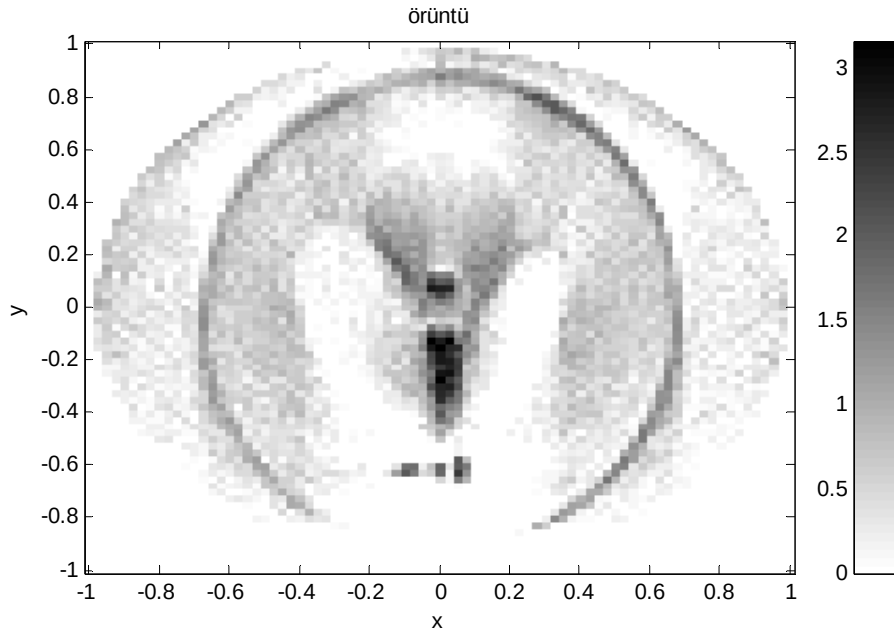
Şekil 6.38. Buradaki 81x81 görüntü Eşlenik Gradyan yöntemi kullanılarak, 100 öteleme ile oluşturulmuştur. CG 100 öteleme için 150 sn de gerçekleşmiştir..

Oluşturulan resimlerin incelenmesinden de anlaşılacağı gibi, Eşlenik Gradyan yönteminde 3. ötelemeden sonra bozulmalar başlamaktadır. Görüntü kalitesinin daha

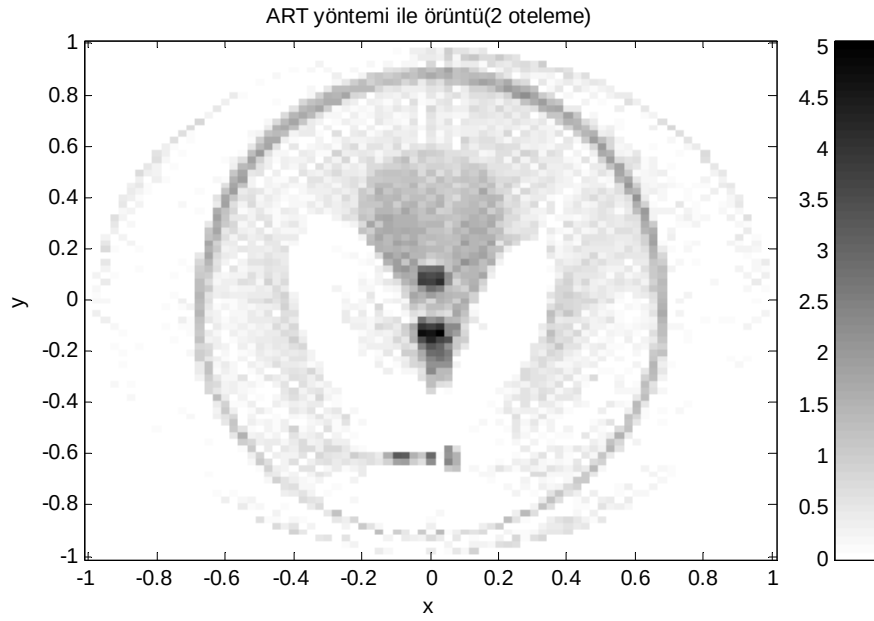
iyiye veya kötüye gittiğini anlamak için matematiksel yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemlerden birisi olan norm-2 değerlerine bakarak değerlendirmektir. Eşlenik Gradyan yöntemi ile oluşturulan görüntülerin norm-2 değerleri 3. ötelemeden sonra bozulmaya başlamaktadır. Bu nedenle, ötelemenin 3. ötelemeden sonra durdurulması gerekmektedir.

### 6.3.3 ART yöntemi ile görüntü oluşturma işlemi

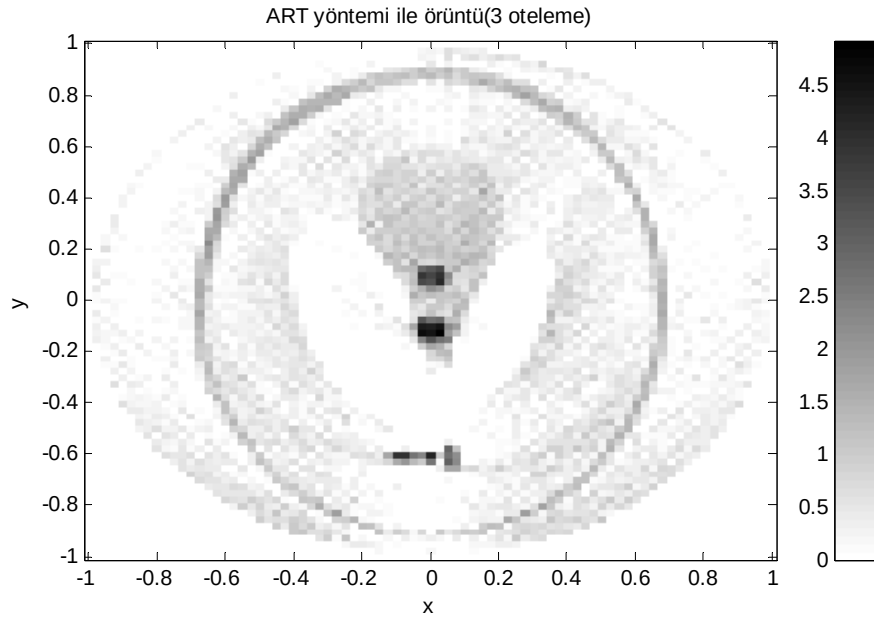
ART yönteminde ilk ötelemeden başlayarak onuncu ötelemeye kadar, öteleme sayısı arttıkça görüntü kalitesinde iyileşme gözlenmektedir. Onuncu ötelemeden sonra görüntü kalitesi biraz bozulmakla beraber diğer yöntemlerde olduğu gibi, hızlı bir bozulma söz konusu değildir. ART yöntemi ile oluşturulan görüntüler öteleme sırasına göre aşağıda verilmiştir. On ötelemeden daha fazla öteleme ile oluşturulan görüntülerde, yer kaplamaması açısından on'un katları veya gerekli görülen öteleme sonuçları verilmiştir.



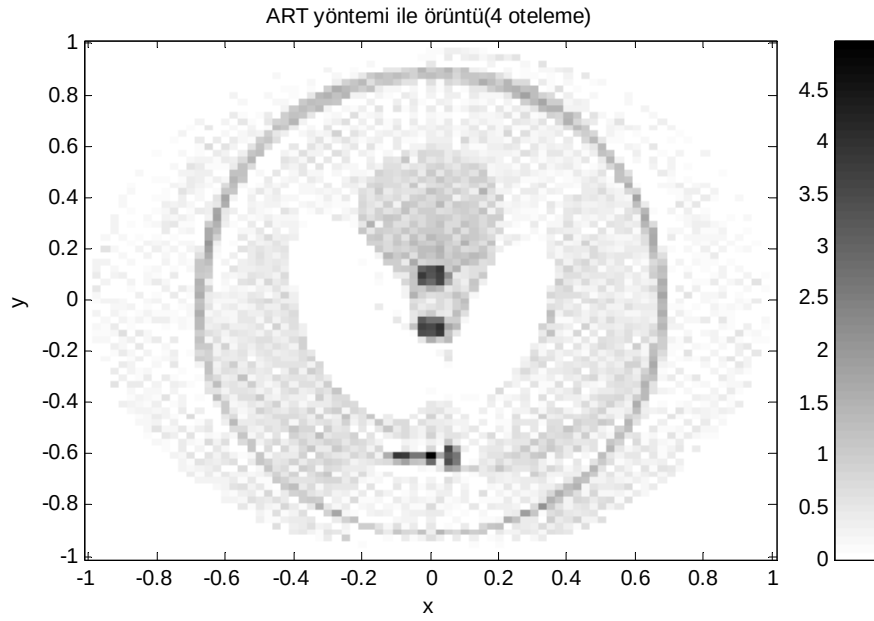
Şekil 6.39. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 1 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 1 öteleme için 36,63 dak. da gerçekleşmiştir..



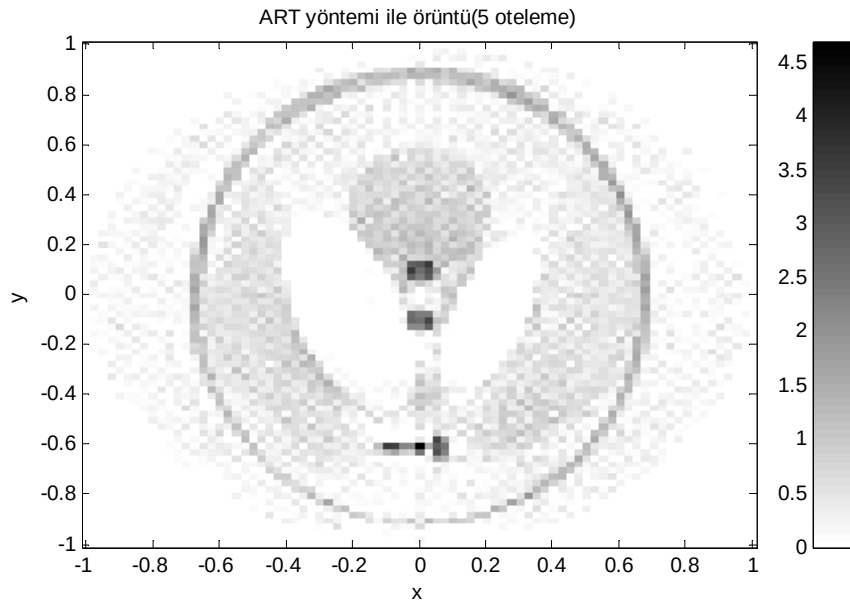
Şekil 6.40. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 2 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 2 öteleme için 37 dak. da gerçekleşmiştir..



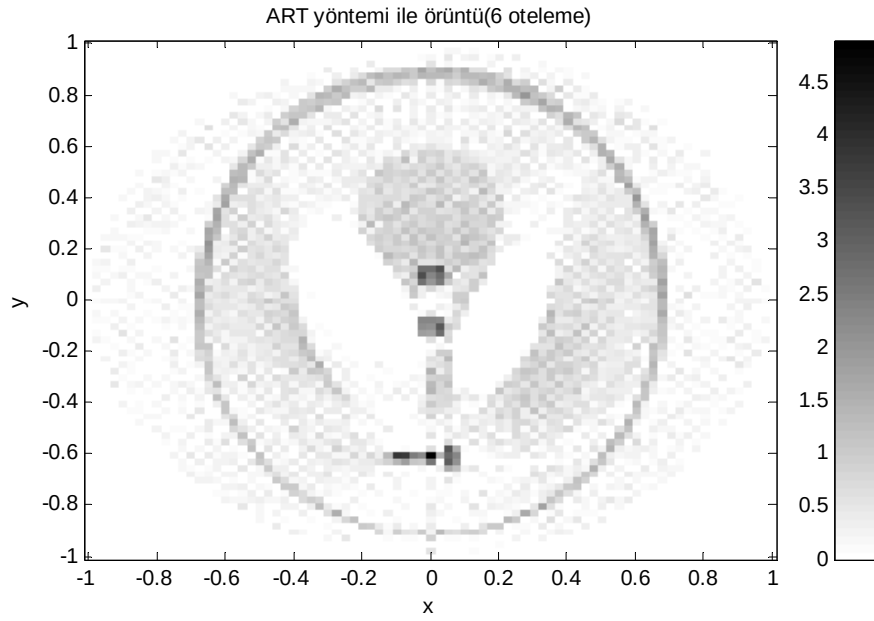
Şekil 6.41. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 3 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 3 öteleme için 37,5 dak. da gerçekleşmiştir..



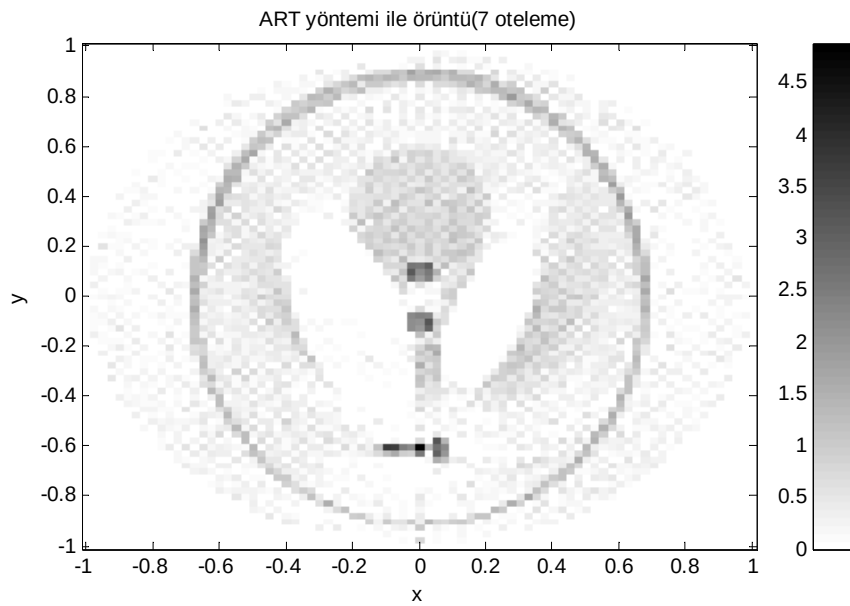
Şekil 6.42. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 4 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 4 öteleme için 38 dak. da gerçekleştirilmiştir..



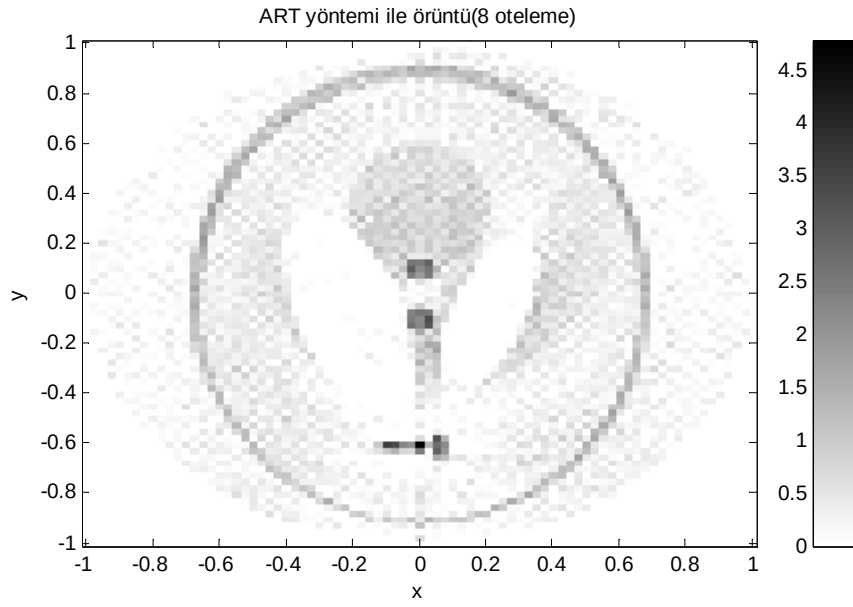
Şekil 6.43. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 5 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 5 öteleme için 38,5 dak. da gerçekleştirilmiştir..



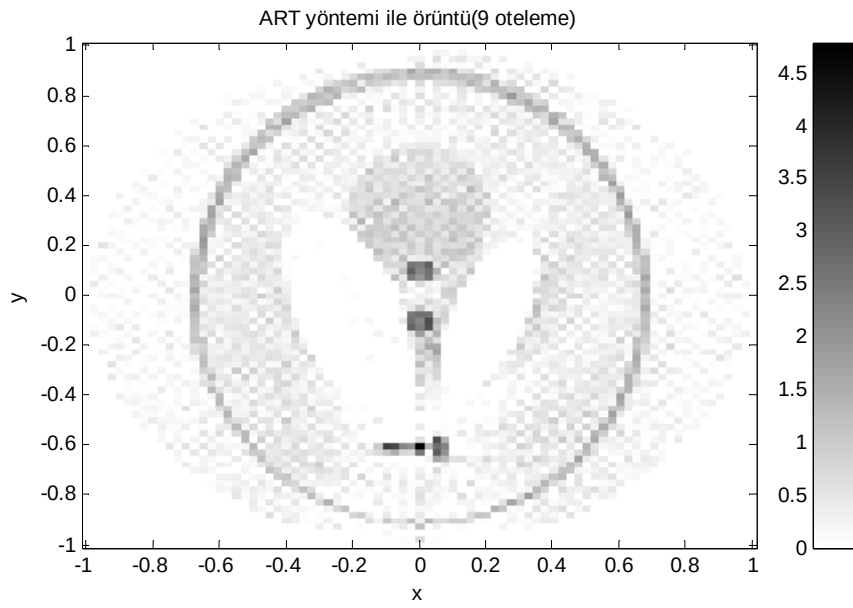
Şekil 6.44. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 6 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 6 öteleme için 39 dak. da gerçekleşmiştir..



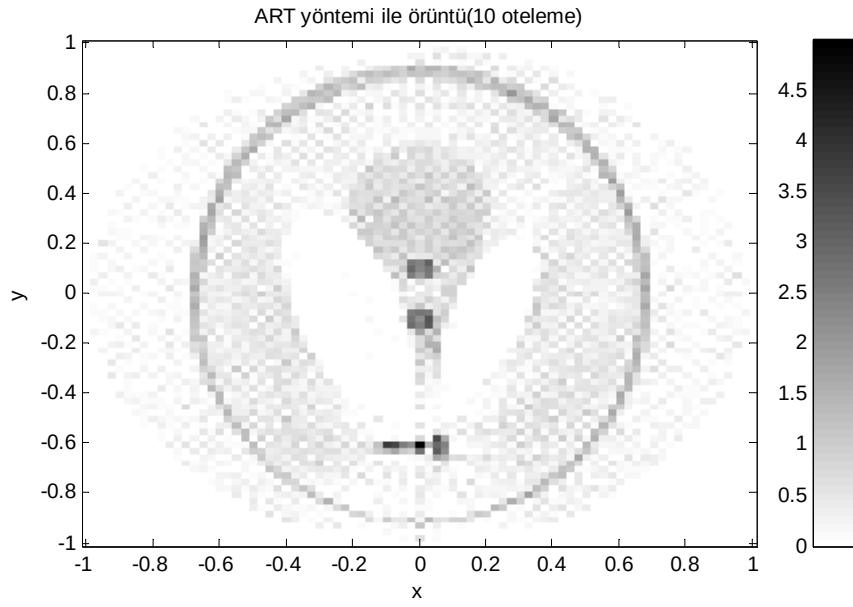
Şekil 6.45. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 7 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 7 öteleme için 39,5 dak. da gerçekleşmiştir..



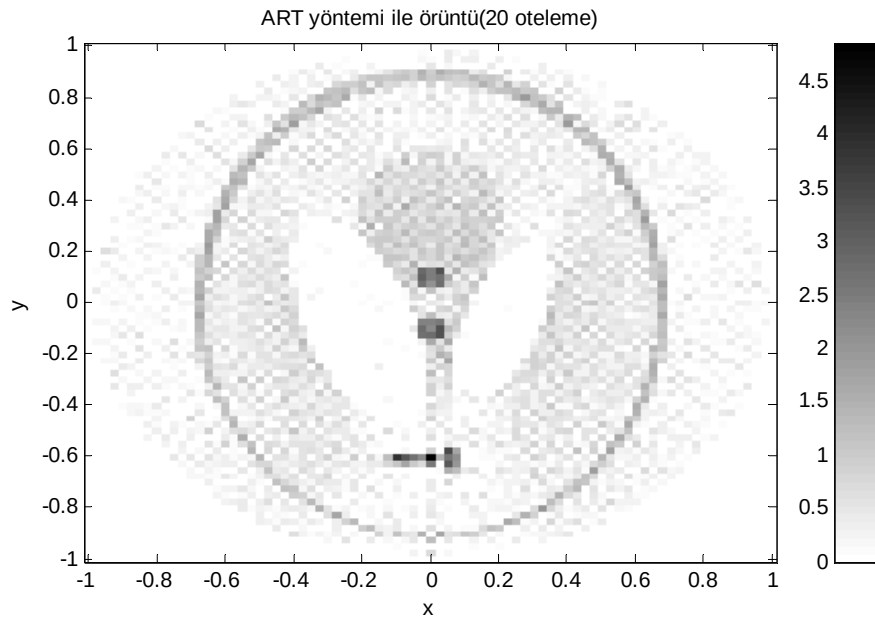
Şekil 6.46. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 8 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 8 öteleme için 40 dak. da gerçekleşmiştir..



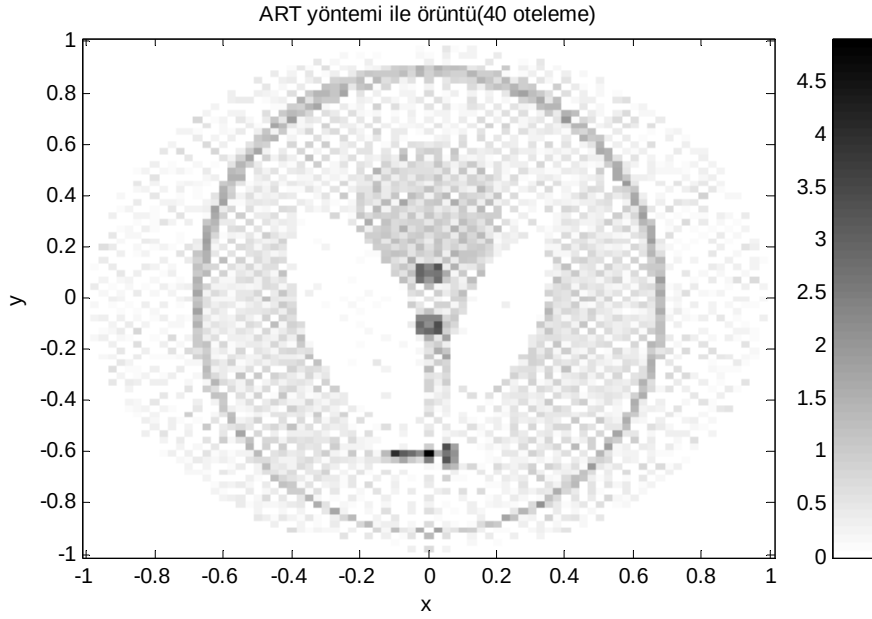
Şekil 6.47. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 9 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 9 öteleme için 40,5 dak. da gerçekleşmiştir..



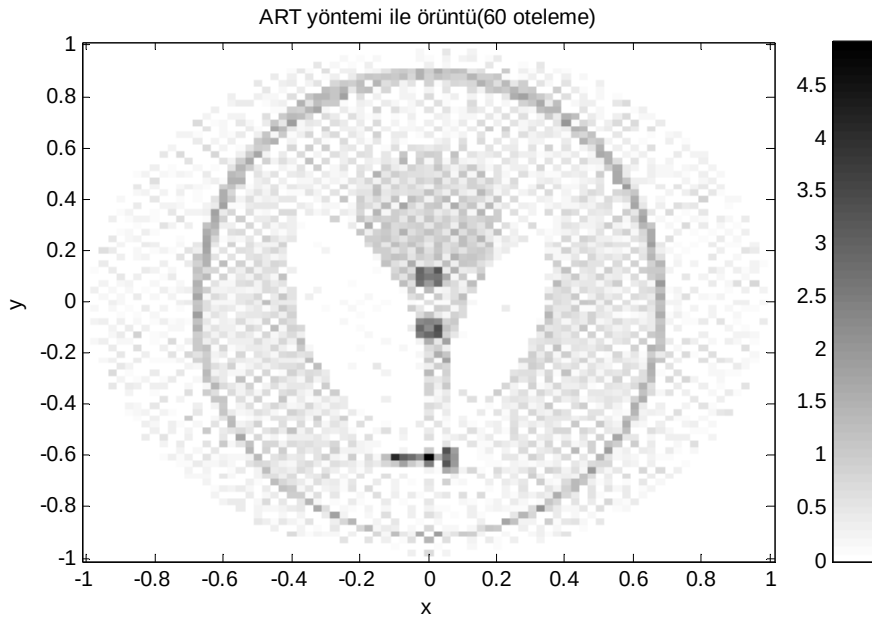
Şekil 6.48. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 10 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 10 öteleme için 41 dak. da gerçekleşmiştir..



Şekil 6.49. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 20 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 20 öteleme için 51 dak. da gerçekleşmiştir..



Şekil 6.50. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 40 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 40 öteleme için 61 dak. da gerçekleşmiştir..

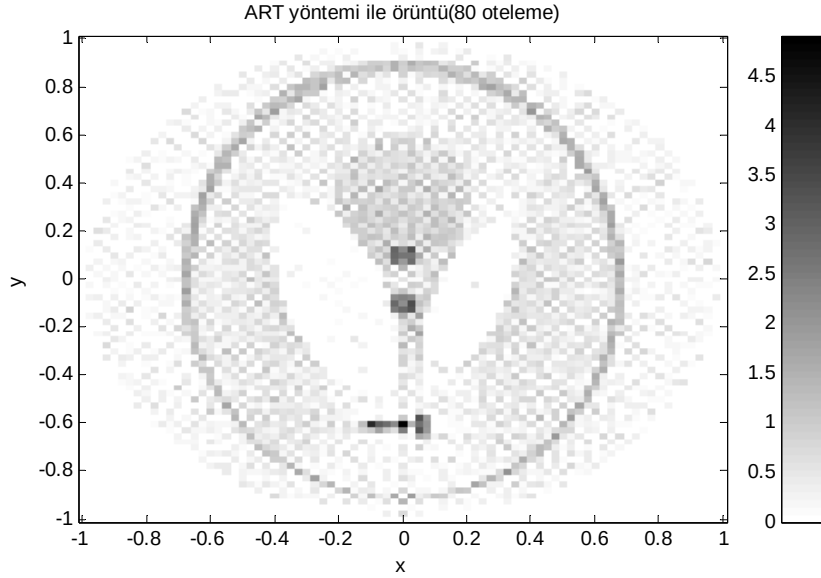


Şekil 6.51. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 60 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 60 öteleme için 71 dak. da gerçekleşmiştir..

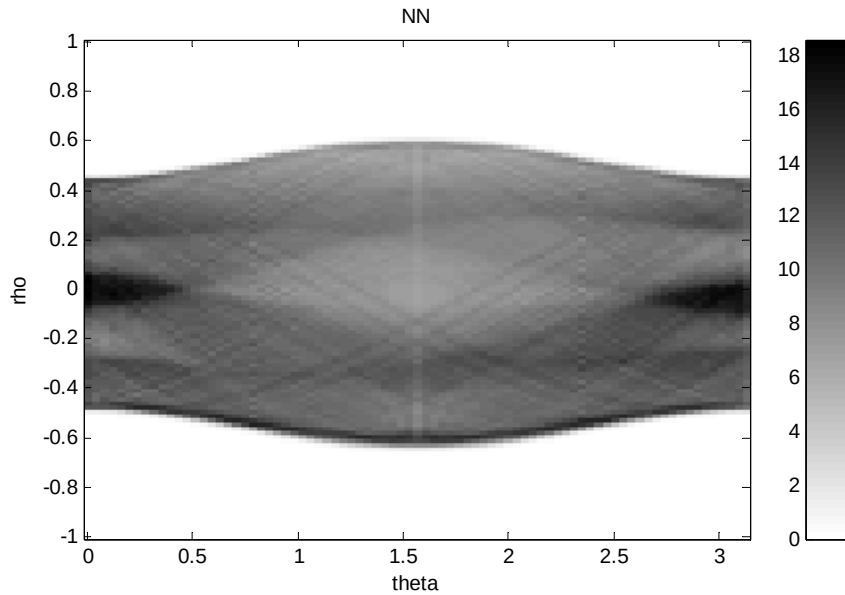
#### 6.3.4 Filtrenilmiş geri projeksiyon yöntemi oluşturulan görüntüler

Filtrenilmiş geri projeksiyon yöntemi uyguladığımız yöntemler arasında, geri oluşturma işlemini en hızlı gerçekleştiren yöntemdir. Bu yöntemle elde edilen görüntü kalitesi de , ötelemeli yöntemlerden EM haricindekilerden daha iyidir. Bu

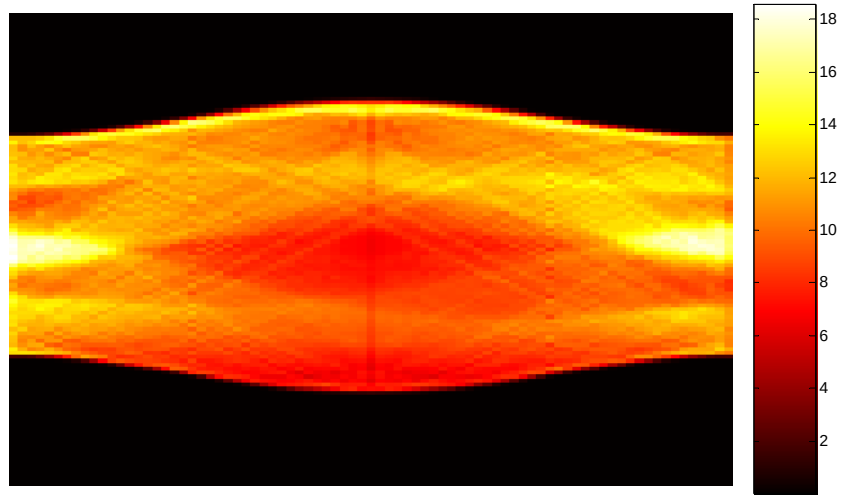
nedenle, filtrelenmiş geri projeksiyon yöntemi, tomografi makine üreticilerinin en çok kullandığı yöntemdir. Diğer yöntemlerle karşılaştırmak için filtrelenmiş geri projeksiyon yönteminin sinogramı, diğer ötelemeli yöntemlerde kullanılan sinogram boyutu ile aynı seçilmiştir.



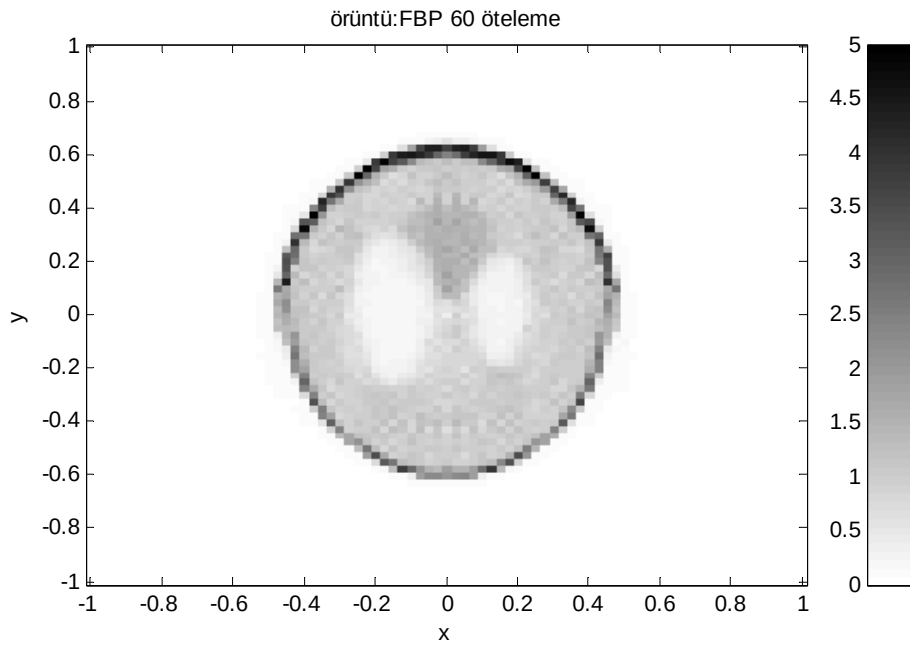
Şekil 6.52. Buradaki 81x81 görüntü ART yöntemi kullanılarak, 80 öteleme ile oluşturulmuştur. ART 80 öteleme için 81 dak. da gerçekleşmiştir..



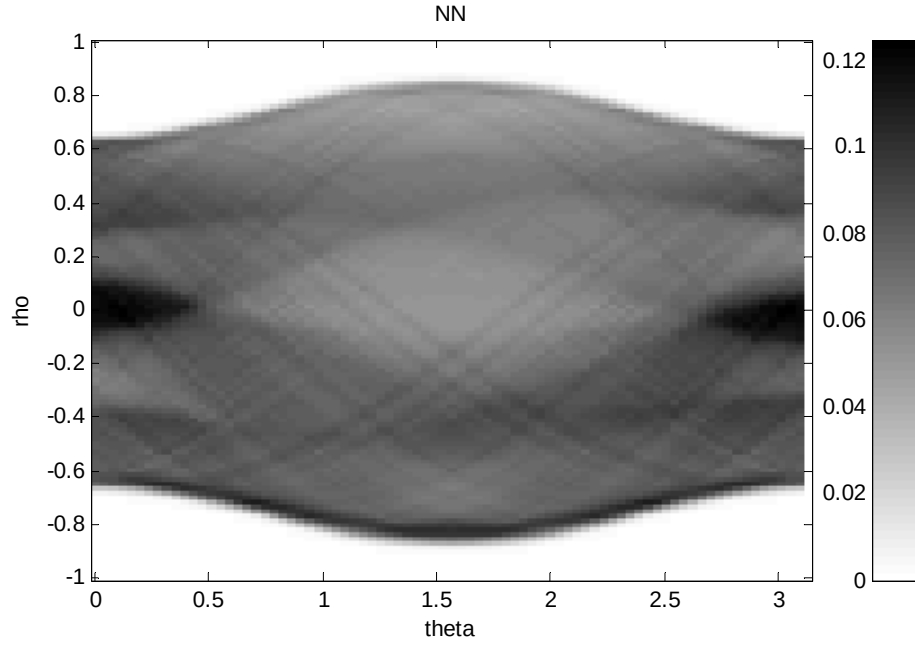
Şekil 6.53. Buradaki 119x81 sinogram Gri tonda Shepp-Logan fontomu boyutları 6/8 oranında ölçeklenerek elde edilmiştir. sinogram 16,56 dak da oluşturulmuştur



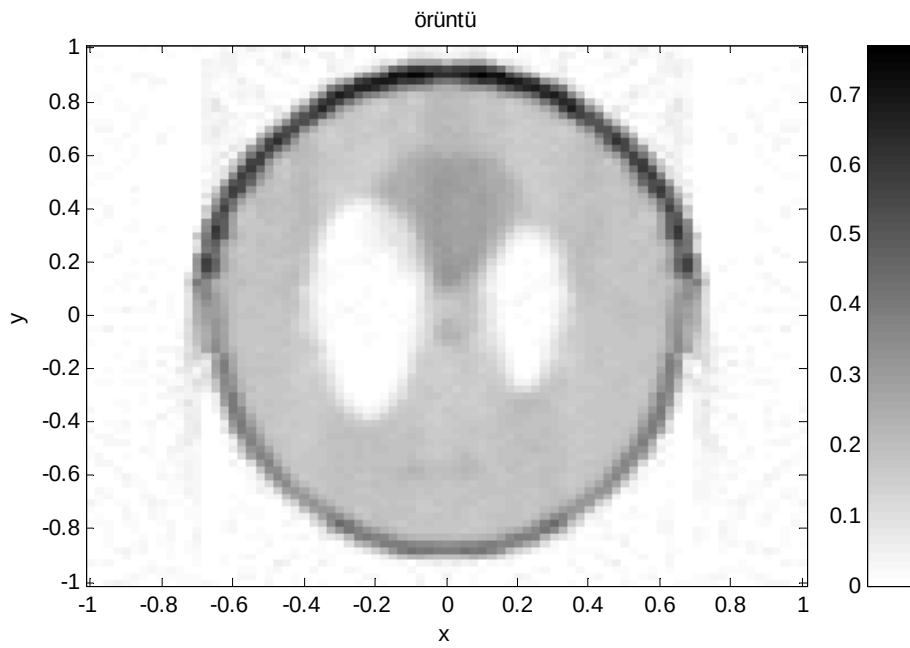
Şekil 6.54. Buradaki 119x81 sinogram renkli tonda Shepp-Logan fontomu boyutları 6/8 oranında ölçeklenerek elde edilmiştir.



Şekil 6.55. Şekil 6. 53-54’ deki sinogramdan elde edilen 81x81 Shepp-Logan fontomunun FBP ile geri oluşturulması. Piksel değer kestiriminde “en yakın komşular”, filtreleme için ise Hann filtresi kullanılmıştır

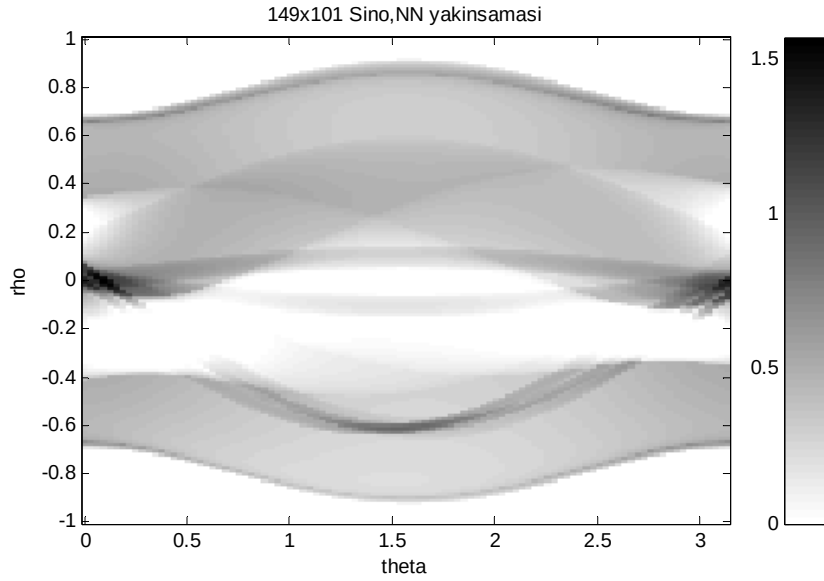


Şekil 6.56. 119x81 sinogram, sinogram. 119x81 16,56 dak da oluşturulmuştur

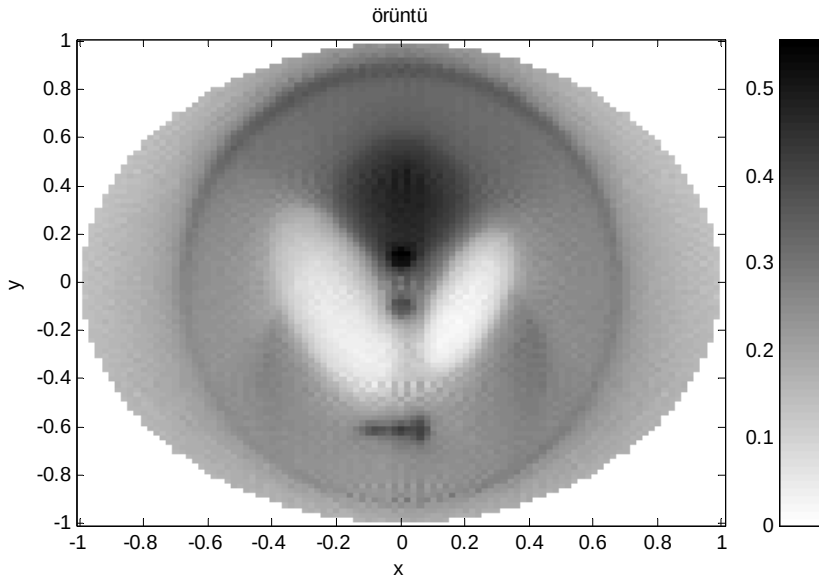


Şekil 6.57 81x81 Shepp-Logan fontomunun FBP ile geri oluşturulması. Piksel değer kestiriminde “en yakın komşular”, filtreleme için ise Hann filtresi kullanılmıştır.

#### 6.4. 101x101 Görüntü Oluşturma İşlemi, EM Yöntemi Oluşturulan Görüntüler



Şekil 6.58. 101x101 Shepp-Logan fontomunun sinogramı. Sinogram AMD Athlon2000 ile 160 dak da oluşturulmuştur



Şekil 6.59. Buradaki 101x101 görüntü EM2 kullanılarak, 1 öteleme ile oluşturulmuştur. AMD Athlon2000 ile 1 öteleme 2114dk da gerçekleşmiştir..

Elde edilen 101x101 bir ötelemelik görüntünün diğer sonuçlarla karşılaştırınca, 101x101 görüntünün, görüntü kalitesinin daha yüksek olduğu gözükmemektedir. Bu nedenle, çözünürlüğün artırılması, görüntü kalitesinin artmasını da beraberinde getirmektedir.

## BÖLÜM 7. SONUÇLAR

Bu çalışmada PET tomografi cihazlarının tarama sonucu ürettiği görüntüler(sinogramlar) sanal olarak oluşturulmuştur. İlk önce basit modeller olan nokta ve çizgilerden başlanarak, değişik eğimlerdeki ve değişik sayıdaki çizgilerin durumu analiz edilmiştir. Bunların dönüşümde ne gibi etkiye sahip oldukları araştırılmıştır. Sonuç şekiller ekler kısmına ilave edilmiştir. Çizgilerden sinogram elde edilmesi hem Radon dönüşümü kullanılarak, hem de Hough dönüşümü kullanılarak oluşturulmuştur. Daha sonra, oluşturulan algoritma, tomografi alanında kullanılan değişik fontomlar üzerinde de uygulanmış ve sinogramları elde edilmiştir. Bu fontomlar görüntü oluşturma algoritmalarının sanal ortamda denenmesine yönelik, değişik şekilleri, değişik kontrast oranları ile barındırmaktadır. Bu özelliklerinden dolayı algoritmaların eksik yönlerini gözlemleyebilme olanağını sağlar. Fontom türlerinin en çok bilineni olan Shepp-Logan fontomudur. Bu fontomun şekli daha önceki konu olan “görüntü oluşturma ve iyileştirme uygulamaları” bölümünde gösterilmişti.

PET tomografide görüntü kalitesinin iyileştirilmesi konusu değişik yöntemler kullanılarak incelenmiştir. İlk olarak, küçük boyutlu görüntülerin oluşturma ile işlemlere başlanmıştır. 41x41 ve 81x81 Örüntülerin oluşturulmasında P4-2.4GHz Pentium işlemcili PC kullanılmış, 101x101 örüntü ve sinogramları ise AMD Athlon 2000 PC kullanılarak oluşturulmuştur.

Oluşturulan görüntülerin gerçek görüntülere ne kadar yakın olduğunun tespiti için performans değerlendirmesi yapılması gerekir. Genelde literatürde görüntülerin performans değerlendirmesi norm yöntemi ile yapılmaktadır. Bu çalışmada da norm yöntemi kullanılarak performans ölçümü yapılacaktır.

Oluşturulan görüntülerin hata oranı, norm-2 tahmin yöntemi ile elde edilmiştir. Norm-2, vektörün bir bütün olarak ne kadar büyük olduğunu(vektörün her bir elemanının büyüklüklerinin tersine) belirtmektedir.

Formülasyon olarak norm-2 şöyledir;

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2} \quad (6.1)$$

Tablo 6.1 81x81 görüntünün değişik yöntemlerle oluşturulan örüntüsünün norm değerleri

| Görüntü boyutu | Öteleme sayısı | Normu (CG) | Normu (ART) | Normu (EM) | Normu (FBP) |
|----------------|----------------|------------|-------------|------------|-------------|
| 81x81          | 1              | 0,9464     | 2,9519      | 0,4689     | 0,3636      |
| 81x81          | 2              | 1,0523     | 2,3158      | 0,4151     |             |
| 81x81          | 3              | 1,2537     | 1,9874      | 0,4154     |             |
| 81x81          | 4              | 1,3324     | 1,6454      | 0,4498     |             |
| 81x81          | 5              | 1,3052     | 1,1387      | 0,6220     |             |
| 81x81          | 6              | 1,2866     | 1,2233      | 0,6619     |             |
| 81x81          | 7              | 1,2823     | 1,1099      | 0,6492     |             |
| 81x81          | 8              | 1,2897     | 1,0828      | 0,6319     |             |
| 81x81          | 9              | 1,3062     | 1,1118      | 0,6737     |             |
| 81x81          | 10             | 1,3154     | 1,1667      | 0,6849     |             |
| 81x81          | 20             | 1,3242     | 1,1883      | 0,7322     |             |
| 81x81          | 40             | 1,3428     | 1,1811      | 0,7761     |             |
| 81x81          | 60             | 1,3558     | 1,1854      | 0,7883     |             |

Burada hata tahmini yapılırken öncelikle elde edilen görüntü ile gerçek görüntünün farkının norm 2'si alınıyor. Ayrıca gerçek görüntünün norm 2'si de alınıyor. Bu iki norm değerinin oranı, norm değeri vermektedir.

$$Norm = \frac{\|GG - EG\|}{\|GG\|} \quad (6.1)$$

Bu denklemde, GG gerçek görüntü, EG ise oluşturulan görüntüdür. Norm değeri sıfıra yaklaştıkça elde edilen görüntü gerçek görüntüye daha yakın demektir. 81x81 görüntünün norm değerleri Tablo 6.1'de verilmiştir. Toblodan rakamlarla, resimlerden görsel olarak görülebildiği gibi EM algoritması bu fontom için ikinci ötelemede en iyi görüntü kalitesini yakalamıştır. FBP ise, EM'e göre değersel olarak daha iyi bir görüntü oluşturmuş olmasına rağmen, görsel olarak görüntü kalitesi kötüdür. Bunu Şekil 6.11 ile Şekil 6.30'u karşılaştırarak daha iyi anlayabiliriz. ART yönteminin normu birin üzerinde seyretmektedir. CG yönteminin ise ilk başlangıçta birin altında sonra ise birin üzerinde seyretmektedir. CG yöntemi ile elde edilen görüntüler ART yöntemine göre daha iyi olmakla beraber EM yönteminin değerlerini yakalayamamıştır.

Piksel boyutu 100x100 olan bir görüntü matrisinin, sistem matrisi (açısal örnekleme sayısı da 100 alınırsa) 10000x10000 boyutunda olmaktadır. Cebirsel yöntemlerde çözünürlüğü artırabilmek için sistem matrisinin bu değerlerden büyük olması kaçınılmazdır. Bunun gibi büyük boyutlara sahip matrisleri depolamak ve kullanmak oldukça zordur. 101x101 görüntü oluşturma, sistem matrisinin değerlerinin sıfırdan farklı olduğu değerlerin kaydedilmesi üzerine kurulu olan EM2 algoritması ile gerçekleşmiştir. Oluşan görüntü kalitesi oldukça iyi olmakla beraber işlem zamanı üç kata yakın artış göstermiştir. EM2 algoritması sistem matrisi olarak, daha önceki konu olan “görüntü oluşturma ve iyileştirme uygulamaları” bölümünde detaylı olarak anlatılan ayırık depolama yöntemi ile oluşturulan sistem matrisi kullanmaktadır. Bu yöntemle, geri oluşturmada, görüntü çözünürlüğü Matlab ortamında istenilen boyutlarda elde edilebilir. Fakat, bu yöntemin dezavantajı ise işlem süresi üç kata yakın bir zaman gerektirmesidir.

## BÖLÜM 8. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada tomografi görüntülerinin analitik ve ötelemeli yöntemlerle geri oluşturulması gerçekleştirilmiştir. Analitik yöntem olarak filtrelenmiş geri projeksiyon yöntemi kullanılmıştır. Ötelemeli yöntemlerden de Cebirsel geri oluşum(ART), Eşlenik gradyan(CG), Beklenti maksimizasyonu(EM) yöntemleri kullanılmıştır. Bu gerçekleştirme süresince cebirsel yöntemler, direk geri oluşturma yöntemlerine göre oldukça uzun bir işlem süresi gerektirmekteler. Gelişmiş, çift işlemcili PC lerin kullanılması hızı artıracaktır. Fakat yine de genel olarak direk yöntemle geri oluşturma daha hızlıdır. Görüntü kalitesi bakımından cebirsel yöntemlerle elde edilen görüntüler direk yöntemlerden daha kalitelidir. Bu nedenle hızlı bilgisayarlar kullanarak cebirsel yöntemlerle geri oluşturma gerçekenmesi doğru olacaktır.

Görüntü kalitesinin artırılmasının bir diğer parametresi, görüntüler üzerine sınırlamalar uygulamaktır. Bu nedenle sınırlama uygulanarak oluşturulan görüntüler daha kaliteli olmaktadır. Sınırlama ve düzenleme parametreleri, oluşturulan görüntü cinsine göre değişmektedir. Örneğin, bir kalp tomografisine uygulanacak sınırlama ile bir göğüs tomografisine uygulanacak sınırlama farklı olmaktadır. Yine bu sınırlamalarda değişik düzenlemeler yaparak görüntü kalitesinin incelenmesi araştırmaya açık bir konudur.

Cebirsel yöntemlerde ötelemenin durdurma zamanı değişiklik arz etmektedir. Değişik fontomlarda optimum görüntü için değişik öteleme miktarı gerekmektedir. Durdurma kriterleri yine araştırmaya açık bir konu olmaya devam etmektedir.

Filtrelenmiş geri projeksiyon görüntülerinin kalitesi ise kullanılan filtreler ve bu filtrelerin parametrelerinin değerlerine göre değişebilmektedir. Yine bu parametrelerin, oluşturulan görüntüye göre optimizasyonun sağlanması üzerine çalışmalar devam etmektedir.

Görüntü piksel sayısını artırmak çözünürlüğü artırmakla beraber, işlem zamanını birkaç kat artırmaktadır. Günümüzün gelişmiş bilgisayarları kullanılarak zaman problemi aşılsa çözünürlüğü artırarak görüntü kalitesini artırmak mümkündür.

Görüntülenecek doku hakkında ön bilgiye sahip olunması görüntü kalitesini pozitif olarak etkileyen faktörlerdendir. Bu nedenle görüntülenecek organın zayıflatma katsayı haritasının hassas olarak oluşturulması gerekmektedir. Katsayılar kişilere göre değişebilmektedir. Bu katsayılarla, optimum bir model oluşturma araştırmaya açık bir konudur.

## KAYNAKLAR

- [1] ANGER HO., “Scintillation camera with multichannel collimators”. J Nucl Med 5:515. 1964.
- [2] CHANG W, HUANG G, WANG L, “A multi-detector cylindrical SPECT system for phantom imaging”. In Conference Record of the 1990 Nuclear Science Symposium, vol 2, pp 1208–1211. Piscataway, NJ,IEEE. 1990.
- [3] DEVITO RP, HAMILL JJ, “Determination of weighting functions for energy-weighted acquisition”. J Nucl Med 32:343. 1991
- [4] GULLBERG GT, ZENG GL: “Cardiac single-photon emission-computed tomography using combined cone-beam/fan-beam collimation”. IEEE Trans. Nucl. Sci ., vol. 52, no. 1, 2005, pp. 143-153.
- [5] GULLBERG G.T., ”The attenuated Radon transform: Theory and application in medicine and biology”. Ph.D. dissertation, University of California at Berkeley, 1979.
- [6] Di BELLA E.V.R.,“Gamma camera PET with low energy collimators: Characterization and correction of scatter” , *IEEE Trans Nucl Sci.* 49(5) 2067-2073. 2002
- [7] JASZCZAK R.J., COLEMAN R.E., “Single photon emission computed tomography (SPECT) principles and instrumentation”. Invest Radiol 20:897, 1985.
- [8] JOHNSON V.E., WONG W.H., HU X, CHEN C.T., “Image restoration using Gibbs priors: Boundary modeling, treatment of blurring and selection of hyperparameters”. IEEE Trans Pat 13:413, 1991.
- [9] KING M.A., HADEMENOS G., GLICK S.J., “A dual photopeak window method for scatter correction”. J Nucl Med 33:605, 1992.
- [10] RUST TC, KADRMAS DJ, Survey of Parallel Slat Collimator Designs for Hybrid PET Imaging, *Phys. Med. Biol.* 47(6):97-104, 2003.

- [11] TOFT P. A, HANSEN K. V., "Fast Radon Transform for Detection of Seismic Reflections". In *Signal Processing VII – Theories and Applications*, volume I, pages 229-232. EURASIP EUSIPCO94, 1994.
- [12] TOFT P.A., "Using the Generalized Random Transform for Detection of Curves in Noisy Images". In *Proceedings*, volume 4, pages 2221-2225, IEEE ICASSP, May. 1996.
- [13] DEANS S. R., "Hough Transform From the Radon Transform". *IEEE PAMI*, 3(2):185-188, 1981.
- [14] ÖZDOĞAN Yilmaz, "Seismic Data Processing". Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma, 1987
- [15] WILSON Lam et al., "An Analysis on quantizing the Hough space". *Pattern Recognition Letters*, 15:1127-1135, Nov. 1994.
- [16] HANEVELD C. J. and HERMAN G. C., "A Fast Algorithm for Computation of RadonTransforms". *Geophysical Prospecting*, 38:853-860, 1990.
- [17] COOKEY M.H., TRUSSEL J. and WON I. J., "Seismic Deconvolution by Multipulse Methods". *IEEE Trans. ASSP*, 38(1):156-160, 1990.
- [18] DIEBOLD John B. and STOFFA Paul L., "The Traveltime Equation, tau-p mapping, and inversion of common midpoint data". *Geophysics*, 46(3):238-254, March 1981.
- [19] Department of Molecular and UCLA Medical Pharmacology. Homepage: Let's Play PET. <http://www.nuc.ucla.edu/lpp/lpphome.html>. 2006
- [20] NIEVERGELT Yves, "Elementary Inversion of Radon's Transform". *SIAM Review*, 28(1):79-84, March 1986.
- [21] CHAPMAN C. H., "Generalized Radon transform and slant stacks". *Geophys. J. R. ast. soc.*, 66:445-453, 1981
- [22] HERRAIZ J.L, ESPAÑA S, VAQUERO J. J, DESCO M and UDÍAS J.M. "FIRST: Fast Iterative Reconstruction Software for (PET) tomography." *Phys. Med. Biol.* **51** 4547-4565. 2006
- [23] ELSA D. Angelini, KALİFA Jérôme, LAÏNE Andrew F., "Harmonic Multiresolution Estimators for Denoising and Regularization of SPECT-PET

data". IEEE International Symposium on Biomedical Imaging, Washington D.C., USA, pp697-701, 2002.

- [24] HERMAN G. T. and ODHNER D., "Performance evaluation of an iterative image reconstruction algorithm for positron emission tomography". IEEE Trans. Med. Image., 10:336-246, 1991.
- [25] KADRMAS DJ, LOR-OSEM: Statistical PET Reconstruction from Raw Line-of-Response Histograms, *Phys. Med. Biol.*, 49:4731-44, 2004.
- [26] DEGRADO T. R. et al. "Performance Characteristics of a Whole-Body PET scanner". K. Nucl. Med., 35(8):1398-1406, 1994.
- [27] ALENIOUS S., ROUTSALAINEN U. and ASTOLA J., "Attenuation correction for PET using count-limited transmission images reconstructed with median root prior". IEEE Transactions on Nuclear Science, 46(3):646-651, June. 1999.
- [28] BOUMAN C. and SAUER K., "A generalized Gaussian image model for edge preseving MAP estimation". IEEE Transaction on Image Processing, 2(3):296-310, July 1993.
- [29] BOWSHER J., JOHNSON V., TURKINGTON T., JASZCZAK R., FLOYD C. and . COLEMAN R. E., "Bayesian reconstruction and use of anatomical a priori information for emission tomography". IEEE Transaction on Medical Imaging, 15(5), Oct. 1996.
- [30] FESSLER J. and CLINTHORNE N., "Statistical Methods for Image Reconstruction and Medical Imaging System Design". 1998 IEEE NSS-MIC tutorial course, Nov. 10 1998.
- [31] JOHNSON K. and BECKER J., "The whole brain atlas". <http://www.med.harvard.edu/AANLIB/home.html> . 2006
- [32] KONTAXAKIS G., STRAUSS L. and VAN KAICK G., "Optimized image reconstruction for emission tomography using ordered subsets, median root prior, successive substitutions and a web-based interface". In 1998 IEEE Medical Imaging Conference, Conference Record, page 1347-1352, 1999.
- [33] MOON T., "The expectation maximization algorithm". IEEE Signal Processing Magazine, pages 47-60, Nov. 1996.
- [34] NUYTS J., DUPONT P., STROOBANTSI S., MAES A., MORTELMANS L and SUETENS P., "Evaluation of maximum-likelihood based attenuation

- correction in positron emission tomography". In 1998 IEEE Medical Imaging Conference, Conference Record, pages 1836-1841, 1999.
- [35] TSUI BMW, ZHAO X-D, FREY E.C., MCCARTNEY W.H., "Quantitative single-photon emission computed tomography: Basics and clinical considerations". *Semin Nucl Med* 24(1):38. 1994.
  - [36] JASZCZAK R.J., TSUI B.M.W., "Single photon emission computed tomography". In HN Wagner and Z Szabo(eds), *Principles of Nuclear Medicine*, 2d ed. chapter 19, section 3, Philadelphia, Saunders. 1994.
  - [37] ROGER W.L., ACKERMANN R.J., "SPECT Instrumentation". *Am. J. Physiol Imaging* 14:105. 1992.
  - [38] KUHL D.E., EDWARDS R.Q., "Reorganizing data from transverse section scans of the brain using digital processing". *Radiology* 91:975. 1968.
  - [39] CHO Z.H., YI W., JUNG K.J., et al., "Performance of single photon tomography system-Gamma-tom-1". *IEEE Trans Nucl Sci* NS-29:484. 1982.
  - [40] University of Washington, Department of Radiology, Division of Nuclear Medicine. Homepage: <http://depts.washington.edu/nucmed/IRL> . 2006
  - [41] HIROSE Y., IKEDA Y., HIGASHI Y., et al., "A hybrid emission CT-HEADTOME II". *IEEE Trans Nucl Sci* NS-29:520. 1982.
  - [42] KADRMAS DJ, RUST TC, "Converging Slat Collimators for PET Imaging with Large-Area Detectors", *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 50(1):17-23, 2003.
  - [43] MOORE S.C., DOHERTY M.D., ZIMMERMAN R.E., HOLMAN B.L., "Improved performance from modifications to the multidetector SPECT brain scanner". *J Nucl Med* 25:688. 1984.
  - [44] GULLBERG G.T., CHRISTIAN P.E., ZENG G.L., et al, "Cone beam tomography of the heart using single-photon emission-computed tomography". *Invest Radiol* 26:681. 1991.
  - [45] JASZCZAK R.J., TSUI B.M.W., "Single photon emission computed tomography". In HN Wagner and Z Szabo (eds), *Principles of Nuclear Medicine*, 2d ed. chapter 18, section 1. Philadelphia, Saunders. 1994.
  - [46] LIM C.B., GOTTSCHALK S., WALKER R., et al., "Tri-angular SPECT system for 3-D total organ volume imaging: Design concept and preliminary imaging results". *IEEE Trans Nucl Sci* NS-32:741. 1985.

- [47] GENNA S., SMITH A., “The development of ASPECT, an annular single crystal brain camera for high efficiency SPECT”. IEEE Trans Nucl Sci NS-35:654, 1988.
- [48] CHANG W., HUANG G., WANG L., “A multi-detector cylindrical SPECT system for phantom imaging”. In Conference Record of the 1990 Nuclear Science Symposium, vol 2, pp 1208–1211. Piscataway, NJ, IEEE. 1990.
- [49] MILSTER T.D., AARSVOLD J.N., BARRETT H.H., et al., “A full-field modular gamma camera”. J Nucl Med 31:632. 1990.
- [50] ROWE R.K., AARSVOLD J.N., BARRETT H.H., et al., “A stationary, hemispherical SPECT imager for 3D brain imaging”. J Nucl Med 34:474. 1992.
- [51] TSUI BMW, GULLBERG GT, EDGERTON ER, et al., “The design and clinical utility of a fan beam collimator for a SPECT system”. J Nucl Med 247:810. 1986.
- [52] JASZCZAK R.J., FLOYD C.E., MANGLOS S.M., et al., “Cone beam collimation for single photon emission computed tomography: Analysis, simulation, and image reconstruction using filtered backprojection”. Med Phys 13:484. 1987.
- [53] Department of Computer Science, The Graduate Center, City University of New York. <http://www.gc.cuny.edu/faculty>. 2006
- [54] GULLBERG G.T., CHRISTIAN P.E., ZENG G.L., et al., “Cone beam tomography of the heart using single-photon emission-computed tomography”. Invest Radiol 26:681. 1991.
- [55] CHANG W., HUANG G., WANG L., “A multi-detector cylindrical SPECT system for phantom imaging”. In Conference Record of the 1990 Nuclear Science Symposium, vol 2, pp 1208–1211, IEEE. Piscataway, NJ, 1990.
- [56] FLOYD C.E., JASZCZAK R.J., GREER K.L., COLEMAN R.E., “Deconvolution of Compton scatter in SPECT”. J Nucl Med 26:403. 1985.
- [57] YANCH J.C., FLOWER M.A., WEBB S., “Comparison of deconvolution and windowed subtraction techniques for scatter compensation in SPECT”. IEEE Trans Med Imaging 7:13. 1988.

- [58] KING M.A., HADEMENOS G., GLICK S.J., "A dual photopeak window method for scatter correction". J. Nucl Med 33:605. 1992.
- [59] OGAWA K., HARATA Y., ICHIHARA T., et al., "A practical method for position-dependent Compton scatter correction in SPECT". IEEE Trans Med Imaging 10:408. 1991.
- [60] DEVITO R.P., HAMILL J.J., "Determination of weighting functions for energy-weighted acquisition". J Nucl Med 32:343. 1991.
- [61] GAGNON D., TODD-POKROPEK A., ARSENAULT A., DUPROS G., "Introduction to holospectral imaging in nuclear medicine for scatter subtraction". IEEE Trans Med Imag 8:245, 1989.
- [62] FREY E.C., TSUI B.M.W., "A comparison of scatter compensation methods in SPECT: Subtraction-based techniques versus iterative reconstruction with an accurate scatter model". In Conference Record of the 1992 Nuclear Science Symposium and the Medical Imaging Conference, October 27–31, Orlando, Fla, pp 1035–1037. 1992.
- [63] FREY E.C., JU Z-W, TSUI B.M.W., "A fast projector-backprojector pair modeling the asymmetric, spatially varying scatter response function for scatter compensation in SPECT imaging". IEEE Trans Nucl Sci NS-40(4):1192. 1993.
- [64] MANIAWSKI P.J., MORGAN H.T., WACKERS F.J.T., "Orbit-related variations in spatial resolution as a source of artifactual defects in thallium-201 SPECT". J Nucl Med 32:871. 1991.
- [65] KING M.A., SCHWINGER R.B., PENNEY B.C., "Variation of the count-dependent Metz filter with imaging system modulation transfer function". Med Phys 25:139. 1986.
- [66] PENNEY B.C., GLICK S.J., KING M.A., "Relative importance of the errors sources in Wiener restoration of scintigrams". IEEE Trans Med Imaging 9:60. 1990.
- [67] TSUI B.M.W., FREY E.C., ZHAO X-D, et al., "The importance and implementation of accurate 3D compensation methods for quantitative SPECT". Phys Med Biol 39:509. 1994.
- [68] LEWITT R.M., EDHOLM P.R., XIA W., "Fourier method for correction of depth dependent collimator blurring". SPIE Proc 1092:232. 1989.

- [69] GLICK S.J., PENNEY B.C., KING M.A., BYRNE C.L., “Non-iterative compensation for the distance-dependent detector response and photon attenuation in SPECT imaging”. *IEEE Trans Med Imaging* 13(2):363. 1993.
- [70] FORMICONI A.R., PUPI A., PASSERI A., “Compensation of spatial system response in SPECT with conjugate gradient reconstruction technique”. *Phys Med Biol* 34:69. 1990.
- [71] LEWITT, R.M., “Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms”. *Phys. Med. Biol.*, 37, 705–716, 1992.
- [72] MATEJ, S., HERMAN, G.T., NARAYAN, T.K., FURUIE, S.S., LEWITT, R.M., and KINAHAN, P., “Evaluation of task-oriented performance of several fully 3–D PET reconstruction algorithms”. *Phys. Med. Biol.*, 39, 355–367, 1994.
- [73] HENSEN Per Christian, “Rank-Deficient and Discrete III-Posed Problems”. Polyteknisk Forlag. Lyngby, Denmark, 1996. Doctoral Dissertation.
- [74] KACRZMARZ S., “Angenährte Auslösung von Systemen linear Gleichungen”. *Bull. Int. Acad. Pol. Sei. Lett. A*, 35:355-357, 1937.
- [75] HERMAN G. T., “Image Reconstruction from Projection: the fundamentals of Computerized Tomography”. Academic Press, 1996.
- [76] GENSOR Yair, “Finite Series-Expansion Reconstruction Methods”. In *Proc. of the IEEE*, volume 71, pages 409-419, March 1983.
- [77] SHEPP L. A. and KRUSTAL J. B., “Computerized tomography: The new medical x-ray technology”. *Am. Math. Monthly*, 85:420-439, April 1978.
- [78] SHEPP L. A., VARDI Y. and KAUFMAN L., “A Statistical Model for Positron Emission Tomography”. *Journal of the American Statistical Association*, 80(389):8-37, March 1985. The Pages include comments and discussion by several authors.
- [79] DUDA R. O. and HART P. E., “Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures”. *Communication of the Association for Computing Machinery*, 15(1):11-15, 1972.
- [80] BIEMOND J., LAGENDIJK R. and MERSEREAU R., “Iterative methods for image deblurring”. *Proceedings of the IEEE*, 78(5):876-883, May. 1990.

- [81] GERMAN S. and GERMAN D., "Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images". IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 6(6):721-742, Nov. 1984.
- [82] KAY S., "Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory". Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [83] LANGE K., "Convergence of EM image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing". IEEE Transactions on Medical Imaging, 9(4):439-446, Dec. 1990. Corrections ITMI 10(2) 1991 p. 228.
- [84] BOUMAN C. and SAUER K., "A generalized Gaussian image model for edge preserving MAP estimation". IEEE Transaction on Image Processing, 2(3):296-310, July 1993.
- [85] NUYTS J., DUPONT P., STROOBANTSI S., MAES A, MORTELMANS L. and SUETENS P., "Evaluation of maximum-likelihood based attenuation correction in positron emission tomography". In 1998 IEEE Medical Imaging Conference, Conference Record, pages 1836-1841, 1999.
- [86] LANGE K., BAHN M. and LITTLE R., "A theoretical study of some maximum likelihood algorithms for emission and transmission tomography". IEEE Transactions on Medical Imaging, 6(2):106-114, June 1987.
- [87] PRESS W., TEUKOLSKY S., WETTERLING W. and FLANNERY B., "Numerical Recipes in C". The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1992.
- [88] KONTAXAKIS G., STRAUSS L. and VAN KAICK G., "Optimized image reconstruction for emission tomography using ordered subsets, median root prior, successive substitutions and a web-based interface". In 1998 IEEE Medical Imaging Conference, Conference Record, page 1347-1352, 1999.
- [89] WANG W., GOLDSTEIN C. and GINDI G., "Noise and resolution properties of gamma-penalized likelihood reconstruction". In 1998 IEEE Medical Imaging Conference, Conference Record, pages 1136-1140, 1999.
- [90] LIPINSKI B., HERZOG H., KOPS R., OBERSCHELP W. and MULLER-GARTNER H., "Expectation Maximization reconstruction of positron emission tomography images using anatomical magnetic resonance information". IEEE Transactions on Medical Imaging, 16:129-136, Apr. 1997.
- [91] BOWSHER J., JOHNSON V., TURKINGTON T., JASZCZAK R., FLOYD C. and COLEMAN R. E., "Bayesian reconstruction and use of anatomical a

- priori information for emission tomography". IEEE Transaction on Medical Imaging, 15(5), Oct. 1996.
- [92] CHEN C., JOHNSON V., WONG W., HU X. and METZ C., "Bayesian image reconstruction in positron emission tomography". IEEE Transactions on Nuclear Science, 37(2):636-641, Apr. 1990.
  - [93] ARDEKANI B., BRAUN M. and HUTTON B., "Improved quantification with the use of anatomical in PET Image reconstruction". In K. Uemura et al., editors, Quantification of Brain Function, pages 351-359. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1993.
  - [94] BYRNE C., "Iterative image reconstruction algorithms based on cross entropy minimization". IEEE Transactions on Image Processing, 2(1):96-103, Jan. 1993.
  - [95] KAUFMAN L., Maximum likelihood, least squares and penalized least squares for PET. IEEE Transaction on Medical Imaging, 12(2):200-214, June 1993.
  - [96] FESSLER J., "Hybrid Poisson/polynomial objective functions for tomographic image reconstruction from transmission scans". IEEE Transactions on Image Processing, 4(10):1439-1450, Oct. 1995.
  - [97] DE PIERRO A., "A modified expectation maximization algorithm for penalized likelihood estimation in emission tomography". IEEE Transactions on Medical Imaging, 14(1):132-137, Mar. 1995.
  - [98] FESSLER J. and CLINTHORNE N., "Statistical Methods for Image Reconstruction and Medical Imaging System Design". 1998 IEEE NSS-MIC tutorial course, Nov. 10 1998.
  - [99] SAUER K. and BOUMAN C., "A generalized Gaussian image model for edge preseving MAP estimation". IEEE Transaction on Image Processing, 2(3):296-310, July 1999
  - [100] FESSLER J. and HERO A., "Space-alternating generalized expectation-maximization algorithm". IEEE Transactions on Signal Processing, 42(10):2664-2677, Oct. 1994.
  - [101] BOUMAN C. and SAUER K., "A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization". IEEE Transactions on Image Processing, 5(3):480-492, Mar. 1996

- [102] HUDSON H. and LARKIN R., "Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projections data". IEEE Transactions on Medical Imaging, 13(4):601-609, Dec. 1994.
- [103] JASZCZAK R. and TSUI B., "General principles". In H. Wagner, editor, principles of Nuclear Medicine, bölüm 18, kısım 1. W. B. Saunders Company, Philadelphia, 2<sup>nd</sup> edition, 1995.
- [104] KAY S., "Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory". Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [105] OLLINGER J. and FESSLER J., "Positron-emission tomography". IEEE Signal Processing Magazine, pages 43-55, Jan. 1997.
- [106] YAVUZ M. and FESSLER J., "New statistical models for randoms-precorrected PET scans". In Information Processing in Medical Imaging, volume 1230 of Lecture Notes in Computer Science, pages 190-203. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [107] MICHEL C., SIBOMANA M., BOL A., BERNARD X., LONNEUX M., DEFRISE M., COMTAT C., KINAHAN P. and TOWNSEND D., "Preserving Poisson Characteristics of PET data with weighted OSEM reconstructions". In 1998 IEEE Medical Imaging Conference, Conference Record, pages 1323-1329, 1999.
- [108] ASTOLA J. and KUOSMANEN P., "Fundamentals of nonlinear digital filtering". CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [109] ALENIOUS S. and ROUTSALAINEN U., "Bayesian image reconstruction in positron emission tomography based on median root prior". European Journal of Nuclear Medicine, 24(3):258-265. Mar. 1997.
- [110] FESSLER J., "Hybrid Poisson/polynomial objective functions for tomographic image reconstruction from transmission scans". IEEE Transactions on Image Processing, 4(10):1439-1450, Oct. 1995.
- [111] SMITH R., KARP J., BÈNARD F., ALAVI A., GUALTIERI E., MUEHLLEHNER G. and GEAGAN M., "A comparison of segmentation and emission subtraction for single transmission in PET". IEEE Transaction on Nuclear Science, 45(3):1212-1218, June 1998.
- [112] FESSLER J., FICARO E., CLINTHORNE N. and LANGE K., "Grouped-coordinate ascent algorithms for penalized-likelihood transmission image reconstruction". IEEE Transactions on Medical Imaging, 16(2):166-175, Apr. 1997.

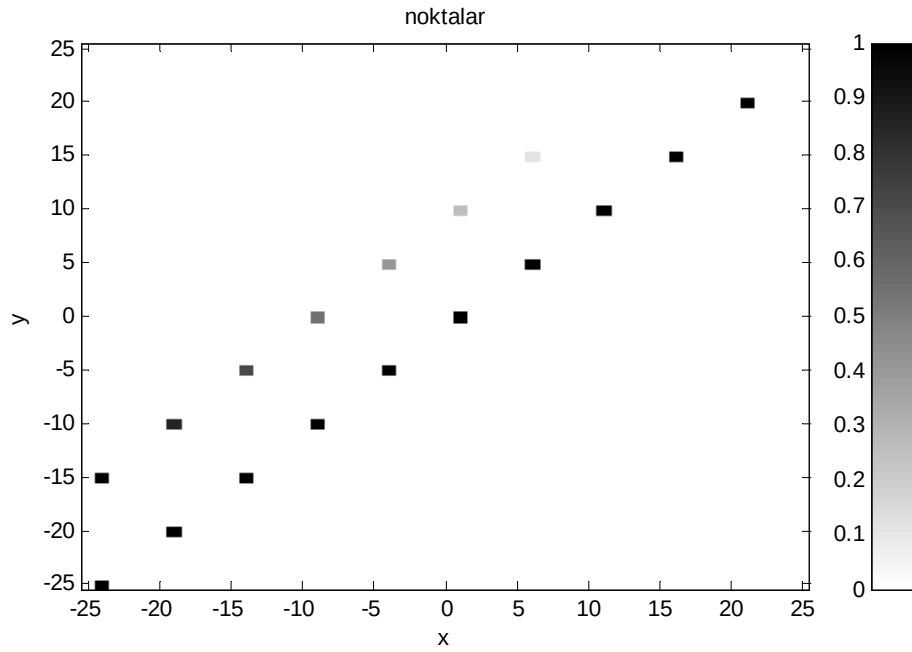
- [113] LANGE K. and CARSON R., "EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography". *Journal of Computer Assisted Tomography*, 8(2):306-316, Apr. 1984.
- [114] LANGE K. and FESSLER J., "Globally convergent algorithms for maximum a posteriori transmission tomography". *IEEE transactions on Image Processing*, 4:1430-1438, Oct. 1995.
- [115] KAMPHUIS C. and BEEKMAN F., "Accelerated iterative transmission CT reconstruction using an ordered subsets convex algorithm". *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(6):1101-1105, Dec. 1998.
- [116] ALENIOUS S., ROUTSALAINEN U. and ASTOLA J., "Transmission images and attenuation correction with short acquisitions using median root prior reconstruction in PET". In *1998 IEEE Medical Imaging Conference, Conference Record*, Pages 1711-1715, 1999.

## EK LER

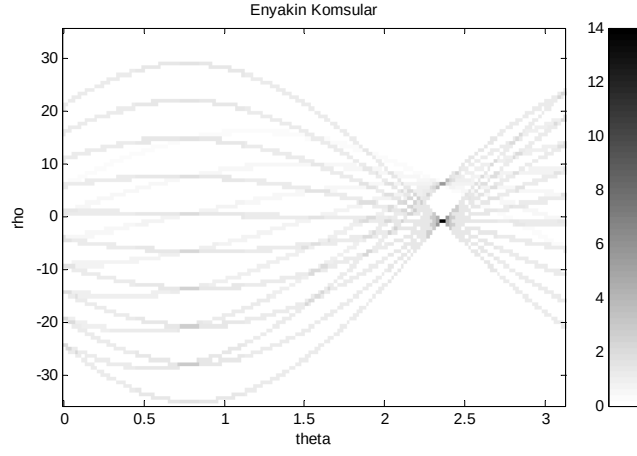
### EK 1-A Çizgi Ve Temel Elemanların Radon Dönüşümü

Çizgi ve Temel Elemanların, Sinogramın ve görüntülerin elde edilmesinde kullanılan örnekleme parametreleri aşağıda verilmiştir.

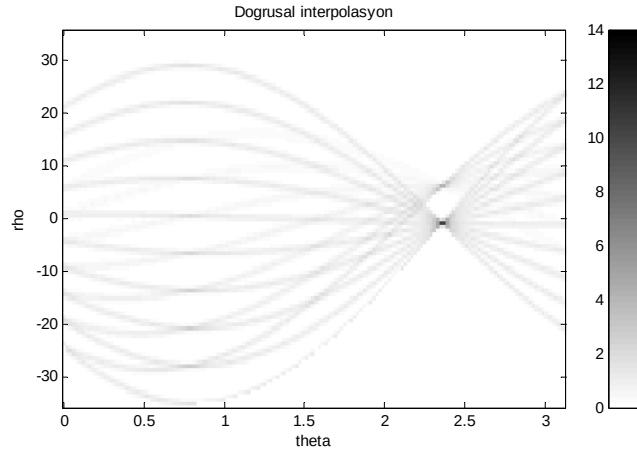
XÖrnek= 51  
Xmin= -25  
DeltaX= 1  
YÖrnek= 51  
Ymin= -25  
DeltaY= 1  
RhoMin= -35,355  
DeltaRho= 0,70711  
ThetaÖrnek = 158  
RhoÖrnek = 101



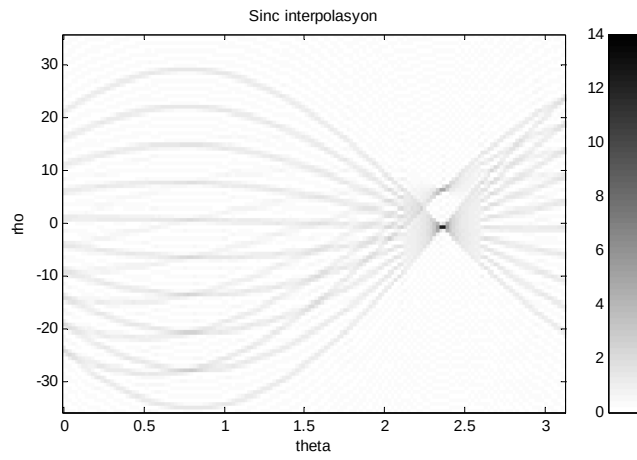
Şekil. Ek-A. 1. 51x51 piksel zayıflayan noktalar doğrusu şekli



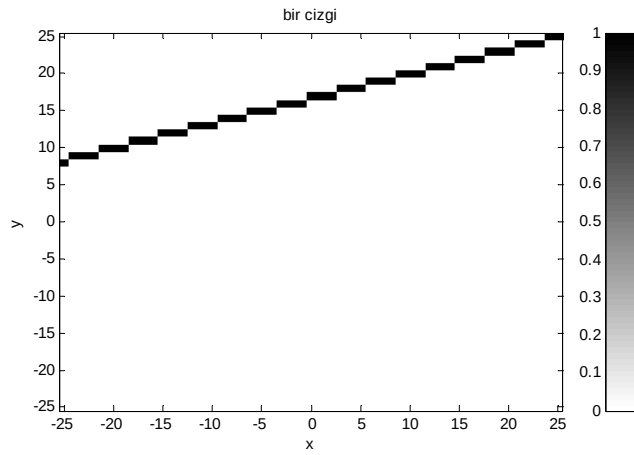
Şekil. Ek-A. 2. 51x51 piksel zayıflayan noktalar doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü(en yakın komşular yöntemi ile).



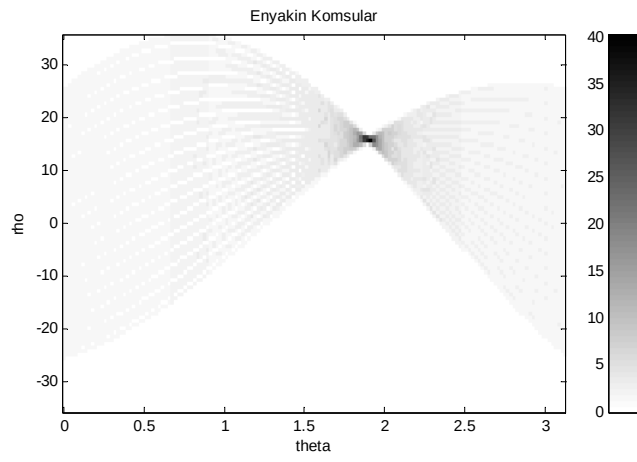
Şekil. Ek-A. 3. 51x51 piksel zayıflayan noktalar doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü(doğrusal interpolasyon yöntemi ile).



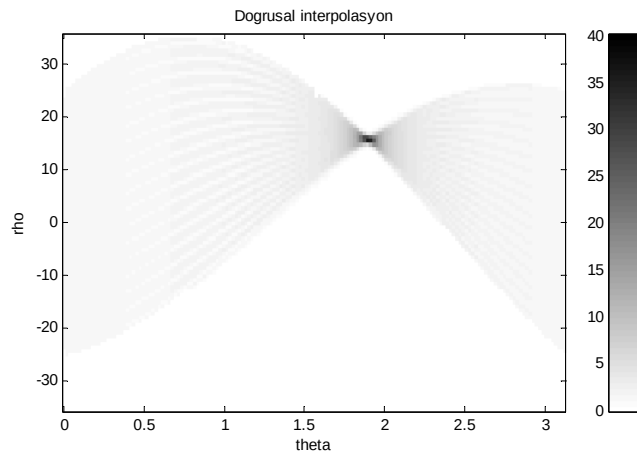
Şekil. Ek-A. 4. 51x51 piksel zayıflayan noktalar doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).



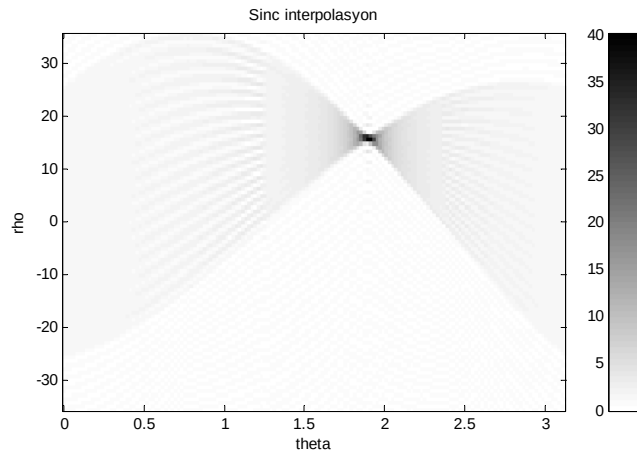
Şekil. Ek- A. 5. 51x51 piksel bir çizgi şekli



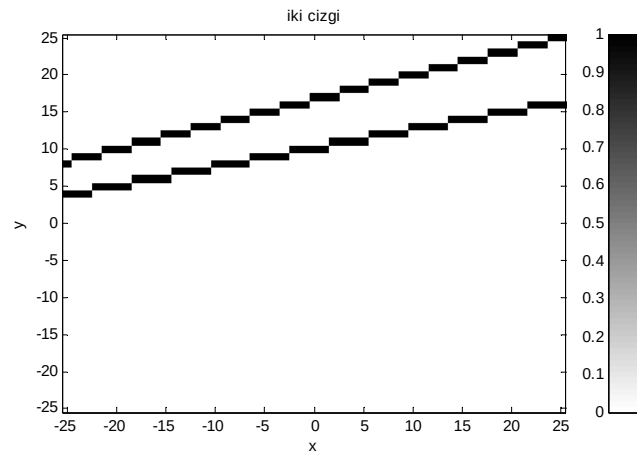
Şekil. Ek-A. 6. 51x51 piksel bir çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile).



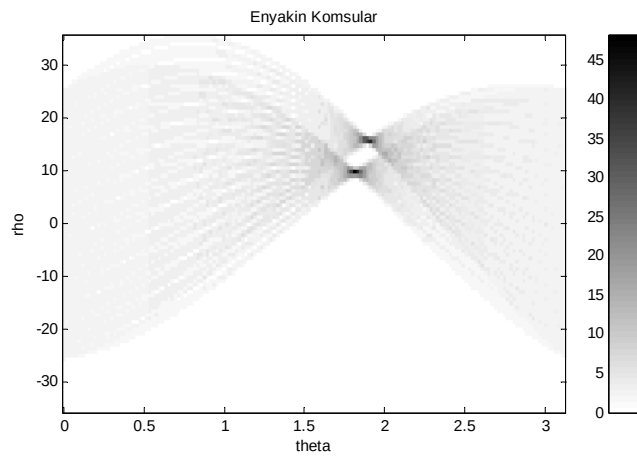
Şekil. Ek-A. 7. 51x51 piksel bir çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (doğrusal interpolasyon yöntemi ile).



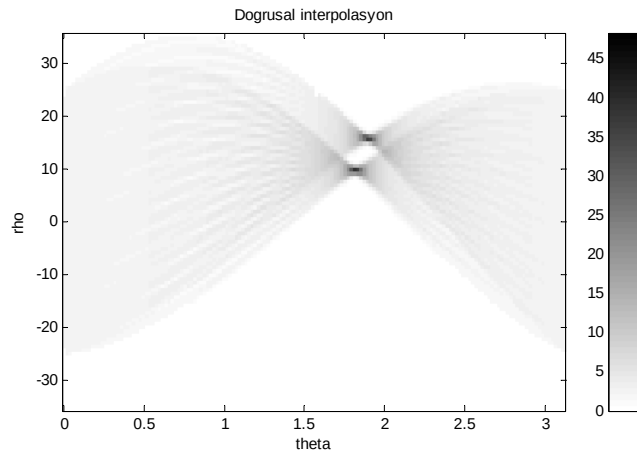
Şekil. Ek-A. 8. 51x51 piksel bir çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).



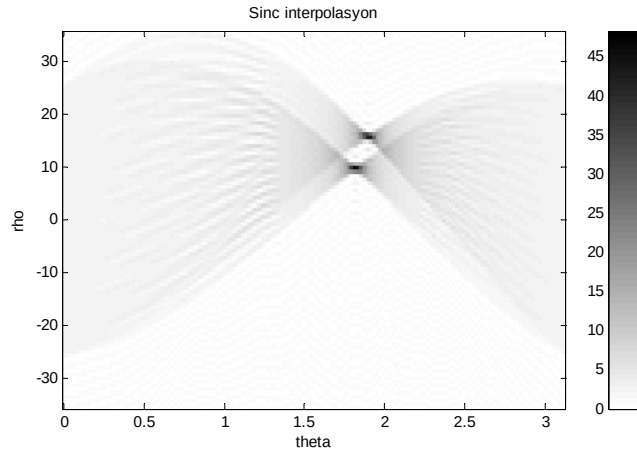
Şekil. Ek- A. 9. 51x51 piksel farklı eğimli iki çizgi şekli



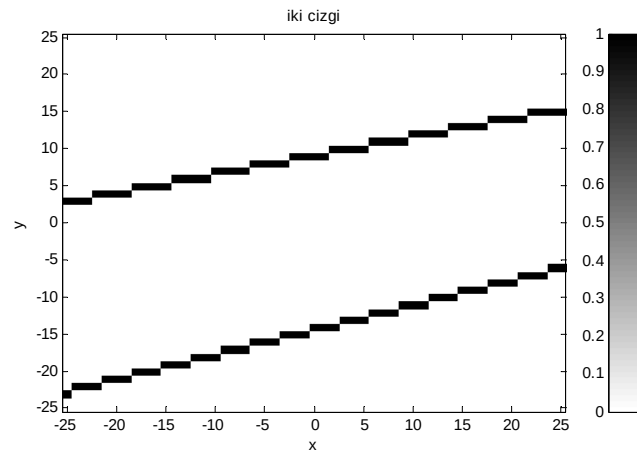
Şekil. Ek-A. 10. 51x51 piksel farklı eğimli iki çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile).



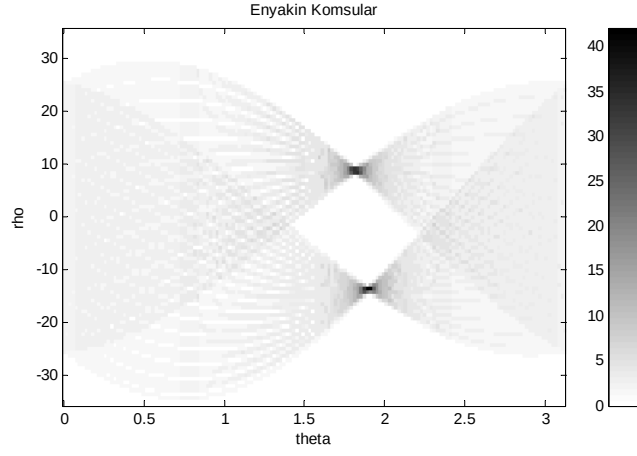
Şekil. Ek-A. 11. 51x51 piksel faklı eğimli iki çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (doğrusal interpolasyon yöntemi ile).



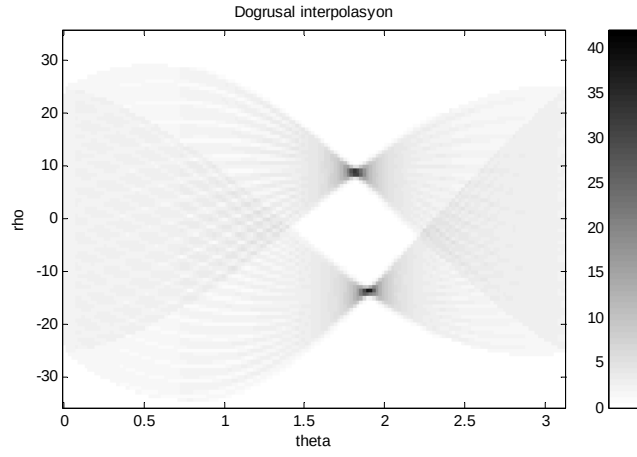
Şekil. Ek-A. 12. 51x51 piksel faklı eğimli iki çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).



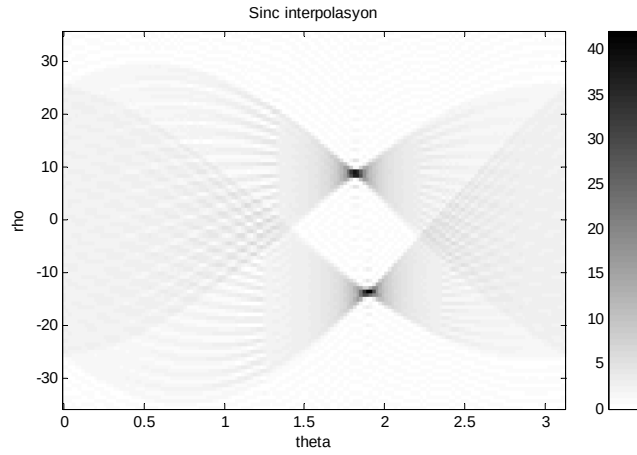
Şekil. Ek- A. 13. 51x51 piksel faklı eğimli iki çizgi şekli



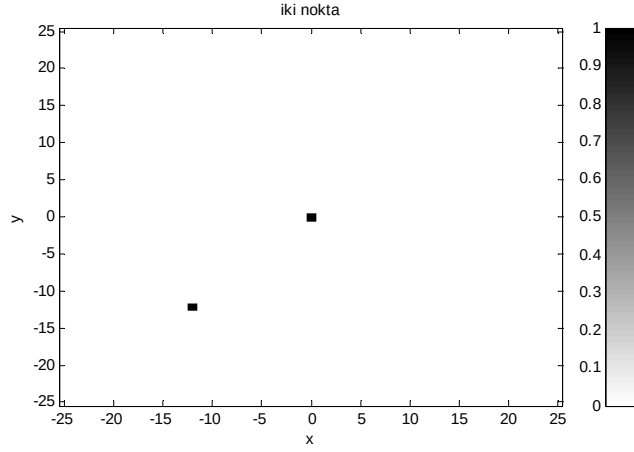
Şekil. Ek-A. 14. 51x51 piksel faklı eğimli iki çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile).



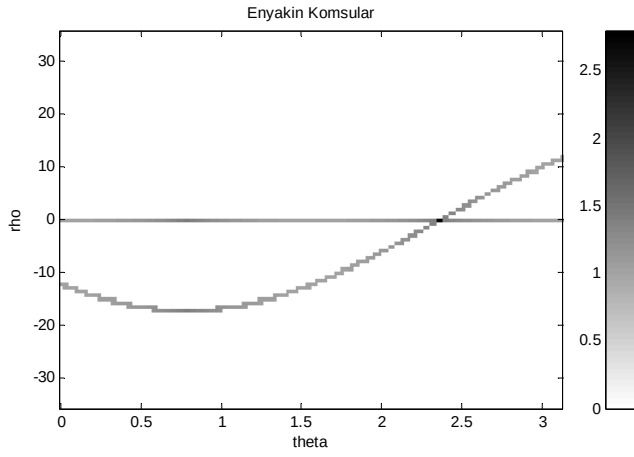
Şekil. Ek-A. 15. 51x51 piksel faklı eğimli iki çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (dogrusal interpolasyon yöntemi ile).



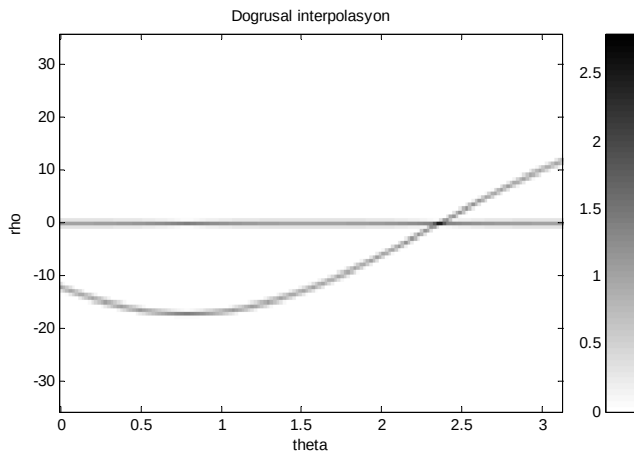
Şekil. Ek-A. 16. 51x51 piksel faklı eğimli iki çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).



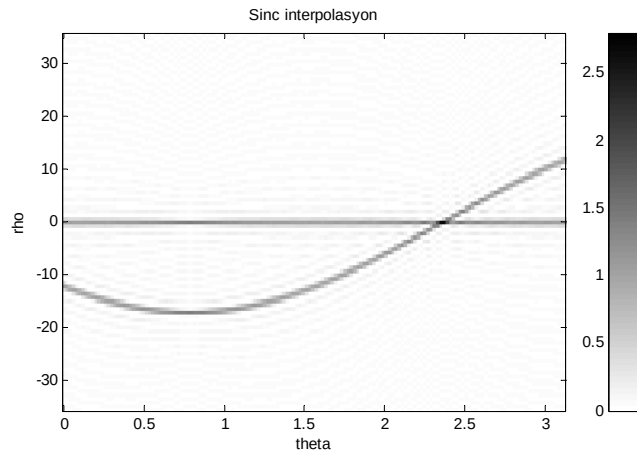
Şekil. Ek- A.17. 51x51 piksel boyutlu, biri merkezde diğeri merkezden uzak olan iki nokta şekli



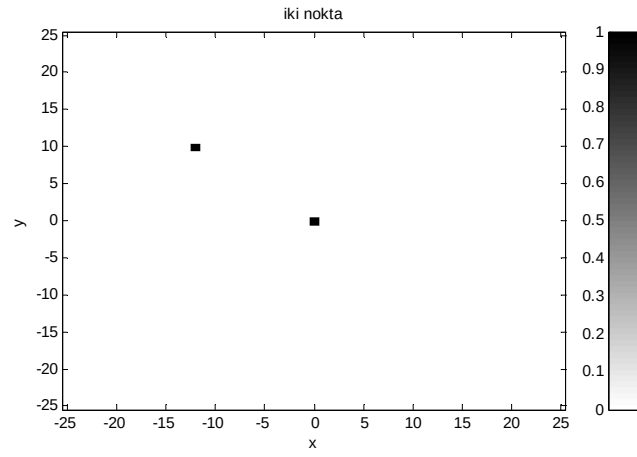
Şekil. Ek-A. 18. 51x51 piksel biri merkezde diğeri merkezden uzak olan iki noktanın değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile).



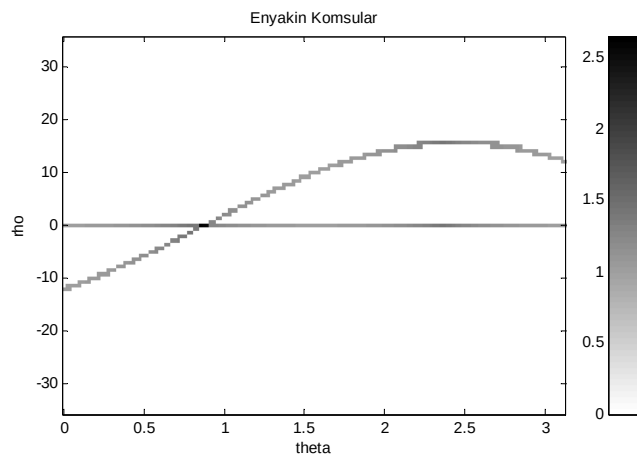
Şekil. Ek-A. 19. 51x51 piksel biri merkezde diğeri merkezden uzak olan iki noktanın değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (doğrusal interpolasyon yöntemi ile).



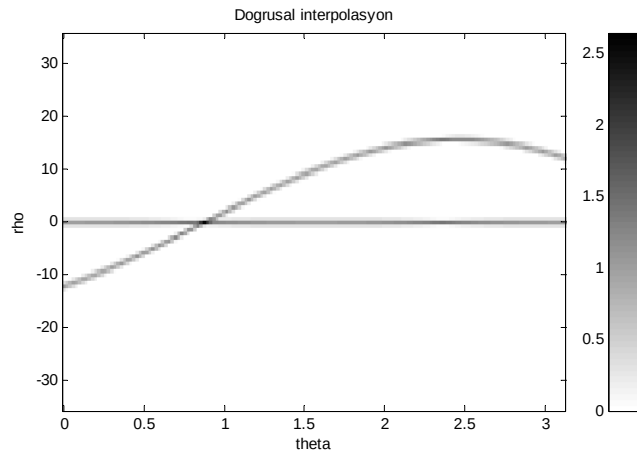
Şekil. Ek-A. 20. 51x51 piksel biri merkezde diğeri merkezden uzak olan iki noktanın değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile)



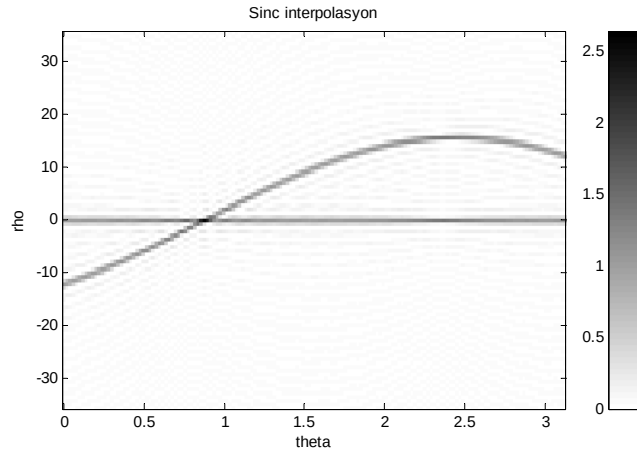
Şekil. Ek- A.21. 51x51 piksel boyutlu, biri merkezde diğeri merkezden uzak olan iki nokta şekli



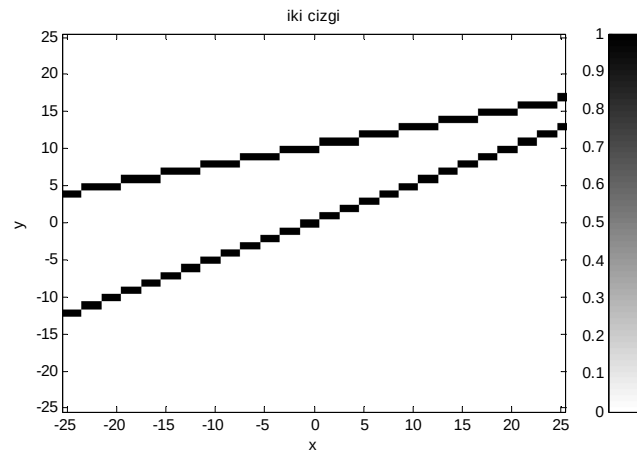
Şekil. Ek-A. 22. 51x51 piksel biri merkezde diğeri merkezden uzak olan iki noktanın, değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile).



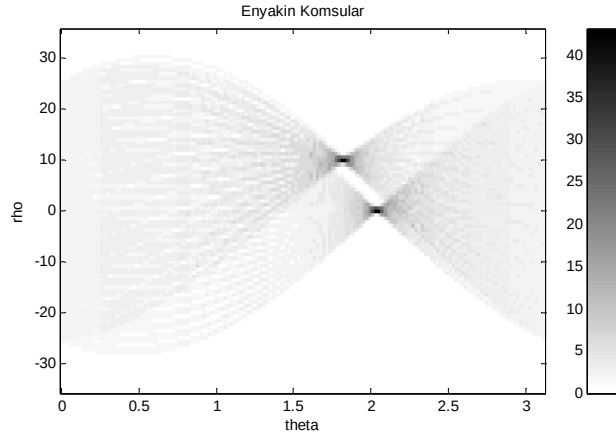
Şekil. Ek-A. 23. 51x51 piksel biri merkezde diğeri merkezden uzak olan iki noktanın, değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (doğrusal interpolasyon yöntemi ile).



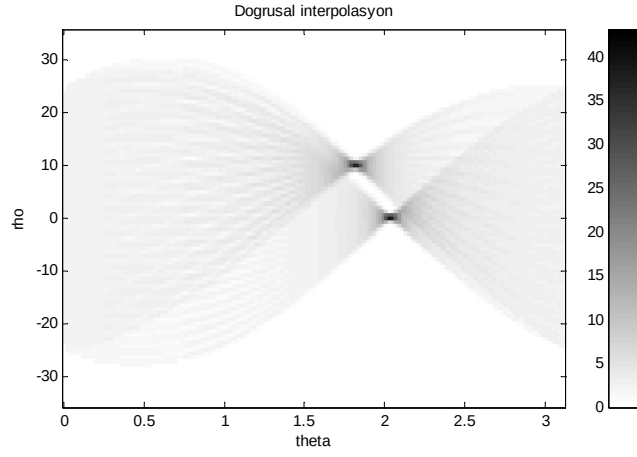
Şekil. Ek-A. 24. 51x51 piksel, biri merkezde diğeri merkezden uzak olan iki noktanın değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).



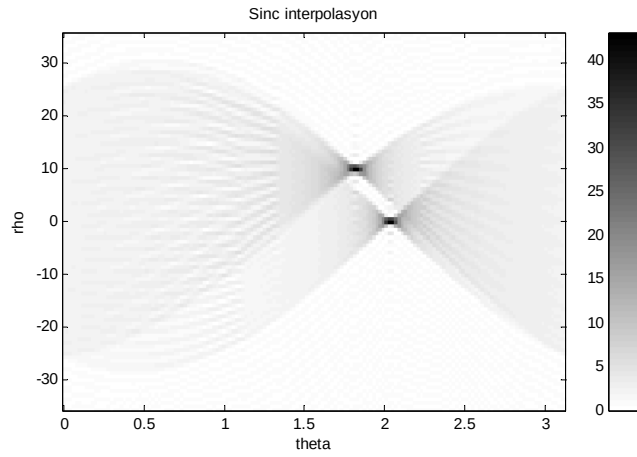
Şekil. Ek- A. 25. 51x51 piksel farklı eğimli iki çizgi şekli



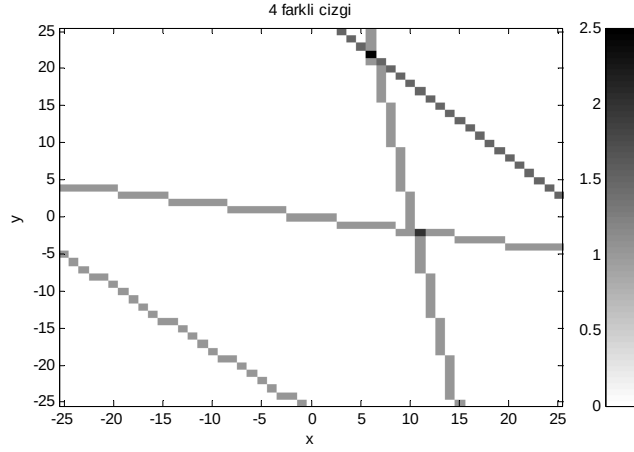
Şekil. Ek-A. 26. 51x51 piksel değişik eğimli iki çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile).



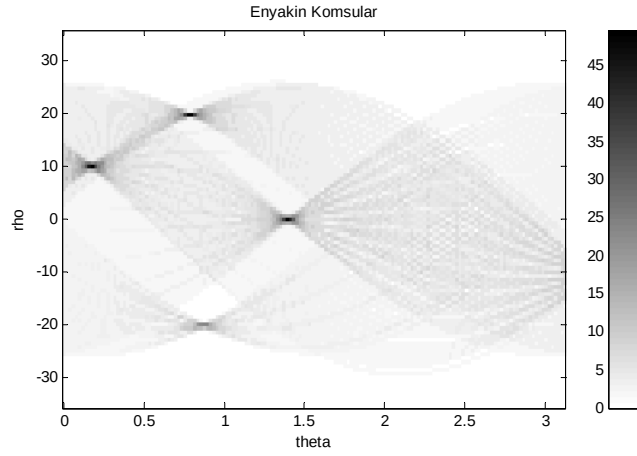
Şekil. Ek-A. 27. 51x51 piksel değişik eğimli iki çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (doğrusal interpolasyon yöntemi ile).



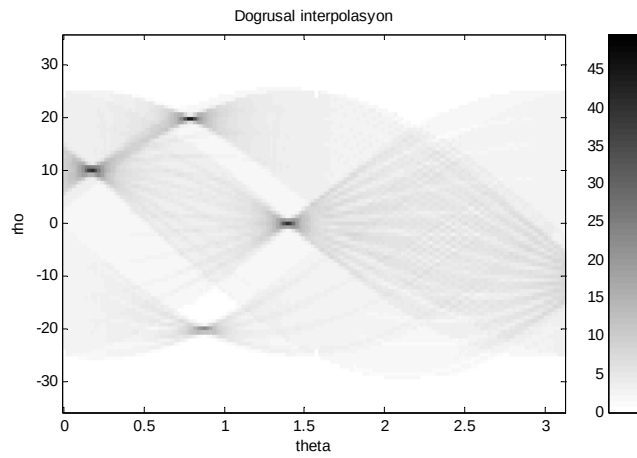
Şekil. Ek-A. 28. 51x51 piksel değişik eğimli iki çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).



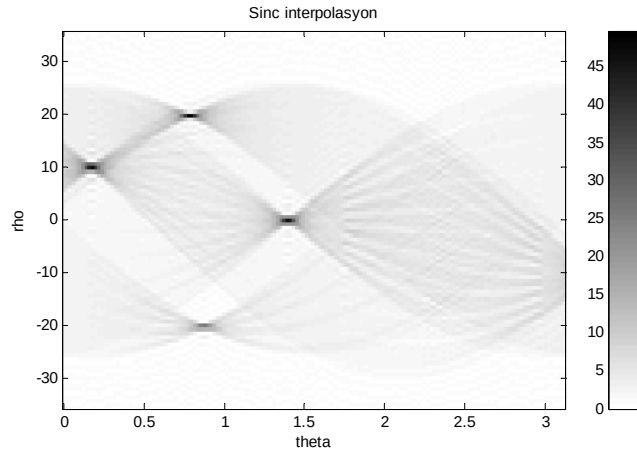
Şekil. Ek- A. 29. 51x51 piksel farklı eğimli değişik dört çizgi şekli



Şekil. Ek-A. 30. 51x51 piksel değişik eğimli dört çizgi doğrusunun değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile).



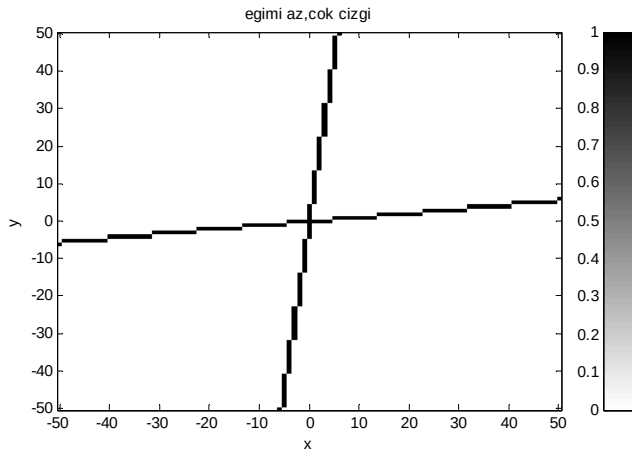
Şekil. Ek-A. 31. 51x51 piksel değişik eğimli dört çizgi doğrusunun, değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (doğrusal interpolasyon yöntemi ile).



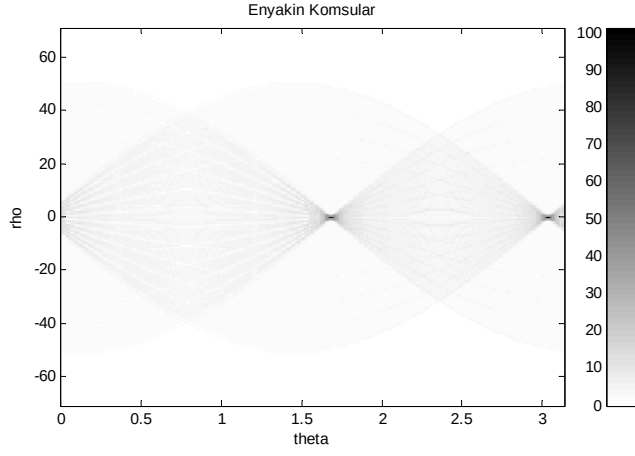
Şekil. Ek-A. 32. 51x51 piksel değişik eğimli dört çizgi doğrusunun, değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).

Buradan sonraki bütün şekillerin örnekleme ve geri oluşturma değerleri şöyledir;

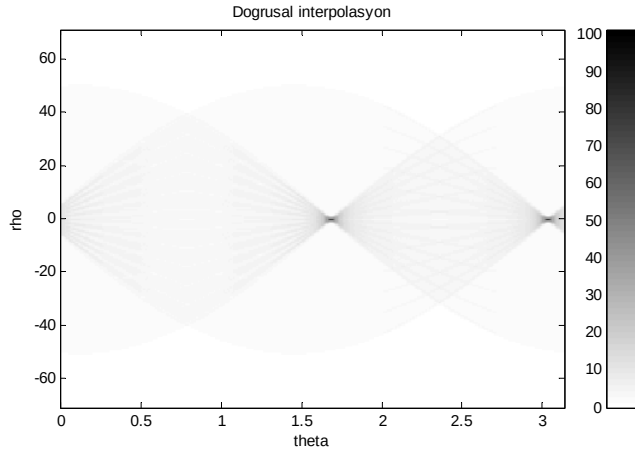
XÖrnek= 101  
 Xmin= -51  
 DeltaX= 1  
 YÖrnek= 101  
 Ymin= -51  
 DeltaY= 1  
 RhoMin= -70,71  
 DeltaRho= 0,70711  
 ThetaÖrnek = 316  
 RhoÖrnek = 201



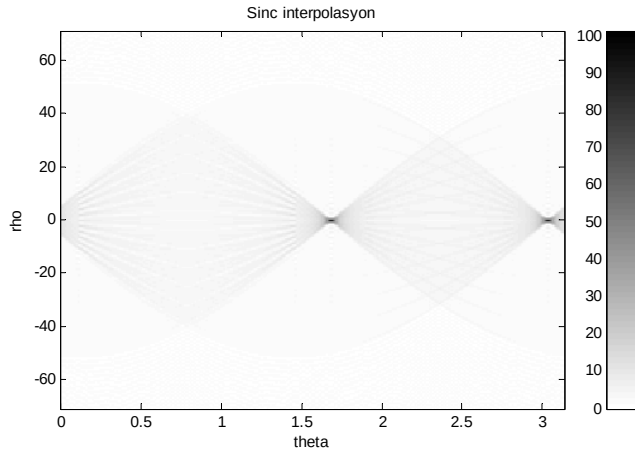
Şekil. Ek- A. 33. 51x51 piksel çok yüksek eğimli bir çizgi ile eğimi az bir çizgi şekli



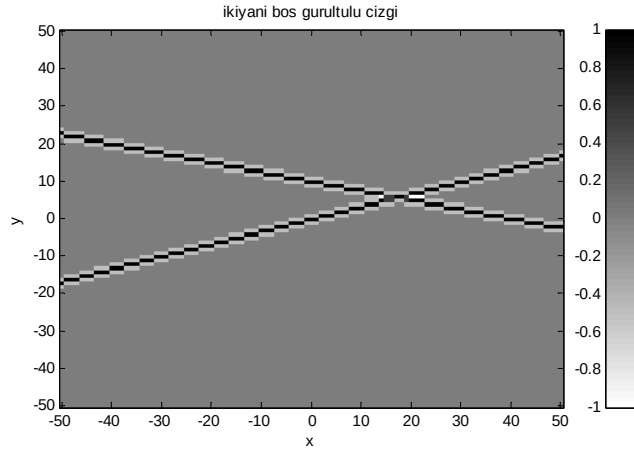
Şekil. Ek-A.34. 51x51 piksel çok yüksek eğimli bir çizgi ile eğimi az bir çizginin değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile).



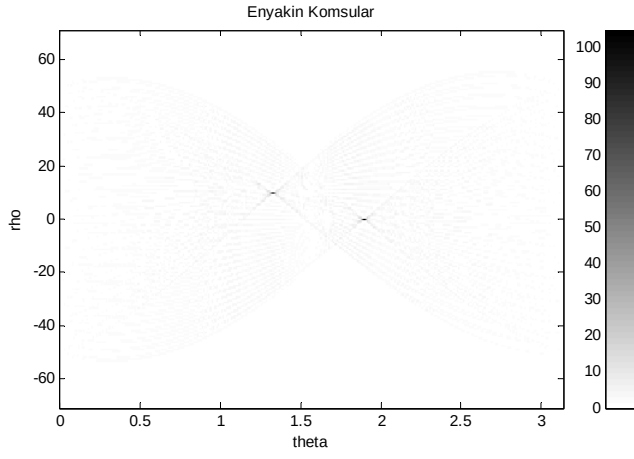
Şekil. Ek-A. 35. 51x51 piksel çok yüksek eğimli bir çizgi ile eğimi az bir çizginin değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (doğrusal interpolasyon yöntemi ile).



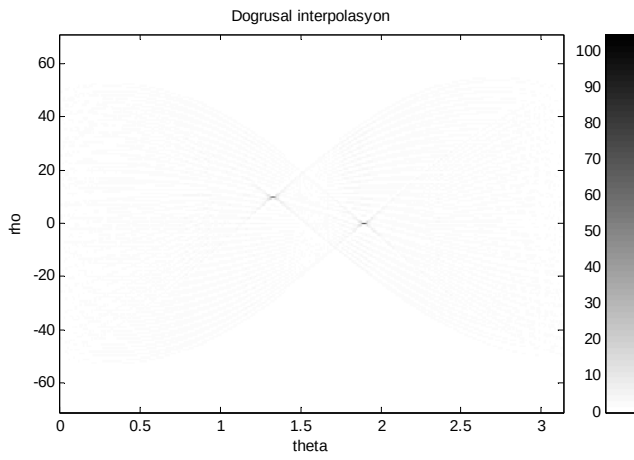
Şekil. Ek-A.36. 51x51 piksel çok yüksek eğimli bir çizgi ile eğimi az bir çizginin değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).



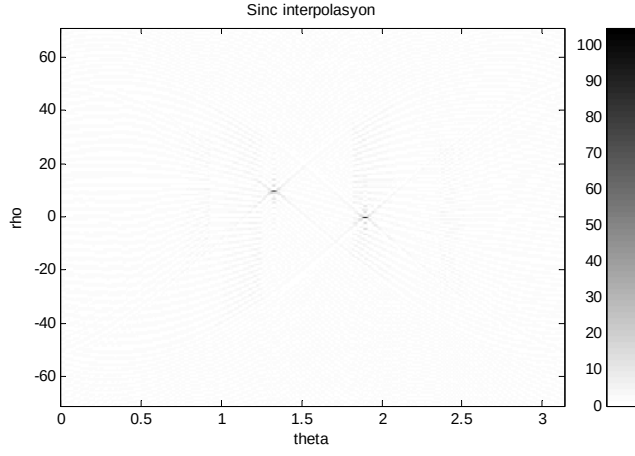
Şekil. Ek- A. 37. 51x51 piksel gürültülü ortamda, iki değişik çizgi şekli



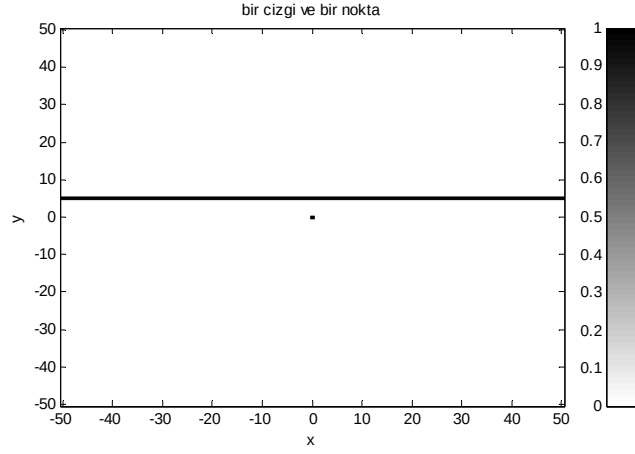
Şekil. Ek-A.38. 51x51 piksel gürültülü ortamda, iki değişik çizginin değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile).



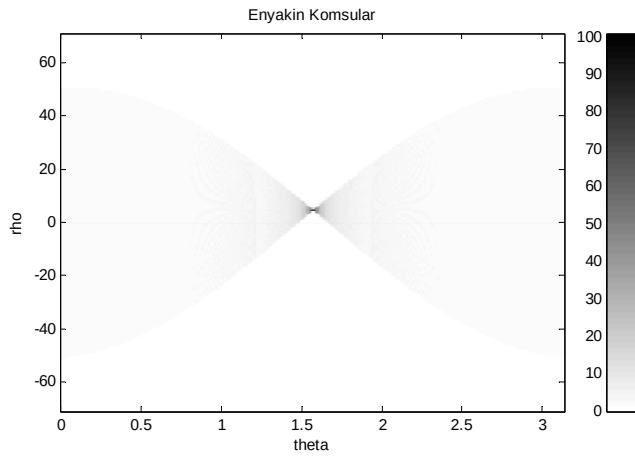
Şekil. Ek-A.39. 51x51 piksel gürültülü ortamda, iki değişik çizginin değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (doğrusal interpolasyon yöntemi ile).



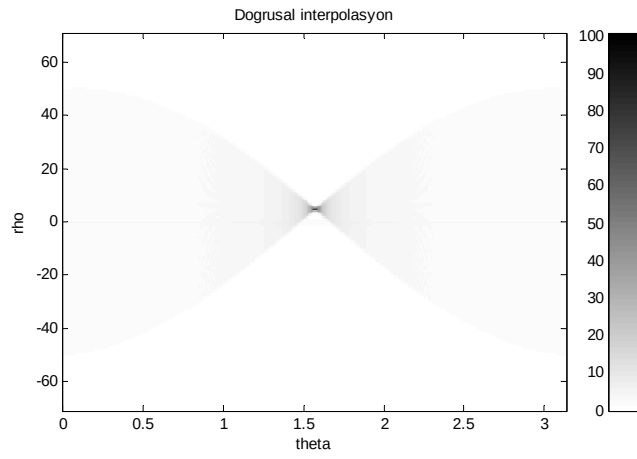
Şekil. Ek-A.40. 51x51 piksel gürültülü ortamda, iki değişik çizginin, değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).



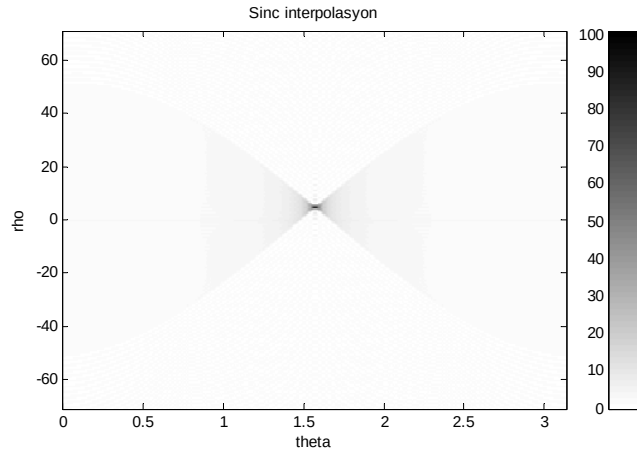
Şekil. Ek- A. 41. 101x101 piksel bir nokta ile eğimi sıfır olan bir çizgi şekli



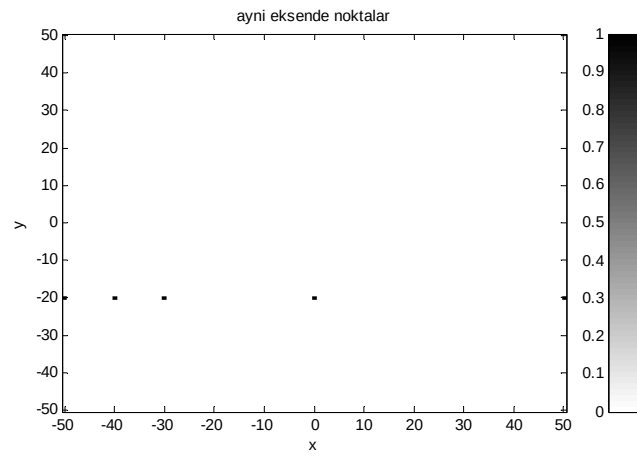
Şekil. Ek-A.42. 51x51 piksel bir nokta ile eğimi sıfır olan bir çizginin değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile ).



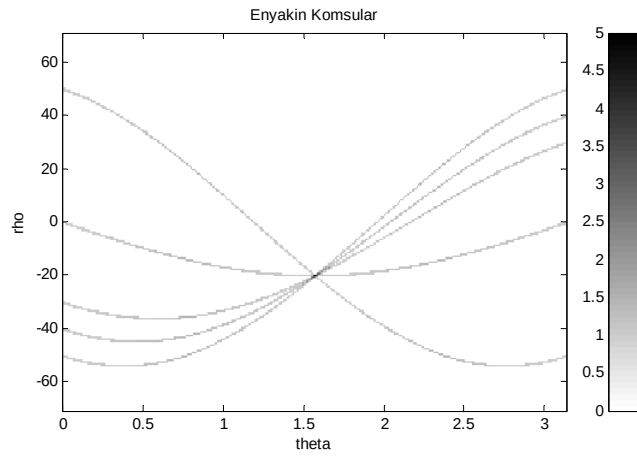
Şekil. Ek-A.43. 51x51 piksel bir nokta ile eğimi sıfır olan bir çizginin değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (doğrusal interpolasyon yöntemi ile).



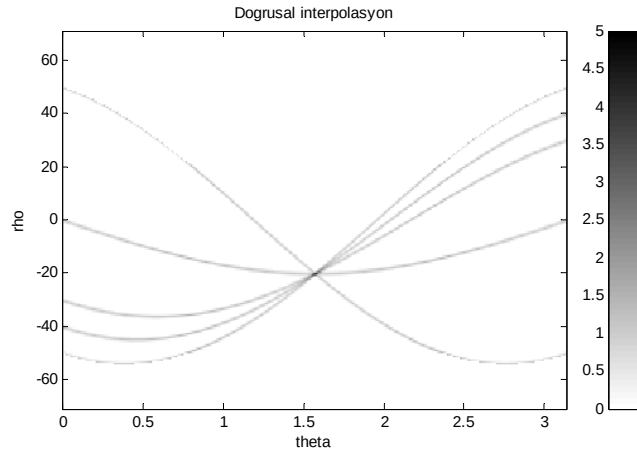
Şekil. Ek-A.44. 51x51 piksel bir nokta ile eğimi sıfır olan bir çizginin değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).



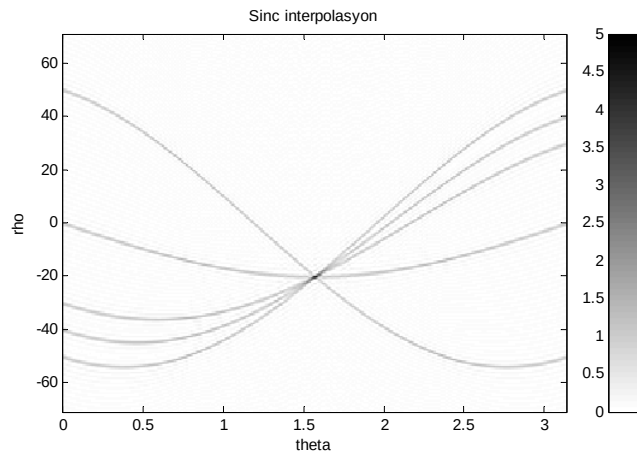
Şekil. Ek- A.45. 101x101 piksel yatay bir düzlemde 5 ayrı nokta şekli



Şekil. Ek-A.46. 101x101 piksel yatay bir düzlemde 5 ayrı noktanın değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (en yakın komşular yöntemi ile).



Şekil. Ek-A. 47. 101x101 piksel yatay bir düzlemde 5 ayrı noktanın değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (doğrusal interpolasyon yöntemi ile).

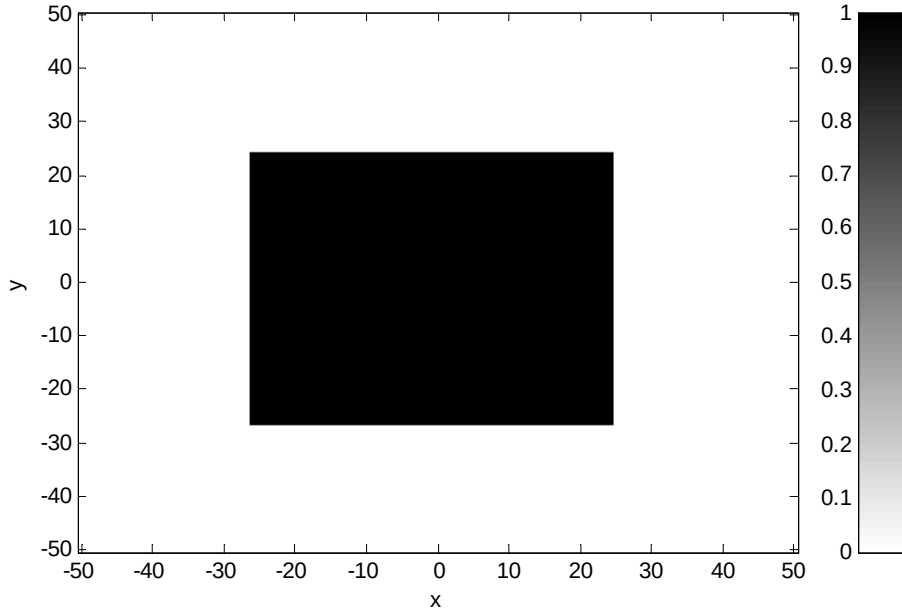


Şekil. Ek-A. 48. 101x101 piksel yatay bir düzlemde 5 ayrı noktanın değişik interpolasyon stratejisi ile Radon dönüşümü (Sinc interpolasyon yöntemi ile).

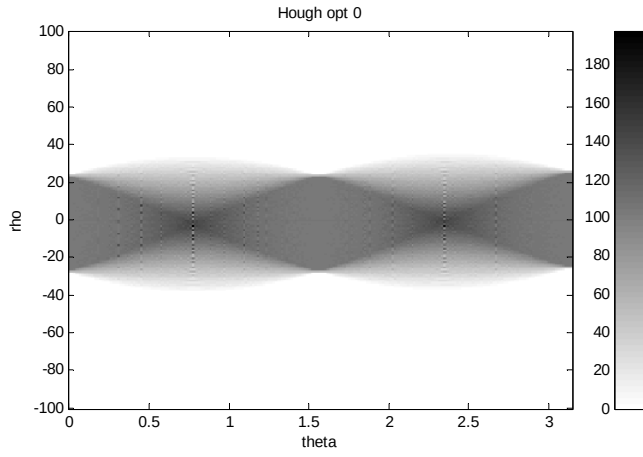
## EK 1-B Çizgi ve Temel Elemanların Hough Dönüşümü

Çizgi ve Temel Elemanların Sinogramın ve görüntülerin elde edilmesinde kullanılan örnekleme parametreleri aşağıda verilmiştir.

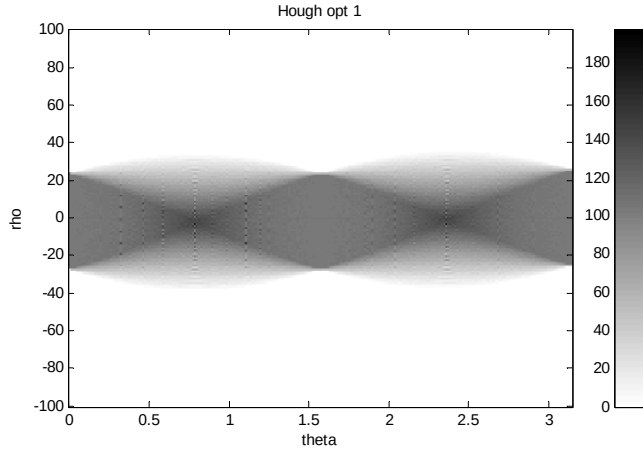
|             |           |
|-------------|-----------|
| XÖrnek=     | 201       |
| Xmin=       | -100      |
| DeltaX=     | 1         |
| YÖrnek=     | 201       |
| Ymin=       | -100      |
| DeltaY=     | 1         |
| RhoMin=     | -200      |
| DeltaRho=   | 1         |
| TetaÖrnek = | 447       |
| DeltaTeta=  | 0,0070359 |
| RhoÖrnek =  | 401       |



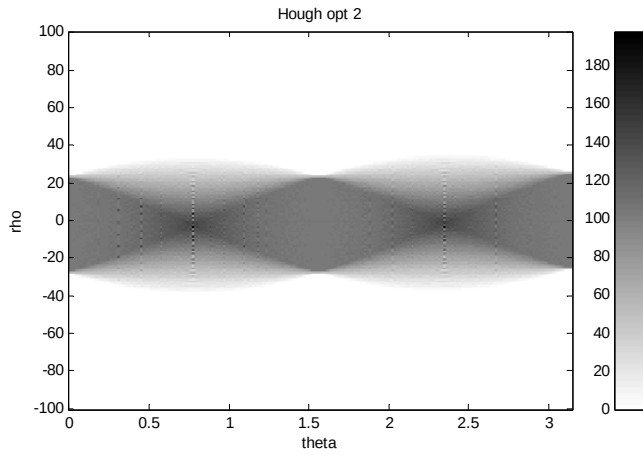
Şekil. Ek-B. 1. 101x101 piksel bir kare şekli



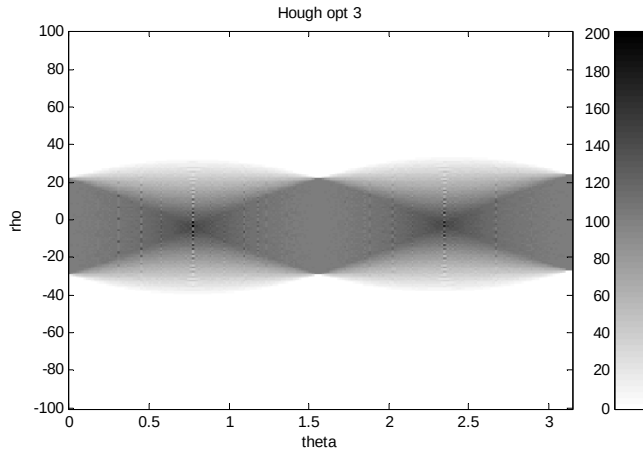
Şekil. Ek-B. 2. 101x101 piksel bir karenin değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(birinci optimizasyon yöntemi ile)



Şekil. Ek-B. 3. 101x101 piksel bir karenin değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(ikinci optimizasyon yöntemi ile)

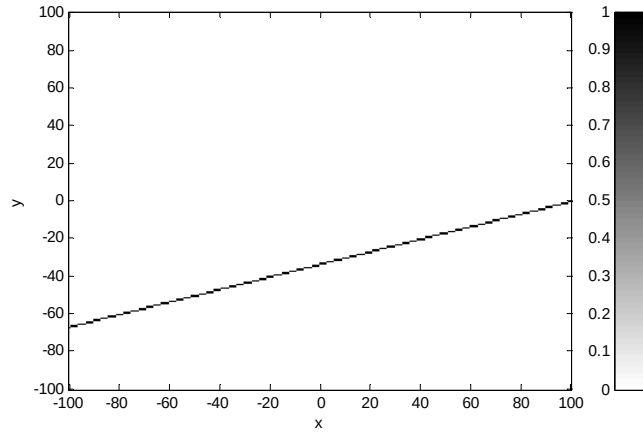


Şekil. Ek-B. 4. 101x101 piksel bir karenin değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(üçüncü optimizasyon yöntemi ile)

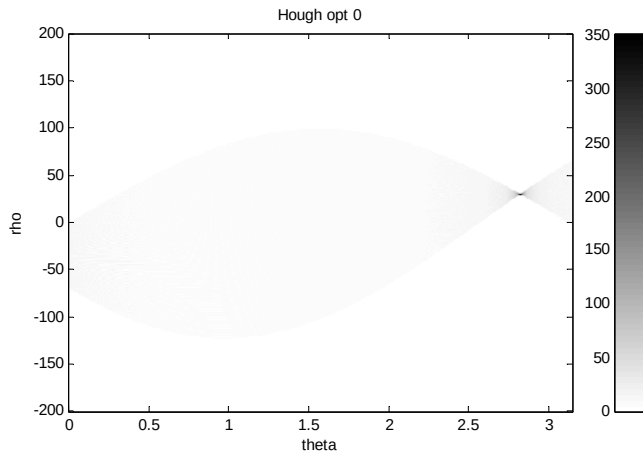


Şekil. Ek-B. 5. 101x101 piksel bir karenin değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(dördüncü optimizasyon yöntemi ile)

### 201x201 piksel boyutlu bir çizgi ve Hough dönüşümü

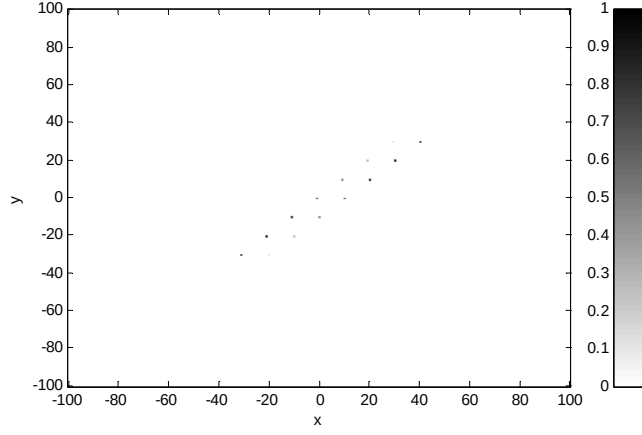


Şekil. Ek-B. 6. 201x201 piksel bir çizgi şekli

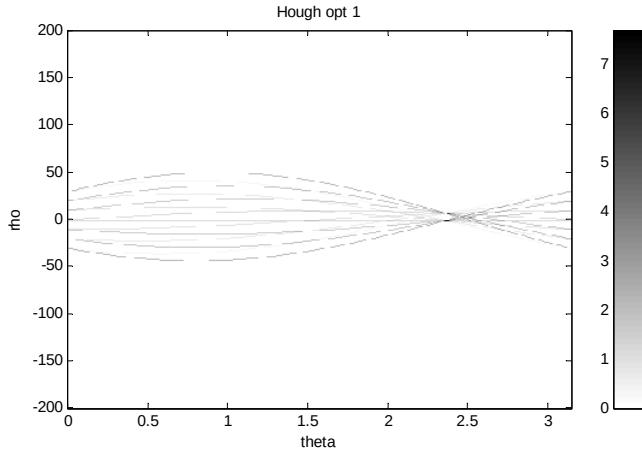


Şekil. Ek-B. 7. 201x201 piksel bir çizginin değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü

### 201x201 piksel boyutlu, zayıflayan noktalar doğrusu ve Hough dönüşümü

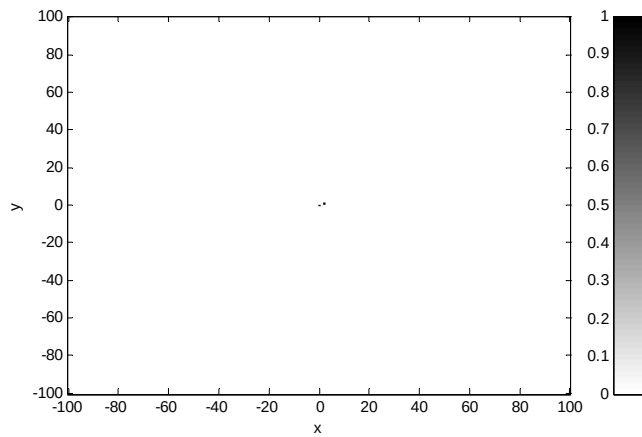


Şekil. Ek-B. 8. 201x201 piksel zayıflayan noktalar doğrusu şekli

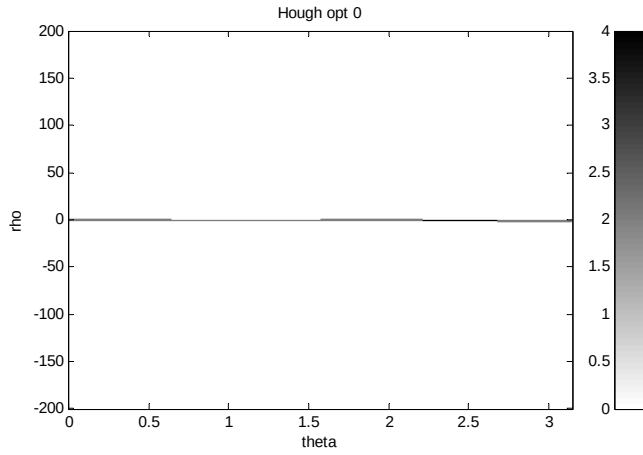


Şekil. Ek-B. 9. 201x201 piksel zayıflayan noktalar doğrusunun değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(ikinci optimizasyon yöntemi ile)

### 201x201 piksel boyutlu, iki nokta ve Hough dönüşümü

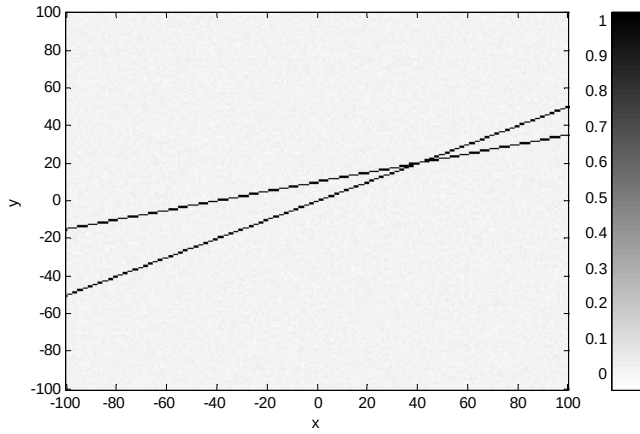


Şekil. Ek-B. 10. 201x201 piksel boyutlu, iki nokta şekli

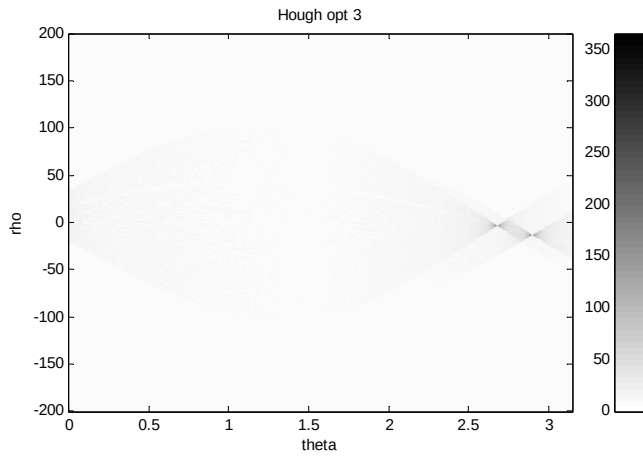


Şekil. Ek-B. 11. 201x201 piksel boyutlu, iki noktanın değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(birinci optimizasyon yöntemi ile)

### 201x201 piksel boyutlu, beyaz gürültülü ortamda iki çizgi ve Hough dönüşümü



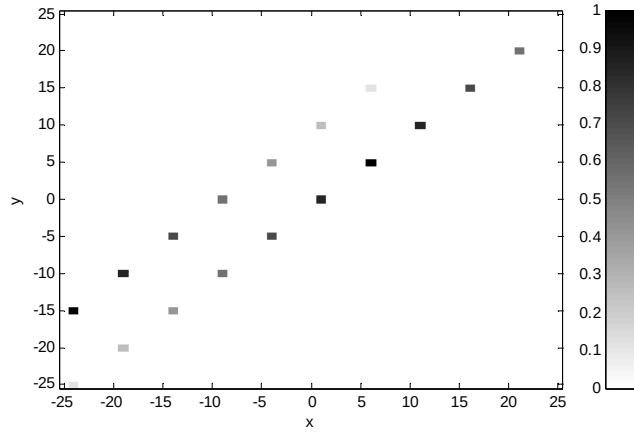
Şekil. Ek-B. 12. 201x201 piksel boyutlu, beyaz gürültülü ortamda iki çizgi şekli



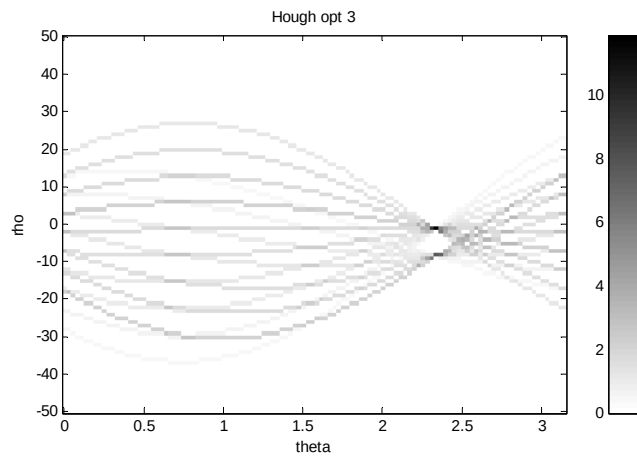
Şekil. Ek-B. 13. 201x201 piksel boyutlu, beyaz gürültülü ortamda iki çizginin değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(dördüncü optimizasyon yöntemi ile)

### Noktalar ve Hough dönüşümü

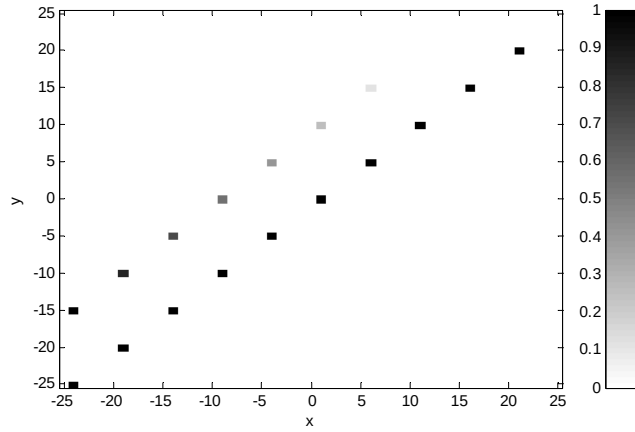
$X_{\text{Örnek}} = 51$   
 $X_{\text{min}} = -25$   
 $\Delta X = 1$   
 $Y_{\text{Örnek}} = 51$   
 $Y_{\text{min}} = -25$   
 $\Delta Y = 1$   
 $\rho_{\text{Min}} = -50$   
 $\Delta \rho = 1$   
 $\theta_{\text{Örnek}} = 114$   
 $\Delta \theta = 0,02773$   
 $\rho_{\text{Örnek}} = 101$



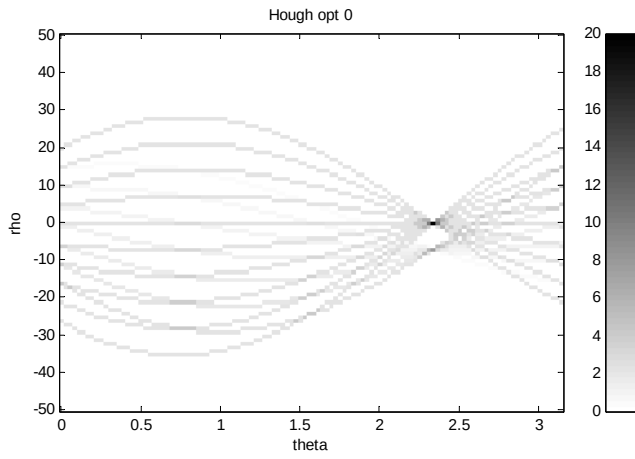
Şekil. Ek-B. 14. 101x101 piksel zayıflayan noktalar doğrusu şekli



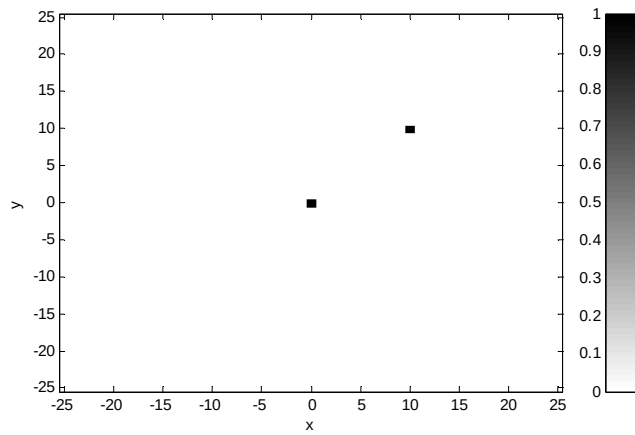
Şekil. Ek-B. 15. 101x101 piksel zayıflayan noktalar doğrusunun değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(dördüncü optimizasyon yöntemi ile)



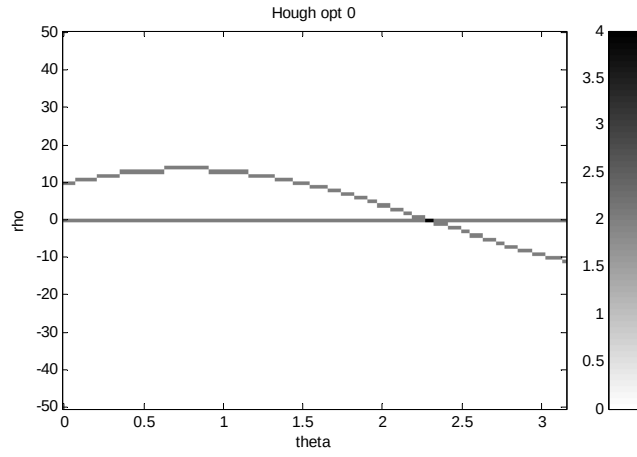
Şekil. Ek-B. 16. 101x101 piksel biri zayıflayan diğeri sabit noktalar doğrusu şekli



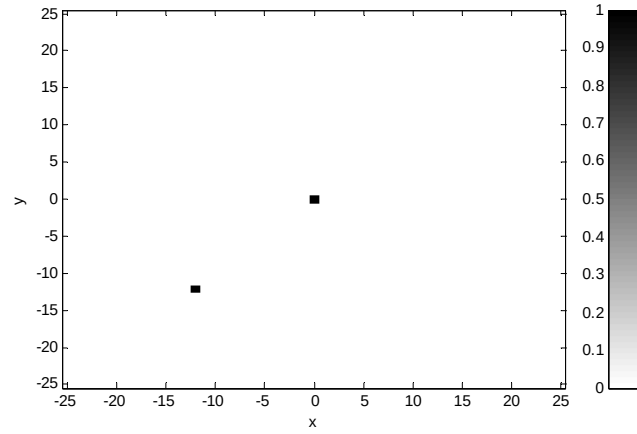
Şekil. Ek-B. 17. 101x101 piksel biri zayıflayan, diğeri sabit noktalar doğrusunun değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(birinci optimizasyon yöntemi ile)



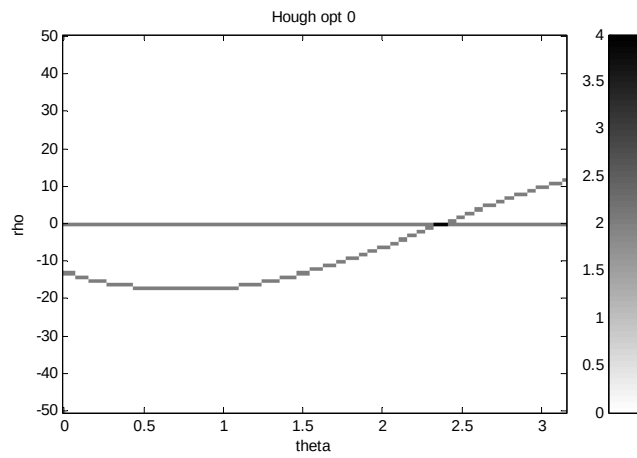
Şekil. Ek-B.18. 101x101 piksel iki nokta şekli



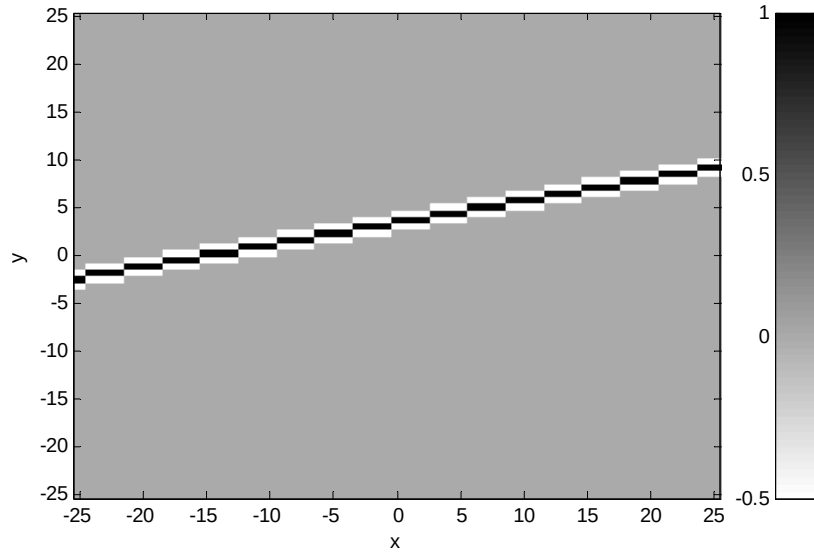
Şekil. Ek-B. 19. 101x101 piksel iki noktanın değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(birinci optimizasyon yöntemi ile)



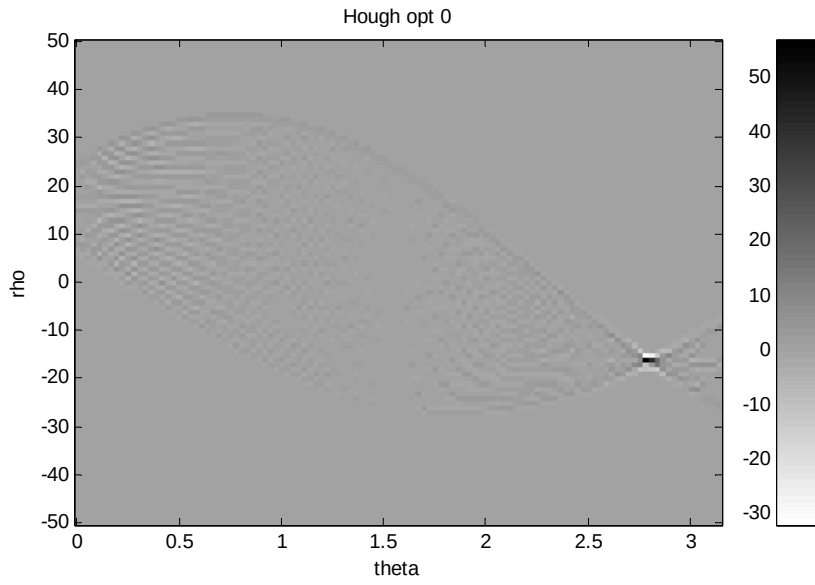
Şekil. Ek-B. 20. 101x101 piksel iki nokta şekli



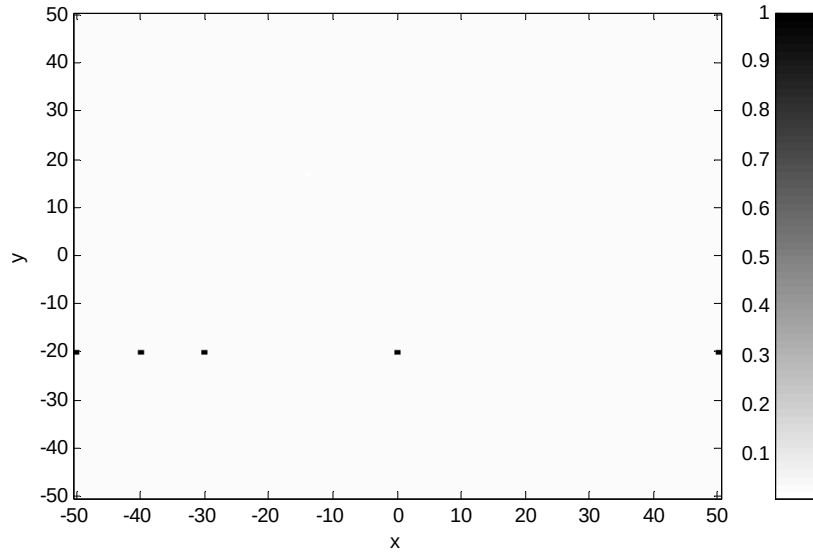
Şekil. Ek-B. 21. 101x101 piksel iki noktanın değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(birinci optimizasyon yöntemi ile)



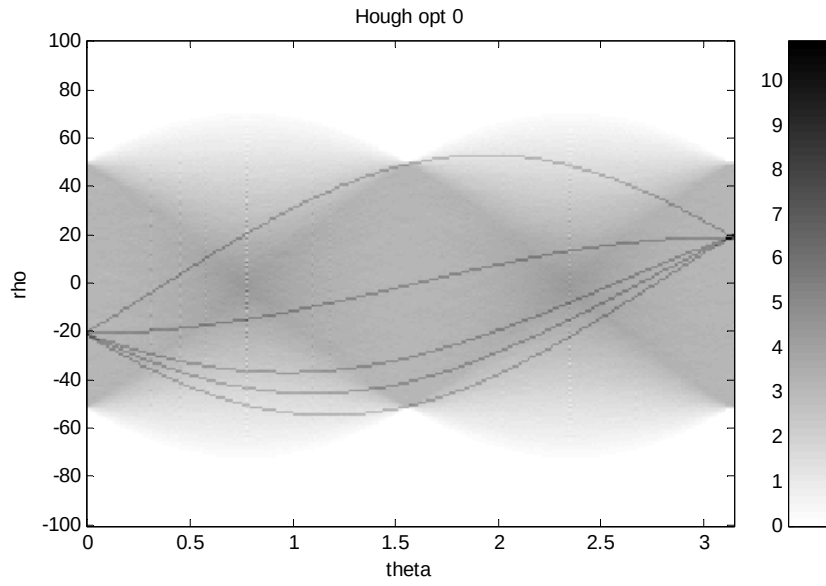
Şekil. Ek-B. 22. 101x101 piksel boyutlu, beyaz gürültülü ortamda bir çizgi şekli



Şekil. Ek-B. 23. 101x101 piksel boyutlu, beyaz gürültülü ortamda bir çizginin değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(birinci optimizasyon yöntemi ile)



Şekil. Ek-B. 24. 101x101 piksel boyutlu, beş yatay nokta şekli



Şekil. Ek-B. 25. 101x101 piksel boyutlu, beş yatay noktanın değişik optimizasyon stratejisi ile Hough dönüşümü(birinci optimizasyon yöntemi ile)

## ÖZGEÇMİŞ

01.01.1968 yılında Gaziantep’te doğdu. İlköğretim ve lise eğitim öğretimini 1986 yılında Gaziantep’te tamamladı. 1986-1987 öğretim yılında ODTÜ Gaziantep mühendislik fakültesi Elektrik- Elektronik mühendisliği bölümünü kazandı. 1992 yılında aynı bölümden mezun oldu. 1 yıl özel sektörde(tekstil firması) çalıştı. 1993-94 yıllarında YÖK dünya bankası projesi kapsamında yurtdışında elektrik-elektronik konusunda uzmanlık eğitimi aldı. Evli ve iki çocuk babasıdır.