SİMETRİK OLMAYAN KARARLI DAĞILIMLAR

ASYMMETRIC STABLE DISTRIBUTIONS

ECE ORAL

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İSTATİSTİK Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

Olarak hazırlanmıştır.

2006

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü' ne

Bu çalışma jürimiz tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI' nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

: ....
Prof. Dr. Süleyman Günay

Üye (Danışman)

: ....
Prof. Dr. Cenap Erdemir

Üye

: ....
Prof. Dr. Ömer Esensoy

Üye

: ....
Prof. Dr. Hamza Gamgam

Üye

: ....
Doç. Dr. Meral Sucu

ONAY

Bu tez, .../...../..... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ahmet R. ÖZDURAL
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Evrim, H. Evnur ve Birant Oral'a...

SİMETRİK OLMAYAN KARARLI DAĞILIMLAR

Ece Oral

ÖZ

Tez çalışmasında, önce Kararlı dağılımlar ve parametre tahminleri detaylı olarak incelenmiş, Buckle'ın 1995 yılında önerdiği Bayes yöntemi ve bundan daha etkin olan Tsionas (2000)'ın yöntemi tanıtılmıştır.

Çalışmada, Kararlı dağılımların parametre tahminleri için Tsionas (2000)'ın Metropolis zincirine dayanan yöntemi ile Nolan'ın 1997 yılında olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için önerdiği entegrasyon yöntemi birlikte ele alınmış ve etkin bir Bayesci yöntem önerilmiştir.

İterasyon sayısı, başlangıç değeri ve örneklem büyüklüklerinin önerilen Bayes yöntemi üzerindeki olası etkileri incelenmiş ve sonuçlar tartışılmıştır. Ayrıca, önerilen Bayes tahmin edicisi, en çok olabilirlik tahmin edicisi ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kararlı dağılım, Bayes tahmini, Dağılım fonksiyonları, Karakteristik çarpan, Çarpıklık.

Danışman: Prof. Dr. Cenap ERDEMİR

ASYMMETRIC STABLE DISTRIBUTIONS

Ece Oral

ABSTRACT

Stable distributions and the parameter estimation techniques are investigated comprehensively. Bayesian method that Buckle proposed in 1995 and a more efficient method of Tsionas (2000)'s are introduced.

In this thesis, the direct numerical integration method for calculating the probability density function that Nolan presented in 1997 and Tsionas (2000)'s method based on a Metropolis chain are considered for the estimation of stable distribution parameters, and an efficient Bayesian method is proposed.

The effects of the initial values, iteration numbers and sample size on the proposed Bayesian method are investigated. The proposed Bayesian estimator is compared with the maximum likelihood estimator.

Keywords: Stable distribution, Bayes estimation, Distribution functions, Characteristic exponent, Skewness.

Advisor: Prof. Dr. Cenap ERDEMIR

TEŞEKKÜR

İlk olarak doktora tez çalışmasını yürüttüğüm yıllar boyunca danışmanlığımı yaparak çalışmalarıma yön veren ve bu uzun zaman süresince gerek bilimsel katkılarıyla, gerekse manevi desteği ile sürekli yanımda olan ve bana bu zorlu çalışmada güç veren değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Cenap ERDEMİR' e; her altı ayda bir tez izleme komitelerinde değerli yorumlar yaparak çalışmaya katkıda bulunan hocalarım Sayın Prof. Dr. Süleyman GÜNAY' a ve Sayın Prof. Dr. Ömer ESENSOY' a; bu tezin tamamlanabilmesi için her zaman bana destek olan ve anlayış göstererek çalışmayı bitirebilmem için gerekli koşulları ve ortamı sağlayan müdürüm Sayın Dr. Cevriye AYSOY' a ve sıkıntılı günlerimde bana sabır, destek ve anlayış gösteren AİLEME içtenlikle teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A^{-1}	A matrisinin tersi
$\overset{d}{=}$	Dağılımda eşitlik
$\equiv$	Özdeşlik
$\approx$	Yaklaşık olarak eşitlik
$x \sim f(x)$	x değerleri f(x) dağılır
$\propto$	Orantılı
e.o.t.d.	En çok olabilirlik tahmin değeri
I	Bilgi Matrisi
$\mathrm{I}_A(x)$	Gösterge Fonksiyon, $\mathrm{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$
Im(f(x))	f(x)'in Sanal kısmı
İMKB	İstanbul Menkul Kıymetler Borsası
$L(\theta;x)$	Olabilirlik fonksiyonu
Re(f(x))	f(x)'in Reel kısmı
$S_\alpha(c,\beta,\delta)$	Ölçek parametresi c, konum parametresi δ, basıklık parametresi α ve çarpıklık parametresi β olan Kararlı dağılım
SαS	Simetrik Kararlı Dağılım (konum parametresi 0'dır)
sgn(x)	İşaret fonksiyonu, $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$
TCMB	Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası
U(a,b)	Tekdüze (Uniform) Dağılım (a ve b, dağılımın parametreleridir)

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Kararlı dağılımlar, çarpıklık ve kalın kuyruklara izin veren olasılık dağılımlarıdır (Weron, 2001). Levy-Pareto Kanunu olarak da bilinen bu dağılımlar; fizik, biyoloji, sosyoloji ve ekonomi gibi alanlardaki karmaşık sistemleri açıklamak için kullanılmaktadırlar (Zolotarev, 1986).

Normal dağılım, uygulamalarda her türden problem için çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak gerçek hayatta karşılaşılan verilerde, geniş değişkenlik ve sapmalar bulunur. Normal dağılımın bu tip değişkenliklerin modellenmesinde kullanılması uygun değildir. Kararlı dağılımlar ise bu tip kısıtlamalara maruz kalmamaktadır. Kararlı dağılımın en önemli özelliği üst ve alt kuyruklarının kalın olmasıdır, bu yüzden bu dağılım “kalın kuyruklu dağılım” olarak adlandırılmaktadır (Weron, 1995). Kalın Kuyruklu dağılımlarda, rastlantı değişkenleri sonsuz varyanslıdır ve çok büyük değer ya da çok küçük değerlere sahip gözlemler vardır. Bu gözlemleri uç değer olarak tanımlayıp analizden çıkarmak, orijinal verinin yapısını yok etmek anlamına gelmektedir; bu değerleri analizden çıkarmak, bu gözlemlerin içerdiği önemli bilgileri ihmal etmek olduğundan, elde edilen tahmin ediciler, istenen en iyi özelliklere sahip tahmin ediciler olmayacaklardır (Paulson vd., 1975; Tiku vd., 1986).

Özellikle ekonomiye ilişkin verilerde kalın kuyruklu dağılımlara sık rastlanmaktadır. Tahvil getirilerinin, döviz kuru değişiminin, hisse senedi getirilerinin ve bir çok mâli verinin kalın kuyruklu dağılıma ve dolayısıyla Kararlı dağılıma sahip olduğu gösterilmiştir (McCulloch, 1997).

Son yıllarda, işaret süreçlerindeki (signal processing) çalışmalar sonucunda da, çoğu doğal olayın, normal dağılım yerine daha ani hareketli (impulsive) doğası olan bir dağılım tarafından modellenmesi gerekliliği bulunmuştur. Bu tür bir dağılım, yine Normal dağılıma göre daha kalın kuyruklara sahip olan Kararlı dağılımdır (Georgiou ve Tsakalides, 1999). Örnek olarak, SAR (Sentetik göz radarı) görüntüsü incelenmiş, logaritmik dönüşümü alınmış ve görüntülerin alt bant ayrıştırmasının Kararlı dağılımlarla doğru olarak modellendiği gösterilmiştir (Achim vd., 2003). Ayrıca, Kararlı dağılımlar çok değişkenli yaşam verilerini modellemede de kullanılmaktadır (Qiou vd., 1999).

1.1. Tarihçe

Kararlı dağılım, ilk kez Paul Levy tarafından 1925 yılında tanıtılmış ve ismini de ondan almıştır. Uzun süre kendine uygulama alanı bulamamasından dolayı bu dağılımlar ilk başlarda, araştırmacıların ancak küçük bir kısmının ilgisini çekebilmiştir.

Levy'nin Kararlı dağılımları tanıtmasından birkaç yıl önce, 1919 yılında, Danimarkalı bir astronom olan Holtsmark (1919), belli varsayımlar altında, yıldızların yerçekimi alanlarının rastgele davranışlarına uyan bir olasılık fonksiyonu bulmuştur. Bu olasılık fonksiyonunun üç boyutlu Fourier dönüşümü

$$\int_{R^3} \exp\{i(t,x)\} f(x)dx = \exp(-\lambda|t|^{3/2}), \qquad t \in R^3$$

olarak verilir. Burada, λ, ilgilenilen cismin fiziksel özellikleri tarafından belirlenen pozitif bir sabit değerdir. Holtsmark (1919)'ın çalışması ilk başlarda matematikçilerin ilgisini çekmemiş olsa da daha sonraki dönemde Holtsmark'ın kendi ismini taşıyan bu dağılımın simetrik Kararlı dağılımların toplamından oluştuğu görülmüştür.

Levy'nin Kararlı dağılımları keşfi aslında yüzyıl önce Poisson ve Cauchy'nin çalışmalarına dayanmaktadır. Poisson ve Cauchy aşağıda belirtilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna dikkat çekmişlerdir:

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}, \qquad \lambda>0,\ x\in R^1 \qquad (1.1)$$

Burada,

$$f_{\lambda_1} * f_{\lambda_2} = f_\lambda$$

olup λ değeri λ_1 ve λ_2 tarafından belirlenir.

Cauchy, tek bir gözlemde mevcut olan hatanın bir çok bağımsız gözlemin hatalarının ortalaması ile kıyaslanabilmesini araştırmış ve ancak gözlemlerdeki hataların Eş. 1.1 ile verilen f_λ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olması durumunda bu kıyaslamanın yapılabileceğini keşfetmiştir. Eş. 1.1 ile verilen f_λ, α=1 için $\{f_\lambda^{(\alpha)}\}$ fonksiyonlarının kümesi içindedir. Bu fonksiyon kümesinin Fourier dönüşümü,

$$\exp(-\lambda|t|^{\alpha}), \qquad \alpha > 0, \lambda > 0 \tag{1.2}$$

olacak şekilde verilir. Macar matematikçi Polya, yirminci yüzyılın başlarında Eş. 1.2 için $0<\alpha<1$ aralığında $f_\lambda^{(\alpha)} \geq 0$ olduğunu ispatlamıştır. Levy de 1925 yılında $0<\alpha\leq 2$ değerleri için $f_\lambda^{(\alpha)}$ fonksiyonlarının, olasılık yoğunluk fonksiyonları olarak ifade edilebileceğini göstermiştir.

Kararlı dağılımlara olan ilgi, bu dağılımların belli sosyo-ekonomik modellere iyi uydukları gözlemlendiğinden, 1986 yılında çok geniş bir şekilde artmıştır. Kararlı dağılım kavramı, Levy (1954)'nin ve Khintchine (1938)'in çalışmalarından sonra son şeklini almıştır ve belli durumlar dışında Kararlı dağılımın olasılık yoğunluk ve birikimli dağılım fonksiyonunun olmadığı açık hale gelmiştir.

Mandelbrot (1960, 1963), ekonomistlerin dikkatlerini Kararlı dağılımların potansiyel önemine çekmek istemiş ve gelir dağılımının modellenmesinde Kararlı dağılımların kullanılmasının uygun olduğunu belirtmiştir.

Zolotarev (1961, 1966, 1986) ve Skorohod (1961) Kararlı dağılımın olasılık yoğunluk ve birikimli dağılım fonksiyonlarını entegral ve seri açılımlarından yaklaşık olarak bulmaya çalışmışlardır. Nolan (1997), Zolotarev'in entegral yaklaşımını daha da geliştirmiştir. Doğanoğlu ve Mittnik (1998) ise, olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunması için Fourier dönüşümü yöntemini önermişlerdir.

Zolotarev (1986), Kararlı dağılımın karakteristik fonksiyonunu farklı şekillerde göstermiştir. Nolan (1999), Zolotarev'in bu gösterimlerini incelemiş ve literatürde yaygın olarak kullanılan karakteristik fonksiyon yerine bunun biraz değiştirilmiş bir biçiminin kullanılmasının daha uygun olduğunu belirtmiştir.

Parametre tahminleri için ise, Fama ve Roll (1968) birikimli dağılım yöntemini önermişlerdir. McCulloch (1986) da önerilen bu yöntemi geliştirmiştir. 1972 yılında Press, momentler yöntemini kullanarak parametre tahminlerini elde etmeye çalışmıştır. DuMouchel (1973, 1975), Kararlı dağılımların parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini araştırmıştır. Bu yöntemi, 1990'da Brorsen ve Yang, 1993 yılında ise Brorsen ve Preckel daha da geliştirilmişlerdir. Koutrouvelis (1980), parametre tahmin edicilerini regresyon yöntemi aracılığıyla elde etmiştir. Parametre tahminleri için yukarıdaki değinilen yöntemlerin yanısıra, 1975 yılında Hill tarafından önerilen Hill tahmin edicisi, 1999 yılında Georgiou ve Tsakalides tarafından tanıtılan Sinc Fonksiyon yöntemi ve dalgacık dönüşüm yöntemleri (Antoniadis vd., 2005, http: //www-lmc.imag.fr/lmc-sms/ Anestis. Antoniadis/ publis/ paulo.pdf) de bulunmaktadır. Parametre tahmini için Bayes yöntemi ise ilk defa Buckle (1995) tarafından önerilmiş, daha sonra da Tsionas (2000), Qiou ve Ravishanker (1998) ve Lombardi (2004) tarafından geliştirilmiştir.

1.2. Kararlı Dağılımların Özellikleri

Kararlı dağılım fonksiyonlarının kapalı biçimleri bulunmamaktadır, bu sebepten dolayı Kararlı dağılımlar karakteristik fonksiyonları ile tanımlanırlar. Bir Kararlı dağılımın karakteristik fonksiyonunun en genel biçimi, $-\infty<t<\infty$, $0<\alpha\leq 2$, $|\beta| \leq \min(\alpha, 2-\alpha)$, $c>0$ ve $-\infty<\delta<\infty$ için :

$$\phi_x(t) = E\left[e^{itx}\right] = \exp\left(i\delta t - |ct|^{\alpha}\left[1 + i\beta\,\mathrm{sgn}(t)\,w(t,\alpha)\right]\right) \qquad (1.3)$$

eşitliği ile verilebilir. Eş. 1.3'de $i=\sqrt{-1}$ (karmaşık sayı); α basıklık (kurtosis), β çarpıklık (skewness), δ konum (location), c ölçek (scale) parametreleri ve sgn işaret fonksiyonudur.

Eş. 1.3'de $w(t,\alpha)$ fonksiyonu basıklık parametresine bağlıdır ve

$$w(t,\alpha) = \begin{cases} -\tan\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) & , \quad \alpha \neq 1 \\ (2/\pi)\ \ln|t| & , \quad \alpha = 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

olarak tanımlanır.

Eş. 1.3'de, eğer α=2 ise Kararlı dağılım, Normal dağılıma dönüşür ve dolayısıyla bütün derecelerden momentleri mevcuttur. Bu eşitlikte α<2 ise dağılım, "Kararlı-Pareto" olarak adlandırılabilir ve α<2 iken sonsuz varyanstan bahsedilebilir. Bu durumda, dağılımın sadece α'dan küçük momentleri mevcuttur. Eğer eldeki veri, α<2 ile Kararlı dağılım gösteriyorsa, $f(X>x) \sim kx^{-\alpha}$ özelliği ekstrem sapmaların olasılıklarını bulmada kullanılır. Bu durumda, verinin kuyruk davranışını diğer verilerinkiyle kıyaslamak için α'nın tahmini de kullanılabilir (DuMouchel, 1983).

Kararlı dağılım fonksiyonlarının kapalı biçimlerinin bulunmayışı, bu dağılımların parametrelerinin tahminleri için çok fazla teori geliştirilememesine neden olmuştur (DuMouchel, 1983). Ancak, Kararlı dağılımların, "toplama altında değişmezlik özelliği" gibi, ikinci bölümde ayrıntılı olarak incelenecek olan bazı özellikleri, bu dağılımların, kapalı biçimleri mevcut olan simetrik dağılımlara göre, kalın kuyruklu dağılım modellemelerinde kullanımlarının daha avantajlı olmasına neden olmaktadır.

1.3. Tezin Amacı ve Kapsamı

Kararlı dağılım parametrelerinin tahminlerinin bulunmasında çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bunlardan en çok bilinenler; birikimli dağılım yöntemi, regresyon yöntemi, momentler yöntemi ve en çok olabilirlik yöntemidir. Kararlı dağılımın kapalı biçimi olmamasından dolayı olasılık yoğunluk fonksiyonu ancak ters Fourier dönüşümü yoluyla ya da sayısal entegrasyon yaklaşımıyla elde edilebilmektedir.

Bu çalışmada, Kararlı dağılımlar detaylı olarak tanıtılmış ve özellikleri incelenmiştir. Kalın kuyruklu dağılıma sahip değişkenlerin modellenmesinde çok önemli olan bu dağılımların çarpıklık ve basıklık parametrelerinin tahmini için yukarıda sayılan yöntemlere alternatif olarak yeni bir Bayesci yöntem önerilmiştir. Bu yeni ve etkin yöntem, en çok olabilirlik tahmin yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

Çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konuya giriş yapılmış ve tezin amacı belirtilmiştir. İkinci bölümde, Kararlı dağılım ile ilgili genel bilgiler ve bu dağılımın özellikleri ile parametre tahmin yöntemleri detaylı olarak tanıtılmıştır. Ayrıca, Bayes tahmin yöntemi, Gibbs örneklemesi ve Metropolis-Hastings algoritması üzerinde durulmuş, Kararlı dağılım parametre tahminlerinde Bayes yöntemleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde, sayısal entegrasyon yaklaşımı ve parametre vektörünün aynı anda güncellenmesi yoluyla farklı bir Bayesci yöntem önerilmiş, parametre tahminleri grafikler üzerinde gösterilmiştir. Son bölümde, çalışmanın genel bir değerlendirilmesi yapılarak ulaşılan bulgulara, tartışmalara ve önerilere yer verilmiştir.

İKİNCİ BÖLÜM

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, Kararlı dağılımların parametrelerinin tahmin yöntemleri açıklanacaktır. Bu yöntemlerin anlaşılabilmesi için önce gereken önemli tanımlar, kavramlar ve teoremler verilecektir.

2.1. Tanımlar ve Kavramlar

O(.) ve o(.) fonksiyonları:

O(.) gösterimi, fonksiyonların asimtotik olarak davranışlarını açıklamak için kullanılmaktadır. $x \to L$ (L, her zaman sonlu olmak zorunda olmayan herhangi bir değerdir) durumunda, u(x) ve $\nu(x)$ fonksiyonlarının büyüklüklerini kıyaslamak için kullanılan bir ifadedir. Gösterimi ise, $x \to L$ iken

$$u(x) = O(\nu(x))$$

olarak verilir. Bu ifade, $x \to L$ iken, aşağıda belirtilen mutlak değer içindeki ifadenin sonlu bir değer olması anlamına gelmektedir:

$$\left| \frac{u(x)}{\upsilon(x)} \right| < \infty$$

o(.) gösterimi ise $x \to L$ iken,

$$u(x) = o(\nu(x))$$

olarak verilebilir. Bu gösterim,

$$\lim_{x \to L} \frac{u(x)}{\upsilon(x)} = 0$$

anlamını taşımaktadır (Serfling, 1980).

Karakteristik fonksiyonlar:

X rastlantı değişkeninin dağılımı sürekli olduğunda karakteristik fonksiyonu,

$$\varphi_X(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$$

şeklinde verilir. Burada t bir gerçel sayı, i ise karmaşık sayıdır ($i^2 = -1$).

Karakteristik fonksiyonun belli başlı özellikleri:

(i) $|\varphi_X(t)| \leq 1$

(ii) $F(x) - F(0) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1 - e^{-itx}}{it} \varphi_X(t)dt$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)dt$

(iv) $\varphi_X(t)$, t'de süreklidir ve her t aralığında tanımlıdır.

(v) $\varphi_X(0) = 1$.

(vi) $\varphi_X(t)$, $\varphi_X(-t)$ eşleniktir (Kendall vd., 1987).

Olasılıkta yakınsaklık:

X_1, X_2, ..., X_n aynı örneklem uzayında tanımlı rastlantı değişkenler dizisi olsun. $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty} p\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} p\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) = 1$$

yazılırsa X_n, X'e olasılıkta yakınsar ($X_n \xrightarrow{p} X$) denir.

Dağılımda yakınsaklık:

X_1, X_2, ..., X_n aynı örneklem uzayında tanımlı rastlantı değişkenler dizisi olarak verilsin.

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

olarak yazılırsa X_n, X'e dağılımda yakınsaktır ($X_n \xrightarrow{d} X$) denir (Dudewicz ve Michra, 1988).

Dağılımda eşitlik:

Eğer X ve Y rastlantı değişkenleri dağılımda eşit ise bütün x değerleri için

$P(X \leq x) = P(Y \leq x)$

yazılabilir. ($X \overset{d}{=} Y$) şeklinde gösterilir.

Merkezi limit teoremi:

X_1, X_2, ..., X_n; bağımsız, ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan dağılıma sahip rastlantı değişkenleri olsun. $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$ ise, $n \to \infty$ iken

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

olur. Yukarıda belirtilen bu ifadeyi,

$$a_n(X_1 + ... + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

olarak da göstermek mümkündür. Burada, $a_n = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}$, $b_n = \dfrac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$ olarak tanımlanır.

Genelleştirilmiş merkezi limit teoremi:

Merkezi Limit Teoreminde sonlu varyans varsayımı vardır. Bu varsayımın bozulduğu durumlarda, Normal dağılım yerine Kararlı dağılım kullanılmaktadır ve Genelleştirilmiş Merkezi Limit teoremi adını almaktadır:

Z rastlantı değişkeni sadece ve sadece α parametresine sahip Kararlı dağılım gösteriyorsa, $0<\alpha\leq 2$, $a_n > 0$ ve $b_n \in \Re$ için,

$$a_n(X_1 + ... + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z$$

yazılabilir (Nolan, 2005,http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf).

Sonsuz kez bölünebilir dağılım (infinitely divisible):

Eğer, bir karakteristik fonksiyon ($\varphi(t)$), bir başka karakteristik fonksiyonun ($\varphi_j(t)$) n.kuvveti olarak yazılırsa, $\varphi(t)$ sonsuz kez bölünebilir bir karakteristik fonksiyon olur ve bu karakteristik fonksiyona sahip dağılım ise "Sonsuz kez bölünebilir dağılım" adını alır (Kendall vd., 1987).

Kararlı dağılım özellikleri:

1) Kararlı dağılım tek tepelidir.

2) Kararlı dağılım sürekli bir dağılımdır.

3) Kararlı dağılım sonsuz kez bölünebilir bir dağılımdır (Patel vd., 1976).

4) Eğer herhangi A ve B>0 için öyle bir C>0, $D \in \Re$ sayısı var ve

$$AX_1+BX_2 \overset{d}{=} CX+D \tag{2.1}$$

yazılırsa, X rastlantı değişkeni Kararlı dağılıma sahiptir. Burada X_1 ve X_2, X'in dağılımına sahip bağımsız rastlantı değişkenleridir. Eğer D sıfıra eşitse, bir başka deyişle Eş. 2.1,

$$AX_1+BX_2 \overset{d}{=} CX$$

olarak yazılırsa, X rastlantı değişkeni Kesin Kararlı (strictly stable) dağılıma sahiptir.

5) Eğer dağılım simetrikse yani X ve –X aynı dağılıma sahipse, X rastlantı değişkeni simetrik Kararlı dağılıma sahiptir ve simetrik Kararlı dağılım, Kesin Kararlı dağılımdır (Samarodnitsky ve Taqqu, 1994).

6) $X_1, X_2, ..., X_n$; X rastlantı değişkeni ile aynı dağılıma sahip bir rastgele örneklem olsun. Herhangi bir doğrusal gösterim,

$$L = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

sadece ve sadece X simetrik Kararlı dağılım gösterdiğinde,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{\alpha}\right)^{1/\alpha} X$$

dağılımına sahip olur (Patel vd., 1976).

Verilen bu özellikte, $a_i = 1$ olarak alınırsa, doğrusal gösterim,

$L = X_1+X_2+...+X_n$

ve

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{\alpha}\right)^{1/\alpha} = n^{1/\alpha}$$

olarak ifade edilir. F_x, X rastlantı değişkeninin dağılım fonksiyonunu göstersin.

$$F_L(x) = F_{n^{1/\alpha}X}(x) \tag{2.2}$$

ise F_x "Kesin Kararlı" olarak tanımlanır. Karakteristik fonksiyon ise

$$\varphi(t) = \varphi^n(t/n^{1/\alpha}),\ 0<\alpha\leq 2 \tag{2.3}$$

olarak verilir. $\varphi(t)$, X rastlantı değişkeninin karakteristik fonksiyonudur (Yanushkevichius ve Yanushkevichiene, 2003).

7) $X_1+X_2+...+X_n \overset{d}{=} C_nX+D_n$ yazılabilirse X rastlantı değişkeni $n\geq 2$ için Kararlı dağılıma sahiptir ($C_n = n^{1/\alpha}$, $0<\alpha\leq 2$). Burada $X_1, X_2, ..., X_n$; X rastlantı değişkeninin dağılımından gelen n birimlik rastgele örneklemdir.

8) Herhangi bir Kararlı dağılım gösteren rastlantı değişkeni X için Eş. 2.1'de verilen katsayılarda $C^{\alpha} = A^{\alpha}+B^{\alpha}$ eşitliğini sağlayan bir C değeri vardır ($0<\alpha\leq 2$).

9) Eğer $X \sim N(\mu,\nu^2)$ ise X, $\alpha=2$ ile Kararlı dağılıma sahiptir. Bu tanımlama ise

$$AX_1+BX_2 \sim N((A+B)\mu, (A^2+B^2)\nu^2) \quad (2.4)$$

yani Eş. 2.1'de $C = (A^2+B^2)^{1/2}$ ve $D = (A+B-C)\mu$ iken sağlanır (Samarodnitsky ve Taqqu, 1994).

10) Kararlı dağılımın α, β, δ ve $\gamma = c^{\alpha}$ olmak üzere dört parametresi vardır. α basıklık parametresi ($0<\alpha\leq 2$) karakteristik çarpan (characteristic exponent) olarak da tanımlanabilir. β çarpıklık parametresi, δ herhangi bir gerçel sayı olacak şekilde Kararlı dağılımın konum parametresi, c ise ölçek parametresidir. Bir Kararlı dağılımın çarpıklık parametresi sıfıra eşit olduğunda ($\beta=0$), dağılım konum parametresi δ etrafında simetrik olacaktır (Press, 1972).

11) Kararlı dağılım $X \sim S_{\alpha}(c,\beta,\delta)$ şeklinde ifade edilebilir. Sadece ve sadece $\beta=0$, $\delta=0$ ise $X \sim S_{\alpha}(c,\beta,\delta)$ simetriktir denir. $\beta=0$, $\delta\neq 0$ iken X, δ etrafında simetriktir. X simetrik Kararlı dağılıma sahip ve $\beta=\delta=0$ ise $X \sim S\alpha S$ olarak ifade edilir.

12) X_1 ve X_2 bağımsız rastlantı değişkenleri ve

$$X_i \sim S_{\alpha}(c_i,\beta_i,\delta_i),\ i=1,2$$

olsun. Bu durumda,

$$X_1+X_2 \sim S_{\alpha}(c,\beta,\delta)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$c = (c_1^{\alpha} + c_2^{\alpha})^{1/\alpha}$$

$$\delta = \delta_1+\delta_2$$

$$\beta = \frac{\beta_1 c_1^{\alpha} + \beta_2 c_2^{\alpha}}{c_1^{\alpha} + c_2^{\alpha}}$$

olarak ifade edilebilir.

13) $X \sim S_\alpha(c,\beta,\delta)$ ve a sabit bir sayı olsun. X+a'nın dağılımı,

$X+a \sim S_\alpha(c,\beta,\delta+a)$

şeklinde ifade edilir. aX'in dağılımı ise α'nın alacağı değerlere göre incelendiğinde,

$\alpha \neq 1$ iken

$aX \sim S_\alpha(\,|a|c, \text{sgn}(a)\beta, a\delta)$,

$\alpha=1$ iken ise

$aX \sim S_1(\,|a|c, \text{sgn}(a)\beta, a\delta - \frac{2}{\pi} a\,(\ln|a|)\, c\beta)$

olarak verilir.

14) $0<\alpha\leq 2$ için, $X \sim S_\alpha(c,\beta,0) \Leftrightarrow -X \sim S_\alpha(c,-\beta,0)$ şeklinde bir ilişki vardır.

15) $X \sim S_\alpha(c,\beta,0)$, $\alpha<2$ olsun. Y_1 ve Y_2, $S_\alpha(c,1,0)$ dağılımına sahip bağımsız rastlantı değişkenleridir, öyle ki

$$X \stackrel{d}{=} \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_2, \qquad \alpha \neq 1$$

$$X \stackrel{d}{=} \left(\frac{1+\beta}{2}\right) Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right) Y_2 + c\left(\frac{1+\beta}{\pi}\ln\frac{1+\beta}{2} - \frac{1-\beta}{\pi}\ln\frac{1-\beta}{2}\right), \quad \alpha=1$$

16) $X \sim S_\alpha(c,\beta,\delta)$, $0<\alpha<2$ olsun. $0<p<\alpha$ ise $E\left(|X|^p\right)<\infty$, $p\geq\alpha$ durumunda ise $E\left(|X|^p\right)=\infty$ olur (Samarodnitsky ve Taqqu, 1994).

2.2. Kararlı Dağılımların Gösterimleri

Kararlı dağılımların kapalı biçimi yoktur ve karakteristik fonksiyon ile ifade edilirler. Kararlı dağılımın karakteristik fonksiyonunun en genel biçimi,

$$\varphi_x(t) = E\left[e^{itx}\right] = \exp\left(i\delta t - |ct|^{\alpha}\left[1 + i\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha)\right]\right) \tag{2.5}$$

$$w(t,\alpha) = \begin{cases} -\tan\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) & , \quad \alpha \neq 1 \\ (2/\pi)\ln|t| & , \quad \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

$-\infty<t<\infty$, $0<\alpha\leq 2$, $|\beta| \leq \min(\alpha, 2-\alpha)$, $c>0$, $i=\sqrt{-1}$, $-\infty<\delta<\infty$ şeklinde verilebilir. Bunun dışında karakteristik fonksiyonun aşağıda tanımları verilen beş ayrı gösterimi vardır (Zolotarev, 1986).

2.2.1. A parametrelemesi

Karakteristik fonksiyonun logaritması $\ln\varphi(t) = \lambda(it\gamma - |t|^{\alpha} + it\, w_A(t,\alpha,\beta))$ şeklinde ifade edilir. Burada $0<\alpha\leq 2$, $-1\leq\beta\leq 1$, $-\infty<\gamma<\infty$, $\lambda>0$ limitleri arasındadır ve

$$w_A(t,\alpha,\beta) = \begin{cases} |t|^{\alpha-1}\beta\tan(\pi\alpha/2) & , \quad \alpha \neq 1 \\ -\beta(2/\pi)\ln|t| & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

şeklinde belirtilir.

2.2.2. M parametrelemesi

A parametrelemesinin değiştirilmesi sonucunda, M parametrelemesi aşağıdaki gibi verilebilir.

Karakteristik fonksiyonun logaritması $\ln\varphi(t) = \lambda(it\gamma - |t|^{\alpha} + it\, w_M(t,\alpha,\beta))$ olarak ifade edilir.

Burada $0<\alpha\leq 2$, $-1\leq\beta\leq 1$, $-\infty<\gamma<\infty$, $\lambda>0$ sınırları arasındadır ve

$$w_M(t,\alpha,\beta) = \begin{cases} (|t|^{\alpha-1}-1)\beta\tan(\pi\alpha/2) & ,\ \alpha\neq 1 \\ -\beta(2/\pi)\ln|t| & ,\ \alpha = 1 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. A ve M parametrelemeleri arasında $\alpha_A = \alpha_M$, $\beta_A = \beta_M$,

$\gamma_A = \gamma_M - \beta \tan(\pi\alpha/2)$ ve $\lambda_A = \lambda_M$ ilişkisi vardır.

2.2.3. B parametrelemesi

Karakteristik fonksiyonun logaritması $\ln\varphi(t) = \lambda(it\gamma - |t|^{\alpha} w_B(t,\alpha,\beta))$ şeklinde verilir. Burada $0<\alpha\leq 2$, $-1\leq\beta\leq 1$, $-\infty<\gamma<\infty$, $\lambda>0$ sınırları arasındadır ve

$$w_B(t,\alpha,\beta) = \begin{cases} \exp(-i(\pi/2)\beta K(\alpha)\,\mathrm{sgn}(t)) & ,\ \alpha\neq 1 \\ \pi/2 + i\beta\ln|t|\,\mathrm{sgn}(t) & ,\ \alpha = 1 \end{cases}$$

olur. $K(\alpha) = \alpha-1+\mathrm{sgn}(1-\alpha)$ olarak belirtilir.

$\alpha = 1$ iken, $\beta_A = \beta_B$, $\gamma_A = 2\gamma_B/\pi$, $\lambda_A = \pi\lambda_B/2$; α'nın 1 dışındaki değerleri alması durumunda ise, $\beta_A = \cot(\pi\alpha/2) * \tan(\pi\, \beta_B\, K(\alpha)/2)$, $\gamma_A = \gamma_B\,(\cos(\pi\, \beta_B\, K(\alpha)/2)^{-1})$, $\lambda_A = \lambda_B \cos(\pi\, \beta_B\, K(\alpha)/2)$ yazılabilir.

2.2.4. C parametrelemesi

Karakteristik fonksiyonun logaritması

$$\ln\varphi(t) = -\lambda|t|^{\alpha}\exp(-i(\pi/2)\theta\alpha\,\mathrm{sgn}(t))$$

şeklinde ifade edilir. Burada $0<\alpha\leq 2$, $|\theta| \leq \theta_\alpha = \min(1,2/\alpha-1)$, $\lambda>0$ sınırları içindedir. α'nın bütün değerleri için $\alpha_C = \alpha_B$ eşitliği vardır. Ayrıca, $\alpha \neq 1$ iken, $\theta = \beta_B K(\alpha)/\alpha$, $\lambda_C = \lambda_B$; $\alpha = 1$ iken ise, $\theta = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}(2\gamma_B/\pi)$, $\lambda_C = \lambda_B\,(\pi^2/4 + \gamma_B^2)^{1/2}$ olur.

2.2.5. E parametrelemesi

Karakteristik fonksiyonun logaritması

$$\ln\varphi(t) = -\exp(\upsilon^{-1/2}(\ln|t| + \tau - i(\pi/2)\theta\,\mathrm{sgn}(t)) + C_e(\upsilon^{-1/2} - 1))$$

şeklinde belirtilir. Burada, C_e=0.577... (Euler sabitidir), $\upsilon \geq 1/4$, $|\theta| \leq \min(1, 2\sqrt{\upsilon} - 1)$, $|\tau| < \infty$ sınırları içindedir. C ve E parametrelemeleri arasındaki ilişki $\nu = \alpha^{-2}$, $\theta_E = \theta_C$, $\tau = (1/\alpha)\ln\lambda_C + C_e(1/\alpha - 1)$ şeklindedir.

2.2.6. Parametrelemelerin özellikleri

Herhangi iki kabul edilebilir parametre dörtlüsü $(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$ ve $(\alpha,\beta,\gamma',\lambda')$, a>0 ve b gerçel sayılar olmak üzere $Y(\alpha,\beta,\gamma,\lambda) \overset{d}{=} aY(\alpha,\beta,\gamma',\lambda') + \lambda b$ olarak yazılabilir. A parametrelemesinde a ve b arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibidir:

$$a = (\lambda/\lambda')^{1/\alpha}$$

$$b = \begin{cases} \gamma - \gamma'(\lambda/\lambda')^{1/\alpha - 1} & , \alpha \neq 1 \\ \gamma - \gamma' + \dfrac{2}{\pi}\beta\ln(\lambda/\lambda') & , \alpha = 1 \end{cases}$$

Yukarıdaki özellikte, γ'=0 ve λ'=1 olsun. Bu durumda, $Y(\alpha,\beta,\gamma,\lambda) \overset{d}{=} \lambda^{1/\alpha}Y(\alpha,\beta) + \lambda(\gamma + b_0)$ yazılabilir. b_0 ise aşağıdaki gibidir:

$$b_0 = \begin{cases} 0 & , \alpha \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi}\beta\ln(\lambda) & , \alpha = 1 \end{cases}$$

Herhangi kabul edilebilir parametre dörtlüsü $(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$ için $Y(\alpha,-\beta,-\gamma,\lambda) \overset{d}{=} -Y(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$, herhangi kabul edilebilir parametre dörtlüsü $(\alpha,\beta_k,\gamma_k,\lambda_k)$ için ve h, c_k (k=1,...,n) gerçel sayılar olmak üzere $Y(\alpha,\beta,\gamma,\lambda) = \sum_k c_k Y(\alpha,\beta_k,\gamma_k,\lambda_k) + h$ yazılabilir. A parametrelemesinde $(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$ aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\lambda = \sum_k \lambda_k \left| c_k \right|^\alpha$$

$$\lambda\beta = \sum_k \lambda_k \beta_k \left| c_k \right|^\alpha \operatorname{sgn}(c_k)$$

$$\lambda\gamma = \sum_k \lambda_k \gamma_k c_k + h_0$$

Ayrıca, $\alpha \neq 1$ iken, $h_0 = h$, $\alpha = 1$ iken ise $h_0 = h - \frac{2}{\pi}\sum_k \lambda_k \beta_k c_k \ln\left| c_k \right|$ olur.

Parametre dörtlüsü $(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$ ve $-1 \leq \beta' \leq \beta \leq \beta'' \leq 1$ olacak şekilde her β' ve β'' için, c' ve c'' pozitif sayılar, e ise gerçel sayı olmak üzere

$$Y(\alpha,\beta,\gamma,\lambda) \stackrel{d}{=} c'Y(\alpha,\beta') + c''Y(\alpha,\beta'') + e$$

yazılabilir. A parametrelemesinde,

$$c' = \left(\lambda \frac{\beta'' - \beta}{\beta'' - \beta'} \right)^{1/\alpha}$$

$$c'' = \left(\lambda \frac{\beta - \beta'}{\beta'' - \beta'} \right)^{1/\alpha}$$

$$e = \begin{cases} \lambda\gamma & , \ \alpha \neq 1 \\ \lambda\gamma + \frac{2}{\pi}\left(\beta' c' \ln c' + \beta'' c'' \ln c''\right) & , \ \alpha = 1 \end{cases}$$

olur.

Herhangi kabul edilebilir parametre dörtlüsü $(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$ için kabul edilebilir $q^*=(\alpha,\beta^*,\gamma^*,\lambda^*)$ vardır, öyle ki,

$$Y(\alpha,\beta,\gamma,\lambda) - \frac{1}{2}Y(\alpha,\beta,\gamma,\lambda) - \frac{1}{2}Y(\alpha,\beta,\gamma,\lambda) \stackrel{d}{=} Y(\alpha,\beta^*,\gamma^*,\lambda^*)$$

yazılabilir.

A parametrelemesinde q*=(α,β*,γ*,λ*) aşağıdaki gibidir:

$$\beta^* = \frac{1-2^{1-\alpha}}{1+2^{1-\alpha}}\beta \quad \left(|\beta^*| \le \frac{\left|1-2^{1-\alpha}\right|}{1+2^{1-\alpha}} \le \frac{1}{3} \right) \text{ ve } \lambda^* = (1+2^{1-\alpha})\lambda,$$

$\alpha \neq 1$ iken $\gamma^* = 0$, $\alpha = 1$ iken ise $\gamma^* = -(\beta \ln 2)/\pi$ olur (Zolotarev, 1986).

X~S_α(c,β,δ) olsun. Eş. 2.5 ve 2.6'da verilen ve yaygın olarak kullanılan karakteristik fonksiyon gösterimi, Zolotarev (1986)'in A parametrelemesinin biraz değişikliğe uğramış biçimidir. Ancak, bu fonksiyon yerine Zolotarev (1986)'in M parametrelemesini temel alan farklı bir gösterimin bütün α değerleri için daha uygun olduğu belirtilmiştir (Nolan, 1999). M parametrelemesi; Kararlı dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, birikimli dağılım fonksiyonu ve karakteristik fonksiyonunun, dağılımın parametrelerine göre sürekli olmasını sağlamaktadır. Ayrıca, dağılımın çarpıklık parametresi, β, M parametrelemesinde dağılımın konumunu etkilememektedir. Bu nedenlerden ötürü Nolan (1998), M parametrelemesine dayanan bir gösterim üzerinde çalışmıştır.

Zolotarev (1986)'in M parametrelemesine göre, standartlaştırılmış Kararlı rastlantı değişkeni Z'nin karakteristik fonksiyonunun logaritması yazılmak istenirse,

$$\ln\varphi_Z(t) = \begin{cases} -|t|^\alpha [1 + i\beta \tan(\pi\alpha/2)\operatorname{sgn}(t)(|t|^{1-\alpha} - 1)] & ,\ \alpha \neq 1 \\ -|t|\,[1 + i\beta(2/\pi)\operatorname{sgn}(t)\ln|t|] & ,\ \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

$Z \sim S_\alpha^0(1,\beta,0)$ olarak gösterilebilir.

Bu parametrelemede değişiklik yapılır ve $X^0 \stackrel{d}{=} cZ + \delta^0$ olarak yazılırsa, yeni M parametrelemesine sahip rastlantı değişkeni $X^0 \sim S_\alpha^0(c,\beta,\delta^0)$ şeklinde ifade edilir. X^0 rastlantı değişkeninin karakteristik fonksiyonunun logaritması

$$\ln\varphi_{X^0}(t) = \begin{cases} -c^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta \tan(\pi\alpha/2)\operatorname{sgn}(t)(|ct|^{1-\alpha} - 1)] + i\delta^0 t & ,\ \alpha \neq 1 \\ -c|t|\,[1 + i\beta(2/\pi)\operatorname{sgn}(t)(\ln|t| + \ln c)] + i\delta^0 t & ,\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -c^{\alpha}\left|t\right|^{\alpha}[1 - i\beta\tan(\pi\alpha/2)\mathrm{sgn}(t)] + i[\delta^{0} - \beta\tan(\pi\alpha/2)c]t & , \alpha \neq 1 \\ -c\left|t\right|[1 + i\beta(2/\pi)\mathrm{sgn}(t)\ln\left|t\right|] + i[\delta^{0} - \beta(2/\pi)c\ln c]t & , \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

olarak bulunur. Öte yandan, Eş. 2.5 ve 2.6'daki karakteristik fonksiyona sahip rastlantı değişkeni $X \sim S_{\alpha}(c,\beta,\delta)$

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} c(Z + \beta\tan(\pi\alpha/2)) + \delta \\ c(Z + (2/\pi)\beta\ln c) + \delta \end{cases} = \begin{cases} cZ + (c\beta\tan(\pi\alpha/2) + \delta) & , \alpha \neq 1 \\ cZ + ((2/\pi)\beta c\ln c + \delta) & , \alpha = 1 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu iki farklı parametrelemede parametreler arası ilişkiler aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\delta = \begin{cases} \delta^{0} - \beta c\tan(\pi\alpha/2), & \alpha \neq 1 \\ \delta^{0} - \beta(2/\pi)c\ln c \ , & \alpha = 1 \end{cases}$$

α, β ve c parametreleri ise her iki parametrelemede de aynı anlamdadır.

Ayrıca, yeni M parametrelemesinin bazı özellikleri verilecek olursa bunlar,

- Eğer, $Y \sim S_{\alpha}^{0}(c,\beta,\delta^{0})$ ise, her $a \neq 0$ ve b için

  $aY+b \sim S_{\alpha}^{0}(\,|\,a\,|\,c,\mathrm{sgn}(a)\beta,a\delta^{0}+b)$

  yazılabilir.

- Karakteristik fonksiyon ve dolayısıyla olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu, dağılımın parametrelerine $(\alpha,c,\beta,\delta^{0})$ göre süreklidir.

- Eğer, $Y_1 \sim S_{\alpha}^{0}(c_1,\beta_1,\delta_1^{0})$ ve $Y_2 \sim S_{\alpha}^{0}(c_2,\beta_2,\delta_2^{0})$ bağımsız rastlantı değişkenleri ise, $Y_1+Y_2 \sim S_{\alpha}^{0}(c,\beta,\delta^{0})$ şeklinde olup, burada,

$$c = (c_1^{\alpha} + c_2^{\alpha})^{1/\alpha}, \ \beta = \frac{\beta_1 c_1^{\alpha} + \beta_2 c_2^{\alpha}}{c_1^{\alpha} + c_2^{\alpha}},$$

$$\delta^0 = \begin{cases} \delta_1^0 + \delta_2^0 + \tan(\pi\alpha/2)[\beta c - \beta_1 c_1 - \beta_2 c_2] & , \ \alpha \neq 1 \\ \delta_1^0 + \delta_2^0 + (2/\pi)[\beta c \ln c - \beta_1 c_1 \ln c_1 - \beta_2 c_2 \ln c_2], & \alpha = 1 \end{cases}$$

olarak verilir. Son olarak, $S_{\alpha}^{*}(c^*,\beta,\delta^*)$ parametrelemesi ve özellikleri verilmiştir. Bunun için,

$$X^* \stackrel{d}{=} \frac{c^*}{\alpha^{1/\alpha}}(Z - m(\alpha,\beta)) + \delta^* = \frac{c^*}{\alpha^{1/\alpha}} Z + \left(\delta^* - \frac{c^*}{\alpha^{1/\alpha}} m(\alpha,\beta) \right)$$

şeklinde yazılır ve $X^* \sim S_{\alpha}^{*}(c^*,\beta,\delta^*)$ olur. Burada, $m(\alpha,\beta)$, Z'nin dağılımının tepe noktasıdır.

Bu parametrelemenin özellikleri:

- $S_{\alpha}^{*}(c^*,\beta,\delta^*)$ dağılımının tepe noktası δ^* değeridir.
- α=2 durumunda, c* standart sapmaya eşittir, α=1 ve β=0 durumunda ise standart ölçek parametresidir.
- Eğer $Y \sim S_{\alpha}^{*}(c^*,\beta,\delta^*)$ (burada, c* ve δ^* sırasıyla ölçek ve konum parametreleridir) ise, herhangi $a \neq 0$ ve b için $aY + b \sim S_{\alpha}^{*}\left(|a|c^*, \mathrm{sgn}(a)\beta, a\delta^* + b\right)$ olur.
- Karakteristik fonksiyon, dağılımın parametrelerine (α,c*,β,δ^*) göre süreklidir.
- Eğer $Y_1 \sim S_{\alpha}^{*}(c_1^*,\beta_1,\delta_1^*)$ ve $Y_2 \sim S_{\alpha}^{*}(c_2^*,\beta_2,\delta_2^*)$ bağımsız rastlantı değişkenleri ise, $Y_1+Y_2 \sim S_{\alpha}^{*}(c^*,\beta,\delta^*)$ olur. Burada,

$$c^* = ((c_1^*)^{\alpha} + (c_2^*)^{\alpha})^{1/\alpha}, \ \beta = \frac{\beta_1 (c_1^*)^{\alpha} + \beta_2 (c_2^*)^{\alpha}}{(c_1^*)^{\alpha} + (c_2^*)^{\alpha}}$$

$$\delta^* = \begin{cases} \delta_1^* + \delta_2^* + \alpha^{-1/\alpha}(\tan(\pi\alpha/2)\left[\beta c^* - \beta_1 c_1^* - \beta_2 c_2^*\right] & , \quad \alpha \neq 1 \\ \delta_1^* + \delta_2^* + \dfrac{2}{\pi}\left[\beta c^* \ln c^* - \beta_1 c_1^* \ln c_1^* - \beta_2 c_2^* \ln c_2^*\right] & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

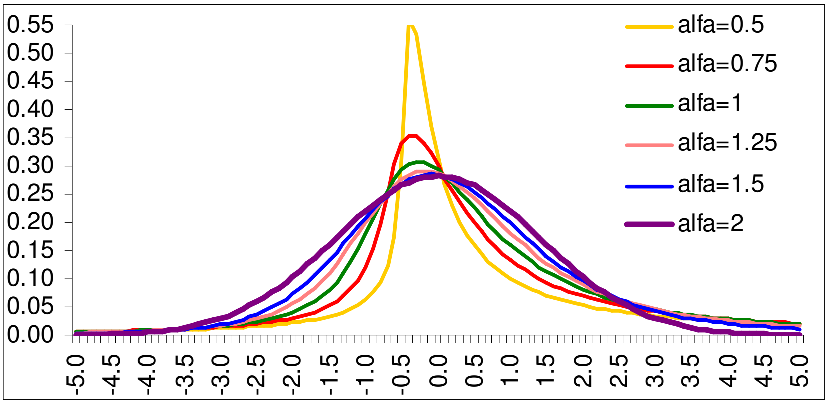
olarak tanımlanır. Bu bilgiler ışığında, $c^* = \alpha^{1/\alpha} c$ ve

$$\delta^* = \delta^0 + c\, m(\alpha,\beta) = \begin{cases} \delta + c(\beta \tan(\pi\alpha/2) + m(\alpha,\beta)) & , \quad \alpha \neq 1 \\ \delta + c(\beta \dfrac{2}{\pi} \ln c + m(1,\beta)) & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

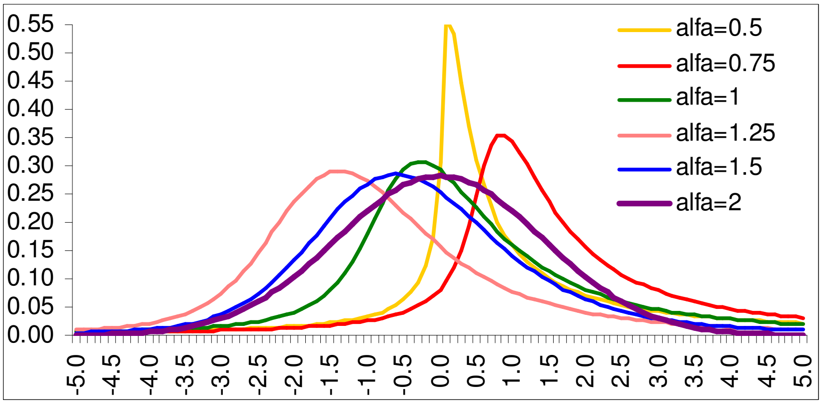
yazılır. X* rastlantı değişkeninin karakteristik fonksiyonunun logaritması ise

$$\ln\varphi_{X^*}(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha}(c^*|t|)^{\alpha}\left[1 - i\beta(\tan(\pi\alpha/2)\operatorname{sgn}(t)\right] + \\ i\left[\delta^* - \alpha^{-1/\alpha} c^*(\beta(\tan(\pi\alpha/2) + m(\alpha,\beta))\right] t & , \quad \alpha \neq 1 \\ -c^*|t|\left[1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}\operatorname{sgn}(t)\ln|t|\right] + \\ i\left[\delta^* - c^*(\beta\dfrac{2}{\pi}\ln c^* + m(1,\beta))\right] t & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

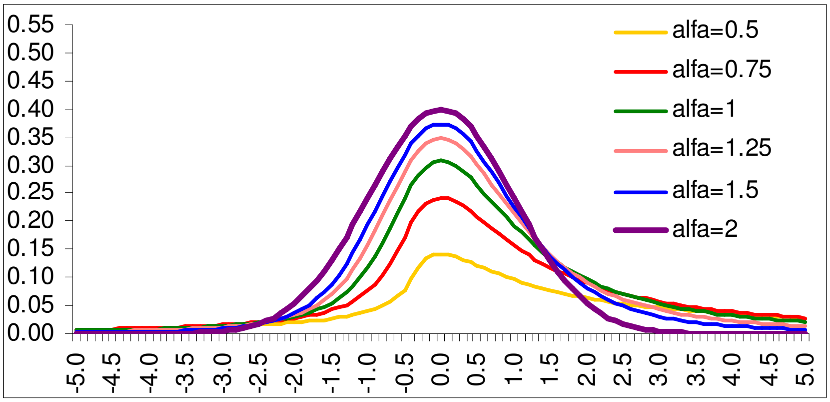
olur (Nolan, 1998). $S_\alpha^0(1,\beta,0)$, $S_\alpha(1,\beta,0)$ ve $S_\alpha^*(1,\beta,0)$ parametrelemelerinin farklılıklarının görülmesi amacıyla Şekil 2.1-2.6 oluşturulmuştur.



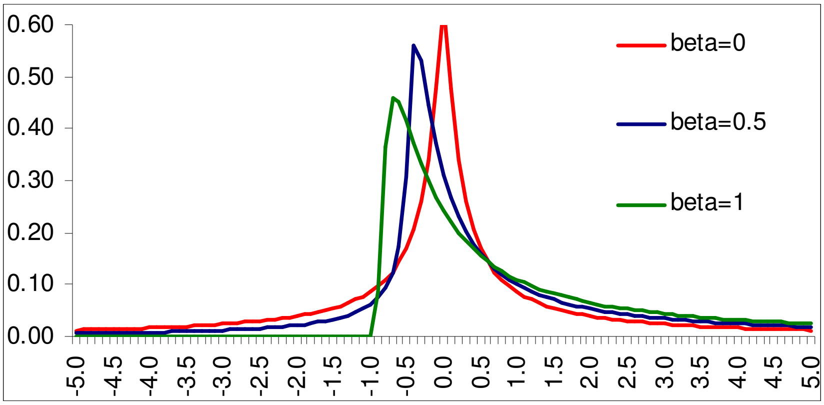
Şekil 2.1. Farklı α değerlerinde $S^{0}_{\alpha}(1,0.5,0)$ parametrelemesi



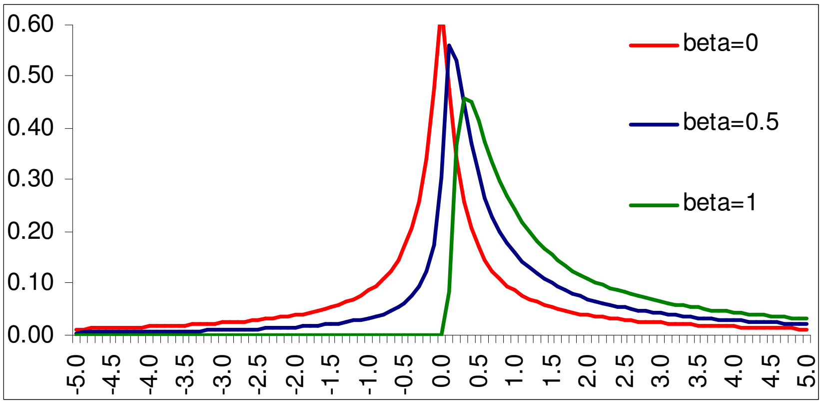
Şekil 2.2. Farklı α değerlerinde $S_{\alpha}(1,0.5,0)$ parametrelemesi



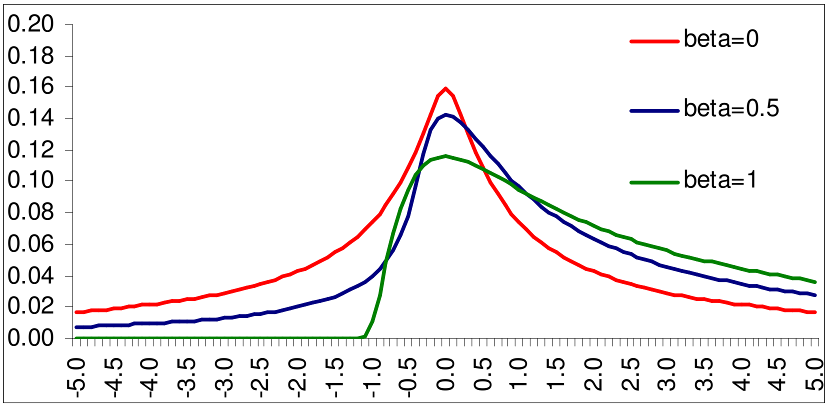
Şekil 2.3. Farklı α değerlerinde $S^{*}_{\alpha}(1,0.5,0)$ parametrelemesi



Şekil 2.4. Farklı β değerlerinde $S^{0}_{0.5}(1,\beta,0)$ parametrelemesi



Şekil 2.5. Farklı β değerlerinde $S_{0.5}(1,\beta,0)$ parametrelemesi



Şekil 2.6. Farklı β değerlerinde $S^{*}_{0.5}(1,\beta,0)$ parametrelemesi

2.3. Olasılık Yoğunluk ve Birikimli Dağılım Fonksiyonları

α, β, $\gamma = 0$, $\lambda = 1$ parametreye sahip Kararlı dağılımın olasılık yoğunluk, dağılım ve karakteristik fonksiyonları sırasıyla $f(x,\alpha,\beta)$, $F(x,\alpha,\beta)$ ve $\varphi(t,\alpha,\beta)$ olarak verilsin. Buna göre aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$f(-x,\alpha,\beta) = f(x,\alpha,-\beta)$

$F(-x,\alpha,\beta) = 1-F(x,\alpha,-\beta)$

ve

$\varphi(-t,\alpha,\beta) = \varphi(t,\alpha,-\beta)$

Bilindiği üzere $|\varphi(t)|$, gerçel t ekseni üzerinde entegrallenebilir bir fonksiyondur ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir:

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\,\varphi(t,\alpha,\beta)\,dt \tag{2.9}$$

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty} e^{itx}\,\varphi(t,\alpha,-\beta)\,dt \tag{2.10}$$

B parametrelemesi ele alındığında, Eş. 2.9 ve 2.10'a göre, $\alpha \neq 1$ için,

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty} \exp\left(-itx - t^{\alpha}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\right)\right)dt$$

ve $\alpha = 1$ için,

$$f(x,1,\beta) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty} \exp\left(-itx - \frac{\pi}{2}t - i\beta\, t\ln t\right)dt$$

olur. Yukarıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonları belli α ve β değerleri için açıldığı zaman bazı bilinen dağılımlar ortaya çıkmaktadır. Bunlar; Levy, Cauchy ve Normal dağılımlardır.

a) Levy dağılımı (α = 1/2, β = 1):

$$f(x,\frac{1}{2},1)=\begin{cases} x^{-3/2}e^{-1/4x}/2\sqrt{\pi}, & x>0 \\ 0 \quad , & x<0 \end{cases}$$

b) Cauchy dağılımı (α = 1, β = 0):

$$f(x,1,0)=\frac{1}{2}(\pi^2/4+x^2)^{-1}$$

c) Normal dağılım (α = 2, β = 0):

$$f(x,2,0)=e^{-x^2/4}/2\sqrt{\pi}$$

α<1 ise, her kabul edilebilir β, $x \neq 0$ ve $x+\mu|x|^{1-\alpha}$ >0 için,

$$f_A(x+\mu|x|^{1-\alpha},\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi|x|}\mathrm{Im}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{xu}{|x|}-|x|^{-\alpha}\left[\left(\frac{u}{i}\right)^{\alpha}-\mu u\left(\left(\frac{u}{i}\right)^{\alpha-1}-1\right)\right]\right)du$$

elde edilir. α=1 ise, her $\beta \neq 0$ ve $x \neq 0$ için,

$$f_A(x+\frac{2}{\pi}\beta\ln|x|,1,\beta)=\frac{1}{\pi|x|}\mathrm{Im}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\beta xu}{|\beta x|}-\frac{u}{|x|}\left[\frac{2}{\pi}|\beta|\ln u-i(1+|\beta|)\right]\right)du$$

olur ve A ve M parametrelemeleri arasındaki ilişkiler özetlenecek olursa,

$\alpha_A = \alpha_M$, $\beta_A = \beta_M$

$$f_A(x,\alpha,\beta)=f_M(x-\mu,\alpha,\beta)$$

$$f_A(x,1,\beta)=f_M(x,1,\beta)$$

$f_M(x,\alpha,\beta) \to f_M(x,1,\beta)$ ($\alpha \to 1$ iken)

yazılabilir. Bununla birlikte,

$\mu(|x|^{1-\alpha}-1) \to \frac{2}{\pi}\beta\ln|x|$ ($\alpha \to 1$ iken)

$$f_A(x+\mu|x|^{1-\alpha},\alpha,\beta) = f_M(x+\mu(|x|^{1-\alpha}-1),\alpha,\beta)$$

$$\to f_M(x+\frac{2}{\pi}\beta\ln|x|,1,\beta)$$

$$= f_A(x+\frac{2}{\pi}\beta\ln|x|,1,\beta)$$

yazılabilir (Zolotarev, 1986).

1-F(-x,α,β) = F(x,α,-β) özelliği bilindiğine göre, $\alpha \neq 1$ ve x>0 ise,

$$F(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\beta) + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} \exp\{-V_\alpha(x,\varphi)\}d\varphi, & \alpha < 1 \\ 1 - \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}\beta\frac{K(\alpha)}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\{-V_\alpha(x,\varphi)\}d\varphi, & \alpha > 1 \end{cases}$$

yazılabilir. Burada,

$$V_\alpha(x,\varphi) = x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(\frac{\sin(\alpha\varphi+\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha))}{\cos\varphi}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\frac{\cos((\alpha-1)\varphi+\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha))}{\cos\varphi}$$

olarak ifade edilir. $\alpha \neq 1$ ve x = 0 ise,

$$F(0,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left(1-\beta\frac{K(\alpha)}{\alpha}\right)$$

$\alpha = 1$ ve β>0 ise,

$$F(x,1,\beta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\{-V_1(x,\varphi)\}d\varphi$$

olur. Burada, $V_1(x,\varphi)=\dfrac{\frac{\pi}{2}+\beta\varphi}{\cos\varphi}\exp\left(\dfrac{-x}{\beta}+(\varphi+\dfrac{\pi}{2\beta})\tan\varphi\right)$ değerine eşittir.

α = 1 ve β = 0 (Cauchy dağılımı) ise, $F(x,1,0)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}(x)$ olur (Zolotarev, 1966).

$\alpha \neq 1$ ve $x \neq 1$ iken, her $|\beta| \leq 1$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,\alpha,\beta)=\frac{\alpha|x|^{1/(\alpha-1)}}{2|1-\alpha|}\int_{-\theta^*}^{1}U_\alpha(\varphi,\theta^*)\exp\left(-|x|^{\alpha/(\alpha-1)}U_\alpha(\varphi,\theta^*)\right)d\varphi$$

α = 1 ve $\beta \neq 0$ iken, her x için ise

$$f(x,1,\beta)=\frac{1}{2|\beta|}e^{-x/\beta}\int_{-1}^{1}U_1(\varphi,\beta)\exp\left(-e^{-x/\beta}U_1(\varphi,\beta)\right)d\varphi$$

şeklinde verilir. Bu eşitliklerde,

$K(\alpha)=\alpha-1+\operatorname{sgn}(1-\alpha)$, $\theta=\beta K(\alpha)/\alpha$, $\theta^*=\theta\operatorname{sgn}(x)$,

$$U_\alpha(\varphi,\theta)=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}\alpha(\varphi+\theta)}{\cos\frac{\pi}{2}\varphi}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}((\alpha-1)\varphi+\alpha\theta)}{\cos\frac{\pi}{2}\varphi}\right)$$

ve

$$U_1(\varphi,\beta)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1+\beta\varphi}{\cos\frac{\pi}{2}\varphi}\right)\exp\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi+\frac{1}{\beta}\right)\tan\frac{\pi}{2}\varphi\right)$$

olur (Zolotarev, 1986).

2.4. Kararlı Dağılımdan Veri Türetimi

B parametrelemesinde standart Kararlı rastlantı değişkeni ele alınmıştır ve $S(\alpha,\beta)$ olarak ifade edilmiştir. Aşağıda dağılım yaklaşımları ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir:

i. $S(\alpha,\beta) \sim -S(\alpha,-\beta)$

ii. $S(\alpha,\beta) \sim pS_1 - qS_2$

S_1 ve S_2 bağımsız ve aynı parametre ile Kararlı dağılıma sahip rastlantı değişkenleridir, $S_1 \sim S_2 \sim S(\alpha,1)$ olarak gösterilir. p ve q ise

$$p^{\alpha} = \sin\left(\frac{1}{2}\pi k(\alpha)(1+\beta)\right) \Big/ \sin(\pi k(\alpha)),$$

$$q^{\alpha} = \sin\left(\frac{1}{2}\pi k(\alpha)(1-\beta)\right) \Big/ \sin(\pi k(\alpha))$$

şeklinde verilebilir ($k(\alpha) = 1-|1-\alpha|$).

iii. $S(\alpha'',\beta') \sim S(\alpha,\beta)S(\alpha',1)^{1/\alpha} \quad \alpha \neq 1,\ \alpha'<1$

Yukarıdaki eşitlikte $\alpha'' = \alpha\alpha'$, $\beta' = \beta k(\alpha)\alpha'/k(\alpha\alpha')$ olur.

$0<\alpha<1$, $\beta=1$ durumunda $S(\alpha,1)$ için $x>0$ bölgesinde olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$f(S(\alpha,1) \leq x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp\left\{-x^{-\alpha/(1-\alpha)}\, a(\theta)\right\} d\theta, \qquad 0<\alpha<1$$

Burada, $a(\theta) = \dfrac{\sin((1-\alpha)\theta)\sin(\alpha\theta)^{\alpha/(1-\alpha)}}{(\sin(\theta))^{1/(1-\alpha)}}$, $0 < \theta < \pi$ şeklinde yazılabilir.

Standart Üstel rastlantı değişkeni W olsun ($P(W \geq w) = e^{-w}$, $w \geq 0$). Bu durumda, yukarıdaki eşitlik, $S(\alpha,1) = (a(\Theta)/W)^{\alpha/(1-\alpha)}$ şeklini alır. Burada Θ, $(0,\pi)$ aralığında Tekdüze (Uniform) dağılıma sahiptir. Θ ve W bağımsızdır. Buna benzer bir tanımı Zolotarev (1966) vermiştir. Buna göre

$$S(\alpha,\beta) = \frac{\sin\alpha(\phi-\phi_0)}{(\cos\phi)^{1/\alpha}}\left(\frac{\cos(\phi-\alpha(\phi-\phi_0))}{W}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}, \qquad \alpha \neq 1$$

$$S(1,\beta) = \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\beta\phi\right)\tan(\phi)-\beta\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}W\cos(\phi)}{\frac{\pi}{2}+\beta\phi}\right)\right), \qquad \alpha = 1$$

olarak belirtilir. Burada ϕ, $(-\pi/2,\pi/2)$ aralığında Tekdüze dağılıma sahiptir. $\phi_0 = \frac{-\pi\beta}{2}(k(\alpha)/\alpha)$ olarak ifade edilir. Bu bilgiler doğrultusunda, olasılık yoğunluk fonksiyonu kapalı biçimde belirtilen Kararlı dağılımlar (Normal (S(2,0)), Cauchy (S(1,0)) ve Levy dağılımı (S(1/2,1)) aşağıda verilebilir:

a) α = 2, β = 0 iken S(2,0) = $(W^{1/2}\sin(2\phi))/\cos(\phi) = 2\,W^{1/2}\sin(\phi)$ elde edilir. Bu da Normal dağılıma tekabül etmektedir.

b) α = 1, β = 0 iken S(1,0) = $\tan(\phi)$ olur. Bu da Cauchy dağılımına tekabül etmektedir.

c) α = 1/2 ve , β = 1 ($\phi_0 = \frac{-\pi}{2}$) iken,

$$S(1/2,1) = \left(4W\sin^2\left(\frac{1}{2}\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)^{-1} \sim \left(4W\cos^2\Theta\right)^{-1} \tag{2.11}$$

$\alpha \to 1$ ve β sabit iken,

$$\lim_{\alpha\to1} S(\alpha,\beta) = \frac{\sin(\phi-\phi_0)}{\cos(\phi)} = \cos(\phi_0)\tan(\phi)-\sin(\phi_0) \tag{2.12}$$

olur. Eş. 2.12 ise Cauchy dağılımının (α=1, β=0) sabit doğrusal bir fonksiyonudur. $\beta \to 1$ iken $S(\alpha,\beta)$ yeniden tanımlanır (Chambers vd., 1976).

X, Eş. 2.5 ve 2.6'daki karakteristik fonksiyona c=1 ve δ=0 parametreleri ile sahip olan rastlantı değişkeni ($S_\alpha(1,\beta,0)$) olsun. Yukarıdaki teorem kullanılarak Kararlı dağılıma ait rastgele sayı türetimi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$\alpha \neq 1$ için,

$$X = T_{\alpha,\beta} \sin(\alpha(V + B_{\alpha\beta}))\left(\frac{\cos(V - \alpha(V + B_{\alpha\beta}))}{W}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \quad (2.13)$$

Burada, $B_{\alpha\beta} = \dfrac{\tan^{-1}\left(\beta \tan \dfrac{\pi\alpha}{2}\right)}{\alpha}$ ve $T_{\alpha,\beta} = \left(1 + \beta^2 \tan^2\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^{1/2\alpha}$ değerini alır.

Bununla birlikte, V, (-π/2,π/2) parametresiyle Tekdüze dağılım, W ise 1 ortalama ile Üstel dağılım gösteren bağımsız rastlantı değişkenleridir.

α = 1 iken ise

$$X = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \beta V\right)\tan V - \beta \ln\left(\frac{\frac{\pi}{2} W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V}\right) \quad (2.14)$$

olur (Weron, 1996).

$S_\alpha(1,\beta,0)$ Kararlı rastlantı değişkenlerine ait rastgele sayı elde edildikten sonra, α, β, c ve δ parametrelerine sahip, $S_\alpha(c,\beta,\delta)$, Kararlı rastlantı değişkenlerine ait rastgele sayı aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

Eğer X ~ $S_\alpha(1, \beta,0)$ ise

$$Y = \begin{cases} cX + \delta & , \alpha \neq 1 \\ cX + \dfrac{2\beta c \ln c}{\pi} + \delta & , \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

Y ~ $S_\alpha(c, \beta,\delta)$ olur (Weron, 2001).

2.5. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Elde Edilmesi İçin Kullanılan Yöntemler

Olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için önerilen yöntemlerin en başında Zolotarev (1986)'in olasılık yoğunluk fonksiyonunu entegral gösterimine dayandırdığı yaklaşım gelmektedir. Nolan (1997) bu entegralleri geliştirmiştir.

Ayrıca, karakteristik fonksiyonuna ters Fourier dönüşümü uygulanması sonucunda olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilebilmektedir (Doğanoğlu ve Mittnik (1998)). McCulloch (1998) ise Cauchy ve Normal dağılımı bir araya getirerek farklı bir yaklaşım önermiştir.

2.5.1. Nolan'ın olasılık yoğunluk fonksiyonu için önerdiği yöntem

Nolan (1997), Kararlı dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonunu entegraller yardımı ile bulmayı amaçlamış ve bu çözümü önermeden önce Kararlı dağılımın farklı şekillerde parametrelenmesi üzerinde durmuştur. Eş. 2.7'deki karakteristik fonksiyonunu, karakteristik fonksiyonun ve birikimli dağılım fonksiyonunun α ve β parametrelerine göre sürekli olmasından dolayı önermiştir.

Nolan (1997), Eş. 2.7'deki eşitlik üzerinde bazı parametreleme işlemleri gerçekleştirmiş ve buna göre olasılık yoğunluk fonksiyonlarını Eş. 2.20-2.23'deki gibi elde etmiştir. Parametrelemeler Eş. 2.16-2.19'da verilmiştir.

$$\zeta = \zeta(\alpha,\beta) = \begin{cases} -\beta \tan\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1 \\ 0 \quad , & \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\theta_0 = \theta_0(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\tan^{-1}(\beta \tan\frac{\pi\alpha}{2}), & \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} \quad , & \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.17}$$

$$c_1(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \theta_0), & \alpha < 1 \\ 0 \quad , & \alpha = 1 \\ 1 \quad , & \alpha > 1 \end{cases} \tag{2.18}$$

$$V(\theta;\alpha,\beta)=\begin{cases}(\cos\alpha\theta_0)^{1/(\alpha-1)}\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\alpha(\theta_0+\theta)}\right)^{\alpha/(\alpha-1)}\left(\dfrac{\cos\theta_0+(\alpha-1)\theta}{\cos\theta}\right), & \alpha\neq 1\\ \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+\beta\theta}{\cos\theta}\right)\exp\left(\dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\theta\right)\tan\theta\right), & \alpha=1,\ \beta\neq 0\end{cases} \tag{2.19}$$

Buna göre olasılık yoğunluk fonksiyonu, $\alpha\neq1$ ve $x>\zeta$ için:

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\alpha(x-\zeta)^{1/(\alpha-1)}}{\pi|\alpha-1|}\int_{-\theta_0}^{\pi/2}V(\theta;\alpha,\beta)\exp\left(-(x-\zeta)^{\alpha/(\alpha-1)}V(\theta;\alpha,\beta)\right)d\theta \tag{2.20}$$

$\alpha\neq 1$ ve $x=\zeta$ için:

$$f(\zeta;\alpha,\beta)=\frac{\Gamma\left(1+(1/\alpha)\right)\cos\theta_0}{\pi(1+\zeta^2)^{(1/2\alpha)}} \tag{2.21}$$

$\alpha\neq 1$ ve $x<\zeta$ için:

$$f(x;\alpha,\beta)=f(-x;\alpha,-\beta) \tag{2.22}$$

$\alpha=1$ için:

$$f(x;1,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2|\beta|}e^{-(\pi x/2\beta)}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}V(\theta;1,\beta)\exp\left(-e^{-(\pi x/2\beta)}V(\theta;1,\beta)\right)d\theta, & \beta\neq 0\\ \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, & \beta=0\end{cases} \tag{2.23}$$

olarak verilir.

2.5.2. Fourier dönüşümü ile olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunması

Eş. 2.5 ve 2.6'daki eşitlikte belirtilen karakteristik fonksiyona Fourier dönüşümü uygulayarak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmiştir (Doğanoğlu ve Mittnik (1998)). Kararlı dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, Fourier dönüşümü yardımıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

$$f(x;\alpha,\beta,c,\delta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}\,\phi_x(t)\,dt \qquad (2.24)$$

Standartlaştırma işlemi uygulanırsa ($z=\frac{x-\delta}{c}$), Eş. 2.24

$$f(z;\alpha,\beta,c,\delta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-izt}\,\phi_z(t)\,dt \qquad (2.25)$$

olarak elde edilir. Burada $\phi_z(t)=E\left[e^{itz}\right]=\exp\left(-\left|t\right|^{\alpha}\left[1+i\,\beta\,\mathrm{sgn}(t)\,w(t,\alpha)\right]\right)$ olarak ifade edilir. Eş. 2.24'daki entegral, h mesafesinde N eşit nokta üzerinde uygulanır. Bir başka deyişle bu aralıklar

$$z_k=\left(k-1-\frac{N}{2}\right)h, \qquad k=1,...,N$$

olarak verilebilir. t = 2πw olarak alınırsa Eş. 2.25

$$p(z_k)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi w z_k}\,\phi_z(2\pi w)\,dw$$

olarak ifade edilir.

Bu entegral ise yaklaşık olarak bulunmak istendiğinde, s aralığındaki N nokta için dikdörtgen kuralı ile $p(z_k)\approx s\sum_{i=1}^{N}\phi_z(2\pi w_n)e^{-i2\pi w_n z_k}$ olarak verilebilir. Burada

$$w_n=\left(n-1-\frac{N}{2}\right)s$$

değerine eşittir. $s=(hN)^{-1}$ olarak alınırsa

$$p(z_k)\approx s(-1)^{k-1-N/2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\,\phi_z(2\pi w_n)\,e^{\frac{-i2\pi(n-1)(k-1)}{N}} \qquad , n=1,2,3,...,N \qquad (2.26)$$

Eş. 2.26'da verilen toplam, $(-1)^{n-1}\,\phi_z(2\pi w_n)$ dizisine Fourier dönüşümü uygulayarak elde edilir.

2.6. Bayesci Olmayan Tahmin Yöntemleri

Kararlı dağılımların parametre tahminleri için çeşitli yöntemler önerilmiştir. Bayesci olmayan yöntemler, örneklem karakteristik fonksiyonunu ve birikimli dağılım fonksiyonunu, ya da sayısal entegrasyon yaklaşımını kullanmakta ve parametre tahminini elde etmeye çalışmaktadır. Bayesci yöntem ise Bölüm 2.7'de detaylı olarak incelenecektir.

2.6.1. Birikimli dağılım fonksiyonu yöntemi

Kararlı dağılımların parametrelerinin tahmininde, Fama ve Roll (1968) standartlaştırılmış simetrik Kararlı dağılımların (δ = 0, c = 1) birikimli dağılım fonksiyonunu kullanmıştır.

X rastlantı değişkeni α, β = 0, δ ve $\gamma = c^{\alpha}$ parametreleriyle simetrik Kararlı dağılıma sahip olsun. Buna göre standartlaştırılmış Kararlı değişken aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$u = \frac{x - \delta}{c} \tag{2.27}$$

U rastlantı değişkeni α, β = 0, δ = 0 ve γ = c = 1 parametreleriyle standartlaştırılmış simetrik Kararlı dağılıma sahip olur. Bu rastlantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu ise $\varphi_u(t) = E\left[e^{itu}\right] = \exp(-|t|^{\alpha})$ olur. Seri açılımlarından U rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu yaklaşık olarak bulmak mümkündür. α>1 için, yaklaşık olarak

$$f_{\alpha}(u) = \frac{1}{\pi\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right)}{(2k)!}u^{2k} \tag{2.28}$$

verilebilir. Bu eşitlikte serinin sonlu gösterimi ise şu şekilde verilebilir:

$$f_{\alpha}(u) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{u^{\alpha k+1}}\sin\left(\frac{k\pi\alpha}{2}\right) + R(u) \tag{2.29}$$

Burada R(u) = O $[u^{-\alpha(n+1)-1}]$ olarak verilir (Pozitif bir M sabiti için $|R(u)| < M\, u^{-\alpha(n+1)-1}$ olur).

Eş. 2.28 ve 2.29'deki eşitliğin entegrali alınırsa sırasıyla aşağıdaki birikimli dağılım fonksiyonları elde edilir:

$$F_\alpha(u) = \frac{1}{2} + \int_0^u f_\alpha(z)\,dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\Gamma\left(\frac{2k-1}{\alpha}\right)}{(2k-1)!}u^{2k-1}$$

ve

$$F_\alpha(u) = 1 - \int_u^{\infty} f_\alpha(z)\,dz = 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{\Gamma(\alpha k)}{k!\,u^{\alpha k}}\sin\left(\frac{k\pi\alpha}{2}\right) - \int_u^{\infty} R(u)\,du\,,$$

$$\int_u^{\infty} R(u)\,du = O\left(\frac{u^{-\alpha(n+1)}}{\alpha(n+1)}\right)$$

Bu birikimli değerlerin bulunması, değişik dağılım tiplerinin birbirleriyle kıyaslanmasına olanak sağlamıştır. Buna örnek olarak α değeri 2'den küçük olan Kararlı dağılım ile Normal dağılım karşılaştırılmıştır. Kıyaslama sonucunda, α değeri 2'den küçük olan Kararlı dağılımın Normal dağılıma göre daha dik olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, büyük |u| değerleri için, yoğunluğu daha fazladır. Yoğunluğun fazla olması, büyük $|u_o|$ değerleri için $f(|u| > |u_o|)$ ne kadar büyükse α'nın o kadar küçük olması anlamındadır.

Fama ve Roll (1968), yukarıdaki dağılım fonksiyonlarından yararlanarak $1 \leq \alpha \leq 2$ olacak şekilde α ve U rastlantı değişkeninin değişik değerleri için birikimli dağılım fonksiyonu değerlerini bulmuşlardır. Ayrıca, standartlaştırılmış Kararlı dağılımın değişik α ve dağılım fonksiyon değeri için alacağı değeri, $(u(\alpha,F))$, belirlemişlerdir. Birikimli dağılım fonksiyon değeri 0.72 olan standartlaştırılmış Kararlı dağılımın 0.827 ± 0.003 aralığında değer aldığını bulmuşlar ve bunu kullanarak c parametresi için tahmin önermişlerdir. Parametre tahmini:

$$\hat{c} = \frac{1}{0.827(2)}\left[\hat{u}(\alpha,0.72) - \hat{u}(\alpha,0.28)\right]$$

c parametresinin tahmininde belirtilmiş olan $\hat{u}$ değeri örneklem kullanılarak elde edilmektedir. α parametresinin tahmini için ise standartlaştırılmış simetrik Kararlı dağılımların Normal Olasılık Grafikleri oluşturulmuştur.

δ parametresinin tahmini için kesilmiş ortalamalar (truncated mean) kullanılmıştır. Bunun için öncelikle birikimli olasılıklar (Tekdüze (0,1) dağılımdan üretilmiş rastgele sayılar) üretilmiştir. Her α değeri için 15 gözlemli 2026 alt örneklem, 21 gözlemli 1447 alt örneklem, 51 gözlemli 596 alt örneklem ve 101 gözlemli 301 alt örneklem oluşturulmuş, her rastgele üretilen U değeri için ters fonksiyon $u(\alpha,U) = F_{\alpha}^{-1}(U)$ bulunmuştur. Bulunan bu değerler α = 1.0, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9, 2.0 değerlerine sahip standartlaştırılmış simetrik Kararlı dağılımları oluşturmak için kullanılmıştır. Her alt örneklem için sıralı gözlemlerin yüzde 25, yüzde 50 ve yüzde 75'lik kısımlarının örneklem ortalaması, medyanı ve kesilmiş ortalaması bulunmuştur. Kesilmiş ortalamanın diğer tahmin edicilere göre daha küçük varyansa sahip olduğu bulunmuştur. Fama ve Roll (1971), $\hat{c}$'nin asimtotik olarak normal dağıldığını ve varyansının aşağıdaki gibi olduğunu belirtmiştir.

$$\sigma^2(\hat{c}) \approx \frac{2(0.28)(0.72-0.28)}{N[f(\alpha,0.72)]^2}\left(\frac{1}{1.654}\right)^2$$

Bu eşitlikte N, gözlem sayısı, $f(\alpha,F)$ ise α ve dağılım fonksiyonuna karşılık gelen U'nun olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

McCulloch (1986), Fama ve Roll (1968, 1971)'un yöntemini genişletmiş ve bütün parametreler için tahmin edici elde etmiştir. Ayrıca, simetrik olmayan Kararlı dağılımları incelemiştir ve β parametresinin tahminini araştırmıştır. McCulloch (1986), Eş. 2.5 eşitliğindeki tanıma göre β'nın bilgi verici özelliği olduğundan bahsetmiştir. Bu özellik aşağıda verilmiştir:

$$\beta = \lim_{x\to\infty}\frac{1-S(x,\alpha,\beta,c,\delta)-S(-x,\alpha,\beta,c,\delta)}{1-S(x,\alpha,\beta,c,\delta)+S(-x,\alpha,\beta,c,\delta)} \quad , \quad \alpha \neq 2$$

$F(x_p,\alpha,\beta,c,\delta) = p$ (F=birikimli dağılım fonksiyonu, x_p = p.yüzdelik değeri)

β = 0 ise dağılım simetriktir. Eğer α = 2 ise dağılım β'dan bağımsız olarak simetrik olur ve normal dağılıma yaklaşır.

$\hat{x}_p$ örneklemin p.yüzdelik değeri olsun.

$$\upsilon_\alpha = \frac{x_{.95} - x_{0.05}}{x_{.75} - x_{0.25}}$$

olarak tanımlansın. Değişik α ve β değerleri için υ_α değerleri hesaplanmıştır ve υ_α'nın tahmin edicisi $\hat{\upsilon}_\alpha$ (örnekleme ait) ise

$$\hat{\upsilon}_\alpha = \frac{\hat{x}_{.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{.75} - \hat{x}_{0.25}}$$

olur.

$$\upsilon_\beta = \frac{x_{.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{.95} - x_{0.05}}$$

olarak tanımlansın. υ_β'nın tahmin edicisi $\hat{\upsilon}_\beta$ (örnekleme ait) ise

$$\hat{\upsilon}_\beta = \frac{\hat{x}_{.95} + \hat{x}_{0.05} - 2\hat{x}_{0.5}}{\hat{x}_{.95} - \hat{x}_{0.05}}$$

olur.

υ_α ve υ_β sadece α ve β değerlerine bağlı olduğundan

$$\upsilon_\alpha = \phi_1(\alpha,\beta)$$

ve

$$\upsilon_\beta = \phi_2(\alpha,\beta)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, α ve β parametreleri ile tahminleri aşağıdaki şekilde verilir:

$\alpha = \psi_1(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta)$, $\beta = \psi_2(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta)$ (parametreler)

$\hat{\alpha} = \psi_1(\hat{\upsilon}_\alpha, \hat{\upsilon}_\beta)$, $\hat{\beta} = \psi_2(\hat{\upsilon}_\alpha, \hat{\upsilon}_\beta)$ (parametrelerin tahmin edicileri)

$$\upsilon_c = \frac{x_{.75} - x_{0.25}}{c} = \phi_3(\alpha, \beta)$$

olarak verilsin. $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{x}_{.75}$ ve $\hat{x}_{.25}$ tahmin ediciler olduğuna göre c'nin tahmin edicisi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\hat{c} = \frac{\hat{x}_{.75} - \hat{x}_{0.25}}{\phi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

Konum parametresi için ise

$\upsilon_\delta = \dfrac{\delta - x_{0.5}}{c} = \phi_4(\alpha, \beta)$ olarak tanımlansın. δ'nın tahmin edicisi

$$\hat{\delta} = \hat{c}\,\phi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) + \hat{x}_{0.5}$$

olur. $\alpha = 1$ ve $\beta \neq 0$ iken $\upsilon_\delta = -\infty$ olur. Bu durumda farklı bir yaklaşım ele alınır ve konum parametresine alternatif olarak

$$\zeta = \begin{cases} \delta + \beta c \tan\dfrac{\pi\alpha}{2} & , \alpha \neq 1 \\ \delta & , \alpha = 1 \end{cases}$$

tanımlanır. $\upsilon_\zeta = \dfrac{\zeta - x_{0.5}}{c} = \phi_5(\alpha, \beta)$ olur. ζ'nın tahmin edicisi ise

$$\hat{\zeta} = \hat{c}\,\phi_5(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) + \hat{x}_{0.5}$$

olur. $\alpha \neq 1$ ise konum parametresinin tahmin edicisi $\hat{\delta} = \hat{\zeta} - \hat{\beta}\hat{c}\tan\dfrac{\pi\hat{\alpha}}{2}$ olarak verilir.

2.6.2. Momentler yöntemi

Press (1972), momentler yöntemi ile parametrelerin tahmin edicilerini bulmaya çalışmıştır. Eş. 2.5'de verilen karakteristik fonksiyona sahip dağılımdan n büyüklüğünde rastgele örneklem, X_1, X_2, …, X_n alınsın. Örneklem karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\hat{\varphi}_x(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n} e^{itx_j}}{n} \tag{2.30}$$

$\varphi_x(t)$ = a+ib yani karmaşık sayı biçiminde yazılır ve mutlak değeri $|\varphi_x(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$ olur. $\varphi_x(t)$, Eş. 2.5'deki gibi verildiğine göre fonksiyon karmaşık sayı şeklinde yazılabilir:

$$\varphi_x(t) = \exp\left(i\delta t - |ct|^{\alpha}[1+i\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha)]\right)$$

$$\varphi_x(t) = \exp(i\delta t)\exp(-|ct|^{\alpha})\exp(-i|ct|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha))$$

$\gamma = c^{\alpha}$ olmak üzere yukarıdaki eşitlik tekrar yazılırsa

$$\varphi_x(t) = \exp(i\delta t)\exp(-|t|^{\alpha}\gamma)\exp(-i\gamma|t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha))$$

eşitliğine ulaşılır. $w(t,\alpha)$, Eş. 2.6'da tanımlandığı gibidir.

t>0 için;

$$\varphi_x(t) = \exp(-t^{\alpha}\gamma)\left(\exp(i\delta t)\exp(-i\gamma t^{\alpha}\beta w(t,\alpha))\right)$$

$$= \exp(-t^{\alpha}\gamma)\left(\exp(i\delta t)\exp(i(-\gamma t^{\alpha}\beta\, w(t,\alpha)))\right)$$

$$= \exp(-t^{\alpha}\gamma)\left((\cos(\delta t)+i\sin(\delta t))(\cos(A)+i\sin(A))\right) \qquad (A = -\gamma t^{\alpha}\beta\, w(t,\alpha))$$

$$= \exp(-t^{\alpha}\gamma)\left(\cos(\delta t)\cos(A)+i\cos(\delta t)\sin(A)+i\sin(\delta t)\cos(A)-\sin(\delta t)\sin(A)\right)$$

$$= \exp(-t^{\alpha}\gamma)\left(\cos(\delta t+A)+i\sin(\delta t+A)\right)$$

$$|\varphi_x(t)| = \sqrt{\exp(-t^{\alpha}\gamma)^2\left(\cos^2(\delta t+A)+\sin^2(\delta t+A)\right)} = \exp(-t^{\alpha}\gamma)$$

t<0 için;

$$\varphi_x(t) = \exp(t^{\alpha}\gamma)\left(\exp(i\delta t)\exp(i\gamma t^{\alpha}\beta w(t,\alpha))\right)$$

$$= \exp(t^{\alpha}\gamma)\left(\exp(i\delta t)\exp(i(\gamma t^{\alpha}\beta w(t,\alpha)))\right)$$

$$= \exp(t^{\alpha}\gamma)\left((\cos(\delta t) + i\sin(\delta t))(\cos(B) + i\sin(B))\right) \qquad (B = \gamma t^{\alpha}\beta\, w(t,\alpha))$$

$$= \exp(t^{\alpha}\gamma)\left(\cos(\delta t)\cos(B) + i\cos(\delta t)\sin(B) + i\sin(\delta t)\cos(B) - \sin(\delta t)\sin(B)\right)$$

$$= \exp(t^{\alpha}\gamma)\left(\cos(\delta t + B) + i\sin(\delta t + B)\right)$$

$$|\varphi_x(t)| = \sqrt{\exp(t^{\alpha}\gamma)^2\left(\cos^2(\delta t + B) + \sin^2(\delta t + B)\right)} = \exp(t^{\alpha}\gamma)$$

Sonuç olarak

$$|\,\varphi_x(t)\,| = \exp(-|t|^{\alpha}\gamma), \quad -\infty<t<\infty \tag{2.31}$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikten de $-\ln|\,\varphi_x(t)\,| = |t|^{\alpha}\gamma$ yazılabilir.

α ve γ'nın tahmini için $t_1 \neq t_2$ (0 değeri almayan iki değer) ve $\alpha \neq 1$ olsun.

$$-\ln|\,\varphi_x(t_1)\,| = |t_1|^{\alpha}\gamma \tag{2.32}$$

$$-\ln|\,\varphi_x(t_2)\,| = |t_2|^{\alpha}\gamma \tag{2.33}$$

olur. Eş. 2.32 ve 2.33'deki eşitliklerin logaritması alınırsa,

$$\ln(-\ln|\,\varphi_x(t_1)\,|) = \ln(|t_1|^{\alpha}\gamma) = \ln\gamma + \alpha\ln|\,t_1\,| \tag{2.34}$$

$$\ln(-\ln|\,\varphi_x(t_2)\,|) = \ln(|t_2|^{\alpha}\gamma) = \ln\gamma + \alpha\ln|\,t_2\,| \tag{2.35}$$

olur. Eş. 2.34 ve 2.35'deki eşitliklerden birincisi $\ln|\,t_2\,|$ ikincisi $\ln|\,t_1\,|$ ile çarpıldığında,

$$\ln(-\ln|\,\varphi_x(t_1)\,|)\ln|\,t_2\,| = \ln\gamma\ln|\,t_2\,| + \alpha\ln|\,t_1\,|\ln|\,t_2\,| \tag{2.36}$$

$$\ln(-\ln|\varphi_x(t_2)|)\ln|t_1| = \ln\gamma \ln|t_1| + \alpha \ln|t_1| \ln|t_2| \quad (2.37)$$

elde edilir. Eş. 2.36 ve 2.37'deki eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında,

$$\ln\gamma \ln|t_2| - \ln\gamma \ln|t_1| = \ln|t_2| \ln(-\ln|\varphi_x(t_1)|) - \ln|t_1| \ln(-\ln|\varphi_x(t_2)|)$$

$$\ln\gamma (\ln|t_2| - \ln|t_1|) = \ln|t_2| \ln(-\ln|\varphi_x(t_1)|) - \ln|t_1| \ln(-\ln|\varphi_x(t_2)|)$$

$$\ln\gamma = (\ln|t_2| \ln(-\ln|\varphi_x(t_1)|) - (\ln|t_1| \ln(-\ln|\varphi_x(t_2)|)) / (\ln|t_2| - \ln|t_1|)$$

$$\ln\gamma = (\ln|t_1| \ln(-\ln|\varphi_x(t_2)|) - \ln|t_2| \ln(-\ln|\varphi_x(t_1)|)) / (\ln|t_1|/|t_2|)$$

elde edilir.

Tahmini ise aşağıdaki şekilde verilir:

$$\ln\hat{\gamma} = (\ln|t_1| \ln(-\ln|\hat{\varphi}_x(t_2)|) - \ln|t_2| \ln(-\ln|\hat{\varphi}_x(t_1)|)) / (\ln|t_1|/|t_2|)$$

Eş. 2.32 ve 2.33'deki eşitlikler birbirine bölündüğünde,

$$\ln|\varphi_x(t_1)| / \ln|\varphi_x(t_2)| = |t_1/t_2|^{\alpha}$$

olarak bulunur. Her iki tarafın logaritması alındığında,

$$\alpha \ln|t_1/t_2| = \ln(\ln|\varphi_x(t_1)| / \ln|\varphi_x(t_2)|)$$

olur. Bu eşitlik kullanılarak α bulunur:

$$\alpha = \ln(\ln|\varphi_x(t_1)| / \ln|\varphi_x(t_2)|) / \ln|t_1/t_2|$$

α'nın tahmini ise aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\hat{\alpha} = \ln(\ln|\hat{\varphi}_x(t_1)| / \ln|\hat{\varphi}_x(t_2)|) / \ln|t_1/t_2|$$

β ve δ'nın tahmini için öncelikle $\ln(\phi_x(t))$'nin sanal kısmı $u(t) = \mathrm{Im}(\ln(\varphi_x(t))$ olarak tanımlanır. Eş. 2.5'deki eşitlik kullanılarak $u(t) = \left(\delta t - \gamma|t|^{\alpha-1}\beta t\, w(t,\alpha)\right)$ olduğu görülür.

$t_3 \neq t_4$ (0 değeri almayan iki değer) olsun. $\alpha \neq 1$ için:

$$\delta - \gamma |t_k|^{\alpha-1} \beta \tan\frac{\pi\alpha}{2} = \frac{u(t_k)}{t_k} \quad , \quad k=3,\,4 \tag{2.38}$$

Eş. 2.30'daki eşitlik aşağıdaki gibi açılsın:

$$\hat{\varphi}_x(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n} e^{itx_j}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \cos(tx_j)}{n} + i\frac{\sum_{j=1}^{n} \sin(tx_j)}{n}$$

$$\rho^2(t) = \left(1/n\sum_{j=1}^{n}\cos(tx_j)\right)^2 + \left(1/n\sum_{j=1}^{n}\sin(tx_j)\right)^2$$

ve

$$\tan(\theta(t)) = \sum_{j=1}^{n}\sin(tx_j) \Big/ \sum_{j=1}^{n}\cos(tx_j)$$

iken

$$\hat{\varphi}_x(t) \equiv \rho(t)\exp(i\theta(t))$$

olarak yazılır. $\hat{\varphi}_x(t)$'nın logaritması alınırsa $\ln(\hat{\varphi}_x(t)) = \ln\rho(t) + i\theta(t)$ elde edilir.

$$\hat{u}(t) = (\operatorname{Im}(\ln(\hat{\varphi}_x(t))) = \theta(t) = \tan^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sin(tx_j) \Big/ \sum_{j=1}^{n}\cos(tx_j)\right), \quad t = t_3\,,\, t_4 \tag{2.39}$$

olarak tanımlanır. Eş. 2.38'de belirtilen u(t) yerine Eş. 2.39'da gösterilen tahmini konulduğunda ve Eş. 2.38'deki eşitlik t_3 ve t_4 için ayrı ayrı yazılıp eşitliklerin farkı alındığında β'nın tahmini bulunur:

$$\hat{\beta} = \frac{\left|\frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}\right|}{\left|\,|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}\right|\hat{\gamma}\tan\frac{\pi\hat{\alpha}}{2}}$$

t_3 ve t_4 için yazılan Eş. 2.38'deki eşitlik sırasıyla $|t_4|^{\alpha-1}$ ve $|t_3|^{\alpha-1}$ ile çarpıldığında ve eşitliklerin farkı alındığında δ'nın tahmini aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\hat{\delta} = \frac{\frac{\hat{u}(t_3)}{t_3}|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}|t_3|^{\hat{\alpha}-1}}{\left| |t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \right|}$$

$\alpha = 1$ için ise tahminler aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\beta} = \frac{\left| \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4} \right|}{\frac{2\hat{\gamma}}{\pi} \ln\left| \frac{t_4}{t_3} \right|} \quad \text{ve} \quad \hat{\delta} = \frac{\frac{\ln|t_4|}{t_3}\hat{u}(t_3) - \frac{\ln|t_3|}{t_4}\hat{u}(t_4)}{\ln\left| \frac{t_4}{t_3} \right|}$$

2.6.3. Regresyon yöntemi

Koutrouvelis (1980) tahmin edicileri bulmak için regresyon yöntemini önermiştir. Bu yöntem için Eş. 2.31'in karesinin logaritması alınır.

$$- \ln |\varphi_x(t)|^2 = - \ln\left(\exp(-2|t|^{\alpha}\gamma)\right), \quad -\infty<t<\infty$$

$$= 2|t|^{\alpha}\gamma$$

$$= 2|t|^{\alpha}c^{\alpha}$$

elde edilir. Bulunan bu yeni eşitliğin tekrar logaritması alınırsa

$$\ln(-\ln|\varphi_x(t)|^2) = \ln(2c^{\alpha}) + \alpha\ln(|t|) \tag{2.40}$$

olur. Eş. 2.40 sadece α ve c'ye bağlıdır. Bu da regresyon denklemi kurarak bu parametrelerin tahmininin bulunabileceğine işaret etmektedir.

$y = \ln(-\ln|\varphi_n(t)|^2)$ (n=örneklem büyüklüğü)

$\mu = \ln(2c^{\alpha})$

$$w = \ln(|t|)$$

olsun. Buna göre,

$$y_k = \mu + \alpha w_k + \varepsilon_k \qquad , \quad k=1,\ldots,K \tag{2.41}$$

yazılabilir. Burada ε_k hata terimi, (t_k ; k=1,…,K) ise gerçel sayı kümesidir. Eş. 2.41'de kurulan regresyon denkleminden α ve c'nin tahminleri bulunur.

Eş. 2.5'deki eşitlik aşağıdaki şekilde düzenlenirse

$$\varphi_x(t) = E\left[e^{itx}\right] = \exp(i\delta t)\exp(-|c\,t|^{\alpha} - |c\,t|^{\alpha}\, i\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha))$$

$$= \exp\left(i\delta t - i|c\,t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha)\right)\exp(-|c\,t|^{\alpha})$$

$$= \exp\left(i(\delta t - |c\,t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha))\right)\exp(-|c\,t|^{\alpha})$$

$$= \left(\cos\left(\delta t - |c\,t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha)\right) + i\sin(\delta t - |c\,t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha))\right)\exp(-|c\,t|^{\alpha})$$

ile ifade edilir. Reel ve Sanal kısımlar ayrı ayrı yazılırsa

$$\operatorname{Re}(\varphi_x(t)) = \cos\left(\delta t - |c\,t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha)\right)\exp(-|c\,t|^{\alpha})$$

$$\operatorname{Im}(\varphi_x(t)) = \sin\left(\delta t - |c\,t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha)\right)\exp(-|c\,t|^{\alpha})$$

olur. Sanal kısım Reel kısma bölünürse

$$\frac{\operatorname{Im}(\varphi_x(t))}{\operatorname{Re}(\varphi_x(t))} = \frac{\sin\left(\delta t - |c\,t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha)\right)\exp(-|ct|^{\alpha})}{\cos\left(\delta t - |c\,t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha)\right)\exp(-|ct|^{\alpha})} = \tan\left(\delta t - |c\,t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha)\right)$$

Tanjant fonksiyonunun tersi alınırsa

$$\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}(\varphi_x(t))}{\operatorname{Re}(\varphi_x(t))}\right) = \delta t - |c\,t|^{\alpha}\beta \operatorname{sgn}(t)\, w(t,\alpha)$$

$$g_n(u) = \tan^{-1}\left(\frac{Im(\varphi_n(u))}{Re(\varphi_n(u))}\right)$$

ve

$$z = g_n(u) + \pi k_n(u)$$

olsun. Burada $k_n(u)$ ters tanjant fonksiyonunun olası kökleridir.

$$z_m = \delta u_m - \beta c^{\alpha} \tan(\pi\alpha/2)\,\mathrm{sgn}(u_m)\left|u_m\right|^{\alpha} + \eta_m \quad , \quad m=1,\ldots,M \tag{2.42}$$

Burada η_m hata terimi, (u_m ; m=1,…,M) ise gerçel sayı kümesidir. Eş. 2.42'deki regresyon denkleminde, α ve c'nin yerine Eş. 2.41'deki modelden bulunan tahmin değerleri kullanılarak β ve δ'nın tahminleri elde edilir.

Ayrıca, bulunan bu parametre tahminlerini daha etkin kılabilmek için verilere $x'_j = (x_j - \delta_0)/c_0$ dönüşümü uygulanarak standartlaştırılma işlemi yapılabilir. Standartlaştırma işleminde δ_0 yerine yüzde 50'lik veya yüzde 75'lik kesilmiş ortalama, c_0 yerine ise $\frac{\hat{x}_{.72} - \hat{x}_{0.28}}{1.654}$ ($\hat{x}_p$ örneklemin p.yüzdelik değeri) alınabilir.

Tahminlerde kullanılan t_k ve u_m değerleri için çeşitli öneriler mevcuttur. Bu önerilerden birincisi, t = u = 0'a yakın değerler olarak seçilmeleridir. İkinci öneri ise, t_k değerinin $\hat{\alpha}$ ve $\hat{c}$'nin varyansını, u_m değerinin ise $\hat{\beta}$ ve $\hat{\delta}$'nın varyansını minimize eden değerler olarak seçilmeleridir. İkinci öneri için benzetim çalışması yapılmış ve

$t_k = \pi k/25$, k=1,…,K

$u_m = \pi m/50$, m=1,…,M

olarak bulunmuştur.

Eş. 2.41 denkleminde t_k değerleri yerine $\pi k/25$ konulsun. $x'_j = (x_j - \delta_0)/c_0$ dönüşümü uygulansın. α ve c'nin bu denklemden bulunan tahminleri $\hat{\alpha}_1$ ve $\hat{c}_1$ ise, orijinal tahminleri $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$ ve $\hat{c} = c_0 \hat{c}_1$ olur. Eş. 2.42'de bu orijinal tahminler kullanılarak $\hat{\beta}$ ve $\hat{\delta}$ elde edilir.

Burada verilere tekrar standartlaştırma işlemi uygulanır ve $x_j'' = (x_j')/\hat{c}_1 - \delta_c$ alınır. δ_c, z_m fonksiyonunun [0,πM/50] aralığında sürekli olması için gerekli sabit bir değerdir.

Koutrouvelis (1981), 1980 yılında standartlaştırılmış veri üzerinde önerdiği regresyon modelini daha sonra revize etmiştir. İlk aşamada, parametrelerin ilk değerleri için Eş. 2.41 ve 2.42 denklemlerini kurup tahminleri bulmuş ve bu tahminleri ilk değerler olarak kullanmıştır.

Bu ilk değerler

$$\hat{\alpha}^{(0)} = \hat{\alpha}, \hat{\beta}^{(0)} = \hat{\beta}, \hat{c}_1^{(0)} = \hat{c}_1 \text{ ve } \hat{\delta}^{(0)} = \hat{\delta}$$

olsun. İkinci aşamada, Eş. 2.41 nolu denklemde

$$x_j^{(0)} = (x_j - \delta_0)/c_0 \hat{c}_1^{(0)} - \delta_c^{(0)}, \; (\delta_c^{(0)} = \delta_c)$$

değişken değiştirmesi uygulanır ve

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}^{(1)}, \hat{c}_1 = \hat{c}_1^{(1)}$$

bulunur. Üçüncü aşamada, $x_j^{(0)}$'ın standartlaştırılması için

$x_j^{(1)} = (x_j^{(0)})/\hat{c}_1^{(1)} - \delta_c^{(1)}$ ($\delta_c^{(1)}, \delta_c$'nın yukarıda tanımlandığı şekilde sabit bir değerdir) dönüşümü uygulanır. Eş. 2.42 denkleminden

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}^{(1)} \text{ ve } \hat{\delta} = \hat{\delta}^{(1)}$$

bulunur. İkinci aşamadan itibaren her aşamada bir önceki aşamadaki veri standartlaştırılır ve tahminler bulunur. Bu iteratif süreç eğer

$$CR(s) = (\hat{\alpha}^{(s)} - \hat{\alpha}^{(s-1)})^2 + (\hat{\delta}^{(s)} - \hat{\delta}^{(s-1)})^2 < \varepsilon$$

ise s.iterasyonda biter (ε, küçük bir değerdir). Simulasyon çalışmaları 10. iterasyondan daha az sayıdaki iterasyonda (CR(s), (s=1,2,…)) dizisinin 0'a yakınsadığını göstermiştir. 10. iterasyona kadar yakınsaklığın sağlanamadığı durumlarda, $\hat{\alpha}^{(s)}, \hat{\beta}^{(s)}, \hat{c}_1^{(s)}, \hat{\delta}^{(s)}$ değerleri, $CR(s) = \min_{1 \le r \le 10} CR(r)$ olacak şekilde bulunurlar. Buna göre, revize edilmiş regresyon tahmin edicileri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\hat{\alpha}_S = \hat{\alpha}^{(s)}, \hat{\beta}_S = \hat{\beta}^{(s)}, \ \hat{c}_S = c_0 \prod_{j=0}^{s} \hat{c}_1^{(j)}, \ \hat{\delta}_S = \hat{\delta}_0 + c_0 \sum_{j=0}^{s} \delta_c^{(j)} \prod_{k=0}^{j} \hat{c}_1^{(k)} + \hat{c}_S \, \hat{\delta}^{(s)}$$

2.6.4. En çok olabilirlik tahmin yöntemi

DuMouchel (1973), θ=(α, β, δ, c)'nın en çok olabilirlik tahmin edicisini araştırmıştır. Kararlı dağılıma sahip N büyüklüğünde rastgele örneklem alınırsa olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^{N} f_{\alpha,\beta}\left(\frac{x_k - \delta}{c}\right) \Big/ c \qquad (f_{\alpha,\beta}(.) \text{ standart Kararlı dağılımdır})$$

olarak verilebilir.

$\hat{\theta}$, θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi ise $\alpha \ge \varepsilon > 0$ için $\hat{\theta}$ tutarlı ve asimtotik olarak normal dağılıma sahiptir. DuMouchel (1975), $\hat{\theta}$'nın dağılımının yaklaşık olarak $N(\theta, I^{-1}/N)$ olduğunu belirterek Fisher'ın Bilgi Matrisi (I) için iki hesaplama yöntemi önermiştir. Birinci yöntemde önerilen θ'ya göre türevlerin farklarla yer değiştirmesidir. İkinci yöntemde ise sürekli $f_{\alpha,\beta}(.)$'nin kesikli dağılım ile yer değiştirmesi önerilmektedir. Brorsen ve Yang (1990), Eş. 2.27'de tanımlanan standartlaştırılmış simetrik Kararlı değişkeni (U) ele almışlar ve bu rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu aşağıdaki şekilde ifade etmişlerdir:

$$f_\alpha(u) = \frac{\alpha}{|1-\alpha|\pi} u^{1/(\alpha-1)} \int_0^{\pi/2} v(\theta) e^{-u^{\alpha/(\alpha-1)} v(\theta)} d\theta \quad , \quad \alpha \neq 1, \ u>0$$

$v(\theta) = (\sin\alpha\theta)^{\alpha/(1-\alpha)} \cos[(\alpha-1)\theta] \, (\cos\theta)^{1/(\alpha-1)}$ olarak tanımlanır.

Ayrıca, fonksiyon belli α ve u değerleri için

$$f_1(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}$$

$$f_\alpha(0) = \frac{1}{\pi}\Gamma((\alpha+1)/\alpha)$$

$$f_2(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-u^2/4}$$

olarak verilebilir.

En çok olabilirlik tahmin edicisini bulmak için olabilirlik fonksiyonunu bulmak gerekmektedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alındığında

$$\ln(L(\alpha\,|\,u)) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\alpha(u_i) = n\ln\alpha - n\ln(\alpha-1)\pi + \sum_{i=1}^{n} \ln(u_i)/(\alpha-1) + \sum_{i=1}^{n} \ln\int_0^{\pi/2} v(\theta)\, e^{-u_i^{\alpha/(\alpha-1)} v(\theta)}\, d\theta$$

olur. Olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden α, α parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisidir.

Brorsen ve Preckel (1993), standartlaştırılmış simetrik olmayan dağılımları ele alarak β parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisi bulmuşlardır.

X, rastlantı değişkeni α, β, δ ve γ = c^α parametreleriyle Kararlı dağılıma sahip olsun. Buna göre standartlaştırılmış Kararlı değişken

$$y = \frac{x-\delta}{c}$$

olur. Y rastlantı değişkeni $\alpha, \beta, \delta = 0$ ve $\gamma = c = 1$ parametreleriyle standartlaştırılmış Kararlı dağılıma sahip olur. Dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_{\alpha,\beta}(y) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_{w(\alpha,\beta)}^{\pi/2} e^{-y^{\alpha/(\alpha-1)} v(\phi)}\, d\phi\,, \quad \alpha \neq 1,\ y>0,\ -1 \leq \beta \leq 1 \tag{2.43}$$

Eş. 2.43 eşitliğinde,

$$v(\phi)=\left[\frac{\sin(\alpha\phi+\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha))}{\cos\phi}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{\cos\left[(\alpha-1)\phi+\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\right]}{\cos\phi}$$

$$w(\alpha,\beta) = -\frac{\pi}{2}\frac{\beta K(\alpha)}{\alpha}$$

ve

$$K(\alpha)=1-\left|1-\alpha\right|$$

olarak tanımlanır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f_{\alpha,\beta}(y)=\frac{\alpha}{\left|\alpha-1\right|\pi}y^{\alpha/(\alpha-1)}\int_{w(\alpha,\beta)}^{\pi/2}e^{-y^{\alpha/(\alpha-1)}v(\phi)}\,v(\phi)\,d\phi \tag{2.44}$$

olarak bulunur. Eş. 2.44 tekrar yazılmak istenirse,

$$f_{\alpha,\beta}(y)=\frac{\alpha+\beta K(\alpha)}{2\left|\alpha-1\right|}y^{1/(\alpha-1)}\int_{0}^{1}e^{-y^{\alpha/(\alpha-1)}v^{*}(\theta)}\,v^{*}(\theta)\,d\theta\,,$$

$$v^{*}(\theta)=\left[\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\theta+\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\theta\right)\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\cos\left[(\alpha-1)\theta\left(\frac{\pi}{2}-w(\alpha,\beta)\right)-w(\alpha,\beta)\right]\cos\left[w(\alpha,\beta)+\theta\left(\frac{\pi}{2}-w(\alpha,\beta)\right)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

bulunur. Yukarıdaki bilgiler ışığında, X rastlantı değişkeninin olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha,\beta,\delta,c;x) = \ln f(\frac{x-\delta}{c},\alpha,\beta) - \ln (c) \tag{2.45}$$

şekilde ifade edilebilir.

Eş. 2.45'deki fonksiyonun δ ve c'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial L}{\partial \delta}=-\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)\frac{1}{c}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c}=-\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)\frac{y}{c}-\frac{1}{c}$$

elde edilir.

$$\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)=\frac{1}{(\alpha-1)y}-\frac{y\alpha}{|y|(\alpha-1)}y^{1/(\alpha-1)}\frac{\int_0^1\left[v^*(\theta)\right]^2 e^{-y^{\alpha/(\alpha-1)}v^*(\theta)}\,d\theta}{\int_0^1 v^*(\theta)e^{-y^{\alpha/(\alpha-1)}v^*(\theta)}\,d\theta}$$

2.6.5. Hill tahmin yöntemi

Bir dağılımın kuyruk davranışı ile ilgili bilgi edinmek amacıyla genel bir yaklaşım tanıtılmıştır. Bu yöntemde, dağılım fonksiyonunun biçimi ile ilgili herhangi bir genel varsayım yapmaya gerek yoktur fakat kuyruktaki davranışın biçimi ile ilgili varsayıma ihtiyaç duyulmaktadır. Tanıtılan yöntem; kuyruk yapısını belirten parametreler için koşullu olabilirlik fonksiyonu hesaplanmasına dayanan bir yöntemdir (Hill, 1975).

Hill tahmin edicisi Pareto dağılımı için $X \geq d$ ($d>0$) koşulunda, koşullu en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Bu tahmin edici, Kararlı dağılımlarda, ekstrem değerli dağılımlarda uygulanabilir (Aban ve Meerschaert, 2001).

Dağılımın sol kuyruk gösterimi için, Z_1, Z_2, ..., Z_k, sürekli artan F dağılımından rastgele örneklem ve $Z_{(1)} \geq Z_{(2)} \geq \ldots \geq Z_{(k)}$ ise sıralı istatistikler olsun. $F(0) = 0$'dır. Buna göre,

$$Z_{(i)}=F^{-1}\left[\exp-\left(\frac{e_1}{k}+\frac{e_2}{k-1}+\ldots+\frac{e_i}{k-i+1}\right)\right],\qquad i=1,2,\ldots,k \qquad (2.46)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte e_i'ler ortalaması 1 olan Üstel dağılıma sahip bağımsız rastlantı değişkenleridir.

$$e_j = (k - j + 1)\left[\ln F(Z_{(j-1)}) - \ln F(Z_{(j)})\right], \quad j=1,2,...,k \tag{2.47}$$

Eş. 2.47'de $F(Z_{(0)}) = 1$'dir.

$F(x)=w(x,\theta)$, $x \le d$ olsun. w belirtilmiş bir fonksiyon, d bilinen bir sayı ve θ bilinmeyen parametre vektörü olsun. e_j'nin tanımı ve F(x) birlikte düşünüldüğünde

$$e_j=(k-j+1)\ [\ln w(Z_{(j-1)},\theta) - \ln w(Z_{(j)},\theta)], \qquad j=k-r+1,k-r+2,\ldots,k$$

olarak ifade edilir. Buna göre koşullu olabilirlik fonksiyonu

$$L_1(\theta) \propto |J| \exp\left[-\sum_{i=1}^{r} i(\ln w(z_{(k-i)};\theta) - \ln w(z_{(k-i+1)};\theta))\right] * f(-k\ln w(z_{(k-r)};\theta))$$

olup burada J (Jacobian), $\prod_{i=1}^{r+1} (d\ln w(z_{(k-i+1)};\theta))/dz_{(k-i+1)}$ ile orantılıdır. f ise $k\left(\frac{e_1}{k} + ... + \frac{e_{k-r}}{r+1}\right)$ ifadesinin olasılık yoğunluk fonksiyonudur ($Z_{(k-r)} \le d$).

Diğer koşullu olabilirlik fonksiyonu ise

$$L_2(\theta) \propto L_1(\theta)\left[(1 - w(d;\theta))/(1 - w(z_{(k-r)};\theta))\right]^{k-r-1} \propto |J|\left[(1 - w(d;\theta))\right]^{k-r-1} \prod_{i=1}^{r+1} w(z_{(k-i+1)};\theta)$$

olarak verilir ($Z_{(k-r)} > d$, böylece r+1 tane sıralı istatistik $\le d$ olur).

$$w(x;\theta) = Cx^{\alpha}, \ x \le d$$

olarak verilsin. Burada, θ = (α, C), (α>0, C>0) parametre vektörüdür. $Z_{(k-r)} \le d$ koşulunda, α parametresinin koşullu en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\alpha} = \left[\ln\left(z_{(k-r)}\right) - r^{-1}\sum_{i=0}^{r-1} \ln(z_{(k-i)})\right]^{-1}$$

olarak ifade edilir.

Dağılımın sağ kuyruk gösterimi için, Y_1, Y_2, ..., Y_k, $G(Y) = 1\text{-}C\ y^{-\alpha}$ dağılım fonksiyonuna sahip dağılımdan rastgele örneklem olsun ($y \geq D$, D bilinen bir değerdir). Eğer, $Z_i = Y_i^{-1}$ olursa, $x \leq d = D^{-1}$ için,

$$f(Z_i \leq x) = f(Y_i \geq x^{-1}) = C\ x^{\alpha}$$

yazılabilir. α ve C parametrelerinin koşullu en çok olabilirlik tahmin edicileri ise,

$$\hat{\alpha} = (r+1)\left[\sum_{i=1}^{r} \ln(y_{(i)}) - r\ln\left(y_{(r+1)}\right)\right]$$

$$\hat{C} = \frac{(r+1)}{k}\left[y_{(r+1)}\right]^{\hat{\alpha}}$$

Ayrıca, $Y_{(r+1)} \geq D$ koşulunda

$$e_i = (k-i+1)\left[\ln w(Y_{(i-1)};\theta) - \ln w(Y_{(i)};\theta)\right],\ i=2,...,r+1$$

$$e_1 = -k\ln w(Y_{(1)};\theta)$$

olarak verilir. $Y_{(i)} = y_{(i)}$ (i=1,…,r+1) olarak alınırsa, koşullu olabilirlik fonksiyonu,

$$L_1(\theta) \propto |J| \exp\left[k\ln w(y_{(1)};\theta) - \sum_{i=1}^{r}(k-i)\ln\left(w(y_{(i)};\theta)/w(y_{(i+1)};\theta)\right)\right]$$

şeklinde verilebilir. J (Jacobian), $\prod_{i=1}^{r+1}(d\ln w(y_{(i)};\theta))/dy_{(i)}$ ile orantılıdır. Bu koşullu olabilirlik fonksiyonları kullanılarak koşullu en çok olabilirlik tahmin edicileri bulunabilir (Hill, 1975).

Aban ve Meerschaert (2001) çalışmalarında, Hill tahmin edicisinde değişiklik önermişlerdir. Hill tahmin edicisi, ölçek bağımsızlığının yanısıra konum bağımsızlığı için değişikliğe uğramış ve daha gürbüz (robust) tahmin edici olmuştur.

Hill tahmin edicisi, ölçek bağımsızlığına sahiptir ancak konum bağımsızlığına sahip değildir. Bir başka deyişle, herhangi bir toplam faktörü tahmini bozabilmektedir. Bu nedenle, Aban ve Meerschaert (2001); Hill'in yöntemini, kaymış Pareto dağılımında kullanmış, koşullu en çok olabilirlik tahmin edicisi hesaplamışlardır. Sonuç olarak bulunan tahmin edici, konumdan bağımsızdır.

Hill tahmin edicisi, güç fonksiyonu ile dağılımsal olarak kuyruğa yaklaşmayı denemektedir. $f(X>x) \approx C\ x^{-\alpha}$ olduğu $x>0$ yeterince büyükse söylenebilir. Buradaki amaç $r+1$ $(0 \leq r<n)$ en büyük sıralı istatistiğe dayalı olarak $C>0$ ve $\alpha>0$ parametrelerinin koşullu en çok olabilirlik tahmin edicilerini bulmaktadır.

Kaydırılmış Pareto dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu,

$F(x) = 1-C\ (x-s)^{-\alpha}$, $x>s+C^{1/\alpha}$

olarak verilir (s keyfi bir değerdir). $X_{1)} \geq X_{(2)} \geq ... \geq X_{(n)}$ ise sıralı istatistiklerdir. Buna göre, koşullu en çok olabilirlik tahmin edicileri aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\alpha} = \left[r^{-1} \left[\sum_{i=1}^{r} \ln\left(X_{(i)} - \hat{s}\right) - \ln(X_{(r+1)} - \hat{s}) \right] \right]^{-1}$$

$$\hat{C} = (r/n)(X_{(r+1)} - \hat{s})^{-\alpha}$$

olarak ifade edilir.

Yukarıdaki eşitliklerde $\hat{s}$, $\hat{\alpha}(X_{(r+1)} - \hat{s})^{-1} = (\hat{\alpha}+1)r^{-1} \sum_{i=1}^{r} \left(X_{(i)} - \hat{s}\right)^{-1}$ eşitliğini sağlamalıdır $\left(\hat{s} < X_{(r+1)}\right)$.

2.6.6. Pozitif ve negatif dereceli sinc fonksiyon tahmin yöntemi

Konum parametresi 0 olan SαS rastlantı değişkeninin kesirli düşük dereceden momenti aşağıdaki gibi verilebilir:

$$E\left(|X|^p\right) = C_1(p, \alpha)\, \gamma^{p/\alpha}$$

Yukarıdaki eşitlikte, $-1<p<1$, ve $C_1(p,\alpha) = \dfrac{2^{p+1}\,\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{-p}{\alpha}\right)}{\alpha\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{-p}{2}\right)}$ olur.

X'in p.dereceden momentinin gösterimi ise,

$$E\left(|X|^p\right)E\left(|X|^{-p}\right) = \frac{2\tan(p\pi/2)}{\alpha\sin(p\pi/\alpha)}$$

$0<p<\min(\alpha,1)$ ve $\operatorname{sinc}\left(\dfrac{p\pi}{\alpha}\right) = \dfrac{2\tan(p\pi/2)}{p\pi E\left(|X|^p\right)E\left(|X|^{-p}\right)}$.

olarak verilir. Burada $\operatorname{sinc}(p\pi/\alpha) = \sin(p\pi/\alpha)/(p\pi/\alpha)$ dir. Yukarıdaki sinc fonksiyonundan α ve γ için tahmin değerleri bulunabilir:

$$\gamma = \left(\frac{E\left(|X|^p\right)}{C_1(p,\alpha)}\right)^{\alpha/p}$$ (Georgiou ve Tsakalides, 1999).

2.6.7. SαS sürecinin logaritması yöntemi

$Y = \log|X|$ olarak tanımlansın. Y'nin beklenen değeri aşağıdaki gibidir:

$$E(Y) = C_e\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)+\frac{1}{\alpha}\ln(\gamma)$$

Burada C_e=0.57721566...(Euler sabitidir). Y'nin varyansı ise

$$V(Y) = E\left\{[Y-E(Y)]^2\right\} = 6\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{2}\right)$$

olarak verilir Yukarıdaki eşitlikten öncelikle α'nın tahmin değeri bulunur, daha sonra beklenen değer eşitliği kullanılarak γ'nın tahmin değerine ulaşılır (Georgiou ve Tsakalides, 1999).

2.7. Bayesci Tahmin Yöntemleri

2.7.1. Temel kavramlar

Bayes yöntemi, gözlenen büyüklükler ile hakkında bilgi sahibi olunmak istenen büyüklüklerin olasılık modelleri aracılığıyla bir veri kümesi üzerinden çıkarsamalar yapma sürecidir.

Bayesci veri analizi üç adımda incelenebilir:

1) Tam olasılık modeli kurmak (Bir araştırmada gözlenen ve gözlenmeyen büyüklükler için birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu)
2) Gözlenen veri üzerinde koşul oluşturmak (Gözlenen veri bilindiğinde gözlenmeyen büyüklüklerin koşullu olasılık dağılımı)
3) Modelin uygunluğunu ve sonsal dağılımın sonuçlarını incelemek

Herhangi bir θ parametresi hakkında Bayesci istatistiksel çıkarımlar, koşulu olasılıklar aracılığıyla yapılır. Gözlenen y değeri üzerinden koşullu olasılık, $f(\theta|y)$ olarak tanımlanır (Gelman vd.,1997).

θ ve y'nin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu; örneklem dağılımı $f(y|\theta)$ ve önsel dağılım $f(\theta)$ çarpımı olarak ifade edilir:

$$f(\theta,y) = f(\theta)f(y|\theta)$$

Sonsal yoğunluk ise

$$f(\theta|y) = \frac{f(\theta,y)}{f(y)} = \frac{f(\theta)f(y\mid\theta)}{f(y)} \qquad (2.48)$$

olarak verilir. Burada, $f(y) = \int f(\theta)f(y\mid\theta)d\theta$ olur. Paydadaki f(y) terimi, θ'dan bağımsızdır ve sabit bir y değeri ile birlikte sabit gibi düşünülebilinir, dolayısıyla Eş. 2.48 aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(\theta|y) \propto f(\theta)f(y|\theta) \qquad (2.49)$$

$f(y|\theta)$, θ'nın bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde "olabilirlik fonksiyonu" adını alır. Bu durumda Eş. 2.49,

Sonsal yoğunluk $\propto$ olabilirlik fonksiyonu * önsel yoğunluk

şeklinde ifade edilir (Press,1989).

Parametre vektörü $\theta = \{\phi,\lambda\}$ olarak ifade edilsin ve ϕ, ilgilenilen alt parametre olsun.

$$f(\theta|y) = \frac{f(\theta)\,f(y\,|\,\theta)}{f(y)}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte,

$$f(y) = \int f(\theta)f(y|\theta)\,d\theta = \int f(\phi,\lambda)f(y|\phi,\lambda)\,d\phi\,d\lambda$$

olarak verilir. ϕ'nın sonsal yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f(\phi|y) = \int f(\theta|y)\,d\lambda = \int f(\phi,\lambda|y)\,d\lambda$$

olarak belirtilir (Bernardo ve Smith,1994).

π'nin değişmez dağılım (invariant distribution) olarak tanımlanması için,

$$\pi(A) = \int \pi(dx)\,P(x,A)$$

eşitliğinin yazılabilmesi gerekir. Değişmez π dağılımına sahip, zamana göre homojen olan Markov zincirinin, yazılan bu eşitliği bütün A kümeleri için sağlayan geçiş olasılığı P ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$P(X_n,A) = P\{X_{n+1}\in A \mid X_0,\ldots,X_n\}$$

X_0'ın dağılımı zincirin başlangıç dağılımı olur. X_0 verildiğinde X_n'nin koşullu dağılımı

$$P(X_n,A \mid X_0) = P^n\{X_0,A\}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer bütün x değerleri için

$$\lim_{n \to \infty} P^n(x, A) = \pi(A)$$

yazılırsa değişmez π dağılımı, zincir için denge dağılım (equilibrium distribution) olarak adlandırılır.

Değişmez π dağılımına sahip Markov zincirinin indirgenemez (irreducible) olması, zincirin nereden başlarsa başlasın bütün kümelere gidebilmesi anlamındadır.

Markov zincirlerini belirli değişmez dağılım ile oluşturmak için çeşitli yaklaşımlar vardır. Bunlardan bir tanesi Gibbs örneklemidir. X, π dağılımına sahip olsun. f, Y=f(X) olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$Q(y,A)=P\{X \in A \mid Y=y\}$$

ise, değişmez π dağılımına sahip geçiş olasılığı

$$P(x,A) = Q(f(x),A)$$

olarak verilir. Burada P indirgenemez olmayabilir. Bu durumda, $f_1, \ldots, f_m$ gibi çeşitli fonksiyonlar seçip, bunlara karşılık gelen $P_1, \ldots, P_m$ matrislerini oluşturarak ve bu matrisleri kullanarak değişmez π dağılımına sahip başka bir $P = P_1 *_{\ldots} * P_m$ matrisine ulaşmak mümkündür. Buradaki strateji Gibbs örneklemini oluşturmaktadır.

Metropolis Algoritması ise; Metropolis ve diğerleri (1953) tarafından bağımsız moleküller ile etkileşim içinde olan maddelerin özelliklerini hesaplamak amacıyla tanıtılmıştır. Hastings (1970) bu yöntemi genelleştirmiştir (Tierney, 1994).

2.7.2. Metropolis-Hastings algoritması

$P_{ij} = \{p_{ij}\}$, $\{0,1,...,S\}$ durum uzayına sahip Markov zincirinin geçiş matrisi olsun. Buna göre, eğer X(t), sürecin t zamanında bulunduğu durumu gösterirse,

$$P\{X(t+1)=j \mid X(t)=i\} = p_{ij}$$

yazılabilir.

$\pi=(\pi_0, \pi_1,..., \pi_S)$ bütün i değerleri için $\pi_i>0$ koşulu ile bir olasılık dağılımı ve f(.) durum uzayı üzerinde belirtilmiş bir fonksiyon olsun.

$$I=E_\pi(f) = \sum_{i=0}^{S} f(i)\pi_i \tag{2.50}$$

Eş. 2.50'de ifade edilen I değeri tahmin edilmek istendiğinde, öncelikle öyle bir P seçilmelidir ki π bu geçiş matrisinin tek bir durağan dağılımı (stationary distribution) olsun. Bir başka deyişle, $\pi = \pi P$ olsun. Markov zincirini t=1,...,N kez benzeterek aşağıdaki tahmin değerini kullanmak mümkündür,

$$\hat{I} = \sum_{t=1}^{N} f\{X(t)\}/N$$

Sonlu Markov zincirlerinde,

$$\lim_{N\to\infty} E[(\hat{I} - I)^2] = 0$$

olduğu ve $\hat{I}$'nın asimtotik olarak normal dağıldığı bilinmektedir.

Herhangi bir π dağılımı için, π durağan dağılımına sahip P Markov zinciri oluşturulur. P matrisi tersinirlik koşulunu (reversibility condition) her i ve j için sağlayacak şekilde belirlenir:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

Bu özellik (tersinirlik koşulu), bütün j değerleri için $\sum \pi_i p_{ij} = \pi_j$ eşitliğini ve P matrisinin durağan dağılımının π olmasını garanti etmektedir. P matrisinin indirgenemezliği ise test edilmelidir. Bu test için i durumundan j durumuna sınırlı sayıda geçiş olasılığının olup olmamasına bütün i ve j çiftleri için bakılır ve aşağıdaki varsayımlar ele alınır:

$$p_{ij} = q_{ij}\,\alpha_{ij} \quad (i\neq j)$$

$$p_{ii} = 1 - \sum_{j\neq i} p_{ij}$$

Yukarıdaki ifadede $Q_{ij}=\{q_{ij}\}$ Markov zincirinin 0,1,…,S durumlarına geçiş matrisidir. α_{ij} aşağıdaki gibi verilebilir,

$$\alpha_{ij} = \frac{s_{ij}}{1+\dfrac{\pi_i\, q_{ij}}{\pi_j\, q_{ji}}}$$

s_{ij}, $0\leq\alpha_{ij}\leq 1$ olacak şekilde seçilen i ve j'nin simetrik bir fonksiyonudur. Bu sürecin her t zamanı için benzetilmesi aşağıdaki adımlar yoluyla mümkündür:

1) X(t) = i varsayılsın ve Q matrisinin i.satırının dağılımı verildiğinde herhangi bir j durumu seçilsin.

2) α_{ij} olasılığı ile X(t+1) = j , 1-α_{ij} olasılığı ile X(t+1) = i olarak alınsın. s_{ij} için değerler,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1+\dfrac{\pi_i\, q_{ij}}{\pi_j\, q_{ji}}, & \dfrac{\pi_j\, q_{ji}}{\pi_i\, q_{ij}} \geq 1 \\ 1+\dfrac{\pi_j\, q_{ji}}{\pi_i\, q_{ij}}, & \dfrac{\pi_j\, q_{ji}}{\pi_i\, q_{ij}} \leq 1 \end{cases}$$

$q_{ij} = q_{ji}$ olduğunda,

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \dfrac{\pi_j}{\pi_i} \geq 1 \\ \dfrac{\pi_j}{\pi_i}, & \dfrac{\pi_j}{\pi_i} < 1 \end{cases}$$

elde edilir (Hastings, 1970).

α olasılığının nasıl oluştuğunu gösterebilmek için Q matrisi ($Q(x,dy) = q(x,y)\mu(dy)$) ele alınsın ve π ise μ'ye göre yoğunluk fonksiyonu olsun. Metropolis Hastings algoritmasında, aday türetme yoğunluk fonksiyonu (candidate-generating density), q(x,y), tanımlanır. q(x,y), geçiş olasılık fonksiyonu gibi düşünülür ve süreç x noktasındayken y değeri q(x,y) kullanılarak türetilebilir. Bu algoritmada Eş. 2.51'de verilen Tersinirlik koşulu kullanılmaktadır.

$$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x) \qquad (2.51)$$

Eş. 2.51'in sol tarafı, x'in $\pi(.)$ fonksiyonundan türetildiğinde x'den y'ye geçiş olasılığını; sağ tarafı ise y'nin $\pi(.)$ fonksiyonundan türetildiğinde y'den x'e geçiş olasılığını ifade etmektedir. Bazı durumlarda Eş. 2.51'deki koşul geçersiz olabilir ve

$$\pi(x)p(x,y)>\pi(y)p(y,x) \tag{2.52}$$

olarak ifade edilebilir. Bu durumda $\alpha(x,y)$ (kabul-red olasılığı) 1 değerinden küçük alınabilir. X'den Y'ye geçişler

$$p(x,y) = q(x,y)\alpha(x,y)$$

ile gösterilsin. Eş. 2.52'nin geçerli olması halinde y'den x'e geçiş olması için $\alpha(y,x)$ olasılığını oldukça büyük bir değer almak gerekir. Tersinirlik koşulu yazılırsa ve $\alpha(y,x)=1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\pi(x)q(x,y)\alpha(x,y) &= \pi(y)q(y,x)\alpha(y,x)\\ &= \pi(y)q(y,x)\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu eşitlikten

$$\alpha(x,y) = \frac{\pi(y)q(y,x)}{\pi(x)q(x,y)}$$

elde edilir. Bu genelleştirildiğinde,

$$\alpha(x,y) = \begin{cases}\min\left[\dfrac{\pi(y)q(y,x)}{\pi(x)q(x,y)},1\right] & , \pi(x)q(x,y) > 0\\ 1 & , \pi(x)q(x,y) = 0\end{cases}$$ (Chib ve Greenberg, 1995).

Eğer zincir $X_n = x$ noktasında ise, X'in gelecek konumu için Q dağılımından aday bir Y değeri türetilir. $\alpha(x,y)$ olasılığı ile bu aday kabul edilir ve zincir $X_{n+1} = y$ değerini alır, ya da reddedilir ve bir sonraki adımda eski değerini alır ($X_{n+1} = x$).

Eğer p(x,y) ve r(x)

$$p(x,y) = \begin{cases} q(x,y)\alpha(x,y), & x \neq y \\ 0 \quad\quad\quad\quad\quad , & x = y \end{cases}$$

$r(x) = 1-\int p(x,y)\mu(dy)$

olarak tanımlanırsa, Metropolis matrisi

$P(x,dy)=p(x,y)\mu(dy)+r(x)\delta_x(dy)$

şeklinde yazılır. Burada δ_x, x noktasındaki olasılığı, r(x) ise algoritmanın x noktasında kalma olasılığını ifade etmektedir. P'nin tersinirlik koşulunu sağlamasından dolayı,

$\pi(x)p(x,y)= \pi(y)p(y,x)$

π, P için değişmez bir dağılım olur. Herhangi ölçülebilir A kümesi için:

$$\int P(x,A)\pi(dx) = \int \left[\int_A p(x,y)\mu(dy) \right] \pi(x)\mu(dx) + \int r(x)\delta_x(A)\pi(x)\mu(dx)$$

$$= \int_A \int [p(x,y)\pi(x)\mu(dx)]\mu(dy) + \int_A r(x)\pi(x)\mu(dx)$$

$$= \int_A \int [p(y,x)\pi(y)\mu(dx)]\mu(dy) + \int_A r(x)\pi(x)\mu(dx)$$

$$= \int_A \int (1-r(y))\pi(y)\mu(dy) + \int_A r(x)\pi(x)\mu(dx)$$

$$= \int_A \pi(y)\mu(dy)$$

Orijinal Metropolis algoritması q(x,y) olasılığının q(y,x) olasılığına eşit olduğunu varsaymaktadır. Bu durumda kabul olasılığı

$$\alpha(x,y) = \min\left(\frac{\pi(y)}{\pi(x)},1\right)$$

değerine eşit olur.

q(x,y) fonksiyonu için seçenekler aşağıdaki gibidir:

1) Rastgele Yürüyüş Zincirleri:

Eğer Y, f dağılımından bağımsız olacak şekilde Z dağılımından türetilirse ve Y=x+Z olarak ifade edilirse, q(x,y) = f(y-x) olur. Böylece, Metropolis zincirinin geçiş matrisi Q rastgele yürüyüş göstermektedir. Türetim için uygun olabilecek dağılım olarak Normal dağılım, çok değişkenli t dağılımı alınabilir.

2) Bağımsız Zincirler:

Aday Y, f gibi sabit bir yoğunluktan seçilebilir. Bu durumda, q(x,y)=f(y) olur ve kabul olasılığı aşağıdaki gibi verilir:

$$\alpha(x,y) = \min\left(\frac{w(y)}{w(x)},1\right)$$

yukarıdaki eşitlikte w(x) = π(x)/f(x) ve w ağırlık fonksiyonudur.

3) Reddetme Örneklemesi Zincirleri:

Bağımsız zincirlerde belirtilen f yoğunluğundan örnekleme yapılırken reddetme örneklemesi kullanılabilinir. Reddetme örneklemesi, standart tek değişkenli dağılımlardan türetim yapma amacıyla kullanılan çeşitli algoritmalara temel oluşturmaktadır.

π dağılımından örneklem seçmek için, $\pi(x) \leq ch(x)$ olacak şekilde sabit bir c değeri ve h yoğunluğu kullanılır. Z'nin h yoğunluğundan, U'nun ise 0 ve ch(Z) parametrelerine sahip Tekdüze dağılımdan türetilmesi ile (Z,U) çiftleri elde edilir. Burada oluşturulacak çiftlerin $U \leq \pi(Z)$ koşulunu sağlaması gerekmektedir.

Bağımsız Metropolis zinciri için, $C=\{x:\pi(x)\leq ch(x)\}$ tanımlansın. Buna göre, Metropolis kabul olasılığı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1, & x\in C\\ \dfrac{c\,h(x)}{\pi(x)}, & x\notin C, y\in C\\ \min\left(\dfrac{\pi(y)h(x)}{\pi(x)h(y)},1\right), & x\notin C, y\notin C\end{cases}$$ (Tierney, 1994).

Metropolis-Hastings Algoritması aşağıdaki şekildedir:

a) $x^{(0)}$ başlangıç değeri alınır.

b) $j=1,\ldots,N$ için

b1) y, $q(x^{(j-1)},.)$ fonksiyonundan türetilir.

b2) $u \sim U(0,1)$ dağılımından türetilir.

b3) $u \leq \alpha(x^{(j-1)},y)$ ise $x^{(j)}=y$

$u > \alpha(x^{(j-1)},y)$ ise $x^{(j)}= x^{(j-1)}$ olur.

c) $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)},\ldots, x^{(N)}$ değerleri elde edilir.

(Chib ve Greenberg, 1995).

2.7.3. Gibbs örneklemesi

Gibbs örneklemesi Metropolis Hastings algoritmasının özel halidir. Gibbs örneklemesi, çok büyük sayıda değişken içeren karmaşık stokastik modellerde uygulanmaktadır. Birleşik dağılımın tam olarak belirlenemediği durumlarda kullanılmaktadır (Gelfand ve Smith, 1990).

Gibbs örneklemesi, marjinal dağılımdan yoğunluk fonksiyonunu kullanmak zorunda kalmadan dolaylı olarak rastlantı değişkenini türeten bir tekniktir. Bu tekniğe bir örnek verilmek istenirse; $X,Y_1,Y_2,\ldots,Y_p$'nin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ele alınsın ve X rastlantı değişkeninin beklenen değeri veya varyansı bulunmak istensin. Burada yapılacak olan X'in olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak ve sonra beklenen değerini veya varyansını hesaplamaktır. Ancak,

$$f(x) = \int \ldots \int f(x,y_1,y_2,\ldots,y_p)\, dy_1 dy_2 \ldots dy_p$$

fonksiyonunun elde edilmesi için alınacak entegrallerin karmaşık olduğu durumlar vardır. Bu durumlarda, Gibbs örneklemesi f(x)'in bulunması için alternatif bir yöntem sunmaktadır. X'in dağılımından dolaysız olarak m tane rastgele örneklem türetmek yerine Gibbs örneklemesi kullanarak dolaylı m tane rastgele örneklem türetilebilir.

Gibbs örneklemesi iki değişken olduğu durumlarda ele alınsın. X'in dağılımından rastgele örneklem türetmek için f(x) yerine f(x|y) koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılır. Bunun için rastlantı değişkeninin "Gibbs dizisi" yaratılır:

$$Y_0, X_0, Y_1, X_1, \ldots, Y_k, X_k \qquad (2.53)$$

Y_0 başlangıç değeridir ve bilinen bir değerdir. Eş. 2.53'deki diğer gözlemler iteratif olarak birbirlerinden türetilmektedir. X'in j. türetilen değeri,

$$X_j \sim f(x|Y_j=y_j)$$

koşullu dağılımından türetilir. Y'nin j+1. türetilen değeri,

$$Y_{j+1} \sim f(y|X_j=x_j)$$

koşullu dağılımından türetilir.

Gelfand ve Smith (1990), f(x)'den yaklaşık olarak örneklem alınması için m tane bağımsız "Gibbs dizisi" üretmenin ve her dizinin en son değerinin (X_k) k çok büyük alındığında f(x)'den alınmış rastgele örneklem olabileceğini söylemişlerdir.

Ayrıca, X'in yoğunluk fonksiyonunun bulunmasında her Gibbs dizisinin en sonuncu değerinin aritmetik ortalaması da kullanılabilir:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(x|\,y_i) \text{ (Casella ve George, 1992).}$$

Smith ve Roberts (1993), Gibbs örneklemesinde p tane değişken olması halinde türetme işlemini aşağıdaki gibi vermişlerdir:

Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, başlangıç değeri $x_1^0, \ldots, x_p^0$ olsun. Buna göre türetme işlemi,

$x_1^1 \sim f(x_1|x_2^0,\ldots,x_p^0)$

$x_2^1 \sim f(x_2|x_1^1,x_3^0,\ldots,x_p^0)$

$x_3^1 \sim f(x_3|x_1^1,x_2^1,\ldots,x_p^0)$

.

.

.

$x_p^1 \sim f(x_p|x_1^1,x_2^1,\ldots,x_{p-1}^1)$

şeklinde verilir.

2.7.4. Kararlı dağılımda Bayesci yöntem

Kararlı dağılımlar için Bayesci tahmin yöntemi detaylı olarak incelenmiş, literatürde bu konuyla ilgili olan çeşitli çalışmalar tanıtılmıştır.

Karakteristik fonksiyonun ters Fourier dönüşümü hesaplanırken noktaların eşit uzaklıkta alınması zorunludur. Lombardi (2004), ekstrem kuyruklardaki gözlemlerin kapsanması için ters Fourier dönüşümü hesabında değişikliğe gitmiştir. Gözlemlerin çoğunu kapsayacak şekilde bir aralık belirlenmesini, bu aralık üstünde ters Fourier dönüşümünün uygulanmasını ve belirtilen aralık dışında kalan noktalar için ise seri açılımlarının kullanılmasını önermiştir.

Qiou ve Ravishanker (1998), zaman serileri analizinde, hataları Kararlı dağılım gösteren ARMA süreçlerini ele almışlar ve parametre tahminlerini elde etmek amacıyla Bayesci tahmin yöntemini incelemişlerdir. Sonsal dağılım bulunması için Metropolis-Hastings algoritmasını kullanmışlardır.

Kararlı dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonları kapalı olarak belirtilemediği için olabilirlik fonksiyonları da kullanışlı ve analitik bir biçimde değildir. Bu sebeple, Buckle (1995), Kararlı dağılımların parametre tahminlerinde, MCMC (Markov Chain Monte Carlo) metodunu, özellikle Gibbs örneklemesini kullanarak Bayesci bir yöntem önermiştir.

Bayesci yöntemde önsel parametre bilgisi kullanılarak sonsal yoğunluğa ulaşılmaktadır. Sonsal olasılık aşağıdaki şekilde verilebilir:

$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\ \pi(\theta)$

X'in dağılımının kapalı biçimi bilinmiyor fakat $f(x,y|\theta)$ mevcut ise sonsal yoğunluğu bulmak için entegral alınır. Bu durumda sonsal olasılık

$\pi(\theta|x) \propto \int f(x,y|\theta)\ \pi(\theta)\ dy$

olur. X Kararlı dağılıma sahip ise bu yöntem uygulanır. Bu yöntemi açıklamaya geçmeden önce aşağıdaki teoremin verilmesi gerekmektedir:

Teorem:

α ve β parametreleri verildiğinde Z ve Y'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(z,y \mid \alpha,\beta) = \frac{\alpha}{|\alpha-1|}\exp\left\{-\left|\frac{z}{t_{\alpha,\beta}(y)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\right\}\left|\frac{z}{t_{\alpha,\beta}(y)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\frac{1}{|z|} \qquad (2.54)$$

olarak tanımlansın.

Eş. 2.54'deki fonksiyonda,

$f:(-\infty,0)*(-1/2,l_{\alpha,\beta})\ U\ (0,\infty)*(l_{\alpha,\beta},1/2) \rightarrow (0,\infty)$

olarak verilir. Ayrıca,

$$t_{\alpha,\beta}(y) = \left(\frac{\sin\left[\pi\alpha y + \eta_{\alpha,\beta}\right]}{\cos\pi y}\right)\left(\frac{\cos\pi y}{\cos\left[\pi(\alpha-1)y + \eta_{\alpha,\beta}\right]}\right)^{(\alpha-1)/\alpha},$$

$\alpha \in (0,1)U(1,2]$, $\beta \in [-1,1]$, $z \in (-\infty,\infty)$, $y \in (-1/2,1/2)$, $\eta_{\alpha,\beta}=\beta\min(\alpha,2-\alpha)\pi/2$, $l_{\alpha,\beta}=-\eta_{\alpha,\beta}/\pi\alpha$

olur. Buna göre Z ; α, β, $\delta=0$ ve $\gamma=c^{\alpha}=1$ parametreleriyle Kararlı dağılıma sahiptir.

Bu teoreme ek olarak:

$$f(y \mid \alpha,\beta,z) = \frac{f(y,z \mid \alpha,\beta)}{f(z \mid \alpha,\beta)}$$

$$f(y \mid \alpha,\beta,z) \propto f(y,z \mid \alpha,\beta)$$

$$f(y \mid \alpha,\beta,z) \propto f(z \mid \alpha,\beta,y) f(y \mid \alpha,\beta)$$

$$f(y \mid \alpha,\beta,z) \propto \exp\left\{-\left|\frac{z}{t_{\alpha,\beta}(y)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\right\}\left|\frac{z}{t_{\alpha,\beta}(y)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)} \tag{2.55}$$

tanımlanır. Eş. 2.55'deki fonksiyonda değer bölgesi,

$z<0$ ise $(-1/2, l_{\alpha,\beta})$

ve

$z>0$ ise $(l_{\alpha,\beta}, 1/2)$

olur.

Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda, n tane gözlem içeren vektör $\underset{\sim}{x}$ ve önsel yoğunluk $\pi(\alpha,\beta,\delta,c)$ verilsin. Kararlı dağılımın sonsal yoğunluğu aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\pi(\alpha,\beta,\delta,c \mid \underset{\sim}{x}) \propto L(\underset{\sim}{x} \mid \alpha,\beta,\delta,c)\,\pi(\alpha,\beta,\delta,c)$$

$$\pi(\alpha,\beta,\delta,c \mid \underset{\sim}{x}) \propto \int L(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y} \mid \alpha,\beta,\delta,c)\,\pi(\alpha,\beta,\delta,c)\,dy$$

$$\pi(\alpha,\beta,\delta,c \mid \underset{\sim}{x}) \propto \int \left(\frac{\alpha}{|\alpha-1|c}\right)^{n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{z_i}{t_{\alpha,\beta}(y_i)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\right\}\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{z_i}{t_{\alpha,\beta}(y_i)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\frac{1}{|z_i|}\,\pi(\alpha,\beta,\delta,c)\,dy \tag{2.56}$$

yazılabilir. Eş. 2.56 fonksiyonunda $z_i = (x_i-\delta)/c \neq 0$, $i=1,\ldots,n$ ve

$\alpha \in (0,1) U (1,2]$, $\beta \in [-1,1]$, $\delta \in (-\infty,\infty)$, $c \in (0,\infty)$ aralığında değer alır.

Bütün bu gösterimler için MCMC benzetiminin kullanılması gerekmektedir. Buckle (1995) çalışmasında Gibbs örneklemesi metodu kullanarak parametrelerin önsel yoğunluğunu bulmuştur.

$\pi(\alpha,\beta,\delta,c \mid \underset{\sim}{x})$ bulunması için, öncelikle her x_i gözlemi için y_i türetmek gereklidir. y_i, $f(y_i \mid \alpha,\beta,\delta,c,x_i)$'den türetilir. y_i türetildikten sonra Gibbs örneklemi aracılığıyla $\pi(\alpha \mid \beta,\delta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})$, $\pi(\beta \mid \alpha,\delta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})$, $\pi(\delta \mid \alpha,\beta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})$ ve $\pi(c \mid \alpha,\beta,\delta,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})$'den rastlantı değişkeni türetilir.

y_i türetilmesi için,

$$f(y \mid \alpha,\beta,\delta,c,\underset{\sim}{x}) \propto \exp\left\{-\left|\frac{z}{t_{\alpha,\beta}(y)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}+1\right\}\left|\frac{z}{t_{\alpha,\beta}(y)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}, \tag{2.57}$$

kullanılır. Eş. 2.57'de z = (x-δ)/c olarak ifade edilir.

α'nın sonsal yoğunluğu,

$$\pi(\alpha \mid \beta,\delta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) \propto \left(\frac{\alpha}{|\alpha-1|}\right)^{n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{z_i}{t_{\alpha,\beta}(y_i)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\right\}\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{z_i}{t_{\alpha,\beta}(y_i)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\pi(\alpha) \tag{2.58}$$

olur. Eş. 2.58'de $z_i = (x_i-\delta)/c$ şeklindedir. α'nın sonsal yoğunluğunun daha açık ve kolay olması için Eş. 2.58'deki fonksiyona $v = t_{\alpha,\beta}(y)$ dönüşümü uygulandığında,

$$\pi(\alpha \mid \beta,\delta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v}) \propto \left(\frac{\alpha}{|\alpha-1|}\right)^{n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{z_i}{v_i}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\right\}\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{z_i}{v_i}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\left|\frac{dt_{\alpha,\beta}}{dy}\right|^{-1}_{t_{\alpha,\beta}(y)=v_i}\pi(\alpha) \tag{2.59}$$

elde edilir. Olabilirliğin şekli hakkında bilgi olmadığı için Metropolis örnekleme algoritması kullanılır. Örneklemenin i.iterasyonu üç aşamadan oluşur:

a) g olasılık yoğunluk fonksiyonundan α_* türetilir.
b) u ~ U(0,1) dağılımından türetilir.
c) Eğer $u<\pi(\alpha_* \mid \beta,\delta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v})*g(\alpha_i \mid \alpha_*)/\pi(\alpha_i \mid \beta,\delta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v})*g(\alpha_* \mid \alpha_i)$ ise $\alpha_{i+1}=\alpha_*$; değilse $\alpha_{i+1}=\alpha_i$ olur.

β'nın sonsal yoğunluğu,

$$\pi(\beta \mid \alpha,\delta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) \propto \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{z_i}{t_{\alpha,\beta}(y_i)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\right\}\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{t_{\alpha,\beta}(y_i)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\pi(\beta) \tag{2.60}$$

olarak verilir. Eş. 2.60'da $z_i = (x_i - \delta)/c$ olarak ifade edilir. β'nın sonsal yoğunluğunun daha açık ve kolay olması için Eş. 2.60 fonksiyonuna $v = t_{\alpha,\beta}(y)$ dönüşümü uygulandığında,

$$\pi(\beta \mid \alpha,\delta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v}) \propto \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{dt_{\alpha,\beta}}{dy} \right|_{t_{\alpha,\beta}(y)=v_i}^{-1} \pi(\beta) \tag{2.61}$$

elde edilir. Olabilirliğin şekli hakkında bilgi olmadığı için Metropolis örnekleme algoritması kullanılır. Bu örnekleme üç aşamadan oluşur:

a) h olasılık yoğunluk fonksiyonundan β_* türetilir.

b) $u \sim U(0,1)$ dağılımından türetilir.

c) Eğer $u<\pi(\beta_* \mid \alpha,\delta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v})*h(\beta_i \mid \beta_*)/\pi(\beta_i \mid \alpha,\delta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v})*h(\beta_* \mid \beta_i)$ ise $\beta_{i+1}=\beta_*$; değilse $\beta_{i+1}=\beta_i$ olur.

δ'nın sonsal yoğunluğu,

$$\pi(\delta \mid \alpha,\beta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) \propto \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{z_i}{t_{\alpha,\beta}(y_i)} \right|^{\alpha/(\alpha-1)}\right\} \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{z_i}{t_{\alpha,\beta}(y_i)} \right|^{\alpha/(\alpha-1)} \frac{1}{|x_i-\delta|}\pi(\delta)\,, \tag{2.62}$$

olarak verilir. Eş. 2.62'de $z_i = (x_i - \delta)/c$ olur. δ'nın sonsal yoğunluğunun daha açık ve kolay olması için Eş. 2.62'deki fonksiyona $\phi_i = \dfrac{t_{\alpha,\beta}(y_i)}{x_i-\delta}$ dönüşümü uygulandığında,

$$\pi(\delta \mid \alpha,\beta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\phi}) \propto \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{dt_{\alpha,\beta}}{dy} \right|_{t_{\alpha,\beta}(y)=\phi_i(x_i-\delta)}^{-1} \pi(\delta) \tag{2.63}$$

elde edilir.

Olabilirliğin şekli hakkında bilgi olmadığı için Metropolis örnekleme algoritması kullanılır. Örneklemenin i.iterasyonu üç aşamadan oluşur:

a) f olasılık yoğunluk fonksiyonundan δ_* türetilir.

b) $u \sim U(0,1)$ dağılımından türetilir.

c) Eğer $u<\pi(\delta_*|\alpha,\beta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\phi})*f(\delta_i|\delta_*)/<\pi(\delta_i|\alpha,\beta,c,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\phi})*f(\delta_*|\delta_i)$ ise $\delta_{i+1}=\delta_*$; değilse $\delta_{i+1}=\delta_i$ olur.

c'nin sonsal yoğunluğu için $v = t_{\alpha,\beta}(y)$ dönüşümü uygulandıktan sonra,

$$\pi(c \mid \alpha,\beta,\delta,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v}) \propto \left(\frac{1}{c^{\alpha(\alpha-1)}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{c^{\alpha(\alpha-1)}}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i-\delta}{v_i}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\right\}\pi(c), \tag{2.64}$$

elde edilir. Eğer $\pi(c) \propto \theta^{-(a+1)}\exp(-b/\theta)$ ise,

$$\pi(c \mid \alpha,\beta,\delta,\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v}) \propto \left(\frac{1}{\theta}\right)^{a+n+1} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left(b+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i-\delta}{v_i}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\right)\right\} \tag{2.65}$$

yazılabilir. Eş. 2.65'de $\theta = c^{\alpha/(\alpha-1)}$ olur. Ters Gama (TG) dağılımı $c^{\alpha/(\alpha-1)}$'nin eşleniğidir. Buna göre, eğer $\theta \sim TG(a,b)$ (ve $\theta^{-1} \sim G(a,b)$) ise TG dağılımından örneklem alınabilir. Eğer, önsel dağılım için Ters Gama dağılımı varsayılmazsa, c'nin sonsal yoğunluğu aşağıdaki şekilde türetilir:

Örneklemenin i.iterasyonunun üç aşaması:

a) $TG(n, \Sigma\left|(x_i-\delta)/v_i\right|^{\alpha/(\alpha-1)})$ dağılımından c_* türetilir.

b) $u \sim U(0,1)$ dağılımından türetilir.

c) Eğer $u<\pi(c_*)/\pi(c_i)$ ise $c_{i+1} = c_*$; değilse $c_{i+1} = c_i$ olur.

Tsionas (2000), Buckle (1995)'ın uyguladığı Bayes yöntemine farklı bir açıdan bakarak daha etkin bir çözüm önermiştir. Buckle (1995)'ın yönteminde parametreler sıralı olarak güncellenirken yardımcı değişken kullanılması yüksek korelasyona neden olmaktadır. Bu korelasyonu azaltmak amacıyla Tsionas (2000), parametre vektörünün bütün bileşenlerini güncelleyen Metropolis örneklemesini ele almış ve hataları Kararlı dağılım gösteren regresyon modellerinde uygulamıştır. Detaylı olarak açıklamak gerekirse,

$y = (y_1 \ldots y_n)'$ ve $x_i = (x_{i1} \ldots x_{in})$, i=1,…,n vektörler ise regresyon modeli;

$y_i = g(x_i;\gamma)+\sigma u_i$, i=1,…,n olarak gösterilir. Burada g bir fonksiyon, γ parametre vektörü, σ ölçek parametresi ve u_i standart Kararlı dağılıma sahip rastlantı değişkenidir.

$\theta \equiv [\gamma, \sigma, \alpha, \beta]'$ olsun. Olabilirlik fonksiyonu ve θ'nın sonsal dağılımı,

$$L(\theta;x,y) = \sigma^{-n}\prod_{i=1}^{n} f\left(\left\{\frac{y_i - g(x_i \mid \gamma)}{\sigma}\right\} \mid \alpha,\beta\right) \quad \text{ve} \quad f(\theta|x,y) \propto L(\theta;x,y)\pi(\theta) \tag{2.66}$$

$\hat{\theta}$, θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi ise

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta) \to N(0, V(\theta)) \text{ ve } V(\theta) = -E\left[\partial^2 L(\theta;x,y)/\partial\theta\partial\theta'\right]^{-1} \tag{2.67}$$

olur.

$h(\theta \mid \theta', c^2 V(\hat{\theta}))$ ortalaması θ', ölçek matrisi $c^2 V(\hat{\theta})$ olan sabit bir yoğunluk olsun ($c>0$). Metropolis-Hastings zinciri, herhangi bir h ve c için dağılımda $f(\theta|x,y)/\int f(\theta|x,y)d\theta$ değerine yakınsayan $\theta^{(i)}$, $i=1,\ldots,m$ dizisini oluşturur. Zincirin $\theta^{(i)}$ durumu için bir sonraki adım ($\theta^{(i+1)}$) aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$\tilde{\theta}$, $h(\theta \mid \theta^{(i)}, c^2 V(\hat{\theta}))$

fonksiyonundan türetilmiş olsun.

$\pi(\theta, \tilde{\theta}) = \min[1, f(\tilde{\theta}|x,y)/f(\theta^{(i)}|x,y)]$ olasılığı ile $\theta^{(i+1)} = \tilde{\theta}$ veya $1-\pi(\theta, \tilde{\theta})$ olasılığı ile

$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)}$ olur.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. PARAMETRELERİN TAHMİNİ İÇİN YENİ BİR BAYESCİ YÖNTEM

Bir önceki bölümde Kararlı dağılımın parametre tahminleri için Bayes yöntemleri incelenmiştir. Buckle (1995), Kararlı dağılımın kapalı biçimi olmadığından dolayı yardımcı bir y değişkenini kullanmış ve Gibbs örneklemesiyle parametre tahminlerini elde etmeye çalışmıştır. Tsionas (2000) ise bu yöntemin bazı dezavantajlarına dikkat çekmiştir. Bu dezavantajlar:

1) Gözlem sayısı n olsun. Dizisel türetimlerde, parametre uzayı etrafındaki hareketinin çok yüksek korelasyon içereceği n tane yardımcı değişken olmak zorundadır. Gibbs örneklemesinde yardımcı değişken kullanılması otokorelasyon oluşturmakta ve etkinliği azaltmaktadır.
2) Gibbs örneklemesi içinde Metropolis adımları dizisel olarak yer almaktadır. Bu da büyük örneklemlerde yöntemin uygulanmasını zorlaştırmaktadır.

Belirtilen bu dezavantajlardan dolayı, Tsionas (2000) Metropolis zincirine dayanan bir yöntem kullanmıştır (Bkz. Bölüm 2.7.4). Ayrıca, yardımcı değişken kullanmak yerine Bölüm 2.5.2'de verilen Fourier dönüşümü ile olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunma yoluna gitmiştir. Metropolis zinciri, parametre vektörünün bütün bileşenlerini aynı anda güncellemekte, bundan dolayı korelasyon azalmaktadır.

Mittnik ve diğerleri (1999), Fourier dönüşümü yöntemi ile Nolan (1997)'ın önerdiği entegral yaklaşımını incelemiş ve bu iki yöntemden elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyon değerlerini kıyaslamışlardır. Her iki yöntemin de benzer sonuçlara ulaştığı ve aradaki farkın oldukça az olduğu bulunmuştur. Entegral yaklaşımının kullanımında avantaj olabilecek nokta, belirli x değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyon değerini hesaplamanın Fourier dönüşümüne göre mümkün olduğudur. Fourier dönüşümünde ise, doğru değeri elde edebilmek için olasılık yoğunluk fonksiyon değerleri kümesinin hesaplamasına esas olarak ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu tez çalışmasında Tsionas (2000)'ın Bayesci yöntemi ile Bölüm 2.5.1'deki Nolan (1997)'ın olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için önerdiği yöntem birlikte ele alınarak etkin bir Bayesci yöntem önerme yoluna gidilmiştir.

3.1. Önerilen Bayesci Yöntem

Bu bölümde, önerilen yönteme geçmeden önce, en çok olabilirlik tahmin edicisi ve dağılımı ile ilgili gerekli bilgiler verilecek, güven aralıkları üzerinde durulacaktır.

Parametre vektörü ile parametre uzayı sırasıyla

$$\vec{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) = (\alpha,\beta,c,\delta)$$

ve

$$\Theta = (0,2]*[-1,1]*(0,\infty)*(-\infty,\infty)$$

olarak verilsin. X_1, X_2, ..., X_n rastgele örneklem ise olabilirlik fonksiyonunun logaritması

$$l(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \log f(X_i,\vec{\theta})$$

olarak yazılır.

DuMouchel (1973), $\vec{\theta}_0$ değerinin parametre uzayı içinde olduğunda, en çok olabilirlik tahmin edicisinin asimtotik olarak $\vec{\theta}_0$ ortalama ve $n^{-1}B$ kovaryans matrisine sahip Normal dağılım gösterdiğini belirtmiştir. Burada $B_{4*4}=(b_{ij})$, Bilgi Matrisi I'nın tersidir (i,j=1,…,4). I matrisinin indisleri ise

$$I_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \frac{1}{f} dx$$

olarak verilebilir.

Nolan (1997)'ın Kararlı dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu için önerdiği yöntemin hesaplanmasında kullanılan STABLE programı aracılığıyla birikimli dağılım fonksiyonları ve parametre tahminleri bulunmakta, bunların yanı sıra yukarıda belirtilen I matrisi de sayısal olarak elde edilmektedir.

Genel teori, büyük örneklemlerde her parametre için güven aralıklarının

$$\hat{\theta}_i \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma_{\hat{\theta}_i}}{\sqrt{n}} \tag{3.1}$$

olarak verilebileceğini söylemektedir ($\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$ ve $\hat{\theta}_4$ sırasıyla θ_1, θ_2, θ_3 ve θ_4 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileridir). Burada, $\sigma_{\hat{\theta}_1}$, ..., $\sigma_{\hat{\theta}_4}$, B matrisinin köşegen elemanlarının kareköküdür. Korelasyon katsayıları ρ_{ij} ise

$$\frac{b_{ij}}{\sqrt{b_{ii}b_{jj}}}$$

eşitliğinden bulunabilir. Nolan (2001), belirli aralıklardaki α ve β değerleri için korelasyon değerlerini tablolaştırmıştır. $\beta<0$ iken korelasyon katsayıları, $\beta>0$ durumundaki değerler ele alınarak $(-1)^{i+j}\rho_{ij}$ şeklinde ifade edilir. $\beta=0$ olduğunda β'yı içeren bütün kolerasyon katsayıları 0'dır. $\beta=1$ olduğunda ve $\sigma_{\hat{\beta}}=0$ iken β'yı içeren bütün kolerasyon katsayıları tanımsızdır. Nolan (2001), tahmin edicilerin standart hatalarını incelediğinde ise; α parametresi 2 değerine yaklaştıkça $\hat{\alpha}$'nın standart hatasının 0'a yaklaştığını, $\hat{\beta}$'nın standart hatasının ise sonsuza gittiğini belirtmiştir. Ancak bu pratikte çok büyük bir önem teşkil etmemektedir çünkü α, 2 değerine yaklaştıkça β'nın anlamı yitirilmektedir.

Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda, standart Kararlı dağılım gösteren, $\theta=[\alpha,\beta]'$ parametresine ve Eş. 2.7'de verilen karakteristik fonksiyonuna sahip Y rastlantı değişkeninden n birimlik rastgele örneklem alınmıştır. Buna göre olabilirlik fonksiyonu ve θ'nın sonsal dağılımı sırasıyla

$$L(\theta;y)=\prod_{i=1}^{n}f(y_i \mid \alpha,\beta)$$

ve

$$f(\theta|y) \propto L(\theta;y)\pi(\theta)$$

olarak ifade edilebilir. $\hat{\theta}$, θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi ise

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}-\theta) \rightarrow N(0, V(\theta))$$

olur. Burada

$$V(\theta) = -E\left[\partial^2 L(\theta; y)/\partial\theta\partial\theta'\right]^{-1} = B = \begin{bmatrix} b_{\alpha\alpha} & b_{\alpha\beta} \\ b_{\alpha\beta} & b_{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

olarak verilen matriste b_{ij} öğeleri ile ifade edilen i ve j'nin kovaryansıdır (i,j=α,β). $h(\theta \mid \theta', d^2V(\hat{\theta}))$ olarak, ortalaması θ', ölçek matrisi $d^2V(\hat{\theta})$ olan çok değişkenli Normal dağılım ele alınmıştır. Hesaplamaların kolaylığı açısından d değeri 1 olarak belirlenmiştir. Metropolis-Hastings zinciri, dağılımda $f(\theta|y)/\int f(\theta|y)d\theta$ değerine yakınsayan $\theta^{(i)}$, i=1,2,3,…,N dizisini oluşturmuş, zincirin $\theta^{(i)}$ durumu için bir sonraki adım ($\theta^{(i+1)}$) aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

1) $\tilde{\theta}$, $h(\theta \mid \theta^{(i)}, d^2V(\hat{\theta}))$ fonksiyonundan türetilir ve ardından $\pi(\theta, \tilde{\theta}) = \min[1, f(\tilde{\theta}|y)/f(\theta^{(i)}|y)]$ bulunur.

2) u, Tekdüze (0,1) dağılımdan türetilir.

3) Eğer $u<\pi(\theta, \tilde{\theta})$ ise $\theta^{(i+1)} = \tilde{\theta}$ değilse $\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)}$ olur.

50 farklı dizi oluşturulmuş, her dizinin N. iterasyon değeri (N değeri çok büyük bir değerdir) elde edilmiş, Bayes tahmini olarak ise bulunan bu değerlerin aritmetik ortalaması alınmıştır.

3.2. Benzetim Çalışması

Önerilen Bayes yönteminin etkinliğini araştırmak için benzetim çalışması yapılmıştır.

Bayesci tahmine geçmeden önce, STABLE programı uygulanarak olasılık yoğunluk fonksiyonu ve en çok olabilirlik tahminleri elde edilmiştir.

Yazılan S-PLUS programı içerisinde olabilirlik fonksiyonunun hesabı için STABLE programı kullanılmıştır. Planlanan benzetim çalışması için S-PLUS kodları oluşturulmuş ve Ek'te verilmiştir.

$\theta=[1.3,0.5]'$ parametresine sahip standart Kararlı rastlantı değişkeninden 25, 50, 75, 100, 500 ve 1000 birimlik rastgele örneklem benzetim yöntemiyle elde edilmiştir. $\hat{\theta}$, θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi, her bir rastgele örneklem için Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Çizelge 3.1. Örneklem büyüklüklerine göre en çok olabilirlik tahmin değerleri ve güven aralıkları

	Örneklem Büyüklüğü					
	25	50	75	100	500	1000
$\hat{\alpha}$	1.36 (± 0.607)	1.12 (± 0.386)	1.22 (± 0.319)	1.21 (± 0.283)	1.31 (± 0.132)	1.28 (± 0.091)
$\hat{\beta}$	0.10 (± 0.982)	0.25 (± 0.517)	0.61 (± 0.376)	0.39 (± 0.383)	0.42 (± 0.190)	0.55 (± 0.121)

Program, $\hat{\theta}$ için yüzde 95 güven aralıklarını Eş. 3.1'de yazıldığı gibi $\left(\pm z_{0.025}\dfrac{\sigma_{\hat{\theta}_i}}{\sqrt{n}}\right)$ vermektedir (Bkz. Çizelge 3.1.).

Yukarıda verilen bu güven aralıkları kullanılarak $\sigma_{\hat{\theta}_i}$ değerleri bulunur. $\sigma_{\hat{\theta}_i}$ değerleri B matrisinin köşegen elemanlarının kareköküdür ($\sigma_{\hat{\theta}_i}=\sqrt{b_{\hat{\theta}_i\hat{\theta}_i}}$). B matrisinde yer alan $b_{\hat{\theta}_i\hat{\theta}_j}$ değerinin bulunması için ise Nolan (2001)'ın α ve β'nın değişik değerleri için oluşturduğu korelasyon katsayıları tablosu kullanılabilir. $\alpha=1.3$ ve $\beta=0.5$ için korelasyon katsayısı tablosundan $\rho_{\alpha\beta}=0.093$ ($\rho_{\alpha\beta}=\dfrac{b_{\alpha\beta}}{\sqrt{b_{\alpha\alpha}b_{\beta\beta}}}$) olarak alınmıştır. Bu değer kullanılarak $\hat{b}_{\alpha\beta}$ bulunur ve buradan $V(\hat{\theta})$ elde edilir. n=25, 50, 75, 100, 500 ve 1000 için $V(\hat{\theta})$ değerleri Çizelge 3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. Örneklem büyüklüklerine göre en çok olabilirlik tahmin edicilerin kovaryans matrisleri

	Örneklem Büyüklüğü		
	25	50	75
$V(\hat{\theta})=\hat{B}$	$\begin{bmatrix} 2.39 & 0.36 \\ 0.36 & 6.28 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.94 & 0.24 \\ 0.24 & 3.48 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.98 & 0.22 \\ 0.22 & 2.75 \end{bmatrix}$
	100	500	1000
$V(\hat{\theta})=\hat{B}$	$\begin{bmatrix} 2.09 & 0.26 \\ 0.26 & 3.81 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.26 & 0.30 \\ 0.30 & 4.71 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.16 & 0.27 \\ 0.27 & 3.80 \end{bmatrix}$

θ'nın önsel olasılık dağılımı olarak Tekdüze dağılım alınmıştır. Programda olabilirlik fonksiyonu hesaplanırken $\alpha \geq 0.4$ kısıtı olmasından dolayı önsel dağılım $\pi(\theta) \propto I_{(0.4,2)*(-1,1)}(\alpha,\beta)$ olarak verilmiştir ($I_{(0.4,2)*(-1,1)}(\alpha,\beta)$ gösterge fonksiyonudur).

Başlangıç değeri olarak en çok olabilirlik tahmin değerinin yanı sıra iki farklı başlangıç değeri daha düşünülmüştür. Bu iki farklı başlangıç değerlerinin gerçek α ve β (α=1.3, β=0.5) değerlerinden farklı olmasına dikkat edilmiştir: (α_0=1.5; β_0=0.2), (α_0=0.5; β_0=0.8) seçilmiştir. Örneklem büyüklüğü n=25, 50, 75, 100, 500 ve 1000 olacak şekilde 1000., 3000., 5000. ve 10000. iterasyondaki tahmin değerleri elde edilmiştir. Bu denemeler 50 kez tekrarlanmıştır. Böylece her biri için 50 gözlem elde edilmiştir. Sonuçlar Çizelge 3.3'de verilmiştir.

Sonuçlar incelendiğinde, örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin değerlerinin gerçek değerlere yaklaştığı görülmektedir. Ayrıca, 3 faktörün (örneklem büyüklüğü, iterasyon sayısı ve başlangıç değeri) tahmin değerlerine etkisini test etmek amacıyla Varyans Çözümlemesi tablosu Çizelge 3.4 ve 3.5'de oluşturulmuştur. Bu analiz sonucuna göre, yüzde 99 güvenilirlik düzeyinde iterasyon sayısı ve başlangıç değerinin parametre tahmin değerlerine herhangi bir etkisinin olmadığı, örneklem büyüklüğünün ise tahmin değerleri üzerinde etkili olduğu söylenebilir. Dolayısıyla bundan sonraki aşamada, iterasyon sayısı ve başlangıç değerleri arasında önemli bir farklılık olmadığından 1000. iterasyon sayısı ve başlangıç değerinden herhangi biri kullanılabilecektir.

Çizelge 3.3. Farklı örneklem büyüklükleri, başlangıç değerleri ve iterasyon sayılarına göre Bayes tahmin değerleri

		İterasyon Sayıları							
		1000		3000		5000		10000	
n	Başlangıç değerleri	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
25	α_0=0.5, β_0=0.8	1.4050	0.0495	1.3185	-0.0451	1.4001	0.0632	1.3827	0.0240
	α_0=1.5, β_0=0.2	1.4096	0.1439	1.3823	0.1326	1.4158	0.0950	1.3451	0.0993
	α_0=1.36, β_0=0.10	1.4192	0.0791	1.4503	0.0475	1.4537	0.0128	1.3451	-0.0073
50	α_0=0.5, β_0=0.8	1.1310	0.2157	1.1561	0.2405	1.1756	0.1948	1.1174	0.2164
	α_0=1.5, β_0=0.2	1.0962	0.2092	1.1244	0.2103	1.1802	0.2664	1.1324	0.1998
	α_0=1.12, β_0=0.25	1.1165	0.1914	1.1429	0.2262	1.1420	0.1690	1.1202	0.1400
75	α_0=0.5, β_0=0.8	1.2185	0.5833	1.1934	0.5508	1.2248	0.5557	1.2465	0.5612
	α_0=1.5, β_0=0.2	1.2247	0.5754	1.2174	0.5700	1.2476	0.5756	1.2654	0.5934
	α_0=1.22, β_0=0.61	1.2506	0.5864	1.2265	0.5449	1.2354	0.5583	1.2431	0.6173
100	α_0=0.5, β_0=0.8	1.2416	0.4064	1.2241	0.3730	1.2076	0.3845	1.2142	0.3856
	α_0=1.5, β_0=0.2	1.2093	0.3837	1.1895	0.3568	1.2164	0.3557	1.2357	0.4106
	α_0=1.21, β_0=0.39	1.2319	0.3544	1.2494	0.3598	1.2305	0.3828	1.2085	0.3368
500	α_0=0.5, β_0=0.8	1.3223	0.4303	1.3163	0.4334	1.3108	0.4289	1.3083	0.4136
	α_0=1.5, β_0=0.2	1.3205	0.4204	1.3124	0.4253	1.3094	0.4175	1.3211	0.4060
	α_0=1.31, β_0=0.42	1.3095	0.4272	1.3287	0.4216	1.3099	0.4346	1.3153	0.4231
1000	α_0=0.5, β_0=0.8	1.2807	0.5160	1.3031	0.5474	1.2832	0.5462	1.2862	0.5406
	α_0=1.5, β_0=0.2	1.2913	0.5390	1.2899	0.5551	1.2913	0.5305	1.2824	0.5516
	α_0=1.28, β_0=0.55	1.2851	0.5443	1.2813	0.5422	1.2828	0.5470	1.2827	0.5331

Çizelge 3.4. α için varyans çözümlemesi tablosu

Varyasyon Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik derecesi	Kareler Ortalaması	F	Önem düzeyi
Örneklem Büyüklüğü	0.4700	5	0.09393	185.704*	0.000
Başlangıç Değeri	0.0008	2	0.00043	0.848	0.433
İterasyon Sayısı	0.0022	3	0.00072	1.431	0.243
Hata	0.0309	61	0.00051		
Toplam	0.5040	71			

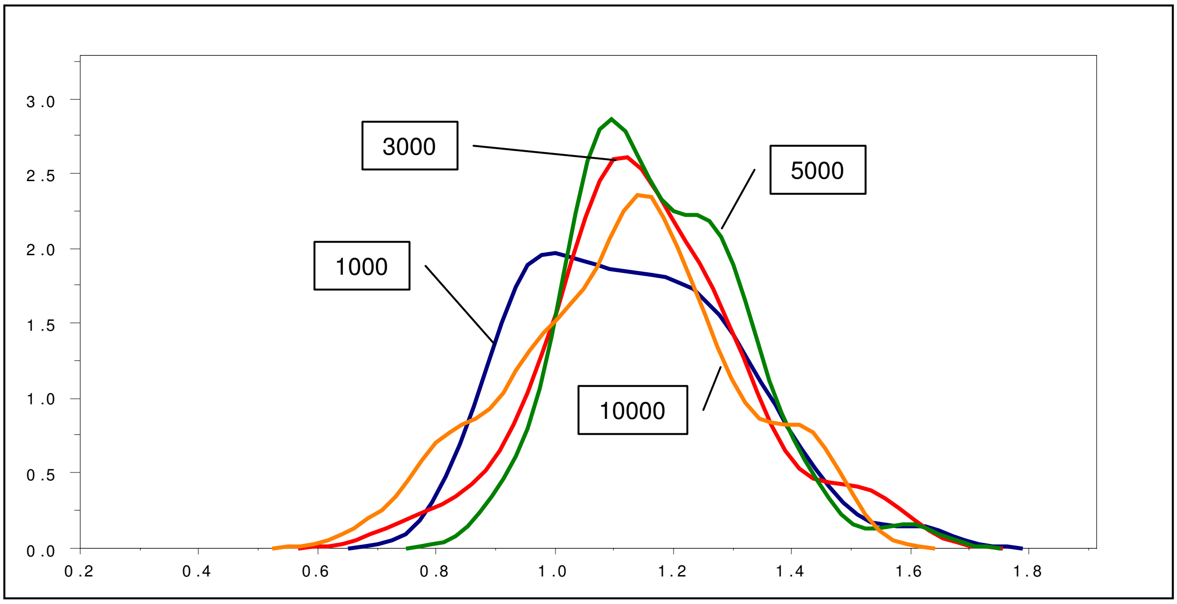
* % 5 düzeyinde anlamlıdır.

Çizelge 3.5. β için varyans çözümlemesi tablosu

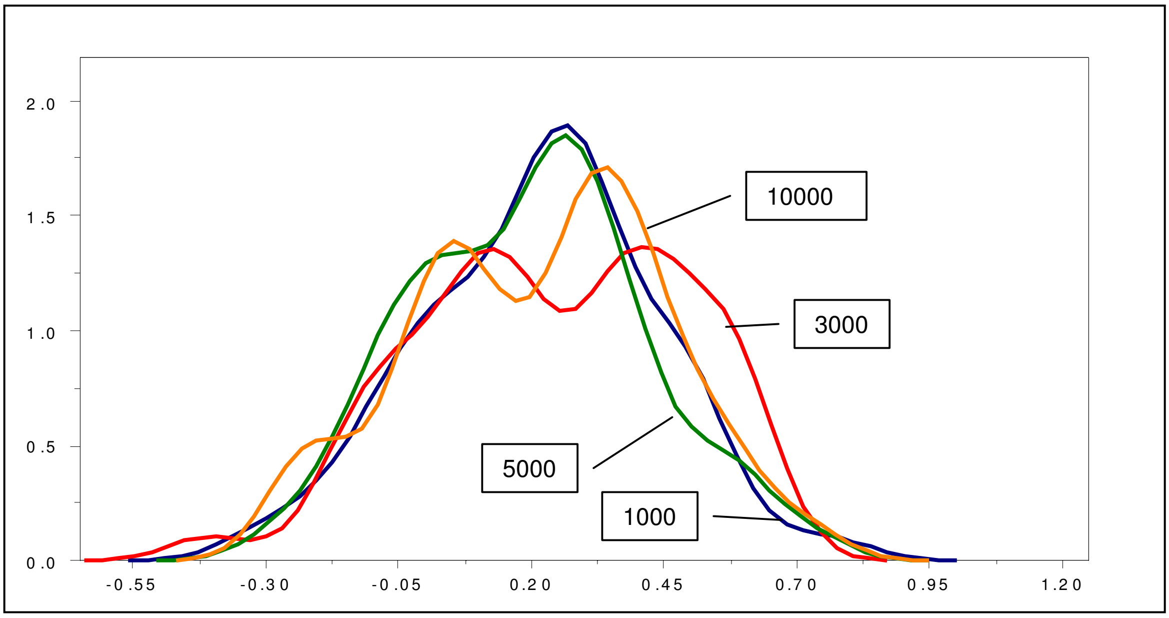
Varyasyon Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik derecesi	Kareler Ortalaması	F	Önem düzeyi
Örneklem Büyüklüğü	2.3640	5	0.47300	574.555*	0.000
Başlangıç Değeri	0.0068	2	0.00340	4.131*	0.021
İterasyon Sayısı	0.0014	3	0.00045	0.551	0.649
Hata	0.0521	61	0.00082		
Toplam	2.4230	71			

* % 5 düzeyinde anlamlıdır.

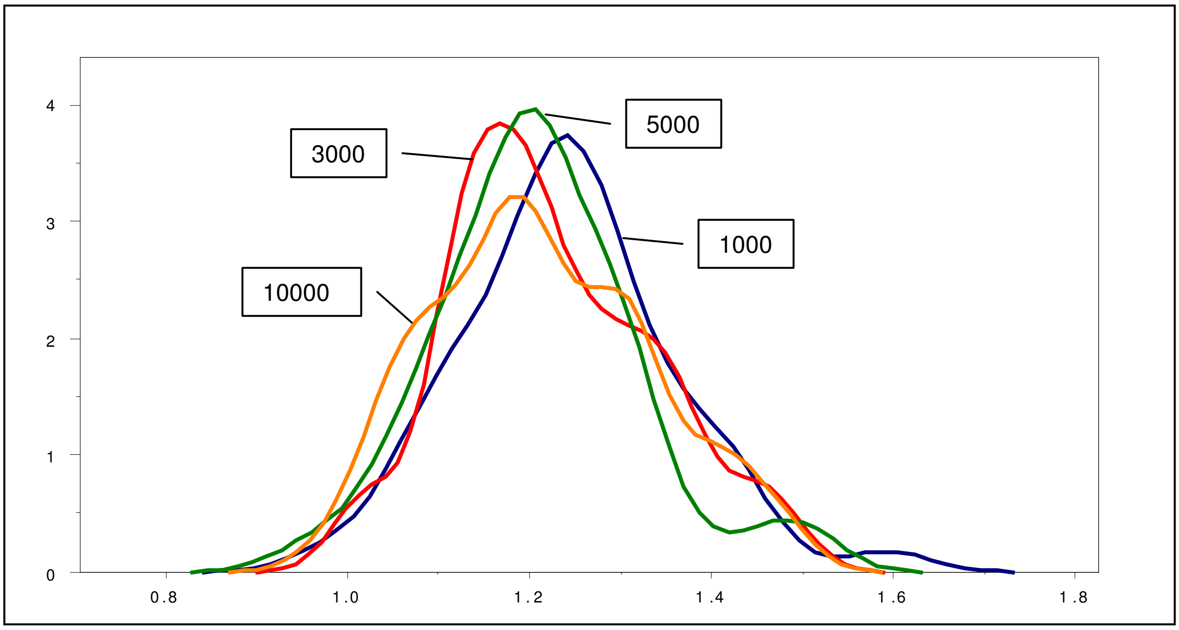
Şekil 3.1-3.4’de, Örneklem büyüklüğü 50 ve 100 değeri ile başlangıç değeri α_0=0.5, β_0=0.8 alınmış ve farklı iterasyon değerlerinde Bayes tahminlerinin nasıl hareket ettiği incelenmiştir.



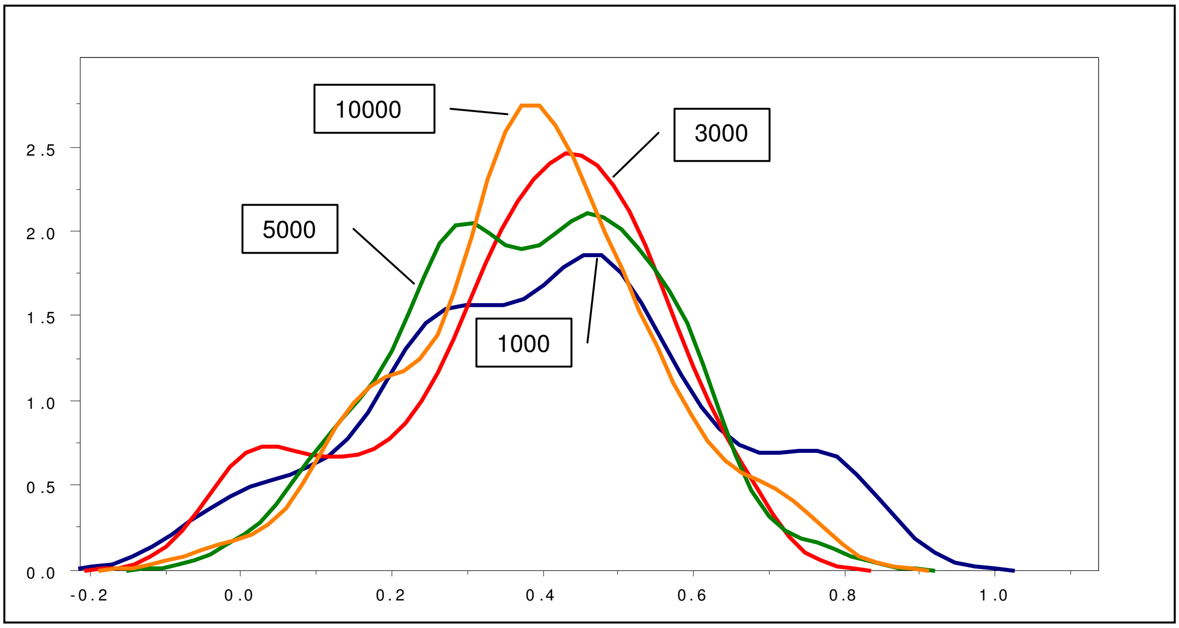
Şekil 3.1. Farklı iterasyon değerlerinde α için Bayes tahminleri (örneklem büyüklüğü 50)



Şekil 3.2. Farklı iterasyon değerlerinde β için Bayes tahminleri (örneklem büyüklüğü 50)

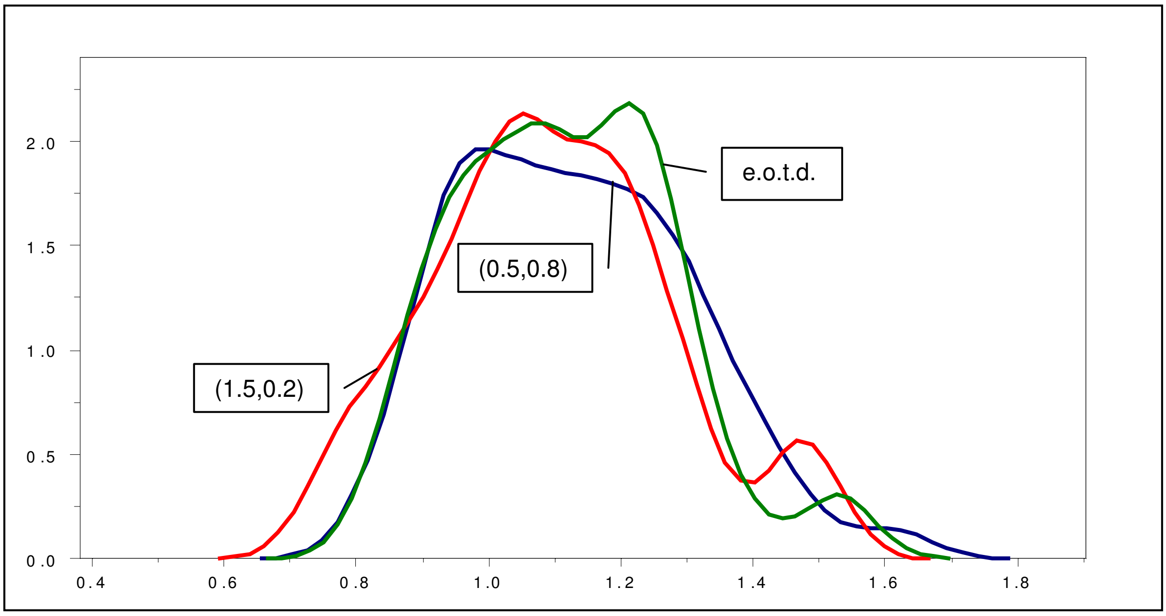


Şekil 3.3. Farklı iterasyon değerlerinde α için Bayes tahminleri (örneklem büyüklüğü 100)

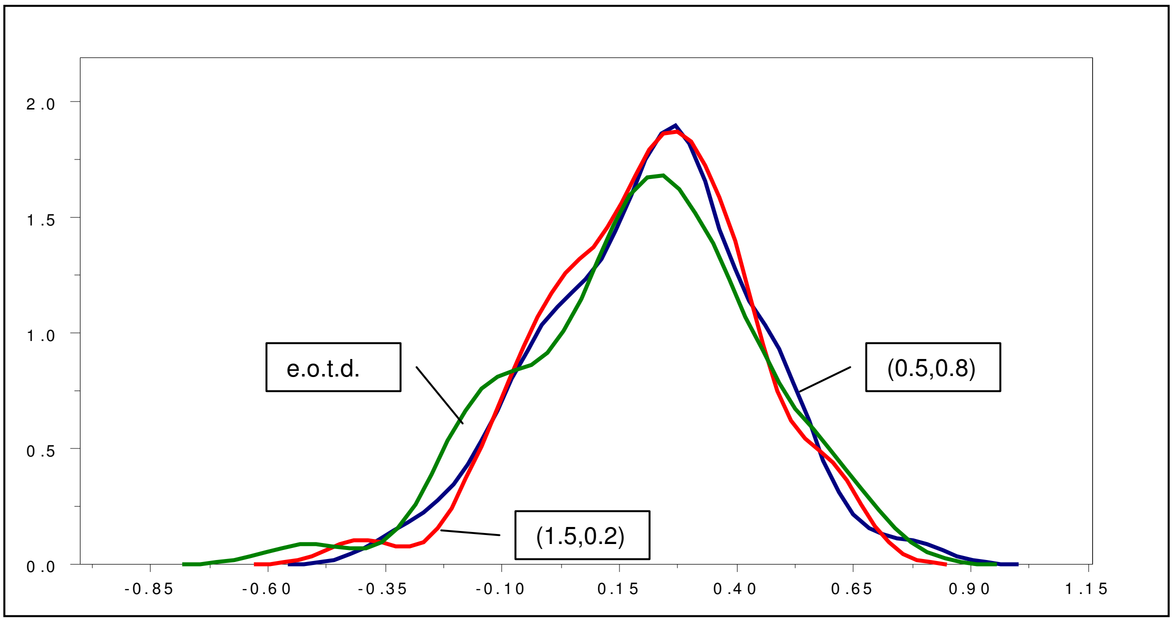


Şekil 3.4. Farklı iterasyon değerlerinde β için Bayes tahminleri (örneklem büyüklüğü 100)

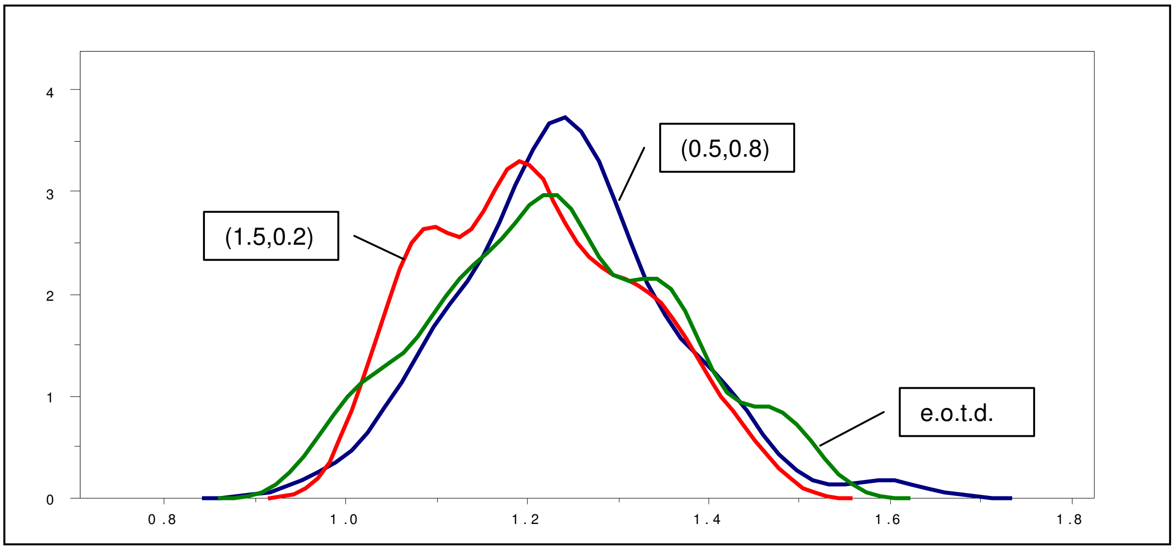
İterasyon sayılarının tahminlerde farklılık yaratmadığı şekilsel olarak da görülmüştür (Bkz. Şekil 3.1.-3.4.). Bu durumda, iterasyon sayısı 1000 olarak alınıp, başlangıç değerlerinin tahminde farklılık yaratıp yaratmadığı Şekil 3.5-3.8'de incelenmiştir.



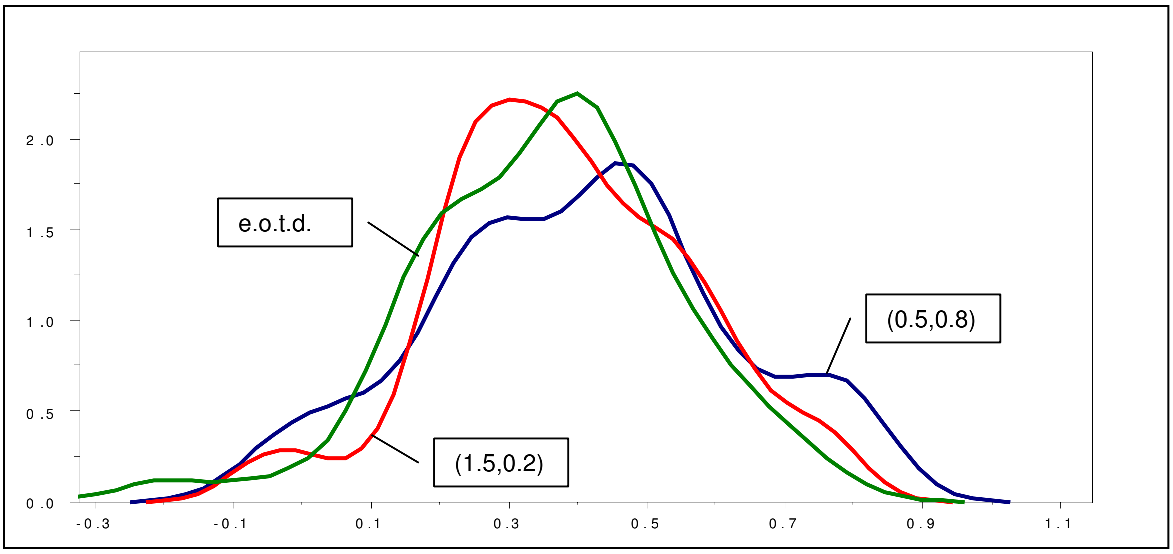
Şekil 3.5. Farklı başlangıç değerlerinde α için Bayes tahminleri (örneklem büyüklüğü 50)



Şekil 3.6. Farklı başlangıç değerlerinde β İçin Bayes tahminleri (örneklem büyüklüğü 50)



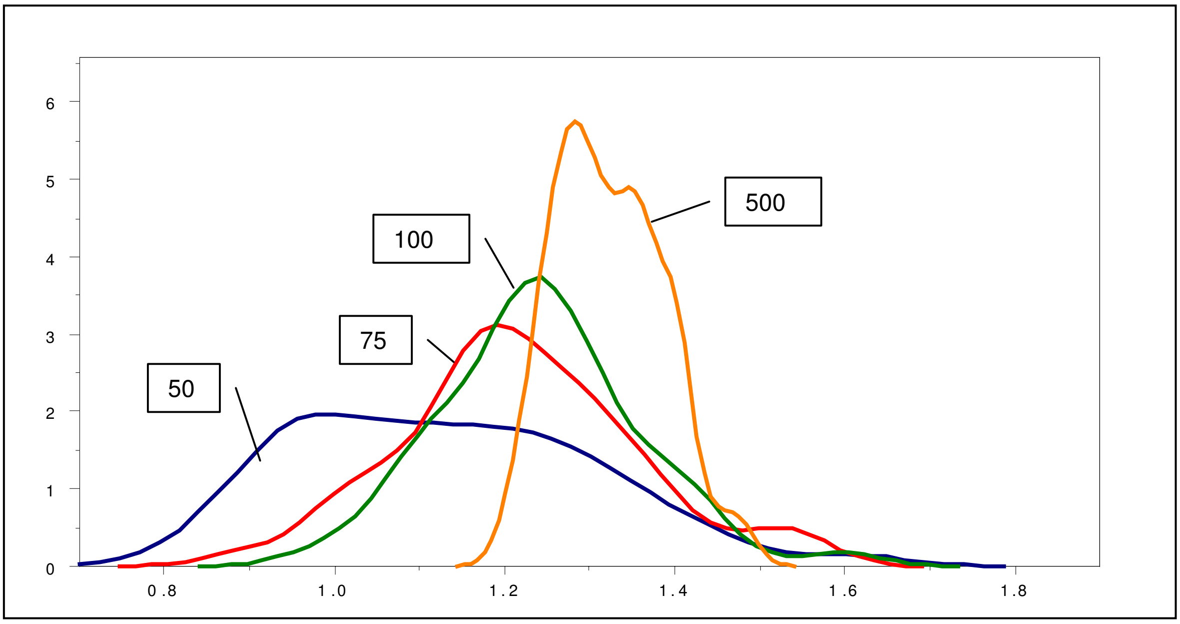
Şekil 3.7. Farklı başlangıç değerlerinde α için Bayes tahminleri (örneklem büyüklüğü 100)



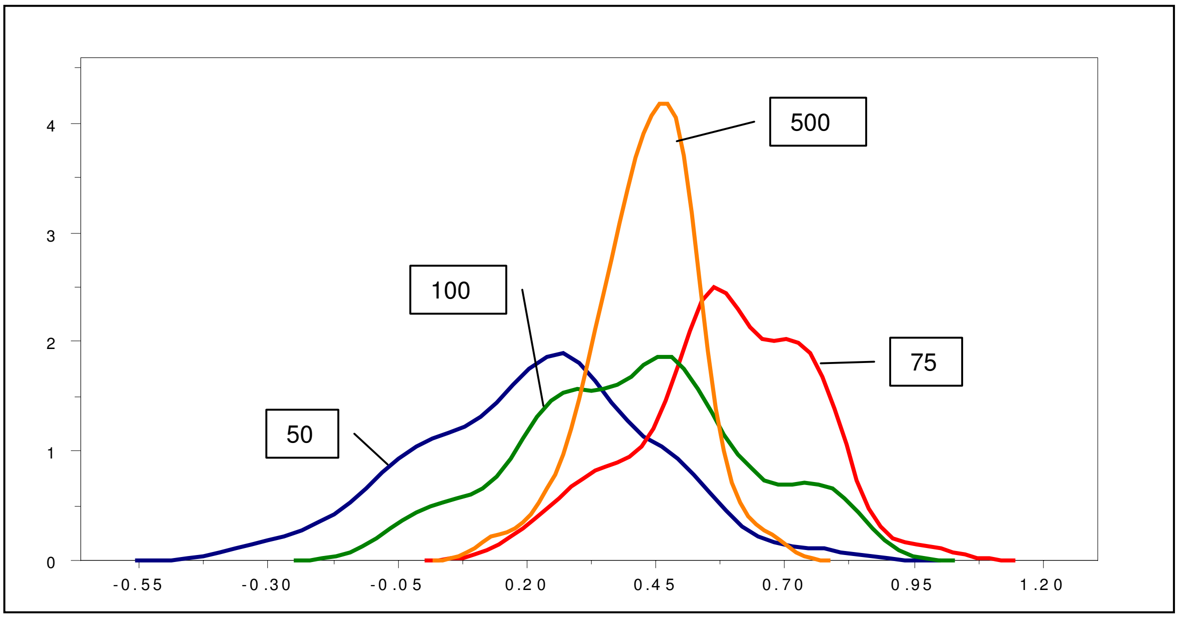
Şekil 3.8. Farklı başlangıç değerlerinde β için Bayes tahminleri (örneklem büyüklüğü 100)

Şekil 3.5.-3.8'den farklı başlangıç değerlerinin tahminlerde önemli bir değişiklik yaratmadığı gözlenmektedir.

1000. iterasyon sayısı ve başlangıç değeri olarak α_0=0.5, β_0=0.8 değerleri alınmış ve örneklem büyüklüğü 50, 75, 100 ve 500 için Bayes tahminleri Şekil 3.9 ve 3.10'da gösterilmiştir. Tahminlerin örneklem büyüklüğü arttıkça gerçek parametre değerlerine yaklaştığı görülmektedir.

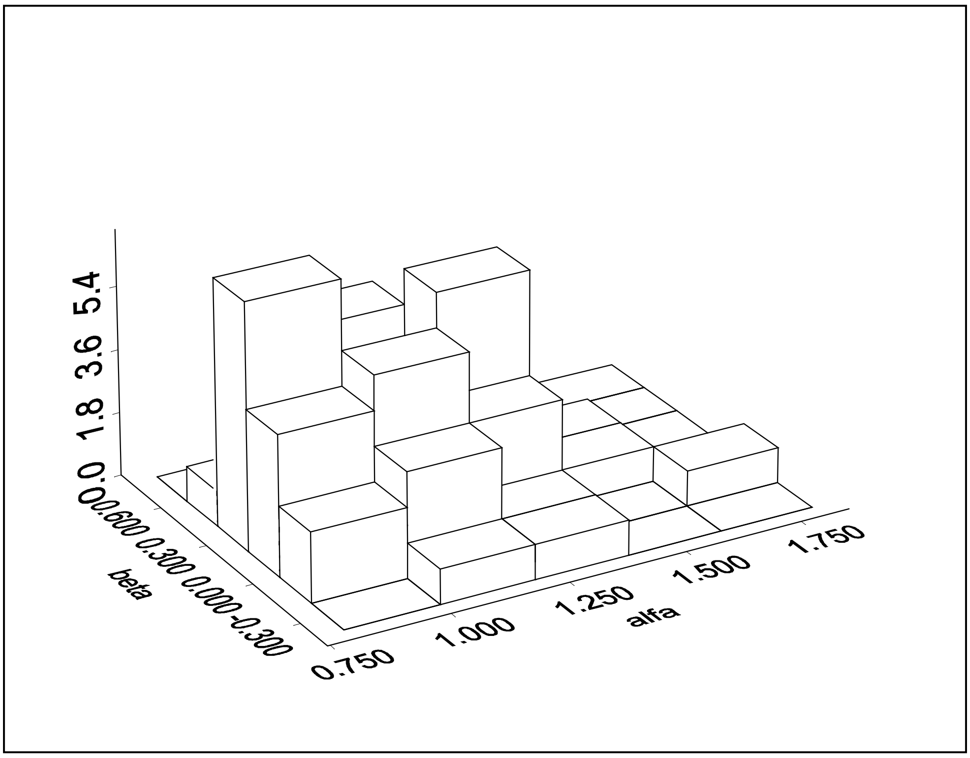


Şekil 3.9. α için farklı örneklem büyüklüklerinde Bayes tahminleri

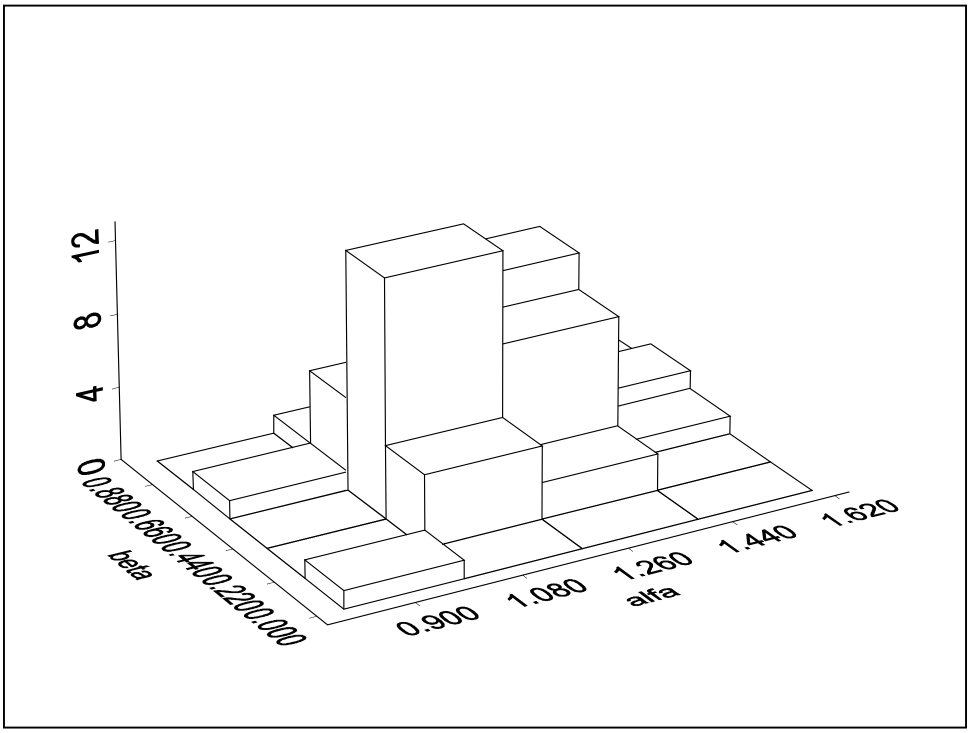


Şekil 3.10. β için farklı örneklem büyüklüklerinde Bayes tahminleri

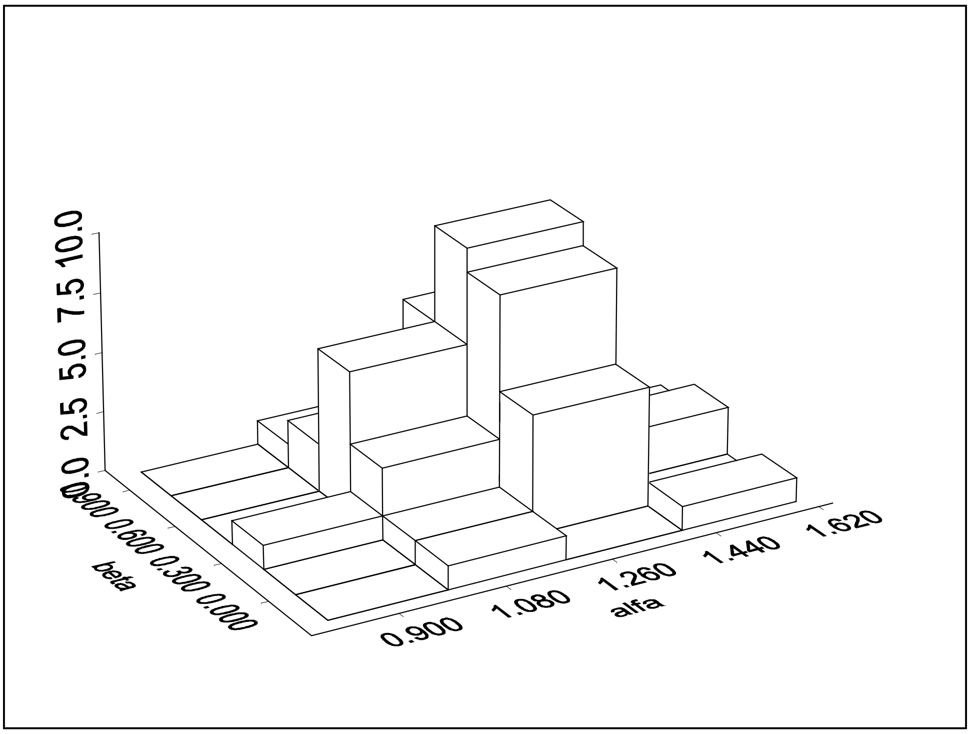
Ayrıca, Şekil 3.11-3.14'de örneklem büyüklüğü 50, 75, 100 ve 500 için Bayes tahminleri 3 boyutlu olarak çizdirilmiştir. Benzer yapı burada da görülmekte, α ve β parametrelerinin Bayes tahminlerinin örneklem büyüklüğü arttıkça gerçek değerlere birlikte yaklaştığı gözlenmektedir.



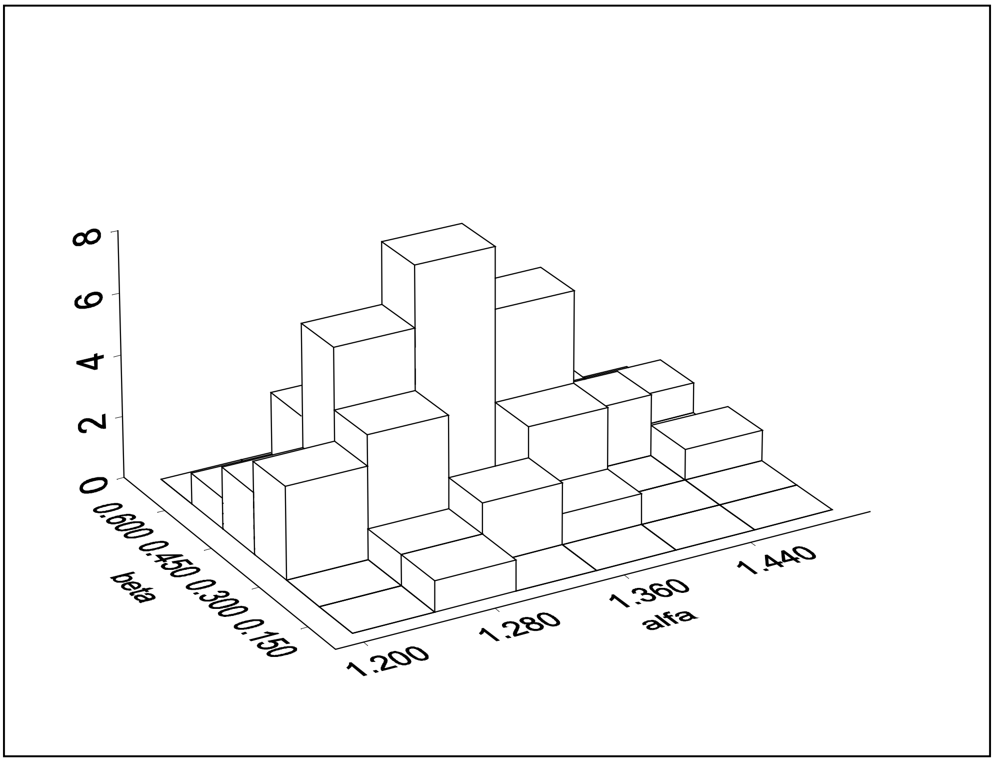
Şekil 3.11. Örneklem büyüklüğü 50 iken α ve β için Bayes tahminleri



Şekil 3.12. Örneklem büyüklüğü 75 iken α ve β için Bayes tahminleri



Şekil 3.13. Örneklem büyüklüğü 100 iken α ve β için Bayes tahminleri



Şekil 3.14. Örneklem büyüklüğü 500 iken α ve β için Bayes tahminleri

Nolan (2001), en çok olabilirlik tahmin edicisinden asimtotik olarak daha etkin başka bir tahmin edicinin olmadığını belirtmiştir. Dolayısıyla, Bayes tahmini ve en çok olabilirlik tahmin edicisi arasındaki farklılıkları görmek için $\theta=[1.3,0.5]'$ parametresine sahip standart Kararlı rastlantı değişkeninden 50 tane 25, 50, 75, 100, 500 ve 1000 birimlik rastgele örneklem benzetim yöntemiyle elde edilmiştir. Bayes tahmini için, başlangıç değerleri $\alpha_0=0.5$, $\beta_0=0.8$ olacak şekilde alınarak 1000. iterasyondaki tahmin değerleri bulunmuştur. Karşılaştırmalar Çizelge 3.6'da görülmektedir. Buna göre, Bayes tahmininin hata kareler ortalamasının en çok olabilirlik tahminine göre oldukça yakın ancak biraz daha düşük olduğu görülmektedir. Bununla birlikte, her iki tahminin hata kareler ortalamasının örneklem büyüklüğü arttıkça azaldığı dikkat çekmektedir.

Çizelge 3.6. Değişik örneklem büyüklüklerinde önerilen yöntemin Bayes tahmini ve en çok olabilirlik tahmini karşılaştırılması

		Bayes Tahmini		En Çok Olabilirlik Tahmini	
n		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
25	ortalama	1.1670	0.1903	1.1447	0.2506
	yan	-0.1330	-0.3097	-0.1553	-0.2494
	ortalama kare hata	0.0464	0.1715	0.0630	0.1997
50	ortalama	1.2780	0.4008	1.2665	0.4683
	yan	-0.0220	-0.0992	-0.0335	-0.0317
	ortalama kare hata	0.0280	0.0737	0.0335	0.1001
75	ortalama	1.2798	0.3882	1.2711	0.4313
	yan	-0.0202	-0.1118	-0.0289	-0.0687
	ortalama kare hata	0.0192	0.0696	0.0226	0.0745
100	ortalama	1.2987	0.4179	1.2938	0.4649
	yan	-0.0013	-0.0821	-0.0062	-0.0351
	ortalama kare hata	0.0211	0.0684	0.0244	0.0791
500	ortalama	1.3139	0.5005	1.3115	0.5092
	yan	0.0139	0.0005	0.0115	0.0092
	ortalama kare hata	0.0035	0.0109	0.0033	0.0108
1000	ortalama	1.3042	0.4861	1.3035	0.4929
	yan	0.0042	-0.0140	0.0035	-0.0072
	ortalama kare hata	0.0024	0.0047	0.0025	0.0044

3.3. Sayısal Örnek

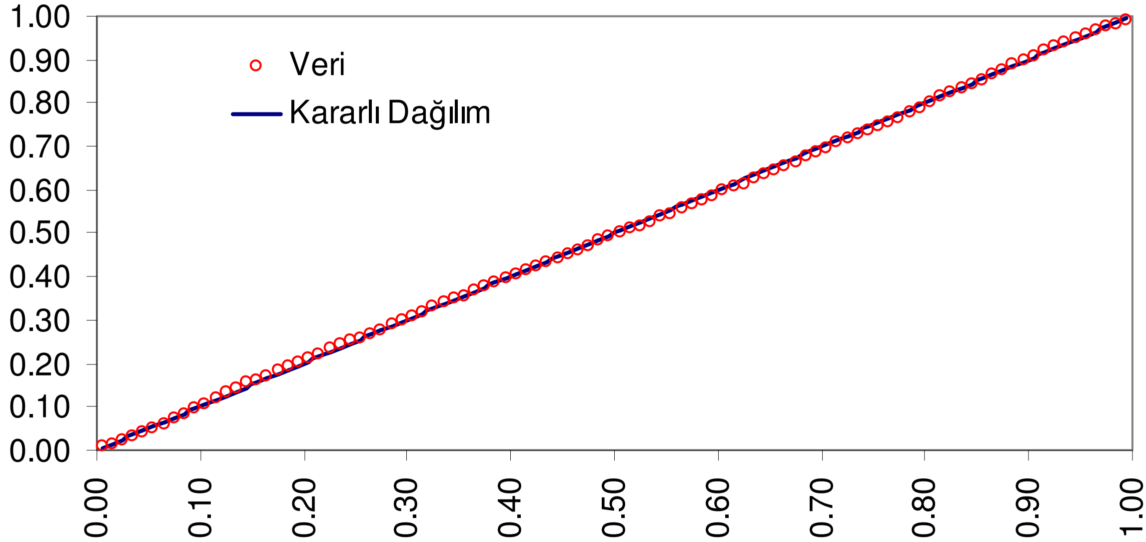
Menkul kıymetlerin getirilerinin istatistiksel dağılımları literatürde çok geniş yer bulmuştur. Yapılan ilk çalışmalarda, temel inanç, getirilerin Normal dağılım göstermesi yönünde olmuş, ancak zaman içinde, getirilerin dağılımının basıklığının Normal dağılımınkine göre daha yüksek olduğu yani dağılımın kuyruk kısmının Normal dağılıma göre daha kalın olduğu gözlenmiştir.

Mandelbrot (1960), Kararlı dağılımların, gelirler ve fiyatlar gibi çeşitli ekonomik değişkenlerin analizlerinde kullanılabileceğini göstermiştir. Fama (1965), Amerika menkul kıymet piyasası üzerinde istatistiksel analizler yapmış, otuz menkul kıymetin günlük fiyat değişiminin logaritmasını incelemiş, risk modellemesi için Kararlı dağılımın Normal dağılıma kıyasla daha uygun olduğunu belirtmiştir. Roll (1970), altı aydan az vadesi olan Hazine bonolarının getiri eğrilerinin haftalık değişimini incelemiş, vadesi üç aya kadar olanların basıklık parametresinin tahmininin 1.12 ile 1.53 arasında, daha uzun vadesi olan bonoların ise 1 değerine yakın ve düşük değerli olduğunu bulmuştur (Young ve Graf, 1995). Getirilerin dağılımlarının farklı örneklem büyüklüğünde basıklık katsayılarının kıyaslanması amacıyla Hazine bonosu ve Devlet tahvili ile Alman Markı, İsviçre Frangı, İngiliz Sterlini ve Japon Yeninin getirileri incelenmiştir. Sonuçlara göre, Hazine bonosu ve Devlet tahvilinin getirilerinin basıklık katsayılarının örneklem büyüklüğü genişledikçe artış gösterdiği ancak 2’ye yaklaşmadığı bulunmuştur. Diğer serilerin getirilerinin basıklık katsayılarının ise, örneklem büyüklüğü arttıkça 2 değerine yaklaştığı görülmüştür (Hall vd., 1989).

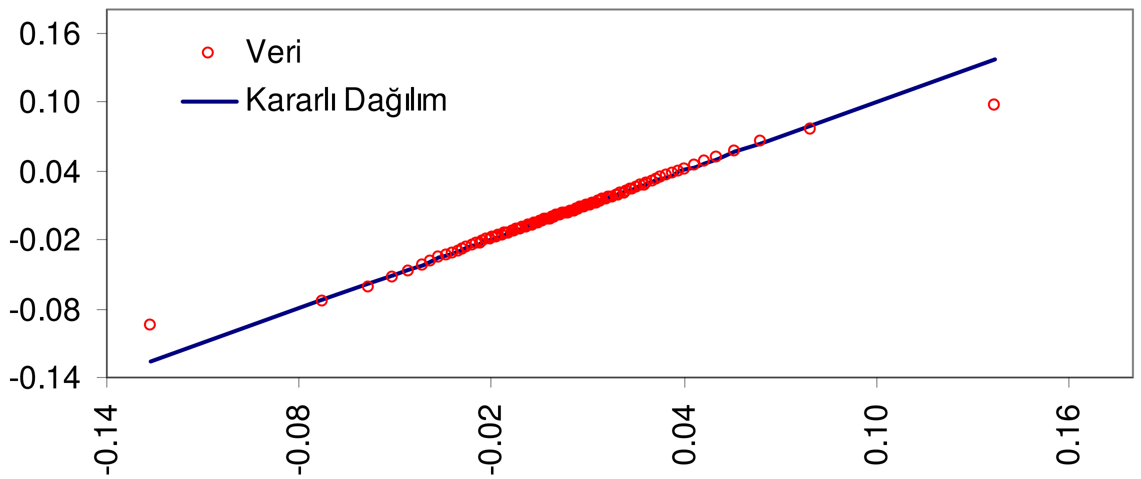
Araştırmalar, hisse senedinin getirisinin sıklıkla simetrik olmayan Kararlı dağılıma sahip olduğunu ve modelleme yapılırken simetrik olmayan Kararlı dağılımı kullanmanın uygun olduğunu göstermiştir (Fieltz ve Smith, 1972). Bu düşünce doğrultusunda, Akgiray ve Booth (1988), bilinen 20 hisse senedinin günlük, haftalık ve aylık getiri serilerini incelemiş, günlükten haftalığa, haftalıktan aylığa zaman frekansı azaldıkça basıklık parametresinin tahmininde 2 değerine yaklaşma eğilimi, çarpıklık parametresinin tahmininde ise azalış eğilimi görmüştür.

Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda, Türkiye menkul kıymet getiri serisinin yapısını görmek amacıyla İMKB Ulusal 100 endeksi (Ocak 1986=1, kapanış fiyatları) üzerinde bir çalışma yapılmıştır. 26.10.1987-19.04.2006 tarihleri arasındaki veriler TCMB'nin internet sitesindeki elektronik veri dağıtım sisteminden (EVDS) temin edilmiştir. Günlük getiri serisinin oluşturulması için endeks değerinin logaritmik farkları hesaplanmıştır.

Getiri serisinin Kararlı dağılım gösterip göstermediğinin araştırılması amacıyla P-P ile Q-Q grafikleri incelenmiş ve Şekil 3.15-3.16'da verilmiştir. Bu grafikler veriye Kararlı dağılımın uygun olacağını destekler niteliktedir.

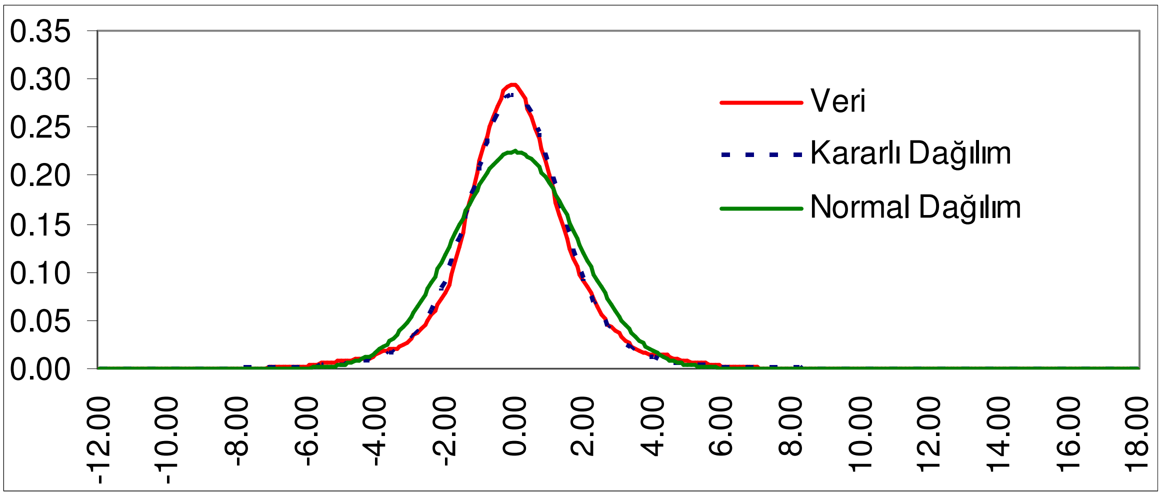


Şekil 3.15. P-P grafiği



Şekil 3.16. Q-Q grafiği

Verinin Kararlı dağılım gösterebileceği belirtildikten sonra Bölüm 3.1'de anlatılan tahmin yöntemi aracılığıyla getiri serisinin dağılımının parametre tahminleri elde edilmeye çalışılmıştır. Bunun için öncelikle δ (konum) ve c (ölçek) parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri elde edilmiş ve getiri serisi bu tahminlere göre standartlaştırılmıştır. Bu yeni seri üzerinde önerilen yöntem uygulanmış, α ve β için Bayes tahminleri sırasıyla $\hat{\alpha}$=1.667 ve $\hat{\beta}$=0.040 olarak bulunmuştur. Buna göre, dağılımın Kalın kuyruklu olduğu söylenebilir. Getiri serisinin dağılımı Şekil 3.17'de verilmiştir. Dağılımın Normal dağılıma göre daha dik olduğu görülmektedir.



Şekil 3.17. İMKB Endeksinin dağılımı

Çizelge 3.7. Farklı tahmin yöntemlerine göre parametre tahminleri

Yöntemler	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi	1.68	0.05
Birikimli Dağılım Fonksiyonu Yöntemi	1.57	0.04
Regresyon Yöntemi	1.79	0.17
Önerilen Bayes Yöntemi	1.67	0.04

Bu çalışmada önerilen yöntem ile bulunan parametre tahminleri ile diğer yöntemlerden elde edilen tahminler birbirine çok yakın çıkmıştır (Çizelge 3.7.)

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. SONUÇ

Kararlı dağılımlar, fizik problemlerinden, ekonomi dalına kadar geniş bir yelpazede uygulama alanı bulmuştur. Bunun en büyük sebebi ise yüksek değişkenliği modellemede Normal dağılım gibi dağılımların yetersiz kalmasıdır. Kalın kuyruklu dağılım olarak da bilinen Kararlı dağılımlar, veri kümesi içindeki uç değerleri de dikkate almaktadır. Ayrıca, bu dağılımlar toplama altında değişmezlik özelliğine sahiptir.

Bugüne kadar yapılan çalışmalarda, daha çok Kararlı dağılımların, dağılımın kuyruk yapısını belirten basıklık parametresinin tahmini üzerinde durulmuştur. Bunun dışında çarpıklık parametresi de önem kazanmaktadır. Bu çalışmada, her iki parametre tahmini üzerinde de durulmuştur.

Kararlı dağılımın kapalı biçimi olmadığı için olasılık yoğunluk fonksiyonu mevcut değildir. Sadece karakteristik fonksiyonu bilinmektedir. Dolayısıyla, paremetre tahminleri araştırılırken, karakteristik fonksiyon ve birikimli dağılım fonksiyonları kullanılmıştır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise ancak ters Fourier dönüşümü ile veya entegrasyon yaklaşımıyla bulunabilmektedir. Ancak bu şekilde olabilirlik fonksiyonlarına ulaşılabilmektedir.

Çalışmada, parametre tahmin yöntemleri üzerinde ayrıntılı olarak durulmuş ve Bayes tahmini üzerinde yoğunlaşılmıştır. Buckle (1995)'ın önerdiği Bayes yöntemi incelenmiştir. Tsionas (2000) ise Buckle (1995)'ın yöntemindeki eksik noktaları belirtmiş ve farklı bir yöntem sunmuştur. Bu yöntemde, yardımcı y değişkeni yerine olasılık yoğunluk fonksiyonu ters Fourier dönüşümü ile bulunmakta ve parametreler vektör olarak ele alınarak türetim yoluna gidilmektedir.

Nolan (1997) ise olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek amacıyla M parametrelemesini kullanarak entegrasyon yaklaşımını önermiştir. Sayısal entegrasyon aracılığıyla olabilirlik fonksiyonu elde edilebilmektedir.

Sayısal entegrasyon yaklaşımı ile parametre vektörünün aynı anda güncellenmesi şeklinde farklı bir Bayesci yöntem denenmiştir. Benzetim çalışmasında farklı başlangıç değerleri ile iterasyon sayıları ve örneklem büyüklükleri ele alınmış ve bu faktörlerin tahminlerde farklılık yaratıp yaratmadığı incelenmiştir. Analiz sonucunda, iterasyon sayısı ve başlangıç değerinin parametre tahmin değerlerine herhangi bir etkisinin olmadığı, örneklem büyüklüğünün ise tahmin değerleri üzerinde etkili olduğu söylenebilir. Ayrıca, örneklem büyüklüğü arttıkça tahmin değerlerinin gerçek değerlere yaklaştığı grafikler aracılığıyla da görülmektedir. Bayes tahmini ve en çok olabilirlik tahmini arasındaki farklılıkları görmek için hata kareler ortalamaları farklı örneklem büyüklüklerinde incelenmiştir. İki tahminin hata kareler ortalamasının örneklem büyüklüğü arttıkça azaldığı görülmüştür. Bayes tahmininin hata kareler ortalamasının en çok olabilirlik tahminine göre oldukça yakın olduğu da önemli bir bulgudur.

KAYNAKLAR

Aban, I.B., Meerschaert, M.M., 2001, Shifted Hill's estimator for heavy tails, Communications in Statistics: Simulation and Computation, 30, 949-962.

Achim, A., Tsakalides, P., Bezerianos, A., 2003, SAR image denoising via bayesian wavelet shrinkage based on heavy-tailed modeling, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 41, 1773-1784.

Akgiray, V., Booth, G.G., 1988, The stable-law model of stock returns, Journal of Business and Economic Statistics, 6, 51-57.

Antoniadis, A., Feuerverger, A., Gonçalvès, P., 2005, Wavelet based estimation for univariate stable laws. http://www-lmc.imag.fr/lmc-sms/Anestis.Antoniadis/publis/paulo.pdf.

Bernardo, J.M., Smith, A.F.M., 1994, Bayesian Theory, John Wiley and Sons, Chichester, 586s.

Brorsen, B.W., Preckel, P.V., 1993, Linear regression with stably distributed residuals, Communications in Statistics-Theory and Methods, 22(3), 659-667.

Brorsen, B.W., Yang, S.R., 1990, Maximum likelihood estimates of symmetric stable distribution parameters, Communications in Statistical Computation and Simulation, 19(4), 1459-1464.

Buckle, D.J., 1995, Bayesian inference for stable distributions, Journal of the American Statistical Association, 90, 605-613.

Casella, G., George, E.I., 1992: 'Explaining the gibbs sampler', The American Statistician, 46, 167-174.

Chambers, J., Mallows, C., Stuck, B.W., 1976, A method of simulating stable random variables, Journal of the American Statistical Association, 340-344.

Chib, S., Greenberg, E., 1995, Understanding the Metropolis-Hastings algorithm, The American Statistician, 49, 327-335.

Doğanoğlu, T., Mittnik, S., 1998, An approximation procedure for asymmetric stable paretian densities, Computational Statistics, 13, 463-475.

Dudewicz, E.J. , Mishra S.N., 1988, Modern Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York, 838s.

DuMouchel, W.H., 1983, Estimating The stable index α in order to measure tail thickness: A critique, The Annals of Statistics, 11, 1019-1031.

DuMouchel, W.H., 1975, Stable distributions in statistical inference: 2. Information from stably distributed samples, Journal of the American Statistical Association, 70, 386-393.

DuMouchel, W.H., 1973, On the asymptotic normality of the maximum-likelihood estimate when sampling from a stable distribution, The Annals of Statistics, 1, 948-957.

Fama, E.F., 1965, The behaviour of stock market prices, Journal of Business, 38, 34-105.

Fama, E.F., Roll, R., 1971, Parameter estimates for symmetric stable distributions, Journal of the American Statistical Association, 66, 331-338.

Fama, E.F., Roll, R., 1968, Some properties of symmetric stable distributions, Journal of the American Statistical Association, 63, 817-835.

Fielitz, B.D., Smith, E.W., 1972, Asymmetric stable distributions of stock price changes, Journal of the American Statistical Association, 67, 813-814.

Gelfand, A.E., Smith, F.M., 1990, Sampling based approaches to calculating marginal densities, Journal of the American Statistical Association, 85, 398-409.

Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S., Rubin, D.B., 1997, Bayesian Data Analysis, Chapman & Hall, London, 526 s.

Georgiou, P.G., Tsakalides, P., 1999, Alpha-stable modeling of noise and robust time-delay estimation in the presence of impulsive noise, IEEE Transactions on Multimedia, 1, 291-301.

Hall, J.A., Brorsen, B.W., Irwin, S.H., 1989, The distribution of future prices: a test of the stable paretian and mixture of normals hypotheses, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 24, 105-116.

Hastings, W.K., 1970, Monte Carlo sampling methods using markov chains and their applications, Biometrika, 57, 97-109.

Hill, B., 1975, A simple general approach to inference about the tail of a distribution, The Annals of Statistics, 3, 1163-1174.

Holtsmark, J., 1919, Über die Verbreiterung von Spektrallinien, Annalen der Physik, 58, 577-630.

Kendall, M.G., Stuart, A., Ord, J. K., 1987, Kendall's Advanced Theory of Statistics, Volume 1: Distribution Theory, Oxford University Press, New York, 604s.

Khintchine, A.Y.,1938, Limit Laws for Sums of Independent Random Variables, ONTI, Moscow.

Koutrouvelis, I.A., 1981, An iterative procedure for the estimation of the parameters of stable laws, Communications in Statistical Computation and Simulation, B10(1), 17-28.

Koutrouvelis, I.A., 1980, Regression-type estimation of the parameters of stable laws, Journal of the American Statistical Association, 75, 918- 928.

Levy, P., 1954, Theorie de l'addition des variables aleatoires, Gauthier-Villars, Paris.

Levy, P., 1925, Calcul des probabilites, Gauthier-Villars, Paris.

Lombardi, M., 2004, Simulation-based estimation methods for α-stable distributions and processes, Doktora Tezi, Floransa Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Floransa, 147s.

Mandelbrot, B., 1963, New methods in statistical economics, Journal of Political Economy, LXXI, 421-440.

Mandelbrot, B., 1960, The pareto-levy law and the distribution of income, International Economic Review, 1, 79-106.

McCulloch, J.H. 1998, Numerical approximation of the symmetric stable distribution and density. A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications. Adler, R.J., Feldman, R., Taqqu, M.S. (eds.), Birkhäuser, Boston. s. 489-499.

McCulloch, J.H., 1997, Tail thickness to estimate the stable index α: A critique, Journal of Business & Economic Statistics, 15, 74-81.

McCulloch, J.H., 1986, Simple consistent estimators of stable distribution parameters, Communications in Statistical Computation and Simulation, 4, 1109-1136.

Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., Teller, E., 1953, Equations of state calculations by fast computing machines, Journal of Chemical Physics, 21, 1087-1091.

Mittnik, S., Doğanoğlu, T., Chenyao, D., 1999, Computing the probability density function of the stable paretian distribution, Mathematical and Computer Modelling, 29, 235-240.

Nolan, J.P., 2005, Stable distributions: Models for heavy tailed data. http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf.

Nolan, J.P., 2001, Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions. Levy processes: Theory and Applications. Nielsen, B., Mikosch, T., Resnick, S. (eds.), Birkhäuser, Boston. s. 379-400.

Nolan, J.P., 1999, An algorithm for evaluating stable densities in Zolotarev's (M) parameterization, Mathematical and Computer Modelling, 29, 229-233.

Nolan, J.P., 1998, Parameterizations and modes of stable distributions, Statistics and Probability Letters, 38, 187-195.

Nolan, J.P., 1997, Numerical calculation of stable densities and distribution functions, Communications in Statistics-Stochastic Models, 13, 759-774.

Patel, J.K., Kapadia, C.H., Owen, D.B., 1976, Handbook of statistical distributions., Marcel Dekker, New York, 302s.

Paulson, A.S., Holcomb, E.W., Leitch, R.A., 1975, The estimation of the parameters of the stable laws, Biometrika, 62, 163-170.

Press, S.J., 1989, Bayesian Statistics, Principles, Models, and Applications, John Wiley and Sons, Canada, 237s.

Press, S.J., 1972, Estimation in univariate and multivariate stable distributions, Journal of the American Statistical Association, 67, 842-846.

Qiou, Z., Ravishanker, N., Dey, D.K., 1999, Multivariate survival analysis with positive stable frailties, Biometrics, 55, 637-644.

Qiou, Z., Ravishanker, N., 1998, Bayesian inference for time series with stable innovations, Journal of Time Series Analysis, 19, 235-249.

Roll, R., 1970, The Behavior of Interest Rates: The Application of the Efficient Market Model to U.S. Treasury Bills, Basic Books, New York.

Samorodnitsky, G., Taqqu, M.S., 1994, Stable Non-Gaussian Random Processes, Chapman & Hall, New York, 632s.

Serfling, R.J., 1980, Approximation Theorems of Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York, 371s.

Skorohod, A.V., 1961, Asymptotic formulas for stable distributions, Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability, 1, 157-162.

Smith, A.F.M., Roberts, G.O., 1993, Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov Chain Monte Carlo methods, Journal of the Royal Statistical Society-Series B, 55, 3-23.

Tierney, L., 1994, Markov chains for exploring posterior distributions, The Annals of Statistics, 22, 1701-1762.

Tiku, M.L., Tan, W.Y., Balakrishnan, N., 1986, Robust inference, Marcel Dekker, New York, 321s.

Tsionas, E.G., 2000, Efficient posterior integration in stable paretian models, Statistical Papers, 41, 305-325.

Weron, R., 2001, Levy-stable distributions revisited: tail index>2 does not exclude the Levy-stable regime, International Journal of Modern Physics C, 12, 209-223.

Weron, R., 1996, On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables, Statistics and Probability Letters, 28, 165-171.

Weron, R., 1995, Performance of the estimators of stable law parameters, Research Report HSC/95/1, Wroclaw University of Technology, 19s.

Yanushkevichius, R., Yanushkevichiene O., 2003, On the stability of one characterization of stable distributions, Acta Applicandae Mathematicae: An International Survey Journal on Applying Mathematics and Mathematical Applications, 79, 137-142.

Young, M.S., Graff, R.A., 1995, Real estate is not normal: A fresh look at real estate return distributions, Journal of Real Estate Finance and Economics, 10, 225-259.

Zolotarev, V.M., 1986, One-Dimensional Stable Distributions, Vol 65 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 284s.

Zolotarev, V.M., 1966, On the representation of stable laws by integrals, Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability, 6, 84-88.

Zolotarev, V.M., 1961, Expression of the density of a stable distribution with exponent α greater than one by means of a frequency with exponent $1/\alpha$, , Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability, 1, 163-167.

EK. BENZETİM ÇALIŞMASININ BİLGİSAYAR PROGRAMI

```
# Parametrelere değer verilmesi

n=100            # örneklem büyüklüğü
alpha=1.3       # basıklık katsayısı
beta=0.5        # çarpıklık katsayısı
gamma=1.0     # ölçek parametresi
delta=0          # konum parametresi
kor=0.093       # alpha ile betanın arasındaki korelasyon katsayısı
d=1
N=1000        # iterasyon sayısı
tekrar=50

# Nolan (1997)'ın STABLE fonksiyonlarının çağırılması
source("/stable/stable.s")

# Kararlı dağılımın türetilmesi
yy=rstable(n,alpha,beta,gamma,delta)

# En çok olabilirlik tahmininin bulunması
thetayy=stable.fit(yy,1,0)
delta.tah=thetayy[c(4)]
gamma.tah= thetayy[c(3)]
y=(yy-delta.tah)/gamma.tah
thetay=stable.fit(y,1,0)

# % 95 düzeyinde güven aralıklarının bulunması
guven=stable.mle.conf.int(thetay,1.96,n)
sigma.alpha=(guven[c(1)]*sqrt(n))/(1.96)
sigma.beta=(guven[c(2)]*sqrt(n))/(1.96)

# varyans kovaryans matrisinin elde edilmesi
var1=c(sigma.alpha^2, kor*sigma.alpha*sigma.beta, kor*sigma.alpha*sigma.beta,
sigma.beta^2)
var2=matrix(data=var1, nrow=2)

set.seed(1023)
# Metropolis zincirinin oluşturulması ve N. iterasyon değerinin elde edilmesi
hesap=function(N,d)
{
theta2=rep(0,N*2)
dim(theta2)=c(N,2)
 theta2[c(1), ]=c(0.5, 0.8)
        for (i in 2:N)
        {
thetayeni=rmvnorm(1, theta2[c(i-1), ], cov=var2*d*d)
         if (thetayeni[1]<0.40 || thetayeni[1]>1.99 || thetayeni[2]<(-0.99) ||
thetayeni[2]>0.99)
```

```
                {
                alpha=0
                theta2[c(i), ]=theta2[c(i-1), ]
                } else {
                th=theta2[c(i-1), ]
        alpha= exp(stable.loglik.quick(y,c(thetayeni,1,0),0)-
stable.loglik.quick(y,c(th,1,0),0))
                        if (runif(1,0,1) < min(1,alpha))
                        {
                        theta2[c(i), ]= thetayeni
                        } else {
                           theta2[c(i), ]= theta2[c(i-1), ]
                          }
                }
          }
sdeger= theta2[c(N), ]
return(sdeger)
rm(theta2)
}

# Tekrar sayısı kadar dizi oluşturulması ve her dizinin N. İterasyon değerinin
ortalama ve varyansının bulunması
esassonuc=function(tekrar)
{
sonuc=rep(0,tekrar*2)
dim(sonuc)=c(tekrar,2)
for (j in 1:tekrar)
{
sonuc[c(j), ]=hesap(N,d)
}
ort=colMeans(sonuc)
varyans=colVars(sonuc)
dim(ort)=c(2,1)
dim(varyans)=c(2,1)
ortalfa=ort[c(1), ]
ortbeta=ort[c(2), ]
varalfa=varyans[c(1), ]
varbeta=varyans[c(2), ]
return(sonuc,ortalfa,ortbeta,varalfa,varbeta)
}
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ece Oral

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Yılı : 1976

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise	1990-1993	Ted Ankara Koleji
Lisans	1993-1997	Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İstatistik Bölümü
Yüksek Lisans	1997-2000	Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İstatistik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi:

1998-1999	Araştırma Görevlisi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İstatistik Bölümü
1999-2002	İstatistikçi, Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası
2002-2005	İstatistik Uzman Yardımcısı, Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası
2005-	İstatistik Uzmanı, Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası