

**BİR FONKSİYON VE ONUN TÜREVİ ARASINDAKİ
İLİŞKİYİ ANLAMADA KARŞILAŞILAN ZORLUKLAR**

Adem DURU

Doktora Tezi

**ORTA ÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI
EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

Danışman: Doç. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

2006

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**BİR FONKSİYON VE ONUN TÜREVİ ARASINDAKİ
İLİŞKİYİ ANLAMADA KARŞILAŞILAN ZORLUKLAR**

Adem DURU

**ORTA ÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI**

**ERZURUM
2006**

Her hakkı saklıdır

Doç. Dr. M. Emin ÖZDEMİR danışmanlığında, Adem DURU tarafından hazırlanan bu çalışma 25/05/2006 tarihinde aşığıdaki jüri tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ

İmza: 

Üye : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

İmza: 

Üye : Prof. Dr. Ahmet IŞIK

İmza: 

Üye : Doç. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

İmza: 

Üye : Yard. Doç. Dr. Mustafa SÖZBİLİR

İmza: 

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)

.....

Prof. Dr. Mehmet ERTUĞRUL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

BİR FONKSİYON ve ONUN TÜREVİ ARASINDAKİ İLİŞKİYİ ANLAMADA KARŞILAŞILAN ZORLUKLAR

Adem DURU

Atatürk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

Uzun zamandan beri matematik dünyasında “Analyze” karşı büyük bir ilgi vardır. Bir çok araştırmacı tarafından öğrenci zorlukları ve yanlış anlamaları araştırılmakta ve tartışılmaktadır. Analizin doğasından kaynaklanan bazı zorlukların olduğu bir gerçektir. Analizin temel kavramlarından olan fonksiyon, süreklilik, türev ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerin anlaşılmasının zor olduğu kabul edilir. 1980 li yıllardan beri yapılan çalışmalar fonksiyon, süreklilik, türev ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerin yeterince anlaşılmadığını ya da öğrencilerin bu kavramları öğrenirken bazı zorluklar yaşadığını göstermektedir. Bu çalışmada, üniversite öğrencilerinin bir fonksiyonla onun türevi ve bir fonksiyonun sürekliliği ile türevlenebilmesi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaştıkları zorluklar araştırılmıştır.

Çalışmanın örneklemini, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Anabilim Dalında, öğrenim gören 52 birinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Öğrencilerin bir fonksiyonla onun türevi ve fonksiyonların sürekliliği ile türevlenebilmesi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaştıkları zorlukları tespit etmek için, “durum çalışması deseni”(case study design) araştırma modeli olarak belirlenmiştir. Araştırma 2004–2005 öğretim yılının bahar döneminde gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın verileri; Fonksiyon ve Türevle İlgili İşlemsel Beceri Testi, Bir Fonksiyonla Onun Türevi, Süreklilik ve Türevlenebilme Arasındaki İlişkiyi Anlamayla İlgili Bilgi Testi, Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testi, Süreklilik ve Türevlenebilme Arasındaki İlişkiyi Anlama Testi ve Mülakatlardan elde edilmiştir.

Toplanan verilerin değerlendirilmesi sonucunda bir fonksiyonla onun türevi ve süreklilik ile türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlamada öğrencilerin bir takım zorluklara sahip olduğu görülmüştür. Bu zorluklar, öğrencilerin ön şart durumundaki bilgileri eksik ya da yanlış bilmelerinden, çoklu gösterimler arasındaki ilişkiyi kuramamalarından, kısıtlı bir sürede çok kompleks olan kavram ve fikirleri özümseyememelerinden, kavramsal anlamının yerine işlemsel anlamayı tercih etmelerinden ve fonksiyon ve türevle ilgili kavram hayallerinin sınırlı olmasından kaynaklanmaktadır. Son olarak karşılaşılan bu zorlukların giderilmesi için önerilerde bulunulmuştur.

2006, 145 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fonksiyon, Süreklilik, Türev-Türevlenebilme, Öğrenme zorlukları, Kavram yanlışlığı.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

DIFFICULTIES IN UNDERSTANDING THE RELATIONSHIPS BETWEEN A FUNCTION AND ITS DERIVATIVE

Adem DURU

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Secondary School Science and Mathematics Education

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

There has been an overwhelming calculus in the world of mathematics. Student difficulties and misunderstandings have been investigated and discussed by numerous researchers. It is known that there are some difficulties originated by the nature of calculus. Understanding the concept of a function, continuity and derivative, the basic concepts of calculus, and the relationship among these concepts is accepted to be a difficult issue. Since 1980's, the studies show that the concept of a function, its derivative, continuity and the relationship among these concepts are not sufficiently grasped by students or students have difficulty in learning these concepts. In this study, the difficulties experienced by university students on the relationship between a function and its derivative and between the continuity and the differentiability of a function were investigated.

The sample of the study consists of 52 Prospective Mathematic Teachers at the Department of Primary Teacher Training of Kazım Karabekir Education Faculty at Atatürk University in Erzurum. Case study is chosen as our research design in order to investigate student's difficulties related to relationship between a function and its derivative, between the continuity and the differentiability of a function. This study was conducted in the spring semesters of 2004-2005 academic year. Data collected in this study was obtained from Procedural Skill Test Related to a Function and its Derivative, Test for Knowledge Related to Understanding Relationship Between a Function and Its Derivative; The Continuity and The Differentiability of a Function, Test for Understanding Relationship Between of a Functions and Its Derivative, Test for Understanding Relationship Between Continuity and Differentiability of a Function and Interviews.

According to the evaluation of the data collected, it was determined that students have some difficulties in understanding the relationship between a function and its derivative, the continuity and the differentiability of a function. The cause of these difficulties can be listed as: the lack or misunderstanding regarding the prerequisites, not being able to relate multi representations, not being able to digest related new ideas and concepts due to time constraint, preferring solid computations instead of conceptional approach and having little imagination between a function and its derivative. Finally, we conclude by proposing some approaches in order to solve the problems determined in this study.

2006, 145 pages

Keywords: Function, Continuity, Derivative-Differentiability, Learning Difficulties Misunderstanding,

TEŞEKKÜR

Bu araştırmada beni yönlendiren, çalışmalarım boyunca her türlü desteği sağlayan başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. M. Emin ÖZDEMİR olmak üzere Sayın Prof. Dr. Ahmet IŞIK ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa SÖZBİLİR' e en içten şükranlarımı sunarım.

Tezin yazım aşamasında her türlü desteğini benden esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN ve Sayın Arş. Gör. Levent AKGÜN'e en içten duygularımı sunarım.

Tez aşamasında ve tezin yazımında maddi ve manevi her türlü desteğini esirgemeyen eşime ve aileme de teşekkürlerimi sunarım.

Adem DURU

Mayıs 2006

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Analiz Konuları Ne Zaman ve Nasıl Okutulmalı?.....	2
1.2. Analize (Calculus) Tarihsel Bir Bakış.....	4
1.3. Fonksiyonun Tarihsel Gelişimi.....	11
1.4. Süreklilik ve Türevlenebilme.....	17
1.5 $f(x)$, $f'(x)$ ve $f''(x)$ Fonksiyonları Arasındaki İlişki.....	21
1.6. Türev Kavramının Farklı Gösterimleri.....	30
1.6.1. Nümeriksel gösterim.....	30
1.6.2. Grafiksel gösterim.....	31
1.6.3. Sembolik türev.....	31
1.7. Analiz Öğretiminde Karşılaşılan Zorluklar.....	34
1.7.1 limit işlemi ve sonsuzluk kavramı ile ilgili temel zorluklar.....	34
1.7.2. Analizin diğer kavramlarından kaynaklanan zorluklar.....	35
2. KAYNAK ÖZETLERİ.....	38
2.1. Öğrencilerin Analizi Anlamaları.....	38
2.2. Öğrencilerin Fonksiyonu Anlamaları.....	41
2.3. Öğrencilerin Fonksiyonların Sürekliliği ve Türevlenebilirliği Arasındaki İlişkiyi anlamaları.....	43
2.4. Öğrencilerin Bir Fonksiyon ve Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlamaları.....	47
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	66
3.1 Problem Durumu.....	66
3.1.1 Çalışmanın Amacı.....	66
3.1.2 Araştırma Problemleri.....	67
3.2 Deneysel Yöntem.....	67
3.3 Çalışmanın Örnekleme.....	68
3.4 Veri toplama araçları.....	69
3.4.1. Fonksiyon ve türevle ilgili işlemsel beceri testi.....	69
3.4.2. Bilgi testi.....	70
3.4.3. Bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi anlama testi.....	71
3.4.4. Süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlama testi.....	72
3.4.5. Mülakat.....	74
3.5. Uygulama.....	74
3.6. Verilerin Analizi.....	76
3.7. Araştırmanın Kabulleri ve Sınırlılıkları.....	77
3.7.1. Kabuller.....	77
3.7.2. Sınırlılıklar.....	78
4. ARAŞTIRMANIN BULGULARI ve TARTIŞMA.....	79
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	125
KAYNAKLAR.....	131

EKLER.....	137
EK1.....	137
EK2.....	138
EK3.....	139
EK4.....	144

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.	Fermat'ın geometriksel türevi.....	6
Şekil 1.2.	Leibniz diferansiyeli	7
Şekil 1.3.	Türevin geometriksel anlamı	17
Şekil 1.4.	Tanımlı olduğu aralığın her noktasında sürekli fakat her noktasında türevli olmayan fonksiyon örneği.....	17
Şekil 1.5.	Tanımlı olduğu her noktada hem sürekli hem de türevli fonksiyon örneği	17
Şekil 1.6.	$f(x) = \begin{cases} ax & x < x_0 \text{ ise} \\ b & x \geq x_0 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun grafiği.....	20
Şekil 1.7.	Açık Aralıkta maksimum değer	21
Şekil 1.8.	Pozitif eğimli teğet.....	22
Şekil 1.9.	Negatif eğimli teğet.....	22
Şekil 1.10.	Sıfır eğimli teğet.....	22
Şekil 1.11.	$y = f(x) = x^3$ Fonksiyonun grafiği.....	23
Şekil 1.12.	$y = f(x) = x $ Fonksiyonun Grafiği.....	24
Şekil 1.13.	Maksimum ve minimum noktadan çizilen teğetler.....	24
Şekil 1.14.	Artan fonksiyon ile çizilen teğet (birinci türev) arasındaki ilişki.....	25
Şekil 1.15.	Azalan fonksiyon ile çizilen teğet (birinci türev) arasındaki ilişki.....	25
Şekil 1.16.	Negatiften pozitive doğru artan türev.....	26
Şekil 1.17.	Pozitif eğimli artan fonksiyon	27
Şekil 1.18.	(a,b) aralığında negatif ama artan eğime sahip fonksiyon örneği	27
Şekil 1.19.	Yukarı bükey bir fonksiyona çizilen giriş ve teğet	27
Şekil 1.20.	İkinci türevle birinci türev arasındaki ilişki.....	28
Şekil 1.21.	Aşağı bükey bir fonksiyona çizilen giriş ve teğet.....	28
Şekil 1.22.	Maksimum nokta ile ikinci türev arasındaki ilişki.....	29
Şekil 1.23.	Türevin kavram ağı.....	33
Şekil 2.1.	Ön şartlılık ilkesi.....	47
Şekil 2.2.	Yükseklik/eğim kavram yanılışı.....	48
Şekil 2.3.	Vinner (1991)' de kullanılan sorular.....	49
Şekil 2.4.	Ferrini-Mundy ve Graham (1991) de kullanılan fonksiyon grafikleri.....	50
Şekil 2.5.	Pence (1995)'te kullanılan soru.....	53
Şekil 2.6.	Aspinwall ve Miller (2001) de kullanılan $f(x) = 2^x$ ' in grafiği ve $x = 0$ noktasındaki türevi.....	61
Şekil 2.7.	Aspinwall ve Miller(2001) de kullanılan fonksiyon grafikleri.....	62
Şekil 4.1.	Mülakatta öğrenciler tarafından çizilen grafik.....	92
Şekil 4.2.	Mülakatta araştırmacı tarafından çizilen grafik.....	92
Şekil 4.3.	Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testinde kullanılan türev grafiği.....	95
Şekil 4.4. a	Öğrencilerin türev grafiğinden faydalanarak 2 civarında	

	çizdikleri fonksiyonun grafiği.....	99
Şekil 4.4.b	Öğrencilerin türev grafiğinden faydalanarak 2 civarında çizdikleri fonksiyonun grafiği.....	100
Şekil 4.5.	Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testinde kullanılan fonksiyon grafiği.....	101
Şekil 4.6.	Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testi III de kullanılan fonksiyon grafikleri.....	110
Şekil 4.7.	Süreklilik ve Türevlenebilme Arasındaki İlişkiyi Anlama Testinde kullanılan 3. soru.....	120
Şekil 4.8.	Süreklilik ve Türevlenebilme Arasındaki İlişkiyi Anlama Testinde kullanılan 4. soru.....	122
Şekil.5.1	$f(x)$, $f'(x)$ ve $f''(x)$ arasındaki ilişki.....	128

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1	Doğru-yanlış şeklindeki bilgi testindeki başarı yüzdeleri.....	81
Çizelge 4.2	$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ fonksiyonu için $y = 0$ doğrusunu yatay asimptot alan öğrencilerin çizdiği grafik.....	85
Çizelge 4.3	Pozitif-negatif fonksiyonla artan-azalan fonksiyonu karıştıran öğrencilerin yaptığı birinci türevin işaret incelemesi	86
Çizelge 4.4	$y = ax^2 + bx + c$ şeklinde ikinci dereceden polinom fonksiyonu olarak düşünen öğrenci cevaplarından yapılan alıntı	89
Çizelge 4.5	Analitiksel bilgileri bir taslak grafik çizerek yapan öğrenci cevaplarından yapılan alıntı.....	90
Çizelge 4.6	Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testi III de fonksiyon grafiğini aralıklara bölerek yapan öğrencinin cevabından yapılan alıntı.....	111
Çizelge 4.7	Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testi III deki ikinci soruya verilen öğrenci cevaplarından yapılan alıntı.....	112
Çizelge 4.8	A öğrencisinin Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testi III deki üçüncü soruya verdiği cevaptan yapılan alıntı.....	113
Çizelge 4.9	B öğrencisinin Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testi III deki üçüncü soruya verdiği cevaptan yapılan alıntı.....	114
Çizelge4.10	$f(x) = x - 2 $ fonksiyonunun grafiğini çizerek yapan öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntı.....	115
Çizelge4.11	$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çizerek yapan A öğrencisinin cevabından yapılan alıntı.....	117
Çizelge4.12	$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çizerek yapan B öğrencisinin cevabından yapılan alıntı.....	118
Çizelge 5.1.	Çizelge 5.1. $f(x)$, $f'(x)$ ve $f''(x)$ arasındaki ilişki ile ilgili bilgisayar oyunu.....	129

1. GİRİŞ

Işık ve Bekdemir' (1998) e göre matematiğin değişen hızlarla ilgili bölümünü konu edinen genel matematik derslerinden birisi olan Analiz, mühendislik, tıp, ekonomi, iktisat, fen bilimleri ve matematik bölümlerinde okutulan derslerin başında gelmektedir. 1980'li yılların başında matematik konularının içinde analiz dersinin öneminin açıkça arttığı görülmüş ve bunun sonucunda diğer matematik dallarına göre Analizin daha önemli olduğu düşüncesi yaygınlaşmaya başlamıştır. Bressound (1992)'ye göre Ronald Douglas, Daniel Klat, Peter Lax, Saunders MacLane gibi birçok matematik eğitimeci üniversite matematik öğretimi programının merkezinde analiz dersinin yer alması gerektiğini şiddetle savunmuşlardır. Analiz dersinin üniversite matematik müfredatının merkezinde başka bir deyişle matematik çadırının ortasında olması savunulurken şu soru akla gelebilir: Analiz dersi öğrencilere niçin öğretilmelidir? Bu bağlamda analiz dersinin ve özellikle de matematiğin niçin öğretilmesi gerektiği üzerine çalışmalar yapılmıştır (Bressound 1992; Dawson 2000; Davis 2000). Analiz dersi bu kadar önemli ve hemen hemen herkese öğretilmesi gerektiği savunulurken amacı ne olmalı? Analiz dersinin öğretilmesinin amacı Zhang (2003)'e göre öğrencilere analizin temel teoremlerini ve kavramlarını öğretmek, öğrencilerin matematiksel sembol ve kavramları anlamalarını sağlamak, yaratıcı, derin, mantıklı ve entelektüel düşünebilme yeteneklerini, hayal edebilme, hesap yapabilme güçlerini geliştirmek ve elde ettikleri bu becerileri gelecek yaşantılarında kullanabilmelerini sağlamaktır.

Fakat birçok öğrencinin bu derslerdeki başarısı istenen düzeyde değildir. Matematik eğitimcileri ve araştırmacılar bu başarısızlıkların nedenleri üzerine çalışmalar yapmışlardır (Orton 1983; Ferrini-Mundy and Lauten 1994). Amit and Vinner (1990) öğrencilerin analiz dersindeki başarısızlık sebeplerinin psikolojik, kişisel, eğitimsel, sosyal, dersin kendi doğasından ve hatta politik kaynaklı olabileceğini belirtmiştir. Bunlardan birisi eğitimsel sebepler kategorisinde yer alan matematik ve Analizin öğrenciye niçin öğretildiğinin anlatılmamasıdır. Analiz dersi bazı öğrenciler tarafından bir yük ve onları meşgul etmek için kullanılan bir araç olarak görülmektedir. Birçok öğrencinin kafasında; Analiz dersinde öğrendiğim bilgileri ileriki yaşantımda

kullanacak mıyım, eğer kullanmayacaksam niye öğreneyim? gibi sorular vardır. Eğer öğrencilerin kafasında bu ve bunun gibi sorulara cevap bulunabilirse, öğrencilerin Analiz dersine karşı olan tutumunda pozitif yönde bir gelişme olabilir, derse karşı olan ilgileri artabilir, öğrenciler derse daha iyi motive ve dersten de daha başarılı olabilirler.

1.1 Analiz Konuları Ne Zaman ve Nasıl Öğretmeli?

Analiz dersindeki konularının çok karmaşık olmasından dolayı lise seviyesinde okutulmaması gerektiğini söyleyen birçok eğitimci vardır. Fakat NCTM (1989) 9-12 sınıflarındaki matematik öğretim programının, analiz dersindeki konularının yüzeysel olarak hem nümeriksel hem de grafiksel yönlerini içermesi gerektiğini önermiştir. NCTM Amerika Birleşik Devletleri'nde olmasına rağmen diğer ülkelerde de etkisi olan bir kurumdur. Türkiye'de Milli Eğitim Bakanlığı Orta Öğretim Genel Müdürlüğü'nün hazırladığı lise 3 matematik öğretim programı incelendiğinde analiz dersindeki konularının (limit, süreklilik, türev ve integral) yer aldığı görülür. 1998–1999 öğretim yılına kadar işlemsel düzeyde analiz dersindeki konuları lisede öğretiliyordu. Fakat 1998 yılında üniversiteye giriş sınavında yapılan değişiklikle ÖSS'nin matematik içeriğinde analiz dersinin öncesindeki konulara (logaritma, kompleks sayılar, trigonometri gibi) ve analiz konularına (diziler, seriler, limit, süreklilik, türev, integral) yer verilmemiştir. ÖSS'de çıkmadığı için öğretmenlerin çoğu öğrencileri bu konulara karşı motive etmede bir takım zorluklar yaşamaktadırlar. Çünkü öğrencilerin büyük bir kısmı ÖSS'de çıkmayan konuların işlenmesinin bir faydası olmadığına inanmaktadırlar. ÖSS'ye geçilen ilk yıl belki, zorda olsa bu konular lise son sınıflarda okutulurken bugün maalesef lise matematik öğretim programında olmasına rağmen okutulmamaktadır. Analiz konularının işlemsel seviyede de olsa lisede öğrencilere okutulmaması, üniversitelerde analiz dersini okutan öğretim elemanları ve dersi alan öğrenciler için sıkıntı oluşturmaktadır. Çünkü matematik öğretiminde ön şartlılık ilkesi oldukça önemlidir. Oysa öğrenciler üniversiteye analizin ön şartı durumundaki kavramları ya hiç bilmeden ya da çok az bilerek gelmektedirler. Dersi anlatan öğretim elemanları ilk birkaç hafta analizin ön şartı durumundaki kavramları anlatmak zorunda kalmaktadırlar. İki yılda anlatılan konuların birkaç hafta içinde anlatılmasının ne derece verimli olduğu

da ayrı bir tartışma konusudur. Öğrenciler ise analizin ön şartı durumundaki kavramları bilmedikleri için bu derste istenen seviyede başarılı olamamaktadırlar.

Yukarıda NCTM (1989)'nin liselerde analiz konularını yüzeysel olarak okutulmasını önerdiğini söylemiştik. NCTM (1989) lisede analiz konularının kavramsal olarak derinlemesine incelenmesinden ziyade limitin, bir eğrinin altında kalan alanın, değişim oranının, teğetin eğiminin ve analizin diğer anahtar kavramlarının işlemsel seviyede yüzeysel olarak öğretilmesini önermektedir.

Orton (1985) lisede analiz konularının öğretilmesinde fazla bir sorun yaşanmadığını ifade etmiş ve öğretmenlere analiz konularını öğrencilerin anlama seviyelerine göre anlatmalarını önermiştir. James (1995)'e göre diğer birçok araştırmacı ve eğitimci analizin lise seviyesinde verilmesi gerektiğini söylemişler ve öğretmenlere analiz derslerinde sadece işleme dayalı yöntemler kullanmaktan kaçınmalarını, analiz kavramlarının sağlam bir temelini oluşturmak için etkinlikler geliştirmelerini önermişlerdir.

Öğrencilerin önceki deneyimleri analiz kavramlarını anlamalarında kuvvetli bir etkiye sahiptir. Lisedeki analiz konularının işlendiği derslerde genellikle, öğrenciler işlemsel becerilerde uzmanlaşırlar. Bununla birlikte analiz kavramlarının kavramsal yönünün anlaşılması minimum seviyede kalır. Örneğin birçok araştırmacı öğrencilerin limit problemlerine doğru cevap vermelerine rağmen matematiksel işlemlerle elde ettikleri cevaplar ile önsezileri arasındaki uyumsuzluklarda tereddüde düştüklerini bulmuştur (James 1995). Orton (1989) öğrencilerin kafasını karıştıracak bazı riskli şeylerden ve sadece işlem yapmayı öğrenen öğrenci tipini yetiştirmekten kaçınmamız gerektiğini söylemiştir. Orton aynı zamanda öncelikle kavramlara sezgisel bir giriş yapılmasını, grafiğin altındaki alanının hesaplamasında, değişim oranının bulunmasında ve fonksiyon grafiğinin çizilmesinde öğrencilere fırsatlar verilmesini tavsiye etmiştir.

Lisedeki analiz dersleri üniversiteye giriş aşamasındaki öğrenciler için pozitif bir etkiye sahiptir. Ferrini-Mundy and Gaudard (1992) Analiz I dersinde lisede analiz konularını

okuyan öğrencilerin okumayan öğrencilere göre daha başarılı olduklarını bulmuşlardır. Burton (1989) lise yıllarında analiz konularını okumamanın üniversite birinci sınıf öğrencileri için ciddi bir engel olabileceğini söylemiştir. Hatta bazı matematik eğitimcileri analiz kavramalarının temelinin ortaokul yıllarında atılması gerektiğini iddia etmişlerdir. Jockusch and Mcloughlin'e (1990) göre ortaokulda (bizim ülkemizde ilköğretimin 6–8 sınıflar) analizin temel kavramları gösterilmelidir. Onlara göre öğrenciler zaten eğitim kavramını somut olarak bu dönemlerde görmektedirler ve dolayısıyla değişim oranı (türev) kavramı bu dönemlerde verilebilir. İlköğretimin ikinci kademesinde (6–8. sınıflarda) yeterince matematik dersi alamayan öğrencilerin daha sonra aldıkları analiz derslerindeki performansları düşük bulunmuştur.

Yapılan çalışmalar öğrencilere üniversiteye gelmeden önce analizin ön şartı durumundaki (fonksiyonlar, logaritma, kompleks sayılar, trigonometri...vb) konuların ve analiz konularının işlemsel seviyede de olsa öğretilmesi gerektiğini önermektedir. Bu bağlamda ülkemizdeki lise matematik öğretimi programının ve üniversiteye giriş sınav içeriğinin tekrar gözden geçirilmesi (bu yönde bir takım çalışmalar vardır) öğrencilerin analiz dersindeki başarılarını artırma açısından önem arz etmektedir.

1.2. Analize (Calculus) Tarihsel Bir Bakış

Matematiğin nasıl oluştuğu hakkında; “Araç Olarak Matematik” ve “Amaç Olarak Matematik” olmak üzere iki farklı yaklaşım vardır.

1. Araç olarak matematik: Matematik birtakım bağıntı ve yorumlarıyla insan hayatına destek veren bir bilim dalıdır. Uygulamacılar matematiğin bu yönüyle ilgilenirler.
2. Amaç olarak matematik: Matematik bu anlamda bir araç değil, amaçtır ve yalnızca “bilme ihtiyacının ürünü, düşünme ve doğruyu arama uğraşıdır” Matematik bu uğraşın sonucunda ortaya çıkar.

Matematiğin ilk geliştiği yer olarak kabul edilen Mezopotamya’da ve Mısır’da nehirlerin taşması sonucu kaybolan arazi sınırlarını belirlemek için geometri, nehir taşmalarının zamanını tahmin etmek için de takvim gelişmiştir (Altun 1998). Bu yaklaşımları göz önünde tutan matematik eğitimcileri matematiğin tarihsel gelişiminden bahsedilmesinin, matematiğin daha iyi anlaşılabilceği fikrini savunmuşlardır. O halde matematik tarihi matematik öğretmenlerine ve matematik okuyan öğrencilere ne kazandırır? Birincisi ve en önemlisi motivasyondur. Öğrenciler öğrendiği matematiğin nasıl ve hangi ihtiyaçtan doğduğunu bildikleri takdirde matematik öğrenmeye karşı ilgi duyacaklar ve daha iyi motive olacaklardır. Böylece matematiğe karşı ilgi duyan bireyler matematikte daha başarılı olacaklardır. İkincisi ise öğrenciler ve toplum matematik tarihi hakkında bilgi sahibi olacaklardır. Bunun için de matematik öğretimi ve matematik tarihi arasındaki bağlantıyı inceleyen birçok araştırma yapılmıştır (May 1974; Pimm 1982; Fauvel 1990; Fauvel 1991; Katz 2000).

Analizin keşfi medeniyetlerin en büyük entelektüel başarılarından birisidir. Analiz dersi yaklaşık olarak üç asırdan beri bilimsel problemlerin araştırılmasına hizmet etmiştir. Mekaniğin, astronominin ve fiziksel bilimlerin en önemli denklemleri 17. yüzyılda analizin doğal bir sonucu olan türev ve integral denklemleri olarak ortaya konulmuştur (Kleiner 2001).

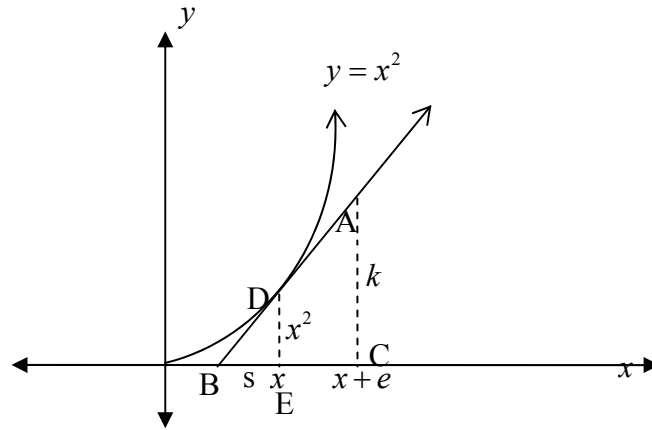
Matematiğin diğer temel dalları olan reel analiz, kompleks analiz, diferansiyel geometri analizden türemiştir. Analiz aynı zamanda olasılığın, topolojinin, sayılar teorisinin ve geometrinin de temelini oluşturmaktadır. Gerçekten bugün bizim anladığımız matematik hatta fizik bilimi analiz düşüncesi olmadan anlaşılamaz. Bununla birlikte matematikte, özellikle de analizdeki en temel gelişmeler 17.yüzyılda Galileo ve Descartes’le başlamış ve daha sonrada Newton, Lagrange, Laplace ve diğerleriyle geliştirilmiştir.

1453’te İstanbul’un Türkler tarafından fethedilmesiyle İstanbul’da yaşayan bilim adamları başta İtalya (Roma) olmak üzere Avrupa’nın birçok yerine dağılmışlar ve Rönesans hareketinin başlamasına neden olmuşlardır. Rönesans’la birlikte sanat,

edebiyat, müzik, mimarlık, astronomi, fen bilimleri gibi alanlarda gelişmeler olmuştur. Bu gelişmelere matematik bilimi de kayıtsız kalmamış ve bu alanda büyük gelişmeler olmaya başlamıştır.

Matematikteki gelişmeler analizin doğmasına neden olmuştur. 17. yüzyılın başlarında analitik geometri Descartes ve Fermat tarafından keşfedilmiştir. Sistemli olarak teğet problemlerini ilk çözen kişi olan Fermat, 1630'da herhangi bir eğrinin teğetini bulmak için bir yöntem geliştirmiştir. Aşağıdaki örnek Fermat'ın bu yaklaşımını göstermektedir.

(x, x^2) noktasında $y = x^2$ parabolünün teğetini bulmaya çalışalım. x eksenini üzerinde başka bir $x+e$ noktasını ve (x, x^2) noktasında eğrinin alt teğetinin x eksenine izdüşümünü gösteren s 'yi alalım (Şekil 1.1). $\triangle ABC$ ve $\triangle DBE$ Üçgenlerinde açılarının benzerliğinden $\frac{x^2}{s} = \frac{k}{s+e}$ yazılır. Fermat burada k 'nın $(x+e)^2$ 'ye eşit olduğunu ifade etmiştir. Yani $k \cong (x+e)^2$ alınır ise $\frac{x^2}{s} \cong \frac{(x+e)^2}{(s+e)}$ yazılabilir. Bu denklemden $s \cong \frac{ex^2}{(x+e)^2 - x^2} = \frac{ex^2}{x^2 + 2ex + e^2 - x^2} = \frac{x^2}{2x+e}$ elde edilir. Bu da $\frac{x^2}{s} \cong 2x+e$ olduğunu gösterir. $\frac{x^2}{s}$, (x, x^2) noktasındaki parabolün teğetinin eğimidir. Fermat $\frac{x^2}{s} \cong 2x+e$ denklemindeki e 'yi silerek teğetin eğimini $2x$ olarak bulmuştur.

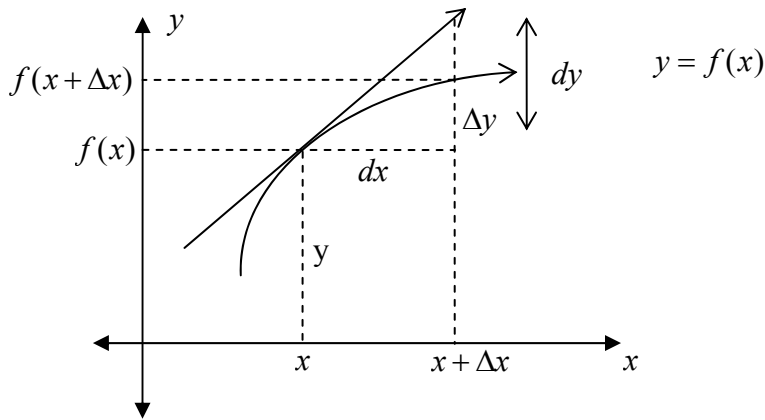


Şekil 1.1. Fermat'ın geometriksel türevi

Newton ve Leibniz birbirinden habersiz 17.yüzyılın sonlarında analizin temelini teşkil eden birçok kavram ortaya koymuşlardır. Bununla birlikte Avrupa'nın ünlü matematikçilerinin birçoğu günümüzde elementer analizin kullanılarak çözüldüğü birçok problemi çözebiliyor olmalarına rağmen analizin hassas temeller üzerine oturması iki yüzyılı bulmuştur.

Newton'un analiz çalışmaları etkili sonuçlar türetmek, kullanışlı algoritmaları desteklemek veya ikna edici ispatlar vermek gibi farklı amaçlara hizmet etmiştir. Newton'un analiz çalışmaları, değişkenlerden ve değişkenlerle ilgili denklemlerden oluşmuştur, yani fonksiyon analizi değildir. Gerçekten de belirgin bir matematik kavramı olarak fonksiyon tanımı 18.yüzyılın başlarında yapılmaya başlanmıştır.

Leibniz'in analiz hakkındaki düşüncesi yavaş yavaş gelişmiştir. Newton gibi O'da farklı şeyler yazmıştır. Bu yazılanların hepsinin özü, farklı zamanlarda farklı anlamlar taşımaya rağmen "diferansiyel" kavramıdır. x 'in birbirini takip eden iki değeri arasındaki fark " x 'in diferansiyeli" olarak adlandırılmış ve dx ile gösterilmiştir. Şekil1.2. den de görüleceği gibi $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ artması $y = f(x)$ eğrisi boyunca x 'den $x + \Delta x$ ' e kadar olan y 'deki değişim, y 'nin diferansiyeli olan dy ise teğet boyunca x 'den $x + \Delta x$ ' e kadar olan y 'deki değişimdir.



Şekil 1.2. Leibniz diferansiyeli

(x, y) noktasında eğrinin teğetinin eğimi $\frac{dy}{dx}$ 'dir. Bunu Leibniz “diferansiyel” bölüm olarak adlandırmıştır (Kleiner 2001).

Leibniz Analizine (diferansiyel) ilk sistematik giriş “The Analysis the Infinitely Small for the Understanding of Curved Lines” isimli kitapta 1696’da L’ Hospital tarafından yapılmıştır. Analiz 18.yüzyılın başlarında özellikle de Jacob ve Johann Bernoulli kardeşler tarafından daha da geliştirilmiştir. Bu dönemlerde birkaç matematik kitabı yazılmıştır. Yazarlar genellikle teğet, alan, hacim ve yay uzunluğu gibi eğriler geometrisinin analiziyle ilgilenmişlerdir. Newton ve Leibniz cebirsel sembollere giriş yapmışlardır, fakat ele aldıkları problemler geometriksel ve fiziksel içerikte olmuştur. Onların ele aldıkları problemler, fonksiyon analizinden (calculus of functions) ziyade denklemlerle ilgili olan değişkenler analizidir (calculus of variables) (Kleiner 2001).

Kavramsal anlamdaki en temel gelişme 18.yüzyılın ortalarında Euler tarafından yapılmıştır. Bu gelişme analizin temel yapı taşı olan fonksiyon kavramıyla ilgili olmuştur. Böylece analiz Euler’in dediği gibi hem eğri hem de fonksiyonla ilgili olmuştur. Euler, fonksiyon tanımını yapan ilk kişi olmamasına rağmen, fonksiyonu bir matematik dalı olarak analizin merkezine koymaya çalışan ilk kişidir. Fakat tek bir çalışma birdenbire matematiksel alışkanlıkları değiştirememiştir. 18. yüzyılda matematikçiler, fonksiyonu matematik konuları içinde merkezi bir kavram olarak görmemişlerdir.

17. yüzyılda analiz büyük oranda geometriye ve 18. yüzyılda da cebir üzerine dayandırılmıştır. 1821 de başlayan tartışmalı süreç aritmetik üzerine yapılmıştır. Bu tartışmalar;

- ❖ Analiz kavramları için limit tanımının ortaya çıkması,
- ❖ Tanımlarda ve ispatlarda eşitsizliklerin önemli rol oynadığının anlaşılması,
- ❖ Fonksiyonun tanım kümesi hakkındaki sorular dikkate alınarak analizdeki geçerli sonuçların elde edilmesi,

gibi konular üzerinde yapılmıştır.

Cauchy'nin analizi düzenleme çalışmaları ünlü "Course d'analyse" çalışması ile 1821'de başlamış, 1822 ve 1829'daki iki çalışmasıyla devam etmiştir. Cauchy limit, süreklilik, yakınsaklık, türev ve integral gibi birkaç temel kavram seçmiş, seçtiği limit kavramı üzerine diğerlerini kurmuş ve analizin temel sonuçlarından oldukça yeni ve önemli düşünceler üretmiştir. Cauchy kendinden önce tam olarak açıklanamayan ve anlaşılamayan birçok kavramın da tanımını yapmıştır.

Türev kavramının 300 yıla aşkın bir sürede aşamalı olarak gelişmesi, bir bütün olarak analizin gelişmesine yansımıştır. Bu süreç 1600'lü yıllarda başlamış ve analizin temelleri ile birlikte bugünkü şekline ulaşmıştır. Matematik tarihçisi Grabnier (1983) bu süreci şöyle özetlemiştir: "Türev önce kullanılmış, daha sonra keşfedilmiş ve en sonunda da tanımı yapılmıştır".

Sonuç olarak türev (bir teğet olarak) 17.yüzyılın ortalarında Fermat ve diğerleri tarafından kullanılmış, bu yüzyılın sonlarında Newton ve Leibniz tarafından keşfedilmiş, 18. yüzyılda da hızlı bir şekilde araştırılmış ve geliştirilmiştir. Son olarak ta 19.yüzyılda tanımı yapılmıştır. Türevin tanımı 1790'da Lagrange (cebirsel tanım), 1820'de Cauchy (limit ve sonsuz küçüklükler kavramı) ve daha sonrada 1870'te Weierstrass (Epsilon ve Delta terimleriyle) tarafından yapılmıştır. Limit ve sonsuz küçük kavramı kullanılarak Cauchy tarafından yapılan türev tanımı aşağıda verilmiştir

$y = f(x)$ fonksiyonu x değişkeninin verilen iki değeri arasında sürekli ve iki uç sınırı arasında kalan bir değer, değişken için verildiğinde, değişkene verilen sonsuz küçüklükteki artışlar fonksiyonun kendisinde de sonsuz küçüklükteki artışlar meydana

getirir. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ifadesinde $\Delta x = i$ alınırsa farkların bölümü

$\frac{f(x + i) - f(x)}{i}$ sonsuz küçüklükte bir nicelik olacaktır. Fakat bunlara rağmen

$f(x+i)-f(x)$ ve i “0” sıfır limitine, bölümün kendisi de bir başka limite doğru yaklaşacaktır. Bölümün limiti pozitif ya da negatif olabilir. Bölümün limiti var olduğunda x ’in her bir özel değeri için bölümün limiti belli bir değere sahip olacak fakat bu değer x ile değişecek, limiti yeni bir fonksiyon olan $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ oranı $y=f(x)$ fonksiyonuna bağlı olacaktır. Bu bağı göstermek için elde edilen yeni fonksiyona “türev fonksiyonu” adı verilir ve genellikle y' ya da $f'(x)$ notasyonlarıyla gösterilir.

1820’lerdeki bazı kitaplarda Cauchy bugün yaptığımız gibi “limit”, “sürekli fonksiyon” ve belirli integral tanımlarını da vermiş ve bu belirli integral tanımı Riemann’ın yaptığı çok küçük değişikliklerle bugünkü şekline ulaşmıştır. Böylece 19. yüzyılın ortasından başlayarak Newton’un ve Leibniz’in buluşları bir temele oturtulmuş oluyordu (Stein and Barcellos 1996).

Bu gelişmelerden sonra türev bugün R de,

$A \subset R, x_o \in A, x_o, A$ ’nın bir yığılma noktası ve f, A dan R ye tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer,

$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ limiti veya x yerine $x_o + h$ yazılarak yani $x = x_o + h \Rightarrow h = x - x_o$

için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h)-f(x_o)}{h}$ limiti varsa f fonksiyonu x_o noktasında türevlidir ve bu limit

f' ’nin x_o noktasındaki türevi adını alır (Balcı 1997; Ocak 2001) şeklinde tanımlanmaktadır. Tanımdan da görüldüğü gibi türev aslında bir limit problemidir.

1.3. Fonksiyonun Tarihsel Gelişimi

Fonksiyon, üniversite ve lise matematik öğretimi programının anahtar bir bileşenidir (Harel and Dubinsky 1992). Matematiğin farklı alanları ya doğrudan ya da dolaylı olarak fonksiyonla ilişkilidir. Analiz bir, iki ya da n bileşenli fonksiyonlarla; diferansiyel denklemler teorisi de bilinmeyen fonksiyonlardan oluşan denklemlerin çözümünü; fonksiyonel analiz de fonksiyonlardan meydana gelen uzayla; nümerik analiz ise fonksiyonların farklı çeşitlerinin gelişmesindeki hataların düzenlenmesinin süreciyle ilgilenir. Matematiğin diğer alanları fonksiyon tanımının doğal sonuçları ya da genelleştirmeleri oluşturan kavramlarla uğraşır. Örneğin cebir işlemlerle ve bağıntılarla uğraşır (Ponte 1990). Uzun süreden beri üniversitelerde ve liselerde en temel kavramın fonksiyon olduğu yönünde tartışmalar yapılmaktadır. Yapılan son matematik öğretimi programı çalışmaları açıkça fonksiyonun önemini vurgulamıştır (NCTM 1989, 2000).

Fonksiyon kavramının kökeni 4000 yıl öncesine dayanır. Milattan önce 2000 yıllarında Babillerin kare, karekök, küp ve küp kök gibi bir takım işlemlerin karşılıklı tablolarına sahip oldukları bilinmektedir. Yunanların fonksiyon kavramını birçok alanda kullandıkları söylenmektedir. Onlar akustik biliminin kanunlarını çalışmışlar, çalgı tellerinin bir tablosunu geliştirmişler, hemen hemen bugünküne benzer sinüs tablosunu yapmışlar ve ayrıca hareket, süreklilik ve sonsuzluk kavramlarını araştırmışlardır. Çalışılan problemler çok özel olup bir tabloyla veya bir grafikte gösterilmiş ya da sözlü olarak ifade edilmiştir. Onların çalıştıkları aslında bir fonksiyondur. Fakat onlar hem **“fonksiyon”** kelimesinden habersizdiler hem de sembol olmadan düşüncelerini analitiksel ya da bir formülle ifade etmeleri çok zordu (<http://www.und.edu/dept/math/history/function.htm>).

Orta çağda bilimsel alandaki çalışmalar gelişmeye başlamış olup, genel tanımlar mekaniksel ya da geometriksel olarak ifade edilmiştir. İki nicelik arasındaki ilişkiler sözlü ya da grafiksel olarak ifade edilmiştir, fakat bu durumun hala formüllerin kullanılmamasından dolayı antik çağdakinden çok ta farklı olduğu söylenemez. Bu dönemde birçok fonksiyon çeşidi çalışılmış, bazı önemli trigonometrik fonksiyonlara

giriş yapılmıştır. Özellikle Türk-İslam Dünyası matematikçilerinin trigonometrik fonksiyonlara katkısı yadsınamayacak derecede büyük olmuştur. Trigonometriye ait temel bilgiler, 8. ile 16. yüzyıl Türk-İslam Dünyası matematikçileri tarafından ortaya konulmuş ve belli bir noktaya kadar da geliştirilmiştir. 8. ile 16. yüzyıl Türk-İslam Dünyası matematik ve astronomi bilginlerinin hazırlamış oldukları "**Ziye**" adlı eserlerde, bugünkü trigonometrinin temel bilgileri, ilk olarak ortaya konulmuştur (Göker 1997).

Fonksiyon 300 yıldan beri analiz problemleri içinde yer almaktadır. Analiz, basitçe çeşitli fonksiyonların özelliklerinin işlendiği ders olarak tanımlanabilir. Gerçekten fonksiyon kavramı modern ve klasik matematiği birbirinden ayıran özelliklerden biridir. Kleiner (1989)'e göre Schaaf bir adım daha öteye giderek şöyle demiştir:

“Batı kültürünün temeli fonksiyon kavramına dayanır. Fonksiyon daha önceki medeniyetler tarafından hiç ima bile edilmemiştir. Aslında fonksiyon kavramı önceki sayı kavramlarının detaylandırılması ve genişletilmesinden başka bir şey değildir”.

Fonksiyon kavramının tam şekli 18. yy başlangıcına kadar kesin olarak belirtilememiştir. Halbuki yukarıda da belirtildiği gibi bu kavramın M.Ö. 2000 yıllarına kadar dayandığı konusunda belirtiler vardır. Kleiner (1989)'e göre fonksiyon kavramının tam ifadesinin yapılamamasının cebirsel alt yapı ve motivasyon eksikliği gibi iki sebebi vardır

1450–1650 yılları arasındaki 200 yıllık süreçte fonksiyon kavramı için temel olan birçok şeyde bir takım gelişmeler olmuştur.

- ❖ Reel sayıların ve hatta kompleks sayıların gelişmesi ve genişlemesi,
- ❖ Sembolik cebirin ortaya çıkması,
- ❖ Fen bilimlerindeki temel hareket çalışmaları,
- ❖ Cebir ve geometrinin birleşmesi,

Yukarıdaki gelişmelere ilaveten bu dönemlerde logaritma keşfedilmiş ve trigonometri de gelişmesine devam etmiştir. Matematikteki işlemlerde, bilinenlerle bilinmeyenler arasında işaretlerin (+, -, kuvvet, =, vb.) kullanılması, cebirsel denklemlerin yazılmasına ve cebirsel şekilde ifade edilmesine olanak sağlamıştır. Fen bilimleri özellikle mekanik bilimi gelişmesine devam etmiş, doğa bilimlerinde yeni kavramlar ve bu kavramların birçok şeyle olan ilişkisi gelişmiştir. Fen bilimlerindeki en önemli problem eğri hareketi ve hareketi etkileyen güçler arasındaki ilişkidir.

Descartes oluşturduğu geometride analitiksel olarak fonksiyon fikrini geliştirmiştir. Cebirsel problemlerin ve denklemlerin köklerini bulmak için bazı yöntemlerle cebirsel problemleri denklemlere indirgemek istemiştir. Descartes içinde x ve y 'nin bulunduğu bir denklemde x ve y 'den birinin değerine karşılık ötekini hesaplamada değişen nicelikler arasındaki ilişkiyi gösteren ilk kişidir. Descartes aynı zamanda cebirsel eğrilerinde sınıflamasını yapan ilk kişidir.

Bu aşamadan sonra eksik olan şey; bir denklemdeki bağımlı ve bağımsız değişkenlerin belirlenmesi idi. “Değişkenler fonksiyon değildir”. Fonksiyon kavramı, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki tek yönlü bir bağıntıyı ifade eder (Bos 1980).

Fonksiyon kavramının ilk tanımı mekaniksel ve geometriksel düşüncelerle bağlantılıdır. Örneğin logaritmik fonksiyon hiperbolik alan gibi düşünülebilir, herhangi bir eliptik fonksiyon konik kesitlerinin yayıdır, analizdeki integral de bir uzaklıktır, alandır, yay uzunluğu ya da iki şey arasındaki hacimdir. Kısacası adi anlamda bir toplamdır. Daha doğrusu bir toplamın limitidir.

Leibniz fonksiyon fikrini eğriler geometrisinden geliştirmiştir. 1673 te fonksiyon terimini kullanan ilk kişi Leibniz (1646-1716) dir. Leibniz, bir eğri üzerindeki teğet ve normal gibi geometriksel niceliklerin arasındaki ilişkiyi göstermek için fonksiyonu kullanmıştır. Ayrıca “sabit”, “değişken” ve “parametre” gibi kavramların da girişini yapmıştır. Leibniz fonksiyonları ve eğrileri, belirli bir denklemle gösterilenleri “cebirsel

fonksiyonlar” ve sonsuz ya da belirsiz denklemlerle gösterilenleri de “transandantal fonksiyonlar” olmak üzere iki kategoride sınıflamıştır.

Leibniz fonksiyonu herhangi bir düz doğrunun parçası ya da eğrilerin noktası gibi düşünmüştür. Bu hala ayrıntılı bir tanım değildir. Bu tanım daha sonra Johann Bernoulli ve Euler tarafından yapılmıştır. Johann Bernoulli 1698 deki makalesinde eğrileri içeren problemlerin çözümünde fonksiyon kelimesini kullanmıştır. Fonksiyonun analitiksel tanımını yapan ilk kişidir. Johann Bernoulli fonksiyonun notasyonu için Yunan alfabesinden “phi” nin ya da “phix” in kullanılmasını önermiştir. Bu gelişmelere rağmen fonksiyon terimi 1716 yılında basılan matematik terimleri sözlüğüne girememiştir. Euler ise f ’yi önermiş ve $f(x)$ ’i kullanmıştır. Fonksiyonun analitik tanımı ve sembolü yaygınlaşmasına rağmen fonksiyonun geometriksel notasyonunun kullanılmasına devam edilmiştir (<http://www.und.edu/dept/math/history/function.htm>).

Bernoulli’nin öğrencisi olan Euler (1707-1793) daha sonra nicelik yerine analitiksel ifadeyi kullanmıştır. Fonksiyon tanımı böylece analitiksel ifade ile pratikte tanımlanmıştır. Euler’ in 1748 te yaptığı tanım şöyledir:

“Bir değişken niceliğin fonksiyonu, niceliklerden ve sayılardan ya da sabit niceliklerden herhangi bir şekilde oluşturulan analitiksel bir ifadedir”.

Johann Bernoulli gibi Euler de fonksiyonu analitiksel olarak ifade etmiştir. Analitiksel ifade olarak fonksiyon kavramı, buna müteakip yıllarda başkaları tarafından da kabul görmüş ve kullanılmıştır. Bundan sonra parçalı fonksiyon olarak adlandırılan fonksiyonlar üzerine de tartışmalar yapılmıştır.

Euler 1755 de yeni bir soyut tanım yapmıştır. Buna göre “eğer bazı nicelikler diğer niceliklere bağımlıysa son söylenen değiştiğinde, ilk söylenen nicelik son söylenen niceliğe bağlı olarak değişiyorsa ilk söylenen nicelik son söylenenin bir fonksiyonudur”. Eğer x bir değişken niceliği gösterirse daha sonra herhangi bir şekilde x ’e bağımlı olan ya da x ile tanımlanan bütün nicelikler x ’in fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu tanım

sonra daha geniş anlam ve kullanım kazanmıştır. Fourier (1821) ve Dirichlet (1837) gibi diğer matematikçiler bu tanımı kullanmışlar ve daha da ilerletmişlerdir.

19. yüzyılda fonksiyon tanımının doğası ve manası derinden değişmiştir. Fonksiyon kavramına önemli bir itici güç, ünlü “titreşen tel” probleminden gelmiştir. Bu problem Euler’ın düzenlediği;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad y(0, t) = y(L, t) = 0$$

denklemlerle gösterilmiştir. Buradaki y denge durumundan uzaklaşmayı gösteren bağımlı değişkeni, x orijinden olan uzaklığı ve t ’de zamanı göstermektedir. (Bu konudaki daha ayrıntılı bilgi Luzin (1998) de sunulmuştur.) Fonksiyonun gelişmesine diğer önemli bir katkı da maddelerdeki ısı akışı problemi ile ilgilenen Fourier (1768–1830) in çalışmasından gelmiştir. Fourier ısıyı iki değişkenli bir fonksiyon gibi düşünmüştür. Bazı noktalarda O , uygun bir aralıkta trigonometrik serilerle bir fonksiyonun açılımının yapılabileceğini zannetmiştir. Fourier bununla birlikte bu iddiasının matematiksel ispatını vermemiştir. Problem, daha sonra Dirichlet (1805–1859) tarafından çalışılmıştır. Dirichlet fonksiyonu formüleştirerek, fonksiyonun analitiksel gösterimi ile fonksiyon kavramını birbirinden ayırma gereği duymuş ve bunu 1837 yılında (belirlenen nümeriksel kümedeki değişkenler arasında uygun keyfi bir değere göre fonksiyon tanımı) yapmıştır. Fonksiyon daha sonra bağımsız değişkenlerin bir değerini bağımlı değişkenlerin sadece birisi ile ilişkilendiren iki değişken arasındaki eşleme olmuştur. Kleiner (1989)’a göre Dirichlet aynı zamanda $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlanan ve tanımlı olduğu bütün noktalarda süreksiz olan ve çok iyi bilinen aşağıdaki Dirichlet fonksiyonunu vermiştir. Bu $[0,1]$ aralığında tanımlı,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \text{ fonksiyonudur.}$$

Cantor (1845–1918) tarafından başlatılan küme teorisinin ve cebirin gelişmesi ile birlikte fonksiyon tanımı gelişmesini sürdürmüştür.

Günümüze kadar hemen hemen aynı kalan ve bu gün fonksiyon tanımı olarak verilen tanım Bourbaki tarafından yapılmıştır. Bourbaki'ye göre fonksiyon “E ve F aynı ya da farklı iki küme olsun. E'nin bütün elemanları yani $\forall x \in E$ için x ile verilen ilişkide bir tek $y \in F$ var ise E' nin x elemanı ile F'nin y elemanı arasındaki ilişki fonksiyonel ilişki olarak adlandırılır. $\forall x \in E$ 'yi $y \in F$ ile ilişkilendiren yapıya fonksiyon adı verilir. y , fonksiyonun x değıeri olarak adlandırılır ve fonksiyon, verilen ilişki ile belirlenir” (Siu 1994).

Böylece fonksiyonun tanımı 300 yıllık gelişimini tamamlamıştır. Günümüzde üniversitelerde fonksiyon kavramı ya bir kural olarak ya da düzenli sayı çiftlerinin kümesi olarak öğretilmektedir. Fonksiyonlar genellikle iki ya da daha fazla değışkenlerle belirtilen bazı matematiksel ifadelerle ve formüllerle öğretilmektedir. Bir y değışkeni x değışkeniyle ifade ediliyorsa y 'ye x 'in bir fonksiyonu denir. Örneğın $y = 2x + 1$, x 'in her bir değıeri için bu formül y 'ye karşılık gelen bir değıeri belirler. $x = 2$ için $y = 2.2 + 1 = 5$ dir. Fonksiyonlar genellikle bir harfle çoğunlukla da f ile gösterilir, $y = f(x)$ olarak yazılır ve “ y eşittir $f(x)$ ” diye okunur. Bu notasyonun anlamı şudur: y değıeri f fonksiyonu kullanılarak x değıeriyle belirlenir. x bağımsız değışken, y de x 'e bağı değıerler aldığından bağımlı değışken olarak adlandırılır. Sonuç olarak fonksiyonu günümüzde şu şekilde tanımlamaktayız:

A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere A'nın her bir elemanını, B'nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen A'dan B'ye tanımlanan f bağıntısına fonksiyon denir ve $f : A \rightarrow B$ ile gösterilir. $a \in A$ 'ya karşılık gelen $b \in B$ 'de $b = f(a)$ ile gösterilir ve b'ye a'nın f altındaki görüntüsü denir. A'ya f 'nin tanım kümesi ve $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ 'ya da f 'nin görüntü kümesi denir (Işık, 2002).

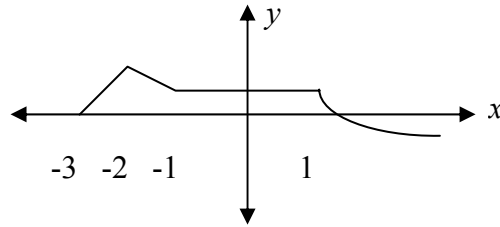
1.4. Süreklilik ve Türevlenebilme

Türevlenebilme ve süreklilik arasındaki bağlantı genellikle öğrenciler tarafından karıştırılan bir konudur. Eğer f fonksiyonunun, tanım kümesindeki her noktada türevi var ise f fonksiyonuna türevlenebilir fonksiyon denir. Türevlenebilen bir fonksiyonun küçük bir parçası neredeyse bir düz doğruyu andırır. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi bir teğet doğrusuna benzer.

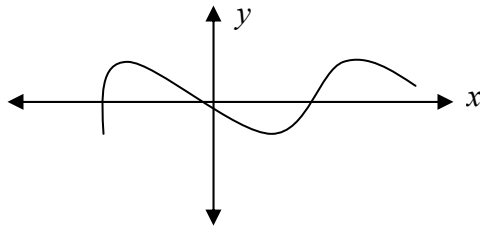


Şekil 1.3. Türevin geometriksel anlamı

Grafiksel olarak bakıldığında sürekli bir fonksiyon keskin köşelere sahip olabilir. Fakat türevlenebilen bir fonksiyonun keskin köşeleri yoktur, pürüzsüz bir yapıdadır.



Şekil 1.4. Tanımlı olduğu aralığın her noktasında sürekli fakat her noktasında türevli olmayan fonksiyon örneği.



Şekil 1.5. Tanımlı olduğu her noktada hem sürekli hem de türevli fonksiyon örneği

Aslında türev “yerel” olarak düz doğruları andıran eğrilerin incelenmesi gibi düşünülebilir. Türevlenebilen bir fonksiyonun sürekli olması gerektiğini beklemek daha akılcı olur. Çünkü türevlenebilen bir fonksiyonun grafiği yerel olarak bir doğruya benzer. Bir doğruda ise kopukluklar ve boşluklar yoktur. Burada türev ve süreklilik tanımlarını hatırlatmak gerekirse;

Türev, $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ ve A ’nın bir yığılma noktası ve f, A dan $\mathbb{R}$ ye tanımlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ limitinin var olmasıdır.}$$

Yada h yerine Δx alınırsa

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{ limitinin var olmasıdır. } (\Delta y = \Delta f \text{ alınmıştır}$$

çünkü $y = f(x)$ dir)

Buradaki $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ olup f fonksiyonunun a ’da sürekli olduğunu göstermek için üç koşulun gerçekleşmesi gerekir.

1. $f(a)$ tanımlı olmalı,
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ var olmalı,
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ olmalıdır.

$f(a)$ ’nın tanımlı olduğu bilinmektedir.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ varlığını ve $f(a)$ değerine eşit olduğunu göstermek için

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0 \dots \quad (1)$$

bağıntısının geçerliliğinin varlığını göstermeliyiz. (1) bağıntısı geçerli ise aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \{ [f(x) - f(a)] + f(a) \} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \\
 &= 0 + f(a) \\
 \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= f(a)
 \end{aligned}$$

olur ve süreklilik için tüm koşullar sağlanır. Böylece geriye (1) ifadesinin doğruluğunu gösterilmesi gerekir. Bu gösterildiği takdirde türevlenebilme ve süreklilik arasındaki ilişki de açıklanmış olacaktır. Yani $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesine ait $x = a$ noktasında türevli ise $x = a$ noktasında süreklidir.

$f(x)$, $x = a$ noktasında sürekli ise,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$x \rightarrow a$ olması demek $x \neq a$ olmasıdır. Buradan

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)} (x - a)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının limitini $x \rightarrow a$ için alırsa,

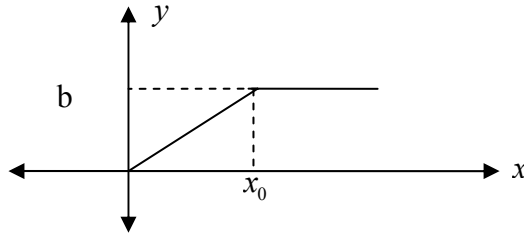
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{f'(x)} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\
 &= f'(x) \cdot 0 \\
 \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= 0
 \end{aligned}$$

Olup buda istenilen şeydir. Böylece f fonksiyonunun a 'da sürekli olduğu gösterilmiştir.

f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıktaki her noktada türevli ise fonksiyonun bu noktalarda sürekli yada kısaca sürekli fonksiyon olduğu söylenebilir. Türevlenebilirlik sürekliliği gerektirmesine rağmen tersi doğru değildir. Bunu göstermek için

$$f(x) = \begin{cases} ax & x < x_0 \text{ ise} \\ b & x \geq x_0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Buradaki a, b, x_0 pozitif olmak üzere, bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



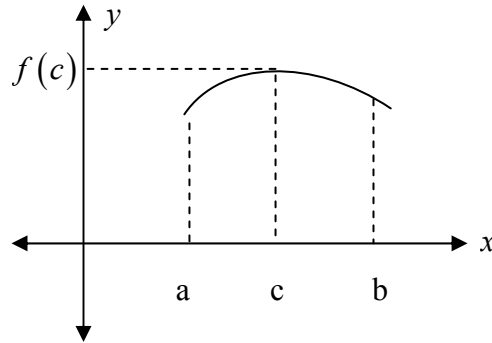
Şekil 1.6. $f(x) = \begin{cases} ax & x < x_0 \text{ ise} \\ b & x \geq x_0 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun grafiği

Sürekliliğin tanımından $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğu açıktır. Bununla birlikte $f(x)$ fonksiyonunun bu noktada türevi var mıdır? Yoktur çünkü türev, geometriksel olarak fonksiyona x_0 noktasından çizilen teğetin eğimidir. (x_0, b) noktasından geçen ve fonksiyon eğrisine teğet olan iki doğru çizilebilir. Dolayısıyla bu noktada iki teğete sahip oluruz. Bundan dolayı $f'(x_0)$ belirsizdir. Yani x_0 noktasında $f(x)$ fonksiyonunun türevi yoktur.

1.5 f , f' ve f'' Fonksiyonları Arasındaki İlişki

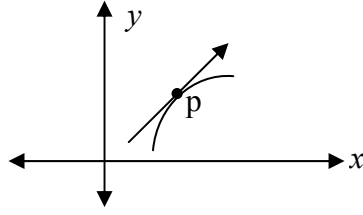
Her fonksiyon $f(x) = c$ fonksiyonu gibi sabit olmayıp belirli aralıklardaki davranışı önceden tahmin edilemez. Yani fonksiyon nerede artıyor, nerede azalıyor, nerede sıfır değerini, nerede maksimum–minimum değerlerini alıyor bilinemez. Fakat fonksiyon grafiksel olarak gösterilmiş ise fonksiyonun grafiğine bakılarak fonksiyonun davranışı hakkında bilgi edinilebilir. Eğer fonksiyon cebirsel olarak yani bir denklem ile verilmiş ise fonksiyonun davranışı hakkında bilgi sahibi olmak için fonksiyonun türevlerinden faydalanılır.

Bir f fonksiyonu, $c \in (a, b)$ olmak üzere $x = c$ noktasında en büyük değerini yani maksimum değerini aldığını farz edelim. Böylece $f(c)$ verilen (a, b) aralığında fonksiyonun alabileceği en büyük değerdir. Bunu grafiksel olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

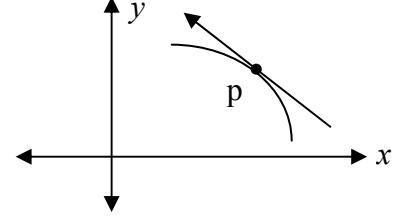


Şekil 1.7. Açık aralıkta maksimum değer

Maksimum değerinin meydana geldiği $(c, f(c))$ noktasını P ile gösterelim. $f(x)$ türevlenebilir ise en azından bazı açık aralıklarda P den geçen bir teğet doğrusundan söz edebiliriz. Buradaki teğet için ne söylenebilir? Teğetin eğimi sıfır değil ise, teğetin eğimi ya pozitif ya da negatif olmalıdır. O zaman P civarında grafiğin küçük bir parçasını aldığımızda teğet ya Şekil 1.8 deki gibi ya da Şekil 1.9'deki olmalıdır.

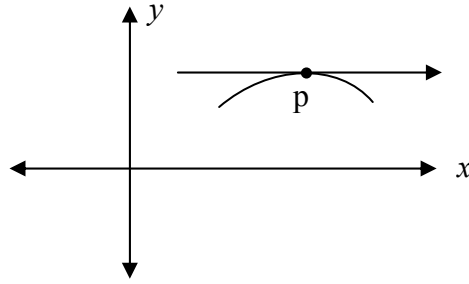


Şekil 1.8. Pozitif eğimli teğet



Şekil 1.9. Negatif eğimli teğet

Ne Şekil 1.8 deki nede Şekil 1.9 daki P noktası, eğrinin maksimum noktası değildir. Yani her iki durumda da fonksiyon P noktasının aldığı değerden daha büyük değerler alabilir. Bundan dolayı P noktasından çizilen teğet aşağıdaki gibi yatay olmalıdır. Teğetin yatay olması demek eğimin sıfır, eğimin sıfır olması da $f'(x) = 0$ olmasıdır.



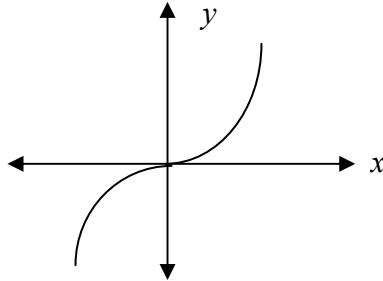
Şekil 1.10. Sıfır eğimli teğet

Aynı mantıkla hareket ettiğimizde minimum noktasındaki teğetin eğiminin de sıfır olduğu görülür. Yani $f'(x)=0$ dır. Analizde maksimum ve minimum noktalarının ikisi beraber ekstremum noktası olarak adlandırılır. Bir fonksiyonun ekstremum noktalarının tespit edilmesinde Fermat teoremi olarak bilinen; “ $f:[a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu $c \in (a,b)$ noktasında bir minimuma yada maksimuma sahip ve f fonksiyonu c ’de türevlenebilir ise $f'(c) = 0$ dır” ifadesinden faydalanılır.

Bunu cebirsel olarak göstermek gerekirse: f , fonksiyonu c noktasında maksimuma sahip olsun. Bu durumda $\delta \in R^+$ vardır ki $|x - c| < \delta$ şartını sağlayan $\forall x$ için

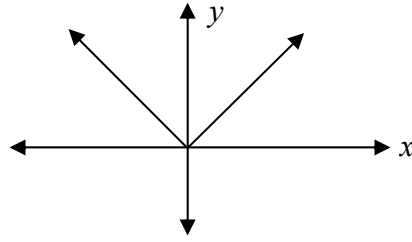
$f(x) \leq f(c)$ 'dir. $|h| < \delta$ olacak şekilde seçilen $\forall h$ için $c+h$ da bu komşuluğun içinde olduğundan h ister negatif, ister pozitif olsun $f(c+h) \leq f(c) \Rightarrow f(c+h) - f(c) \leq 0$ 'dır. Dolayısıyla $h > 0$ için $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ ve $h < 0$ için $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$ olur. f c 'de türevli olduğundan h ister artan, isterse azalan değerlerle sifıra yaklaşsın $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$ olur ve $f'(c) \leq 0$ ve $f'(c) \geq 0$ elde edilir. Her ikisinin de gerçekleşmesi için $f'(c) = 0$ olmalıdır.

Fakat bu teoremin tersi doğru değildir. Örneğin $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $f'(x) = 3x^2$ olup $f'(0) = 0$ 'dır. Fakat $x = 0$ noktasında fonksiyon ne maksimuma ne de minimuma sahiptir. Bunu aşağıdaki $f(x) = x^3$ grafiğinde görmek daha kolay olabilir.



Şekil 1.11. $y = f(x) = x^3$ Fonksiyonun grafiği

Bazı istisnai durumlar vardır ki ekstremum noktalarında fonksiyonun türevi olmayabilir. Örneğin $f(x) = |x|$ fonksiyonunu ele alalım fonksiyon $x = 0$ noktasında minimum değerini alır. Bununla birlikte $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevi yoktur. Fakat bu çok karşılaşılan bir durum değildir. $y = f(x) = |x|$ eğrisinin $(0,0)$ 'da bir ekstremum değil ancak bir “köşe noktası” var denilebilir.

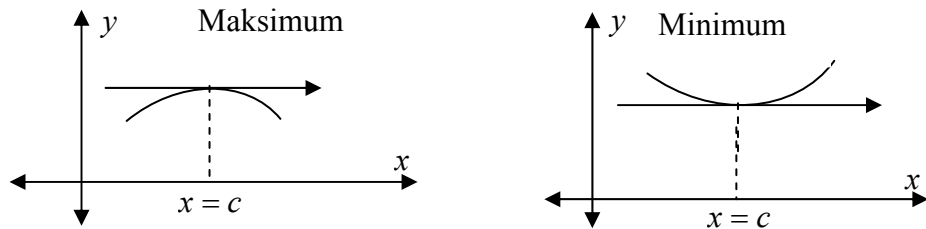


Şekil 1.12. $y = f(x) = |x|$ fonksiyonun grafiği

Bir başka konu da fonksiyonun nerede azalan nerede artan olduğunun bulunmasıdır. Öncelikle burada fonksiyonun artması ya da azalması ne demektir, onu açıklayalım:

Tanım kümesinin bir alt aralığında $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyor ise f fonksiyonu bu alt aralıkta artan bir fonksiyondur. Yine tanım kümesinin bir alt aralığında $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyor ise f fonksiyonu bu aralıkta azalan bir fonksiyondur (Kadıoğlu ve Kamali 2001).

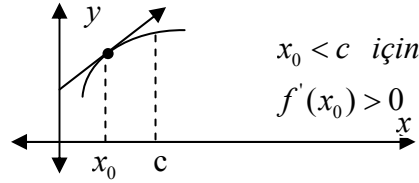
Öncelikle fonksiyonun artan ya da azalan olduğu yerleri bulmak için geometriksel gösterimi kullanalım. $x = c$ noktasında fonksiyonun bir ekstremuma sahip olduğunu varsayalım. Bu nokta maksimum ya da minimum olabilir. Bunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Şekil 1.13. Maksimum ve minimum noktadan çizilen teğetler

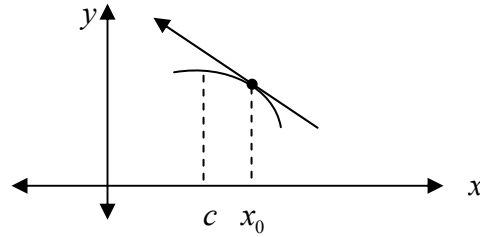
Daha önce de ifade ettiğimiz gibi ekstremum noktalarından çizilen teğet x eksenine paraleldir. Teğetin eğimi sıfır olduğu için $f'(c) = 0$ 'dır. $x = c$ noktası maksimum

noktası olması durumunda $x_0 < c$ noktasından çizilen teğetin eğimi pozitiftir. Dolayısıyla $f'(x_0) > 0$ için fonksiyon artandır.



Şekil 1.14. Artan fonksiyon ile çizilen teğet (birinci türev) arasındaki ilişki

Aynı şekilde $x_0 > c$ aldığımızda çizilen teğetin eğimi negatif olup $f'(x_0) < 0$ 'dır. Yine aşağıdaki şekle baktığımızda $f'(x_0) < 0$ yerde fonksiyon azalandır.



Şekil 1.15. Azalan fonksiyon ile çizilen teğet (birinci türev) arasındaki ilişki

Buradan şu sonuçları elde ederiz:

1. Eğer bir aralıkta fonksiyonun birinci türevi pozitif ise fonksiyon o aralıkta artandır.
2. Eğer bir aralıkta fonksiyonun birinci türevi negatif ise fonksiyon o aralıkta azalandır.

Bir aralığın her noktasında $f'(x) > 0$ olduğunu varsayalım.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \text{ dir. Limitin özelliğinden } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

yazılabilir. $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ bölümün işareti pozitif ise pay ve paydasının işaretleri

aynı olmalıdır. Yani $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$ ise $\Delta x < 0$ veya $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$ ise $\Delta x > 0$ olmalıdır. $x + \Delta x < x$ iken $f(x + \Delta x) < f(x)$ ve $x < x + \Delta x$ iken $f(x) < f(x + \Delta x)$ yazılabilir. Her iki durumda da fonksiyon artandır.

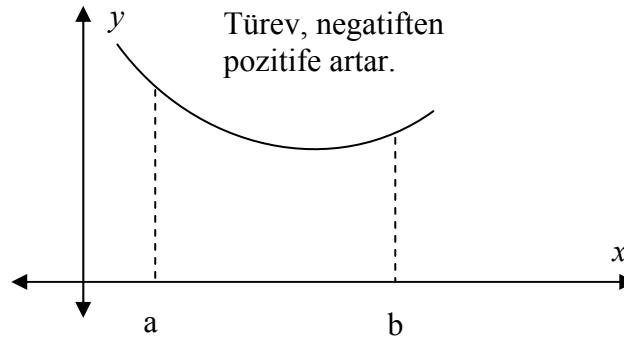
Bu seferde bir aralığın her noktasında $f'(x) < 0$ olduğunu kabul edelim.

$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$, dır. Yine limitin özelliğinden

$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$ 'dır. Bu eşitsizliğin gerçekleşmesi için $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$ için

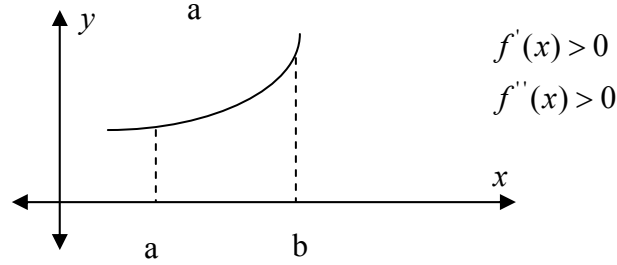
$\Delta x > 0$ yada $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$ için $\Delta x < 0$ olmalıdır. $x < x + \Delta x$ iken $f(x + \Delta x) < f(x)$ ve $x + \Delta x < x$ iken $f(x) < f(x + \Delta x)$ olup her iki durumda da fonksiyon azalandır.

Bir f fonksiyonunun davranışı hakkında tahminde bulunmada birinci türev yetersiz kalabilir bu aşamada ikinci türevden faydalanılır. Birinci türevin işareti bize bir fonksiyon eğrisinin artan veya azalan olduğunu gösterir. f'' 'in (a,b) açık aralığında bütün x ler için pozitif olduğunu düşünelim. f'' , f' 'in türevi olduğu için f' 'in (a,b) aralığındaki her değer için artan bir fonksiyon olduğu anlaşılır Yani x arttıkça $y = f(x)$ grafiğinin (a,b) aralığına karşılık gelen kısmında soldan sağa gittiğimizde eğim artar. Aşağıdaki şekle bakarsak eğimin negatiften pozitive doğru arttığı görülür.



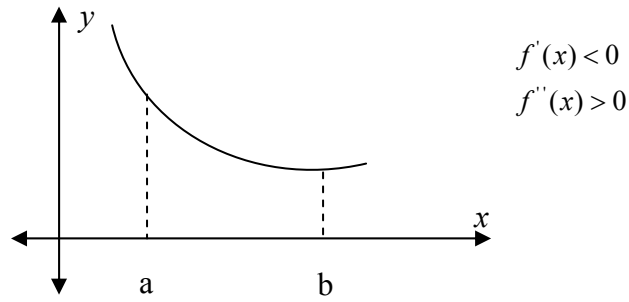
Şekil 1.16. Negatiften pozitive doğru artan türev

Artan bir fonksiyon için (a,b) aralığının her noktasında eğim, pozitif olabilir.



Şekil 1.17. Pozitif eğimli artan fonksiyon

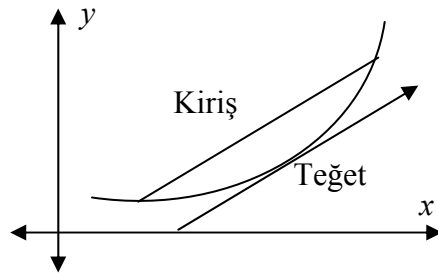
Ya da eğim, (a,b) aralığında negatif ama artan olabilir.



Şekil 1.18. (a,b) aralığında negatif ama artan eğime sahip fonksiyon örneği

Buradan fonksiyonun önemli bir özelliğini çıkartabiliriz.

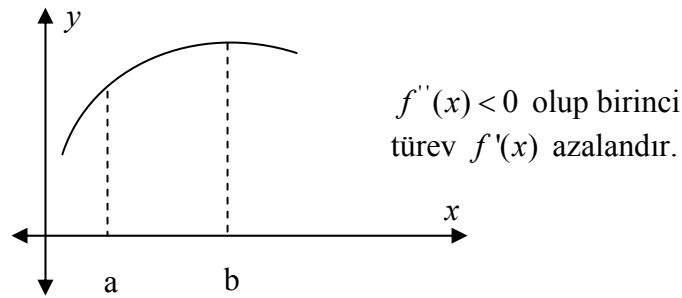
“Birinci türevi (a,b) aralığının her noktasında artan ise f fonksiyonu (a,b) aralığında yukarı bükeydir”. Eğer bir f fonksiyonu yukarı bükey ise teğet eğrinin altında, kirişte eğrinin üstünde kalır.



Şekil 1.19. Yukarı bükey bir fonksiyona çizilen kiriş ve teğet

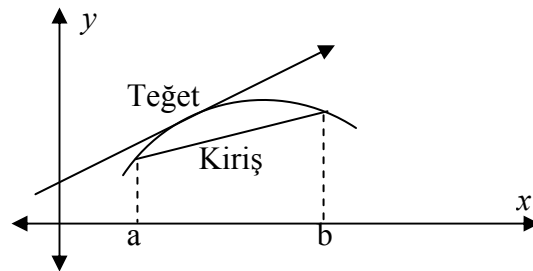
Görüldüğü gibi $f''(x)$ 'in pozitif olduğu yerde $f'(x)$ artan ve f fonksiyonu yukarı bükeydir. Ancak bir fonksiyon yukarı bükey ise $f''(x)$ daima pozitif olmayabilir. Örneğin $y = f(x) = x^4$ fonksiyonu herhangi bir aralıkta yukarı bükeydir. Çünkü $f'(x) = 4x^3$ artandır. $f''(x) = 12x^2$ ise her zaman pozitif değildir. Örneğin $x = 0$ için $f''(0) = 0$ 'dır.

Diğer yandan $f''(x)$, (a, b) aralığında negatif ise $f'(x)$ azalandır ve şekli de aşağıdaki gibidir.



Şekil 1.20. İkinci türevle birinci türev arasındaki ilişki

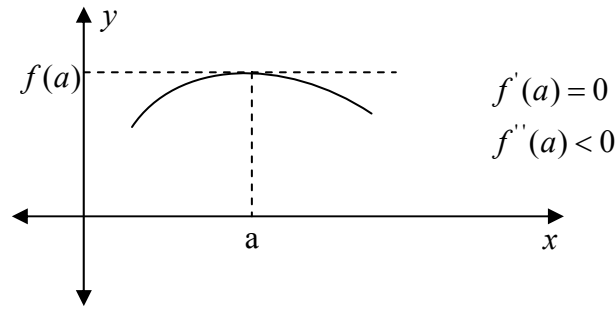
Buradan şu sonuç çıkarabilir: “ $f'(x)$, (a, b) aralığının her x noktasında azalan ise $f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında aşağı bükeydir”. Fonksiyonun aşağı bükey olduğu yerde eğriye çizilen teğet eğrinin üstünde kiriş ise eğrinin altındadır.



Şekil 1.21. Aşağı bükey bir fonksiyona çizilen kiriş ve teğet

Fonksiyon eğrisinin aşağı bükeylikten yukarı bükeyliğe ya da yukarı bükeylikten aşağı bükeyliğe geçtiği noktaya fonksiyonun dönüm (büküm) noktası denir.

Ayrıca $f''(x)$ bir kritik noktanın maksimum noktası mı yoksa minimum noktası mı olduğu konusunda bize bilgi verir. Örneğin $x = a$ noktası $f(x)$ 'in bir kritik noktası ve $f''(x) < 0$ olsun. Eğer $f''(x)$ a 'yı da içeren uygun bir aralıkta sürekli ise $f''(x)$ bu aralıkta negatif olacaktır. Buna göre $(a, f(a))$ noktasının civarında $f(x)$ 'in grafiği aşağı bükeydir ve böylece $f(x)$ 'in grafiği $(a, f(a))$ kritik noktasındaki teğetin altında kalacaktır. Bu da grafiksel olarak aşağıdaki gibi gösterebilir.



Şekil 1.22. Maksimum nokta ile ikinci türev arasındaki ilişki

Buradan fonksiyonun $(a, f(a))$ noktasında yerel bir maksimumu olduğu anlaşılır. Aynı şekilde $f'(a) = 0$ ve $f''(a) > 0$ olduğunda $(a, f(a))$ noktası yerel minimum noktası olur. Buradan literatürde de görülen şu sonuçlar çıkarılabilir: f 'nin türevi $f'(x)$ a'yı içeren uygun bir açık aralıkta tanımlı bir fonksiyon olsun. $f''(a)$ 'nın tanımlı olduğunu düşünelim. $f'(a) = 0$ ve $f''(a) < 0$ ise f 'nin $(a, f(a))$ da yerel maksimumu, $f'(a) = 0$ ve $f''(a) > 0$ ise $(a, f(a))$ da yerel minimumu vardır.

$f(x)$, $f'(x)$ ve $f''(x)$ fonksiyonları arasındaki ilişkileri şu şekilde özetleyebilir:

Birinci türevin sıfır olduğu ya da birinci türevin tanımlı olmadığı ve $f(x)$ fonksiyonun tanımlı olduğu nokta fonksiyonun bir kritik noktasıdır. Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında ekstremuma sahip ise $f'(x_0) = 0$ dır. Birinci türev $f'(x)$ 'nin pozitif olduğu yerde $f(x)$ fonksiyonu artan, $f'(x)$ 'in negatif olduğu yerde $f(x)$ fonksiyonu azalandır. Ayrıca eğer $f(x)$ fonksiyonu bir mutlak ekstremum noktasına sahip ise bu noktalar $f(x)$ fonksiyonun kritik noktalarıdır. İkinci türev $f''(x)$ de $f(x)$ 'in türevli olduğu tanım kümesi üzerindeki aralıklarda $f(x)$ 'in davranışını analiz etmede kullanılabilir. Eğer $f''(x)$, $f(x)$ 'in tanımlı olduğu herhangi bir aralıkta pozitif ise bu aralıkta fonksiyon yukarı bükey, $f''(x)$ negatif ise aşağı bükeydir. Fonksiyonun yukarı bükeylikten aşağı bükeyliğe ya da aşağı bükeylikten yukarı bükeyliğe yön değiştirdiği nokta fonksiyonun (büküm) dönüm noktası olarak adlandırılır. Büküm noktası fonksiyonun sürekli olduğu fakat $f''(x) = 0$ ya da $f''(x)$ 'in olmadığı yerdir.

1.6. Türev Kavramının Farklı Gösterimleri

Türev kavramı nümeriksel, grafiksel ve sembolik olmak üzere üç farklı şekilde gösterilebilir. Bunların her biri türevin manasını yansıtır.

1.6.1. Nümeriksel gösterim

Fonksiyonun nümeriksel gösteriminden türev kolaylıkla bir değerin yakınındaki değişim oranını bulma olarak anlaşılır.

$[x, x+h]$ aralığındaki ortalama değişim oranı $= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ dır. Anlık değişim

oranı h 'nın "0" a yaklaştığı durumda gerçekleşir. Pratikte, standart problemlerde türev ortalama değişim oranının limitinden çıkartılabilir. Örneğin $y = x^2 + 2x$ fonksiyonu için $x = 2$ ve $h = 0,0001$ alınırsa $[2, 2.0001]$ aralığındaki ortalama değişim oranı

$$\begin{aligned}
&= \frac{[(2,0001)^2 + 2.(2,0001)] - [2^2 + 2.2]}{0,0001} \\
&= \frac{[4,00040001 + 4,0002] - 8}{0,0001} = \frac{8,00060001 - 8}{0,0001} = \frac{0,00060001}{0,0001} \\
&= 6,0001
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $x = 2$ noktasındaki anlık değişim oranı için (farkın bölümü=6) doğru cevap zorlanmadan bulunabilir. Böylece türevin nümeriksel gösterimi bir fark bölümünün belirlenmesini içerir.

1.6.2. Grafiksel gösterim

Türevlenebilen bir fonksiyonun grafiksel gösteriminden türev, eğrinin eğimini bulma olarak anlaşılır. Eğrinin eğiminden alınan küçük bir parça yüksek çözünürlükteki bir ortamda doğru gibi (bir eğrinin çok küçük bir kısmı bilgisayar ortamında büyütülürse o kısım bir doğru gibi olur) ya da eğriye çizilen teğetin eğimi gibi yorumlanabilir. Türevin grafiksel gösterimi “ $(x, f(x))$ ” noktasında eğriye çizilen teğetin eğimini bulmayı içerir. Örneğin yukarıdaki fonksiyona $x = 2$ noktasında çizilen teğetin denklemi $y = 6x - 4$ ’tür ve $x = 2$ noktasında eğriye çizilen teğetin eğimi de 6 olur.

1.6.3. Sembolik türev

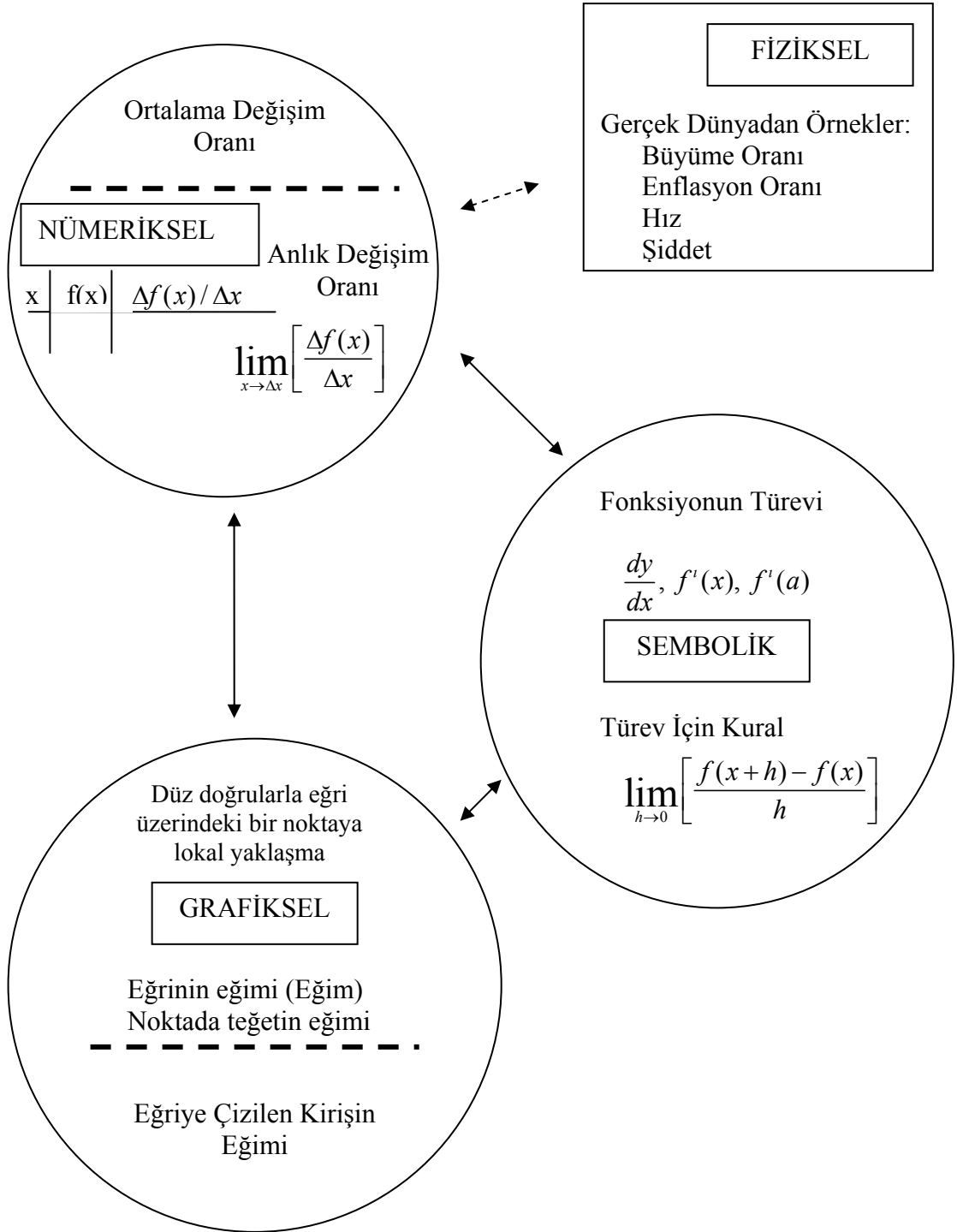
Fonksiyonun sembolik gösteriminden türev sembolik bir işlem gibi görülür. Bu yüzden bir sembolik türev sembolik kurallarla bulunur. Örneğin $y = x^2 + 2x$ fonksiyonunun türevi verilen sembolik kurallar ile $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$ bulunur. Özel bir noktada türev istenir ise, x değeri sembolik türevde yerine yazılır. Sonuç olarak $x = 2$ noktasındaki türev $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$ eşitliğinde x yerine 2 yazılırsa $\frac{dy}{dx} = 2.2 + 2 = 6$ bulunur.

Türevin üç farklı gösterimi (nümeriksel (N), grafiksel (G) ve sembolik (S)) birbiriyle ilişkilidir. Nümeriksel; değişim oranını, grafiksel; eğimi, sembolikte sembolik türevi yani türevi temsil eder.

Türev kavramı genellikle sembolik türevin yerine kullanılır. Nümeriksel türev ve grafiksel türev, bu gösterimlerin arasını ayırt etmeye gerek duyulduğunda kullanılır. Türev kavramı türev fonksiyonunu ve onun özel bir noktadaki değerini belirlemek için kullanılır (Kendal 2001).

Kendal (2001) türevin üç farklı gösterimi arasındaki ilişkiyi ve yukarıda belirtilen üç türev alma işlemini belirleyen türevin kavram haritasını çizmiştir

Şekilde nümeriksel, grafiksel ve sembolik gösterimlerin her biri bir çember içinde gösterilmiştir ve gösterimler arasındaki dönüşümü belirlemek için kesintisiz oklar kullanılmıştır. Koyu noktalı çizgiler yardımıyla limitin alındığı ve alınmadığı durumlar birbirinden ayrılmıştır. Böylece grafiksel gösterimi temsil eden çemberde “eğrideki kirişin eğimi” (limitin alınmadığı durum) “bir noktadaki teğetin eğiminden” (limitin alındığı durum) ve eğrinin eğiminden ayrılmıştır. Benzer olarak nümeriksel gösterimi temsil eden çemberde “ortalama değişim oranı” (limitin alınmadığı durum) “anlık değişim oranından” (limitin alındığı durum) ayrılmıştır. Sembolik türev standart türev kuralları çalışıldığında ve türevin sonucu sembolik bir fonksiyon veya onun özel bir noktadaki değeri olduğundan limit işlemini içerir.



Şekil 1.23. Türevin kavram ağı

1.7. Analiz Öğretiminde Karşılaşılan Zorluklar

Dünyanın birçok yerinde analize karşı büyük bir ilgi vardır. Öğrenme zorlukları ve yanlış anlamalar bir çok araştırmacı tarafından araştırılmakta ve tartışılmaktadır. 1992’de Quebec’te’ki 7. uluslararası matematik eğitimi kongresinde bir çalışma grubu öğrencilerin analizde karşılaştıkları zorluklar üzerine odaklanmıştır. Analiz öğretiminde ve öğrenilmesindeki problemler tartışılmıştır. Bu çalışmalardan birisi olan Tall (1992) analizde karşılaşılan zorlukları iki başlıkta toplamıştır.

1.7.1 Limit işlemi ve sonsuzluk kavramı ile ilgili temel zorluklar

Analizde bazı kavramlar vardır ki hangi yöntemle yaklaşılsa yaklaşılsın bu kavramların anlaşılması zordur. Bu kavramlardan biri olan limit kavramı aşağıdakileri kapsayan birçok bilişsel zorluklara neden olur.

- ❖ Dilden kaynaklanan zorluklar: “Limit”, “yaklaşma”, “istediğimiz kadar küçük” gibi terimlerin konuşma diline ait manaları ile matematiksel kullanımları farklıdır.
- ❖ Limit basit bir aritmetiksel ya da cebirsel işlem değildir. Sonsuzluk kavramını içinde barındıran bir gizemdir.
- ❖ “Keyfi alınan küçük bir değişken” işlemi “keyfi küçük değişken nicelik” gibi yorumlanmaktadır. Hâlbuki limitte kullanılan sonsuz küçüklükler bir nicelik gibi düşünülemez.
- ❖ Aynı şekilde “istediğin kadar N’yi büyük alma” düşüncesi de tamamen sonsuz sayılar kavramını içerir.
- ❖ Öğrenciler genellikle limitin gerçekten limit değerine ulaşp ulaşmadığı konusunda zorluklara sahiptirler.
- ❖ Sonludan sonsuza geçişte, “sonsuzda meydana gelen şeyin ne olduğunu” anlamada karışıklık vardır.

1.7.2. Analizin diğer kavramlarından kaynaklanan zorluklar

Bu bölümde Tall (1992) genellikle türevle alakalı konularda öğrencilerin karşılaştıkları ve bu çalışmanın alt yapısıyla ilgili olduğu düşünülen zorluklara değinmiştir.

- ❖ Fonksiyonun sınırlı zihinsel görüntüsü
- ❖ Leibniz notasyonundan kaynaklanan zorluklar
- ❖ Gerçek yaşantı problemlerinin analiz problemlerine dönüştürülmesindeki zorluklar
- ❖ Uygun betimlemelerin seçiminde ve kullanılmasındaki zorluklar
- ❖ Cebirsel manipölasyonlar ya da bunların eksikliğinden kaynaklanan zorluklar
- ❖ Sınırlı sürede, kompleks yeni fikirleri benimsemedeki zorluklar
- ❖ Öğrencilerin kavramsal anlamadan ziyade işlemsel metotları tercih etmesi.

Fonksiyonun sınırlı zihinsel görüntüsü: Konular formülle verilen standart fonksiyonların türevi ve integrali üzerine odaklandığında elementer seviyedeki analiz konularında bir zorluğa sebep olmaktadır. Öğrenciler $\int_{-3}^3 |x+2| dx$ (Mundy 1984) ya da

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \leq 1 \text{ ise} \\ bx^2 + x + 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases} \quad x=1 \text{ noktasında türevlenebilir ise } a \text{ ve } b'yi \text{ bulun}$$

(Selden vd. 1989) gibi alışılmışın dışındaki sorularla karşılaştıklarında zorlanmışlardır. Öğrenciler deneyimlerinin dışında bir örnekle karşılaştıklarında bu alışılmışın dışındaki örnekler öğrencilerin zorlanmalarına ve daha sonra öğrencilerin kendilerini aşırı derecede kötü hissetmelerine neden olur. Eğer öğrenciler fonksiyon kavramını daha detaylı görmezlerse bunun gibi zorlukların olması olağandır.

Gerçek yaşantı problemlerinin analiz formüllerine dönüşümünde ki zorluklar (bilişsel araştırmalarda çok az görülmesine karşın) konunun bir parçasıdır. Birçok analiz sınavı problem çözmeden ziyade sembolik işlemler üzerine odaklanır. Analiz sınavları hemen hemen maksimum ve minimum problemlerinin dışında gündelik hayattaki problemlere değinmez. Örneğin öğrenciler “a metre genişliğindeki bir koridor ile b metre genişliğindeki bir başka koridor dik olarak kesişiyorlar. Birinci koridordan ikinci

koridora yere paralel taşınabilecek en uzun boruyu bulunuz” gibi bir problem ile karşılaştıklarında bu problemi matematiksel ifadeye aktarmada zorlanacaklardır.

Leibniz notasyonu $\frac{dy}{dx}$ analizin vazgeçilmez sembollerinden birisi olmasına rağmen ciddi kavramsal problemlere neden olur. Leibniz notasyonu bir kesir midir yoksa tek parça birbirinden ayrılamayan sembol müdür? $\frac{dy}{dx}$ deki dx ile $\int f(x).dx$ ’deki dx arasındaki ilişki nedir? $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ denklemiindeki “ du ” ları sadeleştirebilir miyiz? Bu terimlere modern bir anlam verilir ise analizdeki bütün konular için tutarlı, anlamlı bir yorum yapılabilir. Fakat bu her zaman her yerde kabul görmeyebilir. Diğer yandan tatmin edici uygun bir manayı vermedeki başarısızlık bilişsel karmaşalara öncülük eder. Bu, notasyon ve notasyonun anlamı arasındaki kavramsal bir uçurumu daha da arttırır.

Uygun betimlemelerin seçilmesindeki ve kullanılmasında ki zorluklar herkes tarafından bilinen yaygın bir konudur. Tall (1992) göre, Robert and Boschet (1984) öğrencilerin her zaman başarılı oldukları, kolaylıkla kullanabildikleri sembolik, nümerik ve görsel yaklaşımların çeşitlerini rapor etmiştir. Dreyfus and Eisenberg (1986,1991) öğrencilerin analizdeki görsel kavramlarda isteksiz davrandıklarını bulmuştur. Bununla birlikte araştırmalar görsel görüntünün hayati bir anlayış oluşturabileceğini göstermektedir. Ancak görselleştirme bazen tümdengelimli düşünme yaklaşımında öğrencilerin bazen bazı zorluklara düşmesine neden olabilir(Aspinwall vd. 2002).

Cebirsel (kullanımlar, manipülasyon) işlemler bir çok öğrenci tarafından tercih edilen işlem türüdür. Öğrencilerin trigonometrik bilgileri çok iyi öğrenmeden ve polinomlarda çok fazla işlem yapmadan analiz öğrenmeye başlamaları cebirdeki rutin işlemlerin uzun süreli olmasını engellemektedir.

Sınırlı bir zamanda, kompleks olan yeni fikirleri benimsemedeki zorluklar üniversite matematiğinin her aşamasında meydana gelmektedir. Kavramlar zaman geçtikçe değişmektedir. Limit kavramı başlangıçta sezgisel olarak bir sayıya sağdan ve soldan

yaklaşma olarak tanımlanabilirken daha sonra epsilon-delta ($\varepsilon - \delta$) tekniği ile verilir. Daha sonra verilen bu sezgisel tanımlardan uzaklaşarak teoremler öğretilir. Böylece bu dönüşümün farklı aşamalarında öğrenciler kavramların farklı anlamalarıyla karşılaşır. Bu da öğrencilerin zorlanmalarına neden olur.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Öğrencilerin Analizi Anlamaları

Analiz öğretimi ve öğrenimi son 15–20 yıldan beri matematikçiler ve matematik eğitimcileri tarafından tartışılan çok önemli bir konudur. Bu sebepten dolayı lisede ve daha sonraki matematik müfredatlarında analiz çok önemli bir bileşen olarak düşünülmektedir. Hugles-Hallett vd. (1994) analizin keşfi hakkında şöyle demişlerdir:

“Analiz insanoğlunun en büyük entelektüel başarılarından biridir. Newton ve Leibniz astronomideki bir problemten esinlenerek 300 yıl önce analiz düşüncesini geliştirdiler. O zamandan beri her yüz yıl matematikte, fen bilimlerinde, mühendislikte, sosyal ve biyolojikselsel bilimlerdeki problemleri aydınlatmada analizin gücünün etkisi görüldü. Analiz, basit kural ve işlemlerle karmaşık problemleri kolaylaştırmasındaki olağan üstü gücünden dolayı, başarılı olmaktadır”.

Öğrenciler önceki deneyimlerinden ve bilgilerinden aktif bir şekilde yeni bilgiler oluşturarak ve bu bilgileri anlayarak öğrenmek zorundadırlar. Analizi (Calculus) öğrenmek ve inşa etmek hatırı sayılır derecede beceri ve derin bir bilgi gerektirir. Analizi anlamak sadece standart algoritmik kuralları kullanarak türev ve integral fonksiyonlarını içeren ilgili işlemlerin yapılması değildir. Analizi anlamak, kuralları, kavramları ve onların matematikte ve aynı zamanda ekonomi, fen bilimleri, mühendislik gibi alanlardaki ilişkilerin nasıl olduğunu keşfetmedir. 1980 li yıllarda analiz öğretimi ve öğreniminde görülen aksaklıklar konuların nasıl öğretileceği yönündeki yöntemlerde değişikliğe yol açan, “**analizde reform**” hareketine sebep olmuştur (Tucker and Leitzel, 1994). Analizin doğası son derece karmaşık sembollerden oluştuğundan dolayı, öğrenciler genellikle sembollerin manalarını tam anlamadan sembollerin manipölasyonu ile analizi anlamaya çalışırlar. Analiz eğitimi reformunun amaçlarından birisi nümeriksel, grafiksel ve cebirsel betimlemelerdeki aynı olan şeyi gösterme ve teşhis etmedir. Hugles-Hallett vd. (1994) ne göre önde gelen prensiplerden biri mümkün olduğunca konuların analitik olduğu kadar nümeriksel ve grafiksel öğretilmesi

gerektiğini söyleyen “üç kural”dır (rule of three). Amaç öğrencilerin temel fikirleri farklı açılardan görmelerini sağlamak ve üç bakış açısının dengelendiği bir öğretim ortamı oluşturmaktır. Diğer yazarlar bu üç kuralı işitsel ve görsel, formal gösterim (Tall 1996), canlı gösterim (Bowers 1999; Leinbach 1997), öğrencilerin gerçek durumları ve olayları tecrübe edindikleri gerçek bilgi gösterimi (Kaput 1998) şeklinde genişletmişlerdir. Berry and Nymann (2003) analitiksel (cebirsal), grafiksel ve nümeriksel gösterimler arasındaki ilişkiyi bulduran “analiz hissini” geliştirmede yardımcı olan ek gösterimleri tartışmışlardır. Türevin nümeriksel, grafiksel ve sembolik gösterimleri üzerinde daha önceki bölümde ayrıntılı olarak durulmuştur.

Türev kavramı analizin en önemli konularından birisidir. Türev kavramı önemli olmasına rağmen öğrenciler tarafından çok iyi anlaşılamaz. Öğrenciler türevi genellikle sembollerle işlem yapma olarak algırlar. Türev kavramının anlaşılması üzerine yapılan çok sayıda çalışma vardır (Orton 1983b; Heid 1988; Tufte 1989; Amit and Vinner 1990; Ferrini-Mundy and Graham 1994; Kowalezky and Hausknecht 1994; Schwabach and Dosemagen 2000; Aspinwal and Miller 2001, Berry and Nyman 2003).

Orton’nun yaptığı çalışma öğrencilerin türevi anlamaları hakkında önemli ipuçları sunmuştur. Orton’un çalışması analize giriş dersi alan öğrencilerin türevi anlamaları üzerine odaklanmıştır. Orton 110 matematik bölümü öğrencisine kavramsal bilgiye dayalı sorduğu sorulara aldığı cevaplar sonucunda öğrencilerin bazı temel kavram yanılgılarına sahip olduklarını bulmuştur. Alışılmış türev kurallarını içeren sorular öğrenciler tarafından çok iyi anlaşılmaktadır. Dört öğrencinin dışındaki bütün öğrenciler ikinci derece polinomların türevini alabilmişlerdir. $y = \frac{a}{x^2}$ formunda bir fonksiyonun türevini almaları istendiğinde ise çok fazla hata meydana gelmiştir. Hataların çoğu bölümün türevi yerine türevlerin bölümünü almalarından kaynaklanmıştır. Kavramsal sorulara verilen cevaplar da hiç tatmin edici çıkmamıştır. Sonuçlar bazı temel kavram yanılgılarının olduğu kadar türevin sezgisel olarak ta çok az anlaşıldığını göstermiştir. Öğrencilerin zorlandığı diğer konular, bir aralık üzerindeki ortalama değişim oranı ve bir noktada çizilen teğetle ilgilidir. Orton’a göre değişim oranının altında yatan temel

kavram, öğrencilerin elementer cebirdeki grafik çalışmalarında karşılaştıkları ilişkiyi kurabilmeleridir. Çalışmanın sonuçları birçok öğrencinin elementer seviyede ilişki kurmada zorlandığını göstermiştir.

Birçok araştırmacı öğrencilerin türevin geometriksel yorumunda karşılaştıkları problemleri tartışmışlardır. Asiala and Dubinsky (1997) öğrencilerin türevi anlamaları hakkında literatürde geçen görüşlerin özetini vermiştir. Literatüre göre öğrenciler türev kavramında bir takım zorluklarla karşılaşmaktadırlar.

Amit and Vinner (1990) göre bazı öğrenciler verilen bir noktada, fonksiyonun grafiğine çizilen teğet denkleminin o noktadaki fonksiyonun türevine eşit olduğunu söylemişlerdir. Ferrini- Mundy and Graham (1994) türevin grafiğini çizmeye başlamadan önce grafiksel olarak verilen bir fonksiyonun denklemini bulmaya çalışan bir öğrencinin verdiği cevapları ayrıntılı olarak tartışmışlardır. Leinhardt vd. (1990) fonksiyonun grafiğinden eğim hesaplamada öğrencilerin karşılaştıkları zorlukları gösteren bir çalışma yapmışlardır. Leinhardt vd. grafiksel olarak verilen problemlerde, öğrencilerin zorluklarla baş etmeleri için grafikten, cebirsel formüle ve tabloya doğru tersine işlemlerinde yapılmasını önermişlerdir.

Tufte (1989) tane üniversite birinci sınıf öğrencisine “analiz kavram testi” uygulayarak öğrencilerin analiz performanslarını değerlendirmiştir. Buna ilaveten Tufte çalışmasında analizin temel kavramları (yakınsaklık, limit, türev, belirli integral) üzerine bir program oluşturmak için bir başka sınıfta Analiz-1 dersi alan 24 öğrenciyi takip etmiştir. Bu çalışmanın sonucunda öğrencilerin kavramsal anlamalarında derin bir etkiye sahip olan temel kavramların bilgisayar programlarıyla öğretilmesini önermiştir.

Bazı araştırmacılar öğrencilerin değişim oranını anlamalarını ve değişim oranının türevle olan ilişkisini araştırmışlardır (Bezuindenhout 1998; Gomez vd. 1999; Turner vd. 2000).

Bezuindenhout (1998) üniversite birinci sınıf öğrencilerinin analizin temel kavramlarını anlamalarını araştırmak için yazılı test ve mülakattan oluşan bir yöntem kullanarak araştırmanın sonucunda öğrencilerin önemli kavram yanlışlarına sahip olduğunu göstermiştir. O öğrencilerin “değişim oranı” kavramını anlamalarıyla alakalı bazı kavram yanlışlarını ve genel yanlışlıkları belirlemiştir. Bezuindenhout, öğrencilerin “ortalama değişim oranı”, “sürekli fonksiyonların değişim oranı” ve “aritmetik ortalama” kavramları arasındaki ilişkilerle ilgili bazı temel yanlış anlamalara sahip oldukları tespit etmiştir.

Gomez vd.(1999) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin değişim oranını anlamaları araştırılmıştır. Veri toplama araçlarını oluşturmada ve bunları değerlendirmede öğretmenlerin öğrenciler hakkındaki düşünceleri ve literatürde geçen öğrenci anlamaları kullanılmıştır. Verilerin analizi sonucunda ders müfredatı ile öğrenci dönütleri arasındaki ilişki hakkında bazı bilgiler sunulmuştur.

Turner vd. (2000) öğrencilerin değişim oranı ile ilgili bazı kavramları anlamalarını araştırmışlardır. Çalışma boyunca öğrenciler hız zaman grafiğini çizmek ve analiz etmek için ilgili grafik çizme programlarını ve hareket detektörlerini kullanmışlardır. Çalışmanın sonucu elementer seviyedeki öğrencilerin değişim oranı ile ilgili kavramları anlamalarında ve bunlar hakkında fikir yürütmelerinde, değişim oranı kavramına ilk girişin çok önemli olduğunu göstermektedir.

2.2. Öğrencilerin Fonksiyonu Anlamaları

Limit, türev ve integral gibi analizdeki birçok merkezi kavramların temelinde fonksiyon fikri yatar. Çünkü analiz (calculus) değişimin yani bir nicelik değiştiğinde diğerinin buna bağlı olarak nasıl ve hangi hızla değiştiğinin incelenmesidir. Örneğin içi hava dolu bir balon aldığımızda eğer balonun içindeki havanın sıcaklığını değiştirirsek havanın içindeki basıncın nasıl değiştiğini merak ederiz. Çünkü basınç sıcaklığa bağlıdır. Aynı zamanda balonun hacmi de sıcaklığa bağlıdır. O halde basınç ve hacim sıcaklığın bir fonksiyonudur.

Fonksiyon kavramının analizde önemli olmasından dolayı son 15–20 yıl içinde matematik eğitimcileri ve araştırmacıları dikkatlerini bu kavram üzerine yoğunlaştırmışlardır (Dubinski and Harel 1992). Sadece fonksiyon kavramının anlaşılması üzerine yapılan çok sayıda çalışma vardır (Dreyfus ve Eisenberg 1983; Vinner and Dreyfus 1989; Monk 1987; Ferrini-Mundy and Graham 1991; Selden and Selden 1992; Kalchman 1997; Knuth 2000; Mann 2000; Yerushalmy 2000; Kalchman 2001). Burada yapılan çalışmaların çok az bir kısmına değinilmiştir. İşleyen (2005) de öğrencilerin fonksiyonu anlamalarıyla ilgili yapılan çalışmalara oldukça geniş bir şekilde yer verilmiştir.

Vinner and Dreyfus (1989) ile Monk (1987)'un çalışmalarında öğrenci performansları değerlendirilmiştir. Araştırmalar birçok öğrencinin ilkel bir fonksiyon kavramına sahip olduklarını göstermektedir. Bu öğrenciler, fonksiyonun genel tanımını anlamadan analiz derslerine girmekteler ve fonksiyon örneklerini bazı ipuçları verildiği takdirde yapabilmektedirler. Hatta boş olmayan iki küme arasındaki ilişkiyi tanımlayan Dirichlet-Bourbaki tanımını bilen öğrenciler bile belirli soru tipleriyle karşılaştıklarında çok ilkel olan tanımlara geri dönmüşlerdir (Sabella ve Redish, 2004). Dreyfus ve Eisenberg (1983) yaptığı mülakatta bazı öğrencilerin fonksiyonun basit bir formülle gösterildiğinde bunun bir fonksiyon olduğunu söylediklerini bulmuşlardır. Vinner ve Dreyfus (1989), tanımla ya da kavramla ilgili sorular sorulduğunda, Dirichlet-Bourbaki tanımını bilen öğrencilerin bile fonksiyon kavramını bir formüle dayandırmaya çalıştıklarını tespit etmişlerdir.

Vinner ve Dreyfus (1989) öğrencilerin belirli fonksiyon grafiklerini kabullenmediklerini bulmuşlardır. Çalışmada aynı zamanda öğrencilerin kavramsal işlemleri anlamaları da araştırılmış ve öğrencilerin genellikle verilen tanımın kavramsal yönüyle az, sayısal ya da işlemsel yönüyle ise daha fazla ilgilendikleri görülmüştür. Dreyfus ve Eisenberg (1983)'in yaptığı çalışmada formülsüz grafiksel gösterimlerin analize giriş öğrencilerinin çoğu için bir anlam ifade etmediği görülmüştür.

Geleneksel analiz dersleri bir grafiğin derin bir şekilde kavramsal olarak anlaşılmasında çok az imkan sunmaktadır. Ayrıca geleneksel analiz dersleri cebirsel ve grafiksel gösterimler arasındaki bağlantının anlaşılmasını da geliştirememektedir. Fonksiyon gibi bazı matematiksel kavramların standart anlatım şekilleri öğrencilerin kavramı tamamen anlamalarında veya uygulamaların genişliğini yakalamada yeterli değildir.

Tall and Vinner (1981) grafiği verilen bir fonksiyonda öğrencilerin zorlanmalarını geleneksel öğretim yöntemlerine bağlamıştır. Tall and Vinner fonksiyonun birçok şekilde gösterilmesine rağmen, fonksiyonun kavram tanımının kısıtlı olarak gelişmesine neden olan cebirsel formüllerle verilen fonksiyonların kısa bir süre için kullanılmasının faydalı olabileceğini önermektedirler. Bu düşünce Leinhardt vd. (1990) ve Lauten, Graham ve Ferrini-Mundy (1994) gibi birçok araştırmacı tarafından da benimsenmiştir.

Leinhardt vd.(1990) öğrencilerin fonksiyonları birbiriyle ilişkilendirmede karşılaştıkları bazı zorluklara değinmişlerdir. Onlar geleneksel öğretim yöntemlerinde genellikle cebirsel formüllerden ve tablolardan faydalanarak grafik çizildiğini tersinin yani verilen bir fonksiyon grafiğinden cebirsel formül ve tablo oluşturma işinin ise çok az yapıldığını söylemişlerdir.

Breindenbach vd. (1992), Sfard (1987, 1992) Thomson (1994) fonksiyon kavramını öğrencilerin daha iyi anlamaları için, fonksiyonla ilgili bir kavram öğretilmeden önce fonksiyon kavramının işlemsel yönünün geliştirilmesine yönelik çalışma yapılmasını önermişlerdir. Fonksiyonun işlemsel yönünün eksik ya da az anlaşılması, fonksiyonun kavramsal yönünün anlaşılmasını zorlaştırır.

2.3. Öğrencilerin Fonksiyonların Sürekliliği ve Türevlenebilirliği Arasındaki İlişkiyi Anlamaları

Fonksiyonların süreklilik ve türevlenebilme gibi çok önemli iki özelliği vardır. Süreklilik ve türevlenebilme üzerine çok sayıda araştırma yapılmıştır. Fonksiyonların bu iki özelliği arasındaki ilişkiyi anlamada öğrencilerin zorlandığına dair deliller vardır.

Buna karşın öğrencilerin birbiriyle çok yakın ilişkili iki kavram arasındaki bağlantıyı anlamalarına üzerine çok az araştırma yapılmıştır (Selden vd. 1989; Artigue 1991; Viveros and Sacristan 2002,).

Sürekliliğin tarihsel gelişimine bakıldığında 18. yüzyılda Euler ve Lagrange bir fonksiyonun sürekli olması için tek bir cebirsel ifade ile tanımlanması gerektiğini düşünmüşlerdir. 1767’de Euler süreksiz fonksiyon tanımını vermiştir. “Eğrilerin hepsi serbest el hareketleriyle çizilen, alışılmış bir türden tanımlanan denklemle belirlenemez” (Youschkevitch 1976). Bu onların bugün parçalı fonksiyon olarak adlandırılan fonksiyonların süreksiz olduğunu düşündüklerini ve aynı zamanda eğrileri gerçek fonksiyon olarak düşünmediklerini göstermektedir (Monna 1972). Fakat burada ilginç olan şey grafiksel ve cebirsel gösterimler arasındaki ilişkidir.

Bu bir eğrinin süreksizliğine bakmak için yeterli değildir. O tek bir denklemle tanımlanmaktadır. Bu tanım Bolzano, Cauchy ve daha sonra da Weierstrass’ın günümüzdeki süreklilik tanımına kadar geçerli olmuştur. Cauchy (Bolzano ile beraber) modern süreklilik tanımını veren ilk kişidir (Edwards 1979).

“ $f(x)$ bir fonksiyon olsun. x değişkeninin belirli iki sınır noktası arasında $f(x)$ fonksiyonu sürekli ise bu iki sınır noktası arasındaki her x değeri için $f(x + \alpha) - f(x)$ farkının nümeriksel değeri belirsiz bir şekilde α ile birlikte azalır. Diğer bir deyişle $f(x)$ fonksiyonu verilen sınır noktaları arasında x ’e göre sürekli ise bu sınır noktaları arasındaki değişkendeki sonsuz küçüklükteki artmalar fonksiyonun kendisinde de sonsuz küçüklükte artmalara neden olur” (Kleiner 2001).

19. yüzyılda türevlenebilme ve süreklilik arasındaki ilişki hakkında; bir fonksiyonun sonlu sayıdaki noktaların dışında türevli olması için fonksiyonun sürekli olmasının yeterli olacağının düşünülmesi oldukça ilgi çekicidir. Ampere 1806 da, bazı noktalar hariç sürekli bir eğrinin her yerde teğete sahip olması gerektiğine inanmıştır (Viveros and Sacristan; 2002)

Cauchy ve daha sonrada Bolzano süreklilik ve türevlenebilmenin formal tanımlarını oluşturmak için katkıda bulunmuşlardır. Sürekli bir fonksiyonun türevli olması gerektiğine inanmışlardır (Kline 1972). Fakat 1817 de Bolzano hiçbir yerde türevli olmayan sürekli bir fonksiyon bulduğunda bu ifade geçerliliğini yitirmiştir. Bolzano'dan sonra Riemann ve Weierstrass gibi birçok matematikçi türevlenemeyen fakat sürekli olan fonksiyonlara örnekler vermişlerdir. (Weierstrass'ın örneği çok iyi

bilinen $f_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k^a x)}{(\pi k^a)}$ Weierstrass fonksiyonudur). Böylece sürekliliğin

türevlenebilme için yeterli olmadığı görülmüştür.

Matematik eğitimi literatüründe bir fonksiyonun türevi ya da sürekliliği üzerine odaklanan çok sayıda çalışma vardır. Genel olarak sonuçlar öğrencilerin fonksiyonun türevi ile sürekliliği arasındaki ilişkiyi anlayamadıklarını göstermektedir (Selden vd. 1989; Artigue 1991; Viveros and Sacristan 2002). Örneğin bazı öğrenciler fonksiyonun sürekliliği için fonksiyonun türevinin görsel özelliklerinin belirleyici bir faktör olduğunu düşünmüşlerdir.

Selden vd. (1989), öğrencilerin sadece standart problemleri çözmede çok başarılı olduklarını fakat problem alışılmışın dışında tanımlanmışsa öğrenci başarısının düştüğünü belirtmişlerdir. Onlar uyguladıkları testte; $f(x) = x^{-1}$ ise $f'(x)$ değerini ve $f(x) = x^5 + x$ fonksiyonunun sürekli olduğu aralığı bulabilen başarılı öğrencilerin aynı başarılarını aşağıdaki gibi tanımlanan f fonksiyonunda gösteremediklerini bulmuşlardır.

“ $f(x) = \begin{cases} ax & , \quad x \leq 1, \\ bx^2 + x + 1, & x > 1. \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında diferansiyellenebilmesi

için a ve b değerlerini bulunuz”. Araştırmacılar, bu problemde öğrencilerin çok büyük zorluk yaşadıklarını belirtmişler ve bunun sebebini öğrencilerde kavramsal öğrenmenin yeterli olmamasına bağlamışlardır.

Viveros and Sacristan (2002) üniversite öğrencilerinin fonksiyonun sürekliliği ve türevlenebilmesi arasındaki kavramsal ilişkiyi anlamalarını araştırmışlardır. Onlar çalışmanın amacını şöyle belirlemişlerdir.

“Bu çalışmanın amacı öğrencilerin bir fonksiyonun türevlenebilirliğini belirlemek için fonksiyonların sürekliliğini ya da süreksizliğini nasıl kullandıklarını özelliklerde analizin temel teoremlerinden birincisi olan “eğer bir f fonksiyonu kapalı bir aralıkta türevlenebilir ise f fonksiyonu bu aralıkta sürekli olmak zorundadır”. Şeklindeki teoremi nasıl kullandıkları hakkında bilgi edinmektir”.

Sürekli bir fonksiyonun kavram görüntüsü genellikle kalemi kaldırmadan çizilen bir fonksiyonu içerir, grafikte kopma ya da sıçrama olmaz. Türevlenebilen fonksiyonun grafiği ise düz ve pürüzsüzdür. Bunlar fonksiyonun türevlenebilirliği ya da sürekliliği ile ilgili göz önünde bulundurulabilecek bazı görsel özelliklerdir.

Viveros and Sacristan (2002) aynı zamanda öğrencilerin bu görsel özellikleri nasıl kullandıklarını ya da bu özelliklere nasıl bağlı kaldıklarını ve cebirsel analizin sonuçlarıyla bu görsel özellikler arasında nasıl bağ kurabildiklerini görmek istemişlerdir. Onların çalışması iki bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm klasik yazılı sorularından, ikinci bölümde bilgisayar destekli aktivitelerden oluşmuştur. Birinci bölümde öğrencilere klasik yazılı yöntemiyle sorular yöneltilmiş ve öğrencilerin verdiği cevaplar kategorilere ayrılarak sınıflandırmıştır. Bu çalışmanın sonunda Viveros and Sacristan (2002)’nin bulduğu bazı sonuçlar şu şekilde özetlenebilir. Öğrencilerden parçalı fonksiyonların sürekliliğini bulmaları istendiğinde birçok öğrenci fonksiyon sadece cebirsel ifade ile tanımlanmadığı için böyle fonksiyonların süreksiz olduğunu düşünmüşlerdir. Onlara göre bu şaşırtıcı bir durum olup analiz eksikliğini ve sürekliliğin tanımının anlaşılmadığını göstermektedir.

Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu (% 70) türevlenebilirliği belirlemek için fonksiyonun sürekliliğini ya da süreksizliğini kullanmışlardır. Örneğin $f(x) = |x|$ fonksiyonu göz

önüne alındığında çalışmaya katılan öğrencilerin 41 tanesi bu soruyu doğru yapmıştır. 41 öğrencinin 23 tanesi süreklilik üzerine dayanan argümanları kullanmışlardır (8 öğrenci fonksiyonun orijinde süreksiz olduğunu ifade etmişlerdir). Bu öğrencilerin 18 tanesi fonksiyonun sürekli olması durumunda türevli olduğunu söylemişlerdir (bu temel teoremin yanlış bir yorumudur).

Öğrenci cevaplarının %70'i analizin temel teoremine işaret etmektedir. Birçok öğrenci bu teoremi bilmelerine karşın teoremi yanlış anlamışlar, yanlış kullanmışlar, ya da çelişkiye düşmüşlerdir. Öğrencilerin yarıya yakını teoremin her iki taraf için de geçerli olduğunu düşünmüşlerdir. Öğrencilerin birçoğu “fonksiyon türevlenebilirdir çünkü fonksiyon süreklidir”, “ f fonksiyonu türevlidir çünkü her sürekli fonksiyon türevlidir” ve hatta bazıları da “fonksiyon türevlenebilirdir ancak ve ancak fonksiyon sürekli ise” gibi ifadeler kullanmışlardır. Literatür sonuçları göstermektedir ki; öğrenciler türevlenebilme ve süreklilik arasındaki ilişkiyi anlamada bir takım yanlış anlamalara ve öğrenme zorluklarına sahiptirler.

2.4. Öğrencilerin Bir Fonksiyon ve Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlamaları

Eğitimin en temel ilkelerinden birisi ön şartlılık ilkesidir. Ön şartlılık ilkesi diğer bilim dallarına göre matematikte daha önemlidir. Örneğin coğrafyada Türkiye bölgeler coğrafyasını gören bir öğrenci Ege Bölgesinin coğrafi özelliklerini öğrenmeden Doğu Anadolu Bölgesinin coğrafi özellikleri hakkında bilgi sahibi olabilir. Ama bu iki bölge arasında kıyaslama yapamayabilir. Matematikte ise böyle bir şey söz konusu olamaz. Örneğin tam sayılarda işlem yapmayı bilmeyen bir öğrenci kesinlikle rasyonel sayılarda işlem yapamaz. Altun (1998)'e göre bazı konular için ön şartlılık ilkesi doğrusal bir yapıdadır. A kavramı öğretilmeden B, B kavramı öğretilmeden de C'nin öğretilmesi söz konusu değildir.

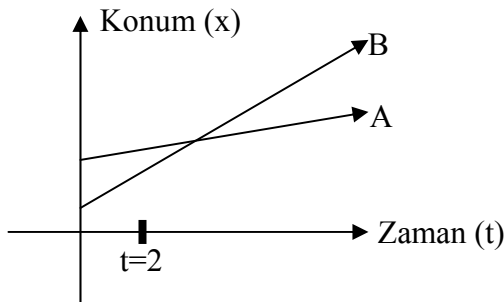


Şekil 2.1. Ön şartlılık ilkesi

Matematik öğrenmenin ilk basamaklarında kavramsal temellerin sağlam olarak atılması daha sonraki basamaklardaki gelişmenin hızlı ve güvenilir olmasına olanak sağlar. Analiz kavramları tamamen sıralı bir yapı içinde öğrenilir. İntegral kavramının öğrenilmesi için türev kavramının öğrenilmiş olması, türev kavramının öğrenilmesi için limit ve süreklilik kavramlarının öğrenilmesi ve bu kavramların iyi öğrenilmesi içinde fonksiyon kavramının öğrenilmesi gerekir. Çünkü integral bir toplamın limitidir.

Ferrini-Mundy and Lauten (1994)'e göre analizi anlamamanın bir anahtarı fonksiyonu anlamaktır. Fonksiyon ve onun türev fonksiyonu ilişkili iki kavramdır. Çünkü bir fonksiyonun türevi yine bir fonksiyondur. Bir fonksiyon verildiğinde türevi hakkında, türevi verildiğinde de türevin ilkel fonksiyonu hakkında fikir sahibi olabiliriz. Türkçe’de insanları tanıma açısından güzel bir atasözü vardır “Sen arkadaşını söyle sana kim olduğunu söyleyeyim”. İşte fonksiyon ile türev arasındaki ilişki bu türden bir şeydir. Biz bir fonksiyonun belli aralıklardaki davranışı hakkında bilgi sahibi olmak için türevine bakarız. Fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri bize fonksiyonun nerede artan, nerede azalan, nerede minimum-maksimum değerlerini alıyor nerede yukarı nerede aşağı konkav oluyor bu konuda bize bilgi sunar. Fakat bunları anlamak ciddi manada bir alt yapı, bilgi birikimi ve matematik kültürü ister.

Nemirovsky and Rubin, (1992)'e göre birçok çalışma (Clement 1985; Mc Dermott vd. 1987; Monk 1990) problemlerdeki öğrenci zorlanmalarını ve kavramsal zorlukları belirlemiştir. Kartezyen düzlemdeki grafikte doğrunun eğimine ve doğrunun yüksekliğine bakarak öğrencilerde oluşan yanlış “yükseklik/eğim kavram yanlışlığı” olarak adlandırılmıştır. Bu yanlış ile ilgili tipik problem aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Soru: $t=2$ anında hangi araba daha hızlı gidiyor?

Şekil 2.2. Yükseklik/eğim kavram yanlışlığı

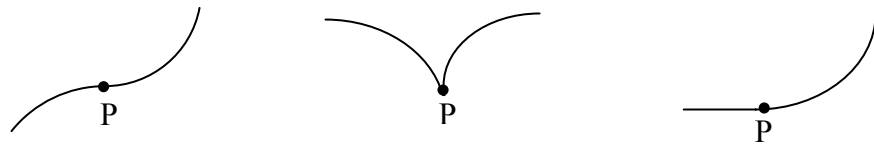
Genellikle verilen cevap ise A arabasının daha hızlı gittiğidir. Problemin doğru cevabı B'dir. Çünkü hızı gösteren şey doğrunun eğimidir.

Nemirovsky and Rubin (1992)'ye göre Clement (1985), Janvier (1978) Mc Dermott vd. (1987) gibi çalışmalar bu hata için olası iki sebebi tartışmışlardır. Birincisi gösterimsel (grafikteki “yükseklik” öğrencilere çok anlamlı geliyor ya da doğrunun eğimi anlamlı değil), ikincisi de kavramsaldır (konum ve hız kavramları yeterince tartışılmamıştır).

Literatürde fonksiyonları anlama ile türevi anlama arasındaki ilişkiyi araştıran, bir fonksiyonla türevi arasındaki ilişkiyi anlama ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır (Nemirovsky and Rubin 1992; Hauger 1995; Ferrini-Mundy and Lauten 1994; Pence; 1995; White and Mitchelmore 1996; Aspinwall vd. 1997; Cordero vd. 1997; Cotrill 1999; Aspinwall and Miller 2001; Aspinwall and Shaw 2002; Berry and Nyman 2003).

Monk (1989) öğrencilerin teğet kavramını ve eğimi daha iyi anlamalarında öğrencilere yardım etmek için bir etkinlik geliştirmiştir. Monk grafiksel olarak verilen fonksiyonu öğrencilerden yorumlamalarını istemiştir. Buna ilaveten sorular sormuş ve hızölçerin belirlediği bir noktaya çok yakın bir başka nokta arasında çizilen kiriş doğrusunu kabullenmede öğrencilerin arzulu olduklarını bulmuştur. Bununla birlikte öğrenciler hızölçerin kayıtlarından seyahatin ortalama hızını bulmada zorlanmışlardır. Ona göre fonksiyonun grafiksel gösterimi ilişkinin keşfedilmesinde zengin olanaklar sunmaktadır.

Vinner (1991) Analiz I öğrencilerinin teğet kavramını anlamalarını araştırmış, bunun içinde aşağıda verilen soruları kullanmıştır.

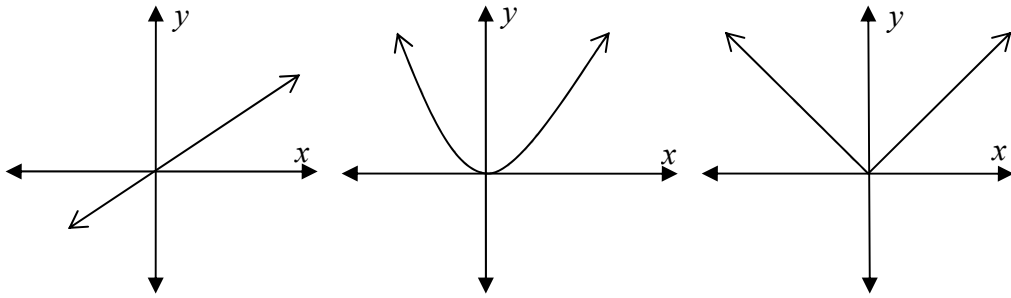


Şekil 2.3. Vinner (1991)' de kullanılan sorular

- A) P noktasından eğrilere teğet çizilebilir mi? Çizilebilir ise çiziniz.
- B) P noktasından eğrilere birden fazla (bir, iki, üç, sonsuz) teğet çizilebilir mi? Teğet sayısı sonlu ise hepsini, sonsuz ise bazılarını çiziniz.
- C) Eğrilere P noktasından teğetin çizilemediği durumlar var mıdır?

Bu sorulara verilen cevapların analizinden öğrencilerin, geometride öğrendikleri teğetin kavram hayalinden kuvvetli bir şekilde etkilendikleri görülmüştür

Ferrini-Mundy and Graham (1991) Şekil 2.3 de görülen fonksiyonların grafiğini üniversite öğrencisi olan Sandy'ye sormuşlardır.



Şekil 2.4 Ferrini-Mundy ve Graham (1991) de kullanılan fonksiyon grafikleri

Grafikteki bilgiyi kullanma yerine Sandy $y = x$, $y = x^2$ ve $y = |x|$ fonksiyonlarının her biri için formüllere uygun grafiği bularak yaklaşmıştır. Daha sonra Sandy formülleri kullanarak türevleri hesaplamış ve bu fonksiyonların grafiklerinden devam etmiştir. $f(x) = |x|$ durumunda Sandy gerçekten fonksiyonu $x < 0$ için $f(x) = -x$ ve $x > 0$ için $f(x) = x$ şeklinde iki parçaya bölerek yapmıştır.

Nemirovsky and Rubin (1992) bir fonksiyonla onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi öğrencilerin nasıl algıladıkları üzerine bir çalışma yapmışlardır. Onlar çalışmalarını üç varsayım üzerine dayandırmışlardır.

1. Her insan çocukluğundan itibaren fonksiyon ve türev fonksiyonu arasındaki ilişki hakkında bazı sezgisel bilgilere sahiptir... değişimleri içeren durumlara anlam vermede bize olanak sağlayan bilgilerin kompleks bir parçasını oluştururuz.
2. Yeni ve çözülmemiş yayınlarla daha titiz incelemelere her zaman açık olan tanımlardan birisi fonksiyon ve türev fonksiyonu arasındaki ilişkidir.
3. Fonksiyon ve türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi içeren problemleri çözmedeki öğrenci performansı, içerikle ilgili parametreler tarafından kuvvetli bir şekilde etkilenir.

Nemirovsky and Rubin, (1992)'e göre her insan formal analiz dersi almadan bir fonksiyon ve onun türev fonksiyonu arasındaki ilişki hakkında bazı fikirlere sahiptir. Nemirovsky ve Rubin, çalışma için analiz dersi almayan öğrencileri seçmişlerdir. Onlar öğrencilerin düşünce yollarını etkileyen unsurları göz önünde tutarak öğrencilerin bir fonksiyon ve onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi keşfedebildikleri üç farklı mikro bilgisayar destekli laboratuvar (MBL) ortamı oluşturmuşlardır. Birincisi belli bir zaman diliminde arabanın hız ve konum grafiğini çizen hareketli bir sensörden, ikincisi bir balon içindeki havanın akış hızını ve havanın hacmini gösteren hava sensöründen üçüncüsü de bir sayı dizisiyle gösterilen kısmi toplamlar dizisi ve bunların nümeriksel toplamlarından oluşturulmuştur. Her bir öğrenme ortamında araçların davranışı hakkında öğrencilere sorular sorulmuş, cevapları deneyerek bulmaları için de öğrenciler cesaretlendirilmişlerdir. Her bir öğrenme ortamında öğrenciler 75'er dakika kalmış, her öğrenci aynı öğrenme ortamına iki defa katılmış ve bir öğrencinin toplam katılma süresi 150 dakikayla sınırlandırılmıştır. Görüşmeler birisi bilgisayar ekranı üzerine, diğeri de görüşmeci ile denek arasındaki konuşma üzerine odaklanan iki kamerayla kayda alınmıştır. Yapılan iki mülakatta deneklere toplam 15 farklı problem sunulmuştur. Öğrenme ortamlarının hepsinde benzer problemler kullanılmıştır. Bu makalenin çatısı akışkan havanın bulunduğu balonda çalışan bir öğrenci ile yapılan görüşmenin analizinden ve tanımlamalarından oluşmuştur. Görüşmenin bulgularını örneklemek için bu öğrencinin durumu kullanılmıştır. 150 dakikalık öğretim amaçlı görüşmelerin

sonunda bu öğrencinin bir fonksiyon ve onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi daha iyi anladığına dair bir takım belirtiler bulunmuştur.

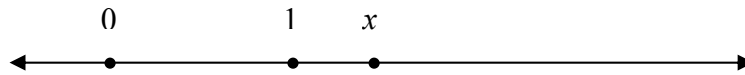
Nemirovsky and Rubin'e göre bu çalışmada kullanılan MBL öğrenme ortamları, bir fonksiyon ve onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi anlamada öğrencilerin benzerlik yaklaşımı yerine daha etkili olan farklı yaklaşımları kullanmalarına yardımcı olmuştur. Onlara göre fonksiyon ya da onun türev fonksiyonunu incelemek, onlardan birinin davranışını tahmin etmek ve daha sonrada fiziksel bir durumda önseziyi test etmek öğrencilerin bir fonksiyon ve onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi daha iyi anlamalarına yardımcı olur. Bu anlama zamanla gelişir. Öğrenciler zor sorularla ya da alışık olmadıkları bir durumla karşılaştıklarında tekrar benzerlik yaklaşımına geri dönerler. Onlar bir fonksiyon ile onun türev fonksiyonu arasındaki benzerlik varsayımlarının tamamen genel ve belki de evrensel olduğunu söylemişlerdir. Murphy (2000) e göre bu benzerlik varsayımı Tall (1989)' ın söylediği “ temel engeller” den birisi olabilir. Böylece Nemirovsky ve Rubin'in çalışması Tall'ın temel engellerin üstesinden gelinmesinde öğrencilere yardım edilmesi yönündeki çağrısına bir cevap gibi algılanabilir.

Ferrini-Mundy and Lauten (1994) analiz öğrenimiyle ilgili yapılan çalışmaların kısa bir özetini vermişlerdir. Onlara göre fonksiyonu anlamak analizi anlamak için bir anahtardır. Fonksiyon kavramı analiz çalışmaları için düzenli merkezi bir düşüncedir ve öğrencilerin teğetin eğimi, süreklilik ve limit gibi analiz kavramalarını anlamalarında büyük bir etkiye sahiptir. Birçok çalışma öğrencilerin formüllerle ifade edilen fonksiyonları kuvvetli bir şekilde tercih ettiklerini ve fonksiyon kavramının bir parçası olan grafik ve tablo gibi diğer gösterimleri kabul etmede isteksiz olduklarını bulmuştur. Öğrencilerin türev kavramını anlamaları ile ilgili çalışmada Ferrini-Mundy ve Lauten (1994)'e göre görsel düşünme fonksiyonlar ve fonksiyonların grafikleri arasındaki bağlantılarla desteklenebilir ve geliştirilebilir. Öğretmenler öğrencilerin fonksiyonların grafikleri ve onların türev fonksiyonları ile ilgili zorluklara sahip olduklarını gözlemlemişlerdir. Öğretmenler bir fonksiyonun bir noktadaki birinci ve ikinci türev fonksiyon grafiklerini sorarak, fonksiyonun grafiğini belirlemede bilgiyi kullanmak için

öğrencilere sorular sormuşlar, öğrencilere düşünceleri için zaman vermişler ve öğrencilerin düşüncelerini almışlardır.

Pence (1995) Analiz-I dersinde okutulan kavramlar ile işlemlerin anlaşılması arasındaki ilişkiyi araştıran bir çalışma yapmıştır. Analiz-I dersinde 76 öğrenciye bir test uygulamıştır. Bunlara ilaveten öğrencilerin vize, final ve ikinci dönemki Analiz-II dersindeki performansı ile ilgili bilgiler toplamıştır. Onun testi 6 tane kişisel bilgi ve tutum maddesi ile 2 tane matematik sorusundan oluşmuştur.

Pence makalesini matematik sorusunun birisi üzerinde temellendirmiştir. Öğrencilere 0, 1 ve x 'in yerleşim yerlerini gösteren aşağıdaki sayı doğrusu verilmiştir.



Şekil 2.5. Pence (1995)'te kullanılan soru

x noktası yukarıda görüldüğü gibi aşağı yukarı 1,4 noktasına konulmuştur. Öğrencilerden $2, 2x, x^2$ ve 2^x noktalarının yerlerini belirlemeleri istenmiş ve verilen cevaplar aşağıdaki gibi 6 kategoriye ayrılmıştır.

- 1) 5 öğrenci dört noktanın hiç birini yerleştirememiş
- 2) 34 öğrenci 2 'yi yerleştirmiş fakat ötekileri yerleştirememiş
- 3) 19 öğrenci 2 ve $2x$ 'i yerleştirmiş fakat x^2 ve 2^x yerleştirememiş
- 4) 2 öğrenci 2^x dışındakileri yerleştirmiş.
- 5) 2 öğrenci x^2 dışındakileri yerleştirmiş
- 6) 14 öğrenci ise noktaların hepsini yerleştirmiş

Bu sonuçların en çarpıcı olanı ilk iki kategorideki 39 öğrencinin durumudur. Yani analize giriş dersi alan öğrencilerin yarıdan fazlasının $2x$ 'in sıfıra olan uzaklığının x 'in

sıfıra olan uzaklığının iki katı olduğunu bilememesidir. Pence öğrencilerin çarpma gibi operasyonları işlemsel olarak iyi anlamalarını önermiştir. Fakat öğrenciler işlemleri her zaman amaçlanan düzeyde anlayamayabilirler. Pence bu soru ile kuvvetli bir şekilde ilişkili olan analiz başarısını bulmuştur. 1. kategoriden 4. kategoriye kadar olan 60 öğrencinin 35 tanesi ya da başka bir ifadeyle % 53'ü Analiz-I'de başarısız olurken, 5. ve 6. kategorideki 16 öğrencinin ise sadece 5 tanesi yani % 31'i başarısız olmuştur. 1. kategoriden 4. kategoriye kadar olan öğrencilerin başarısızlık oranı 5. ve 6. kategoridekilerin başarısızlık oranlarının hemen hemen iki katıdır. 1. ve 4. kategoriler arasındaki öğrencilerin ortalaması 4 üzerinden 1,1 olurken 5. ve 6. kategorideki öğrencilerin başarı ortalaması 2,6 olmuştur. Pence bu sonuçları analiz çalışmalarında amaçlanan önem seviyesinde çalışmayı ve işlemlere yoğunlaşmayı göstermek için almıştır. Bunu yapamayan öğrenciler amaçlanan seviyede işlemleri anlayan öğrencilere göre çok daha fazla başarısız olmuşlardır. Pence'ye göre işlemler analizde önemli bir kavramsal yapı taşıdır. İşlemler daha sonraki matematiksel gelişmeler için bir temel düzenlemedir. İşlem yapma becerisi eksik olan öğrenciler analizi başarmada çok zorlanırlar.

Hauger (1995) 12 tane analize giriş, 15 tane Analiz II ve 10 tanede matematik bölümü öğrencisi ile çalışma yapmıştır. Hauger öğrencilerin çalışmalarına engel teşkil eden sahip oldukları eksik bilgilerin üzerine odaklanmadan ziyade öğrencilerin sahip oldukları bilgileri ve bu bilgileri problemlerde nasıl kullandıkları üzerine yoğunlaşmıştır. Hauger değişim oranı problemini üç kategoride incelemiştir. Global değişim oranı niteldir ve bir grafiğin ayrıntısıyla ilgilidir. Örneğin birisi bir eğriye bakıp eğrinin kademeli olarak nerede hızlandığını, sabit hareket ettiğini, yön değiştirdiğini söyleyebilir. Belli bir aralıktaki değişim oranı niceldir yani belirli bir miktardır. Bu belli bir aralıkta hareket eden objenin ortalama hızına benzer. Anlık değişim oranı aynı zamanda niceldir. Fakat bir aralıktaki ortalama hızdan ziyade hareketlinin bir anlık hızına karşılık gelir. Anlık değişim oranı bir fonksiyonun istenilen noktadaki türeviyle verilir. Burada merak edilen, öğrencilere bir grafik ya da değerler tablosu verildiği zaman öğrencilerin anlık değişim oranına ulaşmada kullandıkları kaynaklar ve öğrencilerin anlık değişim oranı bilgisini nasıl oluşturdıkları hakkında bunların bize

söyledikleri şeylerdir. Hauger 5 görüşme maddesini cevaplayan 37 öğrencinin cevaplarının analizini yapmıştır. Elde edilen kaynaklar kategorilere ayrılmıştır. Her bir soru ya da verilen cevapların sayısı tablolaştırılmış ve üç grubun karşılaştırması yapılmıştır. Görüşmelerden alınan bölümler tabloda özetlenen cevapların arka planındaki düşünceleri belirlemek için kullanılmıştır. 5 sorunun hepsi de 18 saatlik zaman diliminde bir kültürdeki maya hücrelerinin grafiği üzerine dayandırılmıştır. Hauger (a) bölümünde öğrencilerden toplam süredeki maya popülasyonunda meydana gelen şeyi tanımlamalarını istemiştir. Öğrenciler iki tane olan genel tanımdan birisini vermişlerdir. Her ikisi de kabul edilebilir derecede doğrudur. Öğrenciler popülasyonun gelişmesi ve grafiği hakkında farklı düşünme yollarını açıklamışlardır. Bazı öğrenciler grafiği üçe bölmüştür. Gelişme ilk parçada yavaş ikincisinde hızlı ve üçüncüsünde ise yine yavaştır. Diğer öğrenciler grafiği bölüm noktasından kırarak iki parçaya bölmüşler ve büyüme oranının değişimi hakkında bazı şeyler söylemişlerdir. Popülasyon birincisinde yavaş büyümüş fakat büyüme oranı durmadan düzenli olarak artmıştır. Böylece popülasyon grafiğinin ilk bölümünde hızlı hızlı büyümüştür. İkinci parçada popülasyon hızlı büyümeye başlamış fakat büyüme oranı azalmıştır. Böylece popülasyon yavaş yavaş büyümüştür. Bu öğrencilerden bazıları eğrinin özelliklerini tanımlamak için “aşağı bükey” “yukarı bükey” ve “büküm noktası” terimlerini kullanmışlardır. 12 analize giriş öğrencisinden 11’i, 15 analiz öğrencisinden 10’u ve 10 analiz dersini tamamlayan öğrenciden de 7’si grafiği üç parçaya bölerek fazla karışık olmayan cevaplar verirken geri kalan öğrenciler ise grafiği iki parçaya ayırarak çok karmaşık cevaplar vermişlerdir. Analiz dersi alan öğrencilerin yaklaşık olarak üçte biri çok karmaşık cevap verirken analiz dersi almayan öğrencilerin sadece birisi çok karmaşık cevap vermiştir. (b) bölümünde öğrencilerden popülasyonun en hızlı ve en yavaş değiştiği zamanları belirlemeleri istenmiştir. Bu bölümde öğrencilerin hepsi başarılı olmuşlardır. Öğrenciler bunu nasıl yaptıklarını iki farklı şekilde açıklamışlardır. Bazıları ardışık iki zaman aralığındaki popülasyonun artma miktarından söz etmiştir. Örneğin gece yarısı 24–01 arasında sadece birkaç hücre değişirken saat 8–9 arasında çok fazla hücre değişmiştir. Bu akıl yürütme, analiz öğrencilerinin ulaşabildiği bir aralıktaki değişim oranı üzerine odaklandıklarını göstermiştir. Analiz dersi alan öğrenciler ile almayan öğrenciler arasında bir fark görülmüştür. Analiz alan öğrencilerin yarısı cevaplarında eğimi kullanırken almayan öğrencilerden ise sadece dörtte biri eğimi

kullanmıştır. (c) bölümünde maya popülasyonunun saat dörtteki artışının nasıl olduğu sorulmuştur. Birçok öğrenci istenilen noktadaki değişim oranını bulmak için belli bir aralık üzerindeki ortalama değişimi kullanmıştır. Bunlardan sadece bir kaç öğrenci gece yarısı 24 ile 4 aralığını kullanmıştır. Öğrencilerden çoğu 3 ile 4 aralığını kullanırken bazı öğrencilerde 3 ile 5 aralığını kullanmışlardır. Çok az öğrencide 4'ün yakınındaki kısa aralıkları kullanmıştır. Bu durumda farklı aralıklardaki değişim oranları kırıların eğimine karşılık gelmiştir. Türev kırıının eğiminin limiti gibi hesaplandığından bazı öğrenciler türevi anlamalarında kullanışlı olan bu bilgiyi kullanmışlardır. Bazı analiz öğrencileri ve analizi alan öğrenciler istenilen noktada eğriye teğet çizmişler ve büyüme oranını bulmak için doğrunun eğimini kullanmışlardır. Bu Analiz-I de okutulan türevin geometriksel ifadesidir. Analize giriş öğrencilerinin hiçbirisi teğeti kullanmamıştır. (d) bölümünde öğrencilere grafik üzerindeki bir noktaya karşılık gelen değerlerin tablosu verilmiş ve gece yarısı saat 4'teki değişim oranı tekrar sorulmuştur. Öğrenciler genellikle (c) bölümünde kullandıkları aralıkları (d) bölümünde de kullanmışlardır. Öğrenciler değerler tablosuna sahip olduklarından sonuçlar daha kesindir. (c) bölümünde teğet kullanan öğrenciler tablodan teğet çizmemişlerdir. (c) bölümünde öğrencilere 4 civarındaki eğriyi büyüterek oluşturdıkları yeni bir grafik ve her saat yerine her 15 dakikada bir hücrelerin sayısını veren bir değerler tablosu verilmiştir. Öğrencilerin çoğu 4'teki değişim oranını tahmin etmede 3,45 ile 4 aralığını ya da 3,45 ile 4,15 aralığını kullanmışlardır. Hemen hemen öğrencilerin tamamı detaylı bilgilerin az olduğu grafik ve tablodan yaptıkları tahminlere göre yeni tahminlerin daha gerçekçi ve doğru olduğunu söylemişlerdir. Son olarak (e) bölümünde öğrencilerden daha iyi bir tahmin ya da kesin doğru olan bir cevap bulmaları için yöntem belirlemeleri istenmiştir.

Analiz okuyanların hepsi, dersi almaya devam edenlerin $\frac{3}{4}$ 'ü ve henüz analiz dersi almayan öğrencilerinde yarısı daha iyi bir yaklaşım için çok küçük oranların kullanılmasını önermişlerdir. Analiz okuyan 10 öğrenciden 7'si, devam eden 15 öğrenciden 3'ü bu fonksiyonun cebirsel formülünü bildikleri takdirde türevini alarak $t = 4$ anındaki kesin cevabı bulabileceklerini söylemişlerdir. Analiz dersi almayan ve devam eden öğrencilerin yarısı $t = 4$ 'teki teğetin eğimini bildikleri takdirde tam doğru cevabı bulacaklarını söylemişlerdir.

White and Mitchelmore (1996) kavramsal bilginin rolünü analizdeki uygulama problemlerinde araştırmışlardır. Onlara göre kavramsal bilgi alışılmış sembolik problemlerden ziyade uygulama problemlerinde önemli rol oynamaktadır. Kavramsal bilginin kullanıldığı en uygun aşama orijinal durum ve tanımlamaların matematiksel sembol ve ilişkilere dönüştürüldüğü problemin ilk aşamasıdır. Bundan dolayı çalışma bu aşama üzerine yoğunlaşmıştır. Her bir problemin dört farklı versiyonu olan dört uygulama problemi sorulmuştur. Problemin her bir versiyonu tamamen aynı işlemleri içermekte olup çözümleri de aynıdır. Soruların tamamı lisedeki analiz dersinden alınmıştır. Öğrenciler birinci dönem okutulan cebir dersindeki performanslarına göre 10'arlı 4 gruba ayrılmıştır. Bütün öğrenciler aynı eğitimi görmüşlerdir. Sorular verilen eğitim öncesinde, eğitim sürecinde, eğitimden hemen sonra ve 6 hafta sonra olmak üzere dört farklı zamanda sorulmuştur. Her bir grup problemin bir versiyonunu çalışmıştır. White ve Mitchelmore uygulama problemini başarılı bir şekilde matematiksel sembol ve ilişkilere dönüştüren öğrencilerin doğru cevaplarını ve cevapların sayısını tablolastırmıştır. Aynı uygulamayı işlem hatası yapan öğrenciler için yapmışlardır. Eğitime başlamadan önce seçilen her biri 10 öğrenciden oluşan 4 grup ile her üç günde bir görüşme yapılmıştır. Görüşmelerde, dört testin hepsinde temelde aynı olan soruların farkına varamayan öğrenciler saptanmıştır. White ve Mitchelmore cevaplarda belirgin olan kavram yanılgılarını ve hata tiplerini not ederek, görüşmeleri ve açık uçlu soruların cevaplarını tartışmışlardır. Elde edilen bilgilerin incelenmesinde White ve Mitchelmore öğrencilerin değişken kavramını algılamada eksik olduklarını bulmuşlar ve öğrenci hatalarının birçoğuna neden olan değişken kavramında öğrencilerin zayıf yönlerini tespit etmişlerdir. Bu araştırmacılar; öğrenci cevaplarına göre öğrencilerin uygulamalı analizdeki zorlanmalarının nedeninin, az gelişen değişken kavramına bağlı olduğunu söylemişlerdir. Öğrenciler özellikle değişkenleri niceliklerle ilgili olmaktan ziyade, manipüle edilen semboller gibi algılamaktadırlar. Onlara göre analiz dersi kavramlar üzerine kurulmaktadır, bu kavramlardan biri olan değişken kavramı iyi anlaşılmadan analiz dersi başarılamaz. Analiz dersi için gerekli olan şey değişken kavramının anlaşılması ya da üniversite seviyesinde uygun bir analize giriş dersinin konulmasıdır. Değişken kavramını gereği gibi anlayamayan öğrenciler, hızlı karar veremezler ya da işlemleri çabuk sonuçlandıramazlar. Değişken kavramı; yavaş

öğrenilen, çok pratik yapmayı gerektiren ve daha sonraki işlemlerin de kesinlikle temelini teşkil eden zor bir kavramdır.

Cordero vd. (1997) bir fonksiyon ve onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkinin anlaşılması konusunda bir çalışma yapmışlardır. Onlar öğrencilerin fonksiyon ve onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi nasıl anladıklarını, ilişkileri analitik ve grafiksel gösterimler üzerinde yaparak bulmaya çalışmışlardır. Bu ilişkiler görsel ve analitiksel olayları içinde barındırır. Bunlar yöntem ve araçlarla açıklanabilir. Onlar hipotezlerini şöyle belirlemişlerdir: “grafiksel durumlarda öğrenciler ister istemez yöntemleri, amaçları, kabulleri ve retlerini oluşturmak zorundadırlar”. Araştırmacılara göre bu oluşumlar grafik formunun belirlenmesinde bazen lokal bazen de global olabilirler (grafığın bir parçası ve tamamı). Bununla birlikte, işlemler tanımlamalarda rol oynayan anlatımlara ve betimlemelere bağlıdır. Cordero vd. (1997)’ye göre matematiksel içeriklerin değişimleri; anlatımlar, betimlemeler ve işlemleri anlama “yapısal gelişimi” belirlememizde bize yardımcı olan öğelerdir. Bu anlamda onlar farklı içeriklerin birbirleriyle olan ilişkisini şöyle belirlemişlerdir.

Grafiksel içerik	————→	Analitiksel içeriğe
Analitiksel içerik	————→	Analitiksel içeriğe
Analitiksel içerik	————→	Grafiksel içeriğe
Grafiksel içerik	————→	Grafiksel içeriğe

Türev ve ilkel fonksiyon arasındaki grafiksel eğimli davranış, birkaç içeriği ileri geri hareket ettiren durumları içinde bulundurmaktadır. Örneğin f' ’nin grafiği ve koordinat eksenini üzerindeki pozisyonu ilkel f fonksiyonunun grafiği hakkında bilgi sunar. Fakat diğer yandan Cordero vd. (1997)’ye göre f' , f ve f' ’ye a sabitinin eklenmesi ile elde edilen $f' + a$ ’nın davranışında meydana gelen değişikliği bilerek f fonksiyonunun yeni grafiği hakkında soru sormak mantıklıdır. Onlar çalışmalarının analizini hareket, yöntem, amaç, şema üzerine dayandırmışlardır. Bununla birlikte, çalışmanın doğası özel durumlara bağımlı olduğundan, araştırmacılar bu durumları açıklamada bu teoremin sadece kavramsal yönlerini kullanmışlardır

Cottrill (1999) Analiz-I dersi alan öğrencilerin zincir kuralını anlamaları ve bunun bileşke fonksiyonunu anlamalarıyla olan ilişkisini araştırmıştır. Hem nitel hem de nicel yöntemler kullanılmıştır. Öğrencilerin fonksiyon, bileşke fonksiyon, türev ve zincir kuralıyla ilgili bilgi ve becerilerini test etmek için 34 Analiz-I öğrencisine anket uygulanmıştır. Veriler öğrencilerin bileşke fonksiyonunu anlamalarındaki performansları ve bunun zincir kuralını anlamayla olan ilişkisini araştırmak için analiz edilmiştir. Güçlü olmayan bir ilişki bulunmuştur. Deneklerin bazıları, işbirlikçi (Cooperative Learning) ve bilgisayar destekli öğretimin kullanıldığı analiz dersi almışlardır. İki grup arasında yapılan karşılaştırmada genel olarak bir fark bulunamamıştır. Müteakip görüşmeler 6 denekle yapılan anket cevaplarına dayandırılmıştır. Zincir kuralını anlamada bileşke fonksiyonun anlaşılmasının etkili olduğu yönünde bazı deliller sunulmuştur. Cottrill (1999)'e göre kullanılan öğretim yöntemi öğrencilerin zincir kuralını ve bileşke fonksiyonu anlamalarında kuvvetli bir etkiye sahiptir. Zincir kuralını kullanmak ve zincir kuralını anlama arasındaki farklar kullanılan öğretim yöntemindeki farklılıklarla bağlantılıdır. Cottrill (1999) farklı bilgi tiplerini belirlemedeki gereksinimleri saptamıştır. Nicel olarak yüksek puan alan iki öğrencinin mülakattaki performansları iyi çıkmamıştır. Diğer öğrenciler ise nicel çalışmada başarısız olup mülakatta başarılı olmuşlardır. Araştırmacı son olarak bu sonuçların ışığında pedagojik araçlar olarak yazılımların kullanılmasını tavsiye etmiştir.

Dias (2000) öğrencilerin Analiz-I dersinde sahip oldukları zorlukları belirlemiş ve bu zorlukların üstesinden gelmede bazı öğretim yöntemlerini önermiştir. Sonuçlar zorlukların, cebirsel notasyonların ve grafiklerin anlaşılmasındaki eksiklikle, sürekliliğin tam olarak anlaşılmasıyla, kelime problemlerinin yorumlanmasındaki eksikliklerle, matematiksel anlamı farklı olan bir kelimenin alışılmış anlamının sebep olduğu karışıklıklarla ilgili olduğu görülmüştür. Koordinat düzlemi fikrini ve düzenli sayı çiftlerini açıklamayı da içeren bu zorlukların üstesinden gelmek için, öğrencilerin değişkenleri ve grafiği anlamalarında, matematiksel modelleri öğrenmelerinde, cebirsel notasyon ve kavramların farklı yönlerini anlamalarında uygun ders kitaplarını kullanmalarına yardımcı olan yöntemler önerilmiştir.

Baker vd (2000), en az iki dönem analiz dersi alan öğrencilerin karmaşık ve alışılmış olmayan grafikleri anlamalarını analiz etmişlerdir. Bunun için klasik yazılı sınav, detaylandırma sınavı ve ses bandına kaydedilen mülakat yapmışlardır. Problem aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

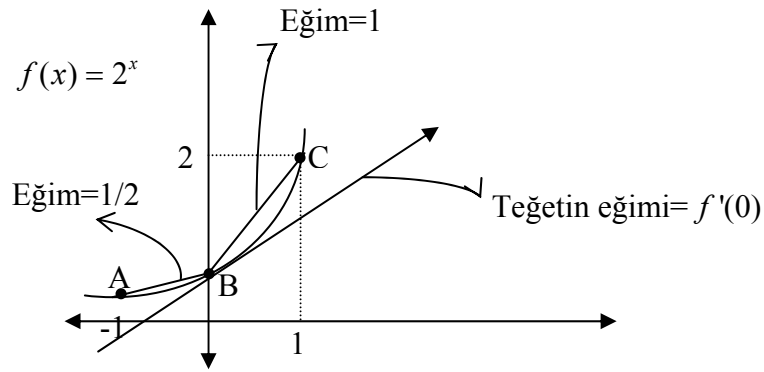
“Aşağıdaki şartları sağlayan h fonksiyonun grafiğini çiziniz.

1. h sürekli bir fonksiyon
2. $h(0) = 2$, $h'(-2) = h'(3) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \infty$
3. $-4 < x < -2$ ve $-2 < x < 3$ iken $h'(x) > 0$
4. $x < -4$ ve $x > 3$ iken $h'(x) < 0$
5. $x < -4$, $-4 < x < -2$ ve $0 < x < 5$ için $h''(x) < 0$
6. $-2 < x < 0$ ve $x > 5$ için $h''(x) > 0$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -2$ ”

Yukarıda 7 maddede özellikleri verilen problemi çözebilen öğrencilere eğer h sürekli olmasaydı grafik nasıl olurdu? Sorusunu ve bu problemle alakalı bir dizi soru yöneltmişlerdir. Öğrencilerin bazı temel kavramları göz önüne alırken diğerlerini ihmal ettikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bazı öğrencilerin ise klasik sınavda başarılı olurken, klinik mülakatta başarısız oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin bu problemde yaşadıkları en büyük kavram yanılgısının ikinci türevde görüldüğü kaydedilerek, bunun nedeninin ise birinci türev grafikte öğrenciler tarafından önemsenirken ikinci türevin göz ardı edildiği ve ikinci türevle ilgili kavram eksikliğinin olduğu şeklinde yorumlanmıştır.

Aspinwall ve Miler (2001) üniversite de Analiz-I dersi okutan öğretmenlerle beraber öğrencilerin analizin temel kavramalarını anlamalarıyla ilgili bir çalışma yapmışlardır. Hazırlanan çalışma yaprakları matematiksel işlemler ya da özel bir kavramın açıklanmasına yönelik öğrenci düşüncelerini belirlemeye odaklanmıştır. 15 haftalık dönemde 25 çalışma yaprağı verilmiştir. Bunların bazıları derste dağıtılıp ders sonunda

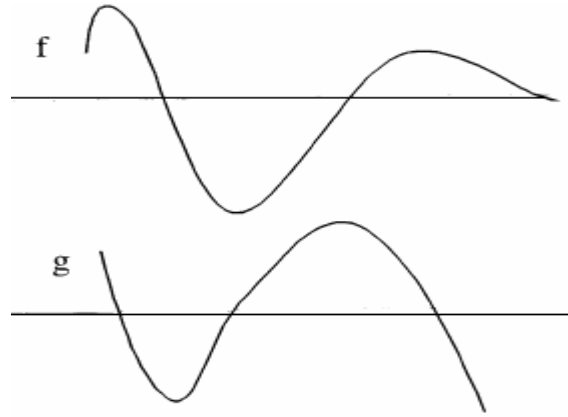
toplanırken bazılarını da evde yapmalarına izin verilmiştir. Araştırmacılar öğrencilerden cevaplarını matematiksel formül ve semboller kullanmadan İngilizce kelime ve cümlelerle açıklamalarını istemişlerdir. Onların çalışmasındaki veriler, öğrencilerin çalışma yapraklarına verdiği cevaplardan ve öğretmenlerin cevaplarına verdiği tepkiden oluşmaktadır. Fonksiyonun grafiğinin eğiminin ve türevinin tartışıldığı birkaç dersten sonra öğrencilere çalışma kağıtları verilmiştir. $x = a$ noktasındaki fonksiyonun türevi ve $x = a$ noktasındaki fonksiyonun grafiğinin eğimi arasındaki ilişkiyi tanımlayınız.



Şekil 2.6. Aspinwall ve Miller (2001) de kullanılan $f(x) = 2^x$ in grafiği ve $x = 0$ noktasındaki türevi

Aspinwall and Miller (2001)' e göre bazı öğrenciler ilgisiz ya da sınırlı bir kavram hayaliyle işlem yaptıklarından geçerli olan bir kavram tanımını minimum düzeyde yapmışlardır. Birçok öğrencinin türev ve eğim hakkındaki kavram hayali sınırlıdır ve sadece formüllerden oluşmaktadır. Bu öğrenciler kendi eğim düşüncelerini belirlemek için formülleri ya da formülleşmiş olan kavramları kullanmışlardır. Aspinwall and Miller (2001)'e göre bu, geçmişte genellikle formüller üzerine odaklanan eğitimin bir belirtisidir. Sadece formüllerle sınırlandırılan türev ve eğim fikri anlık hızın ve daha genel olarak da anlık değişim oranının kavramsal olarak anlaşılmasına engel olabilir. Bazı öğrenciler ise türev fonksiyonunu ve onun yorumunu bilişsel yapıları kullanarak açıklamışlardır. Öğrencilere verilen bir başka çalışma kağıdında grafikte verilen bilgileri öğrencilerden yorumlamaları ve grafikteki bilgileri kendi yazılı ifadelerine dönüştürmeleri istenmiştir. Şekilde görülen iki grafik aşağıdaki ifadelerin hangisiyle en iyi şekilde anlatılır.

- 1) f fonksiyonu g 'nin bir türevidir.
- 2) g fonksiyonu f 'nin bir türevidir.
- 3) Fonksiyonların hiçbirisi diğerinin türevi değildir.
- 4) Fonksiyonlardan birisi diğerinin türevidir.
- 5) Verilen bilgiler yeterli değildir.



Şekil 2.7. Aspinwall ve Miller(2001) de kullanılan fonksiyon grafikleri

Verilerden elde edilen sonuçlar bazı öğrencilerin, artan fonksiyon, pozitif değerli fonksiyon, artan eğim ve pozitif eğim arasındaki farkı ayırt edemediğini göstermiştir. Aspinwall and Miller (2001) öğrencilerin bilişsel yapılarını tespit etmek için; artan fonksiyon ile pozitif değerli fonksiyon arasındaki fark nedir? Artan eğim ile pozitif eğim arasındaki fark nedir? Pozitif değerli fonksiyon ile pozitif eğim arasındaki fark nedir? Azalan fonksiyon ile azalan eğim arasındaki fark nedir? Gibi ilave sözlü ya da yazılı sorulara ihtiyaç duymuşlardır. Aspinwall and Miller (2001)'e göre öğrenciler analizdeki nümeriksel, grafiksel ve analitiksel gösterimler arasında ilişki kurabildikleri oranda öğrencilerin anlamaları daha da zenginleşir.

Roddick (2001) yapmış olduğu çalışmada birisi geleneksel, diğeri de mathematica yazılım programının kullanıldığı bilgisayar destekli yöntemle analiz dersi alan iki gruptaki öğrencilerin analizdeki kavramsal ve işlemsel anlamaları ile analizle ilişkili derslerdeki başarılarını karşılaştırmıştır. Analiz dersi anlatıldıktan sonra her iki gruptaki öğrencilerle görüşme yapılmıştır. Bu görüşmeler analiz dersinin anlaşılmasını

araştırmak için kullanılırken, üniversite veri tabanından alınan notlar da analiz öğrencilerinin analizle ilgili derslerdeki başarılarını araştırmak için kullanılmıştır. Görüşmelerden elde edilen sonuçlar geleneksel yöntemle analiz dersi alan öğrencilerin problemlere işlemsel olarak, bilgisayar destekli yöntemle analiz dersi alan öğrencilerin ise kavramsal olarak yaklaştıklarını göstermiştir. Ayrıca “Mathematica” ile ders alan öğrencilerin geleneksel gruba göre türev ve integrali anlamalarının daha genel olduğu görülmüştür. Notların analizinden elde edilen sonuçlar, diferansiyel denklemlere giriş dersindeki farkın geleneksel yöntemle analiz dersi alanların, fizikle ilgili analiz dersindeki farkın da bilgisayar destekli öğrencilerin lehine anlamlı olduğu görülmüştür. Diğer anlamlı farklar Fiziğe Giriş ve Makine Mühendisliğine Giriş derslerinde “Mathematica” ile ders alan öğrencilerin lehine bulunmuştur.

Aspinwall and Shaw (2002) birisi geometriksel (grafiksel) diğeri de analitiksel (sembolik) düşünmeyi tercih eden iki öğrencinin grafiksel olarak verilen fonksiyonların türevlerinin bulunmasında ki öğrenci yaklaşımlarını karşılaştırmışlardır. Krutetskii (1976)’ya göre analitiksel ifadeleri tercih eden birisi sözel yöntemlere görsel yöntemlere göre daha fazla bağlı kalırken, geometriksel gösterimleri tercih eden öğrenci ise aksine görsel, resimsel yöntemlere sözel ve mantıksal yöntemlere göre daha fazla güvenir. Bu çalışmada onlar iki tane Analiz-I öğrencisinin zıt düşünme yöntemlerini örneklemiştir. Al geometriksel, Betty ise analitiksel gösterimlere meyilliydi. Araştırmacıların amacı; bu düşünme şekillerinden birinin diğeri göre daha iyi olduğunu göstermek olmayıp, iki öğrencinin düşünme biçimlerini kıyaslamaktır. Aspinwall and Shaw (2002) bunları yapmadan önce öğrencilerden sembolik olarak verilen şu fonksiyonların türevlerini almalarını istemişlerdir.

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x, \quad f(x) = (x^2 + 2x)^3, \quad f(x) = \frac{3x}{2x+1}$$

Aspinwall ve Shaw’ın buradaki amacı öğrencilerin fonksiyonların türevlerini hesaplamak için formülleri ne kadar öğrendiklerini test etmektir. Her iki öğrenci de bu soruları doğru yapmış ve soruların kolay olduğunu söylemişlerdir. Daha sonra öğrencilerden grafiksel olarak verilen fonksiyonların türev fonksiyonlarının grafiklerini

çizimleri istenmiştir. Betty'nin türev fonksiyonlarının grafiklerini çizerken kullandığı yöntemler onun bilişsel yapısının baskın bir şekilde analitiksel olduğunu gösterirken, tersine Al'ın düşüncelerinin analizlerinin sonucunda da tercihinin geometriksel olduğu görülmüştür.

Berry and Nyman (2003) yaptıkları çalışmada; öğrencilerin türev fonksiyonundan hareketle, o fonksiyonun ilkelini nasıl bulduklarını ve bu iki fonksiyon arasındaki ilişkiyi belirlemedeki kriterlerini tespit etmeye çalışmışlardır. Bunun için hız zaman grafiği içeren 4 soruluk bir test hazırlayarak bu testi öğrencilere sunmuşlar ve onlardan bu fonksiyonların ilk hallerini bulmalarını istemişlerdir. Daha sonra bu öğrencilerle ses kayıt cihazı ile mülakat yaparak sonuçları karşılaştırmışlardır. Bütün bunlardan sonra öğrencilerin grafiksel anlamalarıyla alakalı bir portre çıkarmışlardır. Sonuçta, öğrencilerin analizle ilgili ilk aktivitelerde sembolik gösterimleri tercih ettiklerini ve türev fonksiyonu ile onun ilkelini kurmada güçlük yaşadıklarını ortaya koymuşlardır. Yer-zaman grafiklerine giriş yaparken, öğrencilerin sembolik bilgilerinin grafiksel bilgilerle desteklenmesini ve yer-zaman grafiklerinin fiziksel anlamlarının öğrenciye anlatılması gerektiğini önermişlerdir.

Chappell and Killpatrick (2003) yaptıkları çalışmada kavrama dayalı öğretim ortamının analizdeki işlemsel bilgi ve öğrencilerin kavramsal anlamaları üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Çalışma iki bölümden oluşmuştur. Birincisine (orijinal çalışmaya) analiz dersi alan 305 öğrenci ile 8 öğretim üyesi katılırken ikincisine 303 öğrenci ve 8 öğretim üyesi katılmıştır. Onlar Analiz-I dersini alan ve başarılı olan farklı öğrenme çevrelerinden öğrencilerin seviyelerini belirlemek için çok yönlü başarı testleri kullanmışlardır. Başarı testleri öğrencilerin işlemsel yeteneklerini değerlendirmek için düzenlenen 2 adet beceri sınavından oluşmuştur. Hem sömestre ortasında yapılan sınav hem de final sınavı kavramsal anlama kadar işlemsel beceriyi de test edecek şekilde düzenlenmiştir. Beceri sınavlarıyla ölçüldüğü kadarıyla öğrencilerin işlemsel becerileri kullanmalarındaki farklar öğrenme çevrelerine göre çok önemli bulunmamıştır. Fakat işlemsel beceri kadar kavramsal anlamının da ölçüldüğü değerlendirmede kavramsal öğrenmeye dayalı öğretim çevresindeki öğrenciler, işlemsel öğrenmeye dayalı öğretim

çevresindeki öğrencilere göre daha yüksek ($P < .001$) notlar almışlardır. İkinci çalışma ilk çalışmanın genelleştirilebilen sonuçlarından oluşmuştur. Bu sonuçlar ileri seviyede, işlemsel becerileri ihmal etmeden, kavrama dayalı eğitimsel programların öğrencilerin anlamalarına etkili olabileceğine dair deliller sunmuşlardır.

Marrongelle (2004) analiz ve fizik derslerindeki analiz problemlerinin çözümünde üniversite öğrencilerine yardım etmek için fiziğin nasıl kullanılabileceğini araştırmıştır. Başlangıçta öğrencilerin türevi anlamalarını analiz etmek için Zandieh (2000) nin hazırladığı yöntem kullanılmış, Zandieh'in "paradigmatic physical" içeriğinin detayları verilmiş, matematik ve fen derslerinin öğretimini ve öğrenimini araştırmak için gerekli olan teoriksel temeller belirlenmiştir. Analiz sorularını çözerken öğrencilerin fiziksel düşünceleri kullanmadaki farklı yolları araştırmak için durum çalışması deseni kullanılmıştır. Veriler 8 öğrencinin her biriyle yapılan dört tane kişisel mülakattan, sınıf içi gözlemden, öğrencilerin ev ödevleri ve sınavlara verdikleri cevaplardan elde edilmiştir. Bu çalışmanın en önemli sonucu; ortalama değişim oranı, türev ve integral kavramlarını içeren sorularda öğrencilerin fiziği kullanmalarını karakterize etmede kullanılan ve dört kategoriden oluşan "sınıflama sisteminde fiziğin kullanılması"dır (Physics Use Classification Scheme). Bu makalede öğrenci durumlarıyla çelişen "sınıflama sisteminde fiziğin kullanılması" dan iki kategori açıklanmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Problem Durumu

3.1.1. Çalışmanın amacı

Bir fonksiyon ve onun türev fonksiyonu arasındaki ilişki analizin temel konularından birisidir. Bundan dolayı bu ilişki formal analiz derslerinde yer alan limit, süreklilik ve yakınsaklık gibi bazı kavramlarla yakından ilgilidir. Fonksiyon ve türev fonksiyonu arasındaki ilişki matematiksel karmaşıklığına rağmen çocukluğumuzdan itibaren sezgilerimizin oluşmasına yön veren günlük yaşamdaki birçok konuda farklı hallerde bulunmaktadır. Bu sezgiler hiç analiz dersi almayan öğrencilere, fonksiyon ve türev fonksiyonları hakkında düşünmelerine ve durumları tartışmalarına olanak vermektedir (Nemirovsky ve Rubin, 1992). Türkiye’de öğrenciler fonksiyon ve türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi formal olarak lise son sınıfta görmeye başlarlar. Daha sonra öğrenciler öğrenimlerini matematikle ilgili matematik, mühendislik, ekonomi, fen bilimleri gibi bir alanda devam ettirirlerse öğrenim ve hatta iş hayatlarında bir fonksiyonla onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi içeren problemlerle sürekli olarak iç içe olurlar. Örneğin kanal inşasıyla uğraşan bir inşaat mühendisinden, kenarlarından üçü $4m$ olan ikizkenar şeklinde ve maksimum su taşıma kapasiteli betondan bir sulama kanalı yapması istenirse bu mühendisin bu kanalı yapabilmesi için bir fonksiyonla onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi bilmesi gerekir. Aksi takdirde bu kanalı yapabilmesi için deneme yanılma metodunu kullanması gerekecektir. Görüldüğü gibi fonksiyonla onun türev fonksiyonu arasındaki ilişki öğrenim hayatında olduğu kadarıyla uygulamalarıyla iş hayatında da önemlidir. Fakat bu konunun öğrenilmesinde ve öğretilmesinde bir takım zorluklar yaşanmaktadır. Bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının bir fonksiyonla onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaştıkları zorluklar araştırılmıştır.

3.1.2. Araştırma problemi

1. İlköğretim Matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar ve türev fonksiyonları arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaştıkları zorluklar nelerdir?
2. İlköğretim Matematik öğretmeni adaylarının türevlenebilme ve süreklilik arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaştıkları zorluklar nelerdir?

Araştırma soruları

- ❖ Öğretmen adayları, verilen bir fonksiyonun grafiğini çizebiliyorlar mı?
- ❖ Öğretmen adayları fonksiyonların türev fonksiyonuna bakarak fonksiyonun davranışını belirleyebiliyorlar mı?
- ❖ Öğretmen adayları fonksiyonun grafiğine bakarak, birinci ve ikinci türev hakkında yorum yapabiliyorlar mı?
- ❖ Öğretmen adayları türev fonksiyonun grafiğine bakarak, fonksiyon hakkında yorum yapabiliyorlar mı?
- ❖ Öğretmen adayları grafiksel olarak gösterilen bir fonksiyonun türev fonksiyonun grafiğini çizebiliyorlar mı?
- ❖ Öğretmen adayları türevlenebilme ve süreklilik arasındaki ilişkiyi anlayabiliyorlar mı?
- ❖ Öğretmen adayları bir fonksiyonun türevlenebilirliğini belirlemede fonksiyonun sürekliliğini nasıl kullanıyorlar?

3.2. DeneySEL Yöntem

Araştırılan problemin bir yönünün derinlemesine ve kısa sürede çalışılmasına imkan sağlayan özel durum çalışması bireysel yürütülen çalışmalar için çok uygundur. Özel durum çalışması araştırma yöntemlerinin tümünü kapsayabilen bir çalışma olarak tanımlanmaktadır. İnceleme, belirlenen bir özel durum etrafında derinlemesine yapılır (Çepni, 2001). Seçilen problemlerin daha derinlemesine incelenebilmesi için çalışmanın yapısına “**durum çalışması deseni**” (case study design) daha uygundur (Yıldırım ve

Şimşek 2000; Mcmillan and Schumacher 2001; Çepni, 2001). Çalışma temelde nitel bir araştırma olmasına rağmen, durum çalışmalarında gözlem, mülakat ve doküman inceleme başta olmak üzere bütün teknikler kullanılmaktadır. Bu yöntem, araştırmalarda nitel ve nicel tekniklerin kullanılmasına olanak sunmaktadır (Çepni, 2001). Bundan dolayı çalışmada hem nitel hem de nicel yöntemler kullanılmıştır. Bu çalışmadaki veriler açık uçlu sorulardan oluşan dört adet başarı testine Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin vermiş oldukları cevaplardan, öğrencilerle yapılan mülakatlardan elde edilmiştir. Elde edilen veriler öğrencilerin fonksiyonlardaki performansını bunların türevle olan ilişkisini, bir fonksiyonla onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorlukları belirlemek için analiz edilmiştir. Bu ilişkiyi daha derinlemesine incelemek için öğrencilerle mülakat yapılmıştır. Testler farklı zamanlarda uygulandığı için her bir teste katılan öğrenci sayısı da farklı olmuştur. Mülakat ise araştırmacı tarafından belirlenen sayıdaki bireylerle yapılmıştır.

3.3. Çalışmanın Örneklemi

Çalışmanın örnekleminin seçiminde, olasılık temelli örnekleme yöntemi içinde yer alan küme örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Küme örnekleme, çalışması düşünülen evrende doğal olarak oluşmuş veya farklı amaçlarla yapay olarak oluşturulmuş, kendi içinde belirli özellikler açısından benzerlik gösteren değişik grupların olması durumunda kullanılır (Yıldırım ve Şimşek 2000). Örneklem için analiz dersini aynı öğretim elemanından alan üç sınıf arasından birinci öğretim A şubesi seçilmiştir. Araştırmanın örneklemini Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında öğrenim gören Analiz-I dersini almış ve Analiz-II dersini almaya devam eden 52 birinci sınıf öğrencisinden oluşmuştur. Deneysel yöntem kısmında da bahsedildiği üzere, testler farklı zamanlarda uygulandığı için her bir testte katılan öğrenci sayısı farklı sayıda olmuştur. Fonksiyon ve türevle ilgili işlemsel beceri testine 48, bilgi testine 49, türevlenebilme ve süreklilik arasındaki ilişkiyi anlama testine 41, fonksiyonla türevi arasındaki ilişkiyi anlama testi-I'e 46, fonksiyonla türevi arasındaki ilişkiyi anlama testi-II'ye 48 ve fonksiyonla türevi

arasındaki ilişkiyi anlama testi-III'e 12 öğrenci katılmıştır. Uygulama, 2004–2005 öğretim yılının bahar yarıyılında gerçekleştirilmiştir.

3.4. Veri Toplama Araçları

Daha önceki bölümde türevin farklı gösterimlerinin varlığından bahsetmiştik. Her bireyin matematiksel yetenekleri farklı farklıdır. Örneğin birisi analitiksel gösterimi tercih ederken başka biri ise geometriksel gösterimi tercih edebilir. Aspinwall vd. (1997), Aspinwall and Shaw (2002)' ye göre Krutetskii (1976) matematiksel gösterimlerin arasındaki farkı ayırt etmiştir. Krutetskii (1976)' ya göre analitiksel ifadeleri tercih eden bir öğrenci sözel ve mantıksal yöntemlere daha fazla güvenirken görsel yöntemlere fazla itibar etmez. Aksine geometriksel yöntemleri tercih eden öğrenci de görsel ve resimsel yöntemlere yukarıda ifade edilen sözel ve mantıksal yöntemlere göre daha fazla güvenir. Harmonik eğilime sahip bir öğrenci ise sözel ve mantıksal gösterimler ile görsel ve resimsel yöntemlerin hepsine aynı derecede güvenir. Çalışmada kullanılan araçlar hazırlanırken bu kişisel farklılıklar göz önünde tutulmuş ve mümkün olduğunca farklı gösterimlere yer verilmiştir. Aynı zamanda hazırlanan sorularda öğrencilerin işlemsel ve kavramsal öğrenmeleri de test edilmek istenmiştir. Kavrama düzeyinde grafik çizme, yeni bir grafiği yazılı ya da sözlü olarak açıklama, bir olgunun nedenini, nasıl ve niye olduğunu kendi cümleleriyle gerekçe göstererek açıklama, yeni örnekler verme, verilerin geçmişini ve geleceğini kestirme vardır (Sönmez 1994).

Aşağıda araştırmada kullanılan araçların içerikleri ve testlerde kullanılan sorulara örnekler verilmiştir. Çalışmanın ekler bölümünde ise kullanılan soruların tamamı sunulmuştur.

3.4.1. Fonksiyon ve türevle ilgili işlemsel beceri testi

Bu test toplam 7 adet açık uçlu sorudan oluşmuştur. Bu sorulardan 3 tanesi fonksiyonun tanım kümesi, bileşke fonksiyon ve verilen bir fonksiyonun tersini bulma ile 3 tanesi

çarpımın, bölümün türevini ve zincir kuralını içeren sembolik olarak verilmiş fonksiyonların türevini almayla ve son soru ise türevin tanımını, bir fonksiyonun türevinin neden alındığını ve pratikteki kullanım alanları ile ilgilidir. Bu testin yapılmasının amacı öğrencilerin fonksiyon ve türevdeki bazı temel işlemlerdeki performanslarını test etmektir. Bu soruların hazırlanmasında Aspinwall ve Shaw (2002), Cottrill (1999) da kullanılan açık uçlu sorulardan esinlenilmiştir. Bu testte kullanılan birinci ve altıncı soru aşağıda verilmiştir.

1- $f: R \rightarrow R$ $f(x) = 2x - 1$ ve $g: R - \{-2\} \rightarrow R - \{1\}$ $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$ ise $fog(x)$

fonksiyonunu bulunuz

6- $f(x) = x^3 \cdot \cos x$ ise $f(x)$ fonksiyonun türevini $f'(x)$ bulunuz.

3.4.2. Bilgi testi

Bilgi testi, bir fonksiyonla onun türev fonksiyonu arasındaki ilişki hakkında öğrencilerin bilgilerini bilgi düzeyinde test etmek amacıyla hazırlanmıştır. Bu test toplam 12 sorudan oluşmuştur. Sorular doğru yanlış şeklinde hazırlanmıştır. Verilen ifade doğru ise öğrencilerden ifadenin başına D yazmaları, yanlış ise Y koyarak verilen ifadenin doğrusunun yazılması ya da tersine bir örnek verilmesi istenmiştir. Bu ifadelerden iki tanesi aşağıdaki gibidir.

..... $f(x)$ fonksiyonu c noktasında bir ekstremuma sahip ve bu noktada türevli
ise $f'(c) = 0$ dır.

.....Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında sürekli ise bu noktada türevlenebilirdir

3.4.3. Bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi anlama testi

Bu test kendi arasında üç farklı bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm 3 adet açık uçlu sorudan oluşmuştur. Birinci soruda öğrencilerin sembolik olarak verilen bir fonksiyonun grafiğini çizmedeki performanslarını değerlendirmek için öğrencilere sembolik olarak gösterilen bir fonksiyon verilmiş ve öğrencilerden bu fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir. Soruda öğrencilerin takip etmeleri gereken adımlar tek tek verilerek grafiği çizmeleri için yol gösterilmiştir. İkinci ve üçüncü sorularda öğrencilerden analitiksel olarak verilen bilgilerden faydalanarak fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi bulmaları istenmiştir. Bu sorulardan ikincisi iki şıklıdır ve beş şıklı olan üçüncü sorunun ilk iki şıkkı aşağıda verilmiştir.

3. f , $[-4,4]$ aralığında sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $x = -2$ noktasında maksimuma, $x = 4$ noktasında minimuma ve $x = 2$ noktasında da büküm noktasına sahip ise aşağıdaki ifadelerden hangileri doğru hangileri yanlıştır? Açıklayınız.

a) $f'(-2) = 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:.....

b) $f'(2) = 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:.....

İkinci bölüm ise yine kendi arasında iki bölümden oluşmuştur. A bölümde bir fonksiyonun türevinin grafiği verilmiştir. Grafikten faydalanarak fonksiyon ve türev fonksiyonu hakkında öğrencilere toplam 4 soru yönetilmiştir. B bölümü ise fonksiyonun grafiğinden faydalanarak fonksiyonun kendisi, birinci ve ikinci türevi hakkında tahminde bulunmayı ve yorum yapmayı içermektedir. Bu bölümde de toplam 7 soru sorulmuştur. Bu soruların hazırlanmasında Kadioğlu ve Kamali (2001) ile Robinson (1990) dan yararlanılmıştır. Bu sorular ekte verilmiştir.

Üçüncü bölüm toplam üç sorudan oluşmuştur. Bunlar grafiksel olarak verilen fonksiyonun grafiğinden faydalanarak fonksiyonun türevinin grafiğinin çizilmesini içermektedir. Bu soruların hazırlanmasında Ferrini-Mundy and Graham (1991) ve

Aspinwall and Shaw (2002) de kullanılan sorulardan faydalanılmış ya da burada kullanılan sorular aynen alınmıştır.

3.4.4. Süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlama testi

Toplam 4 sorudan oluşan bu test öğrencilerin türevlenebilme ve süreklilik arasındaki ilişkiyi nasıl anladıkları üzerine odaklanmıştır. Öğrencilerden hem grafiksel hem de sembolik olarak verilen fonksiyonların sürekli ve türevli olduğu noktaları belirlemeleri istenmiştir. Soruların bazıları sembolik bazıları da grafiksel olarak gösterilmiştir. Örneğin birinci soruda öğrencilere sembolik olarak gösterilen

$f(x) = |x - 2|$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki;

a) Sürekliliğini araştırınız.

b) Türevlenebilirliğini araştırınız. $x = 2$ noktasında türevli ise türevini bulunuz. Değil ise sebebini açıklayınız”.

Sorusu yöneltilmiştir.

Üçüncü soruda öğrencilerden grafiği verilen fonksiyonun süreksiz olduğu ve türevinin olmadığı noktaları belirleyerek açıklamaları istenmiştir. Bu soruların hazırlanmasında Selden vd. (1989) ve Viveros ve Sacristan; (2002) de kullanılan sorulardan yararlanılmıştır.

Veri toplama araçlarının hazırlanmasında daha önce literatürde geçen kaynaklardan faydalanılmasının amacı bizim bulgularımız ile onların bulgularını karşılaştırmaktır.

İyi bir ölçme aracı aranan temel özelliklerden en önemli iki husus “ geçerlik (validity)” ve “güvenirliliktir (reliability)” (Karasar 2000; Erdoğan 1998). Geçerlik ölçme aracının amaçlanan farklı özellikleri karıştırmadan ölçebilme yeterliliği ile ilgilidir (Turgut 1990; Beydoğan 1998). Pek çok geçerlik ölçütü olmasına rağmen en çok

kullanılanlardan birisi içerik, uygulama ve yapı geçerliğidir (Karasar 2000). Bu araştırmada kullanılan testlerin geçerliğini belirlemek için ölçüt olarak içerik geçerliği kullanılmıştır. İçerik geçerliği, ölçme aracında bulunan soruların ölçme amacına uygun olup olmadığını, ölçmek istenilen alanı temsil edip etmediği ile ilgili olup, uzman görüşüne göre saptanır (Karasar 2000). Yapılan bu araştırmada testlerin kapsam ve görünüş yönüyle geçerlik düzeyini belirlemek için başlıca kaynak tarama, danışman ve uzman görüşlerinden faydalanılmıştır. Bu amaçla hazırlanan testler üniversitede analiz dersi okutan, doktor, doçent ve profesör seviyesinde beş uzman kişiye incelettirilmiştir. Ayrıca görüşülen bireylerden doğrudan alıntılara yer verilmiş ve sonuçlar bunlardan yola çıkarak açıklanmıştır. Güvenirlik ise ölçme araçları ile belli bir özelliğe yönelik yapılan sonuçları arasında tutarlılığın bulunmasıdır (Beydoğan 1998). Bu çalışmada kullanılan testlerdeki soruların geçerlik ile güvenirlilikleri iç içe düşünülmüştür. Nitel araştırmalarda özellikle güvenirlilik konusunda nicel araştırmalarda olduğu gibi yaygın olarak tanımlar, yöntemler ve testler kullanılmamaktadır (Yıldırım ve Şimşek 2005). Nitel araştırma ile güvenirlilik tam uyuşmamaktadır (Çepni 2001; Yıldırım ve Şimşek 2005). Çünkü insan davranışı durağan değildir, sürekli değişen ve karmaşık bir yapısı vardır. Bu nedenle kullanılan yöntem ne olursa olsun insan davranışını konu edinen bir araştırmanın aynen tekrarı mümkün değildir. Görüldüğü gibi nitel araştırmayla güvenirlilik çelişmektedir (Yıldırım ve Şimşek 2000). Bu tür araştırmalarda sonuçların bağımlılığı ve tutarlılığı çok daha önemlidir. Hem güvenirliliği hem de geçerliğini güçlendirmek için hazırlanan sorular örneklemin dışındaki farklı bir gruba uygulanmış, soruların zorluk dereceleri bulunmuş, öğrencilerin çok zorlandıkları sorular ya tekrar gözden geçirilmiş ya da değiştirilmiştir. Mümkün olduğunca aynı içerikte çok soru sorulmuştur. Veriler farklı yöntemler (açık uçlu testler ve mülakat) kullanılarak toplanmıştır. Mülakatlarda öğrenci cevapları üzerine yoğunlaşmış, böylece öğrencilerin mülakatta söyledikleri ile açık uçlu testlere verdikleri cevaplar arasında karşılaştırma imkanı olmuştur. Araştırmada farklı görüşlere ve alternatif açıklamalara yer verilmiş, araştırmanın ham verileri gerektiğinde başkaları tarafından incelenebilecek şekilde saklanmıştır. Verilerin analizinde araştırmacı tarafından cevap anahtarı hazırlanmış, bu cevap anahtarına göre örneklemden seçilen beş kağıt üç uzman tarafından ve araştırmacı tarafından değerlendirilmiş, sonuçlar birbiriyle karşılaştırılmıştır.

Karşılaştırma sonucunda değerlendirme sonuçlarının birbirine yakın olduğu görülmüş ve daha sonra verilerin analizi yapılmıştır.

3.4.5. Mülakat

Uygulanan testlerin sonuçları araştırmacı tarafından her öğrenci için ayrı ayrı hazırlanan dosyalara yazılı olarak kaydedilmiştir. Her öğrencinin bütün cevapları kendi içinde karşılaştırılmış, öğrencinin bir fonksiyonla türevi arasındaki ilişkiyi anlamada gerekli olan bilgiye sahip olup olmadığı, sahip ise bu bilgileri verilen sorularda nasıl kullandığı ya da kullanmadığı, fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi anlamada ne gibi zorluklara sahip olduğu araştırılmıştır. Daha sonra zorluk yaşayan ve çalışmanın tamamına katılan öğrencilerden 12 öğrenci tespit edilerek bu öğrencilerle sistemli görüşme yapılmıştır. Bu öğrencilerle yapılan görüşmeler, izin alınarak öğrencilerin dikkatini çekmeyecek şekilde webcam ile bilgisayara kaydedilmiştir. Testlerdeki öğrenci cevaplarının ve mülakatların araştırma dışında herhangi bir maksat için kullanılmayacağı, bireylerin adının gizli kalacağı sözü verilmiştir. Mülakat yarı yapılandırılmış formatta olup her bir öğrencinin yapmış oldukları hatalar yüz yüze görüşmede tekrar sorulmuş, bu sorulara verdikleri cevapların nedenleri araştırılmış, öğrencilerin zorlandığı noktalar ve zorlanma sebepleri üzerinde durulmuştur. Görüşmeler her bir öğrenci için 40–50 dakika arasında sürmüştür.

3.5. Uygulama

Bu çalışma, 2004–2005 öğretim yılı bahar döneminde belirli aralıklarla Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı birinci sınıfta okuyan toplam 52 öğrenciye uygulanmıştır. Testler birer hafta arayla yapılmış ve toplam altı hafta sürmüştür.

Uygulama için tarafsız kura ile birinci öğretim A şubesi seçilmiştir. Bu şubedeki öğrencilere ilk önce “Fonksiyon ve Türevle İlgili İşlemsel Beceri Testi” yöneltilmiş ve öğrencilerin cevapları dikkatli bir şekilde incelenerek daha önceden her bir öğrenci için

ayrı olarak düzenlenen dosyalara araştırmacı tarafından kaydedilmiştir. Öğrencilerin başarıları üzerinde olumsuz bir etki yapmaması için zaman kısıtlaması yapılmamış, soruları herkes arzu ettiği sürede yapmıştır. Bundan sonra yapılan diğer test sonuçları da her bir öğrenci için ayrı olarak düzenlenen dosyalara işlenmiştir. Böylece bir öğrencinin her bir teste verdiği cevapların birbiriyle karşılaştırılabilme şansı elde edilmiştir. Bu karşılaştırılma neticesinde hangi öğrencinin nerelerde ve neden zorlandığı tespit edilmeye çalışılmıştır. Çünkü bir test sonucuna bakarak öğrencinin nerede ve neden zorlandığını tespit etmek zor olabilir. Bir test sonucunda verilen yanlış cevabın sebepleri farklı olabilir. Daha sonra öğrencilere “Bilgi Testi” uygulanmıştır. Bu testte de yine öğrencilere süre kısıtlaması yapılmamıştır.

Bilgi testi sonuçları her bir öğrenci için ayrılan sayfaya işlendikten sonra öğrencilerin bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişki hakkında ki bilgi düzeyleri, sahip oldukları bilgileri daha sonraki testlerde nasıl kullandıkları ve bilgi düzeyinde sahip olamadıkları bilgilerin sonraki testlerde etkisinin ne olduğu araştırılmıştır. Öğrencilerin sahip oldukları bilgileri kullanıp kullanamadıklarını test etmek için hazırlanan ve üç bölümden oluşan “Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testi” her hafta bir bölüm olmak üzere üç haftada uygulanmıştır. Bu testteki sorular öğrencilerin hem kavramsal hem de işlemsel öğrenmelerini test edebilecek özelliktedir. Bu testin sonuçları da araştırmacı tarafından titiz bir çalışmayla her bir öğrenci için ayrılan dosyalara kaydedilmiştir. Son olarak öğrencilere “Süreklilik ve Türevlenebilme Arasındaki İlişkiyi Anlama Testi” uygulanmıştır.

Uygulanan 4 teste her bir öğrencinin verdiği cevaplar incelenerek birbiriyle ve kendi içerisinde karşılaştırılması yapılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda öğrencilerin bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi, süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaştıkları zorluklar araştırılmıştır. Daha sonra bu zorlukların temelinde yatan sebepler tespit edilmeye çalışılmıştır. İki hafta sonra bu öğrencilerden 12 si ile yarı yapılandırılmış mülakat yapılmak istenmiş bu öğrencilerin hepsi yüz yüze görüşme teklifini kabul etmişlerdir. Böylece 12 öğrenci ile teker teker mülakat yapılmıştır. Bu öğrencilerle yapılan görüşmeler webcam ile bilgisayara kaydedilmiştir.

Mülakat süresi toplam olarak 500 dakika kadar olup öğrencilerin uygun olduğu dönemler seçildiğinden üç haftalık bir zaman diliminde yapılmıştır.

Testlerin ve mülakatın bir döneme yayılmasında ki amaç öğrencilerde bıkkınlığa neden olmamaktır. Ayrıca çalışmaya katılmak istemeyen öğrencilerde alınmamıştır. Her bir testte ve uygulamada öğrencilere süre kısıtlanması yapılmamış olup, herkese istediği kadar zaman verilmiştir. Araştırmacı; bu test sonuçlarının öğrenciye hiçbir şekilde olumlu veya olumsuz etki yapmayacağını ve sadece araştırma amaçlı kullanılacağını belirterek öğrencilerin rahat olmasını sağlamıştır. Her uygulamadan önce çalışmanın amacı öğrencilere anlatılmış ve onların rahat bir şekilde testleri cevaplamaları sağlanmıştır. Mülakattan öncede her öğrenciye mülakatın amacı teker teker anlatılmış ve öğrenci tam ikna olduktan sonra başlanmıştır.

3.6. Verilerin Analizi

Toplanan verilerin özgün formuna mümkün olduğunca sadık kalarak ve gerektiğinde araştırmaya katılan öğrencilerin söylediklerinden doğrudan alıntı yaparak betimsel bir yaklaşımla veriler sunulmuştur. Yıldırım ve Şimşek (2005)' e göre gerek Wolcott'ın sınıflaması, gerekse alanyazınındaki diğer sınıflamalar nitel araştırmalardaki verilerin analizinde “betimleme”, “analiz”, ve “yorumlama” kavramlarını vurgulamışlardır: Öğrencilerin ne yaptıklarını, söylediklerini ve hangi bilgileri ortaya koyduğunu belirlemek için betimleme, öğrencilerin “neden” ve “nasıl” yaptıklarını öğrenmek analiz ve öğrencilerin yaptıklarının ve söylediklerinin ne anlama geldiğini belirlemek için de yorumlama yaklaşımı kullanılmıştır. Ayrıca yüzde ve frekans hesapları kullanılmıştır. Öncelikle öğrenci cevapları doğru, yanlış ve boş olarak ayrılmış daha sonra da yanlış yapan öğrencilerin cevapları kendi içinde kategorilere ayrılarak sorunun doğru yapılmamasının sebepleri üzerinde durulmuştur.

Mülakat sonuçları ise araştırmacı tarafından düzenlenmiştir. Kayda alınan konuşmalar mülakat yapılan öğrencilerin kağıtlarıyla birlikte çözümlenmiş, bu öğrencilerin hem kağıtlarından hem de konuşmalarından yola çıkarak bütün öğrencilerin zorluk

yaşadıkları noktalar tespit edilmeye çalışılmıştır. Zaman zaman bulgular bölümünde öğrenci ile görüşmecisi arasında geçen ifadeler yer verilmiştir.

Sadece yüzde ve frekans belirtmek için öğrenci cevapları “doğru”, “yanlış” ve “boş” gibi kategorilere ayrılmıştır. Bazı öğrenciler anlatmak istediklerini tam olarak anlatamamışlardır. Örneğin öğrenciler fonksiyonun artan olduğu aralığı ifade ederken bazıları $[x_2, x_4]$ şeklinde, bazıları (x_2, x_4) ve diğerleri de $x_2 - x_4$ şeklinde ifade etmişlerdir. Bunların hepside doğru kabul edilmiştir.

Araştırmanın deseni gereği herhangi bir istatistiksel bilgisayar programı kullanılmaya gerek görülmemiştir. Ayrıca doğru ve yanlışın puanlanması gibi bir yöntem de gerek duyulmamıştır. Sadece var olan durumun eğitim açısından önemli olan yönleri betimlenmiştir.

3.7. Araştırmanın Kabulleri ve Sınırlılıkları

Bu araştırmada aşağıda belirtildiği şekilde birtakım kabuller ve sınırlılıklar vardır.

3.7.1. Kabuller

1. Uygulanan testler ve yapılan mülakat öğrencilerin bir fonksiyon ile onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada, süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorlukları ayırt edebilecek ve bu zorlukların nedenlerini ortaya koyabilecek niteliktedir.

2. Öğrenci cevaplarının onların gerçek bilgi seviyelerini yansıttığı kabul edilmiştir.

3.7.2. Sınırlılıklar

1. Çalışmanın örnekleme, Atatürk Üniversitesi Kâzım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı birinci sınıf birinci öğretim A şubesinde öğrenim gören toplam 52 öğrenci ile sınırlıdır.
2. Araştırma, sadece bir fonksiyon ile onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada, süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorlukları ve bu zorlukların nedenlerini belirlemeyle sınırlıdır.
3. Araştırmanın uygulama süresi bir dönem, 340 dakikalık (300 dakikası açık uçlu soruların uygulama süresi, 40 dakikası ise öğrenci başına düşen ortalama mülakat süresidir) uygulamayla sınırlıdır.
4. Kullanılan testlerdeki fonksiyonlar $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, bir tek reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlarla sınırlıdır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde öğrencilerin sorulara verdikleri cevapların incelenmesi sonucunda elde edilen araştırma bulguları ve tartışmaları verilmiştir. Bulgularda, araştırma desenine uygun olarak öğrenci cevaplarından alıntılar yapılmıştır.

Öğrencilerin işlemsel becerilerini test etmek amacıyla yapılan işlemsel beceri testinde öğrencilerin tamamına yakını “ $f(x)=\sqrt{x-2}$ fonksiyonunun tanım ve değer kümelerini bulunuz”. ve “ $f(x)=x^3.\cos x$ ise $f(x)$ fonksiyonun türevini $f'(x)$ bulunuz”, şeklindeki sorularda zorluk yaşamamışlar ve doğru yapmışlardır. Öğrencilerimiz genellikle ilköğretimin ilk yıllarından itibaren işlemsel beceri gerektiren bu tür sorularda uzmanlaşırlar. Özellikle de üniversite sınavının yapısından dolayı öğrenciler kavramsal anlamadan ziyade işlemsel beceri ve anlama üzerine odaklanırlar. Zaten yapılan mülakatta da öğrenciler bu sorularda zorlanmadıklarını, ÖSS’ ye hazırlanırken işlemsel beceri gerektiren soruları çok çözdüklerini ve alışık olduklarını ifade etmişlerdir. Sadece birkaç öğrenci dikkatsizlikten kaynaklanan yanlışlıklar yapmışlardır. İşlemler analiz kavramlarının anlaşılmasında temel yapı taşlarıdır. İşlemler daha sonraki matematiksel gelişmeler için temel düzenlemelerdir. İşlemsel becerileri eksik olan öğrenciler analizi başarmada da oldukça zorlanırlar.

Araştırmaya katılan öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun türevin tanımı ve kullanım alanları hakkındaki kavram hayalleri ya yanlış ya da sınırlıdır. Çalışmaya katılan 48 öğrenciden 8 (%17) tanesi türevin tanımını hiç yapamamış, 11 (%23) tanesi türevin tanımıyla hiç ilgisi olmayan tanımlar yapmış, 13 (%27) tanesi türevin nümeriksel tanımını, 16 (%33) tanesi de türevin geometriksel yorumunu (tanımı) referans alarak yapmışlardır. Öğrencilerin üzerinde çalıştıkları kavramın tanımını bilmemeleri, yanlış ya da eksik bilmeleri öğrencilerin bu kavramı anlamalarını doğal olarak güçleştirmektedir. Öğrencilerin “Türev nedir? Bir fonksiyonun türevi niçin alınır?” sorusuna verdikleri cevaplardan bazı alıntılar yapılmış, bu alıntılar hiç değiştirilmeden aşağıda verilmiştir. Öğrencilerin adları yerine A, B, C,... harfleri kullanılmıştır. A,B,C

...kodları her soruda farklı öğrencileri için kullanılmıştır. Yani birinci sorudaki A öğrencisi ile ikinci sorudaki A öğrencisi aynı öğrenciler değildir.

İlgisiz tanım yapan öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntıların bazıları şu şekildedir: A öğrencisi türevi: “Bir fonksiyonun analiz edilmesi parçalanması diye biliyorum. Niçin alındığını tam bilmiyorum. Ama grafik eğimlerin bulunmasında işe yarar”. B öğrencisi: “Türev: $y = f(x)$ fonksiyonunda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ise ve L sonlu bir sayı ise buna denir”. Hatta bazı öğrenciler türevi lüzumsuz görmüşlerdir. Bunlardan birisi olan C öğrencisi türevi: “lüzumsuz bir bilmece, ezbere, kurallarla sonuca ulaşılan bir bilmededen farkı yok. Faydası vardır mutlaka ama benim hayatımda yok” şeklin de tanımlamıştır.

Nümeriksel tanımı referans alan öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntıların bazıları da şu şekildedir. D öğrencisi türevi: “ $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı olsun

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) \text{ tir. } f'(x) \text{ fonksiyonu sonlu ve tanımlıdır}.” E öğrencisi:$$

$$“ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \text{ bir tam sayı olmak üzere türev tanımıdır. Türev bir limit$$

$$\text{problemidir. F öğrencisi : } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + b) - f(a)}{\Delta x} = f'(c) \text{ türevi almamızı sağlayan}$$

formüldür. Türevin bazı uygulama alanları vardır. Örneğin bir teğetin eğimi türevin kendisidir. Fonksiyonda türev alınca teğetin eğimini elde etmiş oluruz”. Şeklinde tanımlamışlardır. Türevin geometriksel tanımını (yorumunu) referans alan öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntılarda G öğrencisi türevi: “türev eğimdir. Bir fonksiyonun türevi eğimi bulmak için alınır. Fonksiyonun artan mı azalan mı olduğunu belirlemek için alınır”, H öğrencisi “türev, fonksiyonun bir noktadaki eğimini ifade eder. Genellikle eğimi bulmak için türevi kullanırız”. Bir başka öğrenci de “ bir fonksiyonun belli bir noktadaki eğimidir. Belli bir noktada çizilen teğetin eğimini bulmak için türev alırız. $m = \tan \alpha = f'(x)$ tir” şeklinde tanımlamışlardır.

Verilen diğer öğrenci cevapları da genellikle bunlarla benzerdir. Öğrencilerin üzerinde çalıştıkları kavramın tanımını bilmemeleri oldukça ilginç bir durumdur. Öğrenciler çalıştıkları kavramın tanımını bilmedikleri için bu kavramın farklı gösterimleri arasındaki ilişkiyi de doğal olarak ya hiç anlamamışlar ya da anlamada güçlük çekmişlerdir. Bu zorluklar sadece bu kavramla sınırlı olmayıp aynı zamanda bu kavramın uzantısı olan diğer kavramlarda da görülmektedir.

Çizelge 4.1. Doğru-yanlış şeklindeki bilgi testindeki başarı yüzdeleri.

	Doğru	Yanlış
Tanım kümesinin bir alt aralığında $x_1 < x_2$ şartını sağlayan x_1, x_2 için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyor ise f fonksiyonu bu aralıkta artan bir fonksiyondur.	%89	%11
$f(x)$ fonksiyonu c noktasında bir ekstremuma sahip ve bu noktada türevli ise $f'(c) = 0$ dır.	%98	%02
Eğer $f''(c) = 0$ ise $(c, f(c))$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktasıdır.	%20	%80
$f''(c) < 0$ ise f fonksiyonu $(c, f(c))$ noktasında aşağı konkavdır.	%98	%02
Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında sürekli ise bu noktada türevlenebilir	%43	%57
$f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise $f(c)$ bir yerel minimum noktasıdır.	%78	%22
$f'(c) > 0$ ise $f(x)$ fonksiyonunun eğrisi c civarında artandır.	%74	%26
Eğer $(c, f(c))$ bir minimum noktası ve $f''(c)$ var ise $f''(c) = 0$ dır.	%69	%31
$f''(c) > 0$ ise f fonksiyonu $(c, f(c))$ noktasında yukarı konkavdır.	%77	%23
$f(x)$ bir aralıkta türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu aralıkta $f'(x)$ aratan ise $f(x)$ fonksiyonu yukarı bükey azalan ise aşağı bükeydir.	%60	%40
Yukarı bükeylikten aşağı bükeyliğe veya aşağı bükeylikten yukarı bükeyliğe geçiş yapılan noktaya fonksiyonun büküm noktası denir.	%98	%02
$f'(x) > 0$ ise $f(x)$ o aralıkta azalandır.	%77	%23
Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında bir türeve sahip ise $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında sürekli	%91	%09

Matematik derslerindeki davranışlar genellikle Bloom taksonomisine göre yapılan hedeflerin sınıflandırılmasındaki bilişsel alanla ilgilidir. Bloom bilişsel alanı kendi arasında hatırlama, anlama, uygulama, analiz, değerlendirme ve yaratma olmak üzere altı basamağa ayırmıştır (Doğanay ve Karip 2005). Öğrencilerin uygulama ya da analiz basamağındaki hedefleri kazanabilmesi için alt basamaklardaki hedefleri kazanmış olması gerekir. Öğrencilerin bir fonksiyonla onun türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaştıkları zorlukları araştırırken öncelikle hatırlama düzeyindeki hedefleri kazanıp kazanmadıkları test edilmek istenmiştir. Bunun için de öğrencilere bilgi testi uygulanmıştır.

Çizelge-4.1. incelendiğinde öğrencilerin hatırlama düzeyindeki başarılarının bazı sorularda düşük olduğu görülmüştür. Örneğin araştırmaya katılan öğrencilerin büyük bir çoğunluğu “Eğer $f''(c) = 0$ ise $(c, f(c))$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktasıdır” şeklindeki ifadeye doğru diyerek yanlış yapmışlardır. Mülakat yapılan 12 öğrencinin hepsinden kritik noktanın tanımını yapmaları istenmiştir. Fakat bu öğrencilerin yaptıkları kritik nokta tanımı tatmin edici bulunmamıştır. Yapılan kritik nokta tanımları eksik ya da ilgisi olmayan tanımlardan oluşmuştur. Mülakat yapılan öğrencilerden birisi ile araştırmacı arasında kritik noktayla ilgili şöyle bir diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: Kritik nokta nedir?

Öğrenci: Bir eğrinin maksimum ya da minimum noktası olarak adlandırılabilir.

Araştırmacı: Kritik nokta sadece fonksiyonun maksimum ya da minimum değerini aldığı nokta mıdır?

Öğrenci: Yön değiştiren noktalarda kritik nokta olabilir. Mesela bükeyliğin yön değiştirdiği, bükeyliğin yön değiştirdiği demeyelim de fonksiyonun grafiği çizilirken mesela fonksiyon artarken bir anda azalmaya başladığı noktadır.

Diğer öğrencilerin kritik nokta için söyledikleri de hemen hemen benzer şeylerdir. Bilgi testinin sonuçlarına göre öğrencilerin büyük bir çoğunluğu (%57) “kapalı bir aralıkta bir fonksiyon türevli ise süreklidir” şeklindeki analizin temel teoremini yanlış

anlamışlardır. Öğrencilerin çoğu tersinin de yani “Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında sürekli ise bu noktada türevlenebilirdir” ifadesinin de doğru olduğunu söylemişlerdir. Diğer maddelerde öğrencilerin başarı oranları %69 ile % 98 arasında değişmektedir. Öğrencilerin hatırlama düzeyindeki başarıları anlama, uygulama, analiz ve sonraki basamaklardaki başarıları üzerine etkili olması kaçınılmaz bir gerçektir. Eğer öğrenci sürekli bir fonksiyonun türevli olduğunu düşünüyorsa uygulama düzeyinde de verilen bir fonksiyonun x_0 noktasındaki türevlenebilirliğini incelerken sadece sürekliliğine bakıp, sürekli ise türevlenebilirdir sürekli değilse türevi yoktur demesinden daha doğal bir şey olamaz.

Öğrencilerin başarı yüzdeleri Fermat teoremi olarak bilinen “ $f(x)$ fonksiyonu c noktasında bir ekstremuma sahip ve bu noktada türevli ise $f'(c) = 0$ dır” ifadesinde ve fonksiyonun artan yada azalan olduğu aralıkları bulmada kullandığımız birinci türevin işaret incelemesiyle ve büküm noktasını bulmada kullanılan ikinci türevle ilgili ifadelerde oldukça yüksek çıkmıştır. Bu ifadelerde öğrenci başarılarının yüksek çıkmasının sebebi öğrencilerin grafik çizerken ve maksimum-minimum problemlerinde bunları sıkça kullanmaları olabilir.

Fonksiyonlar hakkında bilgi edinmenin en kolay yolu fonksiyonun grafiğinin çizilmesidir. Fonksiyonun grafiğine bakılarak fonksiyonun hangi noktalarda limitinin olduğu ya da olmadığı, hangi noktalarda sürekli ya da süreksiz olduğu, hangi noktalarda türevli ya da türevli olmadığı, hangi aralıklarda artan ya da azalan olduğunu, nerelerde pozitif ya da negatif olduğu, nerede en büyük ya da en küçük değerlerini aldığı, hangi aralıklarda büküklüğün yönünün aşağı ya da yukarı olduğu hiç zorlanmadan söylenebilir. Bundan dolayı bir fonksiyonunun grafiğinin çizilmesi oldukça önemlidir ve bir fonksiyonun grafiğinin çizilmesi hem lise 3 matematiğinin öğretim programında hem de analiz derslerinin içeriğinde yer almaktadır. Doğru gibi çok basit fonksiyon grafikleri fonksiyonun türevleri kullanılmadan çizilebilir ama daha karmaşık fonksiyonların grafiklerini çizmek için fonksiyonun birinci ve ikinci türevlerinden faydalanılır. Bu konu analiz derslerinde üzerinde en fazla durulan konuların başında gelmektedir. Grafik

çizimi türevin çoklu gösterimleri arasındaki ilişkiyi anlama (sembolik nümeriksel ve grafiksel gösterim) açısından da son derece önemlidir.

Öğrencilerin bir fonksiyon ve türevleri arasındaki ilişkiyi kullanarak, verilen bir fonksiyonun grafiğini çizerken karşılaştıkları zorlukları tespit etmek için öğrencilere aşağıdaki soru yöneltilmiştir.

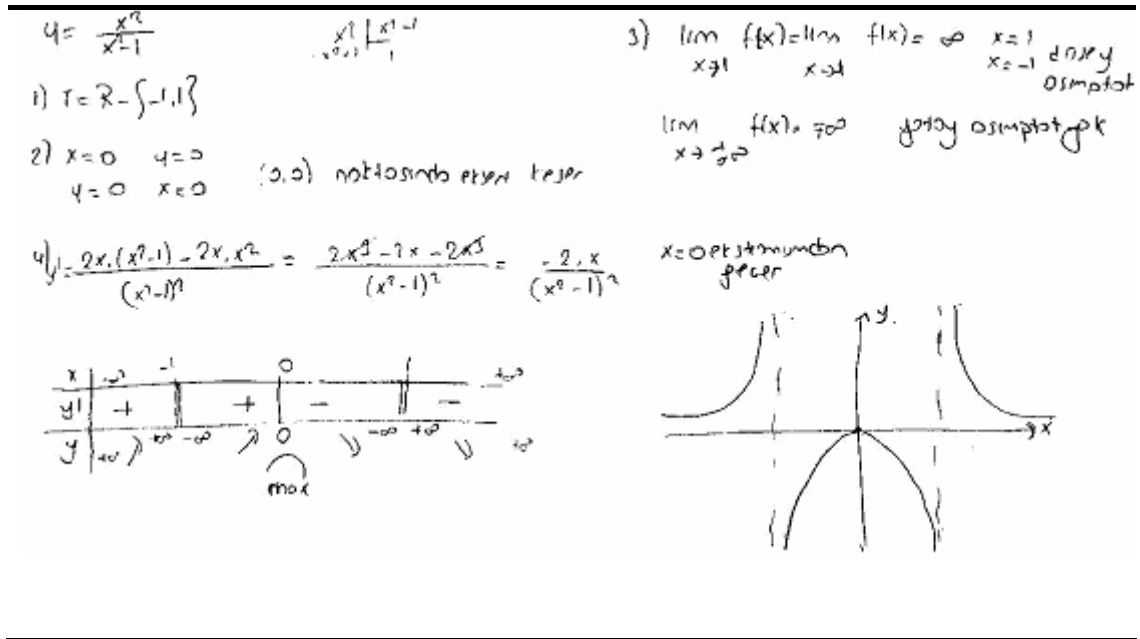
$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \text{ fonksiyonu için;}$$

- 1.Fonksiyonun tanım kümesini bulunuz
- 2.Eksenleri kestiği noktaları bulunuz
- 3.Varsa asimptotlarını bulunuz
- 4.Varsa ekstremum (maksimum ve minimum) noktalarını bulunuz
- 5.Fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulunuz.
- 6.Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.
- 7.Var ise fonksiyonun büküm noktalarını bulunuz, fonksiyonun aşağı ve yukarı konkav olduğu aralıkları tespit ediniz.
- 8.Yukarıda bulduğunuz değerleri tablolaştırınız.
- 9.Tablodaki değerleri kullanarak fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Araştırmaya katılan 46 öğrencinin 23 (%50) tanesi verilen fonksiyonun grafiğini çizebilmişlerdir. Geri kalan 23 öğrenci ise verilen fonksiyonun grafiğini çizememişlerdir. Araştırmada elde edilen bulgulara göre bu öğrencilerin grafiği çizememesinin temelinde yatan en önemli neden yukarıda soruda verilen ilk sekiz aşamada yapılan hatalar ya da eksikliklerdir. Öğrencilerin tamamına yakını fonksiyonun tanım kümesini, eksenleri kestiği noktaları, düşey asimptotu, ekstremum noktalarını, fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulmada fazla zorlanmamışlardır. Grafiği çizemeyen 23 öğrencinin 12 tanesinin grafiği çizememesinin nedeni $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ fonksiyonu için yatay asimptota ya hiç bakmamaları ya da yatay asimptota baktıkları halde bulamamaları ya da yanlış bulmaları olmuştur. Bu öğrencilerin 9 tanesi yatay

asimptot olarak $y=0$ 'ı yani x eksenini alarak grafik çizmiş geri kalan 3 öğrenci ise yatay asimptot yok demesine karşın grafik çizerken yine $y=0$ doğrusunu yatay asimptot olarak kullanmışlardır. Fonksiyonun grafiğini de aşağıdaki gibi çizmişlerdir.

Çizelge 4.2. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ fonksiyonu için $y=0$ doğrusunu yatay asimptot olduğunu düşünen öğrencilerin çizdiği grafik.



Yapılan mülakatta bu öğrenciler fonksiyonun eksenleri sadece $(0,0)$ noktasında kestiğini başka yerde kesmediğini söylemişlerdir. Bununla aslında öğrenciler $y=0$ 'ı bir yatay asimptot olarak almışlar fakat bunun farkında değildirler. Üçüncü aşamayı yaparken her üç öğrenci de yatay asimptota $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ şeklinde bakarak yanlış yapmışlardır. Burada da dikkat edilirse bu öğrencilerin yatay asimptotun nasıl bulunduğunu bildikleri fakat limit alma işlemini yapamadıkları görülmektedir. Geri kalan 13 öğrencinin 3 tanesi sadece ilk iki aşamayı yapmış diğerlerini ise boş bırakmışlardır. Diğer öğrenciler ise bu aşamaların birden fazlasını yapamayarak grafiği çizememişlerdir. Gerek soruyu doğru cevaplayan gerekse yapamayan öğrencilerde en

sık görülen şey fonksiyonun büküm noktasını, yukarı-aşağı bükey olduğu aralıkları ve fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulmayı ihmal etmeleridir.

Soruyu doğru cevaplayan 23 öğrenciden sadece 9 tanesi fonksiyonun kendinin işaret incelemesini yaparak fonksiyonun $(-\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında pozitif $(-1, 1)$ aralığında ise negatif değerli olduğunu bulmuşlardır. 11 öğrenci ise artan-azalan fonksiyon ile pozitif-negatif değerli fonksiyonları karıştırmışlardır. Fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulmak için fonksiyonun kendisinin işaret incelemesi yerine türevin işaret incelemesini yapmışlardır. Yani fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları değil de artan ve azalan olduğu aralıkları bulmuşlardır. Bu öğrencilerden birisi beşinci ve altıncı aşamayı şu şekilde yapmıştır.

Çizelge 4.3. Pozitif-negatif değerli fonksiyonla artan-azalan fonksiyonu karıştıran öğrencilerin yaptığı birinci türevin işaret incelemesi

$\Rightarrow$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$2x$	-	-	0	+	+
$(x^2-1)^2$	+	0	+	+	+
$\frac{2x}{(x^2-1)^2}$	-	-	+	+	+
$-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$	+	+	-	-	-
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	

$$x=0$$

$$x^2=1$$

$x=\pm 1$ çift katlı

$(-\infty, -1) \rightarrow$ pozitif

$(-1, 0) \rightarrow$ pozitif

$(0, 1) \rightarrow$ negatif

$(1, \infty) \rightarrow$ negatif

b) $(-\infty, 0) \rightarrow$ artan

$(0, \infty) \rightarrow$ azalan

3 öğrenci ise soruyu cevaplamamıştır. Grafiği çizemeyen öğrencilerden 11 tanesi bu aşamayı boş bırakırken, 5 tanesi fonksiyonun kendisinin işaret incelemesini yaparak fonksiyonun $(-\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında pozitif $(-1, 1)$ aralığında ise negatif değerli olduğunu bulmuş ve 7 tanesi yine artan-azalan fonksiyon ile pozitif-negatif

değerli fonksiyonu karıştırmışlardır. Toplamda ise 46 öğrencinin sadece 14 tanesi (%30,4) verilen fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulabilirken, yine 14 tanesi (%30,4) boş bırakmış ve 18 tanesi ise (%39,2) artan-azalan fonksiyon ile pozitif-negatif değerli fonksiyonu karıştırmışlardır.

Bu öğrencilere mülakatta, fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları nasıl buluruz? şeklinde soru yöneltilmiştir. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu fonksiyonun ekstremum noktalarını buluruz ve daha sonra işaret incelemesi yaparız. İşaret incelemesinde pozitif yerlerde fonksiyon pozitif değerli negatif olduğu yerlerde ise negatif değerlidir diyerek artan fonksiyon ile pozitif değerli fonksiyonu ve azalan fonksiyon ile negatif değerli fonksiyonu karıştırdığını ya da aynı şey olarak algıladığını göstermiştir. Bunun üzerine öğrencilere artan fonksiyon ile pozitif değerli fonksiyon arasındaki fark nedir? Örneğin pozitif değerli bir fonksiyon azalan olabilir mi? şeklinde sorular sorulduğunda öğrencilerin yine çoğu biraz düşündükten sonra artan fonksiyon ile pozitif değerli fonksiyonun aynı şey olmadığını farkına varmışlardır. Bu sonuçlar Aspinwall and Miler (2001)'in elde ettiği öğrenciler artan fonksiyon, pozitif değerli fonksiyon, artan eğim ve pozitif eğim arasındaki farkı ayırt edemiyorlar şeklindeki, sonuçları ile örtüşmektedir. Bu, öğrencilerin yine kısıtlı ya da eksik kavram hayalleriyle hareket ettiğini ve ona göre işlem yaptığını göstermektedir.

Sembolik olarak verilen fonksiyonun grafiğinin çizilmesinin istendiği bu soruda araştırmaya katılan 46 öğrencinin 21 tanesi (%45) büküm noktasını bulmamış ve fonksiyonun ikinci türevinin işaret incelemesini yapmamışlardır. Geriye kalan 26 öğrenciden ise sadece 15 tanesi büküm noktasına bakmış bu 15 öğrenciden 13 tanesi ikinci türevi sıfır yapan değer olmadığı için büküm noktasının olmadığını söylerken diğer 2 iki öğrencinin birisi büküm noktası olarak $(0,0)$ diğeri ise -1 ve 1 noktalarının büküm noktası olduğunu söylemişlerdir. Geri kalan 9 öğrenci ise ikinci türevi sıfır cevaplayan değeri yani büküm noktasını bulmuş ve ikinci türevin işaret incelemesini yaparak konvavliğin yönünü araştırmışlardır. Bu toplamda yaklaşık olarak %20 dir ve oldukça düşük bir rakamdır. Bunun sebebi, hem analiz kaynaklarında hem de derslerde grafik çizerken büküm noktasının genellikle bulunmaması ve ikinci türevin işaret incelemesinin yapılmamasıdır. Verilen bir bilginin ya da kavramın kullanılmaması

öğrencilerde o bilginin veya kavramın önemsiz olduğu yönünde bir duygunun gelişmesine neden olmaktadır. Bunun sonucunda kullanılmayan bilgi ve kavramlar öğrenci zihninde kavramsallaşamamakta ve unutulmaktadır. Bu bulgular Baker vd (2000) nin birinci türev grafikte öğrenciler tarafından önemsenirken ikinci türevin göz ardı edildiği ve ikinci türevle ilgili kavram eksikliğinin olduğu şeklindeki yorumuyla örtüşmektedir.

Öğrencilerin analitiksel ve grafiksel gösterimler arasındaki ilişkiyi anlamalarındaki performanslarını araştırmak için aşağıdaki soru yöneltilmiştir.

$-\infty < x < -2$ aralığında $f'(x) < 0$ ve $f''(x) > 0$ ise $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin değişimi bu aralıkta nasıl olmalıdır?

- a) Azalan, yukarı bükeydir.
- b) Artan, yukarı bükeydir.
- c) Azalan, aşağı bükeydir.
- d) Bilgiler yetersizdir.

Bu soruya araştırmaya katılan 46 öğrenciden sadece 19 tanesi yaklaşık olarak %40'ı "Azalan, yukarı bükey" diyerek doğru cevap vermiştir. Geri kalan 27 öğrencinin 9 tanesi "Artan, yukarı bükeydir", 9 tanesi "Azalan, aşağı bükeydir" 9 tanesi de "Bilgiler yetersizdir" diyerek yanlış yapmışlardır. Yukarıdaki soruda verilen bilgiler öğrencilere bilgi testinde yöneltilmiş, öğrencilerin %74'ü $f'(c) > 0$ ise $f(x)$ fonksiyonunun eğrisi c civarında artan ve %98'i de $f''(c) < 0$ ise f fonksiyonu $(c, f(c))$ noktasında aşağı konkav olduğunu söylemişlerdir. Bu bilgiler analitiksel olarak verildiğinde ise başarı oranları oldukça düşmüş %40'lara gerilemiştir. Buda Bloom taksonomisine göre yapılan hedeflerin sınıflandırılmasında üst basamaklara doğru çıkıldığında öğrencilerin zorlandığını ve alt basamaklardaki bilgileri daha sonraki basamaklara yansıtamadığını göstermektedir.

Öğrencilerin verilen analitiksel bilgilerden faydalanarak bir fonksiyonla türev arasındaki ilişkiyi anlamadaki performanslarını değerlendirmek için yöneltilen iki sorudan birincisi aşağıdaki açık uçlu sorudur. Türevlenebilen bir fonksiyon için

aşağıdaki bilgilere sahip olduğumuzu varsayalım: $x < 1$ için $f'(x) < 0$ ve $x > 1$ için $f'(x) > 0$. Ayrıca $f(0) = 3$, $f(1) = 1$ ve $f(2) = 2$

a) $[0, 2]$ aralığında $f(x)$ 'in minimum değeri nedir? Neden?

b) $[0, 2]$ aralığında $f(x)$ 'in maksimum değeri nedir? Neden?

Araştırmaya katılan 46 öğrencinin 25 tanesi bu sorunun a şikkını (1,1) noktası diyerek doğru yaparken 21 tanesi ise yapamamıştır. Bu 21 öğrencinin 11 tanesi soruyu boş bırakmış, 7 tanesi verilen bu fonksiyonu $y = ax^2 + bx + c$ şeklinde ikinci dereceden bir polinom fonksiyonu olarak düşünmüşlerdir. Soruda verilen verileri kullanarak $y = ax^2 + bx + c$ ifadesindeki a , b , c değerlerini bulmuşlar ve daha sonra da buldukları fonksiyonun türevini almışlar, türevini sıfır cevaplayan değerleri ve türevin işaret incelemesini yaparak fonksiyonun maksimum ve minimum noktalarını bulmuşlardır. Bu şekilde cevaplayan öğrenci cevaplarından birisi taranarak aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.4. $y = ax^2 + bx + c$ şeklinde ikinci dereceden polinom fonksiyonu olarak düşünen öğrenci cevaplarından bir alıntı

2. Türevlenebilen bir fonksiyon için aşağıdaki bilgilere sahip olduğumuzu varsayalım:

$x < 1$ için $f'(x) < 0$ ve $x > 1$ için $f'(x) > 0$. Ayrıca $f(0) = 3$, $f(1) = 1$ ve $f(2) = 2$

a) $[0, 2]$ aralığında $f(x)$ 'in minimum değeri nedir? Neden?

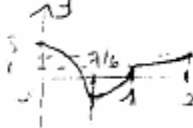
b) $[0, 2]$ aralığında $f(x)$ 'in maksimum değeri nedir? Neden?

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c & 2 &= 4a + 2b + c & y &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3 \Rightarrow \\ a &= 3 & 4a + 2b &= -1 & & \\ 1 &= a + b + c & 1/a + b &= -2 & & \\ a + b &= -2 & 2a &= 3 & & \\ & & a &= \frac{3}{2} & & \\ & & b &= -\frac{7}{2} & & \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2x - \frac{7}{2} = 3x - \frac{7}{2} = 0 \text{ bulmalı } [0, 2] \text{ aralığında}$$

bir x için $f(x)$ minimum bulmalı

$$3x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{6}$$



$$f\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{49}{36} - \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{6} + 3$$

$$= \frac{49}{24} - \frac{49}{12} + 3$$

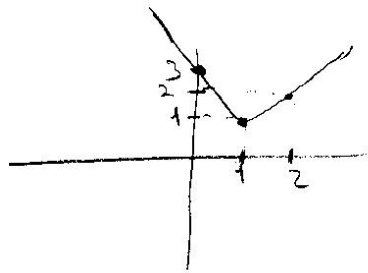
$$= \frac{-49}{24} + 3 = \frac{-49 + 72}{24} = \frac{23}{24}$$

$[0, 2]$ aralığında $f(x)$ 'in alabileceği maksimum değeri -3 dir.
 ($f(0) = 3$)

minimum değeri

b şıkkını ise araştırmaya katılan öğrencilerin sadece 21 tanesi $(0,3)$ noktası diyerek doğru yapabilmıştır. a şıkkını $(0,3)$ doğru cevaplayan 4 öğrenci b şıkkını yapamamıştır. Bilgi testinde öğrencilerin %80'nin kritik nokta tanımını bilmedikleri görülmüştür. Kritik nokta tanımını bilmeyen öğrencilerin kapalı bir aralıktaki uç noktaların kritik nokta olduğunu bilmeleri beklenemez. Hem a şıkkını hem de b şıkkını doğru cevaplayan öğrencilerin büyük bir kısmı (21 öğrencinin 14 tanesi) verilen bilgileri ya tablolaştırarak ya da taslak bir grafik çizerek yapmışlardır. Tablo yapan veya grafik çizen öğrenciler fonksiyonun uç noktalarda almış olduğu değerleri daha kolay görmüşlerdir. Öğrencilerin gerek a şıkkını gerekse b şıkkını yapamamasının temelinde verilen bilgilerin doğru okunarak tablolaştırılamaması yani çoklu gösterimler arasındaki ilişkiyi kuramamaları yatmaktadır. Analitiksel olarak ifade edilen sorudaki bilgiler öğrencilere kompleks gelebilir. Bu bilgileri tablolaştırmadıkları ya da grafikte göstermedikleri takdirde soruyu yapmada zorlanmaları olağandır. Bazı öğrenciler ise hem tablo yapmış hem de grafik çizmişlerdir. Soruyu taslak grafik çizerek yapan öğrenci cevaplarından yapılan alıntılardan birisi aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.5. Analitiksel bilgileri bir taslak grafik çizerek yapan öğrenci cevaplarından yapılan alıntı.



minimum değeri $(1,1)$ noktasıdır.
 Grafikte bu noktada yön değişmektedir.
 maksimum değeri $(0,3)$ noktasıdır.
 Grafikte bu nokta en üsttedir.

a şıkkını boş bırakan ve fonksiyonu $y = ax^2 + bx + c$ şeklinde düşünüp ona göre ifade eden öğrenciler b şıkkını da yapamamışlardır.

Öğrencilerin, verilen analitiksel bilgilerden faydalanarak bir fonksiyonla türevleri arasındaki ilişkiyi anlamadaki performanslarını değerlendirmek için sorulan sorulardan ikincisi aşağıdaki gibidir.

f , $[-4, 4]$ aralığında sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $x = -2$ noktasında maksimuma, $x = 4$ noktasında minimuma ve $x = 2$ noktasında da büküm noktasına sahip ise aşağıdaki ifadelerden hangileri doğru hangileri yanlıştır? Açıklayınız.

- a) $f'(-2) = 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:.....
- b) $f'(2) = 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü
- c) $f'(0) < 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:
- d) $f''(-2) > 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:
- e) $f''(2) = 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:

Bu soruyu 46 öğrenciden 16 tanesi verilen bilgilerden faydalanarak taslak bir grafik çizerek, 4 tanesi verilen bilgileri tablolaştırarak ve geri kalanlar ise verilen bilgileri direkt kullanarak cevaplamışlardır.

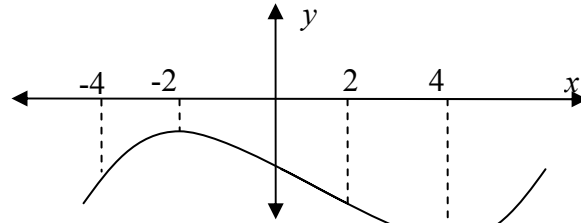
Araştırmaya katılan 46 öğrenciden 39 tanesi başka bir deyişle yaklaşık olarak %85' i (a) şikkını doğru yapmışlardır. Geri kalan 7 öğrencinin 3 tanesi yanlış 4 tanesi de boş bırakmıştır. Her öğrencinin açıklaması birbirinden farklı olmakla beraber birbirine benzer ifadelerden oluşmaktadır. Örneğin öğrenci cevaplarından yapılan alıntılardan birkaç tanesi şu şekildedir:

- A) “Ekstremum noktalarını bulurken y' sıfıra eşitlenir ve çıkan köklerden max ve min bulunur”
- B) Ekstremum noktasında türev yani eğim sıfırdır ($0'$ a uğramadan geçmez)
- C) “Fonksiyon $x = -2$ noktasında maksimuma sahiptir”.
- D) “Ekstremum var ise $f'(x) = 0$ dır”

E) “ $x = -2$ noktasında maksimumdadır ve birinci türev sıfırdır”

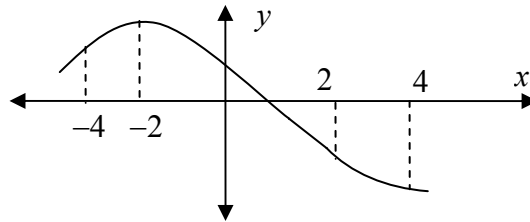
Diğer öğrenci cevapları da bunlara benzerdir. Yukarıdaki alıntılarda da olduğu gibi öğrenciler açıklamalarını genellikle “ $f(x)$ fonksiyonu c noktasında bir ekstremuma sahip ve bu noktada türevli ise $f'(c) = 0$ dır”. şeklindeki Fermat teoremine dayandırmışlardır.

Kapalı bir aralıktaki kritik nokta hakkındaki kavram hayalleri oldukça dar ve sınırlı olup bu dar ve sınırlı kavram hayallerine göre işlem yapmışlardır. Öğrencilerin %85’i fonksiyonun minimum değer aldığı $x = 4$ noktasının sınır noktası olup olmadığına bakmaksızın birinci türevin bu noktada sıfır olduğunu söylemişlerdir. Aynı şekilde bu soru mülakatta da öğrencilere yöneltilmiş, mülakata alınan öğrencilerin hepsi istisnasız yine $x = 4$ noktasında birinci türevin sıfır olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilere birinci türev $x = 4$ noktasında sıfırdan farklı olamaz mı? şeklindeki soruya olmaz yanıtını verip hemen aşağıdaki gibi bir grafik çizmişlerdir.



Şekil 4.1. Mülakatta öğrenciler tarafından çizilen grafik

Öğrencilerin bu veya buna benzer çizdikleri grafiklerden sonra öğrencilere araştırmacı tarafından aşağıdaki gibi bir grafik çizilmiştir.



Şekil 4.2. Mülakatta araştırmacı tarafından çizilen grafik

Öğrencilere bu tür bir grafiğin çizilip çizilemeyeceği sorulmuş ve genelde alınan cevap çizilebileceği yönünde olmuştur. $x = 4$ noktasında teğet çizilebilir mi? çizilir ise eğimi sıfır mıdır? Sorularına verilen cevaplar yine genelde çizilebilir ve eğim sıfırdan farklıdır şeklinde olmuştur. Bu öğrencilerin zihninde eğer x_0 noktasında bir ekstremum var ise fonksiyonun verildiği aralığa bakılmaksızın x_0 noktasında birinci türev sıfırdır şeklinde bir düşüncenin oluştuğunu göstermektedir. Bunun sebebi öğrencilerin üzerinde çalıştığı kavramı bilmemeleri ve kavramsal anlamayı gerçekleştirememeleri olarak yorumlanabilir.

Araştırmaya katılan 46 öğrencinin 38 tanesi yaklaşık olarak %83 ü (b) şıkını doğru cevaplarken 4 tanesi boş, 4 tanesi de yanlış yapmıştır. Yanlış cevaplayan öğrencilerden 3 tanesi büküm noktasını kritik nokta olarak almış ve birinci türevin $x = 2$ noktasında sıfır olması gerektiğini düşünmüşlerdir. Bu öğrencilerden birisinin açıklaması “çünkü $x = 2$ büküm noktası olduğundan eğimi sıfırdır” şeklindedir. Geriye kalan 1 öğrenci ise “2 civarında fonksiyon artan ve azalan olduğundan $x = 2$ noktasında birinci türev sıfırdır” şeklinde ilgisiz bir açıklama yapmıştır. Soruyu doğru cevaplayan öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntıların bazıları yine aşağıda verilmiştir.

- A) $x = 2$ noktasında büküm noktası var $f''(2) = 0$ olmalıdır
- B) $x = 2$ nin büküm noktası olma kuralına aykırı
- C) Büküm noktası 2. türevin işidir.
- D) $x = 2$ noktasında yerel maksimum yada minimum yok.
- E) $x = 2$ noktası büküm noktasıdır birinci türev sıfıra eşit olmaz.

Verilen verileri tablolastıran bir öğrenci ise “ $x = 2$ noktasında $f'(2)$ negatiftir” şeklinde bir yorum yapmıştır.

Yine araştırmaya katılan 46 öğrencinin 30 tanesi %65'i (c) şıkını doğru 6 tanesi de yanlış yapmış ve 10 tanesi de cevapsız bırakmıştır. Doğru cevaplayan öğrencilerden 15 tanesi soruda verilen bilgileri direkt kullanarak, 10 tanesi verilen bilgilerden faydalanıp grafik çizerek, dört tanesi verilen bilgileri tablolastırarak, bir tanesi de birinci türevi

$y' = \frac{(x-4)(x+2)}{c^2}$ şeklinde düşünerek yapmışlardır. Doğru cevaplayan öğrencilerin çoğu; “ $(-2, 2)$ aralığında fonksiyon azalandır onun için birinci türev negatiftir”, “ -2 ’de maksimumda 0 olan türev 2 den sonra negatif değerlere geçer” gibi mantıklı açıklamalar yaparken bazıları da “sürekli, grafikte kopma yok” gibi ilgisiz açıklamalarda bulunmuşlardır. Sorular biraz karmaşık hale geldiğinde analitiksel olarak verilen bilgileri okumak zorlaşmıştır. Öyle ki bu şıkkı tablo çizenlerin hepsi, grafik çizenlerden de sadece birisi hariç diğerleri doğru yapmıştır. Soruyu yanlış cevaplayan ya da boş bırakanlar bilgiyi direkt olarak okumaya çalışanlar yani türevin farklı gösterimleri arasındaki ilişkiyi kuramayan öğrencilerdir.

d şıkkını araştırmaya katılan öğrencilerden 31 tanesi %67’si doğru, 7 tanesi yanlış yapmış, 8 tanesi ise boş bırakmıştır. Soruyu doğru cevaplayan öğrencilerin açıklamaları genellikle birinci ve ikinci türev arasındaki ilişkiyi işaret etmiştir. Doğru cevaplayan öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntılardan bir kaç:

- A) “ $x = -2$ maksimum noktası olduğundan birinci türev değeri 0, ikinci türevde yerine konulduğunda 0’dan küçüktür.
- B) “ $x = -2$ den maksimum geçiyorsa $f''(-2) < 0$ olmalıdır”
- C) “ $x = -2$ noktası maksimum olduğundan $f''(-2) < 0$ olması gerekir”
- D) “eğer $f''(-2) > 0$ olursa $x = -2$ noktası maksimum değil de minimum noktası olması gerekirdi” şeklindedir.

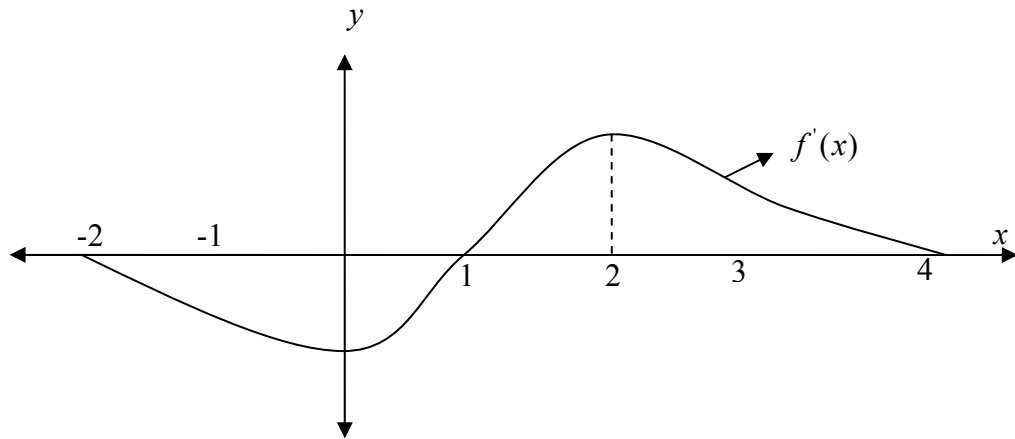
Yanlış cevaplayan öğrencilerden ise sadece bir tanesi açıklama yapmıştır. O da birinci türev ve ikinci türev arasındaki ilişkiyi karıştırarak “ $x = -2$ noktası maksimum noktası ise $f''(-2) \geq 0$ olmalıdır” şeklinde bir açıklama yapmıştır.

e şıkkını araştırmaya katılan öğrencilerin 35 tanesi %76’sı $x = 2$ noktasının büküm noktası olmasından dolayı burada ikinci türevin sıfır olması gerektiğini düşünerek doğru yapmıştır. Öğrenciler gerek soru üzerindeki açıklamalarda gerekse mülakattaki

açıklamalarda $x = 2$ noktasında $f''(2) = 0$ olması gerektiğini söylemişlerdir. Geri kalan öğrencilerden 6 tanesi yanlış yapmış 5 tanesi de boş bırakmıştır. Yanlış cevaplayan öğrencilerden 3 tanesi büküm noktası ile ikinci türev arasındaki ilişkiyi karıştırarak $f''(2) = 0$ olmasının büküm noktası olma kuralına aykırı olduğunu söylemişlerdir.

Öğrencilerin geometriksel gösterimden analitiksel gösterime dönüşümdeki performanslarını değerlendirmek için öğrencilere iki grup soru sorulmuştur. Bunlardan birincisi olan A grubu aşağıdaki gibi türev fonksiyonun grafiğinden yararlanarak fonksiyon ve birinci türev arasındaki ilişkiyle ilgilidir.

A) Aşağıdaki grafik $f'(x)$ ' e (**fonksiyonun türevine**) aittir. Bu grafiği kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız



Şekil 4.3. Bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi anlama testinde kullanılan türev grafiği

1. $f(1)$ değeri(pozitifdir, negatiftir,sıfır, hesaplanamaz)
çünkü.....

Birinci soruyu araştırmaya katılan 48 öğrenciden 30 tanesi başka bir deyişle %62,5 $f(1)$ değeri hesaplanamaz diyerek doğru yapmış, 15'i yanlış 3 tanesi de boş olmak üzere toplam 18 öğrenci (%37,5) yapamamıştır. Doğru cevaplayan öğrencilerden 4'ü hariç diğerleri açıklamasını yapmışlardır. Açıklamalar genellikle kabul edilebilir olmasına karşın bazılarında eksiklikler ve yanlışlıklar vardır. Açıklamalardan yapılan bazı alıntılar aşağıda verilmiştir.

- A) “ $f(1)$ değeri hesaplanamaz çünkü bu nokta minimum noktasıdır $f(x)$ azalıp bu noktadan sonra artmaya başlamıştır. Bu bilgiler $f(1)$ ’in değerini belirlemek için yeterli değildir”.
- B) “ $f(1)$ değeri hesaplanamaz çünkü $f'(x)$ in grafiğindeki sadece bu bilgiler yeterli değildir”.
- C) “ $f(1)$ değeri hesaplanamaz çünkü $f(x)$ sabit bir değer olabilir”.
- D) “ $f(1)$ değeri hesaplanamaz çünkü hesaplanması için $f(x)$ fonksiyonunun bilinmesi gerekir”.
- E) “ $f(1)$ değeri hesaplanamaz çünkü $f'(1)=0$ ise $f(1)=a$ (a sabit) herhangi sabit bir değer olabilir.

6 öğrenci grafiğe göre $f(1)$ değerinin 0 olduğunu söylemişlerdir. Verilen grafiğin fonksiyonun birinci türevine ait olduğu koyu puntolarla ifade edilmesine rağmen bu öğrencilerin $f(1)$ değerinin 0 olduğunu söylemelerinde grafiğin $x=1$ noktasında x eksenini kesmesi neden olmuş olabilir. Örneğin bu öğrencilerin açıklamalarından iki tanesi şu şekildedir:

- A) “ $f(1)$ değeri sıfırdır çünkü x ekseninde aldığımız 1 y de 0’ a denk geliyor”.
- B) “ $f(1)$ değeri sıfırdır çünkü $f(1)$ de fonksiyon x eksenini kesmektedir”.

5 öğrenci $f(1)$ değerinin pozitif, 3 öğrencide negatif olduğunu söylemişlerdir. Bunların bazıları açıklama yapmamıştır. Açıklama yapanların açıklamalarından bu öğrencilerin birinci türevle fonksiyon arasındaki ilişkiyi karıştırdıkları görülmüştür. Örneğin pozitif diyen bir öğrenci “ $f(1)$ değeri pozitiftir çünkü $f'(1)=0$ olduğu için” şeklinde açıklarken negatiftir diyen bir başka öğrencide “ $f(1)$ değeri negatiftir çünkü $f(1)$ noktası minimum noktasıdır” şeklinde açıklamışlardır.

A grubuna ait ikinci soru aşağıdaki gibidir.

2. $(-2,1)$ aralığında $f'(x)$ in almış olduğu her değer(pozitiftir, negatiftir, sıfırdır). $f'(x)$ x_0 noktasındaki teğetin eğimini verdiği için fonksiyona x_0 noktasından çizilen teğetin eğimi (pozitiftir, negatiftir,sıfırdır). Bundan dolayı $f(x)$ fonksiyonu $(-2,1)$ aralığında(artandır, azalandır, belirlenmez). Çünkü:.....

İkinci soruyu araştırmaya katılan 48 öğrencinin yarısı doğru yapmış yarısı ise yapamamıştır. Doğru cevaplayan öğrencilerin yapmış oldukları açıklamalardan bu öğrencilerin türevin farklı gösterimleri arasındaki ilişkiyi daha iyi anladıkları görülmüştür. Çünkü yapmış oldukları açıklamalarda öğrenciler genellikle birinci türev ile fonksiyon arasındaki ilişki üzerinde durmuşlardır. Öğrencilerin yapmış oldukları açıklamaların mantıklı ve doğru olduğu görülmüştür. Öğrenci cevaplarından yapılan alıntılardan bazıları aşağıda sunulmuştur.

$(-2,1)$ aralığında $f'(x)$ in almış olduğu her değer **negatiftir**. $f'(x)$ x_0 noktasındaki teğetin eğimini verdiği için fonksiyona x_0 noktasından çizilen teğetin eğimi **negatiftir**. Bundan dolayı $f(x)$ fonksiyonu $(-2,1)$ aralığında **azalandır**.

A) “Çünkü: Birinci türevin negatif olduğu aralıkta fonksiyon azalandır”.

B) “Çünkü: Türevin grafiği bu aralıkta negatiftir”.

C) “Çünkü: $f'(x)$ türev fonksiyonun (-) dir. Türevin negatif olması Δy ile Δx 'nin zıt işaretli olduğunun göstergesidir. Dolayısıyla $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ dir”.

Yapılan diğer açıklamalarda genellikle bunlara benzer ifadelerden oluşmuştur.

Yapamayan öğrenciler genellikle ya grafiği okumakta ya da okudukları bilgileri türevin diğer gösterimleriyle ya da orijin fonksiyonla ilişkilendirmede zorlanmışlardır. Örneğin öğrencilerin 12 tanesi;

$(-2,1)$ aralığında $f'(x)$ in almış olduğu her değer **negatiftir**. $f'(x)$ x_0 noktasındaki teğetin eğimini verdiği için fonksiyona x_0 noktasından çizilen teğetin eğimi **negatiftir**. Bundan dolayı $f(x)$ fonksiyonu $(-2,1)$ aralığında **belirlenemez**. Çünkü:

A) “ $f'(x)$ den böyle bir sonuç çıkarılamaz bilgi yetersizdir”.

B) “ $x_2 > x_1 \Rightarrow f'(x_2) > f'(x_1)$ dir”.

C) “ $f(x)$ fonksiyonunu bilmiyoruz bundan dolayı $(-2,1)$ aralığında pozitif yada negatif olduğunu bilemeyiz”.

4 öğrenci, $(-2,1)$ aralığında $f'(x)$ in almış olduğu her değer **negatiftir**. $f'(x)$ x_0 noktasındaki teğetin eğimini verdiği için fonksiyona x_0 noktasından çizilen teğetin eğimi **negatiftir**. Bundan dolayı $f(x)$ fonksiyonu $(-2,1)$ aralığında **pozitiftir**. Çünkü bu noktalarda teğetin eğimi negatiftir.

Diğer öğrencilerin yaptığı yanlışlıklar bunlara benzerdir. Burada öğrencilerin zorlanmalarının nedeni grafiği doğru okumalarına rağmen birinci türevle fonksiyon arasındaki ilişkiyi kuramamalarıdır.

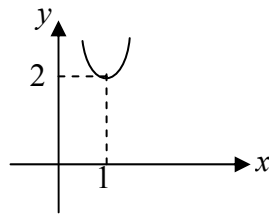
A grubunun 3. sorusu ise

3. $f'(1)=0$ olduğundan $x=1$ noktasında $f(x)$ in grafiğinin eğimi
(pozitiftir, negatiftir, sıfırdır). Çünkü

şeklinde olup araştırmaya katılan 48 öğrenciden 44 tanesi bu soruyu doğru yapmıştır. Bu oldukça yüksek bir sayıdır. Bunun nedeni öğrencilerin türevin geometrik yorumunu bilgi düzeyinde iyi bilmelerinden kaynaklanabilir. Daha önceki bulgularımızda öğrencilerin büyük bir kısmının türevin tanımını, geometriksel yorumunu kullanarak yaptıkları görülmüştü.

Dördüncü soruda öğrencilerden ilk 3 soruda verdikleri cevaplara $f(1)=2$ bilgisini de ilave ederek $x=1$ noktasının civarındaki çok küçük bir aralıkta $f(x)$ in grafiğini çizmeleri istenmiştir.

Araştırmaya katılan öğrencilerin 11 tanesi yani yaklaşık olarak %23'ü ilk üç soruya verdikleri cevapları ve bu soruda verilen bilgileri kullanarak doğru yapmışlardır. Geri kalan öğrencilerin 22 tanesi (%46) yanlış ve 15 tanesi de soruyu boş bırakmışlardır. Doğru cevaplayan öğrenciler mülakatlarda yaptıkları açıklamalarda türevin $x=1$ noktasından önce negatif olmasından dolayı fonksiyonun azalan, $x=1$ den sonra türevin pozitif olmasından dolayı da fonksiyonun artan olması gerektiğini ve $x=1$ noktasında türevin negatiften pozitive geçmesinden dolayı da bu noktanın minimum olması gerektiğini söyleyerek aşağıdaki gibi grafik çizmişlerdir.

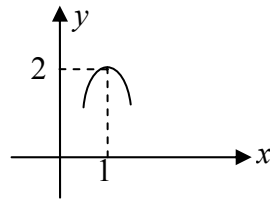


“Fonksiyon 1’in sol tarafında azalırken sağ tarafında artar. Çünkü 1’e soldan yaklaşırken türev negatif, sağ tarafta ise pozitifdir. I. Türev negatif ise fonksiyon azalan I. Türev pozitif ise fonksiyon artandır”.

Şekil 4.4.a Öğrencilerin türev grafiğinden faydalanarak 2 civarında çizdikleri fonksiyonun grafiği

Yanlış cevaplayan 10 öğrenci, bunlardan 4 tanesi ilk 3 soruyu doğru yapmasına rağmen türevin sıfır olduğu $(1,2)$ noktasını maksimum noktası olarak almışlar ve çizilmesi gereken grafiğin tam tersini çizmişlerdir. Yani fonksiyon $x=1$ noktasının solunda

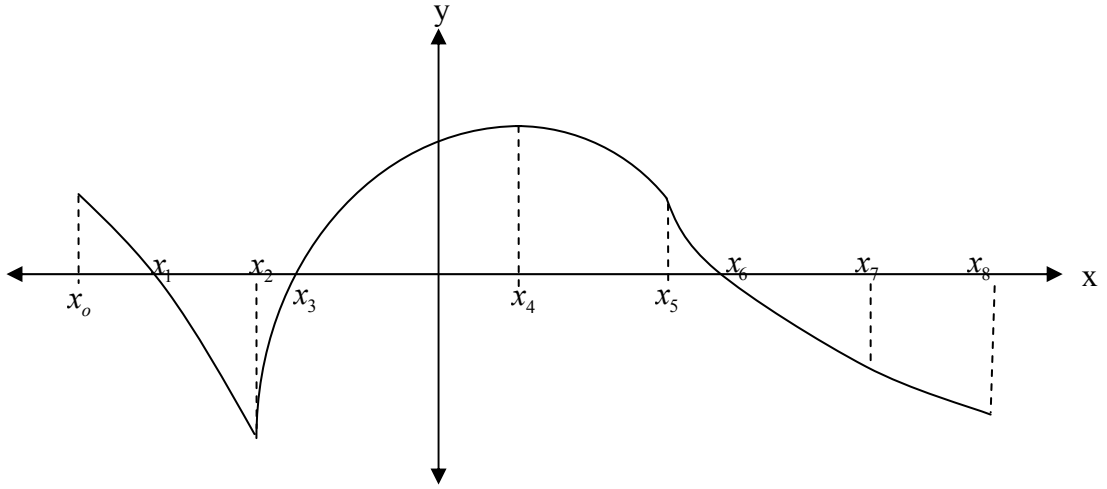
azalan değil artandır, sağında da artan değil azalandır. Bu öğrenciler cevap kağıtlarında herhangi bir açıklama yapmamışlardır. Yapılan mülakatta öğrenciler fonksiyon için verilen $f(1)=2$ bilgisinde fonksiyonun değerinin 2 yani pozitif olduğunu ve fonksiyonun grafiğinin aşağıda verilen grafiğe benzer olması gerektiğini söylemişlerdir. Öğrencilerin burada yine pozitif değerli fonksiyon ile artan fonksiyonu ayırt edemedikleri görülmüştür.



Şekil 4.4.b Öğrencilerin türev grafiğinden faydalanarak 2 civarında çizdikleri fonksiyonun grafiği

4 öğrenci $(1,2)$ noktasından geçen $y=2$ doğrusunu çizmişlerdir. Bu öğrenciler fonksiyonun birinci türevinin sıfır yani $f'(1)=0$ olması için sabit fonksiyon olması gerektiğini söylemişlerdir. Bundan dolayı fonksiyonun $y=2$ fonksiyonu olduğunu ve grafiğin bu şekilde olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Yanlış cevaplayan diğer 8 öğrenci ise ilgisi olmayan grafikler çizmişlerdir. Bu öğrenciler mülakatta da zorlandıklarını ve grafiklerin bu şekilde olması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Öğrencilerin geometriksel gösterimden analitiksel gösterime dönüşümdeki performanslarını değerlendirmek için sorulan ikinci grup sorular verilen fonksiyon grafiğinden faydalanarak fonksiyonun kendisi, birinci ve ikinci türevi hakkında tahminde bulunmayı içermektedir.



Şekil 4.5. Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testinde kullanılan fonksiyon grafiği

Aşağıdaki soruları $[x_0, x_8]$ kapalı aralığında grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonundan faydalanarak yapınız. **(Verilen grafik $y = f(x)$ fonksiyonun kendisine ait)**

1. $f(x)$ hangi aralıklarda artandır? Neden? Açıklayınız

Bu soruyu araştırmaya katılan 48 öğrenciden 37 tanesi %77'si $[x_2, x_4]$ diyerek doğru yapmıştır. Bu öğrencilerin açıklamaları genellikle artan fonksiyonun tanımı ile ilgili olup bir kaç aşağıda verilmiştir.

- A) “ $[x_2, x_3]$ ve $[x_3, x_4]$ aralığında artandır. Çünkü x artarken y de artmıştır”.
- B) “ $[x_2, x_4]$ aralığında artandır . Çünkü fonksiyona bu aralıkta ardışık değerler verdiğimizde gittiği değerin bir öncekinden fazla oluşunu görmekteyiz”.
- C) “ $[x_2, x_4]$ aralığında artandır. Çünkü bu aralıkta bütün x değerleri için $x_a > x_b$ olduğunda $f(x_a) > f(x_b)$ dir”.

Geri kalan 11 öğrenci ise $[x_2, x_4]$ aralığın dışında farklı aralıklar söyleyerek yanlış yapmışlardır. Yanlış cevaplayan öğrencilerden 3 tanesi $[x_2, 0]$ aralığında, 3 tanesi de $[x_3, x_4]$ aralığında fonksiyonun artan olduğunu söylemişlerdir. Bu öğrencilerin cevap kağıtlarından yapılan alıntılardan birisi şöyledir: “ $[x_2, 0]$ aralığında artandır çünkü $x_2 < 0$ iken $f(x_2) < f(0)$ dır”. $[x_2, 0]$ aralığında fonksiyonun artan olduğunu söyleyen öğrencilerden ikisi mülakatta fonksiyonun yine $[x_2, 0]$ aralığında artan olduğunu söylemişlerdir. Öğrencilere fonksiyonun $[0, x_4]$ aralığında nasıl olduğu sorulunca öğrenciler ancak biraz düşündükten sonra fonksiyonun burada da artan olduğunu söylemişlerdir. $[x_3, x_4]$ aralığında fonksiyonun artan olduğunu söyleyen öğrencilerin cevap kağıtlarından yapılan alıntıların birisi şu şekildedir. “ $[x_3, x_4]$ aralığında fonksiyonun artandır. x değeri artarken y değeri de artmıştır” Bu öğrencilerin gerek cevap anahtarında gerekse mülakatta yaptıkları açıklamalar artan fonksiyon tanımına uygun ve mantıklıdır. Bu öğrencilerin, soruyu doğru yapamamalarının sebebi fonksiyonun grafikte gösterilmesi olabilir. Yanlış cevaplayan diğer öğrencilerin açıklamaları artan fonksiyonun tanımıyla ilgisi olmayan yanlış açıklamalardır. Örneğin bir öğrencinin açıklaması şöyledir: “ (x_3, x_4) ve (x_0, x_1) aralıklarında artandır çünkü alttan büyüktür” Bu öğrencinin ne verdiği aralık ne de açıklaması doğrudur. Yanlış cevaplayan diğer öğrencilerinde açıklamaları buna benzer ifadelerden oluşmaktadır.

2. Hangi aralıklarda birinci türev pozitifdir? Yani $f'(x) > 0$? Neden? Açıklayınız

Bu soruyu araştırmaya katılan 48 öğrenciden 23 tanesi %48’i doğru, 23 tanesi yanlış yapmış ve 2 tanesi de soruyu cevapsız bırakmıştır. Birinci soruyu doğru cevaplayan öğrencilerden 14 tanesi fonksiyonun artan olduğu aralıkları bulmasına rağmen fonksiyon ile birinci türev arasındaki ilişkiyi bilemedikleri için soruyu yapmada zorluklar yaşamışlar ve yanlış yapmışlardır. Doğru cevaplayan öğrencilerin tamamına yakını açıklama yapmış ve açıklamaların hepsinde birinci türevle orijin fonksiyon

arasındaki ilişkiye işaret etmiştir. Bu öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntıların bazıları şöyledir:

A) “ $[x_2, x_3]$ ve $[x_3, x_4]$ aralığında pozitiftir. Çünkü bu aralıkta fonksiyon artandır”.

B) “ (x_2, x_3) ve (x_3, x_4) aralıklarında $f'(x) > 0$ ’dır. Çünkü bu aralıklarda $f(x)$ artan olduğundan”.

C) “ (x_2, x_4) aralığında. Çünkü bu aralıkta fonksiyon artandır”.

D) “ (x_2, x_3) ve (x_3, x_4) aralıklarında $f'(x) > 0$ ’dır. Çünkü $f'(x) > 0$ olması için o aralıklarda artması gerekir. Fonksiyon (x_2, x_3) ve (x_3, x_4) aralıklarında artandır”.

Yapılan açıklamalar genellikle buna benzer ifadelerden oluşmaktadır. Sadece bir öğrenci “ $[x_2, x_4]$ aralığında grafiğe çizilen teğetlerin eğimi pozitiftir” şeklinde farklı bir açıklama yapmıştır.

Öğrencilerin soruyu yapamamasının temelinde öğrencilerin ya artan fonksiyonun tanımını ya da fonksiyonla birinci türev arasındaki ilişkiyi bilememeleri veya eksik bilmeleri yatmaktadır. Gerek cevap kağıtlarına yazdıkları açıklamalar gerekse mülakat görüşmeleri bu eksikleri göstermektedir. Örneğin fonksiyonla türev fonksiyonu arasındaki ilişkiyi bilen fakat fonksiyonun artan olduğu aralığı yanlış bulan bir öğrencinin açıklaması “ $(x_3, 0)$ ve (x_2, x_3) çünkü artan olduğu aralıklarda $f'(x) > 0$ tir” şeklinde olup, bir başka öğrenci türevin pozitif olması için bağımlı değişken ile bağımsız değişkenin aynı işaretli olması gerektiğini düşünmüş ve: “ $(x_1, x_3), (0, x_6)$ aralığında türev pozitiftir. Çünkü (x_1, x_3) aralığında hem x hem de y negatiftir. $(0, x_6)$ aralığında hem x hem de y pozitiftir”. şeklinde açıklama yapmıştır. Bir başkası ise türevin pozitif olması için fonksiyonun negatif değerli olması gerektiğini düşünerek $(x_1, x_3), (x_6, x_8)$ birinci türev pozitiftir. Fonksiyon bu aralıkta negatif değerlidir”. şeklinde bir açıklama yapmıştır. Bir başkası da “ $(0, x_8)$ arasında çünkü x değeri

pozitifdir”. şeklinde bir açıklama yaparak birinci türevin pozitif olmasını x değerinin pozitif olmasına bağlamıştır.

Üçüncü soruda birinci türevi sıfır yapan değer olup olmağı sorulmuştur.

3. Hangi noktalarda birinci türev ($f'(x) = 0$) sıfırdır? Neden? Açıklayınız.

Bu soruyu araştırmaya katılan 48 öğrenciden sadece 15 tanesi yani %31’ doğru, geri kalan 33 öğrenci ise yanlış yapmışlardır. Doğru cevaplayan öğrencilerin 7 tanesi türevin geometriksel yorumunu, 4 öğrenci ekstremum noktasını, 2 öğrenci fonksiyonun artanlığını ve azalanlığını kullanarak yapmışlar ve açıklamalarını da ona göre yapmışlardır 2 öğrenci ise nasıl yaptığını açıklamamıştır. Bu öğrencilerin cevap kağıtlarından yapılan alıntılardan bazıları aşağıda verilmiştir.

A) “ x_4 noktasında türev sıfırdır. Çünkü burada çizilen teğetin eğimi sıfır olup bu eğim türeve eşittir”.

B) “ x_4 noktasında türev sıfırdır ekstremum noktasından geçtiği için”

C) “ x_4 noktasında $f'(x) = 0$ çünkü fonksiyon artma halinden azalma haline geçmiştir”.

Yanlış cevaplayan 33 öğrenciden 21 tanesi fonksiyonun sıfır değerini aldığı x_1 , x_3 , x_6 noktalarında da birinci türevin sıfır olduğunu söylemişlerdir. Gerek cevap kağıtlarında gerekse mülakatlarda yapılan açıklamalardan bu öğrencilerin fonksiyonla birinci türev arasındaki ilişki hakkında bazı yanlış anlamalara sahip oldukları görülmüştür. Birçok öğrenci x_1 , x_3 , x_6 noktalarında fonksiyonun sabit bir değer aldığını sabitinde türevinin sıfır olduğunu söylemişlerdir. Bu öğrencilerin yaptığı açıklamalardan yapılan alıntılardan bazıları aşağıda verilmiştir.

A) “ x_1 , x_3 , x_6 noktalarında türev sıfırdır. Çünkü bu noktalar sabit sayı ifade eder”.

B) “ x_1 , x_3 , x_6 dır. Çünkü $f(x) = 0$ dır”.

C) “ x_1, x_3, x_6 noktalarında $y = 0$ olduğundan türevde sıfırdır”.

8 öğrenci ise fonksiyonun kritik noktaların ikisinde ya da hepsinde birinci türevin sıfır olduğunu söylemişlerdir. Örneğin bir öğrenci “ x_2 ve x_4 noktalarında türev sıfırdır. Çünkü bu noktalar yerel maksimum ve minimumdur” derken bir başka öğrenci de “ x_0, x_2, x_4, x_8 noktalarında türev sıfırdır. Çünkü eğim sıfırdır” şeklinde açıklama yapmışlardır. Bu öğrenciler bilgi testinde “ $f(x)$ fonksiyonu c noktasında bir ekstremuma sahip ve bu noktada türevli ise $f'(c) = 0$ dır”. şeklindeki ifadeyi %98 lik gibi yüksek bir oranla doğru yaparken bu sorudaki başarıları oldukça düşmüştür. Burada bir daha görülmüştür ki öğrencilerin büyük bir kısmı çoklu gösterimler arasındaki ilişkiyi anlamada oldukça zorlanmışlardır.

Öğrencilerin fonksiyonun grafiğine bakarak ikinci türev hakkında bilgi elde edip edemediklerini araştırmak için öğrencilere;

4. Hangi aralıklarda ikinci türev negatiftir? Yani $f''(x) < 0$? Neden? Açıklayınız sorusu yöneltilmiştir.

Bu soruyu araştırmaya katılan 48 öğrenciden ancak 7 tanesi %14,5’i doğru, 31 tanesi ya yanlış ya da eksik yapmış, 10 tanesi ise soruyu boş bırakmıştır. Yanlış cevaplayan öğrencilerden 13 tanesi fonksiyonla ikinci türev arasındaki ilişkiyi bilmelerine rağmen grafikteki bilgileri eksik ya da yanlış okumuşlardır. Bu öğrencilerin gerek cevap kağıtlarında gerekse mülakatta yaptıkları açıklamalar “fonksiyon aşağı bükey ise ikinci türev negatiftir” şeklindeki bilgiye sahip olduklarını göstermiştir. Öyle ki bilgi testinde öğrencilerin %98’i “ $f''(c) < 0$ ise f fonksiyonu $(c, f(c))$ noktasında aşağı bükeydir”. ifadesinin doğru olduğunu söylemişlerdir. Bu öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntılardan bazıları aşağıda verilmiştir.

A) “ (x_5, x_8) aralığında $f''(x) < 0$ dir. Çünkü fonksiyon bu aralıkta alttan konkavdır”.

- B) “ $(x_0, x_1), (x_3, x_6)$ aralıklarında. Çünkü grafik alttan konkavdır yani maksimum noktasını içeriyor”
- C) “ (x_5, x_8) çünkü konkavlık aşağı olduğu için”
- D) “ $[x_2, x_6]$ aralığında $f''(x) < 0$ dır. Çünkü atlan konkavdır”.

Yanlış cevaplayan öğrencilerden 5 tanesi x_4 noktası maksimum noktası olduğu için bu noktayı içine alan ya da sınır noktası kabul eden bir aralık yazmış. Örneğin bir öğrenci “ (x_4, x_5) aralığında ikinci türev negatiftir. x_4 maksimum noktası olduğundan $f'(x_4) = 0$ olup ikinci türev (x_4, x_5) aralığında negatiftir”. şeklinde bir açıklama yapmıştır.

Yanlış cevaplayan diğer öğrencilerin yaptıkları açıklamalardan fonksiyonla ikinci türev arasındaki ilişkiyi ya anlayamadıkları ya da yanlış anladıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden 5 tanesi ikinci türevin negatif olmasını birinci türevin negatif olması ile ilişkilendirmiş, ona göre yapmış ve açıklamışlardır. Diğer 8 öğrenciden bazıları fonksiyonun negatif olmasıyla, bazıları da fonksiyonun pozitif olmasıyla ilişkilendirmiş, bazıları da hiç ilgisiz aralıklar yazmışlardır. Bu öğrencilerin fonksiyonla ikinci türevi arasındaki ilişkiyi kuramamalarının nedeni grafik çizerken ikinci türevin fazla kullanılmaması ve derslerde sembolik gösterimden grafiksel gösterime dönüşümün yapılırken tersinin yapılmaması olabilir. Öğrencilere beşinci soruda;

5 $f(x)$ bir büküm noktasına sahip midir? Neden? Açıklayınız

şeklindeki soru yöneltilmiştir. Öğrencilerin tamamına yakını fonksiyonun büküm noktasına sahip olduğunu söylemişler fakat hangi noktanın büküm noktası olduğunu bulmada zorlanmışlardır. Araştırmaya katılan 48 öğrenciden 14 tanesi büküm noktasının x_5 noktası olduğunu söylemiş ve açıklamasını da doğru yapmıştır. Ayrıca 4 öğrenci daha büküm noktasının x_5 noktası olduğunu söylemiş fakat açıklamaları yanlış

yapmışlardır. Örneğin bir öğrenci “büküm noktasına sahiptir x_5 noktasında fonksiyon işaret değiştiriyor” şeklinde açıklama yapmıştır. Geri kalan 30 öğrencinin gerek kağıtta gerekse mülakatta yaptığı açıklamalar öğrencilerin büküm noktası hakkında kafalarının karışık olduğunu göstermiştir. Bu öğrenciler sezgisel olarak verilen fonksiyonun bir büküm noktasına sahip olduğunu görmüşler fakat bu noktanın neresi olduğunu bulamamışlardır. Bu öğrencilerin cevap kağıtlarından yapılan alıntılardan bazıları aşağıda verilmiştir:

- A) “ x_6 büküm noktasıdır çünkü bu noktada fonksiyonun ikinci türevi işaret değiştirmiştir”.
- B) “Evet aynı anda artan ve azalan olduğu için büküm noktası olmak zorundadır”
- C) “Sahiptir. x_2 ve x_5 noktalarında yön değiştirmiştir”.
- D) “ $f(x)$ ’in bir noktasında büküm noktası vardır. Çünkü x noktasını kestikten sonra fonksiyon yön değiştirmiştir. Dolayısıyla x_3 ile x_6 arasında bir noktada büküm noktası vardır”.
- E) “Sahiptir. Fonksiyon (x_4, x_6) arasında işaret değiştirmiştir”.
- F) “Evet konkavlığın yön değiştirdiği yerde büküm noktasına sahiptir”

Öğrenciler tarafından yapılan diğer açıklamalar genel olarak bunlara benzer ifadelerden oluşmuştur. Bu açıklamalardan öğrencilerin geometriksel olarak büküm noktasının tanımında bir takım kargaşalara sahip oldukları görülmüştür.

Altıncı soruda öğrencilere

6 $f'(x)$ hangi aralıkta artandır? Neden? Açıklayınız”

şeklinde bir soru sorulmuştur. Yine bu soruda öğrencilerin oldukça zorlandıkları gözlemlenmiştir. Bu soruya araştırmaya katılan 48 öğrenciden sadece 3 tanesi (x_5, x_8) aralığını doğru bulmuşlar, 6 tanesi de (x_6, x_8) aralığında diyerek kısmen doğru

yapmışlardır. Bu öğrenciler açıklamalarında fonksiyonun büyüklüğünü kullanmışlardır. Bu öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntılardan bazıları şöyledir:

- A) “ (x_5, x_8) aralığında birinci türev artandır çünkü üstten büyüklük vardır”.
- B) “ (x_6, x_8) çünkü bu aralıkta $f''(x) > 0$ dir. Dolayısıyla bu aralıkta $f'(x)$ artandır”.

21 öğrenci yanlış yapmış, 18 öğrenci ise boş bırakmıştır. Yanlış cevaplayan öğrenciler türevin artmasını farklı şeylerle ilişkilendirmişlerdir. Örneğin bazıları birinci türevin artan olması için türevin pozitif olması gerektiğini düşünürken, bazıları da fonksiyonun artan yada azalan olması gerektiğini düşünmüşlerdir. Bu şekilde düşünen öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntılarının bazıları aşağıda verilmiştir.

- A) “ (x_2, x_4) aralığında fonksiyon arttığından dolayı $f'(x)$ artandır”.
- B) “ $(x_0, x_1), (x_3, x_6)$ çünkü bu aralıklarda fonksiyon pozitif değerlidir”.
- C) “ $(x_0, x_2), (x_4, x_8)$ çünkü bu aralıklarda birinci türev $f'(x)$ negatif değerlidir”.
- D) “ (x_2, x_4) aralığında $f'(x)$ artandır eğim devamlı artar”.

Öğrencilere son olarak grafikte verilen fonksiyonun lokal (yerel) minimumunun olup olmadığı sorulmuştur.

7. $f(x)$ lokal (yerel) minimum noktasına sahip midir? Neden? Açıklayınız.

Bu soruda öğrencilerin çok zorlandıkları görülmüştür. Çünkü hiçbir öğrenci fonksiyonun hem x_2 hem de x_8 de bir lokal minimuma sahip olduğunu görememiştir. Araştırmaya katılan 48 öğrenciden 10 tanesi fonksiyonun sadece x_2 , 5 öğrencide x_8 noktasında bir lokal minimuma sahip olduğunu söylemişler, 5 öğrenci ise fonksiyonun bir lokal minimuma sahip olduğunu söylemekle yetinmişlerdir. Geri kalan

öğrencilerden 17 tanesi fonksiyonun lokal minimuma sahip olmadığını söylerken 11 öğrencide soruyu boş bırakmıştır.

Fonksiyonun sadece x_2 noktasında minimum değerini aldığını söyleyen öğrencilerin kağıtlarından yapılan alıntılardan bazıları şöyledir:

A) “Evet sahiptir. (x_0, x_2) aralığında fonksiyon azalırken (x_2, x_4) aralığında artmıştır $(x_2, f(x_2))$ lokal minimumdur”.

B) “ $(x_2, f(x_2))$ lokal minimum değerdedir. Çünkü fonksiyon minimum değerdedir”.

Fonksiyonun sadece x_8 noktasında minimum değerini aldığını söyleyen öğrencilerin kağıtlarından yapılan alıntılardan bazıları da şöyledir:

A) “Sahiptir. x_8 noktasında. Çünkü maksimumluğa ve minimumluğa fonksiyonun uç noktalarında da bakabiliyoruz”.

B) “ $x = x_8$ noktası lokal minimumdur. Grafik alt değerini uç noktada da almıştır”.

Fonksiyonun lokal minimuma sahip olmadığını söyleyen öğrencilerin çoğunun uç nokta olan x_8 noktasına karşılık gelen değeri hiç hesaba almadıkları görülmüştür. Bu öğrencilerin cevap kağıtlarında yaptığı açıklamalardan onların genel olarak x_2 noktasıyla ilgilendikleri görülmüştür. Bu öğrencilerin cevap kağıtlarından yapılan alıntılardan bazıları aşağıda verilmiştir.

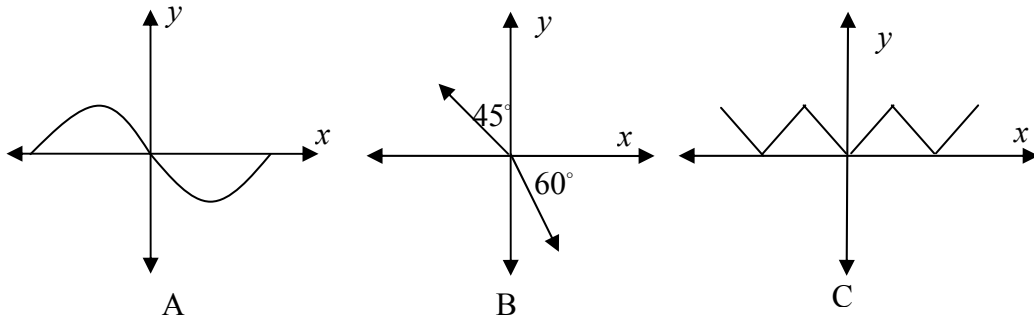
A) “Sahiptir değildir. Çünkü x_2 noktasında türev yoktur”.

B) “Yoktur. Fonksiyon en küçük değerini aldığı anda eğim yoktur”.

C) “Minimum noktası yoktur. Çünkü fonksiyonun en küçük olduğu noktada teğetin eğimi yoktur”.

Öğrencilerin gerek cevap kağıtlarında gerekse mülakatta yaptığı açıklamalara göre öğrencilerin kritik ve ekstremum noktaları hakkındaki kavram hayallerinin eksik ya da sınırlı olup buna göre işlem yaptıkları görülmüştür. Bunun sebebi geleneksel analiz derslerinde fonksiyonun ya da türevin çoklu gösterimlerinin fazla kullanılmaması dolayısıyla öğrencilerin bu çoklu gösterimler arasındaki ilişkiyi anlayamamaları olabilir.

Geleneksel analiz derslerinde genellikle sembolik olarak bir fonksiyon verilir daha sonra öğrencilerden bu fonksiyonun türevini bulmaları istenir. Gerek sınıf içi gerekse sınıf dışı etkinliklerde öğrenciler genellikle bu işlemler üzerine yoğunlaşırlar. Bu aktiviteler işlemsel becerileri geliştirirken türevin kavramsal yönünün anlaşılmasında etkili olmaz. Öğrencilerden grafiksel olarak verilen bir fonksiyonun türevini bulmaları istenmiştir. Yapılan pilot çalışmada hazırlanan sorular öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerin bu sorularda oldukça zorlandıkları görülmüştür. Bundan dolayı bu sorular örneklememizdeki her öğrenciye sorulmaktan ziyade türevi kavramsal olarak daha iyi anladıkları düşünülen analiz notları daha iyi olan 12 öğrenciye sorulmuştur. Bu öğrencilerin bile bu sorularda zorlandıkları görülmüştür. Öğrencilere aşağıda verilen 3 soru sorulmuştur.

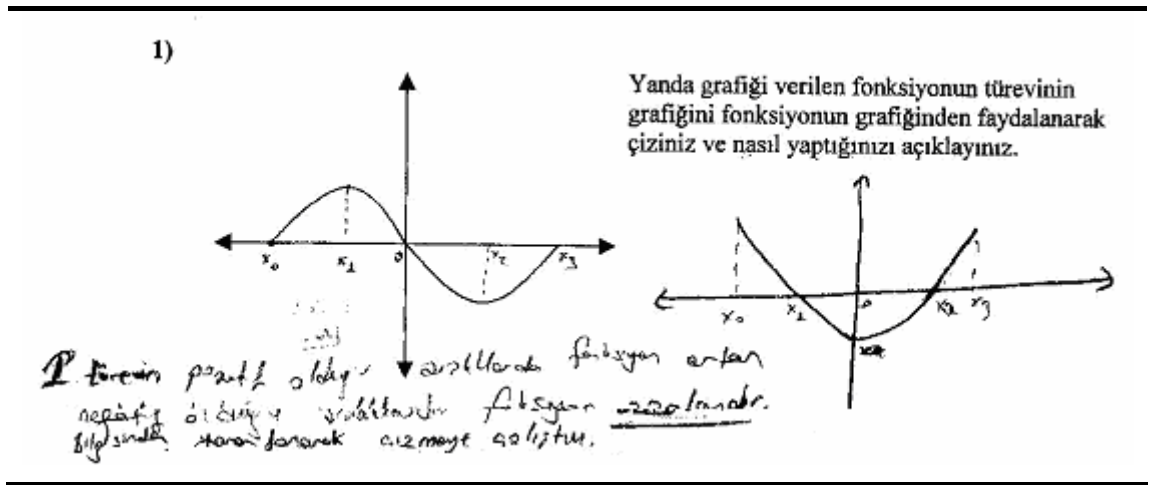


Şekil 4.6. Bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi anlama testi III te kullanılan fonksiyon grafikleri

Yukarıda verilen fonksiyonların grafiğinden faydalanarak türevlerinin grafiğini çiziniz ve nasıl yaptığınızı açıklayınız.

Araştırmaya katılan öğrenciler sınıfın iyi öğrencileri olmasına rağmen bu soruları yapmada zorlanmışlardır. Bu soruları yaparken öğrenciler genellikle türevin geometriksel yorumunu kullanmaya çalışmışlardır. Özellikle B ve C şıklarında öğrencilerin türevin tanımlı olmadığı noktalarda kafalarının karıştığı görülmüştür. A şikkını araştırmaya katılan öğrencilerin 5 tanesi doğru yapabilmiştir. Hem soruyu yapabilen öğrencileri hem de yapamayan öğrencilerin gerek kağıtlarında gerekse görüşmelerde yaptığı açıklamalardan bu öğrencilerin bir fonksiyonla türevi arasındaki ilişkiyi anladıkları fakat bu bilgilerini yeterince kullanamadıkları görülmüştür. Örneğin öğrencilerden birisi öncelikle verilen grafiğin eksenleri kestiği ve ekstremum noktalarını göz önüne alarak aşağıdaki gibi aralıklara bölmüştür. Daha sonrada yandaki grafiği çizmiştir.

Çizelge 4.6. Bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi anlama testi III te fonksiyon grafiğini aralıklara bölerek yapan öğrencinin cevabından yapılan alıntı



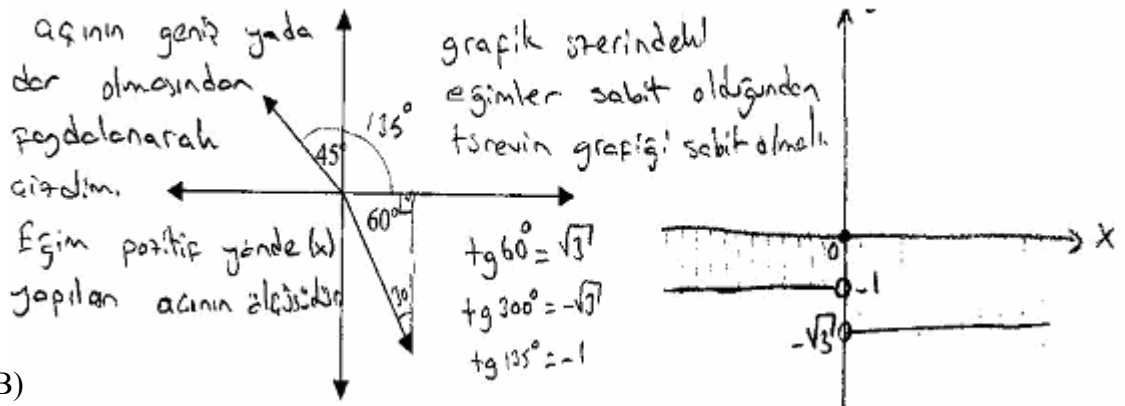
Öğrencilere türevin grafiğinin niçin 0 dan sonra arttırdığı sorulduğunda ise bir açıklama yapamamışlar öyle olması gerektiğini düşündüklerini söylemişlerdir. Bu ise öğrencilerin daha önceki sorularda da görüldüğü gibi birinci türevle ikinci türev arasındaki ilişkiyi bilmemelerinden kaynaklanmaktadır. 0 noktasında fonksiyonun bükümlüğü yön değiştirmiştir. 0'dan önce bükümlük aşağı olup ikinci türev negatif yani birinci türevin azalan, 0'dan sonra bükümlük yukarı olup birinci türevin artan, 0'ında büküm noktası

yani ikinci türevinde burada sıfır dolayısıyla birinci türevin ekstremum noktası olması gerektiğini görememişlerdir. Bu ilişkileri kurabilmesi için öğrencilerin ciddi manada bir kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirmesi gerekir. Kavramsal anlama öğrencilerde gelişmediği için doğal olarak bu ilişkiyi kuramamışlardır.

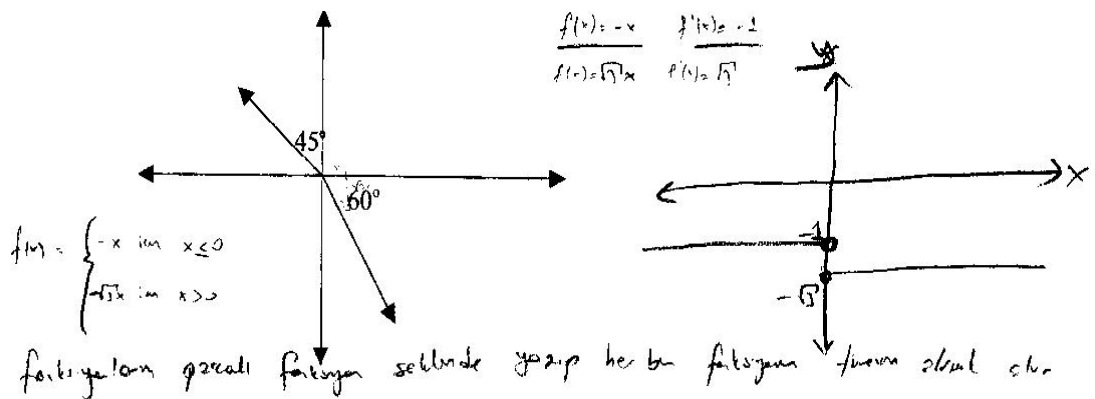
B şıkında öğrenciler soruya iki farklı şekilde yaklaşmışlardır. Birincisinde verilen grafiğin sembolik denklemi elde edilmiş daha sonra bulunan fonksiyonun türevi alınarak türevin grafiği çizilmiştir. İkincisinde ise türevin geometriksel yorumundan faydalanılarak yapılmıştır. Bu soruyu 12 öğrenciden 3 tanesi doğru, 9 tanesi ise yanlış yapmıştır. Yanlış cevaplayan öğrencilerin 6 tanesi grafikte kırılmanın meydana geldiği 0 noktasında yanlışlık yapmışlardır. Bu öğrencilerin çizdiği grafiklerden ikisi aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.7. Bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi anlama testi III deki ikinci soruya verilen öğrenci cevaplarından yapılan alıntı.

A)



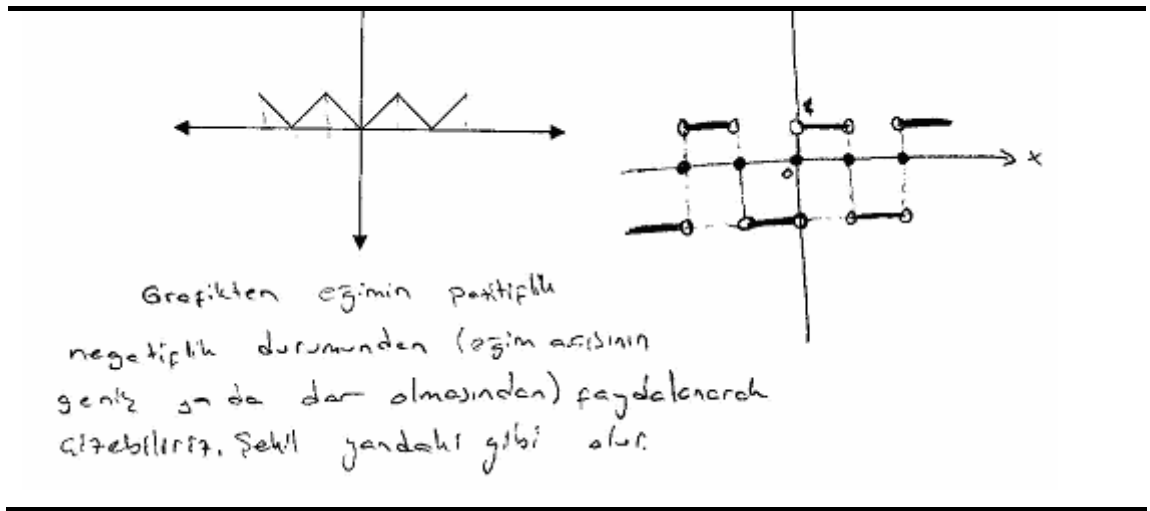
B)



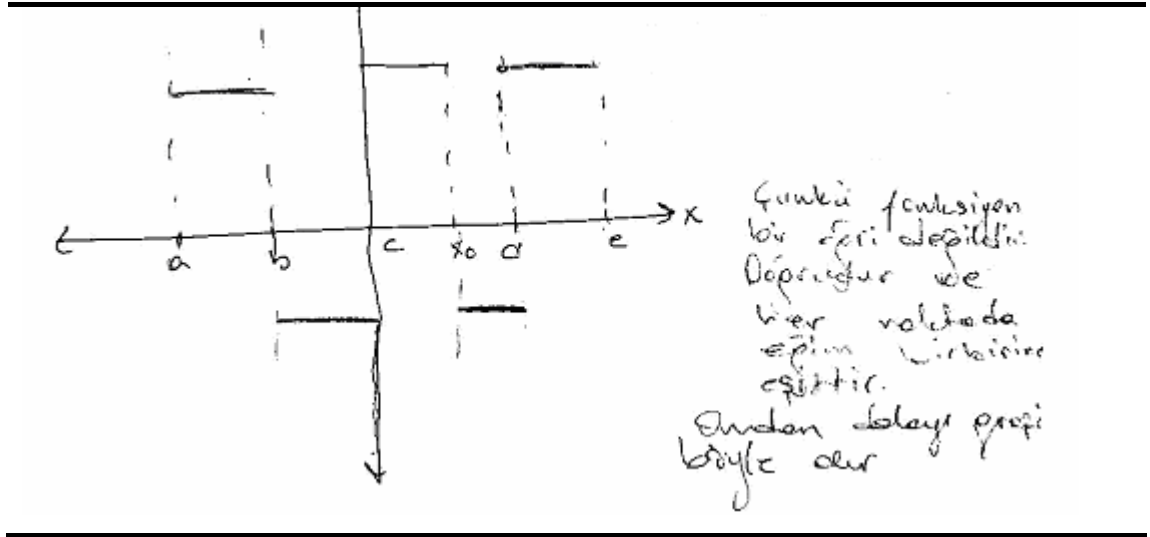
Fonksiyon 0 noktasında sürekli olmasından dolayı öğrenciler bu noktada fonksiyonun ya türevli olduğunu ya da A öğrencisinin yaptığı gibi türevin tanımlı olmadığını fark ederek burada türevin sıfır olduğunu düşünmüşlerdir. Diğer 3 öğrenci ise hiç ilgisi olmayan grafikler çizmişlerdir.

C şıkında ise öğrencilerin daha da zorlandığı görülmüştür. Öyle ki bu soruyu 2 öğrenci doğru, 6 öğrenci ise yanlış yaparken 4 öğrenci ise boş bırakmıştır. Yanlış cevaplayan öğrencilerden 4 tanesi grafiği aralıklara bölmüşler, fonksiyonun artan ya da azalan olduğu aralıkları bulmuşlar, azalan olduğu aralıklarda türevin grafiğinin negatif artan olduğu aralıklarda da pozitif olduğunu ve grafikler doğrusal olduğundan türevin sabit olması gerektiğini düşünerek işlem yapmışlardır. Fakat burada da B şıkında olduğu gibi köşeleri ya dikkate almamışlar ya da türevin buralarda sıfır olduğunu düşünmüşlerdir. Bu öğrencilerin cevap kağıtlarından yapılan alıntılardan iki tanesi aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.8. A öğrencisinin bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi anlama testi III deki üçüncü soruya verdiği cevaptan yapılan alıntı



Çizelge 4.9. B öğrencisinin Bir Fonksiyonla Onun Türevi Arasındaki İlişkiyi Anlama Testi III deki üçüncü soruya verdiği cevaptan yapılan alıntı



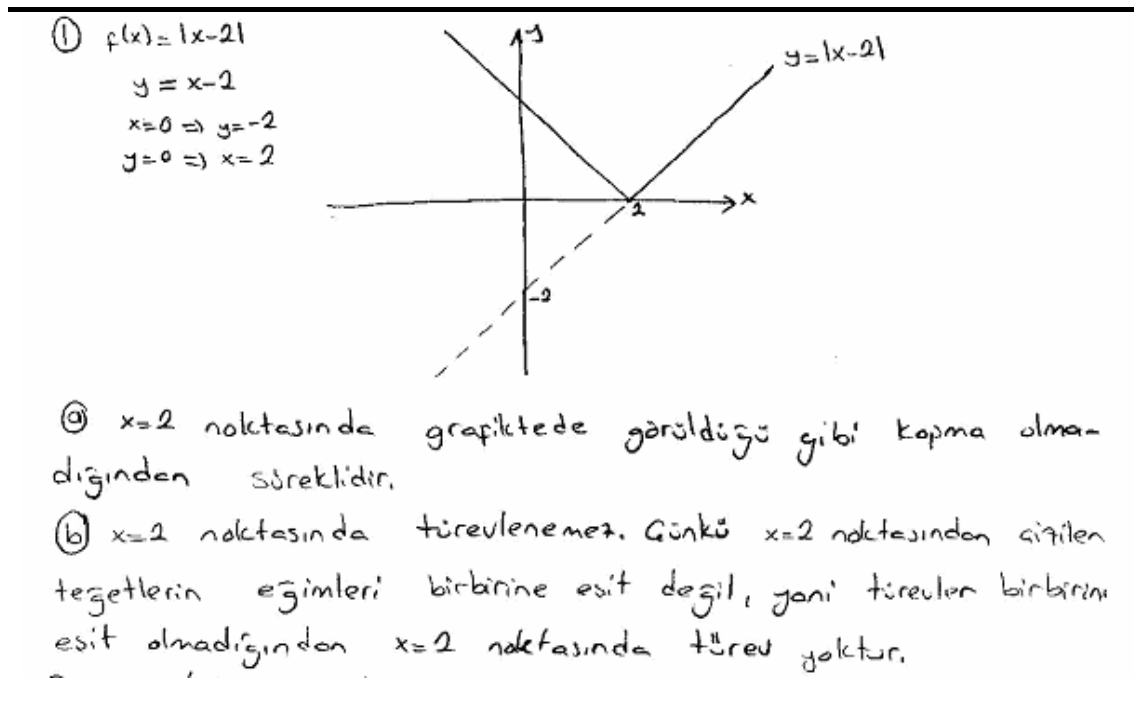
Yanlış cevaplayan diğer 2 öğrenci ise türev grafiğiyle hiç ilgisi olmayan salınım yapan grafik çizmişlerdir. Bu öğrenciler sınıfın iyi öğrencileri olmalarına rağmen fonksiyonun grafiğinden faydalanarak türevin grafiğini çizmede oldukça zorlanmışlardır. Bunun nedeni gerek ders içi gerekse ders dışı aktivitelerde öğrencilerin bu tür sorularla fazla karşılaşmamaları olabilir. Hem öğretmenler hem de öğrenciler grafiksel gösterimler yerine genellikle sembolik gösterimleri tercih ederler. Elde edilen bu bulgular Dreyfus ve Eisenberg (1983)'in formülsüz grafiksel gösterimler analize giriş öğrencilerinin çoğu için bir anlam ifade etmez şeklindeki araştırma bulguları ile örtüşmektedir.

Yapılan bilgi testinde çalışmaya katılan öğrencilerin yarısından fazlası sürekli bir fonksiyonun türevli olduğunu söylemiş olmaları bu öğrencilerin bir fonksiyonun verilen bir noktada türevli olup olmadığını doğru yapma olasılığı ortadan kalkmıştır. Süreklilikle türevlenebilme arasındaki ilişki öğrenciler tarafından genellikle karıştırılan veya yanlış anlaşılan bir konudur. Üniversiteden mezun olan birçok öğrencide bile bu yanlış anlama görülmekte ve daha sonra bu yanlış anlama yanlış kavramsallaşmakta ve bir takım kavram yanlışlarına neden olmaktadır.

Süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlama testinde öğrencilere; “ $f(x)=|x-2|$ fonksiyonunun $x=2$ noktasında; **a)** Sürekliliğini araştırınız. **b)** Türevlenebilirliğini araştırınız. $x=2$ noktasında türevli ise türevini bulunuz. Değil ise sebebini açıklayınız”.

şeklindeki soru sorulmuştur. Bu sorunun a şıkkına araştırmaya katılan 41 öğrenciden 25 tanesi süreklilik şartlarına bakarak soruyu doğru yapmıştır. 25 öğrenciden 12 tanesi de fonksiyonun $x=2$ noktasında sürekli olmadığını söylemiştir. Bu 12 öğrenciden 5 tanesi türevlenebilme için dersi okutan öğretim elemanı tarafından mutlak değer fonksiyonlarının türevini almak için verilen formülü kullanmışlardır. Öğrencilerin cevaplarından yapılan bir alıntı; “ $f(x)=|x| \Rightarrow f'(x)=\frac{x}{|x|}$ olduğundan $f'(x)=\frac{x-2}{|x-2|}$ $x=2$ değeri paydayı 0 yaptığından verilen fonksiyon $x=2$ noktasında türevlenemez”. şeklindedir. Diğer 7 öğrenci ise verilen $f(x)=|x-2|$ fonksiyonun aşağıdaki gibi grafiğini çizmişlerdir.

Çizelge 4.10. $f(x)=|x-2|$ fonksiyonunun grafiğini çizerek cevaplayan öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntı.



2 öğrenci $x = 2$ noktasında teğet çizilemediği için türev yoktur şeklinde açıklama yapmışlardır. $f(x) = |x - 2|$ fonksiyonun sürekli olduğunu gösteren 25 öğrenciden geri kalan 13 öğrencinin 8 tanesi fonksiyon sürekli ise türevlidir şeklinde bir görüş bildirmişlerdir. Yine burada öğrenci cevaplarından yapılan alıntıların bazılarında

$$\text{A öğrencisi } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x - 2| = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - 2| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \quad \text{ve}$$

$f(2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ve $f(2) \in \mathbb{R}$ olduğundan sürekli ve türevlenebilirdir”.

B öğrenci “Türevlenebilmesi için sürekli olmalıdır. Sürekli olduğundan verilen fonksiyon türevlidir”, C öğrencide fonksiyonun sürekli olduğunu göstererek “sürekli ise kesinlikle türevlenebilir demektir”. şeklinde açıklama yapmışlardır. Bu 13 öğrenciden geri kalan diğer 5 öğrenci daha da ileriye giderek türevlenebilme için fonksiyonun verilen noktada limitinin var olmasının yeterli olduğunu söylemiştir. Bu öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntılarda D öğrencisi “ türevlenebilmesi için sağdan limitin ve soldan limite eşit olması gerekir. Yani $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\text{olmalıdır. } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x - 2| = 2 - x \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - 2| = x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - x \neq x - 2 \text{ olduğundan türevlenemezdir”}$$

şeklinde açıklama yapmıştır. Burada öğrencilerin “Bir fonksiyon kapalı bir aralıkta türevli ise sürekli” şeklindeki analizin temel teoremini yanlış anladıkları ve kullandıkları görülmektedir. Temel teoremi yanlış anlama ve kullanma öğrencilerin bu soruyu yapamamalarına neden olmaktadır. Çalışmaya katılan bir başka öğrenci sorunun

$$\text{a şikkını } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x - 2| = 2 - x \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - 2| = x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ olduğundan sürekli}$$

değildir demiş. B şikkında “ türevlenemez çünkü bir fonksiyonun türevlenebilmesi için

$$\begin{array}{l} \text{sürekli olması gerekir diyerek} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x - 2} = 1 \\ \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x + 2}{x - 2} = -1 \quad \text{sağdan} \end{array}$$

ve soldan türeve bakmış bunlar birbirine eşit olmadığı için verilen fonksiyon $x = 2$ noktasında türevli değildir” şeklinde açıklanmıştır. Türevlenebilme için sağ ve sol

türeve bakan tek öğrencinin bu olması ve bununda sürekliliği gösterememesi oldukça ilgi çekicidir. Geri kalan diğer 15 öğrenci ya boş bırakmış ya da ilgisiz cevaplar vermişlerdir. Aynı testte öğrencilere

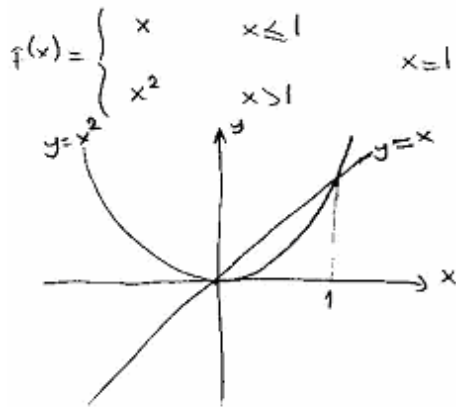
“Öğretmenleri Ayşe ile Ali’den $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$

noktasındaki türevlenebilirliğini araştırmalarını istemiş. Ayşe $x=1$ noktasında fonksiyonun türevli olduğunu, Ali ise bu noktada türevinin olmadığını söylemiştir. Sizce hangisi doğru söylemektedir? Sebebini açıklayınız”.

şeklindeki soru sorulmuştur. Mutlak değer sorusunda olduğu gibi bu soruda da araştırmaya katılan 41 öğrenciden 12 tanesi yani başka bir deyişle %29’u doğru yapmıştır. Bu 12 öğrenciden 6 tanesi türevin geometriksel, 5 tanesi sembolik ve sadece 1 tanesi de nümerik tanımı kullanarak yapmışlardır. Geometriksel tanımı kullanan öğrenciler verilen parçalı fonksiyonun grafiğini çizmişler daha sonrada fonksiyonun grafiğine $x=1$ noktasında çizilen teğetlerin eğimi farklı olduğundan fonksiyon bu noktada türevli olmadığını söylemişlerdir. Bu öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntıların bazıları aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.11. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çizerek cevaplayan A

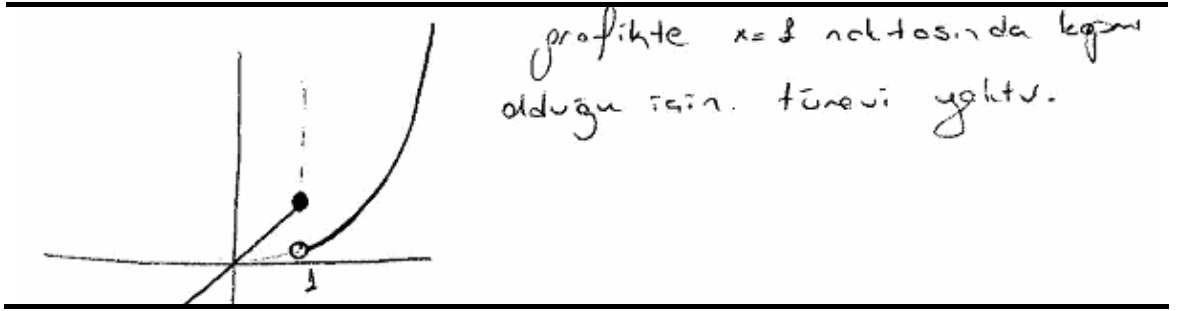
öğrencisinin cevabından yapılan alıntı.



$x=1$ noktasında türevlenebilir fakat fonksiyonun tanım kimesine göre $x=1$ noktasında; $x \leq 1$ için türev 1, $x > 1$ için türev 2 olmaktadır. Bu türev birbirine eşit olmadığı için türevli değildir. Bu yüzden Ali doğru söylemiştir.

Bir başka öğrencinin cevabından taranarak yapılan alıntıda aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.12. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çizerek cevaplayan B öğrencisinin cevabından yapılan alıntı.



Türevin sembolik tanımını referans alan öğrenciler sembolik olarak sağ ve sol türevleri alıp x yerine 1 yazmışlar ve birbirine eşit olmadığı için fonksiyonun $x=1$ noktasında türevli olmadığını söylemişlerdir. Bu şekilde yapan öğrencilerin cevaplarından yapılan bir alıntı aşağıda verilmiştir:

$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ fonksiyonunun türevli olması için sağ ve sol türevin birbirine eşit olması gerekir. Soldan türevde $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow f'(1) = 1$ ve sağdan türevde $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$ olup $1 \neq 2$ olduğundan fonksiyon $x=1$ noktasında türevli değildir.

Nümerik tanıımı kullanan öğrencinin açıklaması ise;

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 \text{ sağdan türev}$$

türevin tanımına

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \text{ soldan türev}$$

göre $x=1$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu türeve sahip değildir. Çünkü sağdan ve soldan türevler birbirine eşit değildir. Dolayısıyla Ali doğru söylemiştir şeklindedir.

Soruyu yapamayan 29 öğrencinin 12 tanesi (araştırmaya katılan öğrencilerin %29'u) “Türevlenebilen her fonksiyon süreklidir” şeklindeki analizin temel teoremini yanlış anlamışlar ve yanlış kullanmışlardır. Bu 12 öğrenci $x=1$ noktasında fonksiyonun sürekliliğine bakmış ve $x=1$ noktasında sürekli olduğundan fonksiyonun türevli olduğunu söylemişlerdir. Öğrenci cevaplarından yapılan alıntılardan ikisi aşağıdaki gibidir.

A) Ayşe doğru söylemiştir. Çünkü $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = l_1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = l_2$ olup $l_1 = l_2$ dir.

$x=1$ için $f(x)=1$ tir ve $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ olduğundan türevlenebilirdir.

B) Türevli olması için 3 şartın sağlanması gerekir.

1) $f(x)=x$ ise $f(x)=1$ olup tanımlıdır.

2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ olup limiti vardır.

3) limit değeri ile fonksiyon değeri birbirine eşit olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x=1$ noktasında türevlidir.

Araştırmaya katılan 7 (%17) öğrenci ise türevlenebilme için fonksiyonun verilen noktada sağ ve sol limitlerinin birbirine eşit olmasının yani o noktada limitinin var olmasının yeterli olduğunu söylemişlerdir. Öğrenciler türevlenebilme için gerekli olan şartları bilemediklerinden alternatif yapı geliştirmişlerdir. Soruyu cevaplarken de geliştirdikleri bu yanlış yapıyı kullanmışlardır. Bu öğrencilerden yapılan alıntılardan biri;

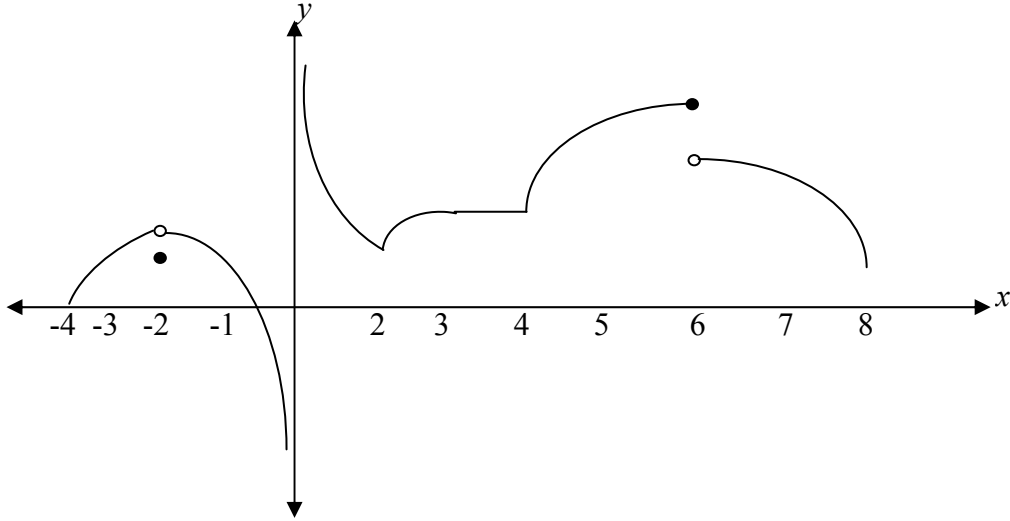
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$, $l_1 = l_2$ olduğundan türevlenebilirdir. Ali

yanlış söylemiştir. Bir başkası da; $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ fonksiyonu için

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ olup sağ ve sol limitler birbirine eşit

oldüğundan türevlenebilirdir. Şeklinde dir. Geri kalan 10 öğrenci ise soruyu ya boş bırakmış ya da sorunun çözümünüyle ilgisi olmayan çözümler yapmışlardır.

Grafiksel olarak verilen bir fonksiyonda öğrencilerin süreklilik, türevlenebilme ve bu iki kavram arasındaki ilişkiyi anlamalarını araştırmak için sorulan bu soruda da öğrencilerin büyük bir çoğunluğu zorluklar yaşamışlardır.



Şekil 4.7. Süreklilik ve Türevlenebilme Arasındaki İlişkiyi Anlama Testinde kullanılan 3. soru

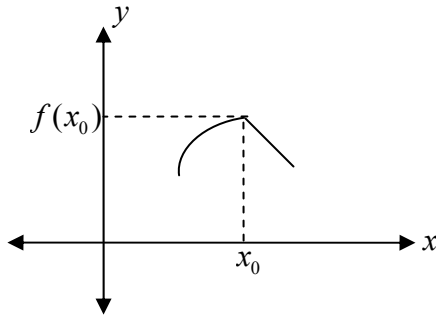
- a) f fonksiyonu her noktada sürekli midir? Değil ise nerede, neden sürekli değildir? Açıklayınız.
- b) f fonksiyonu her noktada türevli midir? Değilse nerede ve neden türevli değildir? Açıklayınız.

Araştırmaya katılan 41 öğrenciden 13 tanesi -2, 0 ve 6 noktalarında, 8 tanesi -2 ve 6 noktalarında, 13 tanesi sadece 0 noktasında, 1 öğrenci 6 noktasında, 2 öğrenci -2 noktasında fonksiyonun süreksiz olduğunu, 4 öğrenci ise fonksiyonun bütün noktalarda sürekli olduğunu söylemişlerdir. Fonksiyonun -2, 0 ve 6 noktalarında süreksiz olduğunu söyleyen 13 öğrenciden 8 tanesi -2, 0 ve 6 noktalarındaki süreksizliğin sebebini grafikte meydana gelen kopmayla açıklamışlardır. Diğer 5 öğrenci ise süreklilik için gerekli şartlara bakarak ayrıntılı olarak incelemişlerdir. Örneğin bu öğrencilerin cevaplarından yapılan alıntılardan birisi; “-2 de fonksiyon değeri limit değerine eşit olmadığı, 0 da fonksiyon tanımlı olmadığı ve 6 da da limit olmadığı için süreksizlik vardır”

şeklindedir. Fonksiyonun -2 ve 6 noktalarında süreksiz olduğunu söyleyen 8 öğrencinin 5 tanesi süreksizlik sebebini kopma olarak açıklamıştır. İki öğrenci ise -2 deki limit değerinin fonksiyonun o noktada aldığı değere eşit olmadığını, 6 noktasında ise sağ ve sol türevin birbirine eşit olmadığını söylemiş, bir öğrenci ise hiç açıklama yapmamıştır. 0 (sıfır) noktasında fonksiyonun süreksiz olduğunu söyleyen 13 öğrenciden 8 tanesi süreksizliğin sebebini kopma olarak geri kalan 5 öğrenci ise sağ ve sol türevin bir birine eşit olmamasıyla açıklamıştır. Sadece -2 noktasında süreksiz diyen 2 öğrencinin birisi ile sadece 6 noktasında süreksizlik var diyen öğrencilerde yine süreksizlik sebebini grafikteki kopmayla açıklamışlardır. 15 öğrencinin -2, 0 ve 6 noktalarının sadece birindeki veya ikisindeki süreksizliği grafikte meydana gelen kopmayla açıklaması diğerini veya diğerlerini ise görmemesi oldukça ilginç bir durumdur. Bu öğrencilerin süreksizlik çeşitlerini anlamadığının bir göstergesidir. Örneğin 8 öğrencinin 0 (sıfır) noktasındaki kopmayı görüp burada fonksiyon süreksiz deyip -2 ve 6 daki durumu grafikteki kopma olarak algılamaması gibi. 7 öğrenci ise fonksiyonun bütün noktalarda sürekli olduğunu söylemişlerdir.

Öğrencilerin b şıkkındaki başarı oranları daha düşük bulunmuştur. Çünkü araştırmaya katılan öğrencilerin sadece 13 tanesi fonksiyonun süreksiz olduğu noktaları bulabilmişti. Geri kalan 28 öğrenci fonksiyonun süreksiz olduğu noktaları bulamadığı için doğal olarak türevlenemeyen noktaları da bulamamışlardır. Fonksiyonun süreksiz olduğu bütün noktaları bulan 13 öğrenciden 9 tanesi fonksiyonun süreksiz olduğu -2, 0 ve 6 noktaların yanında 2 ve 4 noktalarında fonksiyonun türevli olmadığını söylemişlerdir. Örneğin bu öğrencilerden birisi türevlenemeyen noktaları şöyle açıklamıştır: “her noktada türevli değildir. Grafiğin sürekli olmadığı noktalarda türevlenebilme şartı bozulduğu için fonksiyon o noktalarda türevlenemez. Ayrıca $x = 2$ ve $x = 4$ noktasında fonksiyonun grafiği kırılmıştır. Geometrik olarak türev demek eğim demektir. Oralarda birçok teğet çizilebileceğinden dolayı türev yoktur. Diğer 4 öğrenciden 3 tanesi fonksiyonun süreksiz olduğu yerlerde türevin olmadığını söylemiştir. Bu öğrencilerden birisinin açıklaması şöyledir: “dediğim noktalarda fonksiyon sürekli olmadığı için türevlenemezdir”. Bir öğrenci ise “her noktada türev yoktur 2, 4, 6 noktalarında eğim yoktur” şeklinde açıklamıştır.

Fonksiyonun -2 ve 6 noktalarında süreksiz olduğunu söyleyen 8 öğrenciden 4 tanesi bu noktaların yanında 2 ve 4 noktalarında da, 2 tanesi sadece süreksiz olan -2 ve 6 noktalarında fonksiyonun türevli olmadığını söylerken, 2 öğrenci ise hiç ilgisiz açıklama yapmıştır. Fonksiyonun 0 noktasında süreksiz olduğunu söyleyen 13 öğrenciden sadece 1 tanesi 0(sıfır) noktasının yanında 2 ve 4 noktalarında, 6 tanesi ise fonksiyon 0 (sıfır) noktasında sürekli olmadığı için sadece bu noktada fonksiyonun türevli olmağını söylemiştir. 4 öğrenci ise boş bırakmıştır. Geri kalan 2 öğrencinin birisi 0 ve 2 noktasında da diğeri de 0 ve 6 noktasında fonksiyonun türevinin olmadığını söylemişlerdir. Fonksiyonun bütün noktalarda sürekli olduğunu söyleyen 7 öğrenciden 3 tanesi fonksiyonun bütün noktalarda sürekli olmasından dolayı her yerde türevli olduğunu söylemişlerdir. Geri kalan 4 öğrenci ise ya boş bırakmış ya da eksik veya yanlış cevaplar vermişlerdir.



Yandaki şekilde $f(x)$ fonksiyonunu grafiği verilmiştir. Fonksiyonun grafiğine $(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen teğet çizilebilir mi? Eğer çizilebilir ise teğetin sayısı hakkında ne diyebiliriz?

Şekil 4.8. Süreklilik ve Türevlenebilme Arasındaki İlişkiyi Anlama Testinde kullanılan 4. soru

Sorusuna araştırmaya katılan 41 öğrenciden sadece 11 tanesi başka bir deyişle %27 si $(x_0, f(x_0))$ noktasından 2 teğet çizilebilir diyerek doğru yapabilmıştır. Geri kalan öğrencilerden 11 tanesi $(x_0, f(x_0))$ noktasından sonsuz tane teğet çizilebileceğini, 8 tanesi hiç teğet çizilemeyeceğini söylerken, 8 öğrenci teğet çizilebileceğini söylemiş fakat sayı vermemiştir. 3 öğrenci ise soruyu cevapsız bırakmıştır. 2 tane teğet çizilebileceğini söyleyen öğrenciler yapılan mülakatta grafikte bir eğri ile bir doğrunun x_0 noktasında birleştiğini ve dolayısıyla biri doğru tarafından diğeri de eğri tarafından olmak üzere 2 teğetin çizilebileceğini ifade etmişlerdir. Hiç teğet çizilemez diyen

öğrenciler gerek yazdıkları cevaplarda gerekse yapılan mülakatta $(x_0, f(x_0))$ noktasında fonksiyonun türevi olmadığı için teğet çizilemeyeceğini ifade etmişlerdir. Yani teğet çizmeye tersten bakmışlardır. Verilen noktada eğer türev yok ise teğet çizilemez diye düşünmüşlerdir. Burada öğrencilerimizin geometride de en temel kavramları anlayamadıkları görülmektedir. Teğet kavramını anlayamayan öğrenciler doğal olarak türevin geometrik yorumunu anlama da zorlanmaktadırlar. Öğrencilerimizin büyük bir kısmı analiz konularıyla ilk kez karşılaşmaktadırlar. Analiz kavramlarının çoğu kompleks zor anlaşılan fikir ve düşüncelerden oluşmaktadır.

Yapılan araştırmanın sonucunda elde edilen bulgular öğrencilerin, fonksiyonun süreklilik ve türevlenebilme gibi çok önemli iki özelliği arasındaki bağlantıyı kurmada zorluklar yaşadığını göstermiştir. Matematik öğretmeni adayı olan öğrencilerin büyük bir kısmının hem cebirsel hem de grafiksel olarak verilen sorularda fonksiyonun süreksiz olduğu noktaları bulamamaları oldukça şaşırtıcıdır. Bu, öğrencilerin analizde bir takım eksikliklere sahip olduklarını ve süreklilik tanımını iyi anlamadıklarını göstermektedir. Öğrencilerin büyük bir kısmı süreklilik için gerekli olan şartları bilemedikleri için sembolik olarak verilen mutlak değer fonksiyonunun ve parçalı fonksiyonun verilen bir noktada da süreksizliğini bulamamışlardır. Bu sonuç Selden et al. (1989) ile Viveros and Sacristan (2002) gibi çalışmaların sonuçları ile örtüşmektedir.

Aynı sorun grafiksel olarak verilen fonksiyonun süreksiz olduğu noktaları bulmada da görülmüştür. Fonksiyonun süreksiz olduğu noktaları bulmada zorlanan öğrenciler doğal olarak fonksiyonun türevinin olmadığı noktaları bulmada da zorlanmışlardır. Özellikle grafiksel olarak verilen soruda öğrencilerin büyük bir çoğunluğu (%68) fonksiyonun süreksiz olduğu -2, 0, 6 noktalarını bulamamışlardır. Bunlara “kapalı bir aralıkta türevli olan fonksiyon süreklidir” şeklindeki analizin temel teoremini “kapalı bir aralıkta sürekli olan fonksiyon türevlidir” şeklinde yanlış anlayan ve yanlış kullanan öğrencilerde eklenince verilen fonksiyonun türevinin olmadığı noktaları bulan öğrenci sayısı oldukça az (%21) olmuştur. Bu sonuçlar Viveros ve Sacristan (2002) nin sonuçları ile benzerdir. Buda yine öğrencilerin sürekliliğin yanında hem türevin tanımını anlamadıklarını hem de fonksiyonun süreklilik ve türevlenebilme gibi iki

önemli özelliği arasındaki ilişkiyi kuramadıklarını ya da yanlış kurduklarını göstermektedir. Bunun nedenlerinden birisi öğrencilerin kompleks olan bu kavramları ilk kez görmeleri, bu kompleks düşünce ve fikirleri kısa bir sürede anlayamamaları ve içselleştirememeleri; bir diğeri de kavramsal öğrenmenin tam olarak gerçekleştirilememesi olabilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Öğrencilerin kavram ve olguları tek başına anlamaları önemli olmasına rağmen kavram ve olgular arasındaki ilişkiyi anlamaları da en az bunlar kadar önemlidir. Fonksiyon kavramı analizin çekirdeğini, özünü oluştururken türevde bu çekirdeği saran kabuklardan birisidir. Dolayısıyla çekirdekle kabuk arasında bir ilişkinin olması son derece olağan bir durumdur. Çok yakın ilişkili bir başka durumda fonksiyonun iki önemli özelliği olan süreklilikle türevlenebilme arasındadır. Yapılan çalışmalar tek tek ele alındığında fonksiyon ve türev kavramlarında öğrencilerin bir takım zorluklara, yanlış anlamalara ve kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür. Yapılan bu çalışmada öğrencilerin süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlamada, bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada bir takım öğrenme zorluklarına sahip oldukları görülmüştür. Bu zorlukların nedenlerini şu şekilde sıralayabiliriz:

- ❖ Ön şartlılık ilişkisine göre ön şart durumundaki bilgilerin eksik olmasından ya da yanlış anlaşılmasından kaynaklanan zorluklar.
- ❖ Çoklu gösterimler arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar.
- ❖ Kısıtlı bir sürede çok kompleks olan yeni fikirleri özümsemede, içselleştirmede karşılaşılan zorluklar.
- ❖ Öğrencilerin kavramsal anlamının yerine işlemsel anlamayı tercih etmelerinden kaynaklanan zorluklar.
- ❖ Öğrencilerin fonksiyon ve türevle ilgili kavram hayallerinin sınırlı olmasından kaynaklanan zorluklar.

Ön şartlılık ilişkisi eğitimde özellikle matematik eğitiminde önemli bir ilkedir. Araştırmaya katılan öğrencilerin birçoğunda önşart durumundaki bilgilerin eksikliğinden ya da yanlış anlaşılmasından kaynaklanan zorluklar görülmüştür. Bir çok öğrenci fonksiyonun süreklilik tanımını bilmedikleri için Şekil.4.7 ile gösterilen sorudaki fonksiyonun süreksiz olduğu noktaları, buna bağlı olarak fonksiyonun türevinin olmadığı noktaları bulamamışlardır. Yine birçok öğrenci süreklilikle türevlenebilme arasındaki ilişkiyi, fonksiyon bir x_0 noktasında sürekli ise

türevlenebilirdir şeklinde yanlış anlayarak soruyu yapmada zorlanmış ve doğru yapamamışlardır. Çizelge.4.2 de görüldüğü gibi bir fonksiyonun limitini alamayan öğrenci yatay asimptotu bulamamış ve soruyu yanlış yapmıştır. Aynı şekilde öğrenciler bir fonksiyonun hangi durumlarda artan, azalan olduğunu, hangi durumda maksimum değerini hangi durumda minimum değerini aldığını bilgi düzeyinde bilmediği yada bilgiyi kullanamadığı için verilen Şekil 4.5. ile gösterilen fonksiyonun davranışını tahmin etmede zorlanmışlardır. Bu sonuç, Ferrini-Mundy ve Graham (1991)’ın “fonksiyon kavramının anlaşılması limit süreklilik ve türev gibi diğer analiz kavramlarının anlaşılmasında etkiye sahiptir”, White and Mitchelmore (1996)’un “değişken kavramı iyi anlaşılmadan analiz dersi başarılamaz”, Dias (2000)’ın “cebirsal notasyonların eksik anlaşılması, sürekliliğin tam olarak anlaşılabilmesi, öğrencilerin analiz dersinde zorlanmalarına neden olmaktadır” şeklindeki araştırma sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir.

Öğrencilerin çoklu gösterimler arasındaki ilişkiyi anlamada bir takım zorluklara sahip oldukları görülmüştür. Fonksiyon ya da türev gibi kavramların bir tek gösterimi olmayıp, çok farklı gösterimleri vardır. Genellikle geleneksel analiz derslerinde sembolik (formül) kısmen de geometriksel gösterimler üzerinde yoğunlaşılır. Bu yoğunlaşma kavramın hem kavramsal öğrenilmesine hem de öğrencilerin çoklu gösterimler arasındaki ilişkiyi anlamalarına engel olmaktadır. Öğrencilerin yarıdan fazlası çoklu gösterimler arasındaki ilişkiyi anlamada zorlanmışlardır. Özellikle analitiksel gösterimden grafiksel gösterime, grafiksel gösterimden analitiksel gösterime (Şekil 4.3, Şekil 4.5, Şekil 4.7 ile gösterilen sorularda), grafiksel gösterimden grafiksel gösterime (Şekil 4.6, Çizelge 4.7, Çizelge.4.8) dönüşümlerde büyük zorluklar yaşamışlardır. Bu sonuç, Tall ve Vinner (1981), Vinner ve Dreyfus (1989), Baker vd (2000), Aspinwall ve Miler (2001), Berry and Nyman (2003) gibi araştırma sonuçları ile örtüşmektedir.

Analiz içinde yer alan kavramların kompleks olmasından dolayı kavramların kendisinden kaynaklanan zorluklar vardır. Bu kavramların birçoğuyla öğrenciler üniversitenin birinci sınıfında karşılaşılır. Doğal olarak öğrenciler kısa bir sürede ilk

kez karşılaştıkları bu kompleks kavramları anlamada, özümsemelerde ve içselleştirmede zorluklar yaşamaktadırlar. Örneğin öğrencilerin çoğu fonksiyonun büyüklüğünün ikinci türevle ilgili olduğunu bilmelerine rağmen ikinci türev pozitif olduğunda yukarı büyü mü?, yoksa aşağı büyü mü? olduğunu bilememişler ya da karıştırmışlardır.

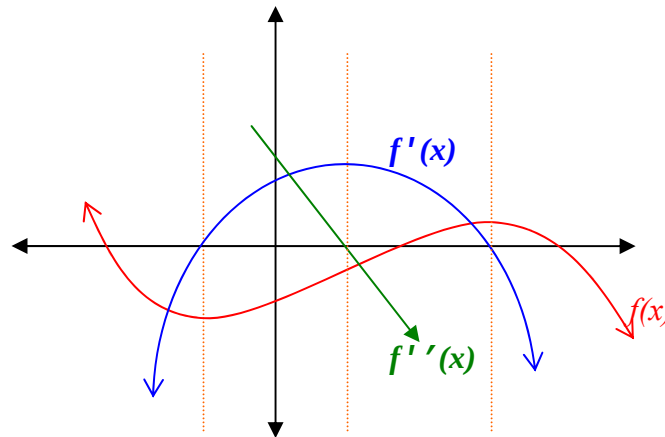
Öğrencilerin bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişki hakkındaki kavram bilgileri sınırlı olup öğrenciler buna göre işlem yapmaktalar ve bu da öğrencilerin zorlanmalarına neden olmaktadır. Öğrencilerin kavramla ilgili öğrendikleri bilgiler adeta bir yap-boz parçası gibi ayrı ayrı olup öğrenciler bu parçaları birleştirmede zorluk yaşamaktadırlar. Örneğin “birinci türevi sıfır yapan değer ekstremum noktasıdır”, “minimum ya da maksimum değerini alması için o noktada birinci türev sıfırdır” şeklindeki düşünceler öğrenciler arasında oldukça yaygın bir düşünce olup $y = x^3$ fonksiyonun türevini 0 yapan değer bir ekstremum olmadığını ya da grafiksel olarak verilen bir fonksiyondaki keskin köşelerin birer maksimum ya da minimum noktası olduğunu görememişlerdir. Ayrıca türev denildiğinde öğrencilerin zihninde, sadece türevin ya sembolik, ya geometriksel ya da nümeriksel tanımı oluşmaktadır. Halbuki bunlar türevin farklı gösterimleridir. Bu gösterimlerin sadece birini öğrenen öğrenciler ona göre işlem yapmaktadırlar. Buda öğrencilerin türev kavramını ayrıntılı bir şekilde öğrenmesine engellemektedir.

Öğrenciler genel olarak okula başladığı ilk yıllardan itibaren kavramsal anlamadan ziyade işlemsel anlama üzerinde yoğunlaşırlar. Bu yoğunlaşma üniversiteye hazırlık döneminde zirveye ulaşır. Kazanılan bu alışkanlık üniversite öğreniminin ilk dönemlerinde öğrencilerin zorlanmalarına neden olur. Çünkü kazanılan bir alışkanlığın unutulması oldukça zordur. İşlemsel öğrenme ile kavramsal öğrenmeyi bir fındığa benzetebiliriz. Fındıkta önce dış kabuk oluşur daha sonrada içi gelişir. Fındığın kalitesi dış kabuğun görüntüsüyle tam olarak anlaşılamaz bunun yanı sıra dış kabuk küçük ya da eğri bükür ise içinin kaliteli olması da beklenemez. Fındığın kalitesini anlamak için kabuğu kırıp içine bakmak gerekir. Öğrenmede de işlemsel öğrenmeyi dış kabuğa kavramsal öğrenmeyi de içine benzetebiliriz. Kavramsal öğrenmenin oluşması için işlemsel öğrenmenin mutlaka olması gerekir fakat öğrencilerin kavramla ilgili sorulan

soruları işlemsel olarak yapması da öğrencilerin o kavramı anladığını göstermez. Araştırmaya katılan öğrencilerin hemen hemen tamamına yakını işlemsel olarak verilen soruları yapmasına karşın büyük bir çoğunluğu işlem yaptıkları kavramın tanımını bilememişler ya da kavramsal anlamaya dayalı soruları yapamamışlardır.

Öğrencilerin bir fonksiyonla türevi ve süreklilikle türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlamada bir takım zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Bu zorlukların giderilebilmesi için biz eğitimcilere ve öğrencilere görevler düşmektedir.

Analiz dersi, lisans ve lisansüstündeki derslerinin temelini oluşturduğundan dolayı öncelikle analiz dersini anlatan öğretim elemanları, analiz dersinde maksimum başarıyı hedeflemelidirler. Bunun içinde derslerde mümkün olduğunca çok fazla yöntem kullanılmalıdır. Matematiğin her konusunda olduğu gibi fonksiyon ve türev konularında işlemsel öğrenmenin yanında kavramsal öğrenmeye, kavramlar arasındaki ilişkilere önem verilmelidir. Fonksiyon ve türev arasındaki ilişkiyi öncelikle soyut olan teoremlerle anlatmak yerine sembolik olarak bir fonksiyon alınıp bunun türevleri alınarak aşağıdaki gibi aynı düzlemde fonksiyonun kendisinin, birinci ve ikinci türevlerinin grafikleri öğrencilerle beraber çizilerek grafikler arasındaki ilişkiler öğrencilerin kendilerine buldurulmalıdır.



Şekil.5.1 $f(x)$, $f'(x)$ ve $f''(x)$ arasındaki ilişki

Fonksiyon ve türev kavramının çeşitli gösterim şekilleri olduğundan bu çoklu gösterimlerin her biri öğrencilere anlatılmalı ve bu gösterimlerin sadece biri üzerinde durulmamalıdır. Her bir gösterim şeklinin birbiriyle olan ilişkileri öğrencilere verilmelidir. Gerek fonksiyon ve türev kavramlarının çoklu gösterimleri arasındaki ilişkinin gerekse bir fonksiyonla türevi arasındaki ilişkinin daha iyi anlaşılması için piyasada ve internette hazırlanmış animasyonlar ve oyunlar bulunmaktadır.

<http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/diff1/diff1.html#ableitung>,

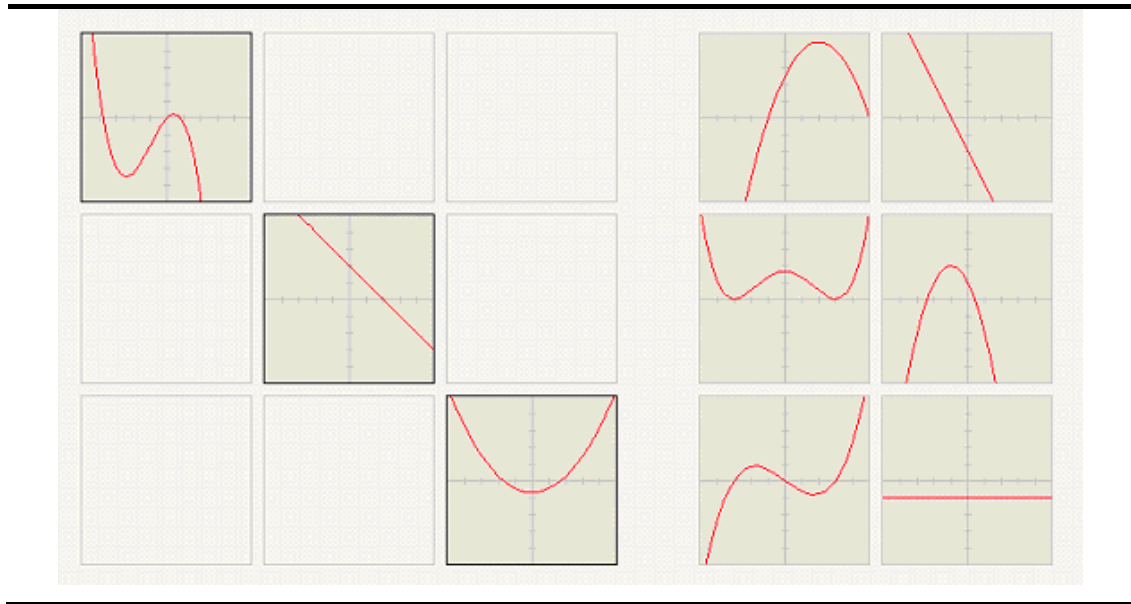
<http://sciris.shu.edu/thinklets/Math/Calculus/IRA/Diff.html>,

<http://www.univie.ac.at/future.media/moe/tests/fun1/erkennen.html>,

<http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/fun1/fun1.html#funktion>,

Dersin belirli bölümlerinde bu materyaller kullanılabilir.

Çizelge 5.1. $f(x)$, $f'(x)$ ve $f''(x)$ arasındaki ilişki ile ilgili bilgisayar oyunu



Analizin doğasından kaynaklanan bir takım zorlukların varlığı açıktır. Bu zor kavramları öğrencilerin öğrenebilmesi için günü gününe çalışması gerekmektedir. Fakat öğrencilerimizin çoğunluğunda günü gününe çalışma alışkanlığı maalesef yoktur. Öğrencilerimiz genellikle günü gününe çalışma yerine sadece sınav akşamlarında ya da sınavlara birkaç gün kala çalışmaya başlarlar bu da doğal olarak zor olan analiz

kavramlarının anlaşılmasını engellemektedir. Öğrencilere ödev ve projeler vererek düzenli çalışma alışkanlığı kazandırılabilir. Verilen ödev ve projeler mümkün olduğunca titizlikle incelenmeli, vizelerden birinin yerine sayılmalıdır. Öğrencinin ödevleri elyazısıyla yazmaları istenmeli. Aksi taktirde birileri tarafından bilgisayarda yazılan ödevler öğrenciye ekstra yükün dışında bir katkı sağlamayacağı açıktır. Dönütün önemli olduğu hem öğrenci hem de öğretmen tarafından bilinmelidir.

Giriş bölümünde açıklandığı gibi 1998 yılında ÖSS de yapılan değişiklikle analiz konularının ÖSS' nin içeriğinden çıkarılması ile bu konular lisede okutulmayıp öğrencilerin büyük bir kısmı bu konularla ilk olarak üniversite birinci sınıfta karşılaşmaktadırlar. Bundan dolayı öğrenciler bir takım zorluklar yaşamaktadırlar. 2006 yılından itibaren analiz konularının ÖSS içeriğinde yer alması yönünde değişiklik yapılmıştır. Yapılan değişiklik ilk anda olumlu düşünülebilir. Fakat bu değişikliğin ne ve nasıl olduğu hakkında elimizde kesin bir bilgi yoktur. Bunun içinde 2006 ÖSS'ni ve daha sonraki dönemlerdeki öğrencilerin performanslarını beklememiz gerekecektir. Fakat bilinen bir gerçek şudur ki; lisede analiz konularını okumayan öğrenciler üniversiteye geldiklerinde bir takım zorluklar yaşamaktadırlar. Bunun içinde analiz konularının yüzeysel de olsa lisede sembolik, nümeriksel ve geometriksel olarak okutulmasında yarar vardır.

Özellikle öğretmen adaylarının gelecekte öğretecekleri konular hakkında en küçük bir zorluk yaşamaları gelecek kuşaklarda çoğu öğrencinin zorluk yaşamasına ve kavramları zor anlamasına neden olacaktır. Bunun için mümkün olduğunca öğretmen adaylarının zorlandıkları kavramlar ve zorlukların nedenleri tespit edilmeye çalışılmalıdır.

KAYNAKLAR

- Altun, M., 1998. Matematik Öğretimi. Erkam Matbaacılık. Bursa
- Amit, M. and Vinner, S., 1990. Some misconceptions in calculus: Anecdotes or the tip of the iceberg? In George Booker, Paul Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 3-10). Oaxtepec, Mexico: CINVESTAV.
- Artigue, M., 1991. Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (167-198). Dordrecht: Kluwer
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., and Schwingendorf, K. E., 1997. The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 399-431.
- Aspinwall, L. and Miller, D., 2001. Diagnosing conflict factors in calculus through students' writings one teacher's reflections *Journal of Mathematical Behavior* 20 89-107
- Aspinwall, L. and Shaw, K.L., 2002. Representations in Calculus: Two Contrasting Cases. *Mathematics Teachers* Vol.95, No.6, 434-439
- Aspinwall, L., Shaw, K., and Presmeg, N., 1997. Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 301-317.
- Aspinwal, L., Shaw, K.L., Edwards, B. and Graham, K., 2002. When Visualizing Is a barrier to Mathematical Understanding. *Mathematics Teacher*; Vol. 95 Issue 9, p714, 417
- Baker, B., Cooley, L., and Trigueros, M., 2000. A Calculus Graphing Schema, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 31(5), p. 557-578.
- Balçı, M., 1997. Matematik Analiz Cilt-1. Ertem Basım Yayın dağıtım Ltd. Şti. Ankara
- Barnes, M., 1995. An Intuitive Approach to Calculus. 2004 Ekimde http://hsc.csu.edu.au/maths/teacher_resources/2384/prof_reading/journals/barnes/M_Barnes_Nov_95.html sitesinden alınmıştır.
- Berry, J. S. and Nyman M. A., 2003. Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior* 22,481-497
- Beydoğan, H. Ö., 1998. Okullarda Ölçme ve Değerlendirme, baskı, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Erzurum
- Bezuindenhout, J., 1998. First-year university students' understanding of rate change. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*. Vol. 29, No.3, 389-399
- Bowers, D., 1999. Animating web pages with the TI-92. Retrieved July, 2004, from <http://website.lineone.net/~davidbowers>
- Bressound, D. M., 1992. Why do teaching calculus? *American Mathematical Monthly* V.99 615-617
- Burton, M., 1989. The Effect of Prior Calculus Experience in "Introductory" College Calculus. *American Mathematical Monthly*, 96, 350-354.
- Clement, J., 1985. Misconception in graphing. In L. Streefland (Ed.), *proceeding of the ninth psychology of mathematics education international convergence*, Vol.1 369-375. Utrecht, the Netherlands: international group for the psychology of mathematics education
- Cordero, F., Hernandez, D. and Oktaç, A., 1997. On Understanding of Relations Between Function and Derivative. *Proceeding of the annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (19th Bloomington-Normal, IL, October18-21). Volume 1

- Cottrill, J. F., 1999. Students' Understanding Of The Concept Of Chain Rule In First Year Calculus And The Relation To Their Understanding Of Composition Of Functions. Unpublished Doctoral Dissertation, Purdue University
- Çepni, S., 2001. Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş. Erol Ofset Matbaacılık ve Ambalaj Sanayi, Trabzon .
- Davis, B. 2000. Why teach mathematics to all students? Canadian Mathematics Education Study Group. Annual meeting (24th, Montreal, Quebec, Canada, May 26-30) 167-171
- Dawson, S., 2000. Why teach math to all students? Canadian Mathematics Education Study Group. Annual meeting (24th, Montreal, Quebec, Canada, May 26-30)
- Dias, A. L. B. 2000. Overcoming Algebraic and Graphic Difficulties. Proceeding of the international conference on adults learning mathematics (ALM-7) (7th, July 6-8 Medford, MA. For full proceeding, see SE 066-771.P. 192-200
- Doğanay, A. ve Karip, E., 2005. Öğretimde Planlama ve Değerlendirme. Pegem A Yayıncılık, Ankara.
- Dreyfus, T. and Eisenberg, T., 1986. On visual versus analytical thinking in mathematics, Proceedings of PME 10, London, 152–158.
- Dreyfus, T. and Eisenberg, T., 1991. On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.) Visualization in Teaching and Learning Mathematics, MAA Notes No. 19, 25–37.
- Dreyfus, T., and Eisenberg, T., 1983. The Function Concept in College Students: Linearity, Smoothness, and Periodicity, Unpublished manuscript.
- Dubinsky, E., and Harel, G. (Eds.), 1992, The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (pp.215-232), United States: Mathematical Association of America.
- Edwards, C.H., 1979, The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, New York.
- Erdoğan, İ., 1998. SPSS Kullanım Örnekleriyle Araştırma Dizaynı ve İstatistik Yöntemleri (yayınevi yok) Ankara.
- Fauvel, J. (ed.), 1990. History in the Mathematics Classroom: The IREM Papers, vol. 1, The Mathematical Association, London.
- Fauvel, J. (ed.), 1991. The use of history in teaching mathematics, Special Issue of For the Learning of Mathematics 11(2).
- Ferrini-Mundy, J. and Gaudard, M., 1992. Secondary school calculus: preparation or pitfall in the study of college calculus? Journal for Research in Mathematics Education, 23, 57-69.
- Ferrini-Mundy, J., and Guether-Graham, K., 1991. An overview of the calculus reform effort: issues for learning, teaching and curriculum development. American Mathematical Monthly, 98(7), 627–635.
- Ferrini-Mundy, J., and Lauten, D., 1994. Learning about calculus learning The Mathematics teacher; Feb ; 87, 2; Proquest Education Journals pg. 115-121
- Ferrini-Mundy, J. and Graham, Karen G., 1994. Research in calculus learning: Understanding limits, derivatives, and integrals. In James J. Kaput, & Ed Dubinsky (Eds.), Research issue's in undergraduate mathematics learning, MAA notes 33 (pp. 3 145). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Gomez, C.vd. 1999. Student's Understanding of Rate of Change: The Use of Different Representation. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (Montreal, Canada, April 19-23)
- Göker, L., 1997. Matematik Tarihi ve Türk-İslam Matematikçilerinin Yeri. Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları. Milli Eğitim Basınevi. İstanbul.
- Grabiner, J.W., 1983a, 'Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus', American Mathematical Monthly 90, 185–194.
- Grabiner, J.W., 1983b, 'The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass', Mathematics Magazine 56, 195–206.

- Hauger, G. S., 1995. Rate of change knowledge in high school and college students. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco (April).
- Hauger, G. S., 1997. Growth of knowledge of rate in four precalculus students. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago (March 24-28).
- Heid, Kathleen M., 1988. Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1) 3-25.
- Hughes-Hallett, D., Gleason, A., Flath, D., Gordon, S., Lomen, D., Lovelock, D., McCallum, W., Osgood, B., Pasquale, A., Tecosky-Feldman, J., Thrash, J., Thrash, K., & Tucker, T., 1994. *Calculus*. New York: Wiley.
- <http://www.und.edu/dept/math/history/function.htm>
- Işık, A., 2002. *Lineer Cebir* (3. baskı) Atatürk Üniversitesi Yayınları:885 Erzurum
- Işık, A., ve Bekdemir, M., 1998. Matematğin Doğası ve Eğitimdeki Yeri, *Çağdaş Eğitim Dergisi*, Sayı 245, 19-22.
- İşleyen, T., 2005. Fonksiyon kavramı, Tarihsel gelişimi, Öğretimi ve Kavram Yanılgıları. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- James, M. D., 2004 Should Calculus Be Taught In High School and If So How Should It Be Taught? 2004 ekim de <http://jwilson.coe.uga.edu/EMT705/EMT705.James.html> sitesinden alınmıştır.
- Janvier, C., 1978. The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments. Unpublished doctoral dissertation, university of Nottingham, Shell center for mathematical education, Nottingham, England.
- Jockusch, E. and McLoughlin, P., 1990. Building key concepts for calculus in grades 7-12. *Mathematics Teacher*, 83, 532-540.
- Kadioğlu, E., Kamali, M., 2001. *Genel Matematik*, (3. Baskı), Bakanlar Matbaacılık, Erzurum.
- Kalchman, M., 1997. Teaching Functions In the Elementary Years: A Developmental Approach, (Unpublished Master Thesis), University of Tronto, p.1.
- Kalchman, M., 2001. Using A Neo-Piagetian Framework for Learning and Teaching Mathematical Functions, (Unpublished Doctoral Thesis), University of Toronto, P.7.
- Kaput, J. J., 1998. Representations, inscriptions, descriptions and learning: a kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, 17, 265-281.
- Karasar, N., 2000. *Bilimsel Araştırma Yöntemi*, 10. baskı Nobel Yayın Dağıtım, Ankara
- Katz, V.J. (ed.), 2000. *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Kendal, M., 2001. Teaching and learning introductory differential Calculus with a computer algebra system. (Unpublished Doctoral Dissertation) Department of Science and Mathematics Education The University of Melbourne
- Kleiner, I., 1989. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal* Volume 20 Number 4, 282-300
- Kleiner, I., 2001. History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics* 48: 137-174,.
- Kline, M., 1972. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford: Oxford University Press.
- Knuth, E., 2000. Understanding Connections between Equations and Graphs. *Mathematics Teacher*, 93, 48-53.

- Kowalezyk, R. E. ve Hausknecht, A. O., 1994. Our Experiences with Using Visualization Tools in Teaching Calculus. Paper presented at the annual conference of the American mathematical association of two-year colleges (Tulsa, OK, November 3-4).
- Krutetskii, V. A., 1976. The Psychology of Mathematical Abilities in School Children. Chicago: University of Chicago Press,
- Leinbach, C., 1997. The curriculum in the age of CAS. In: J. Berry, & J. Monaghan (Eds.), The state of computer algebra in mathematics education. Bromley, England: Chartwell-Bratt.
- Leinhardt, G.; Zaslavsky, O.; Stein, M. K., 1990. Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. Review of Educational Research; Spring; 60, 1-64
- Luzin, N., 1998. The Evolution of...Function: Part I. The American Mathematical Monthly, Vol. 105 (1), 59-67.
- Mann, R. R., 2000. The ADAGE Approach to Mathematics and the Concept of Function, (Unpublished Doctoral Dissertation), p.5, The University of Nebraska, Lincoln
- Marrongelle, K. A., 2004. How Students Use Physics to Reason about Calculus Tasks. School Science and Mathematics, Volume 104(6), 258-272
- May, K. O. 1974, 'History in the mathematics curriculum', American Mathematical Monthly 81, 899-901.
- McDermott, L., Rosenquist, M. and van Zee, E., 1987. Students' difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. American Journal of Physics, 55(6), 503-513
- Mcmillan, J., H., Schumacher, S., 2001. Research in Education, Fifth Edition, Addison Wesley Longman, US, p.398.
- Monk, G. S., 1989. "A framework for Describing Student Understanding of Function". Paper presented at the annual Meeting of the American educational research Association. San Francisco.
- Monk, G. S., 1987. Students' Understanding of Functions in Calculus Courses, Unpublished paper.
- Monk, G. S., 1990. Students' understanding of a function given by a physical model. Unpublished manuscript, University of Washington.
- Monna, A. F., 1972. The concept of the function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussion between Baire, Borel and Lebesgue. Archive for history Exact Science, 9, 57-84.
- Mundy, J., 1984. Analysis Of Errors Of First Year Calculus Students. In Theory, Research and Practice in Mathematical Education, A. Bell, B. Love & J. Kilpatrick (Eds.) Proceedings of ICME 5, Shell Centre, Nottingham, UK, 170-172.
- Murphy, L. D., 2004) Preparing the Ground and Planting the Seeds: Initial Knowledge States and Early Concept Development in Introductory Calculus Students. Ağustos 2004 te <http://www.mste.uiuc.edu/users/Murphy/Papers/RateOfChangeA.html> sitesinden alınmıştır.
- National Council of Teachers of Mathematics., 1989. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
- Nemirovsky, R., and Rubin, A., 1992. Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative. Cambridge, MA: TERC.
- Ocak, R., 2001. Reel Analiz, (4. Baskı), Atatürk Üniversitesi K. K. Eğitim Fakültesi Yayınları No: 17, Erzurum, s.81.
- Orton, A., 1983a. Students' understanding of integration. Educational Studies in Mathematics, 14, 1-18.

- Orton, A., 1983b. Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250
- Orton, A., 1985. When should we teach calculus? *Mathematics in School*, 14, 11-15.
- Pence, B. J., 1995. Relationships between understandings of operations and success in beginning calculus. Paper presented at the Annual Meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (17th, Columbus, Ohio, October 21-24).
- Pimm, D., 1982. 'Why the history and philosophy of mathematics should not be rated X', *For the Learning of Mathematics* 3, 12-15.
- Ponte, J. P., 1990. The History of The Concept of Function and Some Educational Implications *The Portuguese Association of Teachers of Mathematics*, Number. 15, pp. 3-9.
- Robinson, P. F., 1990. *Guidelines for Teaching Calculus*. Publications Distributions Office, Texas Education Agency, 1701 North Congress Avenue, Austin TX 787001
- Roddick, C. D., 2001. Differences in learning outcomes: Calculus & mathematica vs. traditional cal. *Primus : Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*; Jun; 11, 2; ProQuest Education Journals pg. 161-184
- Sabella, M. S. and Redis, E. F., 2004. Student Understanding of Topics in Calculus *eyyül 2004 te* <http://www.physics.umd.edu/rgroups/ripe/perg/plinks/calc.htm> web sitesinden alınmıştır.
- Schwabach, E. M. and Dosemagen, D. M., 2000. Developing student understanding: contextualizing calculus concepts. *School Science and Mathematics volume 100(2) February* P.90-98.
- Selden, J., Mason, A., and Selden, A., 1989. Can average calculus students solve non routine problems?, *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 45-50.
- Selden, A., and Selden, J. 1992. Research Perspectives on Conceptions of Function: Summary and Overview. In G. Harel and e. Dubinsky (Eds.), *the concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp.1-16). West LaFayette, IN: Mathematical Association of America
- Sfard, A., 1987. Two conceptions of mathematical notions, operational and structural. In A. Bor-has (Ed.). *Proceedings of the I I th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 162-169). Montreal: University of Montreal
- Sfard, A., 1992. Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification the case of function. In Guershon Harel & Ed Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA notes 25 (pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Siu, M., K., 1994. Concept of Function-Its History and Teaching, In Swetz, F., et al. (Ed.), *Learn From the Master*, Published By: The American Association of Mathematics, p.105-121., Harrisburg, PA
- Sönmez, V., 1994. *Program geliştirmede öğretmen kitabı*. Anı Yayıncılık Şafak Matbaacılık San. Ltd. Şti. 7. Baskı. Ankara
- Stein, K. S. and Barcellos, A., 1996. *Calculus ve Analitik Geometri 1. cilt* (Türkçesi Kuryel, B. ve Balkan, F.) Alemdar ofset , İstanbul
- Tall, D. and Vinner, S., 1981. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tall, D., 1989. Different cognitive obstacles in a technical paradigm or A reaction to: "Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra". In Sigrid Wagner & Carolyn Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Volume 4, 87-92. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

- Tall, D., 1992. Plenary Address. In M. Artigue & G. Eryvynck (Eds), Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, pp. 13-28. ICME-7, Québec, Canada.
- Thompson, P. W., 1994. Students, functions and the undergraduate curriculum. Research in Collegiate Mathematics Education, I, 21-44.
- Tucker, A. C. and Leitzel, J. R. C. (Eds.), 1994. Assessing calculus reform efforts. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Tufte, F. W., 1989. Revision in calculus instruction: Suggestions from cognitive science. In John Malone, Hugh Burkhardt & Christine Keitel (Eds.), The mathematics curriculum: Towards the year 2000. Content, technology, teachers, dynamics (pp. 155- 161). Perth, Western Australia: The Science and Mathematics Education Centre, Curtin University of Technology
- Turgut, M. F., 1990. Eğitimde Ölçme ve Değerlendirme, 7. baskı, Esat Cad. 55/9 Küçükesat, Ankara
- Turner, E. E.; Wilhelm, J. and Confrey, J., 2000. Exploring rate of change through technology with elementary students. Paper presented at the annual meeting of the american educational research association (New Orleans, LA, April 24-28)
- Vinner, S., 1991. "The role of definitions in the teaching and learning of mathematics". In Advanced Mathematical Thinking, Edited by David Tall, 65-85. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Vinner, S., and Dreyfus, T., 1989. Images and Definitions for the Concept of a Function, Journal for Research in Mathematics Education, 20 (4) 356-366.
- Viveros, K. and Sacristan, C., 2002. College students' conceptual links between the continuity and the differentiability of a function. Proceeding of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education (24th Athens, Georgia, October 26-29) Volume 1-4 Pages 350-360
- White, P. and Mitchelmore, M. 1996. Conceptual knowledge in introductory calculus. Journal for Research in Mathematics Education, 27, 79-95.
- Yauschkevitch, A., 1976. The concept of the function up to the middle of 19th century. Archive for history Exact Science, 16, 36-85.
- Yerushalmy, m., 2000. Problem solving strategies and mathematical resources: a longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra, educational studies in mathematics 43, p.125-147.
- Yıldırım, A., Şimşek, H., 2005. Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri. Seçkin Yayınları, 5. Baskı, Ankara.
- Zhang, B., 2003. Using student-centered researching strategies in calculus. The China Papers July, 100-103

EKLER**Ek-1****Adı-Soyadı:****No:****İŞLEMSEL BECERİ TESTİ**

Değerli öğretmen adayları; bu sorular sizin fonksiyonlardaki ve türevdeki işlemsel becerinizi ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. Vermiş olduğunuz cevaplar sadece araştırma amaçlı kullanılacak ve üçüncü bir kişiyle paylaşılmayacaktır. Lütfen soruları dikkatlice okuyarak cevap veriniz.

1. $f : R \rightarrow R$ $f(x) = 2x - 1$ ve $g : R - \{-2\} \rightarrow R - \{1\}$ $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$ ise $f \circ g(x)$ fonksiyonunu bulunuz
2. $f(x) = \sqrt{x-2}$ fonksiyonunun tanım ve değer kümelerini bulunuz.
3. $f(x) = 3x + 2$ ise $f(x)$ ' in tanımlı olduğu aralıkta $f^{-1}(x)$ ' i bulunuz.
4. $f(x) = x^3 \cdot \cos x$ ise $f(x)$ fonksiyonun türevini $f'(x)$ bulunuz.
5. $f(x) = (x^2 + 3x)^2$ ise $f(x)$ fonksiyonun türevini $f'(x)$ bulunuz.
6. $f(x) = \frac{3x}{2x-1}$ ise $f(x)$ fonksiyonun türevini $f'(x)$ bulunuz.
7. Türev nedir? Bir fonksiyonun türevi niçin alınır? Şu ana kadar edindiğiniz deneyimlerinize dayanarak açıklayınız.

Ek-2

ÖN BİLGİ TESTİ

Adı-Soyadı:

Sınıfı:

Değerli öğretmen adayları; bu sorular sizin fonksiyonlarla türevleri arasındaki ilişkiyi anlamaya ilgili sahip olduğunuz bilgiyi ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. Vermiş olduğunuz cevaplar sadece araştırma amaçlı kullanılacak ve üçüncü bir kişiyle paylaşılmayacaktır. Aşağıdaki ifadelerin her birini dikkatlice okuyarak doğru ise ifadenin başına “D”, yanlış ise “Y” koyarak doğru bir örnek veriniz.

- Tanım kümesinin bir alt aralığında $x_1 < x_2$ şartını sağlayan x_1, x_2 için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyor ise f fonksiyonu bu aralıkta artan bir fonksiyondur.
- $f(x)$ fonksiyonu c noktasında bir ekstremuma sahip ve bu noktada türevli ise $f'(c) = 0$ dır.
- Eğer $f''(c) = 0$ ise $(c, f(c))$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktasıdır.
- $f''(c) < 0$ ise f fonksiyonu $(c, f(c))$ noktasında aşağı konkavdır.
- Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında sürekli ise bu noktada türevlenebilir.
- $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise $f(c)$ bir yerel minimum noktasıdır.
- $f'(c) > 0$ ise $f(x)$ fonksiyonunun eğrisi c civarında artandır.
- Eğer $(c, f(c))$ bir minimum noktası ve $f''(c)$ var ise $f''(c) = 0$ dır.
- $f''(c) > 0$ ise f fonksiyonu $(c, f(c))$ noktasında yukarı konkavdır.
- $f(x)$ bir aralıkta türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu aralıkta $f'(x)$ aratan ise $f(x)$ fonksiyonu yukarı bükey azalan ise aşağı bükeydir.
- Yukarı bükeylikten aşağı bükeyliğe veya aşağı bükeylikten yukarı bükeyliğe geçiş yapılan noktaya fonksiyonun büküm noktası denir.
- $f'(x) > 0$ ise $f(x)$ o aralıkta azalandır.
- Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında bir türeve sahip ise $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında süreklidir.

Ek-3

**BİR FONKSİYONLA ONUN TÜREVİ ARASINDAKİ İLİŞKİYİ ANLAMA
TESTİ**

Adı- soyadı:

Sınıfı:

Değerli öğretmen adayları; üç bölümden oluşan bu test fonksiyonlarla türevleri arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorlukları belirlemek amacıyla hazırlanmıştır. Vermiş olduğunuz cevaplar sadece araştırma amaçlı kullanılacak ve üçüncü bir kişiyle paylaşılmayacaktır. Lütfen soruları dikkatlice okuyarak cevap veriniz.

I. Bölüm

1. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ fonksiyonu için;

1. Fonksiyonun tanım kümesini bulunuz
2. Ekseni kestiği noktaları bulunuz
3. Varsa asimptotlarını bulunuz
4. Varsa ekstremum (maksimum ve minimum) noktalarını bulunuz
5. Fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulunuz.
6. Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.
7. Var ise fonksiyonun büküm noktalarını bulunuz, fonksiyonun aşağı ve yukarı konkav olduğu aralıkları tespit ediniz.
8. Yukarıda bulduğunuz değerleri tablolaştırınız.
9. Tablodaki değerleri kullanarak fonksiyonun grafiğini çiziniz.

2. Türevlenebilen bir fonksiyon için aşağıdaki bilgilere sahip olduğumuzu varsayalım: $x < 1$ için $f'(x) < 0$ ve $x > 1$ için $f'(x) > 0$. Ayrıca $f(0) = 3$, $f(1) = 1$ ve $f(2) = 2$

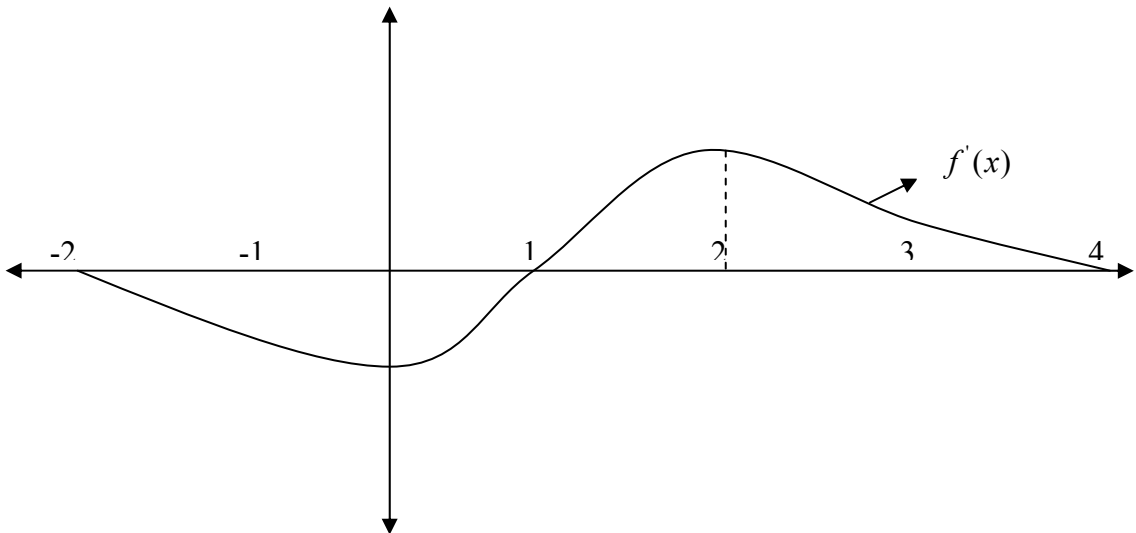
- a) $[0, 2]$ aralığında $f(x)$ 'in minimum değeri nedir? Neden? Açıklayınız.
- b) $[0, 2]$ aralığında $f(x)$ 'in maksimum değeri nedir? Neden? Açıklayınız.

3. f , $[-4, 4]$ aralığında sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $x = -2$ noktasında maksimuma, $x = 4$ noktasında minimuma ve $x = 2$ noktasında da büküm noktasına sahip ise aşağıdaki ifadelerden hangileri doğru hangileri yanlıştır? Açıklayınız.

- a) $f'(-2) = 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:
- b) $f'(2) = 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:
- c) $f'(4) = 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:
- d) $f'(0) < 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:
- e) $f''(-2) > 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:
- f) $f''(2) = 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:
- g) $f''(4) = 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:
- h) $f''(-2) < 0$ (doğrudur, yanlıştır) çünkü:

II. Bölüm

A) Aşağıdaki grafik $f'(x)$ ' e (fonksiyonun türevine) aittir. Bu grafiği kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.



1. $f(1)$ değeri (pozitifdir, negatifdir,sıfır, hesaplanamaz)
çünkü

.....

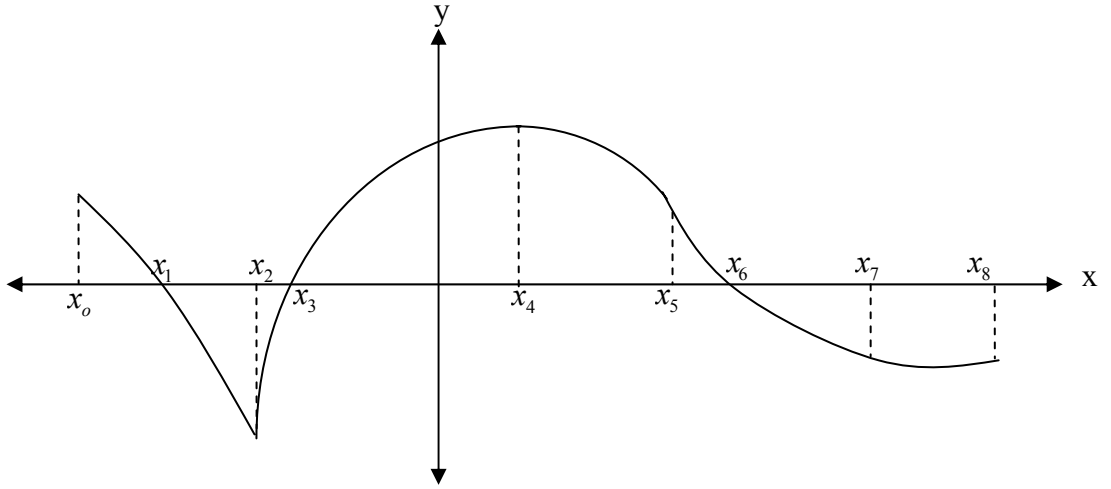
2. $(-2,1)$ aralığında $f'(x)$ in almış olduğu her değer dır (pozitifdir, negatifdir, sıfır). $f'(x)$ x noktasındaki teğetin eğimini verdiği için fonksiyonu teğetin eğimi dır (pozitifdir, negatifdir,sıfır). Bundan dolayı f fonksiyonu $(-2,1)$ aralığında dir (artandır, azalandır, belirlenmez). Çünkü

3. $(1,4)$ aralığındaki her x değeri için $f'(x)$ dır (pozitifdir, negatifdir, sıfır). $f'(x)$ x noktasındaki teğetin eğimini verdiği için fonksiyonu teğetin eğimi..... ..dır (pozitifdir, negatifdir,sıfır). Bundan dolayı f fonksiyonu $(1,4)$ aralığında dir (artandır, azalandır, belirlenmez). Çünkü.....

4. $f'(1) = 0$ olduğundan $x=1$ noktasında f nin grafiğinin eğimi dir (pozitifdir, negatifdir, sıfır). Çünkü

5. Dördüncü soruya verilen cevaba $f(1)=2$ bilgisini de ilave ederek $x=1$ noktasının civarındaki çok küçük bir aralıkta f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

B)

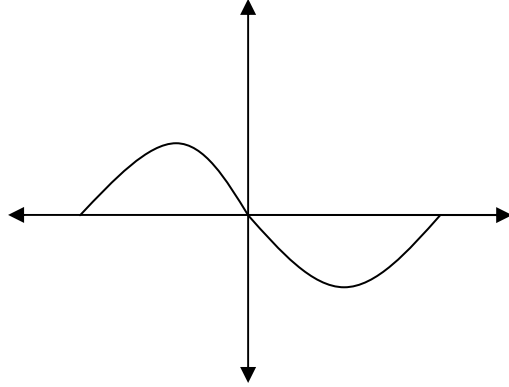


Aşağıdaki soruları $y = f(x)$ fonksiyonun grafiğinden faydalanarak yapınız. **(Verilen grafik $y = f(x)$ fonksiyonun kendisine ait)**

1. $f(x)$ hangi aralıklarda artandır? Neden? Açıklayınız
2. Hangi aralıklarda birinci türev pozitifdir? Yani $f'(x) > 0$? Neden? açıklayınız.
3. Hangi noktalarda birinci türev sıfırdır? $f'(x) = 0$ Neden? Açıklayınız
4. Hangi aralıklarda ikinci türev pozitifdir? $f''(x) > 0$? Neden? Açıklayınız
5. $f(x)$ bir büküm noktasına sahip midir? Neden? Açıklayınız
6. $f'(x)$ nerelerde artandır? Neden? Açıklayınız
7. $f(x)$ lokal minimum noktasına sahip midir? Neden? açıklayınız

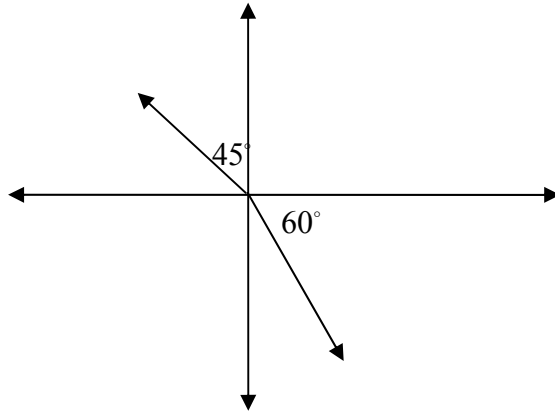
III. bölüm

1)

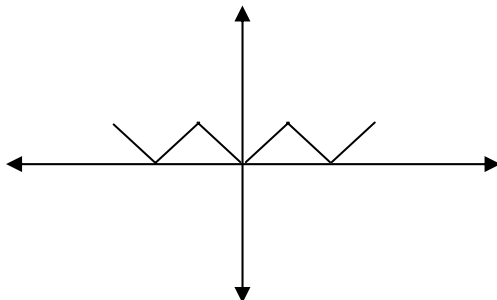


Yanda grafiği verilen fonksiyonun türevinin grafiğini fonksiyonun grafiğinden faydalanarak çiziniz ve nasıl yaptığınızı açıklayınız.

2) Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun türevinin grafiğini fonksiyonun grafiğinden faydalanarak çiziniz ve nasıl yaptığınızı açıklayınız.



3) Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun türevinin grafiğini fonksiyonun grafiğinden faydalanarak çiziniz ve nasıl yaptığınızı açıklayınız.



Ek-4

SÜREKLİLİK VE TÜREVLENEBİLME ARASINDAKİ İLİŞKİYİ ANLAMA TESTİ

Adı- soyadı:

Sınıfı:

Değerli öğretmen adayları; bu test türevlenebilme ve süreklilik arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorlukları belirlemek amacıyla hazırlanmıştır. Vermiş olduğunuz cevaplar sadece araştırma amaçlı kullanılacak ve üçüncü bir kişiyle paylaşılmayacaktır. Lütfen soruları dikkatlice okuyarak cevap veriniz.

1- $f(x) = |x - 2|$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki;

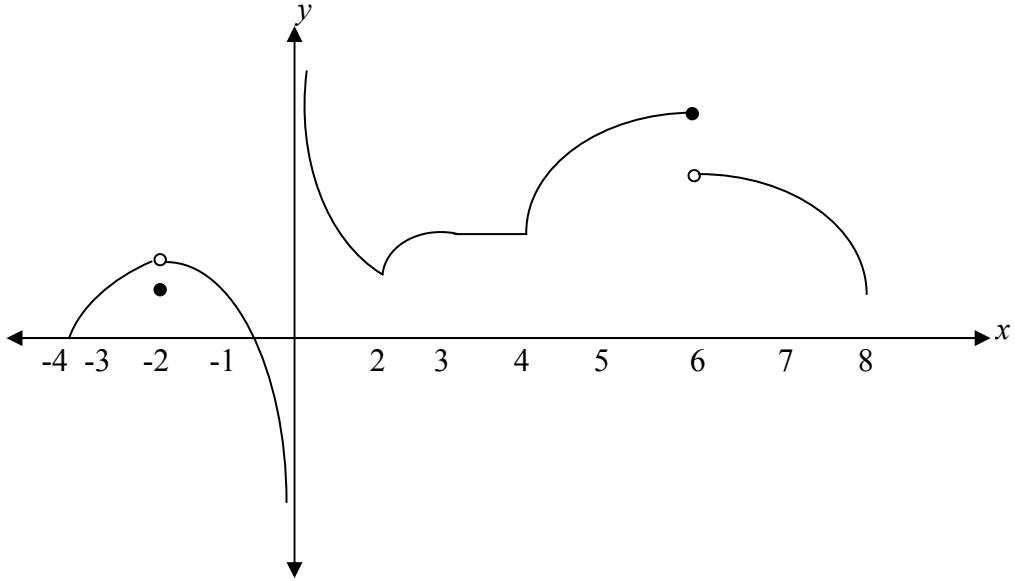
a) Sürekliliğini araştırınız.

b) Türevlenebilirliğini araştırınız. $x=2$ noktasında türevli ise türevini bulunuz. Değil ise sebebini açıklayınız.

2- Öğretmenleri Ayşe ile Ali'den $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$

noktasındaki türevlenebilirliğini araştırmalarını istemiş. Ayşe $x=1$ noktasında fonksiyonun türevli olduğunu, Ali ise bu noktada türevinin olmadığını söylemiştir. Sizce hangisi doğru söylemektedir? Sebebini açıklayınız.

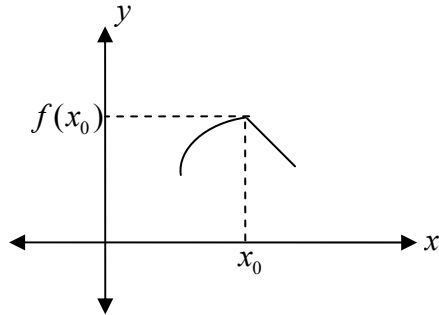
3-



c) f fonksiyonu her noktada sürekli midir? Değil ise nerede sürekli değildir? Neden sürekli değildir? Açıklayınız.

d) f fonksiyonu her noktada türevli midir? Değilse nerede ve niçin türevli değildir? Açıklayınız.

4-



Yandaki şekilde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun grafiğine $(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen teğet çizilebilir mi? Eğer çizilebilir ise teğetin sayısı hakkında ne diyebiliriz? $f(x)$ fonksiyonu $(x_0, f(x_0))$ noktasında türevlenebilir midir? Sebebini açıklayınız.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Uşak'ın Ulucak köyünde doğdu. İlköğrenimini köyünde, ortaöğrenimini Uşak'ta tamamladı. 1994 yılında kazandığı Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi matematik öğretmenliğinden 1998 yılında mezun oldu. 1998-2000 yıllarında özel eğitim kurumlarında ve milli eğitim bakanlığına bağlı okullarda matematik öğretmenliği yaptı. 2000-2002 yılları arasında yüksek lisans eğitimi esnasında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde araştırma görevlisi olarak çalıştı. 2002 yılında Gaziantep Üniversitesi Adıyaman Eğitim Fakültesinde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2003 yılında doktorasını yapmak üzere Atatürk Üniversitesi'ne 35-b ye göre geldi. Halen Atatürk Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak devam etmekte.