



**T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI**

**TEK BOYUTLU DİLİM GEOMETRİDE NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİNİN
 U_N YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ**

Ahmet BÜLBÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KAHRAMANMARAŞ
Eylül-2006**

T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

TEK BOYUTLU DİLİM GEOMETRİDE NÖTRON TRANSPORT
DENKLEMİNİN U_N YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ

Ahmet BÜLBÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kod No:

Bu tez 14 / 09 / 2006 Tarihinde Aşağıda Jüri Üyeleri Tarafından
Oy Birliği ile Kabul Edilmiştir.

.....
Doç.Dr.
Fikret ANLI
DANIŞMAN

.....
Prof.Dr.
Süleyman GÜNGÖR
ÜYE

.....
Doç.Dr.
Ömer SÖĞÜT
ÜYE

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Özden GÖRÜCÜ
Enstitü Müdürü

Bu çalışma.....tarafından desteklenmiştir.
Proje No:.....

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	I
ÖZET.....	II
ABSTRACT.....	III
ÖNSÖZ.....	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
EK ÇİZELGELER DİZİNİ	VII
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	5
3. MATERYAL VE METOT.....	8
3.1. Nötron Transport Denklemi.....	8
3.2. P_N Yöntemi.....	10
3.3. Chebyshev Polinomları.....	13
3.3.1. Üretme Fonksiyonu.....	13
3.3.2. II. Tip Chebyshev Polinomu.....	14
3.3.3. Türev Bağıntısı.....	16
3.3.4. Ortogonalite (Diklik).....	17
3.4. Chebyshev Polinomu Yaklaşımı: U_N Metodu.....	17
3.4.1. Mark Sınır Şartı.....	21
3.4.2. Marshak Sınır Şartı.....	21
4. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	23
5. SONUÇ.....	25
KAYNAKLAR.....	26
EKLER.....	28
ÖZGEÇMİŞ.....	32

KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZET

TEK BOYUTLU DİLİM GEOMETRİDE NÖTRON TRANSPORT
DENKLEMİNİN U_N YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ

Ahmet BÜLBÜL

DANIŞMAN : Doç.Dr. Fikret ANLI

Yıl : 2006 Sayfa : 32

Jüri : Doç.Dr. Fikret ANLI
: Prof. Dr. Süleyman GÜNGÖR
: Doç.Dr. Ömer SÖĞÜT

Tek boyutlu dilim geometride, aynı enerjili nötron transport denklemine Chebyshev polinomları yaklaşımı kullanılarak kritik yarı kalınlıklar hesaplandı. Uygulanan metotta Chebyshev polinomlarının II. tipi kullanıldığından U_N yaklaşımı olarak adlandırıldı. Bu hesaplamalarda farklı c (çarpışma başına ortaya çıkan ortalama nötron sayısı) değerleri için Mark ve Marshak sınır şartları kullanıldı. Uygulanan U_N metoduna göre her iki sınır şartı için elde edilen sonuçlar Çizelgeler halinde verildi. Karşılaştırma yapmak için, daha önceden bilinen P_N metodu sonuçları da Çizelgelerde verildi.

Sonuç olarak her iki metoda göre elde edilen sonuçların (U_N ve P_N) uyum içinde oldukları görüldü. Bu sonuç nötron transport denkleminde yapılan hesaplamaların Chebyshev polinomları ile de yapılabileceğini göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Nötron Transport denklemi, dilim geometri, Chebyshev polinomları, kritik yarı kalınlık.

**UNIVERSITY OF KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF PHYSICS**

MSc THESIS

ABSTRACT

**U_N APPROXIMATION TO NEUTRON TRANSPORT EQUATION
IN ONE-DIMENSIONAL SLAB GEOMETRY**

Ahmet BÜLBÜL

SUPERVISOR: Associate Prof. Dr. Fikret ANLI

Year : 2006 Pages : 32

**Jury : Associate Prof.Dr. Fikret ANLI
Prof.Dr. Süleyman GÜNGÖR
Associate Prof.Dr. Ömer SÖĞÜT**

Critical thicknesses calculations were done by using the Chebyshev polynomial approximation to one group neutron transport equation in slab geometry. Because second type Chebyshev polynomials are used in the method the approximation we used is called as U_N method. In the solutions critical thicknesses were calculated for different c (where c is the mean number of secondary neutrons per collision and known as the fundamental eigenvalue) values for Marshak and Mark boundary conditions. Results of calculation by using the both boundary conditions (Mark and Marshak) were presented in the tables. For the comparison the results of P_N approximation were also presented in the tables.

As a conclusion the result obtained in respect of two methods (U_N and P_N), was seen in an excellent coherent. This result has also showed that Chebyshev polynomials are convenient in neutron transport equation.

Key Words : Neutron Transport equation, slab geometry, Chebyshev polynomials, critical half thickness.

ÖNSÖZ

Bu tez, nükleer reaktör fiziğinde tek boyutlu nötron transport denkleminin kritik kalınlıklarının Chebyshev polinomları yaklaşımı ile hesaplanabileceğini göstermek için yapılmıştır.

Çalışmalar süresince, fikirleriyle beni araştırmaya yönelten, bilgisinden ve yardımından istifade ettiğim danışmanım Doç. Dr. Fikret ANLI'ya, çalışmalarında kaynak bulmama yardımcı olan Dr. Faruk YAŞA'ya, öğretmen arkadaşım Mürsel ULUTAŞ'a ve tüm fizik bölümü öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Eylül-2006
KAHRAMANMARAŞ

Ahmet BÜLBÜL

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Ortogonal polinomlar tekrarlama bağıntısı.....	15
Çizelge 3.2. Chebyshev polinomları, II. Tip.....	15
Çizelge 4.1. Dilim geometride kritik kalınlık (Mark Sınır şartı).....	24
Çizelge 4.2. Dilim geometride kritik kalınlık (Marshak Sınır şartı).....	24

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Polar Koordinatlar.....	8
---	----------

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- σ_T : Toplam diferansiyel tesir kesiti
 σ_s : Diferansiyel saçılma tesir kesiti
 μ : Açı değişkeni ($-1 \leq \mu \leq 1$, $\mu = \cos \theta$)
 D : Difüzyon sabiti
 a : Kritik yarı kalınlık
 $\psi(x, \mu)$: Açısal akı
 ν : Özdeğer
 $U_N(\mu)$: II. tip Chebyshev polinomu
 $P_N(\mu)$: Legendre polinomu
 $\phi_N(x)$: Nötron akı momentleri
 L : Difüzyon uzunluğu
 c : Çarpışma başına ortaya çıkan ortalama nötron sayısı ($c = \sigma_{s0} / \sigma_T$)

1. GİRİŞ

Nükleer fizik, Becquerel'in 1896 yılında radyoaktifliği keşfetmesi ve Rutherford'un 1911'de çekirdeğin varlığını ileri süren hipotezi ile başlar (Krane, 2001). Nötronun 1932 yılında Rutherford'un öğrencilerinden Chadwick tarafından keşfedilmesi ile nükleer enerji alanında çalışmalar başlamıştır. 1939 yılına kadar birçok çekirdek reaksiyonları fizikçiler tarafından keşfedilmişti. Fakat bu reaksiyonlardan hiçbiri hedef çekirdeğin kütlesinden çok farklı yeni bir çekirdek oluşturmuyordu. Reaksiyon sonucunda ya bir gama ışını ya da hafif bir parçacık fırlatıyordu.

1939 yılında Hahn ve Strassmann, seri halde çok dikkatle yapılmış deneyler sonunda Uranyum'un yavaş nötronlarla bombardımanında oluşan radyoaktif elementlerin Baryum ve Kripton olduğunu buldular. Kısa bir süre sonra, Lisa Meitner ve Otto Frisch bunun nasıl meydana geldiğini açıkladılar. Uranyum çekirdeği, bir nötronu soğurduktan sonra yaklaşık olarak eşit iki parçaya bölünmüştü. Lisa Meitner ve Otto Frisch, nötronlarla bombardıman edilen Uranyum çekirdeğinin ikiye bölündüğünü ve bu sırada yüksek enerji ortaya çıktığını gözlediler. Bu olay fisyon olayının keşfi idi. Çok geçmeden parçalanma sonunda yalnız Baryum ve Kripton'un değil, daha birçok elementin ortaya çıktığını gözlediler. Böyle bir olay çekirdeği anlamaya çalışan fizikçiler için çok ilginçti. Fakat bu olay ulaşılması çok zor sonuçlara sahipti. Ölçümler her bir olayda yaklaşık 200 MeV'lik bir enerji açığa çıktığını gösterdi.

Çekirdek fisyonunun keşfedildiği, 1939 yılı başlarında ilan edilir edilmez, dünyanın her tarafında nötron kaynaklarına sahip olan laboratuardaki fizikçiler bu deneyi hemen tekrarladılar ve sonucu doğruladılar. Bunu takip eden iki yıl içerisinde sonuçlar Toryum ve Protaktinyum çekirdeklerinde de bölünme olduğunu gösterdi. Yapılan denemelerde U^{235} kolay fisyon verirken, U^{239} , Toryum ve Protaktinyum gibi çekirdeklerin kolay fisyon vermediği ve yüksek enerjili nötronlarla fisyon verdiği gözlemlendi. Sonuçta reaktörlerde Uranyum'dan Plütonyum eldesi başarıldı ve böylece kimyasal olarak Plütonyum Uranyum'dan ayrılarak, termal nötronlarla Plütonyum'un fisyonu sağlandı. Bu olaydan sonra nötron transport denklemi üzerindeki çalışmalar başladı.

1939-1964 yılları arasında transport problemleri gizlilik içinde geniş ölçüde incelendi. Bu çalışmaların gizli yapılmasında 1945 yılında Amerikalıların kullandığı atom bombasının etkisi büyüktü.

Fisyon olayında, bir nötronla fisyon yapabilen çekirdek iki veya üç nötron açığa çıkartarak iki ya da daha fazla çekirdeğe bölünmektedir. Reaktör içerisinde, Uranyum ve Plütonyum gibi ağır atom çekirdekleri ile nötronların çarpışması sonucunda fisyon meydana gelir. Çarpışma sırasında ağır atom çekirdeği, kendi yapısına bir nötron alarak, hemen hemen eşit kütleli iki parçaya bölünür. Bu arada birkaç nötronla birlikte çok yüksek miktarda enerji açığa çıkar (Tanyel, 1994; Oğul, 1999). Açığa çıkan enerji iki türlüdür: ışınım enerjisi, yüksek hızlarda açığa çıkan çekirdek bölünmesi ürünlerinin kinetik enerjisidir. Bölünme ürünleri hızlarını kaybettikçe, enerjilerinin büyük bir bölümünü ısı enerjisine dönüştürür.

Bu nötronlar, başka ağır çekirdeklerle çarpışarak onların da bölünmesine yol açar. Bu olay birkaç saniye içinde milyonlarca çekirdeğin bölünmeye uğradığı bir zincirleme

tepkime şeklinde gerçekleşir. Bu zincirleme reaksiyon, kontrol altına alınmak zorundadır. Fisyona sebep olan nötronlar, termal nötronlar olduğundan, reaktör içerisine moderatör (yavaşlatıcı, örneğin su) konularak hızlı nötronlar yavaşlatılır. Reaktöre sarkıtılan kontrol çubukları ile de bu reaksiyon hızı kontrol altına alınabilir (Yaşa, 2002).

Nötron sayısı, bir bölünme dizisinden diğerine sabit kalıyorsa reaktör ‘kritik’ durumdadır. Bu durum reaktörün güvenli çalışması için istenen bir durumdur. Nötron sayısı ardışık reaksiyonlar sonucunda azalıyorsa, reaktör ‘kritik altı’, artıyorsa, ‘kritik üstü’ durumda denilir. Kritik altı durumda reaktör sönümlüdür. Kritik üstü durumda, açığa çıkan enerji hızla arttığından kontrol edilmezse, oluşan aşırı ısı reaktörün kalbini eriterek tehlikeli bir biçimde radyasyon yayınlamasına yol açabilir (Lamarsh, 1977).

Nükleer reaktörler, nükleer enerjiyi ısı enerjisine dönüştüren sistemlerdir. Zincirleme fisyon reaksiyonu sonucunda oluşan nötron miktarı ve bu nötronların hareketi, reaksiyonun devamlılığı için çok önemlidir. Bir reaktörün davranışı, reaktördeki nötronların sayısına, enerjisine ve konumuna bağlıdır. Fisyon reaktörlerinin inşaatı için nötron transport denklemi çözümlerine teknolojinin önemli ölçüde ihtiyacı vardır. Nötronların davranışının belirlenmesi, diğer bir ifadeyle transport denkleminin çözümü inşa edilecek nükleer reaktörlerin daha düzenli çalışabilmesi için bilgi edinmemize imkan tanır.

Nükleer reaktörler, günümüzde elektrik üretimi amacıyla dünyanın pek çok ülkesinde kullanılmaktadır. Bir reaktörün kullanılması ve işletilmesi; fizikçilerin, nükleer mühendislerinin, kimyacıların, çevre mühendislerinin, jeologların, mimarların, elektronik mühendislerinin ve daha birçok bilim dalındaki uzmanların bir araya gelmesi ile gerçekleştirilir.

Nötronların reaktör içindeki uzaysal dağılımları bir difüzyon olayı olarak düşünülür. Nötronlar, çekirdeklerle yaptıkları çarpışmalar sonunda zig-zag yollar çizerler. Bu hareketin sonucu olarak reaktörün bir kesiminde, farklı bir enerjiyle ortaya çıkarlar. Bu durumda nötronlar bir bölgeden diğer bir bölgeye taşınmıştır denir ve bu olayın incelendiği konu ‘Nötron Transport Denklem’ veya ‘Boltzman Denklem’ olarak bilinir. Lineer Transport Denklemi, reaktör fiziğinin yanı sıra, radyoaktif kaynakların zırhlanması, plazma dinamiği, astrofizik, radyoaktif transfer problemleri ve gazların kinetik teorisi gibi fiziğin pek çok dalında geniş bir kullanım alanına sahiptir (Duderstadt ve Martin, 1978; Case ve Zweifel, 1967).

Nükleer reaktörlerin sorunsuz bir şekilde dizayn edilmesi ve çalıştırılması için nötron akısının reaktör içerisindeki dağılımının tam olarak bilinmesi gerekmektedir. Bu amaçla, radyoaktif çekirdeklerle etkileşme durumları çerçevesinde, nötron akısının konuma ve açığa bağlı olarak çözümlenmesinde bir çok yöntem geliştirilmiştir. Transport denkleminde, nötronların belli yaklaşımlar altında yalnızca konuma bağlılığı göz önüne alınarak difüzyon denkleminde ulaşılar. Reaktörde sınırlardan ve kaynaktan uzak bölgelerde difüzyon denklemi geçerlidir. Buradaki ‘uzaklık’ kavramı, nötronun aldığı ortalama serbest yoldan daha büyük uzaklıkları kapsamaktadır. Bunlar göz önüne alındığında doğru bir hesaplama için transport teorisi gerekmektedir (Yaşa, 2002).

Nötron Transport Teori nötronların davranışını konuma, açığa, zamana ve hıza bağlı olarak dört değişkene bağlı olarak inceler. Eğer tüm nötronların aynı hıza sahip olduğu

varsayılırsa, tek-hızlı grup teorisi yaklaşımı yapılmış olur. Eğer nötronların enerji değişimi de hesaplamalara katılmak istenirse, ortam belli sayıda aralıklara bölünerek çok-hızlı grup teori kullanılır (Bell ve Glasstone, 1972).

Uygulamalı bilimde hemen hemen bütün araştırmacılar Legendre, Hermite ve Laguerre gibi bazı özel klasik ortogonal fonksiyonlarla karşılaşmışlardır. Bu polinomlar arasında Legendre Polinomları fizikte ve mühendislikte geniş bir kullanım alanına sahiptir. Örneğin Legendre ve Associate Legendre Polinomları bir atomun orbitallerindeki elektronların dalga fonksiyonunun ve küresel simetrik geometride potansiyel fonksiyonunun tanımlanmasında geniş bir şekilde kullanılır. Özellikle nükleer reaktör fiziğinde, Legendre Polinomları olağanüstü bir öneme sahiptir. Nötron akısının analitik ve sayısal hesaplamaları P_N ve S_N diye adlandırılan iki ana metotla yapılır. P_N metodunda, açısız akı konum ve açıya bağlı olduğundan nötronların açısız akısı Legendre Polinomları cinsinden seriye açılır. Bu açılımın katsayıları konuma bağlıdır ve sadece ilk iki terimin fiziksel anlamı vardır. Sıfırıncı bileşen nötron skaler akısı ve birinci bileşen nötron akımı olarak bilinir. S_N metodunda, nötron skaler ve açısız akısının çözümü için Gauss-Legendre kuadratür setler kullanılır. P_N metodu, nümerik transport hesaplamalarına en güçlü yaklaşımlardan biridir (Yıldız, 1998). P_N yönteminde elde edilen sonuçlar inşa edilen fisyon reaktörlerinde uyum içinde kullanılmaktadır. Bu yöntemden başka kullanılan yöntemlerde mevcuttur. Fakat P_N yöntemi kadar yaygın değildir. S_N yönteminde elde edilen sonuçlar P_N yönteminde elde edilen sonuçlarla uyum içindedir. Birinci tip Chebyshev polinomları kullanılarak (T_N metodu) yapılan çözümde elde edilen sonuçlar da diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla uyum içindedir.

Nötron transport denklemlerinin çözümünde en önemli faktörlerden biri uygun nötron saçılma fonksiyonunu tanımlamaktır. Nötron saçılmasının büyük öneme sahip olduğu birçok durum vardır. Nükleer reaktör fiziğinde bilindiği gibi nötron enerjisi arttıkça ya da etkileşen çekirdek kütlesi arttıkça, nötron saçılması gittikçe anizotropik olur. Bu yüzden, bu gibi durumlarda saçılma olayının ayrıntılı yapısı gerektiği için nötronun dağılımı ile ilgili çalışma daha zor hale gelir. Nötron transport denkleminin çözümünde en önemli problemlerden biri de özdeğerlerin hesaplanmasıdır. Özdeğerlerin hesaplanması için nükleer çalışmaların ilk yıllarında, nötron transport denkleminin çözümüne genel bir ifade üretmek için karışık ve zor olan P_N yaklaşımı kullanılmıştır.

Bu çalışmada daha önceden geliştirilen yöntemlere alternatif bir çözüm tekniğinin geliştirilmesi hedeflenmektedir. Uyguladığımız yeni yöntemde ikinci tip Chebyshev polinomu kullanılacağı için U_N yaklaşımı olarak adlandırılmıştır. Şimdiye kadar bu konuda yapılan çalışmalarda Legendre Polinomları kullanıldığından metodun adı P_N metodu olarak bilinmektedir. Nötral parçacıkların transport denklemleri yaygın olarak P_N metodu ile çözümlenmektedir.

Bu çalışmada, dilim geometride nötron transport denklemlerinin U_N metodu ile çözümlemesi yapılacaktır. Bunun için ikinci tip Chebyshev Polinomları cinsinden yeni bir nötron açısız akısı tanımlanacaktır. U_N metodunda önce açısız akı $\psi(x, \mu)$ seri şeklinde verilecektir. Açısız akı Chebyshev polinomları cinsinden seriye açılarak akı momentleri elde edilecektir. Çeşitli c değerleri için genel özdeğer spektrumu hesaplanacaktır. Elde edilen özdeğerler P_N metodu ile bulunan özdeğerler ile karşılaştırılacaktır. U_N yaklaşımı için difüzyon sabiti D ve difüzyon uzunluğu L elde edilecektir. Sonuç olarak çalışmanın

uygulamasını “dilim geometride kritik kalınlık” hesaplamasına uygulanacaktır. Elde edilen sonuçların fiziksel durumu incelenecektir. Daha önceden P_N yaklaşımı ile elde edilen kritik kalınlık sonuçları, U_N metodu ile elde edilen kritik kalınlık sonuçları ile karşılaştırılacaktır. Her iki metoda göre hesaplamalar, Mark ve Marshak sınır şartları için ayrı ayrı yapılacaktır. Elde edilen sonuçların birbirine göre uyumluluğu karşılaştırılacaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Nötron transport problemi uzun yıllar teorik ve sayısal birçok çalışmaya konu olmuştur. Nükleer reaktörlerin sorunsuz bir şekilde dizayn edilmesi ve çalıştırılması için nötron akısının reaktör içerisindeki dağılımının tam olarak bilinmesi gerekmektedir. Bu amaçla, radyoaktif çekirdeklerle etkileşme durumları çerçevesinde nötron akısının konuma ve açıya bağlı olarak çözümlenmesinde birçok yöntem geliştirilmiştir. Birçok araştırmacı dilim ve küresel geometride tek boyutlu nötron kritiklik problemini, uygun analizleri veren çeşitli metotları kullanarak çalışmışlardır (Yıldız, 1998).

Etkileşen nötronlardaki anizotropik problem ve kritik boyuttaki etkisi nötron transport teorisinin en klasik problemlerinden biridir. Yapılan çalışmalarda genellikle saçılma fonksiyonunun Legendre polinomları serisi cinsinden geliştirilebileceği düşünülmüştür (Yıldız, 1998).

Tek boyutlu kritiklik probleminin çözümünün popüler iki metodu Wiener-Hopf (Davison, 1958, Williams, 1971) ve tekil özfonksiyonlar metodudur (Case ve Zweifel, 1967). Bununla birlikte nötron transport teoride tam çözümler sadece çok az problem için bulunabilir. Genel metotların birçoğu transport denklemini çözmek için geliştirilmiştir ve gerçekten de bu metotlar çeşitli problemlere uygulanmıştır (Yıldız, 1998).

Transport teorisi, Boltzmann'ın 1872 yılındaki yayını ile gelişmeye başlar. Boltzman eşitliğinin çözümü bazı özel durumlar için vardır. Gerçekten de günümüze kadar bu eşitliğin çözümü tam olarak anlaşılmamıştır. Ancak, bazı yaklaşımlar altında lineerize edilmiş Boltzman eşitliğinin çözümleri, nükleer reaktörlerin planlanmasında ve çalıştırılmasında iyi sonuçlar vermektedir (Yaşa, 2002).

Nötron transport denkleminin Legendre polinomları ile çözülebileceğini ilk olarak Davison (1958), önermiştir ve kritik yarı kalınlık ve kritik yarıçap hesaplamaları yapmıştır. Transport teoride karşılaşılan tekil özfonksiyonların başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümüne uygulanması Davison ve Wigner (1958), tarafından önerildi; ancak, Van Kampen tarafından ilk olarak uygulandı.

Nötron transport denklemlerinin Chebyshev polinomları ile çözülebileceğini ilk defa Conkie (1959) önermiştir. Yabushita (1961) çalışmasında durulma sabitinin Chebyshev polinomları birinci tip ile ilişkisini, bu ilişkileri kullanarak reaktör kritikaliliği için gerekli şartları incelemiştir. Bulgularını kullanarak elde ettiği uzatılmış son nokta uzunluklarının P_N yaklaşımından elde edilen sonuçlarla uyum içinde olduğunu göstermiştir. Conkie yaptığı çalışmada, nötron açısal akısını Chebyshev polinomları cinsinden seriye açarak, soğurma tesir kesitlerinin varlığında Milne problemini çözümlendi. Hem T_N hem de P_N metodu kullanılarak yapılan çözümlerinde sonuçların konvansiyonel olarak tam kabul edilen sonuçlar ile uyumlu olduklarını gösterdi. Temel yarı kalınlık için Mitsis (1963), Case ve Zweifel (1967) yılında ilk olarak farklı özdeğerleri elde ettiler. Pahor (1967) nümerik bir metot olan Chandrasekhar metodu yaklaşımını kullanarak transport teorie yeni bir fikir getirdi (Yaşa, 2002). Yüksek durumlu c özdeğerleri Kerner ve arkadaşları (1967) ve Kschwendt (1971) tarafından kritik dilim için hesaplandı (Yıldız, 1998). İnönü (1973), şiddetli anizotropik problemlerini, değişik geometrilerde çözmek zor olduğu için anizotropik saçılım için bir model geliştirdi. Bu model ileri ve geri saçılımı içerir. Çoğu

araştırmacı transport teoride çözüm elde etmek için İnönü'nün saçılım modelini kullandılar (Yaşa, 2002). Nötron saçılmasında, nötron enerjisinin etkisini Brockmann (1974), yaptığı bir çalışma ile açıkladı. Daha sonra temel yarı kalınlığı düzenli bir şekilde Kaper (1974), yaptığı bir çalışmada sıraladı (Yıldız, 1998).

Transport teoride kuadratik anizotropik durumda çok az çalışma yapılmıştır. Bu durum Lathrop ve Leonard tarafından (1965) çalışılmıştır. Dahl ve Sjöstrand (1978), nümerik hesaplamalarda kompleks özdeğerler kullanarak nötron transport denkleminde nümerik sonuçlar elde ettiler. Lineer ve kuadratik anizotropik saçılma ile ilgili en detaylı hesaplamalar Sjöstrand (1976,1978) tarafından yapılmıştır. Lineer anizotropik saçılmanın ilk hesaplamaları Carlvik'in metodunu boşluk sınır koşullarında integral denklemine uygulayan ve özdeğerleri altıncı duruma kadar veren Dahl ve Sjöstrand (1979), tarafından çalışılmıştır (Yıldız, 1998). Brockmann (1981), yaptığı çalışmada nötron transport denklemini kritiklik sonuçlarının hem homojen hem de heterojen problemler için güvenilir olduğunu göstermiştir. Ayrıca değişik metotlar kullanarak nümerik transport teoride anizotropik saçılım ile ilgili bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada elde ettiği sonuçların diğer yöntemlerdeki sonuçlarla uyumluluğunu gösterdi. Lineer ve kuadratik anizotropik saçılma ile ilgili temel çalışmaların çoğu Protopopescu ve Sjöstrand (1981), tarafından yapılmıştır. Lewis ve Miller (1984), uzaysal hücre adımı büyüdükçe çözümlemeye negatif akı değerleri meydana geldiğini gösteren bir çalışma yaptılar. Legendre polinomları ile kritik yarı kalınlık ve kritik yarıçap hesaplamalarını geliştirmek için Aronson (1984), Lee ve Dias (1984), çalışmalar yaptılar. Buldukları sonuçların önceki hesaplamalarla uyumlu olduğunu gösterdiler.

Grup içi saçılma, kaynak ve özdeğer problemleri için Williams (1985), ileri- geri saçılım kanunu kullanılarak elde edilen sonuçlar ile, tek boyutlu sistemler için iki gruplu nötron transport eşitliğinin çözümlerini karşılaştırdı. Elde ettiği sonuçların uyumluluğunu açıkladı. Riyait ve Ackroyd (1987), şiddetli anizotropik saçılımlı tek boyutta çok gruplu nötron transport problemlerini test ederek nümerik sonuçlar elde etti. Garis ve Sjöstrand (1989), n 'in çeşitli değerleri için c_n 'in büyük olduğu durumlarda kritiklik özdeğerleri için yaklaşık bir tanımlama verdiler (Yıldız, 1998). De Barros ve Larsen (1990), bütün hesaplamalarda uzaysal yuvarlatma hatalarından bağımsız olduğunu ispatladıkları, yeni bir sayısal metot geliştirdiler. Bu metotla elde ettikleri sonuçların, daha güvenilir olduğunu yaptıkları hesaplamalarda gösterdiler. Kohut (1993), yaptığı bir çalışmada, daha önce Dahl ve Sjöstrand tarafından yapılan çalışmayı geliştirerek nümerik hesaplamalarda kompleks özdeğerler kullandı ve uyumlu sonuçlar elde etti.

Atalay (1995), daha önce Mitsis (1963), tarafından yapılan çalışmaya ek olarak yayınladığı makalede öz fonksiyon metodu ile anizotropik saçılma durumunu inceledi. Lineer anizotropik saçılmada tek boyutlu transport operatörünün kritiklik özdeğerlerinin davranışı ile ilgili temel çalışmaların çoğu Sahni (1995,1997), tarafından ortaya çıkarılmıştır. Yıldız (1998), Legendre polinomları ile kritik yarı kalınlık ve kritik yarıçap hesaplamalarını geliştirmek için P_N metodu ile ilgili çalışmalar yaptı.

Dilim geometri için kritik kalınlık, veya küresel ve silindirik geometri için kritik yarıçap hesaplamasında kullanılan metot sadece P_N yaklaşımı değildir. Yaptıkları çalışmada, sonsuz ortamda Green fonksiyonlarını temel alan tekil öz fonksiyonlar yaklaşımını kullanarak, Kaşkaş, Tezcan ve Güleçyüz (2000), dilim ve küresel

geometrilere kritik kalınlıkları hesapladılar. Taylor açılımına bağlı sayısal tekniklerin çoğu uzaysal yuvarlatma hatalarını içermektedir. Bu metot da Spektral Green Fonksiyonu içeren, standart olmayan yardımcı eşitlik ile alışıktığımız nötron transport denklemi hücre kenarı açısız akılarına bağlı olarak çözümlenmiştir.

İlk yapılan Legendre polinomları (P_N metodu) ile yapılan kritik kalınlık hesaplaması küresel geometriye açıklık getirmiyordu. Daha sonra Sahni ve Sharma (2000), tarafından yapılan çalışmada, bir kural önerdiler ve küresel geometride küresel harmonik momentleri belirlediler. Nötron transport teorisinde P_N yaklaşımını kullanarak çözümlenme yapmak neredeyse geleneksel bir yöntem haline gelmiştir. Tek boyutlu dilim geometride anizotropik saçılmalı durum için Marshak sınır şartlarını kullanarak Yıldız (2001), yaptığı çalışmada, sistemin kritik olabilmesi için c_0 özdeğerlerini P_N metodunu kullanarak hesaplamıştır. Yıldız çalışmasında, lineer ileri-geri saçılmayı temsil eden bir saçılma fonksiyonu kullanarak tek boyutlu küresel geometride P_N yaklaşımını kullanarak kritik yarıçap hesaplaması yapmıştır.

Yansıtılmalı durum için Atalay ve Yıldız (2002), yaptıkları çalışma ile yansıtma katsayısındaki azalma ve artma durumları üzerinde çalıştılar. Buradan elde ettikleri sonuçlarda yansıtma katsayısı arttıkça kritik yarı kalınlığın azaldığını gösterdiler. Anlı, Yaşa ve Güngör (2004), yaptıkları bir çalışma da, birinci tip Chebyshev polinomlarını kullanarak (T_N metodu), yansıtılmalı dilim geometride kritik kalınlık hesapladılar. Buldukları kritik kalınlık sonuçlarını P_N metodu ile karşılaştırdılar. Sonuçların mükemmel bir uyum içinde olduklarını gösterdiler.

Yapılan bu çalışmaların birçoğunda saçılmanın genellikle izotropik olduğu düşünülmüştür. Bununla birlikte birçok araştırmacı da anizotropik saçılmanın etkisi ile ilgilenmişlerdir. Anizotropik saçılma için tam çözümleri bulmak her zaman daha zor olmuştur. Nötron saçılma problemi, nötron transport denklemi, nötron etkileşim olasılığını gösteren uygun bir saçılma fonksiyonuna konularak çözülebilir (Yıldız, 1998). Kritiklik problemi için genellikle, transport denkleminin integro-diferansiyel formuna dayanan analitik teknikler kullanılır. Bu metotlar oldukça kesin sonuçlar sağlar; ancak, sadece anizotropik saçılmanın alçak durumları için kullanılabilir.

Bu çalışmada, dilim geometride nötron transport denklemlerinin U_N metodu ile çözümlenmesi yapılacaktır. Bunun için ikinci tip Chebyshev Polinomları cinsinden yeni bir nötron açısız akısı tanımlanacaktır. U_N metodunda önce açısız akı $\psi(x, \mu)$ seri şeklinde verilecektir. Açısız akı Chebyshev polinomları cinsinden seriye açılarak akı momentleri elde edilecektir. Çeşitli c değerleri için genel özdeğer spektrumu hesaplanacaktır. Elde edilen özdeğerler P_N metodu ile bulunan özdeğerler ile karşılaştırılacaktır. Sonuç olarak çalışmanın uygulamasını “dilim geometride kritik kalınlık” hesaplamasına uygulanacaktır. Elde edilen sonuçların fiziksel durumu incelenecektir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Nötron Transport Denklemi

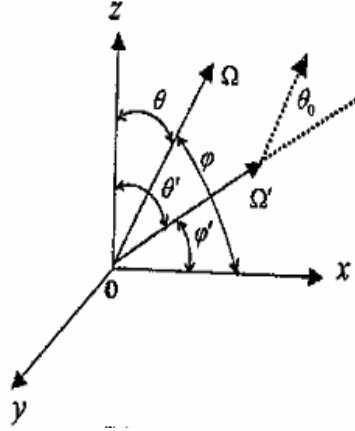
Tek gruplu ve tek boyutta kararlı durum için nötron transport denklemi şöyle yazılabilir (Lewis ve Miller, 1984).

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma_T \psi(x, \mu) = \int_{\Omega'} \sigma_s(\Omega \cdot \Omega') \psi(x, \Omega') d\Omega' + Q_0(x)/2, \quad -a \leq x \leq a. \quad (3.1)$$

Burada $\sigma_s(\Omega \cdot \Omega')$ diferansiyel saçılma tesir kesitidir ve konvansiyonel olarak Legendre serisi ile verilen ifade nötron transport denkleminde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu seri,

$$\sigma_s(\Omega \cdot \Omega') = \sigma_s(\mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \sigma_{sn} P_n(\mu_0), \quad -1 \leq \mu_0 \leq 1. \quad (3.2)$$

bağıntısı ile verilmektedir. Burada $P_n(\mu_0)$ Legendre Polinomları, σ_{sn} 'ler de saçılma tesir kesiti sabitleridir. σ_{s0} izotropik, σ_{s1} de anizotropik saçılma tesir kesiti sabitleridir. Ayrıca denklemde yer alan $\mu_0 = \Omega \cdot \Omega' = \cos \theta_0$ ifadesi Şekil 3.1.'de gösterildiği gibi nötronun geliş ile saçılma doğrultusu arasındaki açının kosinüsünü temsil etmektedir.



Şekil 3.1. Kutupsal Koordinatlar

En genel hali ile küresel geometride konum vektörü

$$\mathbf{r} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \quad (3.3)$$

bağıntısı ile verilmektedir. Bu vektör doğrultusundaki birim vektör ise

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \quad (3.4)$$

şeklinde verilebilir. Bu birim vektör nötronun hedeften saçıldıktan sonraki yönünü göstermektedir. Benzer şekilde ;

$$\mathbf{r}' = r \cdot \sin \theta' \cos \varphi' \mathbf{i} + r \cdot \sin \theta' \sin \varphi' \mathbf{j} + \cos \theta' \mathbf{k} \quad (3.5)$$

hedefe geliş doğrultusunu temsil eden konum vektörü olmak üzere

$$\mathbf{\Omega}' = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \sin \theta' \cos \varphi' \mathbf{i} + \sin \theta' \sin \varphi' \mathbf{j} + \cos \theta' \mathbf{k} \quad (3.6)$$

ile verilebilir.

Denklem (3.4) ve Denklem (3.6)'nın skaler çarpımı doğrultman kosinüsü, $\mu_0 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}' = \cos \theta_0$ ifadesinin daha sade biçiminin elde edilmesine imkan sağlamaktadır;

$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}' = \mu_0 = \cos \theta_0 = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi') \quad (3.7)$$

Denklem (3.7)'yi $P_n(\mu_0)$ ile gösterilen Legendre polinomlarında kullandığımızda bu polinomlar için son derece kullanışlı bir özellik ortaya çıkmaktadır;

$$P_n(\mu_0) = P_n(\mu)P_n(\mu') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu)P_n^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \quad (3.8)$$

burada $P_n^m(\mu)$ bağlı Legendre polinomlarını temsil etmektedir. Bu son denklemi, Denklem (3.2) ile verilen diferansiyel tesir kesitinde kullanıp elde edilen sonucu Denklem (3.1) ile verilen transport denkleminde yazıp φ' üzerinden $[0, 2\pi]$ aralığında integralini aldığımızda tek boyutlu transport denklemi için

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma_T \psi(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \sigma_{s_n} P_n(\mu) \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') P_n(\mu') d\mu' + Q_0(x)/2 \quad (3.9)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\psi(x, \mathbf{\Omega})$ açısal akısının azimutsal simetriye sahip olduğunu yani φ açısından bağımsız olduğunu kabul ediyoruz. σ_{s_n} katsayıları n 'nin büyük değerleri için son derece küçük olduğundan genellikle matematiksel hesaplamalarda kullanımı tercih edilmez. Bu çalışmamızda saçılma teriminin sadece ilk terimini kullanacağımızdan Denklem (3.9) basitçe,

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma_T \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_{s_0}}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' + Q_0(x)/2, \quad -1 \leq \mu \leq 1, -a \leq x \leq a \quad (3.10)$$

şekline dönüşür. Bu denklem nötron transport teorisinde izotropik saçılmalı tek gruplu ve tek boyutlu dilim geometride transport denklemi olarak bilinir ve reaktör hesaplamalarında çözümleri yeterli sonuçlar verdiği için yaygın olarak kullanılmaktadır.

3.2. P_N Yöntemi

Önceki bölümden izotropik saçılmalı tek gruplu ve tek boyutlu dilim geometride nötron transport denkleminin

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma_T \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_{s0}}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad -a \leq x \leq a, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (3.11)$$

ile verilebileceğini göstermiştik. Burada μ sembolü nötronun doğrultusunu belirleyen bir parametre olup nötron doğrultusunun x - eksenine yaptığı açının kosinüsünü, $\psi(x, \mu)$ nötron açısal akısını, σ_T toplam tesir kesitini, σ_{s0} diferansiyel saçılma tesir kesitinin ilk bileşenini temsil etmektedir. Denklem (3.11)' in azimutsal simetriye sahip olduğu yani φ açısından bağımsız olduğu görülmektedir. Bu durum denklemin çözümünde çok büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

Dikkat edilecek olursa $\psi(x, \mu)$ açısal akı fonksiyonu tanım aralıkları $-a \leq x \leq a$, $-1 \leq \mu \leq 1$ ile verilen iki değişkene bağlıdır. Bu durumda $\psi(x, \mu)$ fonksiyonu hem Legendre serisine hem de Chebyshev (her iki tipi) serisine açılabilir.

$$\psi(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n(x) P_n(\mu), \quad -a \leq x \leq a, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (3.12)$$

Denklem (3.12)' deki $\phi_n(x)$ 'lere akı momentleri denir ve bu seri açılımı kullanılarak Denklem (3.11)' in çözülmesi işlemine P_N yöntemi denir. Denklem (3.12)' deki ilk iki terimin fiziksel olarak bir anlamı vardır. Legendre polinomlarının diklik özelliği kullanılarak $\phi_n(x)$ momentleri elde edilebilir. Legendre polinomlarının diklik özelliği

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & , n = m \\ 0 & , n \neq m \end{cases} \quad (3.13)$$

ile verilir. Ayrıca

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) d\mu = \begin{cases} 2 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

olduğu açıktır. Denklem (3.12) $P_m(\mu)$ ile çarpılıp $(-1,1)$ aralığında integrali alınırsa ve Denklem (3.13) ile verilen diklik özelliği kullanılırsa $\phi_n(x)$ momentleri elde edilir;

$$\phi_n(x) = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) P_n(\mu) d\mu, \quad -a \leq x \leq a \quad (3.15)$$

$n = 0$ ve $n = 1$ için sırası ile

$$\phi_0(x) = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu, \quad \phi_1(x) = \int_{-1}^1 \mu \psi(x, \mu) d\mu \quad -a \leq x \leq a \quad (3.16)$$

bağıntıları elde edilir. Fiziksel olarak bu denklemlerden ilki toplam nötron akısını veya nötron skaler akısını, ikincisi de x noktasındaki nötron akımını temsil etmektedir.

Akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklemleri şu şekilde elde edebiliriz. Denklem (3.12)'yi Denklem (3.11)'de yerine yazalım, ve aşağıda Denklem (3.17) ile tanımlanan Legendre polinomları ile ilgili tekrarlama bağıntısını da kullandıktan sonra sonuç denklemini $P_m(\mu)$ ile çarpıp $(-1,1)$ aralığında integralini aldığımızda n 'nin çeşitli değerleri için

$$\mu P_n = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(\mu) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(\mu) \quad (3.17)$$

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} + \sigma_T \phi_0(x) = \sigma_{s0} \phi_0(x) \rightarrow P_0(\mu) \text{ yaklaşımı} \quad (3.18)$$

$$\frac{d\phi_0(x)}{dx} + 2 \frac{d\phi_2(x)}{dx} + 3\sigma_T \phi_1(x) = 0 \rightarrow P_1 \text{ yaklaşımı} \quad (3.19)$$

$$2 \frac{d\phi_1(x)}{dx} + 3 \frac{d\phi_3(x)}{dx} + 5\sigma_T \phi_2(x) = 0 \rightarrow P_2 \text{ yaklaşımı} \quad (3.20)$$

$$3 \frac{d\phi_2(x)}{dx} + 4 \frac{d\phi_4(x)}{dx} + 7\sigma_T \phi_3(x) = 0 \rightarrow P_3 \text{ yaklaşımı} \quad (3.21)$$

akı momentleri için diferansiyel denklemleri elde edilir. Sonuç olarak genel bir ifade

$$n \frac{d\phi_{n-1}(x)}{dx} + (n+1) \frac{d\phi_{n+1}(x)}{dx} + \sigma_T (2n+1) \phi_n(x) = \sigma_{s0} \phi_0(x) \delta_{n0} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılır. Burada δ_{mn} sembolü kroniker delta olarak bilinir ve özelliği aşağıdaki

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \text{ gibidir.} \quad (3.23)$$

Denklem (3.22)'den görüldüğü gibi $n = 0,1,2,\dots,N$ olmak üzere sonlu sayıda birbiri ile bağlantılı $N+1$ tane $\phi_n(x)$ 'ler için denklem mevcuttur. $P_{N+1}(\mu)$ polinomu N 'nin büyük değerleri için hızlı salınımlar sergilemektedir yani $-1 \leq \mu \leq 1$ aralığında $N+1$ kez işaret değiştirmektedir. Bu durum $\phi_{N+1}(x)$ 'in büyük N değerleri için yeterince küçük olacağını göstermektedir. Buna göre $\phi_{N+1}(x) = 0$ yaklaşımı uygun bir çözüm olacaktır. Bu

yaklaşım P_N yaklaşımı olarak bilinir. Aynı durum Chebyshev polinomları için de geçerlidir. Hem birinci tip hem de ikinci tip Chebyshev polinomları büyük N değerleri için hızlı salınımlar sergilemektedir. Yani $-1 \leq \mu \leq 1$ aralığında $N+1$ kez işaret değiştirmektedir. Sonuç olarak bu yaklaşım Chebyshev polinomları için de geçerlidir.

Örnek olması bakımından $N=1$ için (P_1 yaklaşımı) $\phi_2(x) = \phi_3(x) = \dots = 0$ olacağından Denklem (3.19)

$$\phi_1(x) = -\frac{1}{3\sigma_T} \frac{d\phi_0(x)}{dx}, \quad -a \leq x \leq a \quad (3.24)$$

şeklini alır. Bu eşitliği Denklem (3.18)'de kullanırsak

$$\frac{d^2\phi_0(x)}{dx^2} - 3\sigma_T^2(1-c)\phi_0(x) = 0, \quad c = \sigma_{s0} / \sigma_T, \quad -a \leq x \leq a \quad (3.25)$$

kaynaksız difüzyon denklemini elde ederiz. Bu yaklaşıma göre (P_1 yaklaşımı) difüzyon sabiti ve difüzyon uzunluğu için sırası ile

$$D = \frac{1}{3\sigma_T}, \quad L = \frac{1}{\sigma_T \sqrt{3(1-c)}}, \quad c = \frac{\sigma_{s0}}{\sigma_T} \quad (3.26)$$

eşitlikleri elde edilir.

Denklem (3.22) ile verilen birbiri ile kuplajlı denklem sistemi için

$$\phi_n(x) = \alpha_n(\nu) \exp(\sigma_T x / \nu), \quad -a \leq x \leq a \quad (3.27)$$

şeklinde bir çözüm önerilir. Bu eşitlik Denklem (3.22)'de kullanılıp analitik olarak çözülürse bütün $\alpha_n(\nu)$ ' ler için analitik ifadeler bulmak mümkündür;

$$\alpha_0(\nu) = 1 \quad (3.28)$$

$$\alpha_1(\nu) = -\nu(1-c) \quad (3.29)$$

$$\alpha_2(\nu) = \frac{3}{2}\nu^2(1-c) - \frac{1}{2} \quad (3.30)$$

.....

Buna göre $\alpha_n(\nu)$ ' ler için genel bir tekrarlı bağıntısı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(n+1)\alpha_{n+1}(\nu) + \nu(2n+1)\alpha_n(\nu) + n\alpha_{n-1}(\nu) = \nu c \alpha_0(\nu) \delta_{n0} \quad (3.31)$$

Burada ν katsayıları; özdeğerleri $\alpha_n(\nu)$ 'ler de özfonksiyonları temsil etmektedir. ν özdeğerlerinin hesaplanması matris cebiri kullanılarak veya basitçe $\alpha_{N+1}(\nu) = 0$ eşitliği

çözümlelenerek yapılır. Sonuç olarak bulunan bu özdeğerlerin kullanılarak Denklem (3.27)' de kullanılmasıyla verilen genel çözüm;

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^N \beta_k \alpha_n(v_k) \exp(\sigma_T x / v_k), \quad -a \leq x \leq a \quad (3.32)$$

şeklinde yazılır. Burada β_k sistemin fiziksel olarak bilinen sınır şartlarından belirlenebilecek sabitlerdir.

3.3. Chebyshev Polinomları

Chebyshev polinomları,

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 y}{d\mu^2} - \mu \frac{dy}{d\mu} + n^2 y = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümlerinden ortaya çıkmaktadır. Yukarıda verilen diferansiyel denklemin iki bağımsız çözümü mevcuttur. Bu iki bağımsız çözüm sırası ile Chebyshev polinomları I. ve II. tip olarak bilinirler. I. ve II. tip olarak adlandırılan seri çözümleri aşağıda verilmiştir;

$$T_n(\mu) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m n!}{(n-2m)!(2m)!} (1 - \mu^2)^m \mu^{n-2m} \quad (3.33)$$

$$U_n(\mu) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(n-m)!}{m!(n-2m)!} (2\mu)^{n-2m} \quad (3.34)$$

Chebyshev polinomları özel küresel polinomlardır (Arfgen ve Weber, 1995). Bu fonksiyonlar tüm küresel polinomların genel fonksiyonlarıdır. Chebyshev polinomları nümerik analizde birinci derecede önemlidir.

3.3.1. Üretme Fonksiyonu

Gegenbauer polinomları için genel olarak üretme fonksiyonu (Arfgen ve Weber, 1995),

$$\frac{1}{(1 - 2\mu t + t^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n C_n^\lambda(\mu) \quad |\mu| \leq 1, |t| < 1 \quad (3.35)$$

ile tanımlanmaktadır. Legendre ve Chebyshev polinomları Gegenbauer polinomlarının özel halleridir. Denklem (3.35)' de $\lambda = 1/2$ alınırsa Legendre polinomunun üretme fonksiyonu elde edilir. Eğer $\lambda = 1$ ve $\lambda = 0$ özel limit değerleri alınırsa iki tip Chebyshev polinomunun üretme fonksiyonları elde edilir. Biz bu çalışmada II. tip Chebyshev polinomunu kullanacağımızdan bu polinomla ilgili özellikler üzerinde duracağız.

3.3.2. II. Tip Chebyshev Polinomu

Eğer $\lambda = 1$ alınırsa $C_n^1(\mu) = U_n(\mu)$ olur. II. Tip Chebyshev polinomları konvansiyonel olarak $U_n(\mu)$ notasyonu ile gösterilir. Tanım aralığı Legendre polinomlarında olduğu gibi $-1 \leq \mu \leq 1$ ' dir. Ayrıca her iki tip Chebyshev polinomu da trigonometrik fonksiyonlar içerirler ve her iki polinom da trigonometrik olarak sırası ile $\mu = \cos(\theta)$ olmak üzere

$$T_n(\mu) = \cos(n\theta), \quad U_n(\mu) = \sin((n+1)\theta)/\sin(\theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (3.36)$$

bağıntıları ile tanımlanırlar. II. Tip Chebyshev polinomlarının üretme fonksiyonu

$$\frac{1}{1-2\mu t+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(\mu), \quad |\mu| \leq 1, |t| < 1 \quad (3.37)$$

ile verilir. Denklem (3.37)' den bu polinomlar ile ilgili bir çok özellik türetilbilir, ancak biz burada bu özelliklerin türetilmesi ile ilgili detayları vermeyeceğiz ve sonuçları doğrudan yazmakla yetineceğiz. Bu polinomlar için tekraralama bağıntısı

$$U_{n+1}(\mu) - 2\mu U_n(\mu) + U_{n-1}(\mu) = 0 \quad (3.38)$$

ile verilmektedir. $U_0(\mu) = 1$ değeri kullanılarak n 'nin çeşitli değerleri için $U_n(\mu)$ polinomları elde edilebilir. Aşağıdaki çizelgede çeşitli ortogonal polinomlar için tekraralama bağıntılarının elde edilebileceği katsayılar verilmiştir. Burada $Z_n(x)$ herhangi bir polinomdur. Chebyshev polinomları, Fourier serisi ve ortogonal polinomların nümerik hesaplamalarında yararlıdır. Chebyshev polinomunun kullanımı, iki boyutlu sistemlerde sınır hatalarını en aza indirmek için bir kolaylıktır. Chebyshev polinomlarının çözümünde bazı durumlarda değişkenleri değiştirip yerine koyma çok faydalı bir özelliktir. Harmonik osilatör problemlerinin çözümünde özel sınır şartları tanımlamada bu yöntemden yararlanılır. Değişken değiştirmeler genel olarak $\cos(n\theta)$ ve $\sin(n\theta)$ şeklinde harmonik osilatör denklemleri gibi eşitliklerin çözümünü kolaylaştırır. Ortogonal polinomların tekraralama bağıntıları Çizelge (3.1)' de verilmiştir. Bu çizelgeden yararlanarak Legendre, Chebyshev, Laguerre ve Hermite polinomları hakkında bilgi elde edilebilir. Çizelge (3.1)' de belirtilen tekraralama bağıntıları kullanılarak Legendre, Chebyshev, Laguerre ve Hermite polinomları elde edilir. Bu polinomların katsayıları yine Çizelge (3.1)' de verildiği şekilde bulunur. Elde edilen katsayılar fonksiyonlarla birlikte yazılarak tanımlanırlar. Polinomların değişik mertebeleri hesaplanırken tekraralama bağıntılarından yararlanılabilir. Elde edilen polinomlar fizikte değişik hesaplamalar için kullanılabilir.

Çizelge 3.1. Ortogonal Polinomlar Tekrarlama Bağıntısı (Arfgen ve Weber, 1995)

$$Z_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)Z_n(x) - C_n Z_{n-1}(x)$$

	$Z_n(x)$	A_n	B_n	C_n
Legendre	$P_n(x)$	$\frac{2n+1}{n+1}$	0	$\frac{1}{n+1}$
Chebyshev I	$T_n(x)$	2	0	1
Ötelenmiş Chebyshev I	$T_n^*(x)$	4	-2	1
Chebyshev II	$U_n(x)$	2	0	1
Ötelenmiş Chebyshev II	$U_n^*(x)$	4	-2	1
Laguerre	$L_n(x)$	$\frac{-1}{n+1}$	$\frac{2n+1}{n+1}$	$\frac{-n}{n+1}$
Hermite	$H_n(x)$	2	0	2n

Çizelge 3.2. Chebyshev Polinomları, İkinci Tip (Arfgen ve Weber, 1995)

$$\begin{aligned}
 U_0(\mu) &= 1 \\
 U_1(\mu) &= 2\mu \\
 U_2(\mu) &= 4\mu^2 - 1 \\
 U_3(\mu) &= 8\mu^3 - 4\mu \\
 U_4(\mu) &= 16\mu^4 - 12\mu^2 + 1 \\
 U_5(\mu) &= 32\mu^5 - 32\mu^3 + 6\mu \\
 U_6(\mu) &= 64\mu^6 - 80\mu^4 + 24\mu^2 - 1 \\
 U_7(\mu) &= 128\mu^7 - 192\mu^5 + 80\mu^3 - 8\mu \\
 U_8(\mu) &= 256\mu^8 - 448\mu^6 + 240\mu^4 - 40\mu^2 + 1 \\
 U_9(\mu) &= 512\mu^9 - 1024\mu^7 + 672\mu^5 - 160\mu^3 + 10\mu
 \end{aligned}$$

Çizelge 3.2' den yararlanarak Chebyshev polinomları ikinci tipi için aşağıdaki özel değerler bulunabilir;

$$\begin{aligned}
 U_n(1) &= n+1 \\
 U_n(-1) &= (-1)^n (n+1) \\
 U_{2n}(0) &= (-1)^n \\
 U_{2n+1}(0) &= 0
 \end{aligned}$$

$U_n(\mu)$ için Rodrigues bağıntısı (Arfgen ve Weber, 1995),

$$U_n(\mu) = \frac{(-1)^n (n+1) \pi^{1/2}}{2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2}) (1-\mu^2)^{1/2}} \frac{d^n}{d\mu^n} [(1-\mu^2)^{n+1/2}] \quad (3.39)$$

ile verilmektedir. Ayrıca ikinci tip Chebyshev polinomlarını elde etmenin diğer bir yolu da aşağıda verilen matrisin determinantını almaktır.

$$U_n(\mu) = \det \begin{bmatrix} 2\mu & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\mu & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\mu & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\mu & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

örnek olarak $U_2(\mu)$ yi elde etmek istiyorsak yukarıdaki determinantta 2x2 'lik kare matrisin determinantı alınmalıdır ve sonuç beklendiği gibi $U_2(\mu) = 4\mu^2 - 1$ ' dir.

3.3.3. Türev Bağıntısı

$U_n(\mu)$, II. tip Chebyshev polinomlarının kullanışlı bir özelliği olan türev bağıntıları aşağıda verilmiştir (Arfgen ve Weber, 1995).

$$(1-\mu^2) \frac{dU_n(\mu)}{d\mu} = -n\mu U_n(\mu) + (n+1)U_{n-1}(\mu) \quad (3.41)$$

$$(1-\mu^2) \frac{d^2U_n(\mu)}{d\mu^2} = 3\mu \frac{dU_n(\mu)}{d\mu} - n(n+2)U_n(\mu) \quad (3.42)$$

$$2(1-\mu^2) \frac{dU_n(\mu)}{d\mu} = 2U_{n-1}(\mu) + n(U_{n-1}(\mu) - U_{n+1}(\mu)) \quad (3.43)$$

Chebyshev polinomlarının türevleri yukarıda belirtilen kurallar çerçevesinde alınır.

3.3.4. Ortogonalite (Diklik)

Klasik ortogonal polinomlarda olduğu gibi II. Tip Chebyshev polinomları da $\sqrt{1-\mu^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogondur ve ortogonalite (diklik) bağıntısı;

$$\int_{-1}^1 U_m(\mu)U_n(\mu)\sqrt{1-\mu^2}d\mu = \frac{\pi}{2}\delta_{m,n} \quad (3.44)$$

ile verilmektedir. Polinomun bu özelliği verilen bir $f(\mu)$ fonksiyonunu Chebyshev polinomları cinsinden seriye açmada kullanılır;

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n U_n(\mu) \quad (3.45)$$

Denklem (3.45)'in her iki tarafı $U_m(\mu)\sqrt{1-\mu^2}$ ile çarpılıp sonuç denklemin $(-1,1)$ aralığında integrali alındığında C_n katsayıları belirlenir.

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(\mu)U_n(\mu)\sqrt{1-\mu^2}d\mu \quad (3.46)$$

3.4. Chebyshev Polinomu Yaklaşımı : U_N Metodu

İzotropik saçılmalı ve dış kaynağın olmadığı durumda tek boyutlu dilim geometride nötron transport denklemi;

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma_T \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_{s0}}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad -a \leq x \leq a, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (3.47)$$

şekindedir. Buradaki parametreler daha önce P_N yönteminde anlatıldığı gibidir. Bu çalışmada Denklem (3.47)'nin çözümü için yeni bir yöntem önereceğiz. $\psi(x, \mu)$ açılmalak II. Tip Chebyshev polinomları cinsinden seriye açacağız ve akı momentlerinin çözümü ve değerlendirilmesi üzerinde duracağız. Bunun için öncelikle $\psi(x, \mu)$ açılmalak akısının

$$\psi(x, \mu) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\mu^2} \sum_{n=0}^N \phi_n(x) U_n(\mu), \quad -a \leq x \leq a, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (3.48)$$

şeklinde bir seri ile verildiğini kabul edelim. Bu denklemi (3.47)'da yerine yazalım ve II. Tip Chebyshev Polinomları için aşağıda verilen ortogonalite ve tekrarlama bağıntılarını kullanarak;

$$\int_{-1}^1 U_n(\mu)U_m(\mu)\sqrt{1-\mu^2}d\mu = \begin{cases} \pi/2, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (3.49)$$

Chebyshev polinomlarının II. Tipinde tekrarlılama bağıntısından;

$$2\mu U_n(\mu) = U_{n+1}(\mu) + U_{n-1}(\mu), \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (3.50)$$

akı momentlerini elde edebiliriz.

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} + 2\sigma_T\phi_0(x) = 2\sigma_{s0}\phi_0(x). \quad (3.51)$$

$$\frac{d\phi_2(x)}{dx} + \frac{d\phi_0(x)}{dx} + 2\sigma_T\phi_1(x) = 0. \quad (3.52)$$

elde edilir ve genel olarak;

$$\frac{d\phi_{n+1}(x)}{dx} + \frac{d\phi_{n-1}(x)}{dx} + 2\sigma_T\phi_n(x) = \frac{1+(-1)^n}{n+1}\sigma_s\phi_0(x), \quad -a \leq x \leq a \quad (3.53)$$

bağıntısı elde edilmektedir. Daha önceki bölümde, P_N yaklaşımında, $n=1$ durumunun difüzyon yaklaşımına eşdeğer olduğunu göstermiştik. Benzer şekilde burada da $n=1$ durumunun difüzyon yaklaşımına eşdeğer sonuçlar verdiği görülmektedir. $n=1$ için $\phi_{n+1}(x) = 0$, $n \geq 1$ olduğundan Denklem (3.52)' den

$$\phi_1(x) = -\frac{1}{2\sigma_T} \frac{d\phi_0(x)}{dx}. \quad (3.54)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı yaygın olarak Fick's kanunu olarak bilinir. Genel geometride nötron akımı ile nötron skaler akısı arasındaki ilişki

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -D\nabla\phi(\mathbf{r}). \quad (3.55)$$

şeklinde tanımlanır. Burada D difüzyon katsayısıdır. Denklem (3.55) tek boyut için Denklem (3.54)'e eşdeğerdir. Denklem (3.54) Denklem (3.51)'de kullanılırsa,

$$\frac{d^2\phi_0(x)}{dx^2} - 4\sigma_T^2(1-c)\phi_0(x) = 0, \quad c = \sigma_{s0} / \sigma_T. \quad (3.56)$$

kaynaksız difüzyon bağıntısı elde edilebilir. Bu denklemin elde edilmesinde $n=1$ durumunu kullandığımızdan bu yaklaşımı U_1 yaklaşımı olarak adlandıracağız. Bu yaklaşıma göre difüzyon sabiti ve difüzyon uzunlukları sırası ile

$$D = \frac{1}{2\sigma_T} \quad (3.57)$$

$$L = \frac{1}{2\sigma_T \sqrt{1-c}}, \quad c = \sigma_{s0} / \sigma_T \quad (3.58)$$

bulunur. Sonuç olarak U_1 ve P_1 yaklaşımında difüzyon sabiti D , ve difüzyon uzunluğu (nötronun kaynaktan ayrıldıktan sonra gidebileceği yol) L aşağıdaki gibidir.

<u>Yaklaşım</u>	<u>Difüzyon Sabiti</u>	<u>Difüzyon Uzunluğu</u>
U_1	$D = \frac{1}{2\sigma_T}$	$L = \frac{1}{2\sigma_T \sqrt{1-c}}$
P_1	$D = \frac{1}{3\sigma_T}$	$L = \frac{1}{\sigma_T \sqrt{3(1-c)}}$

Denklem (3.53) için genel çözümün;

$$\phi_n(x) = G_n(\nu) \exp(\sigma_T x / \nu) \quad (3.59)$$

olduğunu kabul edelim. Bu eşitlik Denklem (3.53)'de kullanıldığında bütün $G_N(\nu)$ ' ler için analitik ifadeler bulunmaktadır;

$$G_0(\nu) = 1 \quad (3.60)$$

$$G_1(\nu) = -2\nu(1-c)G_0(\nu), \quad c = \sigma_{s0} / \sigma_T. \quad (3.61)$$

$$G_2(\nu) + 2\nu G_1(\nu) + G_0(\nu) = 0 \quad (3.62)$$

$$G_3(\nu) + 2\nu G_2(\nu) + G_1(\nu) - \frac{2}{3}\nu c G_0(\nu) = 0 \quad (3.63)$$

$$G_4(\nu) + 2\nu G_3(\nu) + G_2(\nu) = 0 \quad (3.64)$$

ve genel olarak .

$$G_{n+1}(\nu) + 2\nu G_n(\nu) + G_{n-1}(\nu) = \frac{1+(-1)^n}{n+1} \nu c G_0(\nu), \quad n \geq 1. \quad (3.65)$$

şeklinde yazılabilir. Bulduğumuz bu $G_n(\nu)$ fonksiyonları ν özdeğerinin hesaplanmasında çok büyük kolaylıklar sağlamaktadır. P_N ve U_N yaklaşımının temelinde yatan gerçek, $\psi(x, \mu)$ açılal akısını sonlu bir N değerine kadar seriye açmaktır. Örnek olması bakımından $n=1$ durumu için $G_{n+1}(\nu) = 0, n \geq 1$ olacağından Denklem (3.62)' den

$$\nu = \pm \frac{1}{2\sqrt{1-c}} \quad (3.66)$$

analitik ifadesi bulunur. Hangi mertebeden bir yaklaşım kullanılacaksa Denklem (3.65)' i kullanarak $G_{n+1}(\nu) = 0$ denklemini çözümlmek ν özdeğerlerinin hesaplanması için yeterlidir. ν özdeğerlerinin hesaplanabileceği yöntem sadece bu değildir, bunun yanında Denklem (3.65)' i kullanarak $(N + 1) \times (N + 1)$ elemanlı bir kare matris oluşturulur ve sonuç olarak bu kare matrisin determinantını sıfıra eşitleyerek ν özdeğerleri hesaplanabilmektedir. Denklem (3.65)'i kullanarak oluşturulan kare matris aşağıda verilmiştir.

$$|M(\nu)|\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

$$\begin{bmatrix} 2\nu(1-c) & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 2\nu & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ -\frac{2}{3}\nu c & 1 & 2\nu & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2\nu & 1 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -\frac{1+(-1)^n}{n+1}\nu c & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\nu \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Burada matrisin katsayısı $(N + 1) \times (N + 1)$ kare matris ve $\mathbf{G} = [G_0, G_1, \dots, G_N]^T$ de bir sütun vektörüdür. Hesaplamalar sonucunda elde edilen ν özdeğerleri için yorumlar daha sonraki bölümde verilecektir. Sonuç olarak $\nu_k, k = 1, \dots, N + 1$, özdeğerleri kullanılarak akı momentleri için genel çözüm N tek sayılar olmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} \beta_k G_n(\nu_k) [\exp(\sigma_T x / \nu_k) + (-1)^n \exp(-\sigma_T x / \nu_k)] \quad n = 1, \dots, N \quad (3.69)$$

Burada $G_n(-\nu_k) = (-1)^n G_n(\nu_k)$ özelliği kullanılmıştır ve β_k da sistemin sınır şartlarından belirlenebilecek sabitlerdir.

Bu çalışmadaki asıl amaçlardan biri de farklı c (temel özdeğer olup çarpışma başına ortaya çıkan ortalama nötron sayısı olarak bilinir) değerleri için kritik kalınlıkların hesaplanmasıdır. Kritik kalınlıkların hesaplanması için akı momentlerinin çözümünde kullanılacak fiziksel sınır şartlarından yararlanılacaktır. Mark ve Marshak olmak üzere iki tip sınır şartı kullanılacaktır. Her iki sınır şartından elde edilecek sonuçlar karşılaştırılacaktır.

3.4.1. Mark Sınır Şartı

Mark sınır şartı vakum ile sınırlı bir yüzeyde nötron açılal akısının sürekli olmasını gerektirmektedir. Bu durum dilim geometride matematiksel olarak;

$$\psi(a, \mu_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq (N + 1)/2 \quad (3.70)$$

şeklinde verilmektedir. Burada μ_k 'lar $U_{N+1}(\mu)$ Chebyshev polinomunun pozitif kökleridir ve $\mu_k = \cos(k\pi/(N + 1))$, $1 \leq k \leq (N + 1)/2$ ile verilmektedir. Denklem (3.69), Denklem (3.48)' de kullanılıp sonuçta elde edilen denkleme, Denklem (3.70) ile verilen Mark sınır şartını uygularsak kritiklik denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} \beta_k G_n(v_k) \left\{ (1 + (-1)^n) \cosh(\sigma_T a / v_k) + (1 - (-1)^n) \sinh(\sigma_T a / v_k) \right\} U_n(\mu_k) = 0 \quad (3.71)$$

Denklem (3.71) matris biçiminde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left[M_m^k(a) \right] \mathbf{B}_k = \mathbf{0}. \quad (3.72)$$

Burada \mathbf{B}_k sütun vektörü olup elemanları $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{(N+1)/2}]^T$ 'dir ve $[M_m^k(a)]$ de kare matristir. U_1 yaklaşımı kullanılarak yarı kalınlık analitik olarak

$$a = \frac{1}{2\sigma_T \sqrt{1-c}} \tanh^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-c}} \right) \quad (3.73)$$

olarak bulunur.

3.4.2. Marshak Sınır Şartı

Marshak sınır şartı ise vakum ile çevrili bir yüzeyde sisteme nötron giriş akımının sıfır olmasını gerektirir. Bu durum matematiksel olarak

$$\int_0^1 U_k(-\mu) \psi(a, -\mu) d\mu = 0 \quad k = 1, 3, 5, \dots, N. \quad (3.74)$$

bağıntısı ile verilir. Denklem (69)' yi Denklem (48)' de kullanır ve Denklem (74) için yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^{\frac{N+1}{2}} \beta_m G_n(v_m) \left\{ (1 + (-1)^n) \cosh(\sigma_T a / v_m) + (1 - (-1)^n) \sinh(\sigma_T a / v_m) \right\} I_{n,k} = 0 \quad k = 1, 3, 5, \dots, N. \quad (3.75)$$

denklemini elde ederiz. Denklem içerisinde kullanılan $I_{n,k}$, aşağıda verilen integral ile temsil edilmektedir.

$$I_{n,k} = \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin \theta} \sin \theta (-\sin \theta) d\theta \quad (3.76)$$

ve yukarıdaki denklem düzenlendiğinde

$$I_{n,k} = \int_0^{\pi/2} \sin((n+1)\theta) \sin((k+1)\theta) d\theta \quad (3.77)$$

elde edilir. Bu integralin sonucu

$$I_{n,k} = \left[\frac{\sin((n-k)\theta)}{2(n-k)} - \frac{\sin((n+k+2)\theta)}{2(n+k+2)} \right] \Bigg|_0^{\pi/2} \quad (3.78)$$

ile verilir. Sınır şartları yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$I_{n,k} = \int_0^1 U_n(\mu) U_k(\mu) \sqrt{1-\mu^2} d\mu = \begin{cases} \pi/4, & n=k=0 \\ \pi/4, & n=k \neq 0 \\ \frac{\sin((n-k)\pi/2)}{2(n-k)} + \frac{\sin((n+k)\pi/2)}{2(n+k+2)}, & n \neq k \end{cases} \quad (3.79)$$

bulunur ve sonuç olarak

$$\int_0^1 U_n(-\mu) U_k(-\mu) \sqrt{1-\mu^2} d\mu = (-1)^{n+k} I_{n,k} \quad (3.80)$$

yazılabilir. Bu integralin eldesinde Chebyshev polinomlarının $U_n(-\mu) = (-1)^n U_n(\mu)$ ile verilen özelliği kullanılmıştır.

Marshak sınır şartı kullanılarak U_1 yaklaşımına göre yapılan kritik yarı kalınlık için analitik ifade

$$a = \frac{1}{2\sigma_T \sqrt{1-c}} \tanh^{-1} \left(-\frac{8}{3\pi \sqrt{1-c}} \right) \quad (3.81)$$

ile verilir. Her iki sınır şartı ile elde edilen sonuçlar çeşitli c değerleri için çizelgeler halinde verilecektir. Hesaplamalar karşılaştırma amacı ile hem P_N hem de U_N metoduna göre ayrı ayrı hesaplanacaktır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Şimdiye kadar bu konuda yapılan çalışmalara bakıldığında P_N metodu veya Green fonksiyonları kullanılarak kritik kalınlıkların hesaplandığını görmekteyiz. Bu çalışmada P_N metoduna benzer alternatif bir metot uygulayarak dilim geometride kritik yarı kalınlıkları hesapladık. Uzunluk boyutu CGS sisteminde cm ' dir. Materyal ve Metot kısmında görüleceği üzere transport denkleminde kullanılan σ_T ve σ_{s_0} (toplam ve saçılma diferansiyel tesir kesitleri) niceliklerinin birimleri cm^{-1} ' dir. Reaktör fiziğinde $\frac{1}{\sigma_T}$ niceliği nötronun soğurulmadan önce gidebileceği ortalama yol (mean free path) olarak bilinir. Denklem (3.81) incelendiğinde denklemin $\frac{1}{\sigma_T}$ terimini içerdiği görülmektedir. Bu denklemden $\frac{1}{\sigma_T}$ ' yi kaldırdığımızda a 'nın birimi mfp (mean free path) olur. Bu çalışmamızın tüm sayısal hesaplamalarında $\sigma_T = 1cm^{-1}$ kullandık ve sonuç olarak a 'nın biriminin doğrudan cm olacağı aşikardır. Buna göre Çizelgelerde verilen kritik yarı kalınlık değerlerinin birimi cm ' dir.

Yaptığımız bu çalışmada nötron açılal akısını II. Tip Chebyshev polinomları cinsinden sonlu bir seriye açtık. Önerdiğimiz bu seri ifadesini nötron transport denkleminde uygulayarak akı momentlerini elde ettik. Akı momentlerinin çözümü için uygun matematiksel varsayımlar kullanıldı. Bu varsayımlar yardımı ile tıpkı P_N yaklaşımında olduğu gibi asimptotik ve sürekli çözümler elde ettik. Uyguladığımız bu U_N metoduna göre sistemin asimptotik ve sürekli çözümlerinin olabileceğini gösteren ν özdeğerlerinin çeşitli c (filyon başına ortaya çıkan ortalama nötron sayısı) değerleri için değerleri çizelgelerde verilmiştir.

Dilim geometride P_N ve U_N metodundaki ν özdeğerleri $c = 0$ olduğu durumda, $\alpha_{N+1}(\nu) = 0$ ve $G_{N+1}(\nu) = 0$ denklemleri çözümlenerek elde edildi. $\alpha_{N+1}(\nu) = 0$ ' dan elde edilen kökler $P_{N+1}(\nu) = 0$ ifadesinden elde edilen köklerle özdeştir. Aynı şekilde $G_{N+1}(\nu) = 0$ ' dan elde edilen kökler de $U_{N+1}(\nu) = 0$ ifadesinden elde edilen köklerle özdeştir ve bu kökler $[-1, +1]$ aralığındadır. Eğer $0 < c < 1$ aralığında ise bütün özdeğerler reeldir ve bir çifti daima 1 ' den büyüktür (Nötron transport denkleminin asimptotik çözümü). Diğerleri ise $[-1, 1]$ aralığındadır. Eğer $c = 1$ ise özdeğerlerin bir çifti $\pm i\infty$ ve diğerleri $[-1, 1]$ aralığındadır. Son olarak $c > 1$ ise özdeğerlerin bir çifti sanal, diğerleri $[-1, 1]$ aralığındadır. Kritik yarı kalınlık hesaplamasında denklemin negatif ν özdeğerleri, pozitif ν özdeğerlerinin simetriği olduğundan; pozitif özdeğerleri kullanıldı. Her iki metotla elde edilen ν özdeğerleri yukarıda anlatılan özelliklere uymaktadır.

Çizelge 1. Dilim Geometride Kritik Kalınlık (cm, Mark Sınır Şartı)

c	U_1	P_1	U_3	P_3	U_5	P_5	U_7	P_7	U_9	P_9
1.01	7.3556	8.4936	8.3600	8.3350	8.3336	8.3325	8.3331	8.3308	8.3303	8.3303
1.10	1.9994	2.3087	2.1473	2.1353	2.1172	2.1210	2.1174	2.1173	2.1154	2.1158
1.20	1.2860	1.4850	1.3259	1.3186	1.2939	1.2986	1.2942	1.2940	1.2916	1.2922
1.30	0.9765	1.1276	0.9771	0.9734	0.9436	0.9490	0.9433	0.9430	0.9402	0.9409
1.40	0.7960	0.9191	0.7785	0.7773	0.7444	0.7502	0.7429	0.7428	0.7394	0.7401
1.60	0.5885	0.6796	0.5575	0.5590	0.5238	0.5300	0.5201	0.5203	0.5155	0.5165
1.80	0.4702	0.5429	0.4360	0.4388	0.4042	0.4102	0.3988	0.3993	0.3934	0.3946
2.00	0.3927	0.4535	0.3588	0.3620	0.3291	0.3348	0.3228	0.3235	0.3169	0.3182

Çizelge 2. Dilim Geometride Kritik Kalınlık (cm, Marshak Sınır şartı)

c	U_1	P_1	U_3	P_3	U_5	P_5	U_7	P_7	U_9	P_9
1.01	7.2676	8.4053	8.3545	8.3350	8.3287	8.3318	8.3316	8.3308	8.3296	8.3305
1.10	1.9198	2.2287	2.1410	2.1213	2.1117	2.1159	2.1157	2.1147	2.1136	2.1142
1.20	1.2141	1.4125	1.3177	1.3020	1.2876	1.2926	1.2921	1.2910	1.2897	1.2904
1.30	0.9108	1.0613	0.9671	0.9549	0.9365	0.9420	0.9408	0.9396	0.9381	0.9388
1.40	0.7356	0.8581	0.7672	0.7577	0.7364	0.7422	0.7401	0.7388	0.7370	0.7378
1.60	0.5365	0.6269	0.5443	0.5384	0.5145	0.5205	0.5164	0.5154	0.5126	0.5136
1.80	0.4244	0.4966	0.4221	0.4182	0.3939	0.3997	0.3944	0.3935	0.3900	0.3911
2.00	0.3519	0.4121	0.3447	0.3421	0.3183	0.3239	0.3177	0.3171	0.3129	0.3141

Bu çalışmada, II. Tip Chebyshev polinomu yaklaşımı yani U_N metodu kullanılarak izotropik saçılmalı ve tek enerjili nötron taşınma denklemi ortam dilimi için kritik yarı kalınlıklar hesaplandı. Hesaplamalarda yaygın olarak kullanılan Mark ve Marshak sınır şartları kullanıldı. Dilimin yarı kalınlıkları her iki sınır şartı için de ayrı ayrı tablolarda farklı c değerleri için gösterildi. Bulunan sonuçları karşılaştırabilmek amacıyla hem P_N hem de U_N metoduna göre elde edilen sayısal veriler aynı çizelge içerisinde verildi. Bulunan sonuçlarda N değeri büyüdükçe P_N ve U_N için bulunan değerlerin birbirine yaklaştığı görülür. Hesaplamalarda bulunan sonuçlar virgülden sonra dördüncü basamağa kadar yukarı yuvarlama yapılarak verildi.

Çizelge 1’de c ’nin 1.10 ve 1.20 değerleri için U_7 yaklaşımında kritik kalınlık değerinin azalması beklenirken çok küçük bir artış gözlenmektedir. Bu artış sonucu etkileyecek değerde değildir.

Çizelge 2’de Marshak sınır şartı için elde edilen değerler incelendiğinde U_7 yaklaşımı için c ’nin 2.00 değeri hariç tüm değerlerinde kritik kalınlık değerlerinin azalması beklenirken çok küçük bir artış gözlenmektedir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada dış kaynağın olmadığı tek boyutlu, aynı enerjili izotropik saçılmalı, nötron transport denklemi için ikinci tip Chebyshev polinomu yaklaşımı ile dilim geometride kritik yarı kalınlığın çözümü yapıldı. Bu yöntemle çözümün yapılması için önce Chebyshev polinomlarının özellikleri araştırıldı. Bu özellikler Legendre polinomları ile karşılaştırıldı. Chebyshev polinomları argümanlarının değişim aralığının Legendre polinomlarında olduğu gibi $[-1,1]$ aralığında değişiyor olması bu polinomlar ile nötron transport denkleminin çözülebileceği fikrini ortaya çıkardı. Nötron transport denklemi önce Chebyshev polinomu cinsinden seriye açıldı. Seriye açılımından elde edilen denklemlerden özdeğerler hesaplandı. Bulunan özdeğerlerin P_N yaklaşımında elde edilen özdeğerlerle uyumlu olduğu görüldü. Hem P_N hem de U_N yaklaşımı için difüzyon sabiti ve difüzyon uzunluğu elde edildi. Bulunan sonuçların karşılaştırılması yapıldı. Bulunan özdeğerler kullanılarak kritik kalınlıkların hesaplanması için yaygın olarak kullanılan Mark ve Marshak sınır şartları kullanıldı. Hem Mark hem de Marshak sınır şartı için U_I yaklaşımı için analitik ifadeler elde edildi. Elde edilen bu eşitliklerden Çizelgelerdeki U_I değerleri hesaplandı.

Küresel harmoniklerin önemi, Laplace denkleminin bir formu olan Sturm-Liouville'nin bir sonucunda yatmasıdır. Bu özelliğe göre, kürenin dış yüzeyinden değerlendirilen herhangi bir $f(\theta, \varphi)$ fonksiyonu küresel harmoniklerin yakınsak çift serisi olarak aşağıdaki gibi açılabilir.

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m,n} a_{m,n} Y_n^m(\theta, \varphi)$$

Eğer $f(\theta, \varphi)$ biliniyorsa, katsayılar polinomların ortogonalite özelliği kullanılarak tamamı ile bulunabilir. Örnek olarak herhangi bir $f(\mu)$ fonksiyonu ;

$f(\mu) = a_0 P_0(\mu) + a_1 P_1(\mu) + a_2 P_2(\mu) + \dots + a_n P_n(\mu)$ şeklinde Legendre polinomu cinsinden seriye açılmış olsun. Aynı $f(\mu)$ fonksiyonu

$f(\mu) = b_0 U_0(\mu) + b_1 U_1(\mu) + b_2 U_2(\mu) + \dots + b_n U_n(\mu)$ şeklinde II.tip Chebyshev polinomu cinsinden seriye açıldığında b_n katsayılarının a_n katsayılarına göre daha çabuk sifıra yaklaştığı görülür. Bu çalışmamızda belirtilen özelliği kullanarak $f(\mu)$ fonksiyonunu II.tip Chebyshev polinomu cinsinden seriye açtık ve n 'nin küçük değerleri için yakınsaklık şartını sağladık.

İki sınır şartı ile elde edilen değerler P_N yöntemi ile elde edilen değerler ile karşılaştırıldı. Karşılaştırma sonucunda değerlerin birbiri içerisinde uyumlu olduğu gözlemlendi. Bu sonuç, nötron transport denkleminin çözümü için U_N yaklaşımının uygun olduğunu ortaya çıkardı.

KAYNAKLAR

- ANLI, F., GÜNGÖR, S., YAŞA, F., ÖZTÜRK, H. 2006. T_N approximation to reflected slab and computation of the critical half thicknesses. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 101: 135-140.
- ARFGEN, G.B. , WEBER, H.J. 1995. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press , London, 4.edition, 974s.
- ARONSON, R. 1984b. Critical problems for bare and reflected slabs and spheres. *Nuclear Science and Engineering*, 86:150-156.
- ATALAY, M. A., YILDIZ, C. 2002. P_N critically solutions of neutron transport equation with anisotropic scattering in reflected homogeneous slab and sphere. *Kerntechnik*, 67:276-283.
- BARROS, R. C. de, LARSEN, E. W. 1990. A numerical method for one-group slab-geometry discrete ordinates problems with no spatial truncation error. *Nuclear Science and Engineering*, 104:199-208.
- BELL, G. I. , GLASSTONE, S. 1972. *Nuclear Reactor Theory*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 604s.
- BROCKMANN, H. 1974. Comparison of different anisotropic scattering techniques in neutron transport codes. *Proc. 8th Symp. Fusion Technology*, Netherlands, 17-21.
- CASE, K. M., ZWEIFEL, P. F. 1967. *Linear Transport Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, London, 342s.
- CONKIE, W.R. 1959. Polynomial approximations in neutron transport theory. *Nuclear Science and Engineering*, 6:260-266.
- DAVISON, B. 1958. *Neutron Transport Theory*. Oxford University Press, London, 450s.
- DUDERSTADT, J. J., MARTIN, W. R. 1978. *Transport Theory*. The University of Michigan, Ann Arbor, 612s.
- FLETCHER, J.K. 1983. The solution of the multigroup neutron transport equation using spherical harmonics. *Nuclear Science and Engineering*, 84:33-46.
- KAŞKAŞ, A., TEZCAN, C., GÜLEÇYÜZ, M.Ç. 2000. The solution of the third form using singular eigenfunctions: the slab and the sphere criticality problems. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 66: 519-528.
- KRANE, K. S. 2001. *Nükleer Fizik I*. Palme Yayıncılık, Ankara, 404s.

- LAMARSH, J. R. 1977. Introduction to Nuclear Engineering. Wesley Publishing Company, California, 600s.
- LEE, C. E., PAN, W.C.P., DIAS, M. P. 1985. Analytical solutions to the moment transport equations-II. *Annals of Nuclear Energy* 12, (11):613-632.
- LEWIS, E. E., MILLER, W.F. 1984. Computational Methods of Neutron Transport. John Wiley & Sons, New York, 116s.
- MITSIS, G. J. 1963. Transport solutions to the monoenergetic critical problems. Argonne National Laboratory Report ANL-6787.
- OĞUL, R., EREN, N. 1999. Nükleer ve Reaktör Fiziği. Selçuk Üniversitesi Yayını, Konya, 228s.
- PROTOPODESCU, V., SJOSTRAND, N. G. 1981b. On the solution of the dispersion equation for monoenergetic neutron transport with quadratically anisotropic scattering. CTH-RF-36, Chalmers University, Sweden.
- SAHNI, D. C., DAHL, B., SJOSTRAND, N. G. 1997. Behaviour of criticality eigenvalues of one-speed transport operator with linearly anisotropic scattering. *Annals of Nuclear Energy*, 24:135-145.
- SHARMA, A. 2000. Spherical harmonics moments of neutron angular flux for spherically symmetric systems. *Annals of Nuclear Energy*, 28:715-721.
- TANYEL, B. 1994. Nükleer Fizik. Ege Üniversitesi Yayını, İzmir, 340s.
- WILLIAMS, M. M. R. 1971. Mathematical Methods in Particle Transport Theory. Butterworths, London, 442s.
- YABUSHITA, S. 1961. Tschebyscheff polynomials approximation method of the neutron transport equation. *Journal of Mathematical Physics*, 2: 543-549.
- YAŞA, F. 2002. Küresel geometride transport denkleminin spektral green fonksiyonu metodu ile çözümü. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Yayını, Adana, 62s.
- YILDIZ, C. 1998. Variation of the critical slab thickness with the degree of strongly anisotropic scattering in one-speed neutron transport theory. *Annals of Nuclear Energy*, 25(8): 529-540.
- YILDIZ, C. 1999. Influence of anisotropic scattering on the size of time-dependent systems in monoenergetic neutron transport. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 32: 317-325.
- YILDIZ, C. 2001. The spherical harmonics method for anisotropic scattering in neutron transport theory. The critical slab problem. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 71: 25-37.

Ek Çizelge 1. U_N Yaklaşımı için ν Özdeğerleri

c	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$
0.99	5	5.787918451 0.00	5.793426223 0.4315235758	5.796687093 0.6312042063 0.00	5.796711686 0.7523121890 0.2866356567	5.796729215 0.8185816683 0.4773410361 0.00
1.01	$5i$	5.759050847i 0.00	5.753734204i 0.4345004325	5.750498701i 0.6336944466 0.00	5.750522831i 0.7541695790 0.2882263425	5.750540099i 0.8199377502 0.4793191627 0.00
1.10	1.581138830i	1.779513042i 0.00	1.765550651i 0.4477749842	1.755490049i 0.6442659735 0.00	1.756203295i 0.7617608140 0.2954721805	1.756712133i 0.8253881125 0.4879603638 0.00
1.20	1.118033989i	1.224744871i 0.00	1.209762577i 0.4620881859	1.195286067i 0.6547585670 0.00	1.197230894i 0.7688709860 0.3036432472	1.198544556i 0.8303736243 0.4969795750 0.00
1.60	0.6454972244i	0.6236095645i 0.00	0.6321230613i 0.5105787654	0.5984459354i 0.6850172616 0.00	0.6099591791i 0.7876073232 0.3359107256	0.6134804478i 0.8431091370 0.5259623122 0.00
1.80	0.5590169944i	0.5000000000i 0.00	0.5286856317i 0.5286856317	0.4826443065i 0.6949428225 0.00	0.5023763351i 0.7933687471 0.3506394348	0.5051223901i 0.8469514977 0.5364902512 0.00
2.00	0.5000000000i	0.4082482904i 0.00	0.4601975359i 0.5432449774	0.4004459362i 0.7026309709 0.00	0.4306530566i 0.7977560115 0.3638416341	0.4311875630i 0.8498664405 0.5449615412 0.00

$$i = \sqrt{-1}$$

Ek Çizelge 1. (Devamı) U_N Yaklaşımı için ν Özdeğerleri

c	$N=8$	$N=9$	$N=10$	$N=11$	$N=12$	$N=13$
0.99	5.796729347 0.8648324172 0.5969763692 0.2088372153	5.796729450 0.8939319105 0.6852010400 0.3596011110 0.00	5.796729451 0.9158302608 0.7445466320 0.4768000755 0.1658149874	5.796729451 0.9309424575 0.7911000614 0.5623676349 0.2986254264 0.00	5.796729451 0.9428826263 0.8244860885 0.6319240718 0.4013818202 0.1367015478	5.796729451 0.9516620018 0.8517437788 0.6843699923 0.4865455438 0.2484165567 0.00
1.01	5.750539970i 0.8658117176 0.5987092181 0.2096679201	5.750539871i 0.8946720890 0.6866602278 0.3606961714 0.00	5.750539871i 0.9163876976 0.7457298136 0.4780031491 0.1663603742	5.750539872i 0.9313806598 0.7920558550 0.5634907526 0.2994961100 0.00	5.750539871i 0.9432265154 0.8252661035 0.6329616551 0.4023352865 0.1370679362	5.750539871i 0.9519412668 0.8523793257 0.6852872164 0.4875350124 0.2489789392 0.00
1.10	1.756676521i 0.8696941066 0.6060658287 0.2134528193	1.756648599i 0.8975869633 0.6926998573 0.3655847189 0.00	1.756650556i 0.9185708483 0.7505575647 0.4832561426 0.1688459299	1.756652162i 0.9330918428 0.7959044675 0.5683149515 0.3034039564 0.00	1.7566522050i 0.9445662030 0.8283835765 0.6373438677 0.4065470640 0.1387349099	1.756651954i 0.9530277883 0.8549011096 0.6891182496 0.4918325207 0.2515121459 0.00
1.20	1.198372538i 0.8731796159 0.6133874466 0.2177382354	1.198235401i 0.9001811370 0.6984753642 0.3709099122 0.00	1.198253426i 0.9205001971 0.7550773363 0.4887536218 0.1716647142	1.198268237i 0.9345987188 0.7994389595 0.5732242197 0.3077065903 0.00	1.198266291i 0.9457426299 0.8312170122 0.6416810804 0.4110503626 0.1406209498	1.198264637i 0.9539805323 0.8571703431 0.6928436726 0.4962916291 0.2543237152 0.00
1.60	0.6123773543i 0.8818814108 0.6348324506 0.2353509542	0.6110341457i 0.9065956175 0.7142776915 0.3903403691 0.00	0.6114586731i 0.9252359557 0.7670616942 0.5068591262 0.1834160006	0.6117613524i 0.9382855864 0.8085568870 0.5884448517 0.3239624030 0.00	0.6116663643i 0.9486144611 0.8384293107 0.6544159399 0.4267418151 0.1484754120	0.6115804756i 0.9563044398 0.8628724536 0.7034461187 0.5107372718 0.2653030967 0.00
1.80	0.5040704589i 0.8844716296 0.6420295837 0.2441208258	0.5016510451i 0.9084960194 0.7192999578 0.3986180182 0.00	0.5025805913i 0.9266344700 0.7707877890 0.5137387846 0.1894583209	0.5031071002i 0.9393734482 0.8113372564 0.5939000977 0.3312232017 0.00	0.5029073831i 0.9494616443 0.8406105660 0.6587588627 0.4331042766 0.1525442381	0.5027015877i 0.9569903275 0.8645826630 0.7069683333 0.5161508331 0.2704797798 0.00
2.00	0.4309495573i 0.8864317016 0.6476702573 0.2526122141	0.4270351050i 0.9099335451 0.7231689316 0.4058816998 0.00	0.4287674345i 0.9276922897 0.7736421483 0.5194413141 0.1955004094	0.4294482326i 0.9401966342 0.8134559322 0.5983143691 0.3377850938 0.00	0.4291528378i 0.9501030655 0.8422699562 0.6622059915 0.4385551938 0.1566637954	0.4287588519i 0.9575099544 0.8658811572 0.7097387955 0.5206165399 0.2753565981 0.00

$$i = \sqrt{-1}$$

Ek Çizelge 2. P_N Yaklaşımı için ν Özdeğerleri

c	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$
0.99	5.773502692	5.796550698 0.00	5.796728080 0.5050608168	5.796729441 0.7134696215 0.00	5.796729451 0.8152587259 0.3113153430	5.796729451 0.8717253854 0.5033956062 0.00
1.01	5.773502692 <i>i</i>	5.750362307 <i>i</i> 0.00	5.750541216 <i>i</i> 0.5091173350	5.750539864 <i>i</i> 0.7163470902 0.00	5.750539874 <i>i</i> 0.8170921343 0.3131117484	5.750539874 <i>i</i> 0.8729205735 0.5054072083 0.00
1.10	1.825741858 <i>i</i>	1.751190071 <i>i</i> 0.00	1.757034591 <i>i</i> 0.5269219538	1.756624892 <i>i</i> 0.7281314805 0.00	1.756653875 <i>i</i> 0.8243714313 0.3212697841	1.756651832 <i>i</i> 0.8775962284 0.5141677423 0.00
1.20	1.290994449 <i>i</i>	1.183215957 <i>i</i> 0.00	1.200164425 <i>i</i> 0.5454699848	1.198011237 <i>i</i> 0.7391495351 0.00	1.198298461 <i>i</i> 0.8308938951 0.3304101992	1.198260588 <i>i</i> 0.8817075948 0.5232635748 0.00
1.60	0.7453559925 <i>i</i>	0.5374838499 <i>i</i> 0.00	0.6278301076 <i>i</i> 0.6020171196	0.6057890167 <i>i</i> 0.7675953067 0.00	0.6133565215 <i>i</i> 0.8469135449 0.3656379969	0.6110608492 <i>i</i> 0.8916192039 0.5521831971 0.00
1.80	0.6454972244 <i>i</i>	0.3872983346 <i>i</i> 0.00	0.5273616207 <i>i</i> 0.6206876317	0.4910736741 <i>i</i> 0.7760569982 0.00	0.5067627814 <i>i</i> 0.8515621985 0.3811649279	0.5012194995 <i>i</i> 0.8944762692 0.5625991522 0.00
2.00	0.5773502692 <i>i</i>	0.2581988897 <i>i</i> 0.00	0.4611214048 <i>i</i> 0.6349087655	0.4094944928 <i>i</i> 0.7823874897 0.00	0.4358504705 <i>i</i> 0.8550331166 0.3947831039	0.4256671521 <i>i</i> 0.8966115108 0.5709625835 0.00

$$i = \sqrt{-1}$$

Ek Çizelge 2. (Devamı) P_N Yaklaşımı için ν Özdeğerleri

c	$N=8$	$N=9$	$N=10$	$N=11$	$N=12$	$N=13$
0.99	5.796729452 0.9060544831 0.6273436568 0.2238292764	5.796729452 0.9283892800 0.7110748353 0.3847605105 0.00	5.796729453 0.9436944328 0.7699468914 0.5025176741 0.1744915738	5.796729450 0.9546200135 0.8127644974 0.5905354032 0.3104154106 0.00	5.796729450 0.9626807528 0.8448061086 0.6577103778 0.4171774200 0.1429033009	5.796729450 0.9687915392 0.8693697776 0.7099714318 0.5019948800 0.2598240196 0.00
1.01	5.750539875i 0.9068661755 0.6291023614 0.2247949798	5.750539875i 0.9289627782 0.7125095323 0.3860667550 0.00	5.750539876i 0.9441138914 0.7710953194 0.5038536424 0.1750876519	5.750539877i 0.9549359838 0.8136832439 0.5917727357 0.3113063620 0.00	5.750539876i 0.9629248014 0.8455460520 0.6588080881 0.4181749879 0.1433061674	5.750539877i 0.9689840994 0.8699714145 0.7109265996 0.5029946657 0.2604639050 0.00
1.10	1.756651976i 0.9100179947 0.6365233379 0.2291974103	1.756651966i 0.9311811547 0.7184302903 0.3918751010 0.00	1.756651967i 0.9457332797 0.7757613975 0.5096558524 0.1778039547	1.756651967i 0.9561547526 0.8173750184 0.5970411777 0.3153015746 0.00	1.756651967i 0.9638658849 0.8484956515 0.6634077238 0.4225718155 0.1451399962	1.756651967i 0.9697267244 0.8723555993 0.7148779551 0.5073307695 0.2633443586 0.00
1.20	1.198265583i 0.9127648925 0.6438362855 0.2341840360	1.198264925i 0.9331063891 0.7240677306 0.3981510735 0.00	1.198265012i 0.9471360926 0.7801031182 0.5156681921 0.1808832591	1.198265000i 0.9572099373 0.8207562505 0.6023216481 0.3196929389 0.00	1.198265002i 0.9646807837 0.8511672046 0.6679005727 0.4272537672 0.1472163399	1.198265001i 0.9703701319 0.8744978056 0.7186614793 0.5118187561 0.2665363910 0.00
1.60	0.6117944351i 0.9193398886 0.6648778469 0.2546013091	0.6115647068i 0.9377044112 0.7394037614 0.4204308211 0.00	0.6116371537i 0.9504867154 0.7915200163 0.5349665368 0.1936854249	0.6116143742i 0.9597333136 0.8294564025 0.6181534541 0.3362011653 0.00	0.6116215421i 0.9666329806 0.8579425833 0.6807507414 0.4433901631 0.1558718558	0.6116192878i 0.9719146147 0.8798771215 0.7291259543 0.5262798711 0.2789127766 0.00
1.80	0.5033989326i 0.9212338243 0.6718386362 0.2646473879	0.5025817636i 0.9390309608 0.7442641847 0.4295662533 0.00	0.5028947741i 0.9514557706 0.7950518958 0.5420857764 0.2002289107	0.5027760278i 0.9604651442 0.8321087577 0.6236351119 0.3435292163 0.00	0.5028212523i 0.9672007601 0.8599891428 0.6850235593 0.4498502832 0.1603534809	0.5028040607i 0.9723650499 0.8814922900 0.7325120832 0.5316723430 0.2846753284 0.00
2.00	0.4303416983i 0.9226516390 0.6772701640 0.2742499870	0.4283685394i 0.9400258275 0.7480089275 0.4373946563 0.00	0.4292393922i 0.9521838129 0.7977552741 0.5479004683 0.2067327462	0.4288634686i 0.9610158702 0.8341315268 0.6280030314 0.3501287095 0.00	0.4290275091i 0.9676286813 0.8615466374 0.6883797712 0.4553484581 0.1648828480	0.4289563141i 0.9727050074 0.8827200011 0.7351479313 0.5361127047 0.2900481141 0.00

$$i = \sqrt{-1}$$

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Adana’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladı. 1999-2000 eğitim öğretim yılında Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü’nü kazandı. 2003 yılında lisans öğrenimini tamamladıktan sonra aynı yıl Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Yüksek lisans öğrenimi süresince Fen-Bilimleri Enstitüsü kadrosunda geçici araştırma görevlisi olarak görev yaptı. Halen bu görevini sürdürmektedir.