

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Dilek KAHYALAR

**SERBEST LİE CEBİRLERİ VE
SERBEST COLOR LİE SÜPERCEBİRLERİNİN
PRİMİTİF, Δ -PRİMİTİF VE TEST ELEMANLARI**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2006

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST LIE CEBİRLERİ VE SERBEST COLOR LIE
SÜPERCEBİRLERİNİN PRİMİTİF, Δ -PRİMİTİF VE TEST
ELEMANLARI

Dilek KAHYALAR
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez/...../..... Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

İmza.....
Prof.Dr.Naime EKİCİ
DANIŞMAN

İmza.....
Prof.Dr.Yusuf ÜNLÜ
ÜYE

İmza.....
Yrd.Doç.Dr.Gökhan ÇUVALCIOĞLU
ÜYE

İmza.....
Yrd.Doç.Dr.Perihan DİNÇ ARTUT
ÜYE

İmza.....
Yrd.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof.Dr Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

SERBEST LIE CEBİRLERİ VE SERBEST COLOR LIE
SÜPERCEBİRLERİNİN PRİMITİF, Δ -PRİMITİF VE TEST
ELEMANLARI

Dilek KAHYALAR

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof.Dr. Naime EKİCİ

Yıl: 2006, Sayfa: 39

Jüri : Prof.Dr.Naime EKİCİ

Prof.Dr.Yusuf ÜNLÜ

Yrd.Doç.Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

Yrd.Doç.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

Yrd.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL

Bu çalışmada L , $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi tarafından üretilen serbest color Lie süpercebiri olmak üzere L nin bir R alt cebiri için $R = L$ olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Bu sonuçtan hareket ederek özel olarak seçilen u_1, u_2, u_3 elemanlarının L için test elemanları olduğu gösterilmiştir. Ayrıca L nin hemen hemen primitif ve test elemanları bulunmuştur. Bununla birlikte L nin jenerik elemanlarının bir serisi de bulunmuştur. Son olarak çift Jacobian matristen yararlanarak serbest Lie cebirlerinde herhangi bir u elemanının Δ -primitif olabilmesi için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Bununla beraber F_n rankı n olan bir serbest Lie cebiri olmak üzere F_n nin otomorfizm grubunun tüm Δ -primitif elemanları kümesine geçişmeli olarak etki ettiği de gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serbest color Lie süpercebiri, jenerik eleman, hemen hemen primitif elemanlar, test elemanları

ABSTRACT

PhD. THESIS

PRIMITIVE, Δ -PRIMITIVE AND TEST ELEMENTS OF FREE LIE
ALGEBRA AND FREE COLOR LIE SUPERALGEBRA

Dilek KAHYALAR

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor Prof. Dr. Naime EKİCİ

Year: 2006, Pages: 39

Jury : Prof.Dr. Naime EKİCİ

Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ

Asst. Prof. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

Asst. Prof. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

Asst. Prof. Dr Zerrin ESMERLİGİL

Let L be a free color Lie superalgebra generated by a finite set $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. In this study it has been given necessary and sufficient conditions for any subalgebra R of L to be equal to L . From this result it has been shown that the elements specially choosen elements u_1, u_2, u_3 are the test elements for L . In addition, it has been obtained almost primitive and test elements of L . Besides, the series of generic elements of L has been found. Finally, by the use of double Jacobian matrix, it has been given a necessary and sufficient condition for the element u to be Δ -primitive in the free Lie algebra. It has been proved that the automorphism group of the algebra F_n acts transitively on the set of all Δ -primitive elements.

Key Words : Free color Lie superalgebra, generic elements, almost primitive elements, test elements.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında değerli zamanını ayırarak bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan ve manevi desteğini de hiçbir zaman eksik etmeyen değerli hocam sayın Prof.Dr.Naime EKİCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman yanımda olan ve manevi desteklerini esirgemeyen bütün hocalarım ve arkadaşlarıma da teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımın her anında yanımda olan ve beni her zaman destekleyen annem Gürsel KAHYALAR'a ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
1. GİRİŞ.....	1
2. SERBEST COLOR LIE SUPERCEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ İÇİN BİR KRİTER.....	10
3. SERBEST COLOR LIE SUPERCEBİRLERİNİN JENERİK HEMEN HEMEN PRİMİTİF VE TEST ELEMANLARI.....	17
3.1 Serbest Color Lie Süpercebirlerinin Hemen Hemen Primitif ve Test Elemanları.....	17
3.2 Serbest Color Lie Süpercebirlerinin Jenerik Elemanları.....	22
4. SERBEST LIE CEBİRLERİNİN Δ -PRİMİTİF ELEMANLARI.....	29
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39

1. GİRİŞ

Lie cebirleri teorisi, matematik ve teorik fizikte uygulamaları olan modern cebirin gelişmiş ve ilerlemiş bir bölümüdür. Bu cebirin kökeni, P.Hall, W.Magnus ve E.Witt in 1930 yıllarındaki serbest ve nilpotent grupların yapısı ile ilgili çalışmalarına dayanır.

Gruplar teorisi ile Lie cebirleri teorisi arasında bazı benzerlikler vardır. Graplardaki birçok sonuç Lie cebirlerindeki sonuçlarla aynıdır. Bir serbest grubun her alt grubu da serbesttir. Bu teorem grup teorisinde önemli olmakla birlikte Lie cebirleri teorisinde de benzer şekildedir. Yani bir serbest Lie cebirinin her alt cebiri de serbesttir. Bu sonuç (Shirshov,1953) de gösterilmiştir. Bu benzerliklerden bir başkası ise test elemanları ile ilgili olan çalışmalardır.

Test elemanlarının tarihi J.Nielsen ve W.Dicks zamanına dayanır. Uzun yıllar serbest grupların test elemanları ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. E.C. Turner test elemanlarının maksimal ranklı elemanlar olduğunu ispatlamıştır. Bu sonuçların serbest Lie cebirleri ve serbest color Lie süpercebirleri için uygulamaları A.A.Mikhalev ve A.A.Zolotykh tarafından yapılmıştır.

Serbest Lie cebirlerinde ve serbest gruplarda bir otomorfizmin belirlenmesini sağlayan birçok algoritma vardır. Bunlardan en çok bilineni, bir endomorfizmin otomorfizm olması için gerek ve yeter koşulun bu endomorfizmin Jacobian matrisinin tersinir olduğunu belirten algoritmadır.(V.Shpilrain,1995, U.U.Umirbaev,1990) Fakat bu algoritmada endomorfizm altındaki görüntülerin tanımı önemli bir rol oynamaktadır. Bu probleme daha değişik yaklaşımlarla çözüm bulmak mümkündür. Serbest color Lie süpercebirleri için bu yaklaşımlardan birisi de (E.Aydın, N.Ekici) de gösterilen kriterdir.

Tezin ikinci bölümünde bu kriterin daha basit bir ispatı verilip sonuç rankı $n \geq 2$ olan sonlu ranklı color Lie süpercebirleri için genelleyerek bu cebirlerin bazı test elemanları belirlenmiştir.

Üçüncü bölümde serbest color Lie süpercebirlerinin jenerik, hemen hemen primitif ve test elemanlarından bahsedilmiştir. Yeni hemen hemen primitif ve test

elemanları bulunmuştur ve serbest color Lie süpercebirlilerinin jenerik olan ve hemen hemen primitif olmayan elemanlarına örnekler verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ise serbest Lie cebirlerinde herhangi bir u elemanının Δ -primitif olabilmesi için gerek ve yeter koşulun u nun çift Jacobian matrisinin serbest birleşmeli cebirde tersinir olması gerektiği gösterilmiştir. Ayrıca F_n rankı n olan bir serbest Lie cebiri olmak üzere, $n = 2m$ ise buradan herhangi bir Δ -primitif elemanın $[x_1, x_2] + [x_3, x_4] + \dots + [x_{2m-1}, x_{2m}]$ elemanının otomorfik görüntüsü olduğu ve eğer n tek ise F_n de Δ -primitif elemanı bulunmadığı gösterilmiştir. Bununla beraber F_n nin otomorfizm grubunun tüm Δ -primitif elemanları kümesine geçişmeli olarak etki ettiği de gösterilmiştir.

Bu bölümün, bundan sonraki kısmında tez boyunca kullanılacak bazı tanım ve notasyonları vereceğiz.

Bu çalışmadaki bütün Lie cebirleri aksi belirtilmedikçe bir K cismi üzerinde kabul edilecektir.

Tanım 1.1: L , K cismi üzerinde herhangi bir vektör uzayı olsun. Her $a, b \in L$ için $(a, b) = ab$, L de bilineer bir çarpma olsun. Bu çarpma her $a, b, c \in L$ için

$$\begin{aligned} (a, a) &= 0 \\ ((a, b), c) + ((c, a), b) + ((b, c), a) &= 0 \end{aligned}$$

koşulları sağlıyorsa L ye bu çarpımla birlikte K cismi üzerinde bir Lie cebiri denir. İkinci özelliğe Jacobi özelliği denir. Eğer L vektör uzayı olarak sonlu boyutlu ise L , Lie cebiri de sonlu boyutludur.

Tanım 1.2: Her $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} \delta^0(L) &= L \\ \delta^{n+1} &= [\delta^n(L), \delta^n L] \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa $\{\delta^n L\}_{n \geq 0}$ dizisine L nin türetilmiş serisi denir.

Tanım 1.3: Bir F Lie cebiri herhangi bir $X \neq \Phi$ kümesi verildiğinde her B Lie cebiri için $\alpha : X \rightarrow B$ bir dönüşüm olmak üzere, $i : X \rightarrow F$ dönüşümü için

$$\alpha = \eta.i$$

olacak şekilde bir tek

$$\eta : F \rightarrow B$$

Lie homomorfizmi varsa (F, i) çiftine X üzerinde serbest Lie cebiri denir.

Tanım 1.4: L bir Lie cebiri $A = \{a_i / i \in I\}$ L nin elemanlarının bir ailesi ve $F(I)$, I üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. Eğer

$$\sigma : i \rightarrow a_i$$

olacak şekilde $F(I)$ dan L içine bir σ morfizmi varsa ve σ örten ise A ya L nin üreteç kümesi denir. Eğer σ biyektif ise L serbest Lie cebiri olup A , L nin serbest üreteç kümesidir. A sonlu bir küme ise L ye sonlu üreteçli Lie cebiri denir. Buna göre bir serbest Lie cebirinin iki üreteç kümesinin kardinalitesi aynıdır.

Tanım 1.5: R bir K cismi üzerinde cebir ve G de toplamsal bir grup olsun. $g \in G$ için R_g ile G tarafından etiketlenen alt uzayı gösterelim. Eğer $\{R_g / g \in G\}$ dizisi için

$$i) \quad R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

$$ii) \quad \text{Her } g, g' \in G \text{ için } R_g \cdot R_{g'} \subseteq R_{g+g'}$$

koşulları sağlanıyorsa R ye G tarafından derecelendirilmiş cebir denir. $g \in G$ için R_g nin elemanlarına g -inci dereceden homojen eleman denir.

I, R nin bir alt cebiri ve $g \in G$ için $I_g = I \cap R_g$ olsun. Eğer,

$$I = \bigoplus_{g \in G} I_g$$

oluyorsa I ya R nin derecelendirilmiş alt cebiri denir.

G değişmeli bir grup, K çarpımsal grubu $K^* = K \setminus \{0\}$ olan bir cisim;

$$\varepsilon : G \times G \rightarrow K^*$$

ters simetrik bilinear form yani; her $g, g_1, g_2, h, h_1, h_2 \in G$ için

$$\begin{aligned}\varepsilon(g_1 + g_2, h) &= \varepsilon(g_1, h)\varepsilon(g_2, h), \\ \varepsilon(g, h_1 + h_2) &= \varepsilon(g, h_1)\varepsilon(g, h_2), \\ \varepsilon(g, h)\varepsilon(h, g) &= 1, \\ \varepsilon(g, g) &= \mp 1\end{aligned}$$

olsun. $G_{-1} = \{g \in G / \varepsilon(g, g) = -1\}$ olarak tanımlayalım.

Tanım 1.6: $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$, K cismi üzerinde G -derecelendirilmiş bir cebir

olsun. $a \in R_g$ için $d(a) = g$ olarak tanımlayalım. R üzerindeki $[,]$ işlemi

$x, y, z \in R$, G -homojen elemanlar için;

$$\begin{aligned}[x, y] &= -\varepsilon(d(x), d(y))[x, y], \\ [x, [y, z]] &= [[x, y], z] + \varepsilon(d(x), d(y))[y, [x, z]]\end{aligned}$$

koşulunu sağlıyorsa R ye K cismi üzerinde bir color Lie süpercebiri denir.

Tanım 1.7: L ve M (aynı G grubu tarafından derecelendirilmiş) K cismi üzerinde color Lie süpercebiri olsun. Eğer bir

$$f : L \rightarrow M$$

K -lineer dönüşümü her $a, b \in L$ için

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

ve her $g \in G$ için

$$f(L_g) \subseteq M_g$$

sağlıyorsa f ye sıfıncı dereceden homomorfizm denir.

Tanım 1.8: $X \neq \emptyset$ bir küme $W(X)$ de X kümesindeki yanyana çarpımıyla oluşan kelimelerin kümesi olsun. A ile bazı $W(X)$ olan serbest K modülü gösterelim. A daki çarpım $W(X)$ kümesini A nın alt yarı grubu ve A yı cebir yapacak şekilde tek olarak belirlenir. $W(X)$ de boş kelime 1 ile gösterilecektir. Bu durumda A serbest üretici kümesi X olan, 1 birim elemanlı bir serbest birleşmeli cebirdir.

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $L = L(X)$ X üzerinde serbest color Lie süpercebiri olsun.

Tanım 1.9: $\sigma : A \rightarrow K$, $1 \leq i \leq n$ için $\sigma(x_i) = 0$ olacak şekilde tanımlanan homomorfizme genişletme homomorfizmi denir. Bu homomorfizmin çekirdeği, bazı X olan bir serbest sol $A(X)$ modüldür. Bu modülü Δ ile gösterelim. Her $u \in \Delta$

elemanı $u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i$ formunda tek bir şekilde yazılabilir. u nun $\{x_1, \dots, x_n\}$ bazına

göre koordinatları olan $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ elemanları fox türevleri olup bu türevler aşağıdaki

şekilde tanımlanır. (Fox, 1953)

Tanım 1.10: Aşağıdaki koşulları sağlayan $\frac{\partial}{\partial x_i} : A(X) \rightarrow A(X)$ ($1 \leq i \leq n$) dönüşümleri sol Fox türevleri olarak adlandırılır.

$$\text{i)} \quad \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \text{ (kronecker delta)}$$

$$\text{ii)} \quad \text{Her } u, v \in A \text{ ve } \alpha, \beta \in K \text{ için } \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha u + \beta v) = \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$\text{iii)} \quad \text{Her } u, v \in A \text{ için } \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \sigma(v) + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$a \in A(X)$ için a nın sağ Fox türevi $\frac{a\partial}{\partial x_i}$ şeklinde gösterilir. Sağ Fox türevleri için (i) ve (ii) koşulları aynı olup (iii) koşulu; her $u, v \in A(X)$ için,

$$(uv) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sigma(u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.11: $H = \{h_1, \dots, h_m\}$, L nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda H nin Jacobian matrisi

$$J_H = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

olarak tanımlanır.

Jacobian matris serbest üreteç kümelerinin belirlenmesinde önemli bir rol oynar. L nin n elemanlı bir kümesinin üreteç kümesi olması için gerek ve yeter

koşulun Jacobian matrisinin tersinir olması gerektiği U.U.Umirbaev tarafından (Umirbaev,1990) da gösterilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde yeralan temel problemimizin çözümünde önemli yerleri olan aşağıdaki teknik teoremleri inceleyelim.

L bir serbest color Lie süpercebiri olmak üzere L nin n -inci alt merkezi terimini $\gamma_n(L)$ ile gösterelim. Ayrıca R , L nin bir alt cebiri olmak üzere Δ_R ile R tarafından üretilen sağ ideali gösterelim.

Teorem 1.1: $u \in L$ olsun. $u \in \Delta_R \Delta$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \Delta_R \text{ olmasıdır.}$$

İspat: $u \in \Delta_R \Delta$ ise $j \in \Delta_R$ ve $f \in \Delta$ için $u = j.f$ şeklindedir. $f \in \Delta$ olup

$$f = \frac{\partial f}{\partial x_1} .x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} .x_n$$

olarak yazılabilir.

$$\Leftrightarrow u = j.f = j. \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_k} = j. \frac{\partial f}{\partial x_k} \in \Delta_R$$

dir.

Teorem 1.2: $u \in L$ olsun. $u \in \gamma_2(R)$ ise $u \in \Delta_R \Delta$ dir.

İspat: $u \in \gamma_2(R)$ ise $u = [u_1, u_2] = u_1 u_2 - \varepsilon(d(u_1), d(u_2)) u_2 u_1$ şeklinde yazılabilir. $u_1 \in R$ olup $u_1 \in \Delta_R$ dir. $u_2 \in R \subset \Delta$ olup $u_2 \in \Delta$ dir. O halde $u_1 u_2 \in \Delta_R \Delta$

dır. $u_2 \in R$ ise $u_2 \in \Delta_R$, $u_1 \in R \subset \Delta$ olup $u_1 \in \Delta$ dır. O halde $u_2 u_1 \in \Delta_R \Delta$ dır. Bu durumda $u = [u_1, u_2] = u_1 u_2 - \varepsilon(d(u_1), d(u_2)) u_2 u_1 \in \Delta_R \Delta$ dır.

Teorem 1.3: $\gamma_i(R) = \gamma_i(L) \cap R$, $2 \leq k \leq m$ olmak üzere

$$L \cap \Delta_R \Delta^{m-1} = \sum [\gamma_{i_1}(R), \dots, \gamma_{i_k}(R)]$$

şeklindedir.

İspat: Bu teoremin ispatı (Yunus,1984) de bulunabilir.

Bu teoremlerden yararlanarak aşağıdaki sonucu kolaylıkla elde edebiliriz.

Sonuç 1.1: $u \in L$ olsun. $u \in \gamma_m(R)$ ise $u \in \Delta_R \Delta^{m-1}$ dir.

İspat: İspatı m üzerinden tümevarım ile yapalım.

$m = 2$ için: $u \in \gamma_2(R)$ olup Teorem 1.2 den $u \in \Delta_R \Delta$ dir. İddia $k < m$ için doğru olsun. $u \in \gamma_m(R)$ ise $f \in \gamma_{m-1}(R)$, $s \in R$ olmak üzere $u = [f, s]$ şeklindedir.

$f \in \gamma_{m-1}(R)$ olup tümevarım hipotezinden $f \in \Delta_R \Delta^{m-2}$ dir.

$u = [f, s] = fs - \varepsilon(d(f), d(s))sf$, $f \in \Delta_R \Delta^{m-2}$ ve $s \in R \subset \Delta$ olup $fs \in \Delta_R \Delta^{m-1}$ dir.

$s \in \Delta_R$ ve $f \in \Delta_R \Delta^{m-2}$ olup $sf \in \Delta_R \cdot \Delta_R \cdot \Delta^{m-2}$ dir. $\Delta_R = R \cdot A$ ve $\Delta = L \cdot A$ olup $\Delta_R \subset \Delta$ dır. O halde $sf \in \Delta_R \cdot \Delta_R \cdot \Delta^{m-2} \subset \Delta_R \cdot \Delta \cdot \Delta^{m-2} \subset \Delta_R \cdot \Delta^{m-1}$ olup $sf \in \Delta_R \cdot \Delta^{m-1}$ dir ve

$u = [f, s] = fs - \varepsilon(d(f), d(s))sf \in \Delta_R \cdot \Delta^{m-1}$ elde edilir.

Aşağıdaki teorem serbest Lie cebirleri teorisinde iyi bilinen bir teorem olup ispatı (Shpilrain,1993) de bulunabilir.

Teorem 1.4: $u, v_1, \dots, v_m \in L$ olsun. Eğer u, A nin $v_1, \dots, v_m$ tarafından üretilen sol idealine ait ise o zaman L nin $v_1, \dots, v_m$ tarafından üretilen alt cebirine aittir.

İspat: L nin $v_1, \dots, v_m$ tarafından üretilen alt cebirine N diyelim. L nin B sıralı bazını seçelim öyleki

$$u, v \in B, u \in N, v \notin N \Rightarrow u < v$$

olsun. I, A nın $v_1, \dots, v_m$ tarafından üretilen sol ideali olsun. Poincare-Birkhoff-Witt Teoreminden I ideali $w_1, \dots, w_k, k \geq 1, w_i \in B, w_k \in N$ monomialleri tarafından lineer olarak üretilir. $uv = vu + (u, v)$ eşitliği kullanılarak I nın

$$w_1, \dots, w_k, k \geq 1, w_i \in B, w_k \in N \quad w_1 \geq \dots \geq w_k$$

monomialleri tarafından lineer olarak üretildiği görülür. Tekrar Poincare-Birkhoff-Witt Teoremi kullanılarak bu çarpımın lineer bağımsız olduğu sonucu elde edilir. Buradan eğer $s \in L \cap I$ ise $s, B \cap N$ deki monomiallerin lineer kombinasyonudur, yani $s \in N$ dir.

2. SERBEST COLOR LIE SÜPERCEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ İÇİN BİR KRİTER

Bu bölümde L , $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi tarafından üretilen serbest color Lie süpercebiri olmak üzere L nin $x_i \in X$ üreteçlerine bağlı özel seçilmiş u_1, u_2, u_3 elemanları ve bir R alt cebiri için $R = L$ olması için gerek ve yeter koşulun $u_1 \in \gamma_n(R)$ veya $u_2 \in \gamma_2(R)$ ya da $d(x_i) \in G_-$ olması durumunda $u_3 \in \gamma_2(R)$ olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuçtan hareket ederek u_1, u_2, u_3 elemanlarının L için test elemanları olduğu gösterilmiştir.

$x_1, \dots, x_n \in L$ için $[x_1, \dots, x_n]$ ile $[[\dots[[x_1, x_2], x_3], \dots], x_n]$ komütatörünü ve L nin bir R alt cebiri tarafından üretilen sağ idealini Δ_R ile göstereceğiz.

Tanım 2.1: $X = \bigcup_{g \in G} X_g$, G -derecelendirilmiş bir küme, $x \in X_g$ için $d(x) = g$, $A(X)$, G -derecelendirilmiş birleşmeli cebir ve $L(X)$, $[A(X)]$ in X tarafından üretilen alt cebiri olsun. O zaman $L(X)$ serbest color Lie süpercebiridir.

$\sigma: A(X) \rightarrow K$, $\sigma(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ şeklinde tanımlanan homomorfizmi gözönüne alalım. Bu homomorfizmin çekirdeği Δ ile gösterilir. Δ bazı X olan serbest sol $A(X)$ -modülüdür.

Tanım 2.2: $u \in L$ olsun. u nun rankı L nin otomorfizmleri altındaki görüntüsünün bağlı olduğu x_i serbest üreteçlerinin minimum sayısıdır.

Teorem 2.1: $u(x_1, \dots, x_n) \in L$ ve $deru = m \geq 2$ olan homojen bir eleman olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

(a) $ranku = n \geq 2$

(b) L nin keyfi bir lineer otomorfizminin altında u nun görüntüsü en az n serbest üretece bağlıdır.

(c) ϕ , L nin bir endomorfizmi ve $u \in (\phi(L))_m$ ise $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \phi(L)$ dir.

Örnek 2.1: $u = [x_1, x_2] + [x_2, x_3] \in L$ olsun. u ikinci dereceden homojen bir eleman olup u yu birleşmeli monomiallerin toplamı olarak yazalım.

$$u = x_1x_2 - \varepsilon_{12}x_2x_1 + x_2x_3 - \varepsilon_{23}x_3x_2$$

Şimdi birinci basamaktan Fox türevlerini alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\varepsilon_{12}x_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 - \varepsilon_{23}x_3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = x_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad k \neq 1, 2, 3.$$

Bu türevlerin kümesi $W = \{-\varepsilon_{12}x_2, x_1 - \varepsilon_{23}x_3, x_2\}$ olsun. W nun gerdiği uzayın boyutu 2 olup u nun rankı 2 dir.

Tanım 2.3: $u \in L$ olmak üzere eğer L nin her φ endomorfizmi için $\varphi(u) = u$ iken φ bir otomorfizm ise u ya test elemanı denir.

Örnek 2.2: $u = [x_1, x_2] + [x_3, x_4]$ ve $d(x_i) \notin G_-$ olsun.

$$\varphi: x_1 \rightarrow x_1 + x_2, x_2 \rightarrow x_2, x_3 \rightarrow x_3 + x_4, x_4 \rightarrow x_4$$

şeklinde tanımlanan φ otomorfizmi için

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \varphi([x_1, x_2] + [x_3, x_4]) \\
&= [\varphi(x_1), \varphi(x_2)] + [\varphi(x_3), \varphi(x_4)] \\
&= [x_1 + x_2, x_2] + [x_3 + x_4, x_4] \\
&= [x_1, x_2] + [x_3, x_4] = u
\end{aligned}$$

olup u bir test elemanıdır.

Teorem 2.2: L, K cismi üzerinde $\{x_1, x_2\}$ kümesi tarafından üretilen serbest color Lie süpercebiri ve R, L nin bir alt cebiri olsun. Buradan $[x_1, x_2] \in \gamma_2(R)$ ise $R = L$ dir.

İspat: $[x_1, x_2] \in \gamma_2(R)$ ise Teorem 1.2 den $[x_1, x_2] \in \Delta_R \Delta$ dir. $\varepsilon_{12} = \varepsilon(d(x_1), d(x_2))$ olmak üzere

$$\frac{\partial[x_1, x_2]}{\partial x_1} = -\varepsilon_{12}x_2 \text{ ve } \frac{\partial[x_1, x_2]}{\partial x_2} = x_1$$

olup Teorem 1.1 den $-\varepsilon_{12}x_2$ ve x_1 elemanları R ye aittir. Diğer taraftan $\{-\varepsilon_{12}x_2, x_1\}$ kümesinin Jacobian matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_{12} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olup bu matrisin determinanı sıfırdan farklıdır.

O halde $\{-\varepsilon_{12}x_2, x_1\}$ kümesi L nin bir üreteç kümesi olup $L \subset R$ dir. Buradan $R = L$ elde edilir.

Teorem 2.3: R, L nin bir alt cebiri olsun. O zaman

(a) $R = L$ olması için gerek ve yeter koşul $[x_1, \dots, x_n] \in \gamma_n(R)$ olmasıdır.

(b) $n = 2m$ için $R = L$ olması için gerek ve yeter koşul $[x_1, x_2] + [x_3, x_4] + \dots + [x_{2m-1}, x_{2m}] \in \gamma_2(R)$ olmasıdır.

(c) $n \geq 2$ için $R = L$ olması için gerek ve yeter koşul $[x_1, x_1] + \dots + [x_n, x_n] \in \gamma_2(R), d(x_i) \in G_-$ olmasıdır.

İspat: (a) $R = L$ ise $u_1 = [x_1, \dots, x_n] \in \gamma_n(R)$ olduğu açıktır. Şimdi

$$c_n = [x_1, \dots, x_n] \in \gamma_n(R)$$

olsun. Sonuç 1.1 den $c_n \in \Delta_R \Delta^{n-1}$ dir. İspatı n üzerinden tümevarım ile yapacağız. $n = 2$ için Teorem 2.1 den $R = L$ elde edilir. $k < n$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. $c_n \in \Delta_R \Delta^{n-1}$ olup x_n ye göre türevini alırsak Teorem 1.1 den

$$\frac{\partial c_n}{\partial x_n} = c_{n-1} \in \Delta_R \Delta^{n-2}$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 1.3 den $c_{n-1} \in \gamma_{n-1}(R)$ olup tümevarım hipotezinden $x_1, \dots, x_{n-1} \in R$ elde edilir. Şimdi c_n nin sırasıyla $x_{n-1}, \dots, x_1$ elemanlarına göre ardışık olarak türevlerini alalım.

$\varepsilon_{n-1,n} = \varepsilon(d(c_{n-1}), d(x_n))$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_n}{\partial x_{n-1}} &= -\varepsilon_{n-1,n} x_n c_{n-2} \in \Delta_R \Delta^{n-2} \\ \frac{\partial^2 c_n}{\partial x_{n-2} \partial x_{n-1}} &= -\varepsilon_{n-1,n} x_n c_{n-3} \in \Delta_R \Delta^{n-3} \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{n-1} c_n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_{n-2} \partial x_{n-1}} &= -\varepsilon_{n-1,n} x_n \in \Delta_R \end{aligned}$$

elde edilir. $-\varepsilon_{n-1,n}x_n \in \Delta_R$ olduğundan $-\varepsilon_{n-1,n}x_n \in R$ dir. O halde $\{x_1, \dots, x_{n-1}, -\varepsilon_{n-1,n}x_n\} \subset R$ dir. Bu kümenin Jacobian matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

olup tersinirdir. Yani küme L nin bir üreteç kümesidir. Buradan $L = R$ elde edilir.

(b) $n = 2m$ ve $u_2 = [x_1, x_2] + [x_3, x_4] + \dots + [x_{2m-1}, x_{2m}] \in \gamma_2(R)$ olsun. $u_2 \in \Delta_R \Delta$ olup $k = 1, \dots, m$ için $\varepsilon_{2k-1,2k} = \varepsilon(d(x_{2k-1}), d(x_{2k}))$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= -\varepsilon_{12}x_2 \in \Delta_R \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= x_1 \in \Delta_R \\ &\vdots \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_{2m}} &= x_{2m-1} \in \Delta_R \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_{2m-1}} &= -\varepsilon_{2m-1,2m}x_{2m} \in \Delta_R \end{aligned}$$

dir. Teorem 1.3 den $-\varepsilon_{12}x_2, x_1, \dots, x_{2m-1}, -\varepsilon_{2m-1,2m}x_{2m} \in R$ elde edilir.

$Y = \{x_1, -\varepsilon_{12}x_2, \dots, x_{2m-1}, -\varepsilon_{2m-1,2m}x_{2m}\}$ diyelim. Y nin Jacobian matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{12} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon_{2m-1,2m} \end{pmatrix}$$

olup determinantı sıfırdan farklıdır. O halde Y kümesi L için bir üreteç kümesi olup $R = L$ dir. $R = L$ ise $u_2 \in \gamma_2(R)$ olduğu açıktır.

(c) $u_3 = [x_1, x_1] + \dots + [x_n, x_n] \in \gamma_2(R)$ olduğunu kabul edelim. $u_3 \in \Delta_R \Delta$ olup

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 2x_1 \in \Delta_R$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 2x_2 \in \Delta_R$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_n} = 2x_n \in \Delta_R$$

dir. $2x_1, \dots, 2x_n \in R$ ve $\{2x_1, \dots, 2x_n\}$ L nin bir üreteç kümesi olduğundan $R = L$ elde edilir. Bu teoremin bir uygulaması olarak serbest color Lie süpercebirlere otomorfizmlerini kolaylıkla ayırdedebiliriz.

Sonuç 2.1: ϕ , L serbest color Lie süpercebirinin bir endomorfizmi ve u , u_1, u_2, u_3 elemanlarından herhangi birisi olsun. $\phi(u) = u$ ise ϕ bir otomorfizmdir.

İspat: $\phi(u) = u$ olsun. $u_1 = [x_1, \dots, x_n]$ için $\phi(u) = [\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)] = [x_1, \dots, x_n]$ dir. $\{\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)\}$ tarafından üretilen alt cebire R diyelim. $[x_1, \dots, x_n] \in \gamma_n(R)$ olduğundan Teorem 2.2.(a) dan $R = L$ dir. Yani $\{\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)\}$ L nin bir üreteç kümesidir. O halde ϕ bir otomorfizmdir.

$u_2 = [x_1, x_2] + \dots + [x_{2m-1}, x_{2m}]$ olması durumunda $\phi(u_2) = u_2$ olduğunu kabul edelim. $\phi(u_2) = [\phi(x_1), \phi(x_2)] + \dots + [\phi(x_{2m-1}), \phi(x_{2m})] = [x_1, x_2] + \dots + [x_{2m-1}, x_{2m}]$ ve $u_2 \in \gamma_2(R)$ olup Teorem 2.2.(b) den $R = L$ dir. O halde ϕ bir otomorfizmdir. $u_3 = [x_1, x_1] + \dots + [x_n, x_n]$ olması durumunda benzeri bir irdelemeyle ϕ nin bir otomorfizm olduğu görülür.

Teorem 2.4: $u \in L$ olsun. Eğer **i)** u nun rankı n den küçük ise veya **ii)** $u \notin L'$ ise u bir test elemanı değildir.

İspat: **(i)** u nun rankının n den küçük olduğunu kabul edelim. Bu durumda L nin $\alpha(u) = v(x_1, \dots, x_m), m < n$ olacak şekilde bir α otomorfizmi vardır. ψ endomorfizmini

$$\psi(x_i) = x_i, 1 \leq i \leq m \quad \psi(x_i) = 0, m < i \leq n$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $\phi = \alpha^{-1}\psi\alpha$ endomorfizmi u yu sabit bırakır ancak bir otomorfizm değildir.

(ii) $u \notin L'$ olsun. O zaman $m_1, \dots, m_k \in K$ olmak üzere $u = m_1x_1 + \dots + m_kx_k$ şeklindedir.

$$1 \leq i \leq k \text{ için } \psi(x_i) = x_i \text{ ve } i > k \text{ için } \psi(x_i) = 0$$

olarak tanımlanan endomorfizmi düşünelim. $\psi(u) = u$ olduğu halde ψ bir otomorfizm değildir.

3. SERBEST COLOR LIE SÜPERCEBİRLERİNİN JENERİK, HEMEN HEMEN PRİMİTİF VE TEST ELEMANLARI

Bu bölümün birinci kısmında serbest color Lie süpercebirlерinin hemen hemen primitif elemanlarının yapısı hakkında bilgi vereceğiz. Ayrıca bu sonuçlardan hareket edilerek test elemanlarının nasıl belirleneceğini ifade edeceğiz. İkinci kısımda ise serbest color Lie süpercebirlерinin jenerik elemanlarından bahsedeceğiz. Ayrıca serbest color Lie süpercebirlерinin Z-jenerik olan fakat hemen hemen primitif olmayan elemanlarına örnekler vereceğiz.

3.1 Serbest Color Lie Süpercebirlерinin Hemen Hemen Primitif ve Test Elemanları

X sonlu bir küme ve $L = L(X)$, X kümesi tarafından üretilen serbest color Lie süpercebiri olsun.

N pozitif tamsayılar kümesi olmak üzere

$$\mu: X \rightarrow N$$

ağırlık fonksiyonu ve $\Gamma(X)$, X deki birleşmeli olmayan monomiallerin serbest grubu olsun. $S(X)$, X deki birleşmeli kelimelerin serbest yarı grubu ve

$$\sim: \Gamma(X) \rightarrow S(X)$$

braketleri kaldıran homomorfizmi olsun. $x_1, \dots, x_n \in X$ için

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \mu(x_i)$$

ve $u \in \Gamma(X)$ olmak üzere

$$\mu(u) = \mu(\tilde{u})$$

dir.

Tanım 3.1.1: $L(X)$, X kümesi tarafından üretilen serbest color Lie süpercebiri ve $Y \subseteq L(X)$ olsun. Eğer Y , ürettiği alt cebirin bir serbest üreteç kümesi ise Y kümesine bağımsızdır denir. Diğer bir ifade ile eğer Y nin elemanları arasında sıfırdan farklı bir bağıntı yoksa Y kümesi bağımsız bir kümedir.

X kümesi tarafından üretilen $A(X)$ serbest birleşmeli cebirinin üzerindeki bilinen uzunluk fonksiyonu ℓ ve $a \in A(X)$ için a^o ile ℓ fonksiyonuna göre a içindeki en yüksek dereceli monomiallerin toplamını gösterelim. Bu durumda a^o , a nın en büyük dereceli kısmı olarak adlandırılır. $\deg a$ ile a nın içerdiği en büyük uzunluklu elemanın uzunluğunu gösterip a nın derecesi diyeceğiz.

Tanım 3.1.2: $Y \subseteq L(X)$ olsun. Her $y \in Y$ için y^o elemanı $\{u^o : u \in Y - \{y\}\}$ kümesi tarafından üretilen alt cebire ait değilse Y kümesine indirgenmiş küme denir.

Aşağıdaki teorem (Mikhalev, 1984), (Mikhalev, 1985) de ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.1: $L(X)$ in indirgenmiş her alt kümesi bağımsızdır.

Tanım 3.1.3: $S = \{s_\alpha / \alpha \in I\}$, L nin bir alt kümesi olsun. θ , S nin non-dejenere bir lineer dönüşümü ise ve her $\alpha \in I, \alpha \neq \beta$ için

$$\theta(s_\alpha) = s_\alpha$$

olacak şekilde $\beta \in I$ varsa ve

$$\theta(s_\beta) = s_\beta + f(\{s_\alpha / \alpha \neq \beta\})$$

oluyorsa $\theta: S \rightarrow S' \subseteq L$ dönüşümüne S nin elemanter dönüşümü denir.

Tanım 3.1.4: $L(X)$ in bir u elemanı eğer serbest üreteç kümesinin elemanı ise u ya primitif eleman denir.

Tanım 3.1.5: $L(X)$ in hemen hemen primitif elemanı L de primitif olmayan fakat L nin herhangi bir öz alt cebirinde primitif olan elemanıdır.

Örnek 3.1.1: $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere $L = L(X)$ olsun. $u = [x, y] + [[x, z], z]$ elemanı L nin hemen hemen primitif elemanıdır.

$a \in L(X)$ için ada ve Ada ile sol ve sağ çarpım operatörlerini gösterelim. $b \in L(X)$ için

$$ada(b) = [a, b], \quad b(Ada) = [b, a]$$

dır.

Önerme 3.1.1: K , karakteristiği 2 den farklı olan bir cisim ve $X = \{x, y, z\}$ olsun. Buradan

$$u = [x, y] + (x)(Ad(z))^k \quad (k \geq 2)$$

elemanı L nin hemen hemen primitif ve test elemanıdır.

İspat: $u = [x, y] + [[x, z], z], \dots, z]$ elemanının L nin sonlu üretilmiş H alt cebirine ait olduğunu kabul edelim. $x > y > z$ ve $\{h_1, \dots, h_m\}$ H nin serbest

üreticilerinin indirgenmiş bir kümesi olsun. Buradan, u nun en yüksek dereceli u^o terimi, $h_1^o, \dots, h_m^o$ in bir polinomudur.

$u^o = (x)(Ad(z))^k$ olup $u^o = \alpha h_i^o + f[\{h_j^o / i \neq j\}]$, $0 \neq \alpha \in K$ dır. Eğer u^o , h_i lineer terimi içeriyorsa $u = \alpha h_i + f'(\{h_j / i \neq j\})$ şeklindedir. Buradan u , H nin üretici kümesinin bir elemanı olup primitiftir. Böylece u , L nin hemen hemen primitif elemanıdır.

Aksi taktirde yani u^o lineer terim içermiyorsa $u^o = f(\{h_j^o / i \neq j\})$ ise $z \in H$ dir.

Örneğin,

$$[[x, z], \dots, z] = f(\{h_j^o / i \neq j\}) = [h_1, h_2]$$

olsun. Buradan da yine $z \in H$ olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi μ ağırlık fonksiyonunu

$$\mu(x) = 1, \mu(y) = N > k, \mu(z) = 1$$

olarak tanımlayalım. $\{h_1', \dots, h_m'\}$ derece fonksiyonuna göre H alt cebirinin indirgenmiş bir üreteç kümesi olsun.

$\hat{u} = [x, y], \hat{h}_1', \dots, \hat{h}_m'$ lerin bir polinomudur. $\hat{u}$, sıfırdan farklı $\hat{h}_j$ lineer toplamına sahipse buradan

$$\hat{u} = \beta \hat{h}_j + g(\{\hat{h}_i / i \neq j\}), \quad 0 \neq \beta \in K$$

dır. Böylece $\hat{u} = \beta h_j + g'(\{\sum h_i / i \neq j\})$ ve u , H nin primitif elemanıdır.

$\hat{u} = [x, y] = g'(\{h_i / i \neq j\}) = [h_1', h_2']$ olsun. Buradan $y = h_2'$ olup $y \in H$ dir. Eğer $x, z \in H$ ise buradan $u' = u - (x)(adz)^k = [x, y] \in H$ dir. Eğer $(u')^o, h_1^o, \dots, h_m^o$ lere bağlı

bir lineer terime sahipse u , H nin primitif elemanıdır. Aksi takdirde $y \in H$ ve $H = L(X)$ dir. Böylece u , $L(X)$ in hemen hemen primitif elemanıdır. u nun derecesi 1 olan bileşeni olmadığından u , $L(X)$ in test elemanıdır.

Önerme 3.1.2: k, l pozitif tamsayılar olmak üzere

$$u = (x)(Ady)^k + (x)(Adz)^l$$

elemanının $L(x, y, z)$ nin hemen hemen primitif elemanı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\min\{k, l\} = 1$ ve $\max\{k, l\} \geq 2$ olmasıdır.

İspat: $k = l = 1$ olsun. Buradan $u = [x, y + z]$ olup u , x ve $y + z$ tarafından üretilen $L(x, y, z)$ nin bir alt cebirinin primitif elemanı değildir. $k, l > 1$ olduğunu kabul edelim.

$$u_1 = (x)(Ady)^{k-1}, u_2 = (x)(Adz)^{l-1}, u_3 = y, u_4 = z$$

olsun. Buradan $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ indirgenmiş kümedir ve $u = [u_1, u_2] + [u_3, u_4]$, $H = L(u_1, u_2, u_3, u_4) \neq L(x, y, z)$ dir. Buradan

$$u = [x(Ady)^{k-1}, (x)(Adz)^{l-1}] + [y, z] = [[x, y], y], \dots, y, [[x, z], z], \dots, z + [y, z]$$

olup u primitif eleman değildir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.3: $k, l \geq 2$ ve $k \neq l$ olmak üzere

$$u_{k,l}(x, y) = (adx)^k(y) + (x)(Ady)^l$$

$L(x, y)$ nin hemen hemen primitif elemanıdır.

İspat: $k > l$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u_{k,l}^\circ = (adx)^k(y)$ dir. u elemanı $L(X)$ in sonlu üretilmiş H alt cebirine ait olsun. $\{h_1, \dots, h_m\}$ H nin serbest üreticilerinin indirgenmiş bir kümesi olsun. Buradan u nun leading terimi u° , $h_1^\circ, \dots, h_m^\circ$ lerin bir polinomudur. Önerme 3.1.1 in ispatındaki gibi eğer u , H nin primitif elemanı değilse buradan $x \in H$ dir. Bu durumda μ ağırlık fonksiyonu

$$\mu(x) = 1, \mu(y) = N > k$$

şeklinde tanımlayalım. $\{h_1', \dots, h_m'\}$ μ ağırlık fonksiyonuna göre H alt cebirinin serbest üreticilerinin bir indirgenmiş kümesi olsun.

$$u_{k,l}(x, y) = (adx)^k(y) + (x)(Ady)^l$$

olup u ya H nin primitif elemanıdır veya $y \in H$ dir. Eğer $y \in H$ ise $H = L(x, y)$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2 Serbest Color Lie Süpercebirlere Jenerik Elemanları

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $L = L(X)$, X üzerinde serbest color Lie süpercebiri olsun.

Tanım 3.2.1: U, D özdeşlikler kümesi ile tanımlanan Lie cebirinin bir sınıfı ve $D(L)$, L nin verbal ideali olsun. Eğer $f \in L$ için $f \in D(L)$ fakat L nin her H alt cebiri için $f \notin D(H)$ oluyorsa f ye D -jenerik denir.

Tanım 3.2.2: U , Lie cebirlerinin abelyen sınıfı ve L bir Lie cebiri olsun. Eğer $f \in \langle [L, L] \rangle$ iken L nin her H alt cebiri için $f \notin \langle [H, H] \rangle$ oluyorsa f ye Z -jenerik denir.

$[L, L]$ nin u elemanının $\mathbb{Z}$ -jenerik olabilmesi için gerek ve yeter koşul $u = \sum \alpha_i [f_i, g_i]$, $\alpha_i \in K$, olmak üzere $\{f_i, g_i\}$ kümesinin L cebirini üretmesidir. Böylece eğer $u = \sum_{i=1}^s \alpha_i [u_i, v_i]$, u_i ve v_i monomialler $d(u_i), d(v_i) > 1$ ise buradan u, L nin $\mathbb{Z}$ -generic elemanı değildir.

Teorem 3.2.1: u, L nin hemen hemen primitif elemanı ve $u \in [L, L]$ olsun. Buradan u, L nin $\mathbb{Z}$ -jenerik elemanıdır.

İspat: L nin H alt cebiri için $u \in [H, H]$ olsun. u, L nin hemen hemen primitif elemanı olduğundan u, H nin primitif elemanıdır. $\{u = h_1, h_2, \dots, h_m\}$ kümesi H nin üreteç kümesidir. $f, g \in H$ olmak üzere $u = [f, g]$ şeklinde yazıldığında buradan $h_1 = [f, g]$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $u, \mathbb{Z}$ -jeneriktir.

Teorem 3.2.2: K , karakteristiği 2 den farklı olan bir cisim olsun.

1) Eğer $n = 2m$ ise

$$u = [x_1, x_2] + \dots + [x_{2m+1}, x_{2m}]$$

$L(X)$ in $\mathbb{Z}$ -jenerik elemanıdır.

2) k_i, l_i tamsayılar ve $k_i, l_i \geq 2, k_i \neq l_i$ olmak üzere eğer $n = 2m$ ise

$$u_{k_1, l_1}(x_1, x_2) + \dots + u_{k_m, l_m}(x_{2m-1}, x_{2m})$$

elemanı $L(X)$ in $\mathbb{Z}$ -jenerik elemanıdır.

3) Eğer $n = 2m + 1$ ve $l \geq 2$ ise buradan

$$u = [x_1, x_2] + (x_1)(\text{Ad}x_3)' + [x_4, x_5] + \dots + [x_{2m}, x_{2m-1}]$$

$L(X)$ in $\mathbb{Z}$ -jenerik elemanıdır.

4) $n = 3m$, $l_1, \dots, l_m \geq 2$ ise buradan

$$u = [x_1, x_2] + (x_1)(\text{Ad}x_3)^{l_1} + \dots + [x_{3m-2}, x_{3m-1}] + (x_{3m-2})(\text{Ad}x_{3m})^{l_m}$$

elemanı $\mathbb{Z}$ -jeneriktir.

İspat: 1) $u \in [H, H]$ olsun. $u = [h_1, h_2]$ olmak üzere u nun $x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}$ göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= -x_2 = -h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= x_1 = -h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_{2m-1}} &= -x_{2m} = -h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x_{2m-1}} + h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x_{2m-1}} \end{aligned}$$

elde edilir. $x_1, \dots, x_n \in H$ ve dolayısıyla $H = L$ sonucu elde edilir. Yani $L(X)$ in $u \in [H, H]$ olacak şekilde bir alt cebiri bulunamaz. Dolayısıyla u , $\mathbb{Z}$ -jeneriktir. 2, 3 ve 4 sonuçları da benzer şekilde gösterilebilir.

Yardımcı Teorem 3.2.1: $L = L(x, y)$ ve l, x ile y nin sıfırdan farklı bir lineer toplamı olsun. O zaman

1) L nin derecesi 4 olan bir g -homojen elemanı için $[g, l] \in L^{(2)}$ ise $g = 0$ dır.

- 2) L nin derecesi 3 olan bir f homojen elemanı ve bir l lineer elemanı için $[[[x, y], x], l] = [f, l]$ ise buradan ya $[l, l_1] = 0$ veya $[l_1, x] = 0$ dır.

İspat: 1) $l = x$ olsun. g elemanı sol normda

$$g = \alpha_1[x, y, y, y] + \alpha_2[x, y, y, x] + \alpha_3[x, y, x, x]$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$[g, l] = g = \alpha_1[x, y, y, y, x] + \alpha_2[x, y, y, x, x] + \alpha_3[x, y, x, x, x] \in L^{(2)}$$

olduğundan $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ olup $g = 0$ dır.

- 2) $l = \alpha_1 x + \alpha_2 y$, $l_1 = \beta_1 x + \beta_2 y$, $f = \gamma_1 [[x, y], x] + \gamma_2 [[x, y], y]$ olsun.

Buradan $[[x, y], x], l] = [f, l_1]$ olup hesaplamalar yapılarak $\alpha_1 = \gamma_1 \beta_1$, $\alpha_2 = \gamma_1 \beta_2$, $\gamma_2 \beta_1 = 0$, $\gamma_2 \beta_2 = 0$ eşitlikleri elde edilir. Böylece istenilen bağıntı bulunmuş olur.

Teorem 3.2.3: $u = [x, y] + [[x, y], x] + [[[x, y], x], [x, y]]$ elemanı $L = L(x, y)$ serbest color Lie süpercebirinin $\mathbb{Z}$ -jenerik elemanıdır fakat bu cebirin hemen hemen primitif elemanı değildir.

İspat: u elemanı $[x, y]$ ve $[[x, y], x]$ tarafından üretilen L nin alt cebirine aittir. u nun bu cebirin primitif elemanı olmadığı açıktır. Böylece u , L nin hemen hemen primitif elemanı değildir. u nun L nin $\mathbb{Z}$ -jenerik elemanı olmadığını varsayalım. Buradan L nin öyle bir H alt cebiri vardır ki $u \in [H, H]$ dır. H° ile H nin elemanlarının leading terimlerinin bir alt cebirini gösterelim. H indirgenmiş bir küme tarafından üretildiğinden eğer $f \in [H, H]$ ise buradan $f^\circ \in [H^\circ, H^\circ]$ ve

$$u^\circ = [[[x, y], x], [x, y]] \in [H^\circ, H^\circ]$$

dır. Buradan $f, g \in H^o$ olmak üzere $u, [f, g]$ formunun derecesi 5 olan homojen elemanlarının bir lineer kombinasyonudur. $d(f) > d(g)$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $d(g) = 1$ ise buradan g, L nin lineer elemanıdır. Eğer H^o iki lineer bağımsız eleman içeriyorsa $H = L$ dir. Böylece l lineer bir eleman olmak üzere $u^o = [f, [x, y]] + [g, l]$ olduğunu kabul edebiliriz. Buradan $[g, l] \in L^{(2)}$ dir. Yardımcı Teorem 3.2.1 ile $[g, l] = 0$ dır. Bundan dolayı

$$f = [[x, y], x] \text{ ve } [[x, y], x], [x, y] \in H^o$$

ve l_1 ve l_2 lineer elemanlar olmak üzere H ,

$$a = [[x, y], x] + l_1, \quad b = [x, y] + l_2$$

formundaki elemanları içerir.

$$w = u - [a, b] = [x, y] + [[x, y], x + l_1] - [x, y, x, l_2] \in [H, H]$$

elemanını göz önünde tutalım. $l_2 = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $x + l_1 \neq 0$ ise $w^0 = [[x, y], x + l_1] \in [H^o, H^o]$ dır. Bunun sonucu olarak $x + l_1 \in H$ dir. Böylece $w - w^0 = [x, y] \in [H, H]$ ve $H = L$ dir. Eğer $x + l_1 = 0$ ise $[x, y] \in [H, H]$ ve $H = L$ dir.

Eğer $l_2 \neq 0$ ise $w^0 = -[x, y, x, l_2] \in [H^o, H^o]$ dır. l, H nin sıfırdan farklı lineer elemanı ve g , derecesi 3 olan H^o in homojen elemanı olmak üzere bu durum ancak $[x, y, x, l_2] = [g, l]$ ise mümkündür. Yardımcı Teorem 3.2.1 den ya $l = \alpha l_2$ veya $l = \alpha x$ dir. Eğer $l_2 \in H$ ise buradan $[x, y] = b - l_2 \in H$ dir. $l_2 = 0$ olması durumunda olduğu gibi $H = L$ dir. $l = x \in H$ olsun. Buradan $a = [[x, y], x] + \beta y$, $b = [x, y] + \gamma y \in H$ ve $0 \neq \gamma \in K$ olarak kabul edebiliriz. Böylece

$$a - [b, x] - \gamma b = (\beta - \gamma^2)y \in H$$

dir. $H \neq L, \beta = \gamma^2$ olduğundan

$$w = u - [a, b] = [x, y] + [[x, y], x + \gamma^2 y] - \gamma[x, y, x, y] \in [H, H]$$

dir. Bunun sonucu olarak

$$w^o = -\gamma[x, y, x, y] \in [H^o, H^o]$$

dir. $[x, y, x, y]$ elemanı $[x, y, x, y] = [x, y, y, x]$ şeklinde tek bir takdime sahiptir.

Böylece $[[x, y], y] \in H^o$ ve $c = [[x, y], y] + \delta y \in H$ dir.

$$w_1 = w + \gamma[c, x] = (1 - \gamma\delta)[x, y] + [[x, y], \alpha + \gamma^2 y] \in [H, H]$$

elemanını gözönünde tutalım. $w_1^o = [[x, y], x + \gamma^2 y] \in [H^o, H^o]$ olup böylece $x + \gamma^2 y \in H$ dir. Buradan $\gamma \neq 0$ olduğundan $H = L$ dir.

Teorem 3.2.4: $u = [[x, y], x^n, y^k] + [x^m, [x, y], x]$ $n > n+k, n > 1$ ve $k \geq 1$ elemanı L nin hemen hemen primitif ve $\mathbb{Z}$ -jenerik elemanıdır.

İspat: H, L nin bir alt cebiri ve $\{h_1, \dots, h_m\}$ H nin serbest üreticilerinin indirgenmiş bir kümesi olsun. Eğer $u \in H$ ise $u^o = \alpha h_i^o + f\{h_j^o : i \neq j\}$ dir. u^o lineer terim içeriyorsa u, H nin üreteç kümesinin bir elemanı olup L nin hemen hemen primitif elemanıdır. Diğer durumda $u^o = f\{h_j^o : i \neq j\}$ olduğunu kabul edelim. Yani $v_1, v_2 \in H$ olmak üzere $u^o = [x^m, [[x, y], x]] = [v_1, v_2]$ olsun. Buradan $x \in H$ dir. Şimdi φ ağırlık fonksiyonunu

$$\varphi(x)=1 \text{ ve } \varphi(y)=N>m$$

olarak tanımlayalım. Buradan $\hat{u} = [[x, y], x^n, y^k]$ olup $\hat{u}, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_m$ nin bir polinomudur. u, H nin primitif elemanı değilse $v'_1, v'_2 \in H$ olmak üzere $\hat{u} = [v'_1, v'_2]$ dir. Böylece $y \in H$ olup $H = L(x, y)$ dir. Buradan u, H nin hemen hemen primitif elemanıdır.

4. SERBEST LIE CEBİRLERİNİN Δ -PRİMİTİF ELEMANLARI

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ olmak üzere $K \langle X \rangle$, X kümesi tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir ve $L = L(X)$ serbest Lie cebiri olsun.

$\sigma : K \langle X \rangle \rightarrow K$, $\sigma(x_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$ olarak tanımlanan homomorfizmin çekirdeği olan Δ , bazı X olan bir serbest $K \langle X \rangle$ modüldür. Her $u \in \Delta$ için $u = \sum_{i=1}^n d_i(u)x_i$ şeklinde tek bir şekilde yazılır. Δ_R ile R tarafından üretilen ideali gösterelim.

Tanım 4.1: $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ elemanları Δ yı $K \langle X \rangle$ in bir sol ideali olarak üretiyorlarsa $L(X)$ in u elemanına Δ -primitif eleman denir.

Tanım 4.2: Bir $u \in L(X)$ elemanının çift Jacobian matrisi

$$J_D(u) = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

olarak tanımlanır.

$Aut(L)$, L serbest Lie cebirinin otomorfizm grubu olsun.

Tanım 4.3: $u \in L$ olmak üzere u nun yörüngesi, L nin otomorfizmleri altında u elemanının görüntülerinden oluşan kümedir. $Orb_{Aut(L)}(u) = \{\phi(u) / \phi \in AutL\}$ şeklinde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.1: ϕ , L nin $\phi(x_k) = y_k, 1 \leq k \leq n$ şeklinde tanımlanan bir endomorfizmi ve $v = \phi(u)$, $u, v \in K \langle X \rangle$ olsun. Buradan

$$d_j(v) = \sum_{k=1}^n \phi(d_k(u))d_j(x_k)$$

dır.

Yardımcı Teorem 4.2: $J, K < X >$ in $u_1, \dots, u_m$ tarafından serbest modül olarak üretilen bir sağ ideali olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

- i) $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ matrisi $K < X >$ üzerinde tersinirdir.
- ii) $y_j = \sum_{k=1}^m u_k a_{kj}, 1 \leq j \leq m$ elemanları J idealini $K < X >$ nin sağ ideali olarak üretirler.

İspat: M nin tersinir olduğunu kabul edelim. U ile $(u_1, \dots, u_m)$ satır matrisini ve Y ile $(y_1, \dots, y_m)$ satır matrisini gösterelim. Buradan $UM = Y$ olup buradan

$YM^{-1} = U$ olduğu sonucu elde edilir.

$J = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ olduğunu kabul edelim. $u_1, \dots, u_m \in I = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$ olduğundan

$J \subset I$ dir. Ayrıca $y_1, \dots, y_m \in J$ ve $y_j = \sum_{k=1}^m u_k a_{kj}$ olduğundan $I \subset J$ dir. Böylece

$I = J$ olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi de $K < X >$ in herhangi bir B matrisi için $YB = U$ olduğunu kabul edelim. Buradan $UMB = U$ olup $MB = I$ olduğu sonucu elde edilir. Böylece M tersinirdir.

Teorem 4.1: K , karakteristiği 2 den farklı olan bir cisim, $X = \{x, y\}$ ve $0 \neq u \in L(X)$ olsun. $Orb(u)$, u elemanının otomorfik yörüngesi ve $\Psi(Orb(u)) \subseteq Orb(u)$ olacak şekilde bir endomorfizm olsun. Bu durumda Ψ bir otomorfizmdir.

İspat: $A(y), x'$ e bağlı olmayan tüm monomiallerin toplamı ve $C(x) y'$ e bağlı olmayan tüm monomiallerin toplamı olmak üzere

$$\psi(x) = x$$

$$\psi(y) = A(y) + B(x, y) + C(x)$$

olsun. $u = y - C(x)$ primitif elemanı için,

$$\psi(u) = \psi(y - C(x)) = \psi(y) - C(x) = A(y) + B(x, y) + C(x) - C(x) = A(y) + B(x, y)$$

dır. Böylece $\Psi(u)$, L nin primitif elemanıdır. $L(x, y)$ cebirinde genelleştirilmiş derece fonksiyonunu göz önüne alalım:

$N = \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $d(x) = N$ ve $d(y) = 1$ olsun.

Bu derece fonksiyonuna göre L nin bir elemanının leading terimini ve indirgenmiş kümeyi tanımlayalım. İndirgenmiş bir kümedeki bir polinomun leading terimi bu kümedeki elemanların leading terimlerinin bir polinomudur.

$|X| = 2$ olduğundan ve $L = L(X)$ in otomorfizm grubu elemanter otomorfizmler tarafından üretildiğinden her v primitif elemanı için bir pozitif N tamsayısı vardır öyleki u nun leading terimi y 'e bağlı değildir. Böylece $B(x, y) = 0$ ve $\psi(u) = A(y)$ dir. $d(\psi(u)) > 1$ olduğunu kabul edelim. $\psi(u)$ primitif eleman olduğundan ve $|X| = 2$ olduğundan $\{\psi(u), v\}$ kümesi L nin serbest üretici kümesi olacak şekilde bir v primitif elemanı vardır. Böylece bazı elemanter dönüşümler yapılarak $\{x, y\}$ kümesi elde edilir. Buradan, $d(v) < d(\psi(u))$ olduğunu kabul edebiliriz. $d(\psi(u)) < N$ alarak x 'e bağlı olmayan bir v elemanı elde ederiz. $\psi(u)$, v elemanları $L(X)$ cebirini üretirler. Bu bir çelişki olup buradan $\psi(u) = \alpha y, 0 \neq \alpha \in K$ ve böylece ψ bir otomorfizmdir.

Teorem 4.2: K karakteristiği 2 den farklı olan bir cisim, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ olsun. $L(X)$, K cismi üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. Buradan;

- (1) Eğer $n = 2m$ ise buradan herhangi bir Δ -primitif eleman $[x_1, x_2] + [x_3, x_4] + \dots + [x_{2m-1}, x_{2m}]$ in otomorfik görüntüsüdür.
- (2) Eğer n tek ise $L(X)$ in Δ -primitif elemanı yoktur.

(3) $L(X)$ cebirinin otomorfizmlerinin grubu tüm Δ -primitif elemanları kümesine geçişmeli olarak etki eder.

İspat: $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ olsun. Eğer her $r \neq 0$ için $w(r) \neq 0$ ise $w: Z_+^n \rightarrow Q_+^n$ bir fonksiyoneldir. (Burada Z_+ tüm negatif olmayan tamsayılar, Q_+ negatif olmayan tüm rasyonel tamsayılar kümesidir.)

Δ -primitif elemanın otomorfik görüntüsü de Δ -primitif elemandır. $w_i = w(x_i), 1 \leq i \leq n$ olsun. $\Omega = (w_1, \dots, w_n)$ satırları üzerinde kısmi sıralamayı gözönüne alalım. Eğer $1 \leq i \leq n$ için $w'_i \geq w_i$ ve herhangi bir j için $w'_j > w_j$ ise $\Omega' > \Omega$ dır. w , maksimum Ω satırı ile bir fonksiyonel olsun öyleki u elemanın v otomorfik görüntüsünün w ya göre $\hat{v}$ en yüksek dereceli teriminin derecesi 1 olsun. $u = v$ olduğunu kabul edebiliriz. u elemanı 1 uzunluklu toplamlara sahip değildir. u , Δ -primitif olduğundan maksimal ranklıdır ve $x_1, \dots, x_n$ lere bağlıdır ve $m_{ij} \in K \langle X \rangle, 1 \leq i, j \leq n$ elemanları vardır öyleki

$$m_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + m_{in} \frac{\partial u}{\partial x_n} = x_i \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

dır.

u elemanın uzunluğunun 2 den büyük olduğunu kabul edelim. Buradan (*)

dan u nun $\hat{u}$ en yüksek dereceli terimi için şu bağıntı vardır:

$$m_1 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} + \dots + m_n \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_n} = 0$$

Buradan $L(X)$ in φ w -homojen otomorfizmi vardır öyleki $v = \varphi(x_i)$ elemanın v^o

en yüksek dereceli terimi n den daha az serbest üreteçlere bağlıdır. $\hat{v}$ nin x_1 e bağlı

olmadığını kabul edebiliriz. v, x_1 e bağlı olduğundan w' fonksiyoneli gözönünde bulundurabiliriz. $w_1 = w(x_1)$ rasyonel sayısını v nin leading terimi x_1 e bağlı yeni fonksiyonele bağlı oluncaya kadar arttırırız. Bu değeri w'_1 için sabit bırakıp ve $i = 2, \dots, n$ için $w'_i = w_i$ alınırsa buradan v elemanın w' ye bağlı olduğu sonucu elde edilir. Aynı zamanda ilk terim ile $\Omega' > \Omega$ ve w fonksiyonelinin maksimal özelliği ile çelişki elde ederiz. Böylece u nun uzunluğu 2 dir ve

$$u = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} [x_i, x_j] \quad , \quad \alpha_{ij} \in K$$

u maksimal ranka sahip olduğundan lineer otomorfizm uygulanarak $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ yeni serbest üreticilerinde

$$u = [y_1, y_2] + \sum_{3 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} [y_i, y_j] \quad , \quad \beta_{ij} \in K$$

dır. u elemanını maksimal ranka sahip olduğundan bu şekilde devam edilerek $n = 2m$ olması durumunda u elemanı

$$u = [x_1, x_2] + [x_3, x_4] + \dots + [x_{2m-1}, x_{2m}]$$

elemanının otomorfik görüntüsüdür.

n nin tek olması durumunda $L(X)$ in Δ -primitif elemanları olmayacağı açıktır. (1) ve (2) den (3) elde edilir.

Sonuç 4.1: (i) $u \in L(X)$ elemanının Δ -primitif olabilmesi için gerek ve yeter koşul $D_u = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ matrisinin $K \langle X \rangle$ de tersinir olmasıdır.

(ii) K , karakteristiği 2 den farklı olan bir cisim ve

$X = \{x_1, \dots, x_{2n}\}$ olsun. $L(X)$, K cismi üzerinde serbest Lie cebiri olsun. φ , L nin bir endomorfizmi olsun öyle ki u , Δ -primitif elemanı için $\varphi(u)$ da Δ -primitif eleman olsun. Buradan φ , $L(X)$ in bir otomorfizmdir.

İspat: D_u matrisinin tersinir olduğunu kabul edelim. $D_u = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

olup Yardımcı Teorem 4.2 den $y_i = \sum_{k=1}^n x_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$, Δ idealini $K \langle X \rangle$ in sağ ideali olarak üretir.

$$y_i = \sum_{k=1}^n x_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

olup buradan u Δ primitiftir.

Şimdi u nun Δ primitif olduğunu kabul edelim. O zaman u nun türevleri Δ yı sağ ideal olarak üretirler.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n x_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

olmak üzere $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ elemanları Δ yı sağ ideal olarak üretirler. Yardımcı Teorem 4.4

den $\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ matrisi tersinirdir.

Tanım 4.4: J , $A(X)$ in bir sağ ideali olsun. Eğer $g \in L$ için g nin Fox türevleri J yi sağ ideal olacak şekilde üretiyorlarsa g ye J -primitif eleman denir.

Sonuç 4.2: g , $L(X)$ in rankı n olan bir elemanı ve J , $A(X)$ in $\frac{\partial g}{\partial x_i}$

elemanları tarafından üretilen bir sağ ideali olsun. Eğer L nin bir ϕ monomorfizmi g yi başka bir J -primitif elemana götürüyorsa ϕ bir otomorfizmdir.

İspat: $h = \phi(g)$ J -primitif eleman olsun. g nin rankı n olduğundan J sağ ideali n üreteçlidir. $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}$ J nin serbest üreteçleridir. Bunlar $A(X)$ içinde bağımlı ise $a_1, \dots, a_n \in A(X)$ vardır ki

$$a_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$$

dır. Buradan

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = m_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + \dots + m_n \frac{\partial g}{\partial x_n}$$

olup J , n den daha az eleman tarafından üretilir. Yardımcı Teorem 4.2 den $M \in GL(A \langle X \rangle)$ matrisi için

$$(d_1(h), \dots, d_n(h)) = (d_1(g), \dots, d_n(g))M$$

dir.

$$(d_1(h), \dots, d_n(h)) = (\phi(d_1(g)), \dots, \phi(d_n(g)))J_\phi$$

eşitliğinden dolayı

$$(d_1(g), \dots, d_n(g)) = (\phi(d_1(g)), \dots, \phi(d_n(g)))J_\phi M^{-1}$$

dir. Bunun anlamı $J \subseteq \phi(J)$ olmasıdır. $J \subset \phi(J)$ olduğunu kabul edelim. ϕ bir monomorfizm olduğundan $k \geq 1$ için $\phi^k(J) \subset \phi^{k+1}(J)$ dir. Buradan n -üreteçli idealin artan sonsuz dizisi elde edilir ki bu mümkün değildir.

Serbest üretici kümesi $\{a_1, \dots, a_n\}$ ve $\{b_1, \dots, b_n\}$ olan J_1 ve J_2 sağ ideallerini gözönünde bulunduralım. Bu kümeler indirgenmiş olup her $b_i = \sum_{j=1}^n a_j v_{ij}$ şeklinde yazılabilir. Sonlu farklı sağ ideallere sahip olduğundan $J \subset \phi(J) \subset \phi^2(J) \dots$ dizisi mümkün değildir. Böylece $J = \phi(J)$ olup Yardımcı Teorem 4.2 ile $J_\phi M^{-1}$ tersinir olup J_ϕ tersinirdir. Buradan ϕ bir otomorfizmdir.

Sonuç 4.3: $g \in L(X)$ rankı n olan bir eleman olsun. Eğer L nin bir ϕ monomorfizmi için $\phi(g) = g$ oluyorsa ϕ bir otomorfizmdir.

KAYNAKLAR

- AYDIN, E., EKİCİ, N., (2002).** On generators of free color Lie Superalgebras of rank two, Journal of Lie Theory, Vol.12, 529-534.
- BAHTURIN, Y., NABIYEV, S., (1992).** Automorphisms and derivations of abelian extensions of some Lie algebras, Abh. Math. Sem. Uni. Hamburg, 62, 43-54.
- DRENSKY, V., (1990).** Automorphisms of relatively free algebras, Comm. In. Algebra, 18(12), 4323-4351.
- EVANS, M.J., (1994).** Presentations of the free metabelian group of rank 2, Canad. Math. Bull., 37, No.4, 468-472.
- FOX, R.H., (1953).** Free differential calculus I. Derivations in free group rings, Ann. of Math. 57, 547-560.
- GUPTA, C.K., GUPTA, N.D. and ROMAN'KOV, V.A. (1992).** Primitivity in free groups and free metabelian groups, Con. J. Math. 44(3), 516-523.
- MIKHALEV, A.A., UMIRBAEV, U. and YU, J.T., (2001).** Generic, almost primitive and test elements of free Lie algebras, Proceedings of the American Mathematical Society, 130(5), 1303-1310.
- MIKHALEV, A.A., YU, J.T., (2000).** Primitive, almost primitive, test and Δ -primitive elements of free algebras with the Nielsen-Schreier Property, Journal of Algebra 228, 603-623.
- MIKHALEV, A.A., (1984).** The theorem on freeness of subalgebras of free color Lie superalgebra, Summary of report at Sci. Res. Seminar of Chair of Higher Algebra of Moscow State Univ. Held May 7. Vestnik Moscow Univ. Ser I Mat. Mekh. No 5, page 96.
- MIKHALEV, A.A., (1985).** Free color Lie superalgebras. 18 th All-Union Algebraic Conf. Abstract of Reports. Kishinev. Part 2, page 31.
- ROMAN'KOV, V.A., (1991).** Primitive elements of free groups of rank 3, Math. Sib. 7 (182), 1074-1085.

- SHIRSHOV, A.I., (1953).** Subalgebras of free Lie algebras, Math. Sb.33, 441-452.
- SHPILRAIN, V, YU, J.T., (2003).** Factor algebras of free algebras: On a problem of G.Bergman, Bull.London Math. Soc. 35, 706-710.
- SHPILRAIN, V., (1998).** Generalized primitive elements of free groups, Arch. 71, 270-278.
- SHPILRAIN, V., (1995).** Test elements for endomorphisms of free groups and algebras, Israel J.Math, 92, 307-316.
- SHPILRAIN, V., (1993).** On generators of L / R^2 Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc.119, 1039-1043.
- UMIRBAEV, U.U., (1990).** Sixth all-union school on the theory of manifolds and algebraic systems, Magnitogorsk Abstract of Communications, p32.
- YUNUS, A.I., (1984).** On Fox problem for Lie algebras, Uspeki Mat. Nauk 39, 251-252, English transl. Russian Math Surveys 39, 221-221.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Adana’da doğdum. Öğrenimimi sırasıyla Mehmet Akif İlkokulu, Ziya Paşa Ortaokulu ve Borsa Lisesi’nde tamamladım. 1994 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ne girdim. 1999 yılında mezun olup aynı bölümde araştırma görevlisi olarak göreve başladım. Halen aynı görevde bulunmaktayım.