

**ÖKLİD GEOMETRİDE ÜÇGENLER
VE
TEMEL TEOREMLER ÜZERİNE**

Gökhan ÇEVİK
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
2006

**ON THE TRIANGLES OF EUCLIDEAN GEOMETRY
AND
BASIC THEOREMS**

Department of Mathematics

Master Thesis

2006

**ÖKLİD GEOMETRİDE ÜÇGENLER
VE
TEMEL TEOREMLER ÜZERİNE**

Gökhan ÇEVİK

**Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.**

Danışman: Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Haziran 2006

Gökhan ÇEVİK'in Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı

**“ÖKLİT GEOMETRİDE ÜÇGENLER ve TEMEL TEOREMLER
ÜZERİNE”**

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye: Prof. Dr.

Üye: Prof. Dr.

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun gün
ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde; ünlü bir matematikçi olan Öklid ve onun meşhur geometrisi; öklid geometrisi hakkında bilgi verildi. Öklid aksiyomları ve postülatlarından bahsedildi.

İkinci bölümde; Açılar üzerinde duruldu. Açı kavramı ve çeşitlerinden bahsedildi, Temel teoremler ve ispatları üzerinde duruldu.

Üçüncü bölümde; Üçgenler ele alındı. Üçgen kavramı, yardımcı elemanları ve Üçgen çeşitlerinden bahsedildi. Temel teoremleri ve ispatları üzerinde duruldu.

Dördüncü bölümde; Üçgenlerde Benzerlik kavramı ele alındı. Benzerlik aksiyomları, Temel orantı teoremi, Açıortay ve kenarortay teoremleri ve ispatları üzerinde duruldu. Ayrıca Öklid ve Bazı Özel teoremlerin ispatlarından bahsedildi.

Tezimizde yararlanılan kaynakların en önemlileri tezin sonunda belirtilmiş olmakla beraber, ana kaynak olarak [1] ve [2] den faydalanılmıştır.

SUMMARY

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the great mathematician euclides and the famous geometry, the euclidean geometry, is introduced. The euclid axioms and postulates are given.

In the second chapter, the concept of angle, some kind of special angles and some basic theorems are discussed.

In the third chapter, the concept of triangles and some theorems about triangles are given.

In the final chapter, “The similarity on triangles” and “similarity axioms” and some special theorems are discussed.

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında, büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm hocam Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2006

Gökhan ÇEVİK

İçindekiler

1	GİRİŞ	1
1.1	Öklid ve Öklid Geometrisi Hakkında	1
2	AÇILAR	6
2.1	Açı ve Temel Kavramlar	6
2.2	Açının Bölgeleri	7
2.3	Açının Ölçüsü	9
2.4	Açıortay	12
2.5	Açı Çeşitleri	13
2.6	Yöndeş, İç Ters ve Dış Ters Açılar	20
2.7	Kenarları Paralel Açılar	24
2.8	Kenarları Dik Açılar	28
3	ÜÇGENLER	31
3.1	Üçgen ve Yardımcı Elemanları	31
3.1.1	Üçgenin Tanımı ve Temel Elemanları	32
3.1.2	Üçgenin Yardımcı Elemanları	34
3.2	Üçgen Çeşitleri	39
3.2.1	Açılarına Göre Üçgenler	39
3.2.2	Kenarlarına Göre Üçgenler	40

3.3	Üçgende Açılar	42
3.4	Üçgenin Açıları ile Kenarları Arasındaki Bağlıntılar	47
3.5	Üçgenlerin Eşliği	54
3.6	Üçgenlerde Eşlik Aksiyomu	55
3.7	Üçgenlerde Eşlik Teoremleri	59
3.8	İkizkenar, Eşkenar ve Dik Üçgen ile İlgili Özellikler	67
4	ÜÇGENLERDE BENZERLİK	74
4.1	Benzer Üçgenler	75
4.2	Kenar Açılı Kenar (K.A.K.) Benzerlik Aksiyomu	76
4.3	Temel Orantı Teoremi	77
4.4	Açıortay Teoremleri	79
4.5	Açı Açılı Açılı (A.A.A.) Benzerlik Teoremi	81
4.6	Kenar Kenar Kenar (K.K.K) Benzerlik Teoremleri	83
4.7	Tales Teoremleri	87
4.8	Menelaus ve Seva Teoremi	88
4.9	Dik Üçgende Metrik Bağlıntılar	90
4.10	Öklid Teoremleri	91
4.11	Pisagor Teoremi	93
4.12	Kenarortay ile İlgili Teoremler	95

Bölüm 1

GİRİŞ

1.1 Öklid ve Öklid Geometrisi Hakkında



Euclid (M.Ö. 325-M.Ö. 265)

Öklid'in yaşamı konusunda hemen hemen hiçbir şey bilinmiyor. Önceleri bir Yunan kenti olan Megara'da doğduğu sanılıysa da, sonradan Megaralı Öklid'in, Elements'in yazarı İskenderiyeli Öklid'den yüzyıl kadar önce yaşamış olan bir felsefeci olduğu ortaya çıkmıştır. Öklid gelmiş geçmiş matematikçilerin içinde adı geometri ile en çok özdeştilen kişidir. Geometri dünyasında kapladığı bu seçkin yeri kendisinin büyük bir matematikçi olmasından çok, geometrinin başlangıcından kendi zamana kadar bilinen tüm bilgileri ismi ile Elements adını taşıyan kitabında toplamasıyla elde etmiştir. Öklid derlemesinin tutarlı bir bütün olmasını sağlamak için, kanıt gerektirmeyen apaçık gerçekler olarak 5 aksiyom ortaya koyar. Diğer bütün önermeleri bu aksiy-

omlardan çıkarır.

Öklid geometrisi 19. yüzyılın başına kadar rakipsiz kaldı. Hatta 20. yüzyılın ortalarına kadar bile orta öğretimde geometri, Öklid'in öğelerine bağlı olarak okutuldu.

Öklid'in, "Elements" olarak adlandırılan yapıtı, 13 kitap'tan oluşuyordu ve sırasıyla şu konuları içeriyordu:

- I. Kitap: Benzerlik (üçgenlerin benzerliği, pergel ve cetvelle çizilen basit geometrik şekiller, bir üçgenin açılarına ve kenarlarına ilişkin eşitsizlikler), paraleller (paralel doğruların özellikleri ve paralelkenarlar), Pythagoras teoremi.

- II. Kitap: Geometrik cebir $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gibi bugün cebirsel olarak ele alınan, ama o zamanlar geometrik olarak düşünilen özdeşlikler, alanlar.

- III. Kitap: Daire ve açı ölçümleri.

- IV. Kitap: Daire içine ve dışına çokgenlerin çizimi.

- V. Kitap: Geometrik olarak incelenen şeylerin büyüklükleri ve miktarları arasındaki ilişki, kesirli cebirsel denklemlerin geometrik çözümü.

- VI. Kitap: Çokgenlerin benzerliği.

- VII., VIII. ve IX. Kitaplar: Aritmetik (sayılar teorisi geometrik olarak incelenmiştir)

- X. Kitap : Orantısızlık.

- XI., XII. ve XIII. Kitaplar: Uzay geometrisi (üç boyutlu cisimler, örneğin beş düzgün yüzlü cisimin özellikleri incelenmiştir).

Elementler'e sonradan iki kitap daha eklenmiştir ve bunları Öklid'in yazmadığı tahmin edilmektedir.

- XIV. Kitap'ta bir küre içine çizilen düzgün üç boyutluların mukayesesi yapılmıştır ve bu kitabın Hypsicles (M.Ö. 2. yüzyılın ikinci yarısı) tarafından

Apollonius'dan etkilenecek yazıldığı sanılmaktadır.

- XV. Kitap'ta ise düzgün üç boyutluların birbiri içine nasıl çizileceği ve açı ve kenar hesaplarının nasıl yapılacağı incelenmiştir. Bu kitabın Miletli Isidore (532) tarafından yazıldığı düşünülmektedir.

İskenderiye'de yazılmış olan Elementler'in içeriğinden çok, kapsamış olduğu konuların sunulmuş biçimi önemlidir; Önce bir takım tanımlar, aksiyomlar ve postülatlar verilmiş ve teoremler bunlara dayanarak kanıtlanmıştır. Böylece geometri, belirli tanım ve ilkeler çerçevesinde yapılandırılmış olmaktadır.

Elementler'de nokta, çizgi, yüzey ve cisim gibi geometrik kavramlar tanımlandıktan sonra, aksiyomlara geçilmiştir. Aksiyom, doğruluğu açık ve seçik olan önerme demektir. Öklid'in aksiyomları şunlardır:

Aksiyomlar:

1. Aynı şeye eşit olan şeyler birbirlerine de eşittirler.
2. Eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse, eşitlik bozulmaz.
3. Eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkartılırsa, eşitlik bozulmaz.
4. Birbirine çakışan şeyler birbirine eşittir.
5. Bütün parçadan büyüktür.

Aksiyomlardan sonra da postülatlar verilmiştir. Postüla, ispat edilmeksizin doğru olarak benimsenen önerme demektir. Öklid'in postülatları ise şunlardır:

Postülatlar:

1. İki nokta arasını birleştiren en kısa yol bir doğrudur.
2. Bir doğru, doğru olarak sonsuza kadar uzatılabilir.
3. Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir çemberdir.
4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.
5. İki doğru bir üçüncü doğru tarafından kesilirse, içte meydana gelen

açıların toplamının 180 dereceden küçük olduğu yönde bu iki doğru kesişir.

Bu önermelerden, uzayla ilgili olduğu halde, Öklid'in açıkça belirtmediği üç önerme daha çıkarılabilir:

1. Uzay üç boyutludur.
2. Uzay sonsuzdur.
3. Uzay homojendir.

Uzun süre postüla olarak adlandırılan önermelerin yapıları tam olarak anlaşılammış ve Öklid'in paraleller postülası adıyla tanınan beşinci postülası matematikçiler tarafından sanki bir teoremmiş gibi kanıtlanmaya çalışılmıştır. Bazı matematikçiler ise, bu postülayı daha kullanışlı başka bir postüla ile değiştirmek istemişlerdir. Paraleller postülası yerine konulan en tanınmış postülatlar şunlardır:

1. Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir.
2. Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnızca bir tek paralel çizilebilir.

Öklid beşinci postülanın gerekli olduğunu görmüş ve sezgisel olarak en yalın biçimini seçmişti; bu da onun dehasının göstergelerinden yalnızca bir tanesidir.

19. yüzyılda paraleller postülası değiştirilerek Öklid dışı geometriler kuruldu. Nicolai Lobatchevski (1792-1856), "Bir doğruya, dışındaki bir noktadan pek çok paralel çizilebilir veya bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden küçüktür" önermelerini ve Bernhard Riemann (1826-1866) ise "Bir doğruya dışındaki bir noktadan paralel çizilemez veya bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden büyüktür" önermelerini, beşinci postülanın yerine geçirecek, Öklid dışı geometrilere ulaştılar. Felix Klein (1847-1925) bu geometrilerin birbirleriyle olan ilişkilerini gösterdi. Ona göre, Öklid geometrisi sıfır eğrilikli bir yüzeye işaret eder ve pozitif eğrilikli bir yüzey (örneğin küre-dışı) üzerindeki Riemann geometrisi ile negatif eğrilikli bir yüzey (örneğin küre-içi)

üzerindeki Lobatchevski geometrisi arasında yer alır; yani, parabolik geometri olan Öklid geometrisi, eliptik geometri (Riemann) ile hiperbolik geometrinin (Lobatchevski) limitidir.

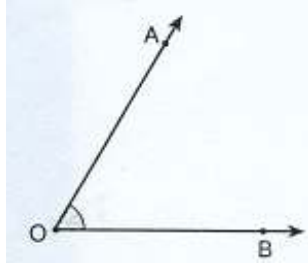
Birden fazla geometrinin ortaya çıkması, akla bunlardan hangisinin doğru olduğu sorusunu getirebilir. Böyle bir soru anlamsızdır; çünkü teoremlerin doğruluğu, dayandıkları postülatlara bağlıdır. Hangi geometri incelediğimiz konuya uygunsam, o geometriyi kullanırız. Şu halde, "Hangi geometri doğrudur?" sorusu yerine, "Hangi geometri yararlıdır?" sorusunun sorulması daha yerinde olacaktır. Üzerinde yaşadığımız Dünya'da, yani orta ölçekli boyutlarda Öklid geometrisi geçerlidir, ama Einstein, görelilik kuramını oluştururken, doğal olarak Riemann geometrisini kullanmıştır.

Bölüm 2

AÇILAR

2.1 Açık ve Temel Kavramlar

Tanım 2.1: Düzlemde başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşimine açı denir. Başlangıç noktasına açının köşesi, ışınlara da açının kenarları denir. $[OA$ ve $[OB$ açının kenarları, O noktası ise açının köşesidir.



Şekil 2.1

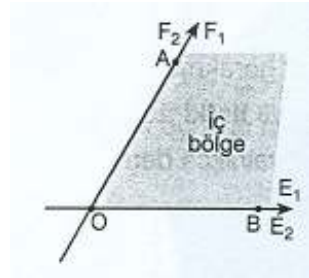
Köşesi O , kenarları $[OA$ ve $[OB$ olan açı \widehat{AOB} , \widehat{BOA} veya \widehat{O} şeklinde gösterilir.

2.2 Açının Bölgeleri

Açı, bulunduğu düzlemi üç bölgeye ayırır. Bunlar; açının kendisi, iç bölgesi ve dış bölgesidir.

Şekil 2.2 de görüldüğü gibi AOB açısının $[OA$ ışınının B noktası tarafında kalan yarı düzlemi ile $[OB$ ışınının A noktası tarafında kalan yarı düzleminin kesişimine o açının iç bölgesi, açı ve iç bölgeye ait olmayan kısmına ise dış bölgesi denir.

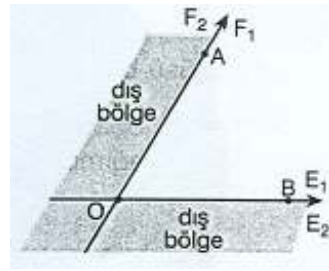
Diğer bir ifadeyle açının kenarları tarafından belirlenen yarı düzlemler, E_1, E_2, F_1 ve F_2 olsun. E_1 , ve F_1 yarı düzlemlerinin kesişim kümesine AOB açısının iç bölgesi, E_2 ve F_2 yarı düzlemlerinin birleşim kümesine de AOB açısının dış bölgesi denir. Açının köşesi ve kenarlarına da açının kendisi denir.



Şekil 2.2

AOB açısının iç bölgesi

$$E_1 \cap F_1$$



Şekil 2.3

AOB açısının dış bölgesi

$$E_2 \cup F_2$$

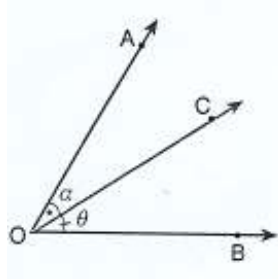
Tanım 2.2 :

Bir açının iç bölgesi ile kendisinin birleşim kümesine, bu açının açısız bölgesi denir. AOB açısının açısız bölgesi (\widehat{AOB}) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3 :

Birer kenarları ortak, iç bölgeleri ayrık; Başka bir deyişle köşeleri ve birer

kenarları ortak olan, fakat hiç ortak iç noktaları olmayan iki açıya komşu açılar denir.

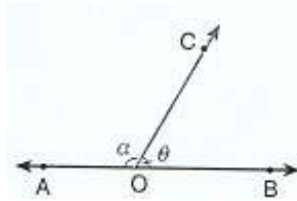


Şekil 2.4

Şekil 2.4 de \widehat{AOC} ile \widehat{COB} komşu açılardır.

Tanım 2.4 :

Ortak olmayan kenarları zıt ışınlar olan komşu iki açıya doğrusal çift oluştururlar denir.

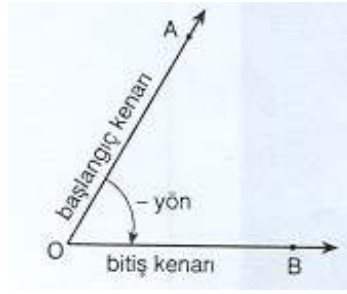


Şekil 2.5

Şekil 2.5 de A, O ve B noktaları doğrusal, $[OA$ ile $[OB$ zıt ışınlar olduğundan \widehat{AOC} ve \widehat{COB} doğrusal çift oluştururlar.

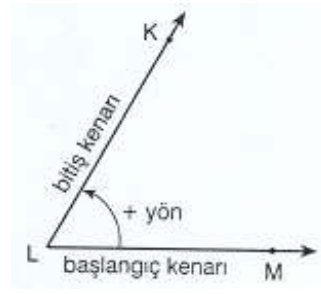
Tanım 2.5 :

Bir açının kenarlarından biri başlangıç, diğeri bitiş kenarı olarak düşünülürse, saatin dönme yönü negatif, tersi yönü ise pozitif yön olarak kabul edilir. Böyle açılara yönlü açılar denir.



Şekil 2.6

\widehat{AOB} negatif yönlü açı



Şekil 2.7

\widehat{MLK} pozitif yönlü açı

2.3 Açının Ölçüsü

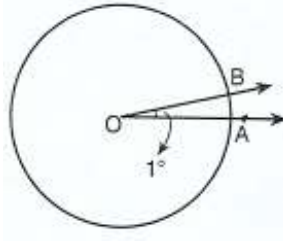
Tanım 2.6 :

Bir AOB açısı içerisinde birim olarak seçilen açının kaç defa bulunduğunu gösteren sayıya AOB açısının ölçüsü denir.

AOB açısının ölçüsü $m(\widehat{AOB})$ şeklinde gösterilir. Açılar çeşitli ölçü birimleriyle ölçülmektedir. Bu ölçü birimleri derece, radyan ve grad dır. Açılar derece ya da grad bölmeli iletke adı verilen bir aletle ölçülür. Biz burada yalnızca derece ölçü birimini kullanacağız.

Tanım 2.7 :

Bir çember yayı 360 eş parçaya bölünürse, 360 eş yay elde edilir. Bu eş yaylardan birini gören merkez açının ölçüsüne 1 derece denir. Bir derece 1° şeklinde gösterilir. Bu açıya da 1° lik açı denir. O noktası çemberin merkezi, $|OA| = |OB| = r$ çemberin yarıçapıdır.



Şekil 2.8

$$|\widehat{AB}| = \frac{2\pi r}{360^\circ} \implies m(\widehat{AOB}) = 1^\circ$$

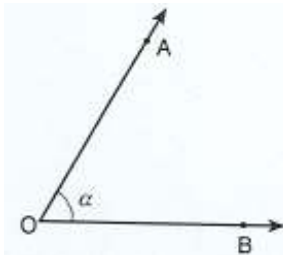
Bazı açı hesaplamalarında daha küçük açı ölçü birimlerine ihtiyaç duyulur. Dereceden daha küçük olan bu ölçü birimleri dakika ve saniyedir. Bu birimler derecenin askatlarıdır.

Bir derecenin $\frac{1}{60}$ ma 1 dakika, bir dakikanın $\frac{1}{60}$ ma da 1 saniye denir. Bir dakikalık açı $1'$ ve bir saniyelik açı da $1''$ şeklinde gösterilir. Örneğin, 40 derece 36 dakika 56 saniye, $40^\circ 36' 56''$ şeklinde yazılır.

Aksiyom 2.1 (Açı Ölçme Aksiyomu) :

Her açıya $0 \leq \alpha \leq 180$ olmak üzere α gibi bir reel sayı ve karşıt olarak $0 \leq \alpha \leq 180$ olmak üzere α gibi bir reel sayıya bir tek açı karşılık gelir.

Aksiyom 2.1 e göre, bir açıya karşılık gelen reel sayıya bu açının derece olarak ölçüsü denir.

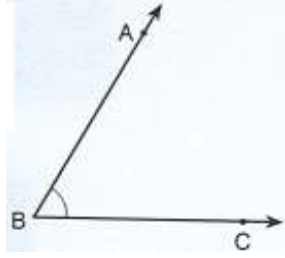


Şekil 2.9

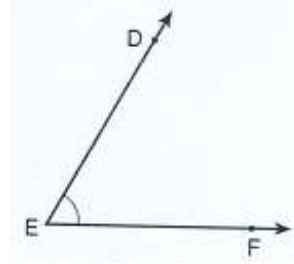
$$m(\widehat{AOB}) = \alpha \text{ ve } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

Tanım 2.8 :

Ölçüleri eşit olan açılara eş açılar denir. Eş açılar \cong sembolüyle gösterilir.



Şekil 2.10

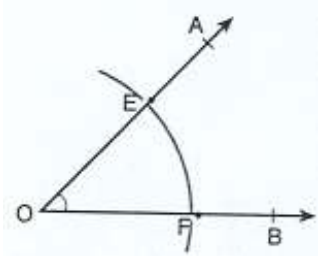


Şekil 2.11

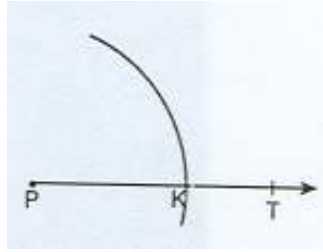
$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) \iff \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$$

dır.

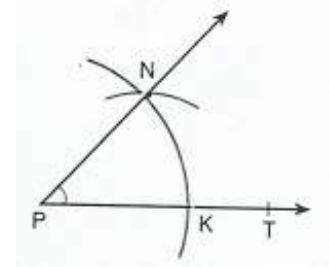
Verilen Bir Açıya Eş Bir Açı Çizme:



Şekil 2.12



Şekil 2.13



Şekil 2.14

Bir \widehat{AOB} açısına eş olan bir açı çizelim:

[PT] nı doğrusunu çizelim. Pergelimizi \widehat{AOB} açısının O köşesine koyup açının kollarını kesen bir yay çizelim. Yayın kolları kestiği noktalar E ve F olsun. Pergelimizin açıklığını bozmadan sivri ucunu [PT] nın P uç noktasına koyup bir yay daha çizelim. Bu yayın [PT] nı kestiği noktaya da K diyelim.

Pergelimizi $|EF|$ kadar açıp sivri ucunu K noktasma koyalım ve bir yay çizelim. Çizilen yayların kesim noktası N olsun. P ve N noktalarını birleştirdiğimizde AOB açısına eş olan NPK açısını elde ederiz. Yani,

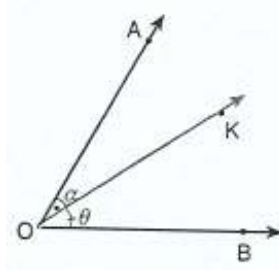
$$\widehat{AOB} \cong \widehat{NPK} \text{ olur.}$$

Aksiyom 2.2 (Açı Toplama Aksiyomu) :

Eğer bir K noktası AOB açısının iç bölgesinde ise;

$$m(\widehat{AOK}) + m(\widehat{KOB}) = m(\widehat{AOB})$$

dir.



Şekil 2.15

$$m(\widehat{AOK}) + m(\widehat{KOB}) = m(\widehat{AOB}) \text{ veya } \alpha + \theta = m(\widehat{AOB})$$

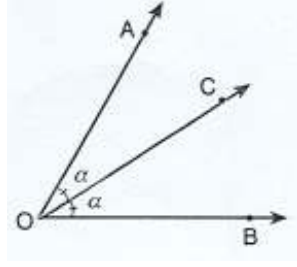
olur.

2.4 Açıortay

Tanım 2.9 :

C noktası AOB açısının iç bölgesinde olmak üzere; $\widehat{AOC} \cong \widehat{COB}$ yani $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COB})$ ise $[OC$ na AOB açısının açıortayı denir.

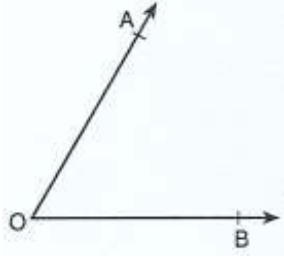
Yani; komşu iki açının ölçüleri eşit ise ortak ışına, ortak olmayan ışınların oluşturduğu açının açıortayı denir.



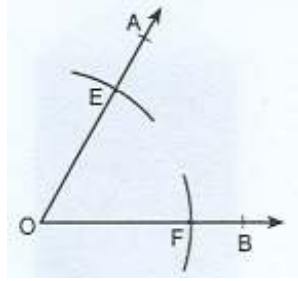
Şekil 2.16

$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COB}) = \alpha$ olduğundan $[OC, \widehat{AOB}$ nın açıortayıdır.

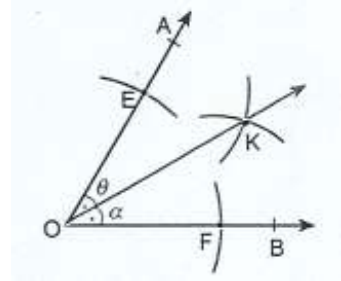
Verilen Bir Açının Açıortayını Çizme



Şekil 2.17



Şekil 2.18



Şekil 2.19

AOB açısının açıortayını çizelim:

1. Pergelimizi biraz açıp, sivri ucunu O noktasına koyarak açının kolları üzerinde E ve F gibi iki nokta işaretleyelim.

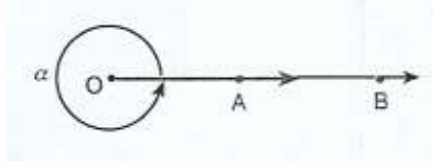
2. Pergelimizin aralığını bozmadan sivri ucunu E ve F noktalarına ayrı ayrı koyup yaylar çizelim ve yayların kesim noktasına K diyelim. K ile O yu birleştirirsek oluşan $[OK, AOB$ açısının açıortayı olur.

2.5 Açı Çeşitleri

Tanım 2.10 :

$[OB, O$ noktası etrafında pozitif yönde 360^0 döndürülerek $[OA$ ile çakıştırılırsa bir tam açı oluşur.

Ölçüsü 360^0 dir.

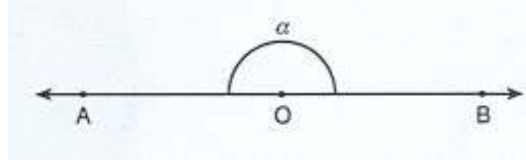


Şekil 2.20

$$m(\widehat{AOB}) = \alpha = 360^0 \text{ dir.}$$

Tanım 2.11

Zıt iki ışının oluşturduğu açığa doğru açı denir. Ölçüsü 180^0 dir.

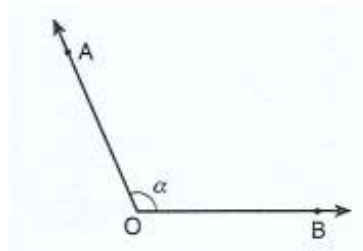


Şekil 2.21

$$m(\widehat{AOB}) = \alpha = 180^0 \text{ dir.}$$

Tanım 2.12 :

Ölçüsü 90^0 ile 180^0 arasında olan açığa geniş açı denir

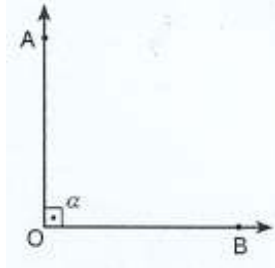


Şekil 2.22

$$m(\widehat{AOB}) = \alpha \text{ ise } 90^0 < \alpha < 180^0 \text{ dir.}$$

Tanım 2.13 :

Ölçüsü 90° olan açığa dik açı denir.

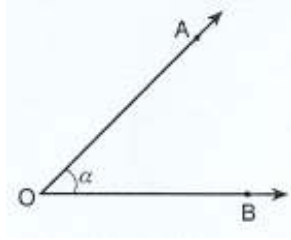


Şekil 2.23

$$m(\widehat{AOB}) = \alpha = 90^\circ \text{ dir.}$$

Tanım 2.14 :

Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açığa dar açı denir.

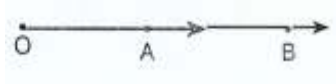


Şekil 2.24

$$m(\widehat{AOB}) = \alpha \text{ ise } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ dir.}$$

Tanım 2.15 :

Kenarları çakışık olan açığa 0° (sıfır derece) lik açı denir.

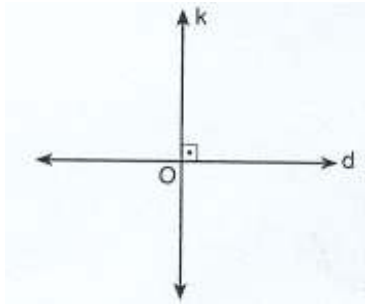


Şekil 2.25

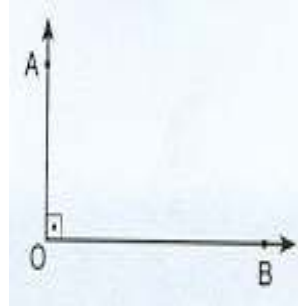
$$[OA = [OB \text{ ise } m(\widehat{AOB}) = 0^\circ \text{ dir}$$

Tanım 2.16: (Dik Doğrular)

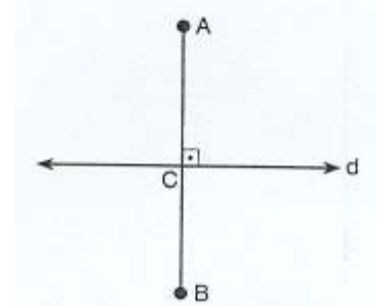
İki doğru, doğru parçası veya ışın kesiştiklerinde, dik açı oluşturuyorsa bu doğrular, doğru parçaları veya ışınlar diktir denir. d ile k doğrularının dikliği $d \perp k$ şeklinde gösterilir.



Şekil 2.26



Şekil 2.27



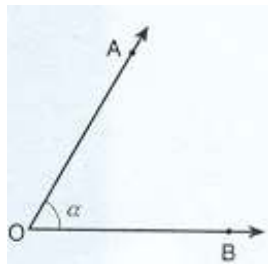
Şekil 2.28

Tanım 2.17: (Tümler Açılar)

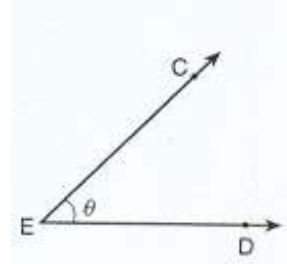
Ölçüleri toplamı 90° olan iki açığa tümler açılar denir. Bu açılarının her birine diğ erinin tümleyeni denir.

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{CED}) = 90^\circ$$

$$\alpha + \theta = 90^\circ$$



Şekil 2.29



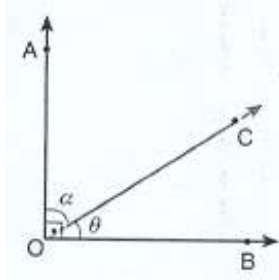
Şekil 2.30

Yani $\alpha + \theta = 90^\circ$ ise ölçüleri α ile θ olan açılar tümler açılardır.

Şekil 2.31 deki gibi herhangi iki açı hem komşu hem de tümler ise bu açılara komşu tümler açılar denir.

$$m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) = 90^\circ$$

ve komşu açılar olduklarından bu açılar komşu tümler açılardır.



Şekil 2.31

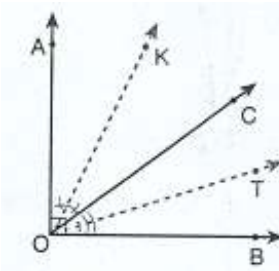
Teorem 2.1 :

Komşu tümler iki açının açıortaylarının oluşturduğu açının ölçüsü 45° dir.

İspat

[OK ve OT sırasıyla \widehat{AOC} ile \widehat{COB} nin açıortayları olsun.

$$m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) = 90^\circ \text{ (komşu tümler açılar)}$$



Şekil 2.32

$$\frac{m(\widehat{AOC})}{2} + \frac{m(\widehat{COB})}{2} = \frac{90^\circ}{2}$$

$$m(\widehat{KOC}) + m(\widehat{COT}) = 45^\circ$$

($[OK$ ve $[OT$ açıortay)

$$m(\widehat{KOT}) = 45^\circ$$

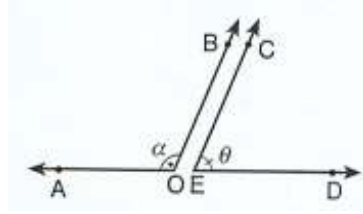
olur.

Tanım 2.18 : (Bütünler Açılar)

Ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya bütünler açılar denir. Bu açılardan her birine de diğerinin bütünleyeni denir.

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{CED}) = 180^\circ$$

$$\alpha + \theta = 180^\circ$$



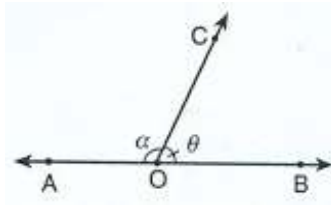
Şekil 2.33

Yani $\alpha + \theta = 180^\circ$ ise ölçüleri α ile θ olan açılar bütünler açılardır.

Şekil 2.34 deki gibi herhangi iki açı hem komşu hem de bütünler ise bu açılara komşu bütünler açılar denir.

$$\alpha + \theta = 180^\circ$$

Ölçüleri α ile θ olan açılar komşu açılar ve $\alpha + \theta = 180^\circ$ olduğundan bu açılar komşu bütünler açılardır.



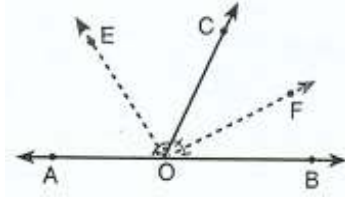
Şekil 2.34

Teorem 2.2 :Komşu bütünler iki açının açıortayları birbirine diktir.

İspat :

$[OE$ ve $[OF$ sırayla \widehat{AOC} ile \widehat{COB} nın açıortayları olsun.

$$m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) = 180^\circ \text{ (komşu bütünler açılar)}$$



Şekil 2.35

$$\frac{m(\widehat{AOC})}{2} + \frac{m(\widehat{COB})}{2} = \frac{180^\circ}{2}$$

$$m(\widehat{EOC}) + m(\widehat{COF}) = 90^\circ$$

($[OE$ ve $[OF$ açıortay)

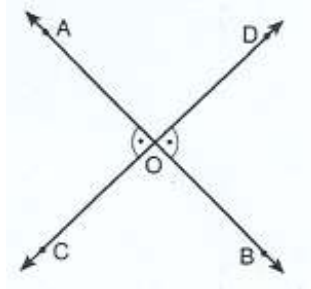
$$m(\widehat{EOF}) = 90^\circ$$

olur. O halde $[OE \perp [OF$ dir.

Tanım 2.19: (Ters Açılar)

Kenarları zıt ışınlar olan iki açiya ters açılar denir.

Bunlardan her birinede diğerinin tersi denir.

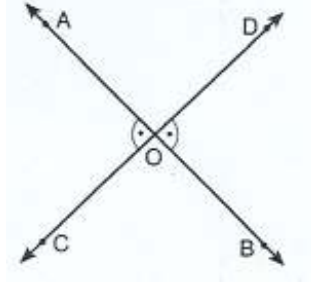


Şekil 2.36

Şekil 2.36 görüldüğü gibi $[OA$ ile $[OB$, $[OC$ ile $[OD$ zıt ışınlar olduklarından, \widehat{AOC} ile \widehat{DOB} ve \widehat{AOD} ile \widehat{COB} ters açılardır.

Teorem 2.3

Ters açılardan ölçüleri eşittir.



Şekil 2.37

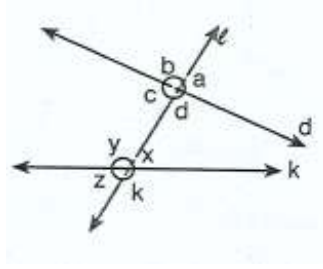
İspat:

1. $m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{DOB}) = 180^\circ$ (komşu bütünler)
2. $m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{AOC}) = 180^\circ$ (komşu bütünler)
3. O halde 1. ve 2. den $m(\widehat{DOB}) = m(\widehat{AOC})$ bulunur.

2.6 Yöndeş, İç Ters ve Dış Ters Açılar

d ve k gibi iki farklı doğru ve her iki doğruyu da farklı noktalarda kesen l gibi üçüncü bir doğru verilsin.

\hat{c} , \hat{d} , \hat{x} ve \hat{y} na iç açılar, \hat{a} , \hat{b} , \hat{z} ve \hat{k} na dış açılar denir, \hat{a} ile \hat{x} , \hat{b} ile \hat{y} , \hat{c} ile \hat{z} ve \hat{d} ile \hat{k} na yöndeş açılar denir. \hat{c} ile \hat{x} ve \hat{d} ile \hat{y} na iç ters açılar, \hat{a} ile \hat{z} ve \hat{b} ile \hat{k} na ise dış ters açılar denir. \hat{d} ile \hat{x} , \hat{c} ile \hat{y} , \hat{a} ile \hat{k} ve \hat{b} ile \hat{z} na karşı durumlu açılar, denir.

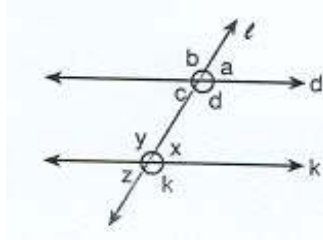


Şekil 2.38

Aksiyom 2.3 :

Paralel iki doğru, üçüncü bir doğru ile kesildiğinde, oluşan yöndeş açılar eşittir.

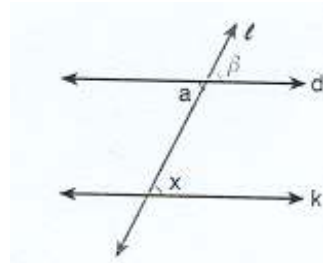
$$d \parallel k \text{ ise } \begin{cases} a \equiv x & \text{yani} & m(\hat{a}) = m(\hat{x}) \\ b \equiv y & \text{yani} & m(\hat{b}) = m(\hat{y}) \\ c \equiv z & \text{yani} & m(\hat{c}) = m(\hat{z}) \\ d \equiv k & \text{yani} & m(\hat{d}) = m(\hat{k}) \end{cases}$$



Şekil 2.39

Teorem 2.4 :

Paralel iki doğru, üçüncü bir doğru ile kesildiğinde oluşan iç ters açılar birbirine eşittir.



Şekil 2.40

İspat:

$d \parallel k$ olsun.

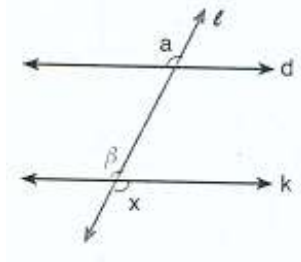
1. $\hat{x} \cong \hat{\beta}$ (yöndeş açılar)

2. $\hat{a} \cong \hat{\beta}$ (ters açılar)

O hâlde, 1. ve 2. den, $\hat{a} \cong \hat{x}$ olur.

Teorem 2.5 :

Paralel iki doğru, üçüncü bir doğru ile kesildiğinde oluşan dış ters açılar birbirine eşittir.



Şekil 2.41

İspat :

$d \parallel k$ olsun.

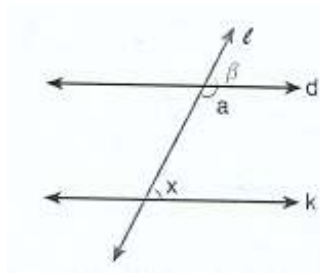
1. $\hat{x} \cong \hat{\beta}$ (yöndeş açılar)

2. $\hat{a} \cong \hat{\beta}$ (ters açılar)

O hâlde, 1. ve 2. den, $\hat{x} \cong \hat{a}$ olur.

Teorem 2.6 :

Paralel iki doğru, üçüncü bir doğru ile kesildiğinde oluşan karşı durumlu açılar bütündür.



Şekil 2.42

İspat :

$d \parallel k$ olsun.

$$1. \quad \hat{x} \cong \hat{\beta} \quad (\text{yöndeş açılar})$$

$$2. \quad m(\hat{a}) + m(\hat{\beta}) = 180^\circ$$

O hâlde, 1. ve 2. den, $m(\hat{a}) + m(\hat{x}) = 180^\circ$ olur.

Sonuç :

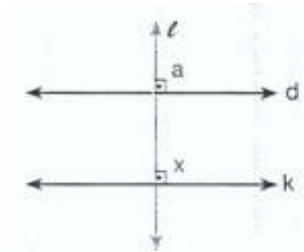
Farklı iki doğru, farklı noktalarda üçüncü bir doğru ile kesildiğinde;

1. Yöndeş açılar eş ise doğrular paraleldir.
2. İç ters açılar eş ise doğrular paraleldir.
3. Dış ters açılar eş ise doğrular paraleldir.
4. Karşı durumlu açılar eş ise doğrular paraleldir.

Teorem 2.7 :

Paralel iki doğrudan birine dik olan doğru diğerine de diktir.

$$d \parallel k \text{ ve } d \perp l \implies k \perp l \text{ dir.}$$



Şekil 2.43

İspat :

$$1. \quad d \perp l \implies m(\hat{a}) = 90^\circ$$

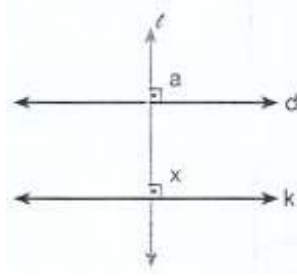
$$2. \quad d \parallel k \implies \hat{a} \cong \hat{x} \quad (\text{yöndeş açılar})$$

O hâlde, 1. ve 2. den, $m(\hat{x}) = 90^\circ$ olur. Dolayısıyla $k \perp l$ dir.

Teorem 2.8 :

İki doğru üçüncü bir doğruya dik ise bu iki doğru birbirine paraleldir.

$d \perp l$ ve $k \perp l \implies d \parallel k$ olur.



Şekil 2.44

İspat :

\hat{a} ile \hat{x} yöndeş açılar ve

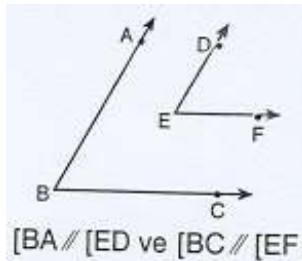
$$m(\hat{a}) = m(\hat{x}) = 90^\circ$$

dir. Daha öncede bahsedildiği üzere yöndeş açılarının ölçüleri eşit ise doğrular paralel olacağından $d \parallel k$ olur.

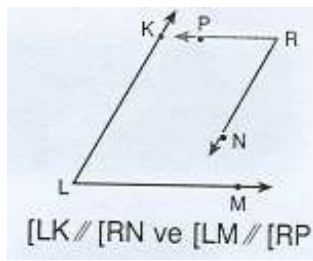
2.7 Kenarları Paralel Açılar

Tanım 2.20:

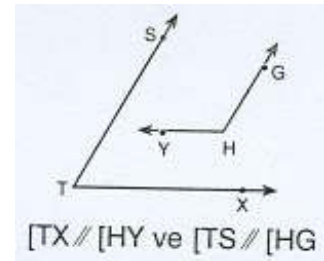
Bir açının kenarları, diğer bir açının kenarlarıyla karşılıklı olarak paralel ise bu iki açiya kenarları paralel açılar denir.



Şekil 2.45



Şekil 2.46



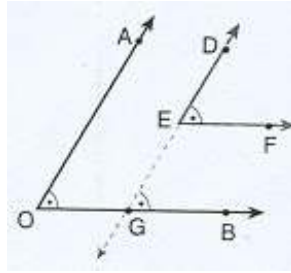
Şekil 2.47

Yukarıda, \widehat{ABC} ile \widehat{DEF} kenarları aynı yönde paralel açılar, \widehat{KLM} ile \widehat{PRN} kenarları zıt yönde paralel açılar, \widehat{STX} ile \widehat{GHY} ise kenarlarından biri aynı yönde diğeri zıt yönde paralel açılardır.

Teorem 2.9 :

Kenarları aynı veya zıt yönde paralel olan açılar eşitir.

$$[OA \parallel [ED \text{ ve } [OB \parallel [EF \implies \widehat{AOB} \cong \widehat{DEF} \text{ olur.}$$



Şekil 2.48

İspat:

a) $[ED$ nı GD olacak şekilde uzatalım.

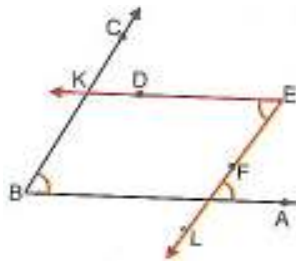
$$1. \quad m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{DGB}) \quad (\text{yöndeş açılar})$$

$$2. \quad m(\widehat{DEF}) = m(\widehat{DGB}) \quad (\text{yöndeş açılar})$$

$$3. \quad m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{DEF}) \quad (1. \text{ ve } 2. \text{ den})$$

$$4. \quad \widehat{AOB} \cong \widehat{DEF} \quad (3. \text{ den})$$

b)



Şekil 2.49

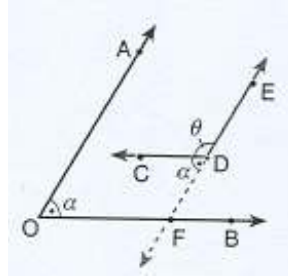
$[ED$ nı $[EK$ olacak şekilde, $[EF$ nı da $[EL$ olacak şekilde uzatalım.

1. $m(\widehat{KBL}) = m(\widehat{ELA})$ (yöndeş açılar)
2. $m(\widehat{KEL}) = m(\widehat{ELA})$ (iç ters açılar)
3. $m(\widehat{KBL}) = m(\widehat{KEL})$ (1. ve 2. den)
4. $\widehat{KBL} \cong \widehat{KEL}$ (3. den)

Teorem 2.10 :

Kenarlarından biri aynı yönde, diğeri zıt yönde paralel olan açılar bütünlendir.

$$[OA \parallel [ED \text{ ve } [OB \parallel [DC \implies m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{CDE}) = 180^\circ \text{ dir.}$$



Şekil 2.50

İspat :

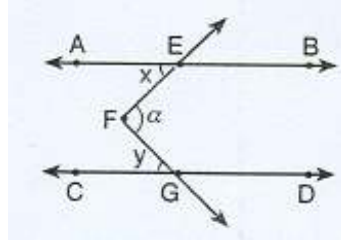
$[DE$ nı EF olacak şekilde uzatalım.

1. $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{CDF})$ (kenarları zıt yönde paralel açılar)
2. $m(\widehat{CDF}) + m(\widehat{CDE}) = 180^\circ$ (komşu bütünlendir açılar)
3. $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{CDE}) = 180^\circ$ 1. ve 2. den

Sonuç 1: Şekilde; $AB \parallel CD$ olmak üzere,

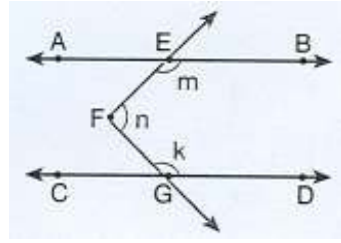
$$m(\widehat{EFG}) = m(\widehat{AEF}) + m(\widehat{FGC}) \text{ dir.}$$

Yani, $\alpha = x + y$ dir.



Şekil 2.51

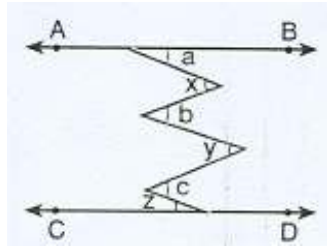
Sonuç 2: Şekilde; $AB \parallel CD$ olmak üzere,
 $m(\widehat{BEF}) + m(\widehat{EFG}) + m(\widehat{FGD}) = 360^\circ$ dir.
 Yani, $m + n + k = 360^\circ$ dir.



Şekil 2.52

Sonuç 3: Şekilde; $AB \parallel CD$ olmak üzere, açılar arasında, yönleri aynı olanların ölçüleri toplamı, bu açılara göre, ters yönlü olan diğer açılarn ölçüleri toplamına eşittir. Yani,

$x + y + z = a + b + c$ dir.

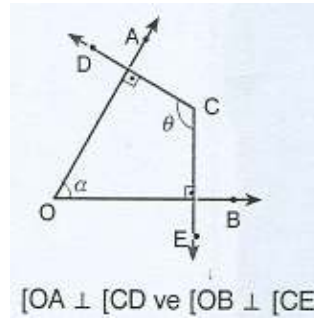


Şekil 2.53

2.8 Kenarları Dik Açılar

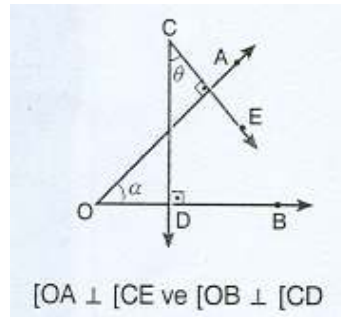
Tanım 2.21

İki açının karşılıklı ikişer kenarı da dik ise bu açılara kenarları dik açılar denir.



Şekil 2.54

Açılardan birinin köşesi diğerinin iç bölgesinde \widehat{AOB} ve \widehat{DCE} kenarları dik açılar



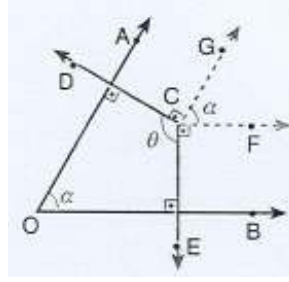
Şekil 2.55

Açılardan birinin köşesi diğerinin dış bölgesinde \widehat{AOB} ve \widehat{DCE} kenarları dik açılar

Teorem 2.11 :

Köşeleri birbirinin iç bölgesinde ve kenarları karşılıklı birbirine dik olan açılar bütünlerdir.

$$[OA \perp [CD \text{ ve } [OB \perp [CE \text{ ise } m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{DCE}) = 180^\circ \text{ dir}$$



Şekil 2.56

İspat :

$[OA \parallel [CG$ ve $[OB \parallel [CF$ olacak şekilde $[CG$ ile $[CF$ nı çizersek, $[CE \perp [CF$ ve $[CD \perp [CG$ olur.

$$1. \quad m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{GCF})$$

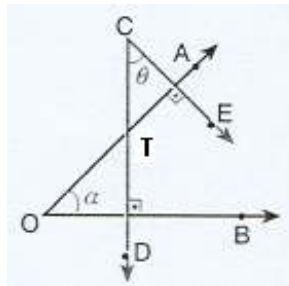
$$2. \quad m(\widehat{DCE}) + m(\widehat{DCG}) + m(\widehat{GCF}) + m(\widehat{FCE}) = 360^\circ \quad (\text{tam açı})$$

$$3. \quad m(\widehat{DCE}) + 90^\circ + m(\widehat{AOB}) + 90^\circ = 360^\circ \quad 1. \text{ ve } 2. \text{ den}$$

$$4. \quad m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{DCE}) = 180^\circ \quad 3. \text{ den}$$

Teorem 2.12: Köşeleri birbirinin dış bölgesinde ve kenarları karşılıklı birbirine dik olan açılarn ölçüleri birbirine eşittir.

$[OA \perp [CE$ ve $[OB \perp [CD$ ise $m(\widehat{TOD}) = m(\widehat{TCA})$ dir.



Şekil 2.57

İspat :

1. $m(\widehat{OTD}) = m(\widehat{CTA})$ (Ters Açılar)
2. $m(\widehat{TOD}) + m(\widehat{OTD}) = 90^\circ$
3. $m(\widehat{TCA}) + m(\widehat{CTA}) = 90^\circ$

O halde, 2. ve 3. den

$$m(\widehat{TOD}) + m(\widehat{OTD}) = m(\widehat{TCA}) + m(\widehat{CTA}) \implies m(\widehat{TOD}) = m(\widehat{TCA})$$

dır. ($\alpha = \theta$)

Bölüm 3

ÜÇGENLER

3.1 Üçgen ve Yardımcı Elemanları

Çokgen Kavramı

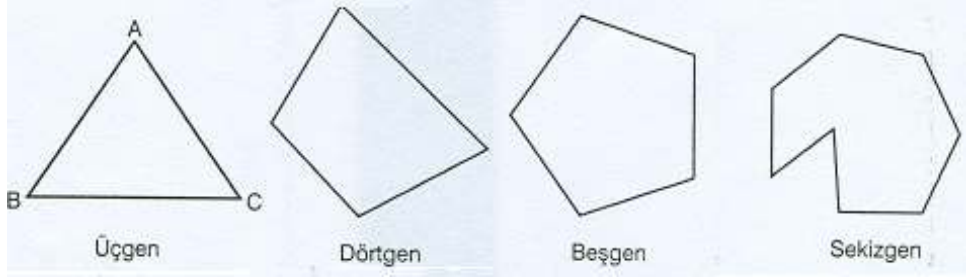
Tanım 3.1

$n \in N^+$ ve $n \geq 3$ olmak üzere, aynı düzlemdeki herhangi üçü doğrusal olmayan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ noktalarında kesişen, $[A_1A_2], [A_2A_3], \dots, [A_nA_1]$ doğru parçalarının birleşim kümesine çokgen denir.

- Verilen n noktaya çokgenin köşeleri; $[A_1, A_2], [A_2A_3], \dots, [A_nA_1]$ doğru parçalarına çokgenin kenarları, kenarların oluşturduğu açılara da çokgenin açıları denir.

- Kenarlar dışında köşeleri birleştiren doğru parçalarına çokgenin köşegenleri denir.

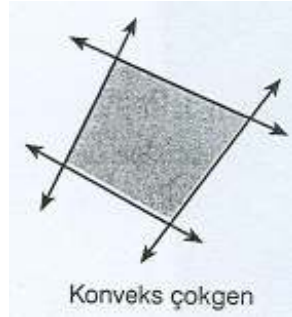
- Çokgenler kenarları yardımıyla adlandırılırlar. Örneğin; kenar sayısı 3 olan çokgene üçgen, kenar sayısı 4 olan çokgene dörtgen, kenar sayısı 5 olan çokgene beşgen denir



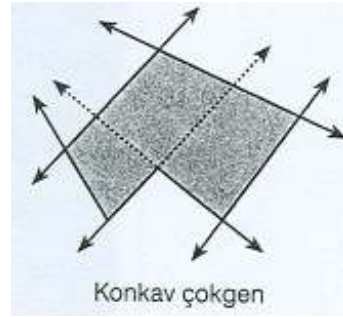
Şekil 3.1

Tanım 3.2

Herhangi bir çokgenin bütün kenarlarını uzattığımızda, bu uzantılar çokgeni kesmiyorsa bu çokgene konveks (dışbükey) çokgen, uzantılardan en az biri çokgeni kesiyorsa bu çokgene de konkav (içbükey) çokgen denir. Konveks çokgende, bütün kenarlar ve köşeler herhangi bir kenarın aynı tarafında kalır.



Şekil 3.2

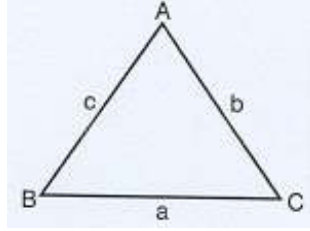


Şekil 3.3

3.1.1 Üçgenin Tanımı ve Temel Elemanları**Tanım 3.3**

A , B ve C doğrusal olmayan herhangi farklı üç nokta olmak üzere, $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ nın birleşim kümesine üçgen denir.

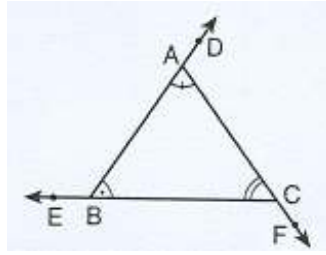
• Köşeleri A , B , C olan üçgen $\triangle ABC$ şeklinde gösterilir. Şekil 3.4 deki üçgen $\triangle ABC$, $\triangle ACB$, $\triangle BAC$, $\triangle BCA$, $\triangle CAB$, $\triangle CBA$ gibi 6 değişik şekilde adlandırılabilir.



Şekil 3.4

$\triangle ABC = [AB]U[BC]U[CA]$ şeklinde de ifade edilir.

- A , B ve C noktaları üçgenin köşeleri, $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ üçgenin kenarlarıdır. Üçgenin kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|AC| = b$ ve $|AB| = c$ olacak şekilde a , b , c ile gösterilir. \widehat{BAC} , \widehat{ABC} ve \widehat{ACB} üçgenin iç açıları, iç açılardan komşu bütünleri olan açılar da üçgenin dış açılarıdır. \widehat{DAC} , \widehat{ABE} ve \widehat{BCF} üçgenin dış açılarıdır.



Şekil 3.5

- $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarları ile \widehat{A} , \widehat{B} ve \widehat{C} açılan ABC üçgeninin temel elemanlarıdır.

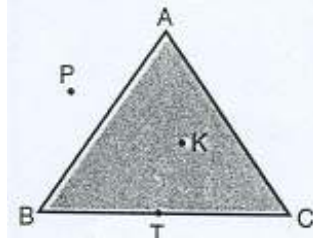
- Bir üçgenin üç kenarının uzunlukları toplamına üçgenin çevresi denir. Yani, bir ABC üçgeninin çevresinin uzunluğu;

$$Ç = a + b + c \text{ dir.}$$

Tanım 3.4

Bir ABC üçgeninde, $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ nın sınırladığı bölgedeki noktaların kümesine üçgenin iç bölgesi, üçgenin içinde ve üzerinde olmayan noktaların kümesine de üçgenin dış bölgesi denir. Bir başka ifade ile bir üçgenin iç

açıların, iç bölgelerinin kesişimine üçgenin iç bölgesi, üçgen ve iç bölgesinin dışında kalan noktalar kümesinde dış bölgesi denir.



Şekil 3.6

Şekil 3.6 da görüldüğü gibi

K noktası üçgenin iç bölgesinde,

T noktası üçgenin üzerinde,

P noktası üçgenin dış bölgesindedir.

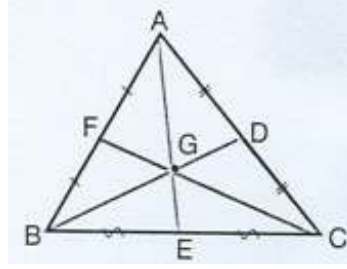
• $\triangle ABC$ nin iç bölgesi ile kendisinin birleşimine üçgensel bölge denir ve $(\triangle ABC)$ şeklinde gösterilir.

3.1.2 Üçgenin Yardımcı Elemanları

Tanım 3.5 (Kenarortay)

Bir üçgenin bir köşesini karşısındaki kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçasına üçgenin o kenarına ait kenarortayı denir.

• Kenarortayların uzunlukları "V" harfiyle gösterilir. ABC üçgeninin a, b, c kenarlarına ait kenarortay uzunlukları sırasıyla V_a , V_b ve V_c ile gösterilir. Bir üçgenin üç kenarortayı bir noktada kesişirler. Bu noktaya üçgenin ağırlık merkezi denir.



Şekil 3.7

$$|BE| = |EC| \implies |AE| = V_a$$

$$|AD| = |DC| \implies |BD| = V_b$$

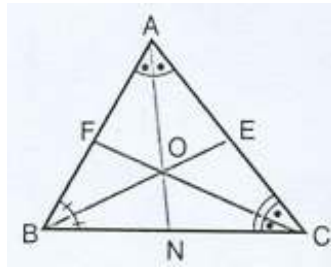
$$|AF| = |FB| \implies |CF| = V_c$$

G noktası $\triangle ABC$ nin ağırlık merkezidir.

Tanım 3.6 (Açıortay)

Bir üçgenin bir açısını iki eşit parçaya bölen ışının, köşe ile karşı kenar arasında kalan parçasına, üçgenin o köşesine ait açıortayı denir.

- Açıortayların uzunlukları "n" harfiyle gösterilir. Bir ABC üçgeninin A , B ve C köşelerinden çıkan açıortayların uzunlukları sırayla n_A , n_B ve n_C dir. Üçgenin iç açılarının açıortaylarına iç açıortayları denir. Dış açılarının açıortaylarına da dış açıortayları denir.

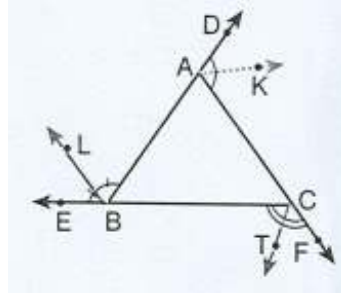


Şekil 3.8

$$m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{NAC}) \implies |AN| = n_A$$

$$m(\widehat{EBA}) = m(\widehat{EBC}) \implies |BE| = n_B$$

$$m(\widehat{ACF}) = m(\widehat{BCF}) \implies |CF| = n_C$$



Şekil 3.9

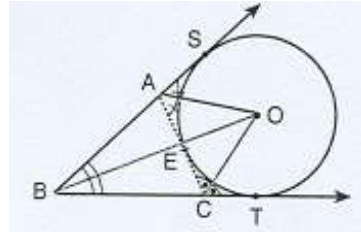
$$m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{KAC})$$

$$m(\widehat{ABL}) = m(\widehat{EBL})$$

$$m(\widehat{BCT}) = m(\widehat{TCF})$$

$[AK]$, $[BL]$ ve $[CT]$ dış açıortaylardır.

• Üçgenin iç açıortayları bir noktada kesişirler. Bu noktaya üçgenin iç teğet çemberinin merkezi denir. Bir üçgende herhangi iki dış açıortay ile diğer köşedeki iç açıortay bir noktada kesişirler. Bu noktaya da üçgenin dış teğet çemberinin merkezi denir.



Şekil 3.10

$[AO]$ ile $[CO]$ dış açıortay

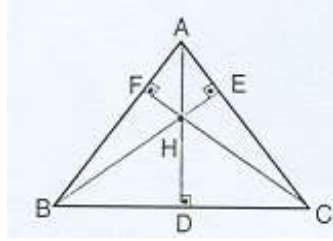
$[BO]$ ise iç açıortaydır.

Bir üçgenin toplam üç tane dış teğet çemberi vardır.

Tanım 3.7 (Yükseklik)

Bir üçgenin bir köşesinden, karşı kenar doğrusuna indirilen dikmenin, karşı kenarı kestiği nokta ile köşeyi birleştiren doğru parçasına, üçgenin o kenarına ait yüksekliği denir.

• Yükseklik uzunlukları genel olarak "h" harfiyle gösterilir. Bir ABC üçgeninin a , b ve c kenarlarına ait yüksekliklerinin uzunlukları sırasıyla h_a , h_b ve h_c dir. Üçgenin yükseklikleri bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin diklik merkezi denir.



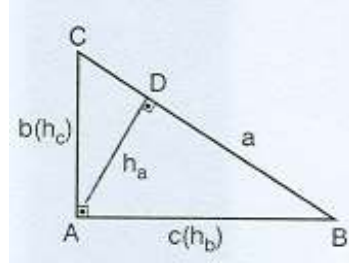
Şekil 3.11

$$[AD] \perp [BC] \implies |AD| = h_a$$

$$[BE] \perp [AC] \implies |BE| = h_b$$

$$[CF] \perp [AB] \implies |CF| = h_c$$

H : Diklik merkezi (Dar açılı üçgen)



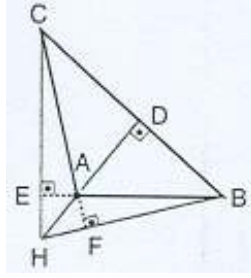
Şekil 3.12

$$[AD] \perp [BC] \implies |AD| = h_a$$

$$[AB] \perp [AC] \implies |AB| = h_b$$

$$|AC| = h_c$$

A : Diklik merkezi (Dik üçgen)



Şekil 3.13

$$[AD] \perp [BC] \implies |AD| = h_a$$

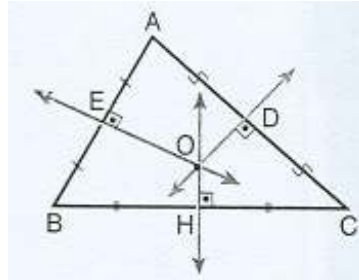
$$[BF] \perp [AC] \implies |BF| = h_b$$

$$[CE] \perp [AB] \implies |CE| = h_c$$

H : Diklik merkezi {Geniş açılı üçgen}

Tanım 3.8 (Kenar Orta Dikme)

Herhangi bir üçgenin kenarlarına, orta noktalarında dik olan doğrulara, üçgenin kenar orta dikmeleri denir.



Şekil 3.14

$$|BH| = |HC| \text{ ve } OH \perp [BC]$$

$$|AD| = |DC| \text{ ve } OD \perp [AC]$$

$$|AE| = |EB| \text{ ve } OE \perp [AB]$$

OH , OD ve OE doğruları üçgenin kenar orta dikmeleridir.

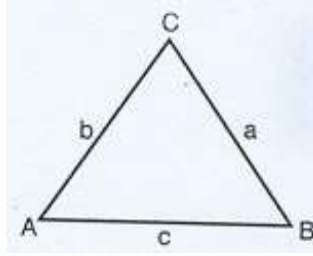
Üçgenin kenar orta dikmeleri bir noktada kesişir. Bu nokta o üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.

3.2 Üçgen Çeşitleri

3.2.1 Açılara Göre Üçgenler

Dar açılı üçgen

Her bir açısının ölçüsü dar açı olan üçgenlere dar açılı üçgen denir.



Şekil 3.15

$$m(\widehat{A}) < 90^\circ,$$

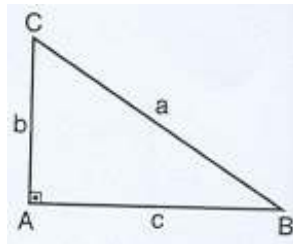
$$m(\widehat{B}) < 90^\circ \text{ ve}$$

$$m(\widehat{C}) < 90^\circ \text{ ise}$$

$\triangle ABC$ dar açılı üçgendir.

Dik Açılı Üçgen (Dik üçgen)

Bir açısının ölçüsü 90° olan üçgenlere dik (açılı) üçgen denir. Dik üçgenin dik açısını oluşturan kenarlarına dik kenarlar, dik açının karşısındaki kenarına dik üçgenin hipotenüsü denir.



Şekil 3.16

$$m(\widehat{A}) = 90^\circ$$

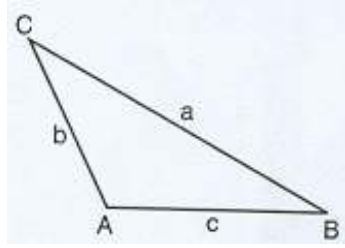
$[BC]$ hipotenüs

$[AB]$ ve $[AC]$ dik kenarlardır.

$m(\widehat{B}) < 90^\circ$, $m(\widehat{C}) < 90^\circ$ ve $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90^\circ$ dir.

Geniş Açılı Üçgen

Herhangi bir açısının ölçüsü geniş açı olan üçgenlere geniş açılı üçgen denir.



Şekil 3.17

$m(\widehat{A}) > 90^\circ$

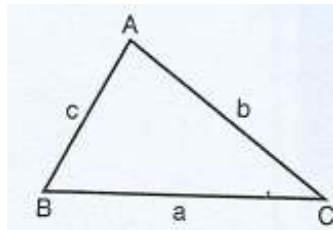
$m(\widehat{B}) < 90^\circ$, $m(\widehat{C}) < 90^\circ$ ve $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) < 90^\circ$ dir.

$\triangle ABC$ geniş açılı üçgendir.

3.2.2 Kenarlarına Göre Üçgenler

Çeşitkenar Üçgen

Kenarlarının uzunlukları birbirinden farklı olan üçgenlere çeşitkenar üçgen denir.

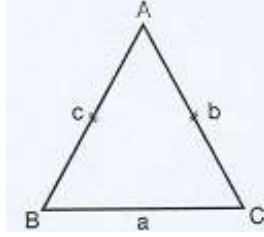


Şekil 3.18

$|AB| \neq |BC| \neq |AC|$ ve $|AB| \neq |AC|$ ise $\triangle ABC$ çeşitkenar üçgendir.

İkizkenar Üçgen

Herhangi iki kenarı eş olan üçgenlere ikizkenar üçgen denir. İkizkenar üçgende, eş olan kenarlara üçgenin eş(yan) kenarları, diğer kenara ise taban denir. Tabanın karşısındaki köşeye üçgenin tepesi denir. Eş kenarların karşısındaki açılara üçgenin taban açıları, taban kenarının karşısındaki açıya da tepe açısı denir.



Şekil 3.19

$[AB] \cong [AC]$ olduğundan $\triangle ABC$ ikizkenar üçgendir.

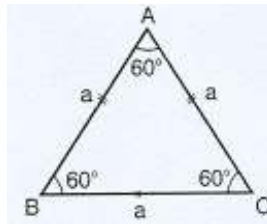
$$|AB| = |AC| \Leftrightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$$

$[AB]$, $[AC]$ eş(yan) kenarlar, $[BC]$ tabandır.

\widehat{A} tepe, \widehat{B} ile \widehat{C} taban açılarıdır.

Eşkenar Üçgen

Bütün kenarları birbirine eş olan üçgenlere eşkenar üçgen denir. Eşkenar üçgenin bütün açıların ölçüleri birbirine eşit ve 60 ar derecedir.



Şekil 3.20

$[AB] \cong [AC] \cong [BC]$ olduğundan $\triangle ABC$ eşkenar üçgendir.

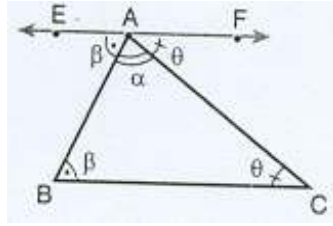
$|AB| = |AC| = |BC|$ ve
 $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60^\circ$ dir.

3.3 Üçgende Açılar

Teorem 3.1:

Bir üçgenin İç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

İspat:.



Şekil 3.21

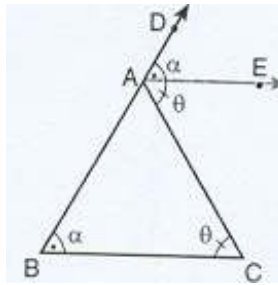
$EF \parallel [BC]$ olacak şekilde EF doğrusunu çizelim.

1. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{EAB})$ (iç ters açılar)
2. $m(\widehat{C}) = m(\widehat{FAC})$ (iç ters açılar)
3. $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{EAB}) + m(\widehat{FAC}) = 180^\circ$ (\widehat{EAF} doğru açı)
4. $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$ olur. (1., 2. ve 3. den)

Teorem 3.2:

Bir üçgende, bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

İspat:



Şekil 3.22

$[AE] \parallel [BC]$ olacak şekilde $[AE]$ m çizelim.

1. $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{B})$ (yöndeş açılar)
2. $m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{C})$ (iç ters açılar)

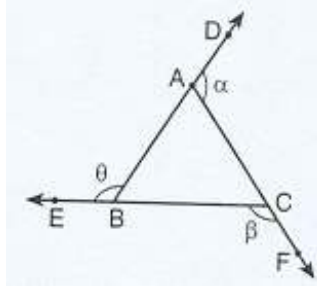
1. ve 2. deki eşitlikleri taraf tarafa toplarsak;

3. $m(\widehat{DAE}) + m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ elde edilir.
4. $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ (açı toplama aksiyomu ve 3. den)

Teorem 3.3

Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir..

İspat:



Şekil 3.23

1. $m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{A}) = 180^\circ$ (komşu bütünler açılar)
2. $m(\widehat{EBA}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ$ (komşu bütünler açılar)
3. $m(\widehat{FCB}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$ (komşu bütünler açılar)
4. 1., 2. ve 3. deki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{EBA}) + m(\widehat{FCB}) + m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 540^\circ \text{ olur.}$$

Teorem 3.1 den

$$5. \quad m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{EBA}) + m(\widehat{FCB}) + 180^\circ = 540^\circ \text{ bulunur.}$$

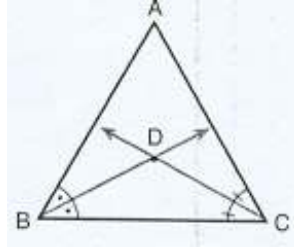
$$6. \quad m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{EBA}) + m(\widehat{FCB}) = 360^\circ \quad (5. \text{ den})$$

Lemma 1:

$\triangle ABC$ nde, $[BD]$ ve $[CD]$ sırasıyla B ve C açılarının açıortayları ise;

$$m(\widehat{BDC}) = 90^\circ + \frac{m(\widehat{A})}{2} \text{ dir.}$$

İspat:



Şekil 3.24

DBC üçgeninde iç açların ölçüleri toplamından,

$$m(\widehat{BDC}) + \frac{m(\widehat{B})}{2} + \frac{m(\widehat{C})}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 180^\circ - \left(\frac{m(\widehat{B})}{2} + \frac{m(\widehat{C})}{2} \right)$$

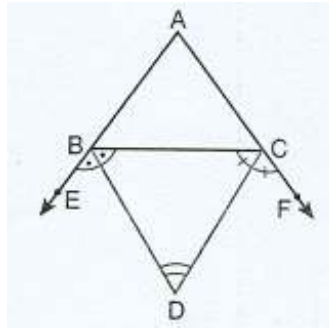
$$\Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 180^\circ - \left(\frac{180^\circ - m(\widehat{A})}{2} \right) \quad (m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180 - m(\widehat{A}))$$

$$\Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 90^\circ + \frac{m(\widehat{A})}{2} \text{ olur.}$$

Lemma 2 :

Şekilde, $[BD]$ ve $[CD]$ sırasıyla B ve C açlarının dış açıortayları ise

$$m(\widehat{BDC}) = 90 - \frac{m(\widehat{A})}{2} \text{ dir.}$$



Şekil 3.25

İspat:

$\triangle BDC$ nde iç açların ölçüleri toplamından;

$$m(\widehat{BDC}) + \frac{180^\circ - m(\widehat{B})}{2} + \frac{180^\circ - m(\widehat{C})}{2} = 180^\circ$$

$$2m(\widehat{BDC}) + 180^\circ - m(\widehat{B}) + 180^\circ - m(\widehat{C}) = 360^\circ$$

$$\implies 2m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$$

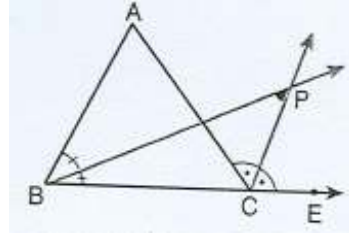
$$\implies 2m(\widehat{BDC}) = 180^\circ - m(\widehat{A})$$

$$\implies m(\widehat{BDC}) = 90^\circ - \frac{m(\widehat{A})}{2} \text{ olur. } (m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ - m(\widehat{A}))$$

Lemma 3:

Şekilde; $[BP]$, B açısının iç açıortayı, $[CP]$ da C açısının dış açıortayı ise

$$m(\widehat{BPC}) = \frac{m(\widehat{A})}{2} \text{ dir.}$$



Şekil 3.26

İspat:

$$m(\widehat{PCE}) = \frac{m(\widehat{B})}{2} + m(\widehat{BPC}) \quad (\text{dış açı})$$

$$m(\widehat{PCE}) = \frac{m(\widehat{ACE})}{2} = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2} \quad (\text{dış açı})$$

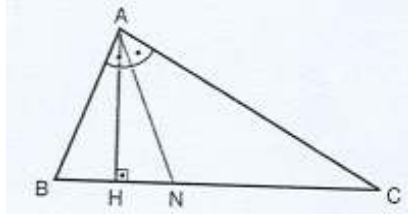
Her iki eşitliğin sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları da eşittir. O halde;

$$\frac{m(\widehat{B})}{2} + m(\widehat{BPC}) = \frac{m(\widehat{A})}{2} + \frac{m(\widehat{B})}{2} \implies m(\widehat{BPC}) = \frac{m(\widehat{A})}{2} \text{ olur}$$

Lemma 4 :

ABC üçgeninde, $[AH] \perp [BC]$, $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{NAC})$ ve $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$

ise $m(\widehat{HAN}) = \frac{m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})}{2}$ dir.



Şekil 3.27

İspat:

$\triangle ABC$ nde $[m(\widehat{BAH}) = \frac{m(\widehat{A})}{2} - m(\widehat{HAN})]$ olduğundan;

1. $\triangle ABH$ nde $m(\widehat{B}) + \frac{m(\widehat{A})}{2} - m(\widehat{HAN}) = 90^\circ$
2. $\triangle AHC$ nde $m(\widehat{C}) + \frac{m(\widehat{A})}{2} + m(\widehat{HAN}) = 90^\circ$ olur.

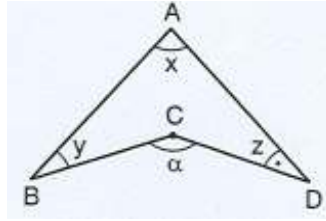
1. ve 2. eşitliklerini birbirlerinden taraf tarafa çıkarırsak;

$$m(\widehat{B}) - m(\widehat{C}) - 2m(\widehat{HAN}) = 0 \implies m(\widehat{HAN}) = \frac{m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})}{2} \text{ bulunur.}$$

Lemma 5:

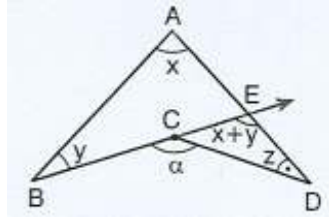
Şekildeki $ABCD$ içbükey dörtgeninde;

$m(\widehat{A}) = x$, $m(\widehat{B}) = y$, $m(\widehat{D}) = z$ ve $m(\widehat{C}) = \alpha$ ise $\alpha = x + y + z$ dir.



Şekil 3.28

İspat:



Şekil 3.29

$[BC]$ nı uzatalım ve $[AD]$ nı E de kessin.

$\triangle ABE$ nde, $m(\widehat{CED}) = x + y$ (dış açı)

$\triangle ECD$ nde, $m(\widehat{BCD}) = x + y + z$ olur. (dış açı) Yani, $\alpha = x + y + z$ dir.

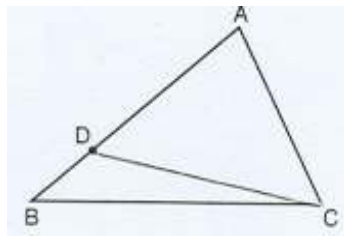
3.4 Üçgenin Açıları ile Kenarları Arasındaki Bağlılıklar

Teorem 3.4

Bir üçgenin herhangi iki kenarı eş değil ise bu kenarlardan büyük olanın karşısındaki açının ölçüsü, diğer kenarın karşısındaki açının ölçüsünden büyüktür.

İspat: ABC üçgeninde $|AB| > |AC|$ kabulümüz olmak üzere;

$m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{ABC})$ olduğunu gösterelim.



Şekil 3.30

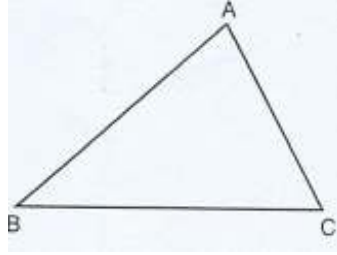
$|AD| = |AC|$ olacak şekilde $[AB]$ üzerinde bir D noktası alalım.

1. $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACD})$ ($\triangle ADC$ ikizkenar üçgen)
2. $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{DCB})$ (açı toplama aksiyomu)
3. $m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{ACD})$ (1. ve 2. den)
4. $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{DCB})$ (dış açı)
5. $m(\widehat{ADC}) > m(\widehat{B})$ (4. ten)
6. $m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{ADC}) > m(\widehat{B})$ (3. ve 5. ten)
7. $m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{ACD}) > m(\widehat{B})$ olur. (1. ve 6. dan)

Teorem 3.5

Bir üçgenin herhangi iki açısı eş değilse, bu açılardan ölçüsü büyük olanının karşısındaki kenarın uzunluğu daha büyüktür

İspat: ABC üçgeninde $m(\widehat{C}) > m(\widehat{B})$ kabul edelim; $|AB| > |AC|$ olduğunu gösterelim.



Şekil 3.31

$\triangle ABC$ nde, $|AB|$ ve $|AC|$ kenarlarının uzunlukları arasında,

1. $|AB| = |AC|$,
 2. $|AB| < |AC|$,
 3. $|AB| > |AC|$ bağıntılarından yalnız birisi doğrudur.
1. durumda $|AB| = |AC|$ ise $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olur ki kabulümüze aykırıdır.
2. durumda $|AB| < |AC|$ ise $m(\widehat{C}) < m(\widehat{B})$ olur ki bu da kabulümüze aykırıdır. O hâlde, 3. durum olan $|AB| > |AC|$ doğrudur.

Sonuç 1:

Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları a, b, c ve açıları $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ ise

$$m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C}) \iff a > b > c \text{ dir.}$$

Sonuç 2:

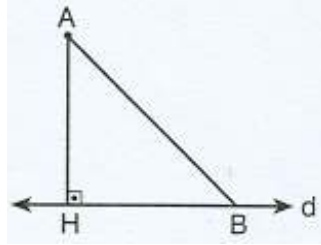
Bir ABC üçgeninde A , B ve C köşelerindeki dış açılar A' , B' ve C' ise

$$m(\widehat{A}') > m(\widehat{B}') > m(\widehat{C}') \iff a < b < c \text{ dir.}$$

Teorem 3.6

Bir noktanın bir doğruya olan en kısa uzaklığı, noktadan o doğruya inilen dikmedir.

İspat: $A \notin d$, $[AH] \perp d$ ve $H, B \in d$ olsun. $|AH| < |AB|$ olduğunu gösterelim.



Şekil 3.32

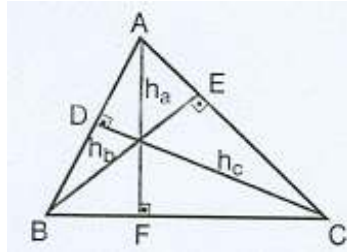
AHB dik üçgeninde,

$m(\widehat{ABH}) < m(\widehat{AHB})$ olduğundan, Teorem 3.5 gereğince

$|AH| < |AB|$ olur.

Sonuç 1:

Bir ABC üçgeninde; a , b , c kenarlarına ait yükseklikler sırasıyla; h_a , h_b , h_c ise $h_a + h_b + h_c < a + b + c$ dir.



Şekil 3.33

İspat:

Şekildeki $\triangle ABC$ nde,

$|AF| = h_a$, $|BE| = h_b$, $|CD| = h_c$ dir.

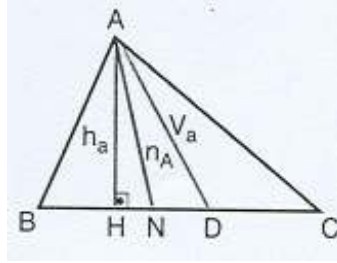
1. $\triangle EBC$ nde; $|BE| < |BC|$ yani $h_b < a$

2. $\triangle DCA$ nde; $|DC| < |AC|$ yani $h_c < b$

3. $\triangle ABF$ nde; $|AF| < |AB|$ yani $h_a < c$

1. , 2. ve 3. eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$h_a + h_b + h_c < a + b + c$ olur.

Sonuç 2:

Şekil 3.34

Şekilde; $[AH]$, $[AN]$ ve $[AD]$ sırasıyla A köşesinden çizilen yükseklik, açıortay ve kenarortay ise

$h_a < n_A < V_a$ dır.

İspat:

$|AB| < |AC|$ olsun.

$\triangle ABC$ nde;

$$|AH| < |AN| \implies h_a < n_A \quad (1)$$

$$|AB| < |AC| \implies m(\widehat{CAD}) < m(\widehat{BAD}) \text{ olur.}$$

O hâlde, $m(\widehat{BAD}) > m(\widehat{BAN})$ dir ve N noktası H ile D arasında olur.

$\triangle AND$ nde, $m(\widehat{AND}) = 90^\circ + m(\widehat{HAN})$ olduğunda,

\widehat{AND} geniş açıdır ve $n_A < V_a$ olur (2). O hâlde, (1) ve (2) den,

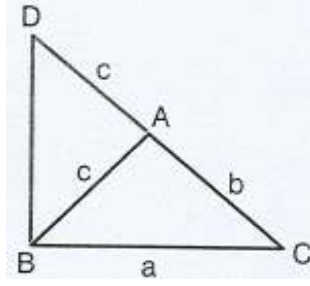
$h_a < n_A < V_a$ bulunur.

Teorem 3.7

Bir üçgenin herhangi iki kenarının uzunluğunun toplamı, üçüncü kenarın uzunluğundan büyüktür.

İspat:

ABC bir üçgendir. $|AB| + |AC| > |BC|$ olduğunu gösterelim;



Şekil 3.35

$[CA]$ nın uzantısında $|AB| = |AD|$ olacak şekilde bir D noktası alalım.

1. $|DC| = |AD| + |AC|$ (arada olma)
2. $|DC| = |AB| + |AC|$ ($|AD| = |AB|$)
3. $m(\widehat{CBD}) > m(\widehat{ABD})$ (açı toplama aksiyomu)
4. $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ABD})$ ($|AB| = |AD|$)
5. $m(\widehat{CBD}) > m(\widehat{ADB})$ (3. ve 4. e göre)
6. $|DC| > |BC|$ (teorem 3.5)
7. $|AB| + |AC| > |BC|$ (2. ve 6. dan)

Sonuç 1

Bir üçgende herhangi iki kenarın uzunlukları farkının mutlak değeri üçüncü kenar uzunluğundan küçüktür.

İspat: Herhangi bir ABC üçgeninde, $|AB| + |AC| > |BC|$ (Teorem 3.7) eşitsizliğinden, $|AB| > |BC| - |AC|$ elde edilir. $|BC|$ ile $|AC|$ nun büyüklükleri belli olmadığı için dolayısıyla uzunluk negatif olmayacağından $|AB| > ||BC| - |AC||$ olur.

Sonuç 2

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ise

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b \text{ dir.}$$

Bir ABC üçgeninde

$$\text{a. } m(\widehat{A}) = 90^\circ \implies a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{Pisagor bağıntısı})$$

$$\text{b. } m(\widehat{A}) < 90^\circ \implies a^2 < b^2 + c^2$$

$$\text{c. } m(\widehat{A}) > 90^\circ \implies a^2 > b^2 + c^2$$

Sonuç 1

Bir ABC üçgeninde üçgen eşitsizlikleri;

$$\text{a. } m(\widehat{A}) = 90^\circ \implies \sqrt{b^2 + c^2} = a < b + c$$

$$\text{b. } m(\widehat{A}) < 90^\circ \implies |b - c| < a < \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\text{c. } m(\widehat{A}) > 90^\circ \implies \sqrt{b^2 + c^2} < a < b + c$$

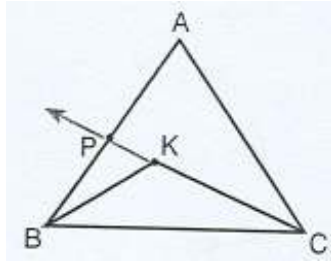
Teorem 3.8:

Bir ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir nokta K ise

$$|KB| + |KC| < |AB| + |AC| \text{ eşitsizliği vardır.}$$

İspat : K noktası ABC üçgeninin içinde bir nokta olsun.

$$|KB| + |KC| < |AB| + |AC| \text{ olduğunu göstermeliyiz.}$$



Şekil 3.36

$[CK, [AB]$ nı P noktasında kessin.

$$1. \triangle PBK \text{ nde; } |BK| < |PK| + |PB| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

$$2. \triangle APC \text{ nde; } |PK| + |KC| < |AP| + |AC| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

1. ve 2. eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak;

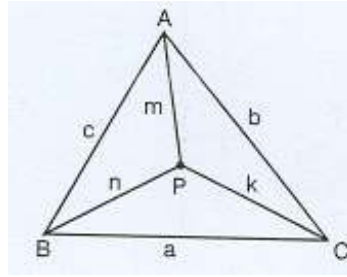
$$|PK| + |BK| + |KC| < |PK| + \underbrace{|PB| + |AP|}_{|AB|} + |AC|$$

$$|BK| + |KC| < |AB| + |AC| \text{ olur.}$$

Teorem 3.9

Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde alınan bir P noktasının, köşelere olan uzaklıkları toplamı, üçgenin yarı çevre uzunluğundan büyük, çevre uzunluğundan küçüktür.

İspat:



Şekil 3.37

$|PA| = m$, $|PB| = n$ ve $|PC| = k$ diyelim,
 $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ ve $\triangle PAB$ nde;

$$\left. \begin{array}{l} a < n + k \\ b < m + k \\ c < m + n \end{array} \right\} \text{ taraf tarafa toplarsak,}$$

$$a + b + c < 2(m + n + k) \implies \frac{a + b + c}{2} < m + n + k \quad (1)$$

Teorem 3.8 den

$$\left. \begin{array}{l} n + k < b + c \\ m + n < a + b \\ m + k < a + c \end{array} \right\} \text{ taraf tarafa toplarsak,}$$

$$2(m + n + k) < 2(a + b + c) \implies m + n + k < a + b + c \text{ olur.} \quad (2)$$

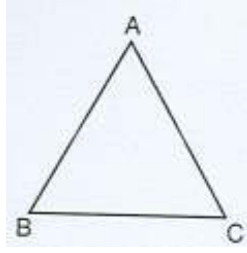
(1) ve (2) den

$$\frac{a + b + c}{2} < m + n + k < a + b + c$$

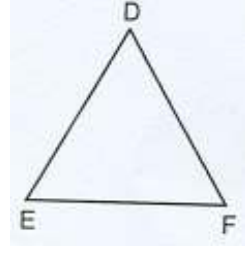
bulunur.

3.5 Üçgenlerin Eşliği

$\triangle ABC$ ve $\triangle DEF$ gibi verilen iki üçgenin köşeleri ve kenarları arasında,
 $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$ eşlemesi yapılabilir. Bu eşlemenin anlamı;



Şekil 3.38



Şekil 3.39

Köşelere göre;

A köşesi ile D köşesi veya \hat{A} ile \hat{D}

B köşesi ile E köşesi veya \hat{B} ile \hat{E}

C köşesi ile F köşesi veya \hat{C} ile \hat{F}

Kenarlara göre;

$[AB]$ kenarı ile $[DE]$ kenarı, $[BC]$ kenarı ile $[EF]$ kenarı, $[AC]$ kenarı ile $[DF]$ kenarı arasında birebir karşılaştırma yapmaktır.

Tanım 3.9

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı açılar ve kenarlar eş ise bu üçgenlere eş üçgenler denir. Üçgenlerin eşliği “ \cong ” sembolü ile gösterilir.

$\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$ eşlemesi bir eşlik ise $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ şeklinde gösterilir ve ABC üçgeni eştir DEF üçgeni diye okunur. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ise

$$m(\hat{A}) = m(\hat{D}) \quad |AB| = |DE|$$

$$m(\hat{B}) = m(\hat{E}) \quad \text{ve} \quad |BC| = |EF|$$

$$m(\hat{C}) = m(\hat{F}) \quad |AC| = |DF| \quad \text{dir.}$$

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ifadesi; aşağıdaki şekillerde de yazılabilir.

$$\triangle ACB \cong \triangle DFE$$

$$\triangle BAC \cong \triangle EDF$$

$$\triangle BCA \cong \triangle FED$$

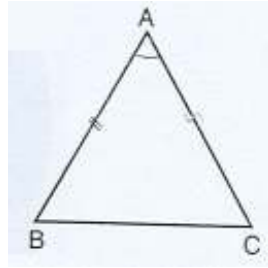
$$\triangle CAB \cong \triangle FDE$$

$$\triangle CBA \cong \triangle FED$$

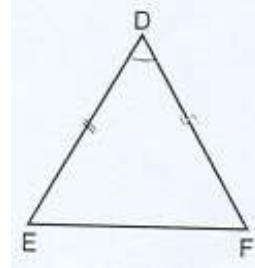
3.6 Üçgenlerde Eşlik Aksiyomu

Aksiyom 3.1 (Kenar Açılı Kenar Eşlik Aksiyomu)

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı ikişer kenarları ile bu kenarların oluşturduğu açılar eş ise bu iki üçgen de eştir. Bu eşliğe kenar açı kenar (K.A.K.) eşliği denir.



Şekil 3.40



Şekil 3.41

ABC ve DEF üçgenleri için,

$\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$ eşlemesine göre,

$$\left. \begin{array}{l} [AB] \cong [DE] \quad \text{yani} \quad |AB| = |DE| \\ \hat{A} \cong \hat{D} \quad \text{yani} \quad m(\hat{A}) = m(\hat{D}) \\ [AC] \cong [DF] \quad \text{yani} \quad |AC| = |DF| \end{array} \right\} \text{ise } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ olduğundan, karşılıklı diğer tüm elemanlar da eştirler,

$$|BC| = |EF|$$

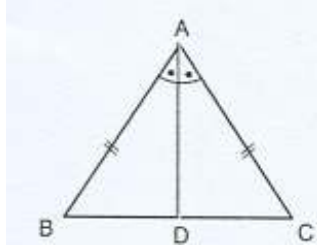
$$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$$

$$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \quad \text{dir.}$$

Teorem 3.10

Bir üçgenin iki kenarı eş ise bu kenarların karşısındaki açılar da eştir.

İspat:



şekil 3.42

ABC üçgeninde, $|AB| = |AC|$ olsun. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olduğunu göstermeliyiz.

A açısının $[AD]$ açıortayını çizersek;

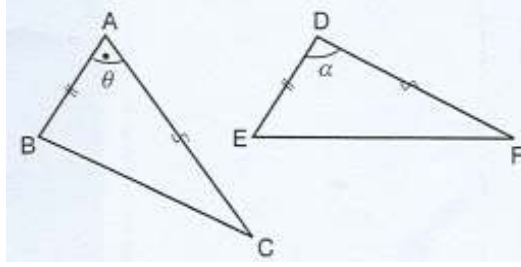
$$\left. \begin{array}{l} |AB| = |AC| \\ m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) \quad ([AD] \text{ açıortay}) \\ |AD| = |AD| \end{array} \right\} \begin{array}{l} K.A.K \text{ aksiyomuna göre} \\ \triangle ABD \cong \triangle ACD \end{array}$$

Eş üçgenlerin karşılıklı tüm elemanları eş olacağından, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ bulunur.

Sonuç: Bir eşkenar üçgenin bütün iç açılarının ölçüleri birbirine eşit ve 60° dir.

Lemma 6: İki üçgenin karşılıklı ikişer kenarı birbirine eş ve bu kenarların oluşturduğu açılar eş değilse bu açılardan büyük olanın karşısındaki kenar diğer açının karşısındaki kenardan büyüktür.

İspat:



Şekil 3.43

Şekilde $\triangle ABC$ ve $\triangle DEF$ veriliyor.

$$\left. \begin{array}{l} |AB| = |DE| \\ |AC| = |DF| \\ m(\hat{A}) < m(\hat{D}) \end{array} \right\} \Rightarrow |EF| > |BC| \text{ olduğunu gösterelim.}$$

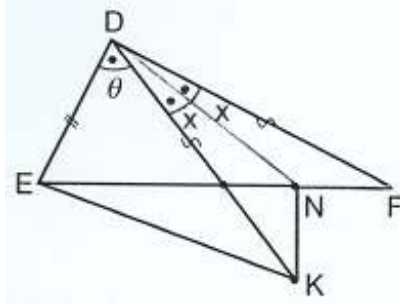
$m(\widehat{EDK}) = m(\widehat{BAC})$ ve $|AC| = |DK|$ olacak şekilde $[DK]$ m çizip K ile

E yi birleştirelim. $K.A.K$ eşlik aksiyomuna göre,

$$\triangle ABC \cong \triangle DEK \text{ dir. ve } |BC| = |EK| \dots (1) \text{ olur.}$$

KDF açısının açıortayını çizip $[EF]$ yi kestiği nokta N olsun.

$K.A.K$ eşlik aksiyomuna göre $\triangle DKN \cong \triangle DFN$ olur. Eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olacağından, $|NK| = |NF|$ dir... (2)



Şekil 3.44

$\triangle EKN$ de;

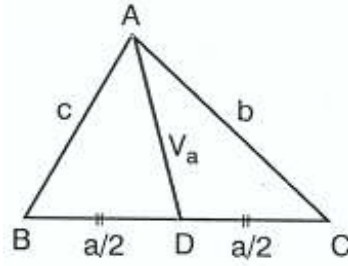
$$|NE| + |NK| > |EK| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

$$|NE| + |NF| > |BC| \quad (1) \text{ ve } (2) \text{ den}$$

$$|EF| > |BC| \quad \text{ olur.}$$

Sonuç: İki üçgenin karşılıklı ikişer kenarları birbirine eş ve üçüncü kenarları eş değilse, uzun olan kenar karşısındaki açı, diğer üçgende bu açıya karşılık gelen açıdan daha büyüktür.

Lemma7: ABC üçgeninde $[AD]$, $[BC]$ kenarının kenarortayı,
 $|BD| = |DC| = \frac{a}{2}$, $|AB| = c$
 $|AC| = b$ ve $|AD| = V_a$ ise



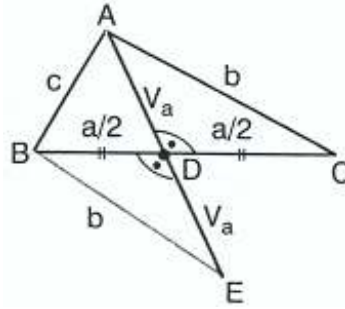
Şekil 3.45

a. $\left| \frac{b-c}{2} \right| < V_a < \frac{b+c}{2}$

b. $[BC]$, $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarının kenarortayları

V_a, V_b, V_c ise $\frac{a+b+c}{2} < V_a + V_b + V_c < a + b + c$ dir.

İspat:



Şekil 3.46

$|AD| = |DE|$ olacak şekilde $[AD]$ nı uzatalım. E ile B yi birleştirelim.

$$\left. \begin{array}{l} |BD| = |DC| \\ m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{ADC}) \quad (\text{ters açılar}) \\ |AD| = |DE| \end{array} \right\} \implies K.A.K \text{ eşlik aksiyomuna}$$

göre $\triangle DBE \cong \triangle DCA$

a. ABE üçgeninde

$$|b - c| < 2V_a < b + c$$

$$\left| \frac{b - c}{2} \right| < V_a < \frac{b + c}{2} \text{ olur.}$$

b. ABE üçgeninde $2V_a < b + c$ dir. Benzer şekilde $2V_b < a + c$, $2V_c < a + b$ olur.

Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$2(V_a + V_b + V_c) < 2(a + b + c) \implies V_a + V_b + V_c < a + b + c \text{ olur.....(1)}$$

Şekil 3.46 dan;

$$\triangle ABD \text{ nde; } V_a > c - \frac{a}{2}$$

$$\text{Benzer şekilde } V_b > a - \frac{b}{2}$$

$$\text{Benzer şekilde } V_c > b - \frac{c}{2} \text{ olur.}$$

Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$V_a + V_b + V_c > \frac{a + b + c}{2} \text{ olur.....(2)}$$

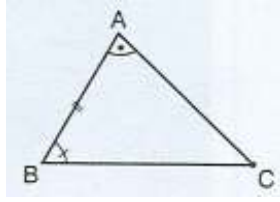
O halde (1) ve (2) den; $\frac{a + b + c}{2} < V_a + V_b + V_c < a + b + c$ bulunur.

3.7 Üçgenlerde Eşlik Teoremleri

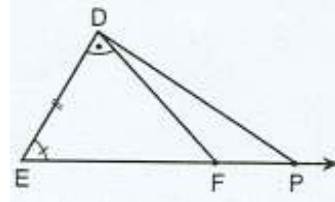
Teorem 3.11 (Açı Kenar Açılı Eşlik Teoremi)

İki üçgenin karşılıklı birer kenarları ve bu kenarların uçlarındaki ikişer açıları eş ise bu üçgenler eşdir. Bu teoreme açı kenar açılı ($A.K.A.$) eşlik

teoremi denir.



Şekil 3.47



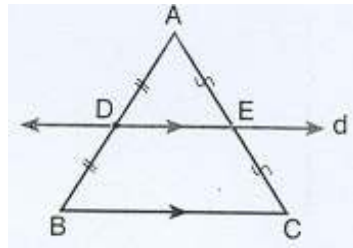
Şekil 3.48

İspat: $ABC \longleftrightarrow DEF$ eşlemesi kabulümüz olsun. $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$,
 $|AB| = |DE|$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ dir. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ olduğunu gösterelim.
 $[EF]$ uzantısında, $|BC| = |EP|$ olacak şekilde bir P noktası işaretleyelim.

1. $|AB| = |DE|$ (Veriliyor.)
2. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ (Veriliyor.)
3. $|BC| = |EP|$ (çizimden)
4. $\triangle ABC \cong \triangle DEP$ (K.A.K. eşlik aksiyomu)
5. $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDP}) = m(\widehat{EDF})$ (verilenlerden ve 4. den)
6. $|EF| = |EP|$ (5. den)
7. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (F ile P çakışık ve 6. dan)

Teorem 3.12:

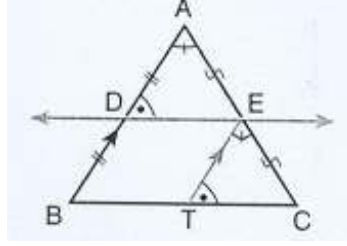
Herhangi bir üçgenin, bir kenarını ortalayarak kesen ve ikinci bir kenarına paralel olan bir doğru, üçüncü kenarında ortalayarak keser.



Şekil 3.49

İspat: ABC üçgeninde; $|AD| = |DB|$ ve $d \parallel [BC]$ alalım. $|AE| = |EC|$

olduğunu gösterelim.



Şekil 3.50

$[ET] \parallel [AB]$ olacak şekilde $[ET]$ nı çizelim.

Paralel doğrular arasında kalan paralel doğru

parçaları eşit olduğundan, $|ET| = |DB|$ ve $|ET| = |AD|$ olur.

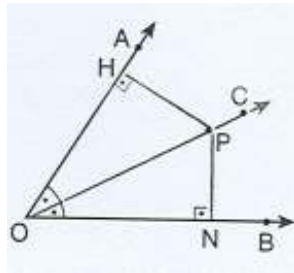
$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ETC}) \quad (\text{kolları paralel açılar}) \\ |AD| = |ET| \quad (\text{Bulundu.}) \\ m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{TEC}) \quad (\text{yöndeş açılar}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{A.K.A. eşlik teoremine göre;}$$

$\triangle ADE \cong \triangle ETC$ olur. Buradan, $|AE| = |EC|$ bulunur.

Teorem 3.13:

Bir açının açıortayı üzerindeki herhangi bir noktanın, açının kenarlarına olan uzaklıkları birbirine eşittir.

İspat: $[OC, AOB]$ açısının açıortayı ve $P \in [OC, [PH] \perp [OA, [PN] \perp [OB]$ kabulümüz; $|PH| = |PN|$ olduğunu gösterelim.



Şekil 3.51

$$\begin{array}{l} m(\widehat{HOP}) = m(\widehat{PON}) \\ m(\widehat{OHP}) = m(\widehat{ONP}) \end{array} \Rightarrow m(\widehat{OPH}) = m(\widehat{OPN})$$

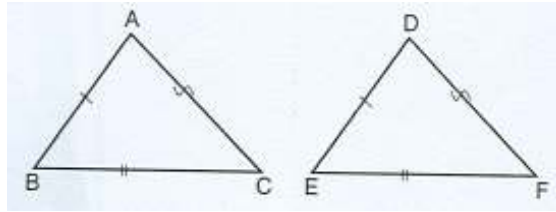
$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{HOP}) = m(\widehat{NOP}) \\ |OP| = |PO| \\ m(\widehat{OPH}) = m(\widehat{OPN}) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{A.K.A. eşlik teoremine göre;} \\ \triangle HOP \cong \triangle NOP \end{array}$$

Eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olduğundan,

$|PH| = |PN|$ ve $|OH| = |ON|$ olur.

Teorem 3.14: (Kenar Kenar Kenar Eşlik Teoremi)

İki üçgenin karşılıklı bütün kenarları birbirine eş ise üçgenler eştir. Bu teorem kenar kenar kenar (K.K.K.) eşlik teoremi şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.52

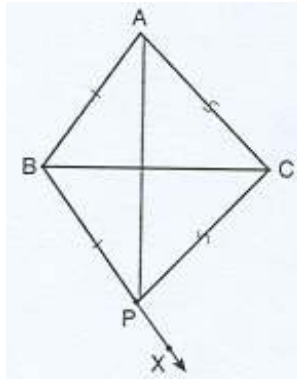
İspat:

$$\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF,$$

$$|AB| = |DE|,$$

$$|AC| = |DF|$$

$|BC| = |EF|$ olsun. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ olduğunu gösterelim.



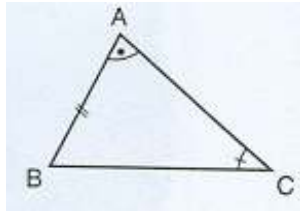
Şekil 3.53

$\widehat{DEF} = \widehat{CBX}$ olacak şekilde $[BX]$ çizelim $|DE| = |BP|$ olacak şekilde P noktasını belirleyip C noktasıyla birleştirelim.

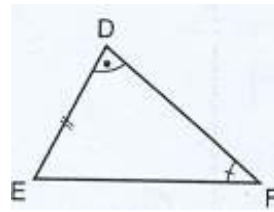
1. $\triangle DEF \cong \triangle PBC$ (çizimden)
2. $|DF| = |PC|$
 $|DE| = |PB|$ (1. den)
3. $|DF| = |AC|$
 $|DE| = |AB|$ (Veriliyor.)
4. $|PC| = |AC|$
 $|PB| = |AB|$ (2. ve 3. ifadelerden)
5. $m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{BPA})$ (4. den)
6. $m(\widehat{PAC}) = m(\widehat{APC})$ (4. den)
7. $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BPC})$ (5. 6. ve açı ölçülerini toplama aksiyomundan)
8. $\triangle ABC \cong \triangle PBC$ (4. 7. ve *K.A.K.* eşlik aksiyomundan)
9. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (1. ve 8. den)

Teorem 3.16 (Kenar Açılı Eşlik Teoremi)

Herhangi iki üçgenin birinin iki açısı ile, bu açılardan birinin karşısındaki kenarı, diğer üçgenin bunlara karşılık olan elemanlarına eş ise bu iki üçgen eşdir.



Şekil 3.54



Şekil 3.55

İspat: $|AB| = |DE|$,

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$ ve

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ kabulümüz; $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ olduğunu gösterelim.

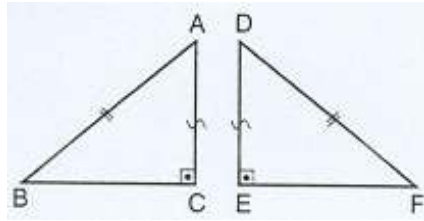
$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \end{array} \right\} \Rightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \text{ olur.}$$

O hâlde,

$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ |AB| = |DE| \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ olur. (A.K.A. eşlik teoreminden)}$$

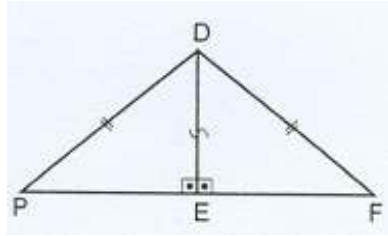
Teorem 3.17 (Hipotenüs - Dik Kenar Eşlik Teoremi)

Hipotenüsleri ve birer dik kenarları eş olan iki dik üçgen eştir.



Şekil 3.56

İspat: ABC ve DEF üçgenlerinden $m(\widehat{C}) = m(\widehat{E}) = 90^\circ$, $|AB| = |DF|$ ve $|AC| = |DE|$ alalım. $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ olduğunu göstermemiz isteniyor;



Şekil 3.57

[FE üzerinde, $|EP| = |BC|$ olacak şekilde, bir P noktası alalım ve D ile birleştirelim.

1. $\triangle ABC \cong \triangle DPE$ (K.A.K. eşlik aksiyomundan)
2. $|AB| = |DP| = |DF|$ (verilenlerden ve 1. den)

3. $m(\widehat{P}) = m(\widehat{F})$ (2. den)
4. $|DE| = |DE|$
5. $\triangle DPE \cong \triangle DFE$ (K.A.K. eşlik aksiyomundan)
6. $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ (1. ve 5. den)

Sonuç: Hipotenüsleri ve birer dar açıları eş olan dik üçgenler eştir.

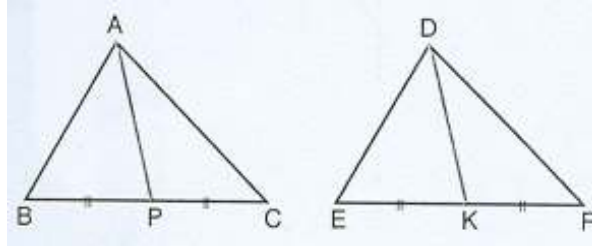
Teorem 3.18:

Eş iki üçgenin;

1. Karşılıklı kenarortaylarının uzunlukları,
2. Karşılıklı açıortaylarının uzunlukları,
3. Karşılıklı yüksekliklerinin uzunlukları, birbirine eşittir.

İspat:

1.



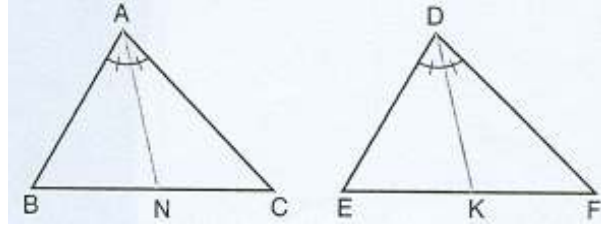
Şekil 3.58

$[AP]$ ve $[DK]$, üçgenlerin $[BC]$ ve $[EF]$

kenarlarına ait kenarortaylar olsun.

1. $|AB| = |DE|$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)
2. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)
3. $|BP| = |EK|$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF \implies |BC| = |EF|$)
4. $\triangle ABP \cong \triangle DEK$ (1. , 2. , 3. ve K.A.K. eşlik aksiyomundan)
5. $|AP| = |DK|$ (4. den)

2.



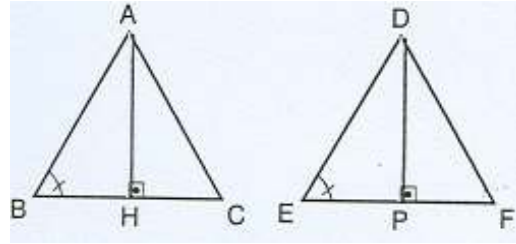
Şekil 3.59

$[AN]$ ve $[DK]$, üçgenlerin A ve D

açılarına ait açıortaylar olsun.

1. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)
2. $|AB| = |DE|$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)
3. $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{EDK})$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF \implies m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDF})$)
4. $\triangle ABN \cong \triangle DEK$ (1. , 2. , 3. ve A.K.A. eşlik teoreminden)
5. $|AN| = |DK|$ (4. den)

3.



Şekil 3.60

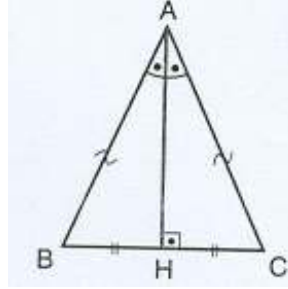
$[AH]$ ve $[DP]$, üçgenlerin $[BC]$ ve $[EF]$ kenarlarına ait yükseklikler olsun.

1. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)
2. $m(\widehat{BHA}) = m(\widehat{EPD}) = 90^\circ$ (Yükseklik tanımından)
3. $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{EDP})$
4. $|AB| = |DE|$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)
5. $\triangle ABH \cong \triangle DEP$ (1. , 3. , 4. A.K.A. eşlik teoreminden)
6. $|AH| = |DP|$ (5.den)

3.8 İkizkenar, Eşkenar ve Dik Üçgen ile İlgili Özellikler

Lemma8: İkizkenar bir üçgende, tabana ait kenarortay, aynı zamanda açıortay ve yüksekliktir.

İspat:



Şekil 3.61

$|AB| = |AC|$, $|BH| = |HC|$ ise $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC})$ ve $[AH] \perp [BC]$ dir.

1. $|AB| = |AC|$ (ikizkenar üçgen)
2. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ (ikizkenar üçgen)
3. $|BH| = |HC|$ (veriliyor)
4. $\triangle ABH \cong \triangle ACH$ (1. , 2. , 3. ve K.A.K eşlik aksiyomundan)

Eş üçgenlerin karşılıklı tüm elemanları eş olduğundan;

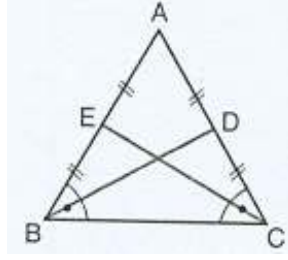
$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC})$ dir. ve $[AH]$ açıortay olur.

$m(\widehat{AHB}) = m(\widehat{AHC}) = 90^\circ$ dir. ve $[AH]$ yükseklik olur. (Eş komşu bütünler açıları)

Sonuç: Eşkenar üçgenin bütün kenarlarına ait, kenarortay, açıortay ve yüksekliklerinin uzunlukları eşittir.

Lemma9: İkizkenar bir üçgenin eş kenarlarına ait kenarortaylar birbirine eştir.

İspat:



Şekil 3.62

$|AB| = |AC|$ ve $|AE| = |EB| = |AD| = |DC|$ ise

$[BD] \cong [CE]$ olur.

1. $|EB| = |DC|$ (Kenarortaydan)

2. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ (ikizkenar üçgen)

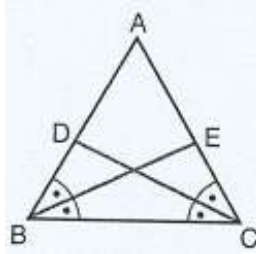
3. $|BC| = |BC|$

4. $\triangle EBC \cong \triangle DCB$ 1. , 2. , 3. ve K.A.K. eşlik aksiyomundan

O halde, eş üçgenlerde karşılıklı elemanlar eş olduğundan, $[EC] \cong [BD]$ olur.

Lemma10: Bir ikizkenar üçgende eş açılara ait açıortaylar birbirine eştir.

İspat:



Şekil 3.63

ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve $[BE]$ ile $[CD]$ açıortaylar ise

$[BE] \cong [CD]$ dir.

1. $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{BCE})$ ($\triangle ABC$ ikizkenar üçgen)

2. $|BC| = |CB|$

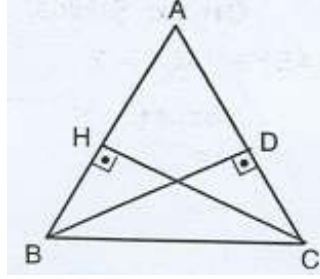
3. $m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{ECB})$ (veriliyor)

4. $\triangle DBC \cong \triangle ECB$ (1. , 2. , 3. ve A.K.A. eşlik teoreminden)

Eş üçgenlerde karşılıklı elemanlar eş olduğundan, $[BE] \cong [CD]$ olur.

Lemma11: Bir ikizkenar üçgende, eş kenarlara ait yükseklikler birbirine eştir.

İspat:



Şekil 3.64

ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve

$[BD]$ ile $[HC]$ yükseklik ise $|BD| = |HC|$ olur.

$$1. \quad m(\widehat{HBC}) = m(\widehat{DCB}) \quad (\triangle ABC \text{ ikizkenar üçgen})$$

$$2. \quad |BC| = |CB|$$

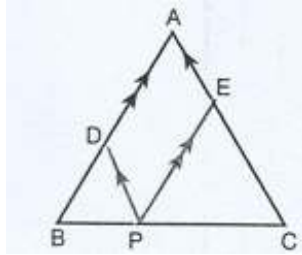
$$3. \quad m(\widehat{BHC}) = m(\widehat{CDB}) = 90^\circ \quad (\text{veriliyor})$$

$$4. \quad \triangle HBC \cong \triangle DCB \quad (1. , 2. , 3. \text{ ve } K.A.A. \text{ eşlik teoreminden})$$

Eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olacağından, $[BD] \cong [HC]$ olur.

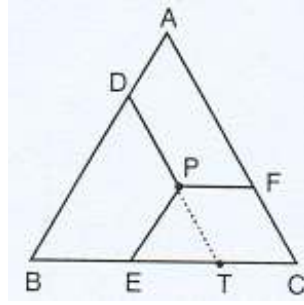
Lemma12: ABC üçgeninde; $|AB| = |AC|$, $P \in [BC]$,

$[PE] \parallel [AB]$ ve $[PD] \parallel [AC]$ ise $|PD| + |PE| = |AB|$ dir.



Şekil 3.65

İspat: Paralel doğrular arasında kalan doğru parçaları eş olacağından;



Şekil 3.67

İspat: $[DP]$ nı uzatıp $[BC]$ nı T noktasında kessin.

$\triangle PET$ ve $\triangle DBT$ eşkenar üçgen olurlar.

1. $|PE| = |PT| = |ET|$ ($\triangle PET$ eşkenar üçgen)
2. $|BT| = |DT|$ ($\triangle DBT$ eşkenar üçgen)
3. $|BT| = |PD| + |PT| = |PD| + |PE|$ (1. ve 2. den)

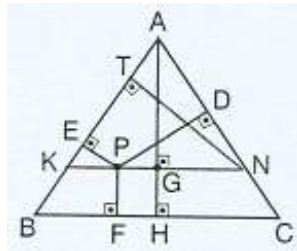
Paralel doğruların arasında kalan paralel doğru parçaları eş olacağından

4. $|PF| = |TC|$
5. $|BC| = |BT| + |TC|$
6. $|BC| = |PD| + |PE| + |PF|$ (3.,4. ve 5. den)

Lemma15: ABC üçgeni eşkenar üçgen, P ise bu üçgenin içinde herhangi bir nokta olmak üzere,

$[PE] \perp [AB]$, $[PF] \perp [BC]$, $[PD] \perp [AC]$ ve $[AH] \perp [BC]$ ise
 $|AH| = |PE| + |PD| + |PF|$ dir.

İspat:



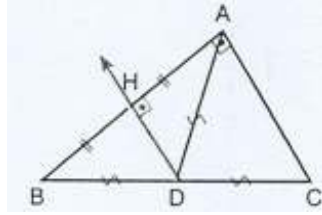
Şekil 3.68

$[KN] \parallel [BC]$ ve $[TN] \perp [AB]$ olacak şekilde $[KN]$ ile $[TN]$ yi çizelim;

$[AH] \perp [KN]$, $|GH| = |PF|$ olur. $\triangle AKN$ de eşkenar olduğundan, $|TN| = |AG| = |PE| + |PD|$ dir. (Lemma 13 gereğince). O halde, $|AH| = |AG| + |GH|$ yani $|AH| = |PE| + |PD| + |PF|$ olur.

Lemma16: Bir dik üçgende, hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu, hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.

İspat:



Şekil 3.69

$\triangle ABC$ nde $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $|BD| = |DC|$ ise $|AD| = \frac{|BC|}{2}$ dir.

$[DH \parallel [AC]$ olacak şekilde, $[DH]$ çizilirse;

$[DH \perp [AB]$ ve $|AH| = |HB|$ olur.

$[HD]$, hem yükseklik hem de kenarortay olduğundan,

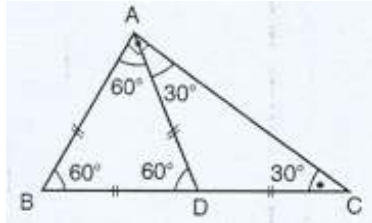
Lemma 8 gereğince $|AD| = |BD|$ olur.

Dolayısıyla $|AD| = |BD| = |DC|$ yani $|AD| = \frac{|BC|}{2}$ bulunur.

Sonuç: Herhangi bir üçgende bir kenara ait kenarortay uzunluğu, o kenarın uzunluğunun yarısına eşit ise bu üçgen dik üçgendir.

Lemma17: Bir açısının ölçüsü 30° olan dik üçgende, bu açı karşısındaki dik kenarın uzunluğu, hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.

İspat:



Şekil 3.70

$\triangle ABC$ nde, $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{C}) = 30^\circ$ ise $|AB| = \frac{|BC|}{2}$ dir.

$[BC]$ nin $[AD]$ kenarortayını çizersek;

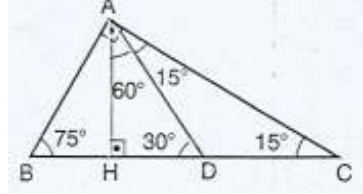
$|AD| = |BD| = |DC|$ olur. $m(\widehat{C}) = 30^\circ \implies m(\widehat{B}) = 60^\circ$ dir.

ve $\triangle ABD$ eşkenar olur. O halde, $|AB| = |BD| = \frac{|BC|}{2}$ bulunur.

Sonuç: Bir dar açısının ölçüsü 60° olan bir dik üçgende, bu açının karşısındaki dik kenar uzunluğu, diğer dik kenar uzunluğunun $\sqrt{3}$ katıdır.

Lemma18: Dar açılarının ölçüleri 15° ve 75° olan dik üçgende, hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğu, hipotenüsün uzunluğunun dörtte birine eşittir.

İspat: $\triangle ABC$ nde, $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $[AH] \perp [BC]$,
 $m(\widehat{B}) = 75^\circ$ ve $m(\widehat{C}) = 15^\circ$ ise $|AH| = \frac{|BC|}{4}$ tür.



Şekil 3.71

$|BD| = |DC|$ olacak şekilde $[AD]$ nı çizelim;

$$1. \quad |AD| = |BD| = |DC| = \frac{|BC|}{2} \quad (\text{Lemma16 gereğince})$$

$$2. \quad m(\widehat{C}) = m(\widehat{DAC}) = 15^\circ \quad (|AD| = |DC|)$$

$$3. \quad m(\widehat{ADH}) = 30^\circ$$

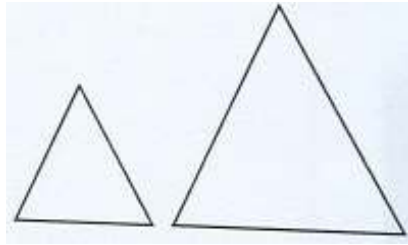
$$4. \quad |AH| = \frac{|AD|}{2} \quad (\text{Lemma17 gereğince})$$

$$5. \quad |AH| = \frac{|BC|}{4} \quad (1. \text{ ve } 4. \text{ den})$$

Bölüm 4

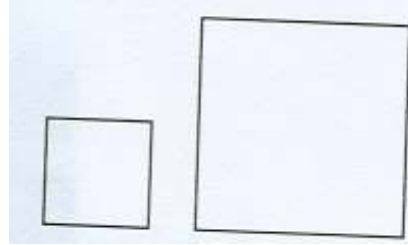
ÜÇGENLERDE BENZERLİK

Tipleri aynı fakat büyüklükleri orantılı olan şekillere benzer şekiller denir. Bu tanıma göre, uzayda geometrik cisimler, düzlemde de çokgenler arasında benzerlikler kurulabilir. Düzlemde iki eşkenar üçgen, iki kare, iki çember, uzayda da iki küp her zaman birbirine benzerdir.



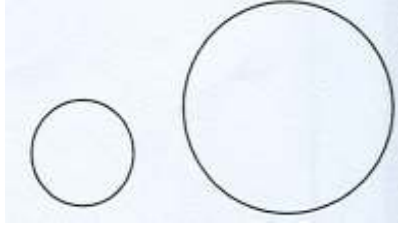
Eşkenar üçgenler benzerdir.

Şekil 4.1



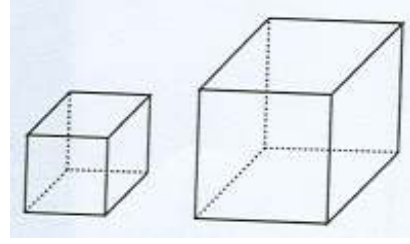
Kareler benzerdir.

Şekil 4.2



Çemberler benzerdir.

Şekil 4.3



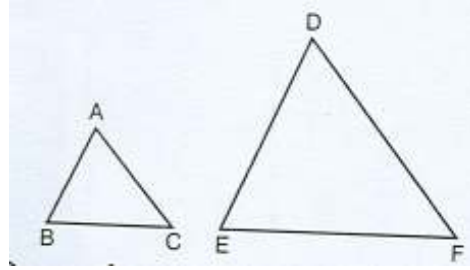
Küpler benzerdir

Şekil 4.4

4.1 Benzer Üçgenler

Tanım 4.1

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı açılar eş ve karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ise bu üçgenlere benzer üçgenler denir.



Şekil 4.5

Şekildeki üçgenler arasında, $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$ eşlemesi verilsin.

$$m(\hat{A}) = m(\hat{D})$$

$$m(\hat{B}) = m(\hat{E}) \quad \text{ve} \quad \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k$$

$$m(\hat{C}) = m(\hat{F})$$

ise $\triangle ABC$ ile $\triangle DEF$ benzerdir ve benzerlik $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2:

Benzer iki üçgenin karşılıklı kenarlarının uzunlukları oranına benzerlik

oranı denir. Benzerlik oranı pozitif bir k reel sayısıdır. Eş üçgenler benzerdirler ve benzerlik oranları 1 dir.

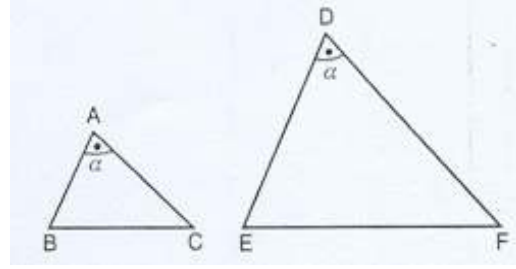
Sonuç: Birbirine eş olan iki üçgen her zaman benzerdirler, fakat birbirine benzer iki üçgen her zaman eş üçgenler olmayabilirler.

4.2 Kenar Açı Kenar (K.A.K.) Benzerlik Aksiyomu

Aksiyom 4.1:

İki üçgenin karşılıklı ikişer kenarlarının uzunlukları orantılı ve bu kenarların arasında kalan açılar eş ise bu iki üçgen benzerdir.

Bu benzerliğe kenar açı kenar (K.A.K.) benzerliği, bu aksiyoma da K.A.K. benzerlik aksiyomu denir.



Şekil 4.6

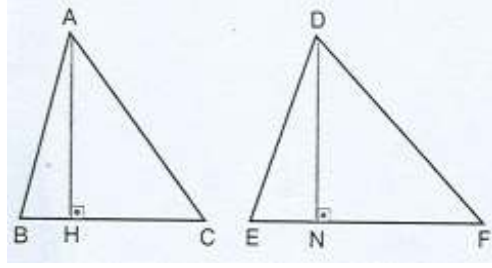
$$\left. \begin{array}{l} \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k \\ m(\hat{A}) = m(\hat{D}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ dir.}$$

Buradan $m(\hat{B}) = m(\hat{E}), m(\hat{C}) = m(\hat{F})$ ve $\frac{|BC|}{|EF|} = k$ diyebiliriz.

Teorem 4.1

Yükseklikleri eşit olan iki üçgenin alanlarının oranı, tabanlarının uzunlukları oranına eşittir.

İspat: ABC ve DEF üçgenlerinde;



Şekil 4.7

$[AH] \perp [BC]$, $[DN] \perp [EF]$ ve $|AH| = |DN|$ olsun. $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{|BC|}{|EF|}$

olduğunu gösterelim.

Bir üçgenin alanı, herhangi bir kenar uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğinin uzunlukları çarpımının yarısına eşit olduğundan,

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{\frac{|BC| \cdot |AH|}{2}}{\frac{|EF| \cdot |DN|}{2}} = \frac{|BC|}{|EF|} \text{ olur. } (|AH| = |DN| \text{ veriliyor})$$

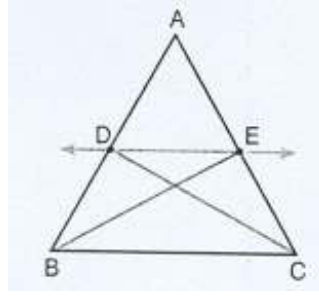
4.3 Temel Orantı Teoremi

Teorem 4.2:

Bir üçgenin bir kenarına paralel olan ve diğer iki kenarını kesen bir doğru, kestiği kenarları orantılı parçalara ayırır.

İspat: ABC bir üçgen ve $DE \parallel [BC]$ kabulümüz olmak üzere,

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \text{ olduğunu gösterelim.}$$



Şekil 4.8

$[BE]$ ile $[CD]$ nı çizersek;

$$1. \frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle EDC)} = \frac{|AD|}{|DB|} \quad (\text{Teorem 4.1})$$

$$2. \frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle EDC)} = \frac{|AE|}{|EC|} \quad (\text{Teorem 4.1})$$

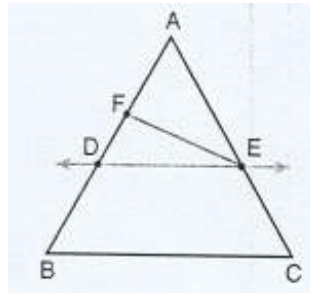
$$3. A(\triangle DEB) = A(\triangle EDC) \quad (\text{üçgenlerin yükseklikleri ve tabanları aynı})$$

$$4. \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \quad (1., 2. \text{ ve } 3. \text{ den})$$

Teorem 4.3 (Temel Orantı Teoreminin Karşıtı)

Bir doğru bir üçgenin iki kenarını farklı noktalarda keser ve kenarlar üzerinde orantılı parçalar ayırırsa, üçüncü kenara paraleldir.

İspat: ABC üçgeninde $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ kabulümüz; $DE \parallel [BC]$ olduğunu göstermeliyiz.



Şekil 4.9

$[EF]$, E noktasından geçen ve $[BC]$ na paralel olan bir doğru parçası olsun.

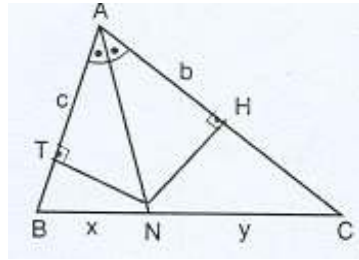
1. $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ (Veriliyor)
2. $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AF|}{|FB|}$ (teorem 4.2 den)
3. $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AF|}{|FB|}$ (1. ve 2. den)
4. $|AF| = |AD|$ olur ki D ile F noktaları çakışır. (3. den)
5. $DE \parallel [BC]$ (4. den)

4.4 Açıortay Teoremleri

Teorem 4.4 (İç Açıortay Teoremi)

Bir üçgende herhangi bir açıortayın karşı kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunlukları oranı, bu parçalara bitişik komşu kenarların uzunlukları oranına eşittir.

İspat: ABC üçgeninde $[AN]$, A açısının iç açıortayı olsun. $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|CN|}$ olduğunu gösterelim;



Şekil 4.10

$[TN] \perp [AB]$ ve $[NH] \perp [AC]$ çizelim.

1. $|TN| = |NH|$ ($[AN]$, açıortay olduğundan)
2. $\frac{A(\triangle ABN)}{A(\triangle ANC)} = \frac{|BN|}{|CN|}$ (Teorem 4.1)

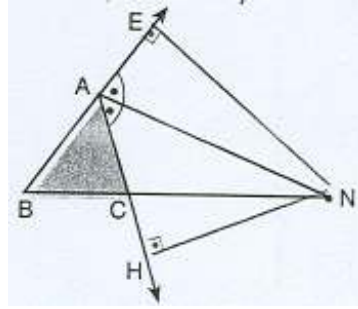
$$3. \frac{A(\triangle ABN)}{A(\triangle ANC)} = \frac{\frac{|AB| \cdot |TN|}{2}}{\frac{|AC| \cdot |NH|}{2}} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad (1. \text{ den ve sadeleştirme})$$

$$4. \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|CN|} \quad (2. \text{ ve } 3. \text{ den})$$

Teorem 4.5 (Dış AçıOrtay Teoremi)

Bir ABC üçgeninde, A açısının dış açıortayı $[AN]$, $[BC]$ kenarının uzantısını N noktasında kesiyor ise; $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|CN|}$ dir.

İspat:



Şekil 4.11

$[NE] \perp [BE]$ ve $[NH] \perp [AH]$ çizelim.

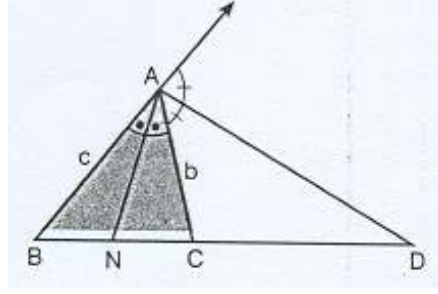
$$1. \quad |NE| = |NH| \quad ([AN], \text{ açıortay olduğundan})$$

$$2. \quad \frac{A(\triangle ABN)}{A(\triangle ACN)} = \frac{|BN|}{|CN|} \quad (\text{Teorem 4.1 den})$$

$$3. \quad \frac{A(\triangle ABN)}{A(\triangle ACN)} = \frac{\frac{|AB| \cdot |EN|}{2}}{\frac{|AC| \cdot |NH|}{2}} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad (1. \text{ den ve sadeleştirme})$$

$$4. \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|CN|} \quad (2. \text{ ve } 3. \text{ den})$$

Sonuç: ABC üçgeninin, A açısının iç açıortayı $[AN]$ ve dış açıortayı $[AD]$ ise;



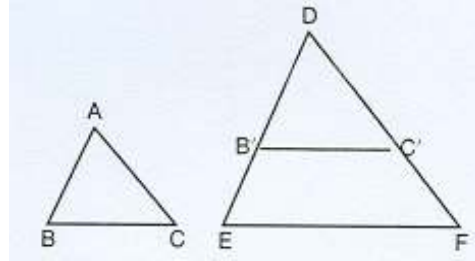
Şekil 4.12

1. $\frac{|BN|}{|CN|} = \frac{|BD|}{|CD|}$
2. $[AN] \perp [AD]$
3. $|AN| = \sqrt{b \cdot c - |BN| \cdot |CN|}$
4. $|AD| = \sqrt{|BD| \cdot |CD| - b \cdot c}$ dir.

4.5 Açı Açı Açı (A.A.A.) Benzerlik Teoremi

Teorem 4.6: İki üçgen arasında yapılan bir eşlemede, karşılıklı açılar eş ise bu iki üçgen benzerdir. Bu benzerliğe açı açı açı (A.A.A.) benzerliği denir.

İspat:



Şekil 4.13

$$\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF,$$

$$m(\hat{A}) = m(\hat{D})$$

$$m(\hat{B}) = m(\hat{E})$$

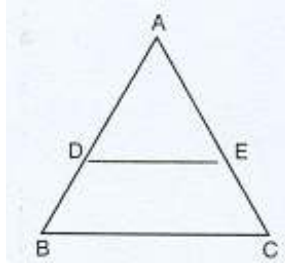
$$m(\hat{C}) = m(\hat{F}) \text{ dir. } \triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ olduğunu gösterelim;}$$

DEF üçgeninde, $[AB] \cong [DB']$ ve $[AC] \cong [DC']$ olacak şekilde $[B'C']$ ni çizelim.

1. $\triangle ABC \cong \triangle DB'C'$ (K.A.K. eşlik aksiyomu)
2. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) = m(\widehat{DB'C'})$ (1. den ve verilenlerden)
3. $[B'C'] \parallel [EF]$ ve $[BC] \cong [B'C']$ olur. (2. den)
4. $\frac{|DB'|}{|B'E|} = \frac{|DC'|}{|C'F|}$ veya $\frac{|DB'|}{|DE|} = \frac{|DC'|}{|DF|}$ (temel orantı teoremi ve 3. den)
5. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$
6. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (1., 4. ve K.A.K benzerlik aksiyomundan)

Sonuç 1: Verilen herhangi iki üçgenin karşılıklı iki açısı eş ise bu üçgenler benzerdir. Dolayısıyla A.A.A. benzerlik teoremi yerine A.A. benzerlik teoremi de denilebilir.

Sonuç 2:



Şekil 4.14

Bir üçgenin herhangi bir kenarına paralel olarak çizilen ve diğer kenarlarını kesen bir doğru parçası, bu üçgene benzer bir üçgen oluşturur.

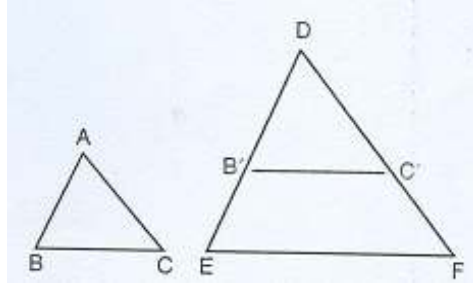
$$[DE] \parallel [BC] \implies \triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ dir.}$$

4.6 Kenar Kenar Kenar (K.K.K) Benzerlik Teoremleri

Teorem4.7: İki üçgen arasında yapılan bir eşlemede, karşılıklı kenarların uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzerdir. Bu benzerliğe kenar kenar kenar (K.K.K.) benzerliği denir.

İspat: $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$,

$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k$ kabulümüz; $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ olduğunu göstermemiz gerekir.



Şekil 4.15

$[AB] \cong [DB']$ ve $[AC] \cong [DC']$ olacak şekilde $[B'C']$ 'ni çizelim.

1. $\frac{|DB'|}{|DE|} = \frac{|DC'|}{|DF|}$ (verilenler ve çizimden)
2. $[B'C'] \parallel [EF]$ (1.den)
3. $m(\widehat{E}) = m(\widehat{DB'C'})$ (yöndeş açılar 2. den)
 $m(\widehat{F}) = m(\widehat{DC'B'})$
4. $\triangle DB'C' \cong \triangle DEF$ (A.A.A. benzerlik teoremi
ve 3. ve 4. den)
5. $\frac{|DB'|}{|DE|} = \frac{|B'C'|}{|EF|} \Rightarrow |B'C'| = \frac{|DB'| \cdot |EF|}{|DE|}$ (4. den)
6. $|B'C'| = \frac{|AB| \cdot |EF|}{|DE|}$ (çizimden ve 5. den)

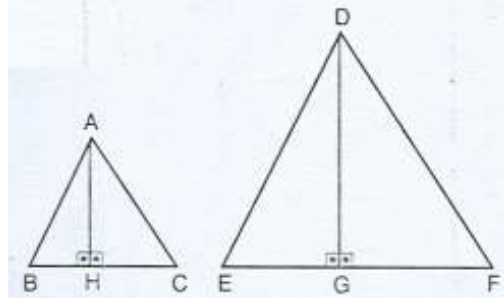
7. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} \Rightarrow |BC| = \frac{|AB| \cdot |EF|}{|DE|}$ (kabulümüz)
8. $|BC| = |B'C'|$ (6. ve 7. den)
9. $\triangle DB'C' \cong \triangle ABC$ (8., çizim ve K.K.K. eşlik teoreminden)
10. $m(\widehat{DB'C'}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$
 $m(\widehat{DC'B'}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ (3. ve 9. dan)
11. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (10. ve A.A. benzerlik teoreminden)

Teorem 4.8

Benzer iki üçgenin;

- Karşılıklı yüksekliklerinin uzunlukları oranı,
- Karşılıklı kenarortaylarının uzunlukları oranı,
- Karşılıklı açıortaylarının uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir.

İspat :



Şekil 4.16

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ ve}$$

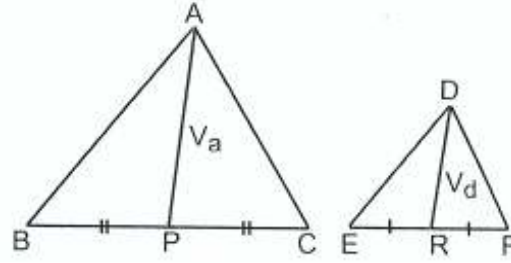
$$\frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k \text{ olsun.}$$

- a. $[AH]$ ve $[DG]$ yüksekliklerini çizelim.

$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \\ m(\widehat{BHA}) = m(\widehat{EGD}) = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(Veriliyor.)} \\ \Rightarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} \triangle ABH \sim \triangle DEG \\ \text{(A.A.A. benzerlik} \\ \text{teoreminden)} \end{array} \right\}$$

O hâlde, $\frac{|BA|}{|DE|} = \frac{|AH|}{|DG|} = k$ olur.

b.



Şekil 4.17

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ve $\frac{|BC|}{|EF|} = k$ olsun.

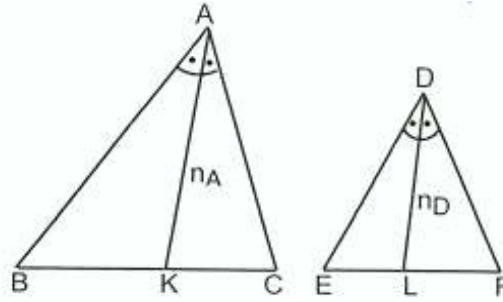
$[AP]$ ve $[DR]$ kenarortaylarını çizelim.

1. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ (üçgenlerin benzerliğinden)
2. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{2 \cdot |BP|}{2 \cdot |ER|} = \frac{|BP|}{|ER|}$ (kenarortay ve benzerlikten)

1., 2. ve K.A.K benzerlik aksiyomundan;

3. $\triangle ABP \sim \triangle DER$
4. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AP|}{|DR|} = \frac{V_a}{V_b} = k$ (3. den)

c.



Şekil 4.18

$[AK]$ ve $[DL]$ açıortaylarını çizelim.

1. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ (benzerlikten)
2. $\frac{1}{2}m(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{EDF})$ (benzerlikten)
3. $m(\widehat{BAK}) = m(\widehat{EDL})$ (2. den)

4. $\triangle ABK \sim \triangle DEL$ (1.,3. ve A.A benzerlik teoreminden)
5. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AK|}{|DL|} = \frac{n_A}{n_D} = k$ (4. den)

Sonuç: Benzer iki üçgenin karşılıklı tüm elemanlarının uzunlukları oranı, benzerlik oranına eşittir.

$$1. \frac{a}{b} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{V_a}{V_d} = \frac{V_b}{V_e} = \frac{V_c}{V_f} = \frac{h_a}{h_d} = \frac{h_b}{h_e} = \frac{h_c}{h_f} = \frac{n_A}{n_D} = \frac{n_B}{n_E} = \frac{n_C}{n_F} = k$$

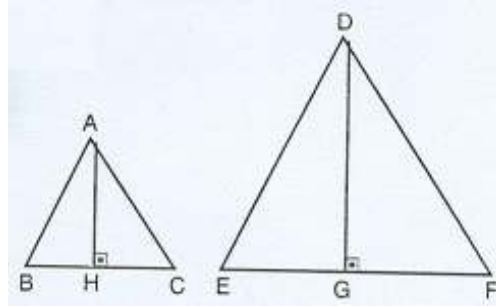
Benzerlik oranı çevreleri oranına eşittir.

$$2. \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{a+b+c}{d+e+f} = \frac{\text{Ç}(\triangle ABC)}{\text{Ç}(\triangle DEF)} = k$$

Teorem 4.9:

Benzer iki üçgenin alanlarının oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.

İspat: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ve $\frac{|BC|}{|EF|} = k$ kabulümüz; $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = k^2$ olduğunu gösterelim.



Şekil 4.19

$[AH] \perp [BC]$ ve $[DG] \perp [EF]$ olacak şekilde $[AH]$ ve $[DG]$ yüksekliklerini çizelim.

$$1. \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AH|}{|DG|} = k \quad (\text{teorem 4.7 den})$$

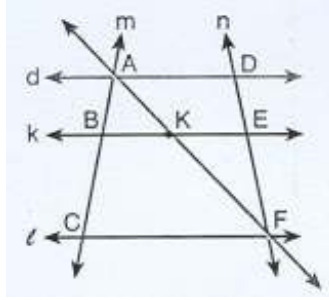
$$2. \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{\frac{|BC| \cdot |AH|}{2}}{\frac{|EF| \cdot |DG|}{2}} = \frac{|BC|}{|EF|} \cdot \frac{|AH|}{|DG|} = k \cdot k = k^2 \quad (\text{alan formülü ve 1. den})$$

4.7 Tales Teoremleri

Teorem 4.10 (1. Tales Teoremi)

Birbirine paralel olan üç veya daha fazla doğru iki farklı doğruyla kesişirse, kesenler üzerinde ayrılan karşılıklı doğru parçalarının uzunlukları orantılıdır.

İspat: $d \parallel k \parallel l$ ve m, n kesendir. $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ olduğunu gösterelim.



Şekil 4.20

AF doğrusunu çizelim. $BE \cap AF = \{K\}$ olsun.

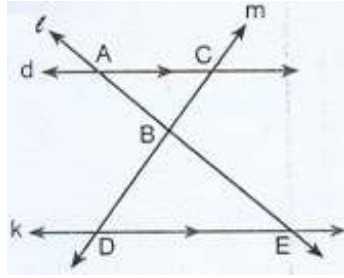
1. $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|KF|}$ (temel orantı teoreminden)
2. $\frac{|DE|}{|EF|} = \frac{|AK|}{|KF|}$ (temel orantı teoreminden)
3. $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ (1. ve 2. den)

Teorem 4.11 (2. Tales Teoremi)

Kesişen iki doğru, paralel iki doğru ile kesildiğinde, oluşan iki üçgenin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır.

İspat: $d \parallel k$ ve $l \cap m = \{B\}$ olsun.

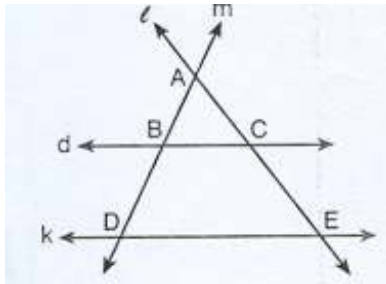
$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|DE|}$ olduğunu ispatlayalım.



Şekil 4.21

1. $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BED})$ (iç ters açılar)
 $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BDE})$ (iç ters açılar)
 $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DBE})$ (ters açılar)
2. $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ (1. den A.A.A. benzerlik teoremi)
3. $\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|DE|}$ olur. (2. den)

Kesişen ve paralel doğrular, şekildeki gibi olması durumunda ;



Şekil 4.22

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \text{ ve } \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} \text{ olur.}$$

4.8 Menelaus ve Seva Teoremi

Teorem 4.12 (Menelaus Teoremi)

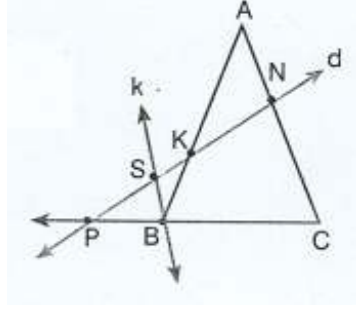
Bir doğru herhangi bir ABC üçgeninin $[BC]$, $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarını (veya uzantılarını) sırasıyla P , K ve N noktalarında kesiyorsa

$$\frac{|PB|}{|PC|} \cdot \frac{|CN|}{|NA|} \cdot \frac{|AK|}{|KB|} = 1 \text{ olur.}$$

İspat: ABC üçgeninde $d \cap [CB] = \{P\}$,

$d \cap [AB] = \{K\}$ ve

$d \cap [AC] = \{N\}$ kabulümüz; $\frac{|PB|}{|PC|} \cdot \frac{|CN|}{|NA|} \cdot \frac{|AK|}{|KB|} = 1$ olduğunu ispatlayalım.



Şekil 4.23

$[AC]$ kenarına paralel B noktasından geçen bir k doğrusunu çizelim ve

$k \cap d = \{S\}$ olsun.

$$1. \quad \frac{|PB|}{|PC|} = \frac{|BS|}{|CN|} \quad (2. \text{ Tales teoreminden})$$

$$2. \quad \frac{|KB|}{|AK|} = \frac{|BS|}{|NA|} \quad (2. \text{ Tales teoreminden})$$

1. ve 2. taraf tarafa oranlarsak;

$$3. \quad \frac{|PB|}{|PC|} \cdot \frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|NA|}{|CN|} \quad \text{bulunur.}$$

$$4. \quad \frac{|PB|}{|PC|} \cdot \frac{|CN|}{|NA|} \cdot \frac{|AK|}{|KB|} = 1 \quad \begin{array}{l} (3. \text{ nün her iki tarafı} \\ \frac{|CN|}{|NA|} \text{ ile çarpılarak elde edildi.)} \end{array}$$

Teorem 4.13 (Seva Teoremi)

Bir ABC üçgeninin içinde alınan bir P noktasını köşelere birleştiren doğru-

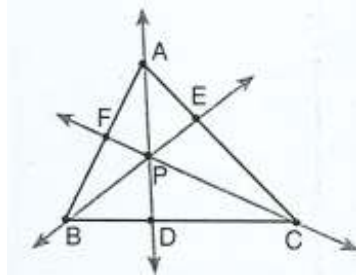
ların $[BC]$, $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarını kestiği noktalar sırasıyla D , E ve F ise;

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1 \text{ dir}$$

İspat: P noktası ABC nin içinde herhangi bir nokta,

$AP \cap [BC] = \{D\}$, $BP \cap [AC] = \{E\}$, $CP \cap [AB] = \{F\}$ kabulümüz;

$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1$ olduğunu bulalım.



Şekil 4.24

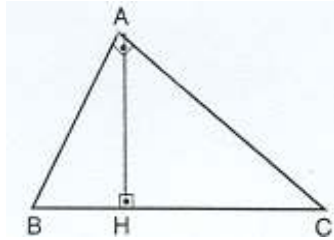
1. $\frac{|BD|}{|BC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AP|}{|PD|} = 1$ ($\triangle ADC$ nde Menelaus teoreminden)
2. $\frac{|DC|}{|BC|} \cdot \frac{|FB|}{|AF|} \cdot \frac{|AP|}{|PD|} = 1$ ($\triangle ABD$ nde Menelaus teoreminden)
3. $\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AP|}{|PD|} \cdot \frac{|BC|}{|DC|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|PD|}{|AP|} = 1$ (1. ve 2. taraf tarafa bölündü)
4. $\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1$ (3. de gerekli sadeleştirmeler yapıldı)

4.9 Dik Üçgende Metrik Bağlılar

Teorem 4.14

Herhangi bir dik üçgende hipotenüse ait yükseklik, üçgeni birbirine ve kendine benzer iki dik üçgene ayırır.

İspat: ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ ve $[AH] \perp [BC]$ kabulümüz olmak üzere; $\triangle HAB \sim \triangle HCA \sim \triangle ACB$ olduğunu gösterelim.



Şekil 4.25

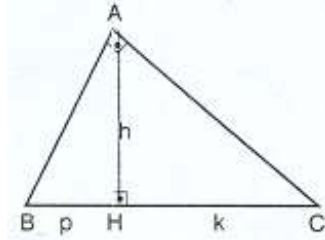
1. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{B})$
2. $m(\widehat{AHB}) = m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$
3. $\triangle HAB \sim \triangle ACB$ (1., 2. ve A.A. benzerlik teoreminden)
4. $m(\widehat{C}) = m(\widehat{C})$
5. $m(\widehat{AHC}) = m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$
6. $\triangle HCA \sim \triangle ACB$ (4., 5. ve A.A. benzerlik teoreminden)
7. $\triangle HAB \sim \triangle HCA \sim \triangle ACB$ (3. ve 6. dan)

4.10 Öklid Teoremleri

Teorem 4.15

Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğu, hipotenüs üzerinde ayırdığı parçaların geometrik ortasıdır.

İspat: ABC üçgeninde $[AH] \perp [BC]$ ve $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ kabul edelim ve $|AH|^2 = |BH| \cdot |HC|$ olduğunu gösterelim.



Şekil 4.26

$$\triangle HAB \sim \triangle HCA \quad (\text{Teorem 4.14 ten})$$

$$\frac{|HA|}{|HC|} = \frac{|HB|}{|HA|} \implies |AH|^2 = |BH| \cdot |HC|$$

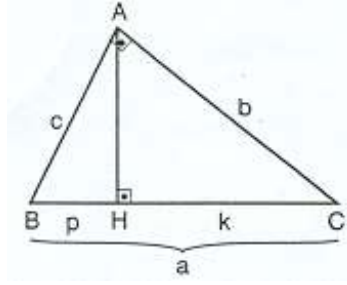
$\triangle ABC$ nde $|AH| = h$, $|BH| = p$ ve $|HC| = k$ dersek $h^2 = p \cdot k$ şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.16

Bir dik üçgende, her bir dik kenar, bu dik kenarın hipotenüs üzerindeki dik iz düşümünün uzunluğu ile hipotenüs uzunluğunun geometrik ortasıdır.

İspat: $\triangle ABC$ nde, $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$, $[AH] \perp [BC]$

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BH| = p$, $|HC| = k$ ve $|BC| = a$ olsun; $c^2 = p.a$ ve $b^2 = k.a$ olduğunu gösterelim.



Şekil 4.27

$$\triangle HAB \sim \triangle ACB \implies \frac{|HB|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} \implies \frac{p}{c} = \frac{c}{a} \implies c^2 = pa$$

$$\triangle HAC \sim \triangle ABC \implies \frac{|HC|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|} \implies \frac{k}{b} = \frac{b}{a} \implies b^2 = ka$$

Sonuç: $\triangle ABC$ nde; $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $[AH] \perp [BC]$, $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|BH| = p$, $|HC| = k$ ve $|AH| = h$ ise

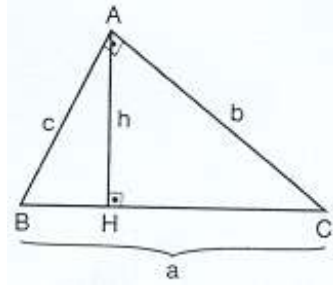
$$1. \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$2. \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{p}{k}} \quad \text{dır.}$$

Teorem 4.17

Bir dik üçgende, dik kenarların uzunlukları çarpımı, hipotenüs ile hipotenüse ait yüksekliğin uzunlukları çarpımına eşittir.

İspat: ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ ve $[AH] \perp [BC]$ kabulümüz; $|BC| \cdot |AH| = |AB| \cdot |AC|$ olduğunu gösterelim.



Şekil 4.28

$$\triangle HCA \sim \triangle ACB \quad (\text{Teorem 4.14 ten})$$

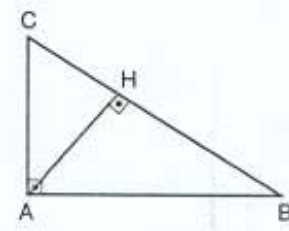
$$\frac{|HA|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|BC|} \implies |AH| \cdot |BC| = |AB| \cdot |AC| \text{ olur.}$$

4.11 Pisagor Teoremi

Teorem 4.18

Bir dik üçgende, dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir.

İspat: $\triangle ABC$ nde, $m(\widehat{CAB}) = 90^\circ$ veriliyor; $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ olduğunu bulalım.



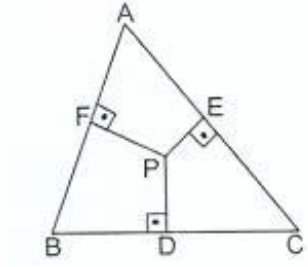
Şekil 4.29

$[AH] \perp [BC]$ olacak şekilde $[AH]$ m çizelim.

1. $|AB|^2 = |BH| \cdot |BC|$ (Öklid teoreminden)
2. $|AC|^2 = |CH| \cdot |BC|$ (Öklid teoreminden)
1. ve 2. taraf tarafa toplanırsa
3. $|AB|^2 + |AC|^2 = (|BH| + |CH|) \cdot |BC| = |BC| \cdot |BC| = |BC|^2$

Sonuç: Herhangi bir üçgende iki kenarın uzunluklarının kareleri toplamı, üçüncü kenarın uzunluğunun karesine eşit ise bu üçgen bir dik üçgendir.

Teorem 4.19 (Karnot Teoremi)



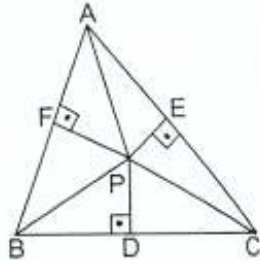
Şekil 4.30

P , ABC üçgeninin iç bölgesinde veya üzerinde bir noktadır.

$[PD] \perp [BC]$, $[PE] \perp [AC]$ ve $[PF] \perp [AB]$ ise

$|BD|^2 + |CE|^2 + |AF|^2 = |DC|^2 + |AE|^2 + |BF|^2$ dir.

İspat:



Şekil 4.31

$[PA]$, $[PB]$ ve $[PC]$ m çizelim;

PDB ve PDC üçgenlerinde pisagor teoreminden,

$$\begin{aligned} |PD|^2 &= |PB|^2 - |BD|^2 = |PC|^2 - |DC|^2 \\ \implies |PB|^2 - |PC|^2 &= |BD|^2 - |DC|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

PEC ve PEA üçgenlerinde pisagor teoreminden,

$$\begin{aligned} |PE|^2 &= |PC|^2 - |EC|^2 = |PA|^2 - |AE|^2 \\ \implies |PC|^2 - |PA|^2 &= |EC|^2 - |AE|^2 \quad (2) \end{aligned}$$

PAF ve PBF üçgenlerinde pisagor teoreminden,

$$\begin{aligned} |PF|^2 &= |PA|^2 - |AF|^2 = |PB|^2 - |BF|^2 \\ \implies |PA|^2 - |PB|^2 &= |AF|^2 - |BF|^2 \quad (3) \end{aligned}$$

(1), (2) ve (3) bağıntılarından;

$$|BD|^2 - |DC|^2 + |EC|^2 - |AE|^2 + |AF|^2 - |BF|^2 = 0$$

veya

$$|BD|^2 + |CE|^2 + |AF|^2 = |DC|^2 + |AE|^2 + |BF|^2 \quad \text{bulunur.}$$

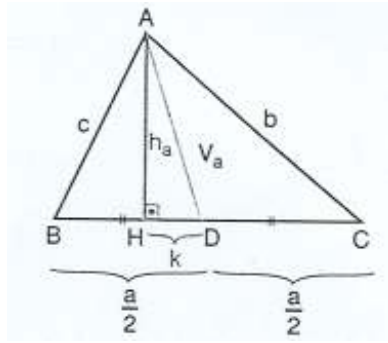
4.12 Kenarortay ile İlgili Teoremler

Teorem 4.20 (Kenarortay Teoremi)

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarlara ait kenarortay uzunlukları sırasıyla V_a, V_b, V_c olmak üzere,

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \text{ dir.}$$

İspat: $\triangle ABC$ nde, $|BD| = |DC|$, $|BC| = a$, $|AD| = V_a$, $|AB| = c$ ve $|AC| = b$ veriliyor. $2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ olduğunu gösterelim.



Şekil 4.32

$[AH] \perp [BC]$ olacak şekilde $[AH]$ ni çizelim.

$|AH| = h_a$ ve $|HD| = k$ dersek;

1. $h_a^2 + k^2 = V_a^2$ ($\triangle AHD$ nde pisagor teoreminden)
2. $h_a^2 + \left(\frac{a}{2} + k\right)^2 = b^2$ ($\triangle AHC$ nde pisagor teoreminden)
3. $h_a^2 + \left(\frac{a}{2} - k\right)^2 = c^2$ ($\triangle ABH$ nde pisagor teoreminden)
4. $2(h_a^2 + k^2) + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$ (4. den)
5. $2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ (1. ve 5. den)

Sonuç: Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarlara ait kenarortay uzunlukları sırasıyla V_a, V_b, V_c olmak üzere,

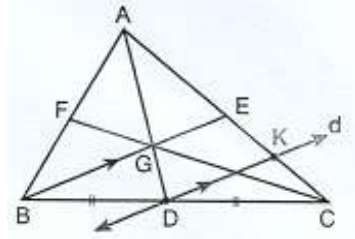
$$1. \quad 2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$2. \quad 2V_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}$$

$$3. \quad 2V_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$$

Teorem 4.21: Bir üçgende, herhangi bir köşe ile ağırlık merkezi arasındaki uzaklık o köşeden geçen kenarortay uzunluğunun üçte ikisine eşittir.

İspat: $[AD], [BE]$ ve $[CF]$ sırasıyla, $[BC], [AC], [AB]$ kenarlarının kenarortayları olsun; $|AG| = \frac{2 \cdot |AD|}{3}$ olduğunu göstermeliyiz.



Şekil 4.33

$d \parallel [BE]$ olacak şekilde, D noktasından geçen d doğrusunu çizelim.

$d \cap [AC] = \{K\}$ olsun.

$$1. \quad \frac{|DC|}{|BD|} = \frac{|CK|}{|KE|} = 1 \quad (D \text{ orta nokta ve temel orantı teoreminden})$$

$$2. \quad |CK| = |KE| \quad (1. \text{ den})$$

$$3. \quad |AE| = 2|EK| \quad (|AE| = |EC| \text{ ve } 2. \text{ den})$$

$$4. \quad \frac{|AE|}{|EK|} = \frac{|AG|}{|GD|} = \frac{2}{1} = 2 \quad (\text{temel orantı teoremi ve } 3. \text{ den})$$

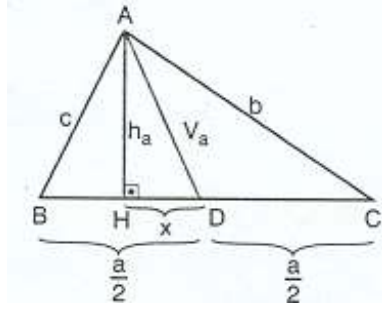
$$5. \quad \frac{|AG|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|AK|} = \frac{2}{3} \quad (\text{temel orantı teoreminden})$$

$$6. \quad |AG| = \frac{2|AD|}{3} \quad (5. \text{ den})$$

Sonuç: Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasının, ağırlık merkezine olan uzaklığı, bu orta noktadan geçen kenarortay uzunluğunun üçte birine eşittir.

Teorem 4.22: $\triangle ABC$ nde $[AH] \perp [BC]$, $|AB| = c$, $|BD| = |DC| = \frac{a}{2}$, $|AC| = b$, $|AD| = V_a$, $|AH| = h_a$ ve $|HD| = x$ ise $|b^2 - c^2| = 2.a.x$ dir.

İspat:



Şekil 4.34

1. $b^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$ ($\triangle AHC$ nde pisagor teoreminden)
2. $c^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ ($\triangle ABH$ nde pisagor teoreminden)
1. ve 2. yi taraf tarafa çıkarırsak;
3. $b^2 - c^2 = h_a^2 + \frac{a^2}{4} + x^2 + ax - h_a^2 - \frac{a^2}{4} + ax - x^2$ bulunur.
4. $b^2 - c^2 = 2ax$ (3. den)
5. $|b^2 - c^2| = 2ax$ ($2ax$ negatif olamayacağından)

KAYNAKLAR

- [1] Şahin, R. ve Gürlü, Ö. , 2003, Lise Geometri Ders Kitabı, Zambak Yayınları, 128 s.
- [2] <http://www.turkcebilgi.com/Eukleides>
- [3] Bilgiç, Ş., Kıyak, Z. ve Gökçen, J., 2004, Lise Geometri Ders Kitabı, 159 s.
- [4] Hançerlioğulları, A. ve Alan, F., 2003, Geometri, Tümay Yay., 332 s.
- [5] Derman, M. Z. , Karağın, F. ve Özköşeler, Ö. , ÖSS Geometri 1-2-3, Zafer Yayınları, 592 s.
- [6] Komisyon, 2004, ÖSS Geometri, FEM Yayınları, 593 s.
- [7] Ulusoy, M. İ. , 1992, Modern Matematik, İnkılap Kitabevi, 559 s.
- [8] Çiftçi, M. , ÖYS Matematik, Vildan Yayınları, 557 s.
- [9] Kaya, R. , 2002, Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi, 439 s.