

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuncay DİNCEL

YARIGRUP OLARAK STONE-ČECH KOMPAKTLAMASININ
ALT YARIGRUPLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2006

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARIGRUP OLARAK STONE-ČECH KOMPAKTLAMASININ
ALT YARIGRUPLARI

Tuncay DİNCEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez / /2006 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

İmza.....
Yrd.Doç.Dr. Fikret KUYUCU
DANIŞMAN

İmza.....
Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ
ÜYE

İmza.....
Yrd.Doç.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**YARIGRUP OLARAK STONE-ČECH KOMPAKTLAMASININ ALT
YARIGRUPLARI**

Tuncay DİNCEL

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Fikret KUYUCU

Yıl: 2006, Sayfa:44

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Fikret KUYUCU

Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ

Yrd. Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

Bu tezde bir S ayrık topolojik uzayının βS Stone-Čech kompaktlaması inşa edildi ve bazı özellikleri incelendi. S ayrık yarıgrubunun işlemi, S nin Stone-Čech kompaktlaması βS ye genişletilerek bu işlem altında βS nin sağ topolojik yarıgrup olduğu gösterildi. Son olarak bazı iyi bilinen S yarıgrupları için $\beta S \setminus S$ nin βS nin alt yarıgrubu olup olmadığı gösterildi. Ayrıca S bir rectangular band ve $\beta S \setminus S$ de βS nin bir alt yarıgrubu ise $\beta S \setminus S$ ninde bir rectangular band olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarıgrup, Kompaktlama.

ABSTRACT

MSc THESIS

**SUBSEMIGROUPS OF STONE-ČECH COMPACTIFICATION WHICH
SEMIGROUP**

Tuncay DİNCEL

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATUREL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Fikret KUYUCU

Year: 2006, Pages: 44

Jury: Assist. Prof. Dr. Fikret KUYUCU

Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ

Assist. Prof. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

In this thesis, the Stone-Čech compactification βS of a discrete space S is constructed and some properties of βS are driven. Extension of the binary operation on a discrete semigroup S is extension to its Stone-Čech compactification βS and it is shown that with this operation βS is a right topological semigroup. In the end, it is shown that whether or not $\beta S \setminus S$ is a subsemigroup of βS for some well known semigroup S . Also it is proved that if S is a rectangular band such that $\beta S \setminus S$ is a subsemigroup of βS then $\beta S \setminus S$ is a rectangular band too.

Key words: Semigroup, Compactification.

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşturulması sırasında desteğinden dolayı danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Fikret KUYUCU'ya sonsuz teşekkür ederim. Bu çalışmaya yaptıkları katkılarından dolayı değerli bilim insanları Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ, Doç. Dr. Hayrullah AYIK, Arş. Gör. Ali ÖZKURT'a çok teşekkür ederim. Ayrıca çoğu kez fikirlerine başvurduğum sevgili arkadaşım Arzu ZABUN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1 GİRİŞ	1
1.1 Ultrafiltreler	1
1.2 βD Topolojik Uzay	7
1.3 Stone-Čech Kompaktlaması	11
2 βD	15
2.1 βD nin Topolojisi	15
2.2 βX in Kardinalitesi	20
2.3 Düzgün Limitler	22
3 βS	26
3.1 S deki İşlemin βS ye Genişlemesi	26
3.2 βS nin Değişmeliliği	33
3.3 Bir Yarıgrup Olarak S^*	35
4 ALT YARIGRUPLAR	37
4.1 Bilinen Bazı Yarıgrupların Stone-Čech Kompaktlamalarının AltYarıgrupları	37
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	44

1. GİRİŞ

1.1 Ultrafiltreler

Bu bölümde bundan sonra βD Stone-Čech kompaktlamasını inşa ederken kullanacağımız ultrafiltreleri tanıyacağız. D , bir küme ve $A \subseteq D$ olsun. A , D nin hem açık hem de kapalı bir alt kümesi ise A ya AK küme diyeceğiz.

Tanım 1.1.1 D , herhangi bir küme olmak üzere, $\mathcal{U} \subseteq P(D)$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlarsa $\mathcal{U}$ ailesine, D üzerinde bir filtre denir.

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{U}$
- (ii) $A, B \in \mathcal{U}$ ise $A \cap B \in \mathcal{U}$
- (iii) $A \in \mathcal{U}$ ve $A \subseteq B$ ise $B \in \mathcal{U}$

Örnek 1.1.2 $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun.

$K(x) = \{K \subseteq X : x \in U \subseteq K \text{ olacak şekilde } U \in \mathcal{T} \text{ vardır} \}$ kümesine $x \in X$ in komşuluklar ailesi denir ve $K(x)$, X üzerinde bir filtredir.

Örnek 1.1.3 F , sonsuz bir küme olmak üzere,

$\mathcal{D} = \{A \subseteq F : F \setminus A \text{ sonlu} \}$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{D}$ kümesi F üzerinde bir filtredir.

Tanım 1.1.4 $\mathcal{U}$, D üzerinde bir filtre ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $A \subseteq U$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{A}$ varsa, $\mathcal{A}$ ya, $\mathcal{U}$ nun bir filtre bazıı denir.

Örnek 1.1.5 $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun.

$\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{T} : x \in U\}$ kümesi, $K(x)$ in filtre bazıı olup, $\mathcal{U}(x)$ kümesine x in açık komşuluklarının ailesi denir.

Tanım 1.1.6 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ D üzerinde iki filtre olsun $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ ise $\mathcal{U}$ filtresine $\mathcal{V}$ filtresinden daha kabadır veya $\mathcal{V}$ filtresine $\mathcal{U}$ filtresinden daha incedir denir.

Tanım 1.1.7 Bir D kümesi üzerinde bir $\mathcal{U}$ filtresi verilsin. Eğer D üzerinde $\mathcal{U}$ filtresinden daha ince bir filtre yoksa, $\mathcal{U}$ filtresine ultrafiltre denir.

Böylece D , bir küme ve $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ D üzerinde iki ultrafiltre olsun. $\mathcal{U} = \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$

Lemma 1.1.8 $\mathcal{U}$, D üzerinde bir filtre ve $A \subseteq D$ olsun. Aşağıdakilerden yalnız bir tanesi doğrudur.

- (1) $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{U}$ vardır.

(2) $T = \{C \subseteq D : \text{bazı } B \in \mathcal{U} \text{ için } A \cap B \subseteq C\}$ kümesi D üzerinde bir filtredir.

İspat: Her $B \in \mathcal{U}$ için $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. T nin bir filtre olduğunu gösterelim.

(i) $\emptyset \notin T$

(ii) $C_1, C_2 \in T$ alalım. O zaman $\exists B_1, B_2 \in \mathcal{U}$ vardır öyleki,

$A \cap B_1 \subseteq C_1$ ve $A \cap B_2 \subseteq C_2$ dir. $\emptyset \neq A \cap B_1 \cap B_2 \subseteq C_1 \cap C_2$ yazılır. Burada $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{U}$ olmasına dikkat edilirse T nin tanımından $C_1 \cap C_2 \in T$ olur.

(iii) $C_1 \in T$ ve $C_1 \subseteq C \subseteq D$ olsun. $C_1 \in T$ ise $\exists B \in \mathcal{U}$ için $A \cap B \subseteq C_1$ olur.

$A \cap B \subseteq C_1 \subseteq C$ olup T nin tanımından $C \in T$ olur.

Tanım 1.1.9 Bir A kümesi verilsin $P(A)$ ile A nın kuvvet kümesini $P_f(A)$ ile A nın boş olmayan sonlu alt kümelerinin ailesini göstereceğiz.

$P_f(A) = \{F : \emptyset \neq F \subseteq A \text{ ve } F \text{ sonlu}\}$ dir.

D bir küme $\mathcal{A} \subseteq P(D)$ olsun, $\forall F \in P_f(\mathcal{A})$ için $\bigcap F \neq \emptyset$ oluyorsa $\mathcal{A}$ ailesine sonlu kesişim özelliğine (S.K.Ö) sahiptir diyeceğiz.

Teorem 1.1.10 D bir küme ve $\mathcal{U} \subseteq P(D)$ olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

(a) $\mathcal{U}$, D üzerinde bir ultrafiltredir.

(b) $\mathcal{U}$ sonlu kesişim özelliğine (S.K.Ö) sahip ve her $A \in P(D) \setminus \mathcal{U}$ için $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{U}$ vardır.

(c) $\mathcal{U}$, $\{\mathcal{V} \subseteq P(D) : \mathcal{V}, \text{ S.K.Ö sağlar}\}$ kümesinin maksimal elemanıdır.

(d) $\mathcal{U}$, D üzerinde bir filtre ve her $F \in P_f(P(D))$ için eğer $\bigcup F \in \mathcal{U}$ ise

$F \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

(e) $\mathcal{U}$, D üzerinde bir filtre ve her $A \subseteq D$ için ya $A \in \mathcal{U}$ veya $D \setminus A \in \mathcal{U}$

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b) $\mathcal{U}$, D üzerinde bir ultrafiltre olsun. Filtre tanımından $\mathcal{U}$, S.K.Ö sağlar.

$A \in P(D) \setminus \mathcal{U}$ alalım, $\mathcal{V} = \{C \subseteq D : A \cap B \subseteq C \text{ olacak şekilde bir } B \in \mathcal{U} \text{ vardır}\}$ olsun $A \in \mathcal{V}$ dir. $A \notin \mathcal{U}$ olduğunu göz önüne alırsak $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V}$ olur. Böylece $\mathcal{V}$, D üzerinde bir filtre olamaz. Lemma 1.1.8 den $B \in \mathcal{U}$ gibi bir eleman vardır öyle ki $A \cap B = \emptyset$ olur.

(b) $\Rightarrow$ (c) $\mathcal{U}$, S.K.Ö sahip ve her $A \in P(D) \setminus \mathcal{U}$ için $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{U}$ olsun. $\Gamma = \{\mathcal{V} \subseteq P(D) : \mathcal{V}, \text{ S.K.Ö sağlar}\}$ olarak tanımlayalım. $\mathcal{U} \in \Gamma$ olduğundan $\Gamma \neq \emptyset$ dir. Kabul edelimki $\mathcal{U}$, Γ kümesinin maksimal elemanı olmasın

bu durumda $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ olacak şekilde bir $G \in \Gamma$ vardır. O zaman $\exists G \in \mathcal{G}$, $G \notin \mathcal{U} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{U}$ için $G \cap B = \emptyset$ olur. Bu ise $\mathcal{G}$ nin S.K.Ö sağlaması ile çelişir. Dolayısıyla $\mathcal{U}$, Γ kümesinin maksimal elemanıdır.

(c) $\Rightarrow$ (d) $\mathcal{U} \cup \{D\}$ S.K.Ö sağlar. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \cup \{D\}$ olup, $\mathcal{U}$, maksimal olduğundan $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \{D\} \Rightarrow D \in \mathcal{U}$ dir. $A, B \in \mathcal{U}$ alalım. $\mathcal{U}$, S.K.Ö sahip olduğundan $A \cap B \in \mathcal{U}$. $A \in \mathcal{U}$ ve $A \subseteq B \subseteq D$ olsun, $\mathcal{U} \cup \{B\}$ S.K.Ö sağlar. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \cup \{B\}$ olup, $\mathcal{U}$, maksimal olduğundan $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \{B\} \Rightarrow B \in \mathcal{U}$ buradan $\mathcal{U}$ bir filtredir.

$\mathcal{F} \in P_f(P(D))$ için $\cup \mathcal{F} \in \mathcal{U}$ olsun. Her $A \in \mathcal{F}$ için $A \notin \mathcal{U}$ olduğunu varsayalım.

Verilen bir $A \in \mathcal{F}$ için, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \cup \{A\}$ olup $\mathcal{U}$, S.K.Ö sahip maksimal aile olduğundan $\mathcal{U} \cup \{A\}$ S.K.Ö sahip değildir. O halde bir $\mathcal{G}_A \in P_f(\mathcal{U})$ vardır öyle ki

$A \cap (\cap \mathcal{G}_A) = \emptyset$ dir. $\mathcal{H} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{G}_A$ Olsun, buradan $\mathcal{H} \cup \{\cup \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{U}$ ve

$(\cup \mathcal{F}) \cap (\cap \mathcal{H}) = \emptyset$ olup bu bir çelişkidir. O halde $\exists A \in \mathcal{F}$ için $A \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ dir.

(d) $\Rightarrow$ (e) $\mathcal{F} = \{A, A \setminus D\}$ alırsak $A \cup (D \setminus A) = D \in \mathcal{U}$ olduğundan $A \in \mathcal{U}$ yada $D \setminus A \in \mathcal{U}$ olur.

(e) $\Rightarrow$ (a) $\mathcal{U}$, D üzerinde bir filtre ve her $A \subseteq D$ için ya $A \in \mathcal{U}$ yada $D \setminus A \in \mathcal{U}$ olsun. $\mathcal{U}$ nun bir ultrafiltre olduğunu gösterelim. $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}$ bir filtre olsun.

O zaman $\exists A \in \mathcal{G}$ vardır öyle ki $A \notin \mathcal{U} \Rightarrow D \setminus A \in \mathcal{U} \Rightarrow D \setminus A \in \mathcal{G}$ olup $A \in \mathcal{G}$ olduğundan $A \cap (D \setminus A) = \emptyset$ olur ki bu da $\mathcal{G}$ nin filtre olmasıyla çelişir. O halde $\mathcal{U}$ ultrafiltredir.

Tanım 1.1.11 $a \in D$, $\mathcal{F}_a = \{A \subseteq D : a \in A\}$ olsun. $\mathcal{F}_a$, D üzerinde bir ultrafiltre olup bu ultrafiltreye “Sabit Ultrafiltre” denir.

Teorem 1.1.12 D bir küme ve $\mathcal{U}$, D de bir ultrafiltre olsun, aşağıdakiler birbirine denktir.

- (a) $\mathcal{U}$, sabit ultrafiltre
- (b) $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ olacak şekilde bir $\mathcal{F} \in P_f(D)$ vardır.
- (c) $T = \{A \subseteq D : D \setminus A \text{ sonlu}\}$ kümesi $\mathcal{U}$ tarafından içerilemez.
- (d) $\cap \mathcal{U} \neq \emptyset$

$$(e) \cap \mathcal{U} = \{x\}, x \in D$$

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b) Aşık

(b) $\Rightarrow$ (c) $F \in \mathcal{U}$ ve F sonlu olsun. $D \setminus F = A$ diyelim. $D \setminus A = F$ olup F sonlu olduğundan $A \in T$ olur. $F \in \mathcal{U}$ olduğundan $A = D \setminus F \notin \mathcal{U}$ dur. Aksi halde $A \cap F = \emptyset$ olması $\mathcal{U}$ nun filtre olmasıyla çelişir. $A \in T$ ve $A \notin \mathcal{U}$ olduğundan $T \not\subseteq \mathcal{U}$ olur.

(c) $\Rightarrow$ (d) $T \not\subseteq \mathcal{U}$ ise $\exists A \in T$ öyle ki $A \notin \mathcal{U}$. Burada $A \in T$ ise $D \setminus A$ sonludur. $F = D \setminus A$ alırsak $\mathcal{U}$ nun ultrafiltre olmasından ve $A \notin \mathcal{U}$ olduğundan $F \in \mathcal{U}$.

$F = \bigcup_{x \in F} \{x\} \in \mathcal{U}$ şeklinde yazarsak $\exists \{x\}$ için $\{x\} \in \mathcal{U}$ olur. O halde her $B \in \mathcal{U}$ için

$B \cap \{x\} \neq \emptyset$ olacağından $x \in \cap \mathcal{U}$ olup $\cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ olur.

(d) $\Rightarrow$ (e) $\cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ ise $\exists x \in \cap \mathcal{U}$ ve $D \setminus \{x\} \notin \mathcal{U}$ olur çünkü $x \notin D \setminus \{x\}$. $\mathcal{U}$ nun ultrafiltre olması nedeniyle $D \setminus \{x\} \notin \mathcal{U}$ ise $\{x\} \in \mathcal{U}$ olur. Buradan $\cap \mathcal{U} \subseteq \{x\}$ ise $\cap \mathcal{U} = \{x\}$ dir.

Teorem 1.1.13 D bir küme ve $\mathcal{A} \subseteq P(D)$ S.K.Ö sahip olsun. O zaman $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ olacak şekilde en az bir $\mathcal{U}$ ultrafiltresi vardır.

İspat: $\Gamma = \{ \mathcal{B} \subseteq P(D) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ ve } \mathcal{B} \text{ S.K.Ö sağlar} \}$ olarak tanımlayalım. $\mathcal{A} \in \Gamma$ olduğundan $\Gamma \neq \emptyset$. $\mathcal{C} \subseteq \Gamma$ zincirini alalım $\mathcal{A} \subseteq \cup \mathcal{C}$ dir. $\cup \mathcal{C}$ nin S.K.Ö sağladığını gösterelim. $F \in P_f(\cup \mathcal{C})$ için $F \subseteq \mathcal{B}$ olacak şekilde bir $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ vardır. $\mathcal{B}$, S.K.Ö sağladığından $\cap F \neq \emptyset$ buradan $\cup \mathcal{C}$ S.K.Ö sağlar. Zorn Lemmasından Γ de bir $\mathcal{U}$ maksimal elamanı vardır öyle ki $\mathcal{U}$, S.K.Ö sağlar. Teorem 1.1.10 daki (c) $\Rightarrow$ (a) dan $\mathcal{U}$, ultrafiltre dir ve $\mathcal{U} \in \Gamma$ olduğundan $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ dir.

Sonuç 1.1.14 $\mathcal{A}$, D üzerinde bir filtre ve $A \subseteq D$ olsun. O zaman $A \notin \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cup \{D \setminus A\} \subseteq \mathcal{U}$ olacak şekilde bir $\mathcal{U}$ ultrafiltresi vardır.

İspat: ($\Rightarrow$) $A \subseteq D$ ve $A \notin \mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{A} \cup \{D \setminus A\}$ nin S.K.Ö sağladığını gösterelim.

$F \in P_f(\mathcal{A})$ alalım. $\mathcal{A}$ filtre olduğundan $\cap F \in \mathcal{A}$ olur. $(\cap F) \cap (D \setminus A) \neq \emptyset$ olduğunu göstermek için aksini kabul edelim.

$(D \setminus A) \cap (\cap F) = \emptyset \Rightarrow \cap F \subseteq A$ olup $\mathcal{A}$ filtre olduğundan ve $\cap F \in \mathcal{A}$ olduğundan $A \in \mathcal{A}$ çelişkisi elde edilir. O halde $\mathcal{A} \cup \{D \setminus A\} \subseteq \mathcal{U}$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ ultrafiltresi vardır.

($\Leftarrow$) $\mathcal{A} \cup \{D \setminus A\} \subseteq \mathcal{U}$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ ultrafiltresi verilsin, o zaman

$D \setminus A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \notin \mathcal{U}$ olup $A \notin \mathcal{A}$ olur.

Tanım 1.1.15 $\emptyset \neq \mathcal{R} \subseteq P(D)$ olsun. $\mathcal{R}$, partition regülerdir $\Leftrightarrow \forall F \in P_f(P(D))$ ve $\cup F \in \mathcal{R} \Rightarrow \exists F \in F$ ve $A \in \mathcal{R}$ için $A \subseteq F$ dir.

$\mathcal{R} \subseteq P(D)$ partition regüler olsun, bir $A \in \mathcal{R}$ seçelim. A kümesini

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $A_i \subseteq A$ olmak üzere $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ şeklinde yazabiliriz.

Burada A_i lerden en az biri $\mathcal{R}$ içindeki en az bir kümeyi kapsar.

Teorem 1.1.16 D , bir küme ve $\emptyset \neq \mathcal{R} \subseteq P(D)$ olsun. $\emptyset \notin \mathcal{R}$ olduğunu kabul edelim.

$\mathcal{R}^\uparrow = \{ B \in P(D) : \exists A \in \mathcal{R} \text{ için } A \subseteq B \}$ olarak tanımlayalım. Aşağıdakiler birbirine denktir.

(a) $\mathcal{R}$ partition regülerdir.

(b) $\mathcal{A} \subseteq P(D)$ nin sonlu her alt ailesinin kesişimi $\mathcal{R}^\uparrow$ nin bir elemanı oluyorsa $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$ olacak şekilde bir $\mathcal{U}$ ultrafiltresi vardır.

(c) $A \in \mathcal{R}$ oluyorsa $A \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$ olacak şekilde bir $\mathcal{U}$ ultrafiltresi vardır.

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b) $\mathcal{R}$ partition regüler ve $\mathcal{A} \subseteq P(D)$ olsun.

$\mathcal{B} = \{ A \subseteq D : \text{her } B \in \mathcal{R}, A \cap B \neq \emptyset \}$ olarak tanımlayalım. $D \in \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{B} \neq \emptyset$ dir. $D \in \mathcal{R}^\uparrow$ olduğundan $\{D\} \subseteq \mathcal{A}$ olacak şekilde bir $\mathcal{A}$ kümesi daima vardır ve $\mathcal{A} \neq \emptyset$. $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ alalım. $\mathcal{C}$ nin S.K.Ö sağladığını göstermek için aksini kabul edelim. $F \in P_f(\mathcal{A})$ ve $G \in P_f(\mathcal{B})$ için $(\cap F) \cap (\cap G) = \emptyset$ olduğunu kabul edelim.

$F \in P_f(\mathcal{A})$ olduğundan $\cap F \in \mathcal{R}^\uparrow$ olup $\exists B \in \mathcal{R}$ için $B \subseteq \cap F$ dir. O zaman

$B \cap (\cap G) = \emptyset \Rightarrow B = \bigcup_{A \in G} (B \setminus A) \in \mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}$ partition regüler olduğundan $\exists A \in G$ ve

$C \in \mathcal{R}$ için $C \subseteq (B \setminus A) \Rightarrow A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \notin \mathcal{B}$ çelişkisi elde edilir. O halde $\mathcal{C}$ nin

S.K.Ö sağlar. Teorem 1.1.14 e göre $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ olacak şekilde bir $\mathcal{U}$

ultrafiltresi vardır. Şimdi $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$ olduğunu gösterelim.

$U \in \mathcal{U} \Rightarrow D \setminus U \notin \mathcal{U}$ “ $\mathcal{U}$ ultrafiltre olduğundan”

$\Rightarrow D \setminus U \notin \mathcal{B}$ “ $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ olduğundan”

$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{R}, (D \setminus U) \cap B = \emptyset$ “ $\mathcal{B}$ nin tanımından “

$\Rightarrow B \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{R}^\uparrow$ Böylece $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$

(b $\Rightarrow$ c) $\mathcal{A} = \{A\}$ alırsak $A \in \mathcal{R}^\uparrow$ olup $\{A\} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$ olur.

(c $\Rightarrow$ a) $A \in \mathcal{R}$ ise $\exists \mathcal{U}$ ultrafiltresi için $A \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$ olsun. $\mathcal{F} \in P_f(P(D))$ ve

$\cup \mathcal{F} \in \mathcal{R}$ olsun. $\exists \mathcal{U}$ ultrafiltresi için $\cup \mathcal{F} \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$ dir. $\mathcal{U}$ ultrafiltre olduğundan $\mathcal{F} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ dir. Buradan $\exists F \in \mathcal{F}$ için $F \in \mathcal{U}$ olur. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$ olduğundan $F \in \mathcal{R}^\uparrow$ dir. $\mathcal{R}^\uparrow$ nin tanımından $F \in \mathcal{R}^\uparrow$ ise $\exists A \in \mathcal{R}$ vardır öyle ki $A \subseteq F$ dir. Buradan da $\mathcal{R}$ partition regüler olur.

Tanım 1.1.17 D bir küme ve $\mathcal{U}$, D üzerinde bir ultrafiltre olsun. $\mathcal{U}$ nun normu

$\|\mathcal{U}\| = \min\{|A| : A \in \mathcal{U}\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.18 D bir küme ve $\mathcal{K}$ bir sonsuz kardinal olsun. $\mathcal{U}$, D üzerinde $\|\mathcal{U}\| \geq \mathcal{K}$ olan bir ultrafiltre ise $\mathcal{U}$ ya D üzerinde $\mathcal{K}$ – uniform ultrafiltre denir.

$U_{\mathcal{K}}(D) = \{ \mathcal{U} : \mathcal{U}, D \text{ üzerinde } \mathcal{K} \text{ – uniform ultrafiltre} \}$ diyelim.

$|D| = \mathcal{K}$ olacak şekildeki bir D kümesi üzerindeki $\mathcal{K}$ – uniform ultrafiltreye, uniform ultrafiltre denir.

Sonuç 1.1.19 D bir küme ve $\mathcal{A} \subseteq P(D)$ olsun, eğer her sonlu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ için $|\cap \mathcal{F}|$ sonsuz ise o zaman $\mathcal{A}$, D üzerinde bir $\mathcal{U}$ ultrafiltresi tarafından içerilir öyle ki $\mathcal{U}$ nun tüm elemanları sonsuzdur. Daha genel olarak eğer $\mathcal{K}$ bir sonsuz kardinal ve her sonlu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ için $|\cap \mathcal{F}| \geq \mathcal{K}$ ise $\mathcal{A}$, D üzerinde bir $\mathcal{K}$ – uniform ultrafiltre tarafından içerilir.

İspat: $\mathcal{K}$ sonsuz kardinali göstermek üzere $|D| \geq \mathcal{K}$ olsun. $\mathcal{R} = \{E \subseteq D : |E| \geq \mathcal{K}\}$

$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{R} \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $|E_i| \geq \mathcal{K}$ olur. Aksi halde $\forall i$ için

$|E_i| < \mathcal{K}$ olursa maksimum $|E_i| < \mathcal{K}$ olurdu buradan $|\cup E_i| < \mathcal{K}$ olurdu. Bu ise $\mathcal{R}$ nin tanımı ile çelişirdi.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow \Rightarrow \exists \mathcal{U}$ ultrafiltresi vardır öyle ki $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$ ve $\mathcal{K} = \aleph_0$ alırsak

$\mathcal{R} = \{E : E \text{ sonsuz}, E \subseteq D\}$ olur.

Tanım 1.1.20 D bir küme ve $\mathcal{A} \subseteq P(D)$ olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nın sonlu her alt ailesinin kesişimi sonsuz ise $\mathcal{A}$ ya sonsuz sonlu kesişim özelliğine (S.S.K.Ö) sahiptir denir.

Sonuç 1.1.19 dan eğer $\mathcal{A}$ (S.S.K.Ö) sahipse $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ olacak şekilde bir $\mathcal{U}$ ultrafiltresi vardır.

1.2 βD Topolojik Uzayı

Bu kısımda D üzerindeki ultrafiltreleri kullanarak bir topolojik uzay inşa edeceğiz.

Tanım 1.2.1 D ayrık topolojik uzay olsun.

$$(a) \beta D = \{ p : p, D \text{ üzerinde bir ultrafiltredir. } \}$$

$$(b) A \subseteq D, \hat{A} = \{ p \in \beta D : A \in p \}$$

Tanım 1.2.2 D bir küme ve $a \in D$ olsun.

$$e(a) = \{ A \subseteq D : a \in A \}$$

Burada her $a \in D$ için $e(a)$ nın sabit ultrafiltre olduğuna dikkat ediniz.

Lemma 1.2.3 D bir küme ve $A, B \subseteq D$ olsun.

$$(a) \widehat{A \cap B} = \hat{A} \cap \hat{B}$$

$$(b) \widehat{A \cup B} = \hat{A} \cup \hat{B}$$

$$(c) \widehat{D \setminus A} = \beta D \setminus \hat{A}$$

$$(d) \hat{A} = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$$

$$(e) \hat{A} = \beta D \Leftrightarrow A = D$$

$$(f) \hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow A = B$$

İspat: (a) $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olup, $p \in \beta D$ için p ultrafiltre olduğundan $A \cap B \in p \Leftrightarrow A \in p$ ve $B \in p$ dir.

$$\widehat{A \cap B} = \{ p \in \beta D : A \cap B \in p \} = \{ p \in \beta D : A \in p \text{ ve } B \in p \} = \hat{A} \cap \hat{B}$$

(b) p bir ultrafiltre olduğundan $A \cup B \in p \Rightarrow A \in p$ veya $B \in p$ dir.

$$\widehat{A \cup B} = \{ p \in \beta D : (A \cup B) \in p \} = \{ p \in \beta D : A \in p \text{ veya } B \in p \} = \hat{A} \cup \hat{B}$$

(c) p bir ultrafiltre olduğundan $A \in p \Rightarrow D \setminus A \notin p$ dir.

$$\widehat{D \setminus A} = \{ p \in \beta D : D \setminus A \in p \} = \{ p \in \beta D : A \notin p \} = \beta D \setminus \widehat{A}$$

(d) $\widehat{A} = \emptyset$ olsun bu durumda her $p \in \beta D$ için $A \notin p$ dir. $A \neq \emptyset$ kabul edersek her $a \in A$ için $A \in e(a) \in \beta D$ olup çelişki elde edilir. O halde $A = \emptyset$ dir. Karşıt olarak $A = \emptyset$ ise $\forall p \in \beta D$ için $\emptyset \notin p$ olup $\widehat{A} = \emptyset$ dir.

(e) $(\Rightarrow) \widehat{A} = \beta D$ olsun. $\forall p \in \beta D$ için $A \in p$ olur. $A \neq D$ Olduğunu kabul edelim. p bir ultrafiltre ve $\forall A \in p \Rightarrow \forall p \in \beta D$ için $D \setminus A \neq \emptyset$ ve $D \setminus A \notin p$ olur.

$\{ E \subseteq D : D \setminus A \subseteq E \}$ kümesi S.K.Ö sahip olduğundan bir $p \in \beta D$ için

$D \setminus A \in \{ E \subseteq D : D \setminus A \subseteq E \} \subseteq p \Rightarrow D \setminus A \in p$ çelişkisi elde edilir buradan $A = D$ dir.

($\Leftarrow$) $A = D$ olsun. $\widehat{A} \subseteq \beta D$ olduğu açık. $p \in \beta D$ alalım $A = D \in p \Rightarrow p \in \widehat{A}$ buradan $\beta D \subseteq \widehat{A}$ olup $\widehat{A} = \beta D$.

(f) $(\Rightarrow) \widehat{A} = \widehat{B}$ olsun. $A \neq B$ olduğunu kabul edelim. $A \setminus B \neq \emptyset$ olur ve $\{ E \subseteq D : A \setminus B \subseteq E \}$ kümesi S.K.Ö sağlar. $p' \in \beta D$ için $A \setminus B \in \{ E \subseteq D : A \setminus B \subseteq E \} \subseteq p'$ olur. $A \setminus B \in p' \Rightarrow A \in p'$ ve $B \notin p'$ olur çünkü $A \setminus B \subseteq A$ ve $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ bu ise $\widehat{A} = \widehat{B}$ olması ile çelişir. Buradan $A = B$ dir.

($\Leftarrow$) $A = B$ ise $\widehat{A} = \widehat{B}$ dir.

Tanım 1.2.4 A herhangi bir küme olmak üzere $e[A] = \{ e(a) : a \in A \}$ dir.

$\mathcal{B} = \{ \widehat{A} : A \subseteq D \}$ kümesi βD üzerinde bir topolojinin bazıdır çünkü Lemma 1.2.3 (a) dan $\mathcal{B}$ kümesi $\cap$ işlemine göre kapalı olduğundan her $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathcal{B}$ için $\exists \widehat{C} \in \mathcal{B}$ öyle ki $\widehat{C} \subseteq \widehat{A} \cap \widehat{B}$ olup buradan $\mathcal{B}$ kümesi βD üzerinde bir topolojinin bazıdır.

Teorem 1.2.5 D herhangi bir küme olsun.

(a) βD , Hausdorff ve kopmaktır.

(b) βD nin tüm AK (Hem açık hem kapalı küme.) kümeleri $\widehat{A}$ formundadır.

(c) Her $A \subseteq D$ için $\widehat{A} = \text{cl}_{\beta D} e[A]$

(d) Her $A \subseteq D$ için $p \in \text{cl}_{\beta D} e[A] \Leftrightarrow A \in p$

(e) $e : D \rightarrow e[D]$ gömmedir, $e[D]$ βD de yoğun ve $e[D]$ nin tüm noktaları βD nin izole noktalarıdır.

(f) $\mathcal{U}$ βD nin bir açık alt kümesi ise $cl_{\beta D} \mathcal{U}$ de açıktır.

İspat: (a) βD nin Hausdorff olduğunu gösterelim:

$p, q \in \beta D$ ve $p \neq q$ olacak şekilde p ve q ultrafiltrelerini alalım. $p \neq q$ ise $\exists A \in p \setminus q \Rightarrow A \in p$ ve $A \notin q$ dir. $A \in p \Rightarrow p \in \widehat{A}$ dir. $A \notin q \Rightarrow D \setminus A \in q \Rightarrow q \in \widehat{D \setminus A}$ burada $\widehat{D \setminus A} \cap \widehat{A} = \emptyset$ olduğundan βD Hausdorff tur. βD nin kompakt olduğunu gösterelim:

$A \subseteq D$, $\widehat{A}$ formundaki kümeler aynı zamanda kapalıdır çünkü $\beta D \setminus \widehat{A} = \widehat{D \setminus A}$ dir. βD nin kompakt olduğunu göstermek için kapalı kümelerden oluşan ve S.K.Ö sahip olan $\mathcal{A} = \{ \widehat{A} : A \subseteq D \}$ kümesinin $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{B} = \{ A \subseteq D : \widehat{A} \in \mathcal{A} \}$ alalım. $\mathcal{F} \in P_f(\mathcal{B}) \Rightarrow \forall p \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \widehat{A}$ için $\cap \mathcal{F} \in p \Rightarrow \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ Buradan $\mathcal{B}$, S.K.Ö sağlar. Teorem 1.1.13 den sabit bir $q \in \beta D$ için $\mathcal{B} \subseteq q$ vardır. Buradan $q \in \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ olur.

(b) $G^{AK} \subseteq \beta D$ alalım. $\mathcal{B} = \{ \widehat{A} : A \subseteq D \text{ ve } \widehat{A} \subseteq G \}$ kümesi G nin açık bir örtüsüdür. $G^{Kapalı} \subseteq \beta D$ ve βD , kompakt ise G kompattır. Burada $G = \bigcup_{i=1}^k \widehat{A}_i = \widehat{\bigcup_{i=1}^k A_i}$ yazılır.

(c) Her $a \in A$ için $e(a)$ ultrafiltredir ve $A \in e(a)$ olup $e(a) \in \widehat{A}$ dir. Yani her $e(a) \in e[A]$ için $e(a) \in \widehat{A}$ dir. Buradan $e[A] \subseteq \widehat{A}$ dir. $\widehat{A}$ formundaki kümeler AK küme olduklarından $\widehat{A}$ nın kapanışı kendine eşittir. $e[A] \subseteq \widehat{A}$ ise $cl_{\beta D} e[A] \subseteq \widehat{A}$ dir. $p \in \widehat{A}$ alalım, $p \in cl_{\beta D} e[A]$ olduğunu göstermek için p nin her açık komşuluğu ile $e[A]$ nin kesişiminin boş olmayacağını gösterelim: $p \in \widehat{A}$ ve $\widehat{B} \in \eta(p)$ alalım. $\emptyset \neq A \cap B \in p$ dir. $a \in A \cap B \Rightarrow a \in A$ ve $a \in B \Rightarrow e(a) \in \widehat{A}$ ve $e(a) \in \widehat{B} \Rightarrow e(a) \in e[A]$ ve $e(a) \in \widehat{B} \Rightarrow e(a) \in \widehat{B} \cap e[A]$ olup, $p \in cl_{\beta D} e[A]$ dir. Buradan $\widehat{A} \subseteq cl_{\beta D} e[A]$ olur.

(d) Her $A \subseteq D$, $p \in cl_{\beta D} e[A] \Leftrightarrow p \in \widehat{A} \Leftrightarrow A \in p$

(e) $e : D \rightarrow e[D]$ nin 1:1 olduğunu gösterelim: $a, b \in D$ ve $a \neq b$ olsun. $\{a\} \in e(a) \setminus e(b) \Rightarrow e(a) \neq e(b)$. $e[D]$ nin βD de yoğun olduğunu göstermek için kapanışının βD ye eşit olduğunu gösterelim. Her $a \in D$ için $\widehat{\{a\}} = \{e(a)\}$ olduğundan $e(a)$, βD nin izole noktasıdır.

Tersine $p \in \beta D$ nin bir izole noktası ise $p \in \widehat{A} \subseteq \{p\}$ buradan $\widehat{A} = \{p\} \Rightarrow \widehat{A} \cap e[D] \neq \emptyset \Rightarrow \{p\} \cap e[D] \neq \emptyset \Rightarrow p \in e[D]$

(f) $\mathcal{U}^{\text{açık}} \subseteq \beta D$, $\mathcal{U} = \emptyset$ ise aşıkarak $\text{cl}_{\beta D} \mathcal{U}$ açık olacağından $\mathcal{U} \neq \emptyset$ olsun.

$A = e^{-1}[\mathcal{U}]$ alalım. $\mathcal{U} \subseteq \text{cl}_{\beta D} e[A]$ dır. $p \in \mathcal{U}$ ve $\widehat{B} \in \eta(p)$ alalım $\widehat{B} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $p \in \widehat{B}$ dir. $\mathcal{U}^{\text{açık}} \subseteq \beta D$ ve $e[D]$, βD de yoğun olduğundan $\text{cl}_{\beta D} (\mathcal{U} \cap e[D]) = \text{cl}_{\beta D} \mathcal{U}$ $\mathcal{U} \cap e[D] = \mathcal{U} = e[A]$ olduğundan $\text{cl}_{\beta D} e[A] = \text{cl}_{\beta D} \mathcal{U} \Rightarrow \widehat{A} = \text{cl}_{\beta D} \mathcal{U}$ olup $\widehat{A}$ formundaki kümeler açık olduğundan $\text{cl}_{\beta D} \mathcal{U}$ açıktır.

Tanım 1.2.6 D bir küme ve $\mathcal{A}$, D üzerinde bir filtre olsun. $\widehat{\mathcal{A}} = \{ p \in \beta D : \mathcal{A} \subseteq p \}$

Teorem 1.2.7 D , bir küme olsun.

(a) $\mathcal{A}$, D üzerinde bir filtre ise o zaman $(\widehat{\mathcal{A}})^{\text{kapalı}} \subseteq \beta D$

(b) Eğer $A \subseteq \beta D$ ve $\mathcal{A} = \cap A$ ise o zaman $\mathcal{A}$, D üzerinde bir filtredir ve $\widehat{\mathcal{A}} = \text{cl } \mathcal{A}$

İspat: (a) $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq \text{cl}_{\beta D} \widehat{\mathcal{A}}$ olduğu açık. $\text{cl } \widehat{\mathcal{A}} \subseteq \widehat{\mathcal{A}}$ olduğunu gösterirsek $\text{cl}_{\beta D} \widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}$ olduğunu dolayısıyla $\widehat{\mathcal{A}}$ nın kapalı olduğunu göstermiş oluruz. $p \notin \widehat{\mathcal{A}}$ olsun. $A \in \mathcal{A} \setminus p$ alalım. $A \not\subseteq p$ olup p ultra filtre olduğundan $D \setminus A \in p$ dir. Buradan $p \in \widehat{D \setminus A}$ ve $\widehat{D \setminus A} \cap \widehat{\mathcal{A}} = \emptyset \Rightarrow p \notin \text{cl}_{\beta D} \widehat{\mathcal{A}}$ dir. Buradan $\text{cl } \widehat{\mathcal{A}} \subseteq \widehat{\mathcal{A}}$ dır.

(b) $\mathcal{A} = \cap A$ nın filtre olduğunu gösterelim:

$\forall p \in \mathcal{A}$ için $\emptyset \notin p$ olup $\emptyset \notin \mathcal{A}$ dır. $U, V \subseteq D$ ve $U, V \in \mathcal{A}$ olsun $\forall p \in \mathcal{A}$ için $U, V \in p$ olup $U \cap V \in p$ dir. Buradan $U \cap V \in \mathcal{A}$ olur. $U \in \mathcal{A}$ ise $\forall p \in \mathcal{A}$ için $U \in p$.

$U \subseteq V \subseteq D$ olsun. $V \in p$ dir buradan $V \in \mathcal{A}$ dır. Buradan $\mathcal{A}$ bir filtredir. $\forall p \in \mathcal{A}$ için $\mathcal{A} \subseteq p \Rightarrow p \in \widehat{\mathcal{A}} \Rightarrow A \subseteq \widehat{\mathcal{A}} \Rightarrow \text{cl } A \subseteq \text{cl } \widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}$ ($\widehat{\mathcal{A}}$ kapalı)

Karşıt olarak $p \in \hat{\mathcal{A}}$ ve $\hat{\mathcal{A}} \in \eta(p)$ alalım. $\hat{B} \cap A = \emptyset$ kabul edelim

$A \subseteq \beta D \setminus \hat{B} = \widehat{D \setminus B} \quad \forall p \in A$ için $p \in \widehat{D \setminus B} \Rightarrow D \setminus B \in p \Rightarrow D \setminus B \in \mathcal{A} \subseteq p$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\hat{B} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow p \in cl \mathcal{A}$ buradan $\hat{\mathcal{A}} \subseteq cl \mathcal{A}$

Tanım 1.2.8 D bir küme ve $A \subseteq D$ olsun $A^* = \hat{A} \setminus e[A]$ dir.

Teorem 1.2.9 $p \in \beta D$ ve $U \subseteq \beta D$ olsun. Eğer U, p nin bir komşuluğu ise $e^{-1}[U] \in p$

İspat: $p \in \beta D$, $\exists \hat{A}$ öyle ki $p \in \hat{A} \subseteq U \Rightarrow A \in p \quad A \subseteq e^{-1}[U]$ olduğundan $e^{-1}[U] \in p$
 X , uzayı sıfır boyutludur $\Leftrightarrow X$, AK kümelerden oluşan bir baza sahiptir.

Teorem 1.2.10 X , sıfır boyutlu uzay ve $Y^{\text{kompakt}} \subseteq X$ olsun. Y nin AK kümeleri $C^{\text{AK}} \subseteq X$ olmak üzere $C \cap Y$ formundadır. D sonsuz bir küme ise D^* ın boştan farklı her AK alt kümesi $A^{\text{sonsuz}} \subseteq D$ olmak üzere A^* formundadır.

İspat: $C^{\text{AK}} \subseteq X$ için $C \cap Y^{\text{AK}} \subseteq Y$ dir. $G^{\text{AK}} \subseteq Y$ olsun,

$\mathcal{A} = \{ A \cap Y : A^{\text{AK}} \subseteq X \text{ ve } A \cap Y \subseteq G \}$ X , sıfır boyutlu olduğundan $\mathcal{A}$, G için bir açık örtüdür. $G^{\text{AK}} \subseteq Y$ ve Y kompakt ise G kompakttır. G , kompakt olduğundan

$$G = \bigcup_{i=1}^k (A_i \cap Y) = Y \cap \bigcup_{i=1}^k A_i$$

i) βD için $\{ (\hat{A})^{\text{AK}} : A \subseteq D \}$ kümesi bir baz olduğundan βD sıfır boyutludur.

ii) $e[D]$, βD nin açık bir alt kümesidir. $\{ e(a) \}^{\text{açık}} \subseteq \beta D$, $D^* = \beta D \setminus e[D]$,

$G^{\text{AK}} \subseteq D^* \Leftrightarrow G = D^* \cap \{ \beta D, \text{ nin AK kümeleri } \}$ $D^* \cap \hat{A} = A^*$, A sonlu ise $\hat{A} = e[A]$, $A^* = \emptyset$ dir.

1.3 Stone-Čech Kompaktlaması

Bu kısımda βD nin D ayrık uzayının Stone-Čech kompaktlaması olduğunu göstereceğiz. X ve Z iki topolojik uzay olsun. $\varphi : X \rightarrow Z$ fonksiyonu $X \rightarrow \varphi[X]$ bir homeomorfizma ise φ bir gömmedir.

$A \subseteq X$ ve $f : A \rightarrow B$ bir sürekli fonksiyon olsun. Sürekli bir $F : X \rightarrow W$ fonksiyonu her $a \in A$ için $F(a) = f(a)$ koşulunu sağlıyorsa F ye f nin bir

genişlemesi denir. X ve A iki uzay ve $i: A \rightarrow X$ fonksiyonu, A dan $i(A)$ ya bir homeomorfizm ise A ya X içine gömülebilir, $i(A)$ ya A nın X içindeki bir kopyası ve i ye bir gömme denir. $i: A \rightarrow X$ bir gömme ve $f: A \rightarrow W$ bir sürekli fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir F fonksiyonu varsa F ye f nin bir genişlemesi denir.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ i \nearrow & & \downarrow F \\ A & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Tanım 1.3.1 X , topolojik uzay olsun. K kompakt uzayı için $\varphi: X \rightarrow K$ bir gömme ve $\text{cl}_K \varphi(X) = K$ oluyorsa K ya X in kompaktlaması denir ve bu kompaktlama (φ, K) çifti ile gösterilir.

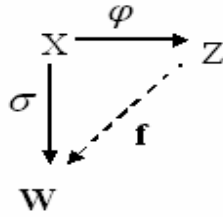
Tanım 1.3.2 X , tamamen regüler uzay olsun

- (a) Z , kompakt bir uzay
- (b) $\varphi: X \rightarrow Z$ bir gömme
- (c) $\text{cl}_Z \varphi(X) = Z$
- (d) Y , kompakt ve $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ise $\exists g: Z \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu için $g \circ \varphi = f$

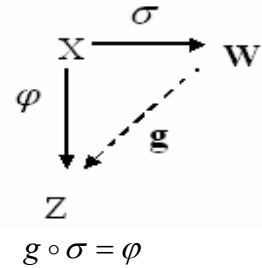
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ f \downarrow & & \nearrow g \\ Y & & \end{array}$$

Yukarıdaki koşullar sağlanıyorsa (φ, Z) ye X in Stone-Čech kompaktlaması denir.

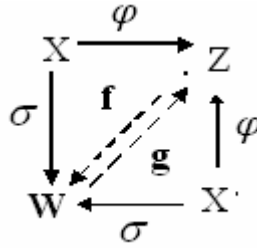
Not 1.3.3 X , tamamen regüler uzay ve $(\varphi, Z), (\sigma, W)$ X in iki Stone-Čech kompaktlaması olsun. O zaman bir $f: Z \rightarrow W$ homeomorfizması için



$$f \circ \varphi = \sigma$$



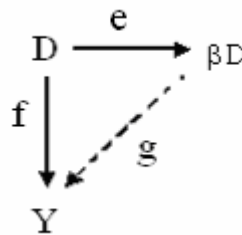
$$g \circ \sigma = \varphi$$



$$f \circ \varphi = \sigma \Rightarrow (f \circ g) \circ \sigma = \sigma \Rightarrow f \circ g = I$$

Teorem 1.3.4 D ayrık uzay ise $(e, \beta D)$ D nin Stone-Čech kompaktlamasıdır.

İspat: βD kompakt, $e[D]$, βD de yoğun ve e nin bir gömme dönüşümü olduğu daha önce gösterildi. $e : D \rightarrow e[D] \subseteq \beta D$, $a \in D$ alırsak $\{e(a)\}^{\text{açık}} \subseteq \beta D$ dir. Y kompakt ve $f : D \rightarrow Y$ fonksiyonunu alalım. Her $p \in \beta D$ için $\mathcal{A}_p = \{\text{cl}_Y f[A] : A \in p\}$ olarak tanımlayalım. $\mathcal{A}_p$ S.K.Ö sahiptir ayrıca Y kompakt olduğundan her p için $\bigcap \mathcal{A}_p \neq \emptyset$ dir. Bir $g(p) \in \bigcap \mathcal{A}_p$ alalım.



Burada g , fonksiyonu βD deki her ultrafiltreyi ultrafiltrenin içerdiği kümelerin f altındaki görüntülerinin kapanışlarının kesişimine götürdüğüne dikkat edelim.

g nin sürekli ve diyagramın komutatatif olduğunu gösterelim:

$$(a) \forall x \in D \text{ için } \{x\} \in e(x) \Rightarrow g(e(x)) \in \text{cl}_Y f[\{x\}] = \text{cl}_Y \{f(x)\} = \{f(x)\}$$

$$\Rightarrow g \circ e = f$$

(b) g nin sürekli olduğunu gösterelim:

$p \in \beta D$, $U \in \eta(g(p))$ olsun. Y regüler olduğundan $\exists V \in \eta(g(p))$ için $cl_Y V \subseteq U$
 $A = f^{-1}[V] \subseteq D \Rightarrow p$, ultrafiltre olduğundan $A \in p$ yada $D \setminus A \in p$ dir. Eğer ise $D \setminus A \in p$
ise $g(p) \in cl_Y f[D \setminus A]$ ve $V \in \eta(g(p))$ olduğundan $V \cap f[D \setminus A] \neq \emptyset$ olur ki bu
da $A = f^{-1}[V]$ olması ile çelişir. $A \in p$ olduğundan $p \in \hat{A}$ dir. $g[\hat{A}] \subseteq U$ olduğunu
iddia edelim. Ayrıca $q \in \hat{A}$ olsun ve $g(q) \notin U$ olduğunu kabul edelim. O zaman
 $Y \setminus cl_Y V$ da $g(q)$ nun komşuluğu olur ve $q \in \hat{A}$ olduğundan $A \in q$ buradan $g(q) \in$
 $cl_Y f[A]$ olur. Böylece $(Y \setminus cl_Y V) \cap f[A] \neq \emptyset$ olur ki bu da bir çelişkidir. O halde
 $A = f^{-1}[V]$ dir.

Teorem 1.3.5 D , sonsuz ayrık uzay olsun.

(a) βD kompakttır.

(b) $D \subseteq \beta D$

(c) D , βD de yoğundur

(d) Y kompakt uzay ve $f : D \rightarrow Y$ fonksiyonu için $\exists g : \beta D \rightarrow Y$ sürekli
 $g|_D = f$.

Eğer $T \subseteq S$ ise $\beta T = \{ \{ A \cap T : A \in p \} : p \in \hat{T}, p \in \beta S \} \subseteq \beta S$

2. βD 2.1 βD nin Topolojisi

X , tamamen regüler uzay ve Y , kompakt uzay olsun. $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ise o zaman f nin sürekli genişlemesini $\tilde{f}: \beta X \rightarrow Y$ ile göstereceğiz. Herhangi iki genişleme yoğun bir küme üzerinde anlaştığı için bir tek sürekli genişlemenin olduğunu düşünebiliriz.

Tanım 2.1.1 D , ayrık uzay ve Y kompakt olmak üzere $f: D \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. O zaman $\tilde{f}: \beta D \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu için $\tilde{f}|_D = f$ dir.

Lemma 2.1.2 D ve E ayrık iki uzay ve $f: D \rightarrow E \subseteq \beta E$ bir fonksiyon olsun. $\forall p \in \beta D$ için $\tilde{f}(p) = \{ A \subseteq E : f^{-1}[A] \in p \}$ dir.

Eğer $A \in p \Rightarrow f[A] \in \tilde{f}(p)$ ve eğer $B \in \tilde{f}(p) \Rightarrow f^{-1}[B] \in p$

İspat: $\{ A \subseteq E : f^{-1}[A] \in p \}$, E üzerinde bir ultrafiltredir. Gerçektende $A \subseteq E$ olsun $D = f^{-1}[E] = f^{-1}(A \cup (E/A)) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(E/A) \in p$ dir.

$\forall p \in \beta D$ için $g(p) = \{ A \subseteq E : f^{-1}[A] \in p \}$ olsun.

$x \in D$ için $g(x) = \{ A \subseteq E : f(x) \in A \} = e(f(x)) = \tilde{f}(x)$ yazabiliriz. x ile $e(x)$ in ve $f(x)$ ile $e(f(x))$ in özdeş olduğunu hatırlayınız. g nin sürekli olduğunu göstermek için βE de baza ait $\hat{A}$ açık kümesini alalım. $g^{-1}[\hat{A}] = \widehat{f^{-1}[A]}$ dir. g , f nin sürekli genişlemesi olduğundan $g = \tilde{f}$ dir.

Lemma 2.1.3 D ve E ayrık iki uzay, $f, g: D \rightarrow E$ iki fonksiyon ve $p \in \beta D$ için $\tilde{f}(p) = \tilde{g}(p)$ olsun. O zaman her $A \in p$ için $\{ x \in D : f(x) \in g[A] \} \in p$ dir.

İspat: $A \in p \Rightarrow g[A] \in \tilde{g}(p) = \tilde{f}(p) \Rightarrow f^{-1}[g[A]] \in p$

Lemma 2.1.4 D herhangi bir ayrık uzay ve $f: D \rightarrow D$ bir fonksiyon olsun.

$\tilde{f}: \beta D \rightarrow \beta D$ fonksiyonunun sabit noktaya sahip olması için gerek ve yeter koşul D nin her sonlu parçalanışına ait $\exists C$ elemanı için $C \cap f[C] \neq \emptyset$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\tilde{f}$ nin p gibi bir sabit noktası olsun. $\tilde{f}(p) = p$ ve D sonlu bir parçalanışa sahip olsun. Bu parçalanışın her C elemanı için $f[C] \cap C = \emptyset$ olduğunu varsayalım. $\tilde{f}(p) = p \Rightarrow \tilde{f}(p) = \text{Id}(p) \Rightarrow \forall C \in p, f^{-1}(\text{Id}[C]) \in p \Rightarrow \forall C \in p, f^{-1}(C) \in p \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$ dir. $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k = D \in p$ olsun p asal olduğundan $\exists C_i \in p$ için $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ çelişkisi elde edilir. Buradan $f[C] \cap C \neq \emptyset$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\tilde{f}$, sabit noktaya sahip olmasın. Her $p \in \beta D$ için $\exists A_p \in p \setminus \tilde{f}(p) \Rightarrow A_p \notin \tilde{f}(p) \Rightarrow \tilde{f}(p) \notin \widehat{A_p} \Rightarrow \tilde{f}(p) \in \beta D \setminus \widehat{A_p}$ $\tilde{f}$ sürekli olduğundan $\exists \widehat{B_p} \in \eta(p)$ vardır öyle ki $\tilde{f}[\widehat{B_p}] \cap \widehat{A_p} = \emptyset$ dir. $C_p = A_p \cap B_p$ alalım. $\{\widehat{C_p} : p \in \beta D\}$, kümesi βD için bir açık örtü ve βD kompakt olduğundan $\beta D = \bigcup_{i=1}^k \widehat{C_{p_i}}$ dir. $\{C_{p_i} : i = 1, 2, \dots, k\}$, kümesi D yi örter ve böylece D nin sonlu bir F parçalanışını elde edebiliriz. Öyle ki $\forall C \in F$ $C \cap f[C] = \emptyset$ dir.

Lemma 2.1.5 D bir küme ve $f : D \rightarrow D$ sabit noktalara sahip olmayan bir fonksiyon olsun. O zaman D, A_0, A_1, A_2 olacak şekilde üç kümeye parçalanır öyle ki $A_i \cap f[A_i] = \emptyset, \quad i \in \{0, 1, 2\}$

İspat: $\mathcal{G} = \{g : A \rightarrow \{0, 1, 2\}, \quad A \subseteq D, \quad f[A] \subseteq A, \quad \text{her } a \in A, \quad g(f(a)) \neq g(a)\}$ kümesini düşünelim. $\emptyset \in \mathcal{G}$ olduğundan $\mathcal{G} \neq \emptyset$ dir. $\mathcal{G}$ kısmi sıralıdır $\mathcal{G}$ nin $\mathcal{C}$ zincirini alalım. $\cup \mathcal{C} \in \mathcal{G}$ ve Zorn lemmasından $\mathcal{G}$ nin g gibi bir maksimal elemanı vardır. Şimdi $\text{dom } g = D$ olduğunu gösterelim: Karşıtını göz önüne alalım yani $\text{dom}(g) \neq D$ olduğunu kabul edelim ve $b \in D \setminus \text{dom}(g)$ alalım. Şimdi g nin genişlemesi olan h fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım: $C = \text{dom}(g) \cup \{b, f(b), f^2(b), \dots\}$ dersek $f(C) \subseteq C$ dir $h : C \rightarrow \{0, 1, 2\}$ olmak üzere $h = f \cup \{(b, 0), (f(b), 1), (f^2(b), 0), \dots\}$ Buradan $g \subsetneq h$ olup g nin maksimal olması ile çelişkiye düşülür. Dolayısıyla $\text{dom}(g) = D$ dir. Böylece her $i \in \{0, 1, 2\}$ için $A_i = g^{-1}[\{i\}]$ kümelerini tanımlayabiliriz.

Teorem 2.1.6 D ayrık uzay ve $f : D \rightarrow D$ bir fonksiyon olsun. Eğer f nin sabit noktaları yoksa $\tilde{f}$ nin de sabit noktaları yoktur.

Teorem 2.1.7 D bir küme ve $f : D \rightarrow D$ bir fonksiyon olsun. $\tilde{f} : \beta D \rightarrow \beta D$

ve $p \in \beta D$ ise $\tilde{f}(p) = p \Leftrightarrow \{ a \in D : f(a)=a \} \in p$

İspat : $(\Rightarrow)$ $p \in \beta D$ için $\tilde{f}(p) = p$ olsun.

$E = \{ a \in D : f(a)=a \} \in p$ olduğunu göstermeliyiz. Aksini kabul edelim.

$E \notin p \Rightarrow D \setminus E \in p$ olur. $b \in D \setminus E$ alalım ve $g : D \rightarrow D$ fonksiyonunu

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & , a \in D \setminus E \\ b & , a \in E \end{cases} \quad \text{olarak tanımlayalım.}$$

g sabit noktaya sahip değildir dolayısıyla $\tilde{g}$ de sabit noktaya sahip değildir.

$a \in D \setminus E$ için $f(a)=g(a)$ dir. $p \in \text{cl}(D \setminus E)$ olduğundan. $p = \tilde{f}(p) = \tilde{g}(p)$

olur bu ise $\tilde{g}$ nin sabit noktaya sahip olmaması ile çelişir. Dolayısıyla $E \in p$ dir.

$(\Leftarrow)$ $E \in p$ olsun. $I : D \rightarrow D$ birim fonksiyonunu alalım $I(a)=f(a)$, $a \in E$

ise $p \in \text{cl} E$, $p = \tilde{I}(p) = \tilde{f}(p)$ dir.

Teorem 2.1.8 D herhangi bir sonsuz küme olsun. $\emptyset \neq G_\delta \subseteq D^*$ olacak şekilde her G_δ için $\text{Int} G_\delta \neq \emptyset$ dir.

İspat : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $u_n^{açık} \subseteq \beta D$ olsun. $\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (u_n \cap D^*) = G_\delta \subseteq D^*$ alalım.

$p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (u_n \cap D^*) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $p \in A_n^* \subseteq u_n$ olacak şekilde $A \subseteq D$ vardır. Burada

her A_n sonsuzdur aksi halde $A_n^* = \emptyset$ olurdu. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in A_n$ olacak şekilde $\langle a_n \rangle$

sonsuz dizisi elde edilebilir. $A = \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$ kümesini düşünelim. Eğer $q \in A^*$

ise $A \setminus A_n$ sonlu olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q \in \widehat{A_n}$ olur. Buradan $A^* \subseteq \widehat{A_n}$ ise

$A^* \subseteq A_n^*$ olur ki buradan da $\emptyset \neq A^{*açık} \subseteq D^*$ için

$$A^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (u_n \cap D^*) = G_\delta \subseteq D^* \text{ olur.}$$

Sonuç 2.1.9 D herhangi bir küme olsun D^* in hiçbir yerde yoğun olmayan alt kümelerinin sayılabilir birleşimi de, D^* in hiçbir yerinde yoğun değildir.

İspat : $\forall n \in \mathbb{N}$ için A_n ler D^* in hiçbir yerinde yoğun olmasın. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ birleşiminin D^* in hiçbir yerinde yoğun olmadığını gösterelim. Bunun için $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{cl} A_n$ nin D^* in hiçbir yerinde yoğun olmadığını gösterelim: $u = \text{Int}(\text{cl} B) \neq \emptyset$ Olduğunu varsayalım. $D^* \setminus B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (D^* \setminus \text{cl} A_n)$ olur. Baire Categori Teoreminden $D^* \setminus B$ yoğundur. $u \setminus B \neq \emptyset$ dir böylece $u \setminus B = \bigcap_{n=1}^{\infty} u \setminus \text{cl} A_n \neq \emptyset$ dir. $u \setminus B$ bir G_δ kümedir. Buradan $H^{\text{açık}}$ için $\emptyset \neq H \subseteq u \setminus B \Rightarrow H \cap \text{cl} B = \emptyset \Rightarrow H \subseteq u$ çelişkisi elde edilir.

Tanım 2.1.10 X bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. Eğer p nin komşuluklarının sayılabilir herhangi bir ailesinin kesişimi p nin bir komşuluğu oluyorsa p ye X in *P-noktası* denir.

Teorem 2.1.11 Continium Hipotezini doğru kabul edersek $\mathbb{N}^*$, P-noktalarını içerir.

İspat: Continium hipotezi doğru olsun $\mathbb{N}$ nin alt kümelerini $\langle C_\alpha \rangle_{\alpha < \aleph_1}$ olacak şekilde indeksleyelim ve $C_0 = \mathbb{N}$ alalım. $\mathcal{A}_0 = \{C_0\}$ alalım $0 < \sigma < \aleph_0$ ve her $\alpha < \sigma$ için $\mathcal{A}_\alpha$ yı aşağıdaki gibi seçelim.

- (1) $\mathcal{A}_\alpha$, sonsuz sonlu kesişim özelliğini sağlar.
- (2) $C_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ yada $\mathbb{N} \setminus C_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$
- (3) Eğer $\delta < \alpha \Rightarrow \mathcal{A}_\delta \subseteq \mathcal{A}_\alpha$
- (4) $|\mathcal{A}_\alpha| \leq \aleph_0$
- (5) Her $\mathcal{F} \in P_f(\mathcal{A}_\alpha)$, $|A \cap \mathcal{F}| < \aleph_0$ olacak şekilde $A \in \mathcal{A}_\alpha$ vardır.

Böylece $p \in \mathbb{N}^*$ ultrafiltresi $\mathbb{N}^*$ da bir p-pointtir $\Leftrightarrow \langle A_n \rangle \subseteq p$ dizisi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|B \setminus A_n| < \aleph_0$ olacak şekilde $B \in p$ vardır.

$\langle B_n \rangle \subseteq \bigcup_{\alpha < \delta} \mathcal{A}_\alpha$ olsun. Eğer $\left| C_\delta \cap \bigcap_{m=1}^n B_m \right| < \aleph_0$ olacak şekilde bir n varsa

$D = \mathbb{N} \setminus C_\delta$ olur. Aksi halde $D = C_\delta$ olduğunu varsayarsak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$\left| D \cap \bigcap_{m=1}^n B_m \right| = \aleph_0$ olup her $x_n \in D \cap \bigcap_{m=1}^n B_m$ için birebir $\langle X_n \rangle$ dizisi oluşturulabilir.

$\mathcal{A} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $A_\delta = \{D, A\} \cup \bigcup_{\alpha < \delta} A_\alpha$ alırsak indüksiyon hipotezi sağlanır.

$p = \bigcup_{\delta < \aleph_0} \mathcal{A}_\delta$ alalım o zaman (1) ve (2) den $p \in \mathbb{N}^*$ dir. $\langle E_n \rangle \subseteq p$ olsun. Bir $\delta < \aleph_0$ için

$\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{C_\alpha : \alpha < \delta\}$ dir. (5) hipotezinden dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|A \setminus E_n| < \aleph_0$ olacak şekilde $A \in \mathcal{A}_\delta \subseteq p$ vardır.

Tanım 2.1.12 $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer her $G^{\text{açık}} \subseteq X$ için $(\text{cl}G)^{\text{açık}} \subseteq X$ oluyorsa X e *extremely bağlantısız uzay* denir.

βD extremely bağlantısız uzaydır fakat, D^* extremely bağlantısız uzay değildir.

Teorem 2.1.13 D ayrık uzay $A, B \subseteq \beta D$ ve A, B kümeleri βD nin δ -kompakt alt kümeleri olsun. Eğer $A \cap \text{cl}B = \text{cl}A \cap B = \emptyset$ ise o zaman $\text{cl}A \cap \text{cl}B = \emptyset$

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için A_n, B_n kümeleri βD nin kompakt alt kümeleri ve $A = \bigcup_n A_n$,

$B = \bigcup_n B_n$ dir. βD normal ve $A_n \cap \text{cl}B = \emptyset$, $\text{cl}A \cap B_n = \emptyset$ burada A_n , B_n , $\text{cl}A$, $\text{cl}B$

kümeleri βD nin kapalı alt kümeleri olduğundan $\exists U_n, V_n, T_n, W_n \subseteq \beta D$ açık kümeleri vardır öyle ki $A_n \subseteq U_n$, $\text{cl}B \subseteq V_n$, $U_n \cap V_n = \emptyset$, $B_n \subseteq T_n$, $\text{cl}A \subseteq W_n$,

$T_n \cap W_n = \emptyset$ dir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $G_n = U_n \cap \bigcap_{k=1}^n W_k$, $H_n = T_n \cap \bigcap_{k=1}^n V_k$ alalım o zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$A_n \subseteq G_n$, $B_n \subseteq H_n$ dir. Ayrıca verilen herhangi $n, m \in \mathbb{N}$ için $G_n \cap H_m = \emptyset$ dir.

$C = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$, $D = \bigcup_{n=1}^\infty H_n$ alalım. C ve D ayrık açık kümeler (Bu yüzden $D \cap \text{cl}C = \emptyset$)

$C \cap D = \emptyset$, $A \subseteq C$ ve $B \subseteq D$ dir. Teorem 1.2.5 (f) den $\text{cl}C$ açık olduğundan $\text{cl}B \cap \text{cl}C = \emptyset$ dir. $\text{cl}A \subseteq \text{cl}B$ olması ise $\text{cl}A \cap \text{cl}B = \emptyset$ olmasını gerektir.

Sonuç 2.1.14 D ayrık uzay ve $A, B \subseteq \beta D$ nin σ -kompakt alt kümeleri olsun. O zaman $\text{cl}A \cap \text{cl}B \subseteq \text{cl}(A \cap \text{cl}B) \cup \text{cl}(B \cap \text{cl}A)$

İspat: $p \in \text{cl}A \cap \text{cl}B$ için $p \notin \text{cl}(A \cap \text{cl}B) \cup \text{cl}(B \cap \text{cl}A)$ olduğunu varsayalım. $p \notin \text{cl}(A \cap \text{cl}B)$ ve $p \notin \text{cl}(B \cap \text{cl}A)$ olur. $H \in p$ için $\hat{H} \cap (A \cap \text{cl}B) = \emptyset$ ve $\hat{H} \cap (B \cap \text{cl}A) = \emptyset$ dir. $A' = A \cap \hat{H}$ ve $B' = B \cap \hat{H}$ alırsak A' ve B' ler βD nin σ -kompakt alt kümeleridir ve $p \in \text{cl}A' \cap \text{cl}B'$ olup Teorem 2.1.13 ten genelliği bozmaksızın $A' \cap \text{cl}B' \neq \emptyset$ olduğunu düşünebiliriz. Böylece $q \in A' \cap \text{cl}B'$ için $q \in (\hat{H} \cap A) \cap \text{cl}B$ olup bu bir çelişkidir. Öyleyse $p \in \text{cl}A \cap \text{cl}B$ için $p \in \text{cl}(A \cap \text{cl}B) \cup \text{cl}(B \cap \text{cl}A)$ dir.

Sonuç 2.1.15 D ayrık uzay olsun.

a) A ve B , D^* da iki σ -kompakt alt küme olsun. Eğer $A \cap \text{cl}B = \emptyset = B \cap \text{cl}A$ ise $\text{cl}A \cap \text{cl}B = \emptyset$

b) A ve B , βD nin sayılabilir alt kümeleri olsun. Eğer $A \cap \text{cl}B = \emptyset = B \cap \text{cl}A$ ise $\text{cl}A \cap \text{cl}B = \emptyset$

c) A ve B , D^* in sayılabilir alt kümeleri olsun. Eğer $A \cap \text{cl}B = \emptyset = B \cap \text{cl}A$ ise $\text{cl}A \cap \text{cl}B = \emptyset$

Tanım 2.1.16 X topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. O zaman

A kuvvetli ayrık uzaydır $\Leftrightarrow \forall x \in A$ ve $x \in U_x^{\text{açık}} \subseteq X$ için $x \neq y$ olduğunda $U_x \cap U_y = \emptyset$ olacak şekilde $\langle U_x \rangle_{x \in A}$ X in açık kümelerinin ailesi vardır

2.2 βX in Kardinalitesi

Bu bölümde X ayrık uzay ise βX in kardinalitesini bulacağız. $\mathbb{N}$ yi ayrık topolojiyle alalım. $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ olsun A sayılabilir olduğundan $f: \mathbb{N} \rightarrow A \subset [0,1]$ olacak şekilde 1:1 ve örten f fonksiyonu vardır. $\mathbb{N}$ ayrık olduğundan f sürekli. O zaman f nin $\tilde{f}: \beta \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ sürekli genişlemesi vardır.

$\text{cl}_{[0,1]} A = [0,1]$ dir. $\tilde{f}(\beta \mathbb{N}) = \tilde{f}(\text{cl}_{\beta \mathbb{N}} \mathbb{N}) \subseteq \text{cl}_{[0,1]} \tilde{f}(\mathbb{N}) = \text{cl}_{[0,1]} A = [0,1]$ dir. $\Rightarrow \tilde{f}(\beta \mathbb{N}) = [0,1]$ olur. Böylece $|\beta \mathbb{N}| \geq \mathcal{C}$ dir. X ayrık uzay ise X üzerindeki her ultrafiltre bir Z -ultrafiltredir. f , X üzerinde bir ultrafiltre ise $f \subseteq P(P(X))$ dir. βX in inşasından dolayı X üzerindeki ultrafiltrelerle βX in noktaları arasında 1:1 ve örten bir ilişki

vardır dolayısıyla $|\beta X| \leq |P(P(X))| = 2^{2^X}$ olur. X bir ayrık uzay ise X üzerindeki bütün ultrafiltrelerin kümesinin kardinalitesi βX in kardinalitesidir.

Lemma 2.2.1 X , bir Hausdorff uzay ve D , X in yoğun bir alt kümesi ise $|X| = 2^{2^{|D|}}$ dir.

İspat: $\mathfrak{T} : X \rightarrow P[P(D)]$ fonksiyonunu

$\mathfrak{T}(x) = \{U \cap D : U, x \in X \text{ in } X \text{ de bir komşuluğudur}\}$ olarak tanımlayalım.

$\mathfrak{T}$, 1:1 dir: $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. X Hausdorff olduğundan $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V komşulukları vardır. O zaman $U \cap D \notin \mathfrak{T}(y)$ dir. Çünkü eğer $U \cap D \in \mathfrak{T}(y)$ olsaydı y nin bir O komşuluğu için $U \cap D = O \cap D$ olurdu. O zaman $(U \cap V) \cap D = U \cap D \cap V = (O \cap V) \cap D = O \cap D \cap V$ olur. O ve V y nin bir komşuluğu ise $O \cap V$ de y nin bir komşuluğudur. $D^{\text{yoğun}} \subseteq X$ olduğundan $\emptyset \neq (O \cap V) \cap D = (U \cap V) \cap D = \emptyset$ çelişkisi elde edilir. Böylece $U \cap D \notin \mathfrak{T}(y)$ dir. $U \cap D \in \mathfrak{T}(x)$ ve $U \cap D \notin \mathfrak{T}(y)$ olduğundan $\mathfrak{T}(x) \neq \mathfrak{T}(y)$ ise $\mathfrak{T}$, 1:1 dir buradan $|X| \leq |P(P(D))| = 2^{2^{|D|}}$ dir.

Teorem 2.2.2 X sonsuz ayrık uzay ise $|\beta X| = 2^{2^{|X|}}$ dir.

İspat: Lemma 2.2.1 den $|\beta X| \leq 2^{2^{|X|}}$ dir. Notasyonda kolaylık olsun diye $m = 2^{2^{|X|}}$ diyelim. Teoremi ispatlamak için βX in inşasından dolayı X üzerinde en az m tane Z -ultrafiltre olduğunu gösterirsek $m = 2^{2^{|X|}} \leq |\beta X|$ olur. (X ayrık uzay olduğundan her ultrafiltre bir Z -ultrafiltredir.)

Şimdi notasyonu kısaltmak için bazı tanımlar yapalım:

$\mathfrak{F} = \{F \subset X : F \text{ sonlu}\}$, $\phi = \{\varphi \subset F : \varphi \text{ sonlu}\}$ olsun. X sonsuz olduğundan $|\mathfrak{F} \times \phi| = |\mathfrak{F}| = |X|$ dir. (X^n ile X in n elemanlı kümelerinin kümesini gösterelim.

$|X^n| = |X|$ dir. $|X| \leq |\mathfrak{F}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |X^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |X| \leq \aleph_0 |X| = |X| \Rightarrow |\mathfrak{F}| = |X|$ olur. Benzer

şekilde $|\phi| = |\mathfrak{F}| = |X|$ dir. $|\mathfrak{F} \times \phi| = |X \times X| = |X| = |\mathfrak{F}| = |\phi|$) Dolayısıyla $\mathfrak{F} \times \phi$ üzerinde m tane ultrafiltre inşa etmemiz yeterli olacaktır. $S \subset X$ olsun.

$\mathfrak{D}_S = \{(F, \varphi) \in \mathfrak{F} \times \phi : S \cap F \in \varphi\}$ olarak tanımlayalım. $\mathfrak{D}_S \subset \mathfrak{F} \times \phi$ dir. Notasyonda kolaylık sağlamak amacıyla $\mathfrak{F} \times \phi - \mathfrak{D}_S = -\mathfrak{D}_S$ olarak tanımlayalım. $\mathfrak{P} = P(P(X))$ diyelim. $|\mathfrak{P}| = m$ dir. Her $A \in \mathfrak{P}$ için $B_A = \{\mathfrak{D}_S : S \in A\} \cup \{-\mathfrak{D}_S : S \notin A\} \subset \mathfrak{F} \times \phi$ olarak tanımlayalım B_A nın S.K.Ö sağladığını göstereceğiz. (O zaman B_A bir filtre tabanı ve dolayısıyla B_A yı içeren bir ultrafiltre olur.) $-\mathfrak{D}_{S_1}, \dots, -\mathfrak{D}_{S_k}, -\mathfrak{D}_{S_{k+1}}, \dots, -\mathfrak{D}_{S_n}$ ler B_A nın farklı elemanları olsun. $S_1, \dots, S_n$ lerde X in farklı alt kümeleridir. $i < j$ için X_{ij} yi S_i, S_j lerden sadce birine ait olacak şekilde seçelim. $1 \leq i < j \leq n$ için X_{ij} elemanları X in sonlu F alt kümeleri formundadır. $i < j$ için $X_{ij} S_i, S_j$ lerden sadece birine ait olduğundan $S_i \cap F \neq S_j \cap F$ dir. Şimdi $\varphi = \{S_1 \cap F, \dots, S_k \cap F\}$ sonlu kümesini düşünelim. O zaman $\varphi \in \emptyset$ dir. Açık olarak $i \leq k$ için $S_i \cap F \in \varphi$ ve $k < j$ için $S_j \cap F \notin \varphi$ dir. Böylece $i \leq k$ için $(F, \varphi) \in \mathfrak{D}_{S_i}$ ve $k < j$ için $(F, \varphi) \in -\mathfrak{D}_{S_j}$ dir. Bu bize B_A nın S.K.Ö sağladığını gösterir. Böylece her B_A ailesi en az bir U_A ultrafiltresi içine gömülebilir.

Dahası farklı aileler aynı ultrafiltreler tarafından içerilemez. Gerçektende $A \neq A'$ olsun o zaman bir $S \in A - A'$ vardır. O zaman $B_{A'}, -\mathfrak{D}_S$ yi içeren B_A da $\mathfrak{D}_S$ yi içerir. Böylece $|\mathfrak{P}| = m$ olduğundan $A \in \mathfrak{P}$ üzerinde $|U_A| = m$ dir buradan $|\beta X| \geq 2^{2^{|X|}}$ olur. Böylece $|\beta X| = 2^{2^{|X|}}$ olur.

2.3 Düzgün Limitler

Tanım 2.3.1 D ayrık uzay ve $p \in \beta D$ olsun. $\langle x_s \rangle_{s \in D} \subseteq X$ ve $y \in X$ olsun. $p - \lim_{s \in D} x_s = y$ dir ancak ve ancak y nin her U komşuluğu için $\{s \in D : x_s \in U\} \in p$ dir.

Daha önceki bölümde $\forall A \subseteq D$ için $\hat{A} = \beta A$ olduğu söylenmişti. Bu sebeple $A \in p$ ve $s \in A$ için x_s tanımlı ise $s \in D \setminus A$ olacak biçimde bir x_s değerinin olabileceğini hesaba katmaksızın $p - \lim_{s \in A} x_s$ yazabiliriz.

Tanım 2.3.2 X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere $A \subseteq X$ ve $f: A \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $x \in cl_X A$ ve $y \in Y$ olsun. $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = y$ dir ancak ve ancak y nin her V komşuluğu için x in en az bir U komşuluğu vardır öyleki $f[A \cap U] \subseteq V$ dir.

Eğer $\lim_{a \rightarrow x} f(a)$ değeri varsa tektir.

Teorem 2.3.3 D ayrık uzay, Y topolojik uzay, $p \in \beta D$ ve $y \in Y$ olsun. Eğer $A \in p$ ve $f: A \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. O zaman $p - \lim_{a \in A} f(a) = y \Leftrightarrow \lim_{a \rightarrow p} f(a) = y$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $p - \lim_{a \in A} f(a) = y$ olsun. Eğer $V \in \eta(y)$ ise $f^{-1}[V] \in p$ olur. $B = f^{-1}[V]$ olsun Teorem 1.2.5 ten $\hat{B}$ da p nin bir komşuluğu olup $f[\hat{B} \cap A] = f[B] \subseteq V$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\lim_{a \rightarrow p} f(a) = y$ olsun. Eğer V , y nin bir komşuluğu ise βD de p nin U gibi bir komşuluğu vardır öyle ki $f[A \cap U] \subseteq V$ dir. $A \cap U \in p$ ve $A \cap U \subseteq f^{-1}[V]$ olacağından $f^{-1}[V] \in p$ dir. Böylece $p - \lim_{a \in A} f(a) = y$ olur.

Not 2.3.4 D ayrık uzay ve $p \in \beta D$ olsun. $\langle S \rangle_{s \in D} \subseteq \beta D$ için $p - \lim_{s \in D} S = \lim_{s \rightarrow p} S = p$ dir.

Teorem 2.3.5 D ayrık uzay ve $p \in \beta D$ ve $\langle S \rangle_{s \in D} \subseteq X$

a) $p - \lim_{s \in D} x_s$ varsa tektir.

b) Eğer X kompakt ise $p - \lim_{s \in D} x_s$ vardır.

İspat: b) X kompakt olsun. $p - \lim_{s \in D} x_s$ in mevcut olmadığını kabul edelim.

$\forall y \in X$ için U_y , $\{s \in D : x_s \in U_y\} \notin p$ olacak şekilde y nin bir açık komşuluğu olsun.

O zaman $\{U_y : y \in X\}$, X in bir açık örtüdür ve sonlu bir $F \subseteq X$ için $X = \bigcup_{y \in F} U_y$ dir.

Böylece $D = \bigcup_{y \in F} \{s \in D : x_s \in U_y\}$ dir. Sabit bir $y \in F$ için $\{s \in D : x_s \in U_y\} \in p$

çelişkisi elde edilir.

Teorem 2.3.6 D ayrık uzay $p \in \beta D$ ve X, Y iki topolojik uzay olsun. $\langle x_s \rangle_{s \in D} \subseteq X$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f sürekli ve $p - \lim_{s \in D} x_s$ mevcut ise

$$f(p - \lim_{s \in D} x_s) = p - \lim_{s \in D} f(x_s) \text{ dir.}$$

İspat: f sürekli ve $p - \lim_{s \in D} x_s = y$ olsun. $p - \lim_{s \in D} f(x_s) = f(y)$ olduğunu gösterelim.

$V \in \eta(f(y))$ olsun f sürekli olduğundan $\exists U \in \eta(y)$ öyle ki $f(U) \subseteq V$ dır.

$p - \lim_{s \in D} x_s = y$ ve $U \in \eta(y)$ olduğundan $\{s \in D : x_s \in U\} \subseteq \{s \in D : f(x_s) \in V\} \in p$

olur.

Tanım 2.3.7 Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\mathcal{O}$, D den kompakt uzaylara giden fonksiyon üzerinde bir uniform operatör denir.

a) $f : D \rightarrow Y$, Y kompakt ise $\mathcal{O}(f) \in Y$

b) $g : D \rightarrow Y^{kompakt}$, $f : Y \rightarrow Z^{kompakt}$ sürekli fonksiyonlar için

$$f(\mathcal{O}(g)) = \mathcal{O}(f \circ g)$$

Teorem 2.3.8 D ayrık uzay ve $\mathcal{O}$ bir uniform operatör olsun. Her $Y^{Kompakt}$ uzayı ve her $f : D \rightarrow Y$ fonksiyonu için $\mathcal{O}(f) = p - \lim_{s \in D} f(s)$ olacak şekilde bir tek $p \in \beta D$ vardır.

Teorem 2.3.9 X topolojik uzay olsun.

$$X \text{ Kompakttır} \Leftrightarrow \langle x_s \rangle_{s \in D} \subseteq X \text{ ve } p \in \beta D \text{ için } p - \lim_{s \in D} x_s \text{ vardır.}$$

Teorem 2.3.10 X topolojik uzay $A \subseteq X$ ve $y \in X$ olsun. $y \in clA \Leftrightarrow \langle x_s \rangle_{s \in D} \subseteq A$ öyle ki $p - \lim_{s \in D} x_s = y$

Teorem 2.3.11 X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

$$f \text{ süreklidir} \Leftrightarrow \langle x_s \rangle_{s \in D} \subseteq X \text{ ve } p \in \beta D \text{ için } p\text{-}\lim_{s \in D} x_s = y \Rightarrow p\text{-}\lim_{s \in D} f(x_s) = f(y)$$

3. βS 3.1 S deki İşlemin βS ye Genişlemesi

$(S, \cdot)$ bir yarıgrup ve S ayrık topolojik uzay ise βS nin özelliklerinden faydalananarak βS de βS yarıgrup olacak şekilde bir “ $*$ ” ikili işlemi tanımlayacağız.

Her $s, t \in S \subseteq \beta S$ için $s * t = s \cdot t$ olarak tanımlayalım. $l_s : S \rightarrow S \subseteq \beta S$ fonksiyonunu ise $l_s(t) = s \cdot t$ olarak tanımlayalım. O zaman her $t \in S$ için $\lambda_s(t) = l_s(t) = s \cdot t$ olacak şekilde $\lambda_s : \beta S \rightarrow \beta S$ sürekli fonksiyonu vardır. $s \in S$ ve $q \in \beta S$ için $\lambda_s(q) = s * q$ olarak tanımlayalım. Bu durumda her $s, t \in S$ için $s * t = s \cdot t$ dir. Bir $q \in \beta S$ ve $s \in S$ için $r_q(s) = s * q$ olarak tanımlanan $r_q : S \rightarrow \beta S$ fonksiyonu süreklidir. O halde $\rho_q(t) = r_q(t) = t * q$ olacak şekilde $\rho_q : \beta S \rightarrow \beta S$ sürekli fonksiyonu vardır.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{r_q} & \beta S \\ \downarrow & \nearrow & \\ \beta S & & \end{array}$$

$p \in \beta S$ için $\rho_q(p) = p * q$ olarak tanımlanırsa $\rho_q : \beta S \rightarrow \beta S$ sürekli olur.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.1 S ayrık uzay ve $\cdot$ S üzerinde bir ikili işlem olsun. βS üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir tek $*$ ikili işlemi vardır.

a) Her $s, t \in S$ için $s * t = s \cdot t$ olarak tanımlayalım.

b) Her $q \in \beta S$ için $\rho_q(p) = p * q$ şeklinde tanımlanan $\rho_q : \beta S \rightarrow \beta S$

fonksiyonu süreklidir.

c) Her $s \in S$ için $\lambda_s(q) = s * q$ şeklinde tanımlanan $\lambda_s : \beta S \rightarrow \beta S$ fonksiyonu süreklidir.

Bundan sonra βS üzerindeki işlemi de “ $\cdot$ ” ile göstereceğiz.

Not 3.1.2 a) $s \in S$ ve $q \in \beta S$ olmak üzere $\lambda_s(q) = s \cdot q = \lim_{t \rightarrow q} s \cdot t$ dir.

$$\text{b) } p, q \in \beta S \text{ için } \rho_q(p) = p.q = \lim_{s \rightarrow p} (\lim_{t \rightarrow q} s.t)$$

$$\text{İspat a) } \lim_{t \rightarrow q} s.t = q - \lim_{t \in S} \lambda_s(t) = \lambda_s(q - \lim_{q \in S} t) = \lambda_s(q)$$

$$\text{b) } \lim_{s \rightarrow p} (\lim_{t \rightarrow q} s.t) = \lim_{s \rightarrow p} s.q = \lim_{s \rightarrow p} \rho_q(s) = \rho_q(p - \lim_{s \in S} s) = \rho_q(p)$$

Not 3.1.3 S ayrık uzay, “.” bu küme üzerinde bir ikili işlem, $p, q \in \beta S$, $P \in p$ ve $Q \in q$ olsun. O zaman $p.q = p - \lim_{s \in P} (q - \lim_{t \in Q} s.t)$

Teorem 3.1.4 S ayrık uzay ve “.” S üzerinde birleşmeli ikili işlem olsun. O zaman βS üzerinde tanımlanan ikili işlemde birleşmelidir.

İspat: $p, q, r \in \beta S$ olsun. $a, b, c \in S$ için $\lim_{a \rightarrow p} \lim_{b \rightarrow q} \lim_{c \rightarrow r} (a.b).c$ ifadesini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow p} \lim_{b \rightarrow q} \lim_{c \rightarrow r} (a.b).c &= \lim_{a \rightarrow p} \lim_{b \rightarrow q} (a.b).r && (\lambda_{a.b} \text{ sürekli}) \\ &= \lim_{a \rightarrow p} (a.q).r && (\rho_r \circ \lambda_a \text{ sürekli}) \\ &= (p.q).r && (\rho_r \circ \rho_q \text{ sürekli}) \end{aligned}$$

Benzer şekilde:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow p} \lim_{b \rightarrow q} \lim_{c \rightarrow r} a.(b.c) &= \lim_{a \rightarrow p} \lim_{b \rightarrow q} a.(b.r) && (\lambda_a \circ \lambda_b \text{ sürekli}) \\ &= \lim_{a \rightarrow p} a.(q.r) && (\lambda_a \circ \rho_r \text{ sürekli}) \\ &= p.(q.r) && (\rho_{q.r} \text{ sürekli}) \end{aligned}$$

Böylece $(p.q).r = p.(q.r)$

Teorem 3.1.5 $(S, .)$ bir semigrup, X bir topolojik uzay, $\langle x_s \rangle_{s \in S}$ X içinde bir indeks kümesi ve $p, q \in \beta S$ olsun. Eğer tüm limitler mevcutsa $(p.q) - \lim_{v \in S} x_v = p - \lim_{s \in S} q - \lim_{t \in S} x_{st}$ dir.

İspat: $z = (p.q) - \lim_{v \in S} x_v$, $\forall s \in S$ için $y_s = q - \lim_{t \in S} x_{st}$ olsun. $p - \lim_{s \in S} y_s \neq z$

Olduğunu varsayalım. $p - \lim_{s \in S} y_s \in U$, $z \in V$ için $U \cap V = \emptyset$ olsun.

$$p - \lim_{s \in S} y_s \in U \Rightarrow A = \{s \in S : y_s \in U\} \in P \text{ dir.}$$

$$z \in V \Rightarrow B = \{v \in S : x_v \in V\} \in p.q = \rho_q(p) \text{ dir.}$$

$p.q \in \hat{B}$ olduğundan $\hat{B}$, $\rho_q(p)$ nin bir komşuluğudur. $\rho_q : \beta S \rightarrow \beta S$ sürekli p nin bir $\hat{C}$ komşuluğu için $\rho_q(\hat{C}) \subset \hat{B}$ dir. $p \in \hat{C} \cap \hat{A} = C \cap \hat{A} \Leftrightarrow C \cap A \in p \Rightarrow C \cap A \neq \emptyset$ dir. $s \in C \cap A$ olsun buradan $s \in A$ olup $y_s = q - \lim_{t \in S} x_{st} \in U$ dir. $D = \{t \in S : x_{st} \in U\} \in q$ olur. $s \in C \cap A \Rightarrow s \in C \Rightarrow s.q \in \hat{B} \Rightarrow B \in s.q \Rightarrow \lambda_s(q) \in \hat{B}$ λ_s Sürekli olduğundan $\lambda_s(\hat{E}) \subset \hat{B}$ olacak şekilde q nun $\hat{E}$ komşuluğu vardır ve $E \in q \Rightarrow D \cap E \in q \Rightarrow D \cap E \neq \emptyset$ dir. $t \in D \cap E \Rightarrow x_{st} \in U \cap V$ elde edilir i bu da $U \cap V = \emptyset$ olması ile çelişir. Dolayısıyla ispat biter.

Eğer X tamamen regüler uzay olsaydı ispat aşağıdaki gibi yapılırdı: $f : S \rightarrow X$ Fonksiyonu $f(s) = x_s$ olarak tanımlansın. $\tilde{f}$, f nin βS ye genişlemesi olsun. O zaman $(p.q) - \lim_{v \in S} x_v = (p.q) - \lim_{v \in S} \tilde{f}(x_v) = \tilde{f}((p.q) - \lim_{v \in S} x_v) = \tilde{f}(p.q)$
 $= \tilde{f}(p - \lim_{s \in S} q - \lim_{t \in S} s.t) = p - \lim_{s \in S} q - \lim_{t \in S} \tilde{f}(s.t) = p - \lim_{s \in S} q - \lim_{t \in S} x_{st}$ olur.

Tanım 3.1.6 $(S,.)$ bir semigrup ve (S, T) bir topolojik uzay olsun.

- i) Eğer her $x \in S$ için $\rho_x : S \rightarrow S$, $\rho_x(s) = s.x$ sürekli ise $(S,., T)$ üçlüsüne *sağ topolojik yarıgrup* denir.
- ii) Eğer her $x \in S$ için $\lambda_x : S \rightarrow S$, $\lambda_x(s) = x.s$ sürekli ise $(S,., T)$ üçlüsüne *sol topolojik yarıgrup* denir.

Tanım 3.1.7 S , sağ topolojik semigrup olsun. $\Lambda(S) = \{x \in S : \lambda_x \text{ sürekli}\}$ kümesine S nin topolojik merkezi denir.

Şimdi S deki ikili işlemin βS ye genişlemesini değişik bir şekilde ifade eden teoremi verelim.

Teorem 3.1.8 S üzerindeki ayrık topolojisiyle bir yarıgrup olsun. O zaman S üzerindeki “.” işleminin βS bir sağ topolojik yarıgrup ve $S \subseteq \Lambda(\beta S)$ olacak şekilde βS ye bir tek genişlemesi vardır.

İspat: $y \in S$ ise S ayrık topoloji olduğundan $\lambda_y : S \rightarrow S \subseteq \beta S$ sürekli fonksiyondur.

O zaman λ_y nin birtek $\tilde{\lambda}_y : \beta S \rightarrow \beta S$ genişlemesi vardır. $p \in \beta S \setminus S$ için $p_\alpha \rightarrow p$ olacak şekilde bir $\langle p_\alpha \rangle \subseteq S$ ağı vardır. $\tilde{\lambda}_y$ sürekli olduğundan

$$\tilde{\lambda}_y(p_\alpha) = \lambda_y(p_\alpha) \rightarrow \tilde{\lambda}_y(p) \quad . \quad y.p = \tilde{\lambda}_y(p) = \lim_{\alpha} \lambda_y(p_\alpha) = \lim_{\alpha} (y.p_\alpha) \quad \text{olarak}$$

tanımlayalım. Böylece $\cdot : S \times S \rightarrow S$ ikili işlemini $S \times \beta S \rightarrow \beta S$ şeklinde $(y,p) \rightarrow y.p$

genişletmiş olduk. $p \in \beta S$ için S ayrık olduğundan $\rho_p : S \rightarrow \beta S$ bir sürekli

fonksiyondur. Bu nedenle ρ_p birtek sürekli $\tilde{\rho}_p : \beta S \rightarrow \beta S$ genişlemesine sahiptir.

Benzer şekilde $q \in \beta S \setminus S$ ise $q_\beta \rightarrow q$ olacak şekilde bir $\langle q_\beta \rangle \subseteq S$ ağı vardır. $\tilde{\rho}_p$ sürekli olduğundan $\tilde{\rho}_p(q_\beta) = \rho_p(q_\beta) \rightarrow \tilde{\rho}_p(q)$ olur.

$$q.p = \tilde{\rho}_p(q) = \lim_{\beta} q_\beta.p = \lim_{\beta} q_\beta \cdot \lim_{\alpha} p_\alpha = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} q_\beta.p_\alpha \quad \text{olarak} \quad \text{tanımlayalım.}$$

Böylece yukarıdaki $S \times \beta S \rightarrow \beta S$ işlemi $\beta S \times \beta S$ ye genişletilmiş oldu.

Dolayısıyla $S \times \beta S \rightarrow \beta S$ $(q,p) \rightarrow q.p = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} q_\beta.p_\alpha$ βS üzerinde bir ikili

işlemdir. Şimdi βS nin bu işlemle bir yarıgrup olduğunu gösterelim. $p, q, r \in \beta S$

olsun. O zaman $p_\alpha \rightarrow p, q_\beta \rightarrow q$ ve $r_\gamma \rightarrow r$ olacak şekilde $\langle p_\alpha \rangle, \langle q_\beta \rangle, \langle r_\gamma \rangle \subseteq S$

ağları vardır. βS üzerindeki ikili işlemin tanımından dolayı

$$(p.q).r = \lim_{\alpha} \lim_{\beta} \lim_{\gamma} (p_\alpha.q_\beta).r_\gamma \quad \text{ve} \quad p.(q.r) = \lim_{\alpha} \lim_{\beta} \lim_{\gamma} p_\alpha.(q_\beta.r_\gamma) \quad \text{yazabiliriz.}$$

S semigrup olduğundan $(p_\alpha.q_\beta).r_\gamma = p_\alpha.(q_\beta.r_\gamma)$ ve limitin tekliğinden $(p.q).r = p.(q.r)$

olur. Böylece tanımlanan işleme göre βS yarıgruptur. Ayrıca bu işlem $\tilde{\lambda}_y$ ve $\tilde{\rho}_p$

nin tekliğinden dolayı tektir. $\tilde{\rho}_p : \beta S \rightarrow \beta S$ ye sürekli olduğundan βS sağ topolojik

semigruptur. Ayrıca her $y \in S$ için $\tilde{\lambda}_y$ sürekli olduğundan $S \subseteq \Lambda(\beta S)$.

Tanım 3.1.9 $(S, \cdot)$ bir yarıgrup ve topolojik uzay, eğer $\mathcal{T}$ kompakt sağ topolojik semigrup $\varphi : S \rightarrow \mathcal{T}$ sürekli homomorfizm $\varphi[S] \subseteq \Lambda(\mathcal{T})$ ve $\varphi[S], \mathcal{T}$ de yoğun ise $(\varphi, \mathcal{T})$ ikilisine S nin yarıgrup kompaktlaması denir.

Teorem 3.1.10 $(S, \cdot)$ ayırık yarıgrup ve $i: S \rightarrow \beta S$ bir içirme dönüşümü olsun.

a) $(i, \beta S), S$ nin yarıgrup kompaktlamasıdır.

b) $\mathcal{T}$ kompakt sağ topolojik yarıgrup, $\varphi: S \rightarrow \mathcal{T}$ sürekli homomorfizm, $\varphi[S] \subseteq \Lambda(\mathcal{T})$ olsun. O zaman $\eta|_S = \varphi$ olacak şekilde $\eta: \beta S \rightarrow \mathcal{T}$ bir sürekli homomorfizm vardır.

İspat: **a)** $S, \beta S$ de yoğun ve her $s \in S$ için λ_s sürekli olduğundan $i(S) \subseteq \Lambda(\mathcal{T})$ dir.

Dolayısıyla $(i, \beta S), S$ nin yarıgrup kompaktlamasıdır.

b) Teorem 1.3.5den $\eta|_S = \varphi$ olacak şekilde $\eta: \beta S \rightarrow \mathcal{T}$ sürekli fonksiyonunu seçebiliriz. Seçilen bu fonksiyonun homomorfizm olduğunu gösterelim. Teorem 1.3.5 den ve Teorem 3.1.1 den $S, \beta S$ de yoğun ve $S \subseteq \Lambda(\beta S)$ olup böylece η homomorfizmdir.

Sonuç 3.1.11 S herhangi bir yarıgrup ve topolojik uzay olsun. $(\varphi, \mathcal{T})$ S nin herhangi bir yarıgrup kompaktlaması olmak üzere her $p, q \in \mathcal{T}$ için $pq = \lim_{\varphi(s) \rightarrow p} \lim_{\varphi(t) \rightarrow q} \varphi(s)\varphi(t)$ dir. $s, t \in S$ olmak üzere $\lim_{\varphi(s) \rightarrow p} x_s = y$ nin anlamı y nin herhangi bir U komşuluğu için $s \in S$ ve $\varphi(s) \in V$ iken $x_s \in U$ olacak şekilde p nin bir V komşuluğunun bulunmasıdır.

Tanım 3.1.12 $(S, \cdot)$ bir yarıgrup, $s \in S, A \subseteq S$

a) $s^{-1}A = \{t \in S : st \in A\}$

b) $As^{-1} = \{t \in S : ts \in A\}$

Burada $s^{-1}A$, $\lambda_s^{-1}(A)$ nın yerine As^{-1} de $\rho_s^{-1}(A)$ nın yerine alternatif bir notasyon olarak kullanılmıştır.

$(S, +)$ şeklinde ise $-S + A = \{t \in S : s + t \in A\}$ ve $A - S = \{t \in S : t + s \in A\}$ şeklinde olur.

Örnek.3.1.13 $(\mathbb{N}, \cdot)$ ve $A = 2\mathbb{N} + 1 = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ ise $2^{-1}A = \{t \in \mathbb{N} : 2t \in A\} = \emptyset$ olur.

Teorem 3.1.14 $(S, \cdot)$ bir yarıgrup $A \subseteq S$ olsun.

a) $\forall s \in S, q \in \beta S$ için $A \in s.q \Leftrightarrow s^{-1}A \in q$

b) $p, q \in \beta S$, $A \in p.q \Leftrightarrow \{s \in S : s^{-1}A \in q\} \in p$

İspat: (a) ($\Rightarrow$) $s \in S$ ve $q \in \beta S$, $A \in sq$ olsun. $A \in s.q = \lambda_s(q) \Rightarrow \lambda_s(q) \in \hat{A}$, λ_s sürekli olduğundan $\lambda_s(\hat{B}) \subseteq \hat{A}$ olacak şekilde q nun $\hat{B}$ komşuluğu vardır. $B \in q$, $B \subset s^{-1}A$ olduğundan $s^{-1}A \in q$ olur.

($\Leftarrow$) $s^{-1}A \in q$ olsun. $A \notin sq$ olduğunu varsayalım. $S \setminus A \in s.q$ olur. $s^{-1}(S \setminus A) \in q$ olduğu gerek şartta ispatlandı. $s^{-1}(S \setminus A) = \{t \in S : st \in S \setminus A\} \in q$, $S \setminus A \in sq \Rightarrow s^{-1}A \in q$ Buradan $\emptyset = s^{-1}A \cap s^{-1}(S \setminus A) \in q$ olur ki bu bir çelişkidir.

b) $p, q \in \beta S$, $A \in p.q$ olsun. $A \in \rho_q(p)$ ise $\rho_q(p) \in e[A]$ dir. $\rho_q(e[B]) \subseteq e[A]$ dir. $B \subseteq \{s \in S : s^{-1}A \in q\}$ olduğu için $\{s \in S : s^{-1}A \in q\} \in p$ dir. Tersine $\{s \in S : s^{-1}A \in q\} \in p$ olsun. $A \in p.q$ olduğunu göstermeliyiz. Aksini kabul edelim yani $A \notin p.q$ olsun. $S \setminus A \in p.q$ olup gerek şarttan dolayı $\{s \in S : s^{-1}(S \setminus A) \in q\} \in p$ dir. Dolayısıyla $\emptyset \in p$ çelişkisi ortaya çıkar.

Tanım 3.1.15 $(S, \cdot)$ bir yarıgrup $A \subseteq S$ ve $p \in \beta S$ olsun. $A^*(p) = \{s \in A : s^{-1}A \in p\}$ dir.

Lemma 3.1.16 $(S, \cdot)$ yarıgrup, $p.p = p \in \beta S$ idempotent $A \subseteq S$, $s \in A^*(p) = A^*$ ise $s^{-1}A^*(p) \in p$ dir.

İspat: $s \in A^*(p)$ ve $B = s^{-1}A$ olsun. O zaman $B \in p$ ve p bir idempotent olduğu için $B^*(p) \in p$ dir. $B^*(p) \subseteq s^{-1}(A^*(p))$ olduğunu göstermek yeterli. $t \in B^*(p) \Rightarrow t \in B = s^{-1}A$ ve $t^{-1}B \in p$, $t \in B = s^{-1}A \Rightarrow st \in A \Rightarrow st \in A$ ve $t^{-1}(s^{-1}A) \in p$, $t^{-1}(s^{-1}B) = (st)^{-1}A$ olduğundan $t^{-1}(s^{-1}A) = (st)^{-1}A \in p$, $st \in A^*(p)$ $t \in s^{-1}(A^*(p))$ dir.

Lemma 3.1.17 $(S, \cdot)$ yarı grup, $p, q \in \beta S$ ve $A \subseteq S$ olsun. O zaman $A \in p.q$ olması için gerek ve yeter koşul $\bigcup_{s \in B} sC_s \subseteq A$ olacak şekilde $B \in p$, $\langle C_s \rangle_{s \in B} \subseteq q$ nun bulunmasıdır.

İspat: $A \in p.q$ olsun. $A \in p.q \Rightarrow \{s \in S : s^{-1}A \in q\} \in p$ dir.

$B = \{s \in S : s^{-1}A \in q\}$ ve $s \in B$ için $C_s = s^{-1}A$ alalım. $\bigcup_{s \in B} sC_s \subseteq A$ olduğunu

gösterelim: $st \in A$ ise $t \in s^{-1}A$ olmalı böylelikle hipotezin doğruluğu gösterildi.

Lemma 3.1.18 $(S, \cdot)$ yarıgrup, $A \subseteq S, q \in \beta S$

a) $A \in q \Rightarrow sA \in s.q$

b) S sol sadeleşebilir ve $sA \in s.q \Rightarrow A \in q$ olur.

İspat: a) $A \in q$ ve $A \subseteq s^{-1}(sA)$ olup $s^{-1}(sA) \in q \Rightarrow sA \in s.q$ olur.

b) S sol sadeleşebilir $\Rightarrow s^{-1}(sA) = A \Rightarrow A \in q$ olur.

Teorem 3.1.19 S ayrık yarıgrup (φ, T) , S nin yarıgrup kompaktlaması $A \subseteq B \subseteq S$ ve B, S nin alt yarıgrubu olsun.

a) $\text{cl}(\varphi(B))$, T nin alt yarıgrubudur.

b) A, B nin sol ideali ise $\text{cl}(\varphi(A))$, $\text{cl}(\varphi(B))$ nin sol\sağ idealidir.

İspat: a) T , sağ topolojik yarıgrup, $S \subset \Lambda(T)$, S yarıgrup $\bar{S}$, T de yarıgrup.

b) $BA \subset A \Rightarrow \text{cl}\varphi(B)\text{cl}\varphi(A) \subseteq \text{cl}\varphi(A)$ dir. $x \in \text{cl}\varphi(B)$ ve $y \in \text{cl}(\varphi(A))$ alalım.

$xy = \lim_{\varphi(s) \rightarrow x} \lim_{\varphi(t) \rightarrow y} \varphi(s)\varphi(t) \Rightarrow \text{cl}\varphi(B)\text{cl}\varphi(A) \subseteq \text{cl}\varphi(A)$ sağ için de benzer şekilde yapılır.

Sonuç 3.1.20 S , ayrık yarıgrup $(i, \beta S)$ S nin yarıgrup kompaktlaması olduğundan S nin her T alt yarıgrubu için $i(T) = \hat{T} = \beta T$, βS nin alt yarıgrubudur.

Not 3.1.21 S, T ayrık yarıgrubun alt yarıgrup olduğunu varsayalım. βS yi βT nin alt yarıgrup olarak düşünebiliriz.

Teorem 3.1.22 $(S, \cdot)$ yarıgrup, $\mathcal{A} \subseteq P(S)$ S.K.Ö sahip, $\forall A \in \mathcal{A}, \forall x \in A$ için $\exists B \in \mathcal{A}, xB \subseteq A \Rightarrow \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \hat{A}$, βS nin alt yarıgrubudur.

İspat: $T = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \hat{A}$ olsun. $\mathcal{A} \subseteq P(S)$ S.K.Ö sahip olduğu için $T \neq \emptyset$ dir. $p, q \in T$ ve

$A \in \mathcal{A}$ olsun. $x \in A$ için $xB \subseteq A$ olacak şekilde $B \in \mathcal{A}$ vardır. Böylece $x^{-1}A \in q$ olur.

$A \subseteq \{x \in S : x^{-1}A \in q\} \Rightarrow \{x \in S : x^{-1}A \in q\} \in p$ dir. Teorem 3.1.14 ten dolayı $A \in p.q$ dur.

Teorem 3.1.23 $(S, \cdot)$ yarıgrup, $\mathcal{A} \subseteq P(S)$ S.K.Ö olsun. $(T, \cdot)$ kompakt sağ topolojik yarıgrup ve $\varphi : S \rightarrow T$ fonksiyonu $\varphi[S] \subseteq \Lambda(T)$ koşulunu sağlasın. φ fonksiyonu

$A \in \mathcal{A}$ ve $B \in \mathcal{A}$ için $x \in A$ ve $y \in B$ olduğunda $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)$ koşulu sağlansın. O zaman her $p, q \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \hat{A}$ için $\tilde{\varphi}(p.q) = \tilde{\varphi}(p).\tilde{\varphi}(q)$ eşitliği sağlanır.

İspat: $p, q \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \hat{A}$ olsun. $\forall x \in A$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x.q) &= \tilde{\varphi}(x.\lim_{y \rightarrow q} y) \\ &= \lim_{y \rightarrow q} \varphi(x.y) && \text{“ } \tilde{\varphi} \circ \lambda_x \text{ in sürekli olduğundan”} \\ &= \lim_{y \rightarrow q} \varphi(x).\varphi(y) && \text{“ } q \text{ nun bir elemanı üzerinde } \varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y) \text{ old.”} \\ &= \varphi(x).\lim_{y \rightarrow q} \varphi(y) && \text{“ } \varphi(x) \in \Lambda(T) \text{ olduğundan”} \\ &= \varphi(x).\tilde{\varphi}(q) \end{aligned}$$

$A \in p$ olduğu için

$$\begin{aligned} \varphi(p.q) &= \tilde{\varphi}((\lim_{x \rightarrow p} x).q) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \tilde{\varphi}(x.q) && \text{“ } \tilde{\varphi} \circ \rho_q \text{ sürekli olduğundan”} \\ &= (\lim_{x \rightarrow p} \varphi(x)).\tilde{\varphi}(q) && \text{“ } \rho_{\tilde{\varphi}(q)} \text{ sürekli olduğundan”} \\ &= \tilde{\varphi}(p).\tilde{\varphi}(q) \end{aligned}$$

Sonuç 3.1.24 $(S,.)$ bir yarıgrup, $(T,.)$ kompakt sağ topolojik yarıgrup ve $\varphi: S \rightarrow T$, $\varphi[S] \subseteq \Lambda(T)$ koşulunu sağlayan bir homomorfizm olsun. O zaman $\tilde{\varphi}: \beta S \rightarrow T$ de bir homomorfizmdir.

3.2 βS nin Değişmeliliği

Bu kısımda βS nin değişmeli olması ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Teorem 3.2.1 $(S,.)$ bir yarıgrup ise o zaman S , $(\beta S,.)$ nin merkezi tarafından içerilir.

İspat: $s \in S$ ve $p \in \beta S$ olsun. O zaman

$$s.p = \lim_{t \rightarrow p} st = \lim_{t \rightarrow p} ts$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow p} \rho_s(t) = \rho_s(\lim_{t \rightarrow p} t) = \rho_s(p) \\
&= p.s
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.2 S ayrık uzay ve değişmeli bir yarıgrup olsun. O zaman

$$\Lambda(\beta S) = Z(\beta S) \text{ dir.}$$

İspat: $p \in \Lambda(\beta S)$ ve $q \in \beta S$ olsun. λ_p sürekli olduğu için

$$\begin{aligned}
p.q &= \lambda_p(q) = \lambda_p(\lim_{t \rightarrow q} t) \\
&= \lim_{t \rightarrow q} \lambda_p(t) = \lim_{t \rightarrow q} p.t = \lim_{t \rightarrow q} t.p \\
&= \lim_{t \rightarrow q} \rho_p(t) = \rho_p(\lim_{t \rightarrow q} t) = \rho_p(q) \\
&= q.p
\end{aligned}$$

Böylece $p, \beta S$ nin cebirsel merkezinin içindedir. Tersine $p \in Z(\beta S)$ ise $\lambda_p = \rho_p$ olduğu için λ_p sürekli dir. Böylece $p \in \Lambda(\beta S)$ dir.

Teorem 3.2.3 $(S, .)$ değişmeli yarıgrup olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

- a) $(\beta S, .)$ değişmelidir.
- b) $(\beta S, .)$ sol topolojik yarıgruptur.
- c) $(\beta S, .)$ semitopolojik yarıgruptur.

Lemma 3.2.4 $(S, .)$ yarıgrup, $\langle x_n \rangle_{n=1}^\infty$ ve $\langle y_n \rangle_{n=1}^\infty$ S , de iki dizi ve $p, q \in \beta S$ olsun.

Eğer $\{\{x_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq q$ ve $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ ise $\{y_k.x_n : k, n \in \mathbb{N} \text{ ve } k < n\} \in p.q$ olur.

İspat: $B = \{y_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ ve $y_k \in B$ için $C_k = \{x_n : k < n\}$ alalım. O zaman

$$\bigcup y_k.C_k \subseteq \{y_k.x_n : k, n \in \mathbb{N} \text{ ve } k < n\} \text{ olup}$$

Lemma 3.1.17 den $\{y_k.x_n : k, n \in \mathbb{N} \text{ ve } k < n\} \in p.q$ koşulu sağlanır.

Teorem 3.2.5 $(S, .)$ yarıgrup olsun. O zaman $(\beta S, .)$ nin değişmeli olması için

gerek ve yeter koşul $\langle x_n \rangle_{n=1}^\infty$ ve $\langle y_n \rangle_{n=1}^\infty$ dizileri için

$$\{y_k.x_n : k, n \in \mathbb{N} \text{ ve } k < n\} \cap \{x_k.y_n : k, n \in \mathbb{N} \text{ ve } k < n\} \neq \emptyset \text{ olmasıdır.}$$

İspat: $p, q \in \beta S$ alalım öyle ki $p.q \neq q.p$ olsun. $A \subseteq S$ alalım öyle ki $A \in p.q$ ve $S \setminus A \in q.p$ koşulu sağlansın.

$B = \{s \in S : s^{-1}A \in q\}$ ve $C = \{s \in S : s^{-1}(S \setminus A) \in p\}$ olsun. O zaman $B \in p$ ve $C \in q$ dur. $x_1 \in B$ ve $y_1 \in C$ seçelim. Verilen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $y_1, y_2, \dots, y_n$ için $x_{n+1} \in B \cap \bigcap_{k=1}^n y_k^{-1}(S \setminus A)$ ve $y_{n+1} \in C \cap \bigcap_{k=1}^n x_k^{-1}A$ seçelim. O zaman $\{y_k \cdot x_n : k, n \in \mathbb{N} \text{ ve } k < n\} \subseteq S \setminus A$ ve $\{x_k \cdot y_n : k, n \in \mathbb{N} \text{ ve } k < n\} \subseteq A$ dır. Tersine $\{\{x_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\}$ S.K.Ö sahiptir böylece $\{\{x_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq p$ olacak şekilde $p \in \beta S$ seçelim. Benzer şekilde $\{\{y_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq q$ olacak şekilde $q \in \beta S$ seçelim. O zaman Lemma 3.2.4 den $\{y_k \cdot x_n : k, n \in \mathbb{N} \text{ ve } k < n\} \in q.p$ ve $\{x_k \cdot y_n : k, n \in \mathbb{N} \text{ ve } k < n\} \in p.q$ olur.

Teorem 3.2.5 in sonucu olarak $(\beta \mathbb{N}, \cdot)$ ve $(\beta \mathbb{N}, +)$ değişmeli değildir.

3.3 Bir Yarıgrup Olarak S^*

$S^* = \beta S \setminus S$ nin cebirsel yapısı daima ilgi çekici olmuştur. Bu kısımda S^* in cebirsel yapısı ile ilgili birkaç sonuç verilecektir.

Teorem 3.3.1 S bir yarıgrup olsun. S^* in βS nin alt yarıgrubu olması için gerek ve yeter koşul her $A \in P_f(S)$ ve her $B^{sonsuz} \subseteq S$ için $\bigcap_{x \in F} x^{-1}A$ sonlu olacak şekilde $F \in P_f(B)$ nin bulunmasıdır.

İspat: $A \in P_f(S)$ ve B, S nin sonsuz alt kümesi olsun. Her $F \in P_f(B)$ için $\bigcap_{x \in F} x^{-1}A$ nin sonsuz olduğunu varsayalım. O zaman $\{x^{-1}A : x \in B\}$ kümesinin sonlu kesişimlerinin tümü sonsuzdur. Sonuç 1.1.19 dan $\{x^{-1}A : x \in B\} \subseteq p$ olacak şekilde $p \in S^*$ alabiliriz. $B \in q$ olacak şekilde $q \in S^*$ alalım. O zaman $A \in q.p$ ve A sonludur. Böylece Teorem 1.1.12 den $q.p \in S$ çelişkisi elde edilir. Tersine $q, p \in S^*$ için $q.p = y \in S$ olduğunu varsayalım. $A = \{y\}$ ve $B = \{x \in S : x^{-1}A \in p\}$ olsun. O zaman her $F \in P_f(B)$ için $B \in q$ olur. $\bigcap_{x \in F} x^{-1}A \in p$ olup $\bigcap_{x \in F} x^{-1}A$ sonsuzdur. Bu bir çelişkidir. O halde $q, p \in S^*$ için $q.p \in S^*$ dır.

Sonuç 3.3.2 S yarıgrup olsun. S sağ ya da sol sadeleşebilir ise o zaman $S^*, \beta S$ nin alt yarıgrupudur.

İspat: Genelliği kaybetmeksizin S sağ sadeleşebilir olsun. $S^*, \beta S$ nin alt yarıgrup olduğunu gösterelim. $q, p \in S^*$ için $q.p \in S^*$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $s \in S$ ve $q \in S^*$ için $s.q \in S^*$ olduğunu gösterelim. $s.q \notin S^* \Rightarrow A^{sonlu} \subseteq S$ için $A \in s.q$ ise $s^{-1}A \in q \in S^*$ dir. $s^{-1}A = \{t \in S : st \in A\}^{sonsuz} \subseteq S$ olur ki bu $\{t \in S : t^{-1}A \in q\} = \emptyset \in p$ çelişkisini doğurur.

4. ALT YARIGRUPLAR

4.1 Bilinen Bazı Yarıgrupların Stone-Čech Kompaktlamalarının

Alt Yarıgrupları

Bu bölümde çok iyi bilinen bazı yarıgruplar için S^* in βS nin alt yarıgrubu olup olmadığını göstereceğiz. Örneğin S bir rectangular band ve S^* bir altgrup oluyorsa S^* ında bir rectangular band olmak zorunda olduğunu göstereceğiz. Burada bütün yarıgrupları ayrık topolojisiyle düşüneceğiz.

A boş olmayan bir küme olsun. (A ya alfabe diyeceğiz) A^+ ile A dan üretilebilecek boş olmayan tüm sonlu kümelerin kümesi gösterilir. A^+ üzerinde her $a_1 a_2 \dots a_m, b_1, b_2, \dots, b_n \in A^+$ ($a_i, b_i \in A$) için $(a_1 a_2 \dots a_m) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n$ ikili işlemi ile A^+ bir yarıgrup olur. A^+ ya A üzerindeki *free yarıgrup* denir. A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. $\langle A | R \rangle$ ikilisine bir *yarıgrp takdimi* denir.

ρ, R tarafından doğrulmuş A^+ da bir kongruans olsun. O zaman A^+ / ρ bir yarıgruptur. Eğer $S, A^+ / \rho$ ye izomorfik ise $\langle A | R \rangle$ ye S nin bir yarıgrup takdimi denir. $u, v \in A^+$ için u, v özdeş kelimelerse $u \equiv v$ olarak gösterilir ve eğer $(u, v) \in \rho \Rightarrow u = v$ yazılır.

Bir A kümesinin kardinalitesini $|A|$ ile göstereceğiz.

$(S, \cdot)$ ve $s.t$ notasyonlarının yerine eğer karışma durumu yoksa S ve st yi kullanacağız.

Teorem 4.1.1 S, T sonsuz yarıgruplar ve $\beta S \setminus S, \beta S$ nin alt yarıgrubu olsun. Eğer $\phi: S \rightarrow T$ bir örten homomorfizm ve her $t \in T$ için $\phi^{-1}(t)$ sonlu ise $\beta T \setminus T, \beta T$ nin bir altarıgrubudur.

İspat: $A \in P_f(T)$ ve $B^{\text{sonsuz}} \subseteq T$ olsun. ϕ nin örten ve $\forall t \in T$ için $\phi^{-1}(t)$ nin sonlu oluşundan, $\phi^{-1}(B)$ S nin sonsuz bir alt kümesidir. Ayrıca $\emptyset \neq \phi^{-1}(A) \in P_f(S)$ dir.

$\beta S \setminus S$ nin βS nin altyarıgrubu oluşundan dolayı $\exists F \in P_f(\phi^{-1}(B))$ öyle ki

$\bigcap_{x \in F} (x^{-1} \cdot \phi^{-1}(A))$ sonludur.

$m, n \in \mathbb{N}$ için $\bigcap_{x \in F} (x^{-1} \cdot \phi^{-1}(A)) = \{s_1, \dots, s_n\}$ ve $F = \{x_1, \dots, x_m\}$ olsun. O zaman

$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m$ için $s_i \in x_j^{-1} \cdot \phi^{-1}(A)$ dır. Böylece her i, j için $x_j \cdot s_i \in \phi^{-1}(A)$ dır. Buradan her i, j için $\phi(x_j \cdot s_i) = \phi(x_j) \cdot \phi(s_i) \in \phi(\phi^{-1}(A)) = A$ dır. Böylece her i, j için $\phi(s_i) \in \phi(t_j)^{-1} \cdot A$ dır. Bir $t \in T$ için ve her i, j için $t \in \phi(t_j)^{-1} \cdot A$ ve $\phi(s_i) \neq t$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\exists s \in S$ öyle ki her i için $\phi(s) = t$ ve $s_i \neq s$ ve her j için $\phi(x_j) \cdot \phi(s) = \phi(x_j \cdot s) \in A$

Buradan her j için $x_j \cdot s \in \phi^{-1}(A)$ dır. Öyleyse her i için $s \in \bigcap_{x \in F} (x^{-1} \cdot \phi(A))$ ve $s = s_i$

olur ki bu bir çelişkidir.

Buradan $\phi(F) \in P_f(B)$ ve $\beta T \setminus T$, βT nin bir altyarıgrubu olup $\bigcap_{\phi(x) \in \phi(F)} (\phi(x)^{-1} \cdot A) =$

$\{\phi(s_1), \dots, \phi(s_n)\}$ olur.

$\forall t \in T$ için $\phi^{-1}(t)$ sonsuz olsa bile $\beta T \setminus T$, βT nin bir altyarıgrubu olabilir.

Örneğin $T = \{A \setminus R\} = \langle a, b \mid a^2 = a, b^2 = b \rangle$ ve $S = A^+$ ise $T = A^+ \setminus \rho = \{a\rho : a \in A^+\}$
 $= \{a, b, ab, ba, aba, abab, baba, \dots\}$ $\beta S \setminus S$ ve $\beta T \setminus T$ nin sırayla βS ve βT nin alt yarigrupları oldukları kolaylıkla gösterilebilir. Eğer $\phi : S \rightarrow T$ bir kanonik homomorfizm ise her $a \in S = A^+$ için $\phi(a) = a\rho$ dir. Böylece ϕ örten homomorfizm ve her $t \in T$ için $\phi^{-1}(t)$ sonsuzdur.

ρ , A^+ da R tarafından üretilmiş bir kongruans olsun $\forall a \in A^+$ için $a\rho$ sonlu ve $S = \langle A \setminus R \rangle$ ise $\beta S \setminus S$, βS nin altyarıgrubudur.

$L \neq \emptyset$ bir küme olsun L , $s.t = s$ olarak tanımlanan çarpma işlemine göre bir yarigrupdur ve bu yarigrup sol sıfır yarigrup olarak adlandırılır. Benzer şekilde sağ sıfır yarigrupta tanımlanabilir.

S ayrık altyarıgrupların bir birleşimi şeklinde yazılırsa S ye yarigrupların birleşimi denir. Ayrıca eğer bir Y bandı (semilatis) ve $\forall \alpha, \beta \in Y$ için $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$

olacak şekilde bir $(S_\alpha)_{\alpha \in Y}$ yarıgrup ailesi mevcut ise S ye $(S_\alpha)_{\alpha \in Y}$ yarıgruplarının bandı (semilatisi) denir.

Teorem 4.1.2 S bir sol (sağ) sıfır yarıgrup ise $\beta S \setminus S$ de βS nin altarıgrubudur. Ayrıca $\beta S \setminus S$ sol (sağ) sıfır yarıgrup ve βS , $\beta S \setminus S$ ve S yarıgruplarının bandıdır.

İspat: S sol sıfır yarıgrup olsun. Eğer $A \in P_f(S)$ ve $B^{\text{sonsuz}} \subseteq S$ ise $\exists F \in P_f(B)$ öyle ki $A \cap F = \emptyset$ dir. Buradan $\forall x \in F$ ve $y \in S$ için $xy = x \notin A$, ayrıca $\bigcap_{x \in F} (x^{-1}A) = \emptyset$ böylece $\beta S \setminus S$, βS nin altarıgrubu olur.

$p, q \in \beta S \setminus S$ olsun. O zaman bir $\langle p_\alpha \rangle \subset S$ ağı vardır öyle ki $\rho_p : S \rightarrow \beta S$ sürekli olduğundan $\lim_\alpha p_\alpha = p$ dir.

$p.q = \tilde{\rho}_p(q) = \lim_\alpha \rho_q(p_\alpha) = \lim_\alpha (p_\alpha q) = \lim_\alpha p_\alpha = p$ olur. Böylece $\beta S \setminus S$ sol sıfır yarıgruptur.

$p \in S$ ve $q \in \beta S \setminus S$ olsun. O zaman $\tilde{\lambda}_p$ nin sürekli oluşundan $\lim_\alpha q_\alpha = q$ olacak şekilde bir $\langle q_\alpha \rangle_{\alpha \in I} \subset S$ ağı vardır.

$p.q = \tilde{\lambda}_p(q) = \lim_\alpha \tilde{\lambda}_p(q_\alpha) = \lim_\alpha \lambda_p(q_\alpha) = \lim_\alpha (p.q_\alpha) = \lim_\alpha p = p$ Böylece

$S.(\beta S \setminus S) \subseteq S$. Benzer şekilde $(\beta S \setminus S).S \subseteq \beta S \setminus S$ dir.

$S_1 = S$, $S_2 = \beta S \setminus S$, $Y = \{1, 2\}$ ve $1^2 = 1$, $2^2 = 2$, $1.2 = 1$, $2.1 = 2$ olacak şekilde bir band olsun o zaman βS , S_1 ve S_2 yarıgruplarının bandı olur.

S , “ $\leq$ ” bağıntısıyla iyi sıralanmış bir küme olsun. S deki ikili işlemi $\forall x, y \in S$ ve $x \leq y$ için $x.y = y.x = y$ şeklinde tanımlarsak $(S, .)$ yarıgrubuna *zincir* denir.

Teorem 4.1.3 S bir zincir olsun. O zaman $\beta S \setminus S$, βS nin bir alt yarıgrubu olur. Ayrıca $\beta S \setminus S$ sağ sıfır yarıgrup ve βS de $\beta S \setminus S$ ve S yarıgruplarının bir semilatisidir.

İspat: $A \in P_f(S)$ ve $B^{\text{sonsuz}} \subseteq S$ olsun. B sonsuz olduğundan $\exists x \in B$ öyle ki $x \notin A$. Eğer $\forall a \in A$ için $x > a$ ise $x^{-1}.A = \emptyset$ dir. Eğer $\forall a \in A$ için $x \leq a$ ise $x^{-1}.A \subseteq A$.

Böylece $F = \{x\}$ kümesini alabiliriz. $q \in \beta S \setminus S$ ve $s \in S$ olsun. O zaman $\langle q_\alpha \rangle_{\alpha \in I} \subset S$ olacak şekilde bir ağ vardır öleki $\lim_\alpha q_\alpha = q$ dir. S bir zincir olduğundan $\exists \alpha_0 \in I$ öyle ki $\forall \alpha > \alpha_0$ için $s.q_\alpha = q_\alpha$ dir. $\tilde{\lambda}_s$ nin sürekli olduğundan $s.q = \tilde{\lambda}_s(q) = \lim_\alpha \tilde{\lambda}_s(q_\alpha) = \lim_\alpha \lambda_s(q_\alpha) = \lim_\alpha (s.q_\alpha) = \lim_\alpha q_\alpha = q$.

Böylece $S.(\beta S \setminus S) \subseteq \beta S \setminus S$ dir. Benzer şekilde $(\beta S \setminus S).S \subseteq \beta S \setminus S$

$S_1 = S, S_2 = \beta S \setminus S$ ve $Y, Y = \{1, 2\}$ ve $1^2 = 1, 2^2 = 2, 1.2 = 2.1 = 2$ olacak şekilde bir semilatis ise $\beta S, S_1$ ve S_2 yarıgruplarının bir semilatisidir. $p, q \in \beta S \setminus S$ olsun. O zaman $\lim_\alpha p_\alpha = p$ olacak şekilde bir $\langle p_\alpha \rangle \subseteq S$ ağı vardır. Her $\alpha \in I$ için $p_\alpha \in S$ ve $q \in \beta S \setminus S$ olduğundan $p_\alpha.q = q$ olur. Buradan $\tilde{\rho}_q$ sürekli olduğundan $p.q = \tilde{\rho}_q(p) = \lim_\alpha \tilde{\rho}_q(p_\alpha) = \lim_\alpha \rho_q(p_\alpha) = \lim_\alpha (p_\alpha.q) = \lim_\alpha q = q$ elde edilir. Böylece $\beta S \setminus S$ sağ sıfır yarıgruptur.

X bir küme ise $(P(X) \setminus \{\emptyset\}, \cup)$ ikilisi $\cup$ birleşim işlemiyle bir yarıgruptur bu yarıgrup *semilatis* olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.4 Eğer S bir semilatis ise $\beta S \setminus S, \beta S$ nin bir alt yarıgrubu değildir.

İspat: $S = (P(X) \setminus \{\emptyset\}, \cup), A = \{x\}$ ve $B = \{X \setminus \{a\} : a \in X\}$ olsun.

$a \in X$ için $x = X \setminus \{a\}$ ise $x \in B$ ve $x^{-1}.A = \{\{a\} \cup K : K \in P(X)\}$ olur. Böylece $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i \in X, x_i = X \setminus \{a_i\}$ ve $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq B$ ise $\bigcap_{x \in F} (x^{-1}.A) = \{\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup K : K \in P(X)\}$ sonsuz olur. Böylece $\beta S \setminus S, \beta S$ nin bir altgrubu değildir.

I, Λ iki küme olsun. $I \times \Lambda = \{(i, \lambda) : i \in I, \lambda \in \Lambda\}$ ve $I \times \Lambda$ de tanımlı “.” ikili işlemini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\forall (i, \lambda), (j, \mu) \in I \times \Lambda \text{ için } (i, \lambda).(j, \mu) = (i, \mu)$$

O zaman $(I \times \Lambda, .)$ bir yarıgruptur ve bu yarıgrup *rectangular band* olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.5 $S = I \times \Lambda$ bir rectangular band olsun. $\beta S \setminus S$, βS nin bir alt yarıgrubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul I ya da Λ den birinin (yalnızca birinin) sonlu olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\beta S \setminus S$, βS nin bir alt yarıgrubu olsun. I ve Λ nin sonsuz olduklarını kabul edelim. Sabit bir $i_0 \in I$ ve $\lambda_0 \in \Lambda$ için $A = \{(i_0, \lambda_0)\}$ ve $B = \{(i_0, \lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ olsun.

O zaman $\forall x \in B$ için $x^{-1}.A = \{(j, \lambda_0) : j \in I\}$ olur. Böylece $\forall F \in P_f(B)$ için $\bigcap_{x \in F} (x^{-1}.A) = \{(j, \lambda_0) : j \in I\}$ sonsuz olur. $\beta S \setminus S$, βS nin bir alt yarıgrubu değildir.

Bu bir çelişkidir dolayısıyla I ya da Λ den biri sonludur.

$(\Leftarrow)$ I sonlu olsun. O zaman Λ sonsuz olur, çünkü $S = I \times \Lambda$ sonsuzdur. $A \in P_f(S)$ ve $B^{\text{sonsuz}} \subseteq S$ olsun. $A = \{(i_k, \lambda_k) : i_k \in I, \lambda_k \in \Lambda, k = 1, 2, \dots, n\}$ ve $A_\Lambda = \{\lambda_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ olsun $x = (j, \lambda) \in B$ alalım.

i) I sonlu olduğundan bir $k = 1, 2, \dots, n$ için $j = i_k$ ise $x^{-1}.A = \{(i, \lambda_k) : i \in I, \lambda_k \in A_\Lambda\}$ sonlu olur.

ii) $\forall k = 1, 2, \dots, n$ için $j \neq i_k$ ise $x^{-1}.A = \emptyset$.

Eğer Λ sonlu ve I sonsuz ise $\exists F \in P_f(B)$ öyleki $\forall k = 1, 2, \dots, n$ için $x = (i, \lambda) \in F$ ve $i \neq i_k$ dir. Her $x \in F$ için $x^{-1}.A = \emptyset$ olduğundan $\bigcap_{x \in F} (x^{-1}.A) = \emptyset$ dir. Böylece

$\beta S \setminus S$, βS nin bir alt yarıgrubu olur.

X, Y iki yarıgrup olsun. $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ ye X ile Y nin *kartezyen çarpımı* denir. Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ için $(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$ olarak tanımlanan “.” işlemiyle $X \times Y$ bir yarıgruptur bu yarıgruba X ile Y nin *direkt çarpımı* denir.

Sonuç 4.1.6 S rectangular band olsun. $\beta S \setminus S$, βS nin bir alt yarıgrubu ise $\beta S \setminus S$ de rectangular band olur.

İspat: $S = I \times \Lambda$ rectangular band olsun. $i.j = i$ İşlemine göre $L = I$ ve $\lambda.\mu = \mu$ işlemine göre de $R = \Lambda$ olduğunu göz önüne alalım. Buradan L ve R nin sırayla sol ve sağ sıfır yarıgrup olduğu görülür. Ayrıca S ile $L \times R$ izomorfik olur. $\beta S \setminus S$, βS

nin bir altgrubu ise Teorem 4.1.5 den L ya da R sonludur. Eğer R sonlu ise $\beta S = \beta(L \times R) = \beta L \times R$ dir. Böylece $\beta S \setminus S = (\beta L \times R) \setminus (L \times R) = (\beta L \setminus L) \times R$ olur. Teorem 4.1.2 den, L sol sıfır yarıgrup olduğundan $\beta L \setminus L$ de sol sıfır yarıgruptur. Böylece $(\beta L \setminus L) \times R$ rectangular band olur. Benzer şekilde L sonlu ise $\beta S \setminus S = (L \times \beta R) \setminus (L \times R) = L \times (\beta R \setminus R)$ ve $\beta R \setminus R$ sağ sıfır yarıgrup olduğundan $\beta S \setminus S$ de rectangular band olur.

L sonsuz sol sıfır yarıgrup ve R sonsuz sağ sıfır yarıgrup ise $S = L \times R$ rectangular band olur. $\beta L \setminus L$ ve $\beta R \setminus R$ sırayla βL ve βR nin alt yarıgrubu olur. Ancak Teorem 4.1.4 den $\beta S \setminus S$, βS nin bir altgrubu değildir çünkü L ve R sonsuzdur.

Böylece X ve Y sonsuz yarıgruplar $\beta X \setminus X$ ve $\beta Y \setminus Y$ sırayla βX ve βY nin alt yarıgrupları olsa bile $\beta(X \times Y) \setminus (X \times Y)$ nin $\beta(X \times Y)$ nin alt yarıgrubu olması gerekmez.

Sonuç 4.1.7 X ve Y iki yarıgrup olsun. Eğer X (ya da Y) sonlu ve $\beta Y \setminus Y$ (ya da $\beta X \setminus X$) de βY (ya da βX) nin alt yarıgrubu ise $\beta(X \times Y) \setminus (X \times Y)$ de $\beta(X \times Y)$ nin alt yarıgrubudur.

KAYNAKLAR

- BUDAK, T., Işık, N. And Pym, J.S., *Subsemigrups of Stone-Cech Compactifications*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 116, (1994),99-118.
- GILLMAN, L. and Jerison, M., *Rings of Continuous Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1976
- HINDMAN, N., *The Ideal Structure of The Space ok K-Uniform Ultrafilters on a Discret Semigroup*, Rocky Mountain J. Math. 16 (1986), no.41 685-701.
- HOWIE, J.M., *Foundations of Semigroup Theory*, Clarendon Pres, Oxford, 1995.
- KUYUCU, F., *On subsemigroups of Stone-Cech Compactification for certain semigroups*, Math. Balkanica (N.S.) Vol.20, 2006, Fasc.1-2
- PAPAZYAN, T., *The Existence of Almost Translation Invariant Ultrafilters on Any Semigroup*, Proc. Amr. Math. Soc., 107, Number 4, 1989, 1133-1135.
- PORTER, J. R. and Woods, G., *Extension and Absolutes of Hausdorff Space*, Springer-Verlag New York Inc., 1988.
- PYM, J.S., *Semigroup in Stone-Cech Compactifications*, J. London Math. Soc.(2) 36 (1987), 421-428.
- STRAUS, D., *Semigroup Structures on $\beta\mathbb{N}$* , Semigroup Forum, 44 (1992), 238-244.
- WALKER, R.C.,*The Stone-Cech Compactification*, Springer-Verlag, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Osmaniye'nin Kadirli ilçesine bağlı Azaplı Köyünde doğmuşum. İlkokulu Azaplı Köyü İlkokulunda, Ortaokulu Adana İstiklal Ortaokulu ve liseyi Kadirli Lisesinde tamamladım. 1995 yılında Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandım. Lisans öğrenimimi 1999 yılında tamamladıktan sonra Şanlıurfa Ceylanpınar Lisesi'ne matematik öğretmeni olarak atandım. 2001 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım aynı zamanda Adana Şakirpaşa Lisesinde matematik öğretmeni olarak çalıştım. 2006 yılında yüksek lisans eğitimimi tamamladım. Halen Adana Yüreğir Lisesinde matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.