EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

n'den k çıkışlı Sistemlerin Güvenilirliği
(Reliability of k-out-of-n systems)

Engin GÜRSOY
Uygulamalı İstatistik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu:406.02.01
Sunuş Tarihi: 05.05.2006

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Serkan ERYILMAZ

Bornova-İZMİR

Engin GÜRSOY tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak sunulan "n'den k çıkışlı Sistemlerin Güvenilirliği" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 05.05.2006 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği /oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:	**İmza**
Jüri Başkanı : Doç. Dr. Serkan ERYILMAZ	**.....**
Raportör Üye: Yrd. Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ	**…….**
Üye : Yrd. Doç. Dr. Birol TOPÇU	**.....**

ÖZET

n'den k çıkışlı Sistemlerin Güvenirliği

GÜRSOY,Engin

Yüksek Lisans Tezi, İstatistik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Serkan ERYILMAZ

Mayıs 2006, 27 sayfa

n'den k çıkışlı sistemler ve bu sistemlerin genelleşmeleri güvenilirlik ve mühendislikte özel bir öneme sahip olup bu sistemlerin güvenilirlik özellikleri literatürde kapsamlı bir şekilde incelenmektedir.

Bu çalışmada; n'den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik elemanları sunulmuş olup , n sayıda bileşenden art arda en az k tanesinin çalışması durumunda çalışabilen ve ardıl n'den k çıkışlı sistem olarak adlandırılan sistemler üzerinde durulmuştur.

Anahtar sözcükler: Güvenilirlik analizi, ortalama yaşam süresi,
stokastik sıralama, yapı fonksiyonu,
yaşam süresi dağılımı.

ABSTRACT

Reliability of k-out-of-n Systems

GÜRSOY,Engin

MSc in Statistics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Serkan ERYILMAZ

May 2006, 27 pages

k-out-of-n systems and their generalizations are of special importance in reliability and engineering. The reliability properties of such systems are widely investigated in the literature.

In this study , the reliability tools of k-out-of-n systems are presented. A consecutive k-out-of-n system, consists of n linearly ordered components, function if and only if k consecutive components, is studied.

Key words: Expected lifetime, Lifetime distribution, Relability analysis, Stochastic ordering, Structure function.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım süresince yardımları ve desteklerini eksik etmeyen Ege Üniversitesi İstatistik Bölümü Öğretim görevlilerine;

Bilgisini paylaşmak ve aktarmak yönündeki isteği ve bana sağladığı motivasyon ile çalışmalarıma büyük destek olan Sayın Doç. Dr. Serkan ERYILMAZ' a (İzmir Ekonomi Üniversitesi Matematik Bölümü) en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo **Sayfa**

1. GİRİŞ

Güvenilirlik analizi; temel olarak, çeşitli yapılarda tanımlanan sistemlerin davranışlarının ve özelliklerinin incelenmesini içermektedir.

İşleyişi bakımından rasgelelik içeren sistemlerin incelenmesinde olasılık ve istatistik teorisinin araçları kullanılmaktadır. Birçok durumda, sistem belli bir takım bileşenler tarafından yönetilmekte olup sistemin işler durumda olup olmaması bu bileşenlerden bir kısmının ya da tamamının işlevde olmasına bağlıdır. İstatistiki güvenilirlik analizinde amaç stokastik (rasgelelik içeren) bir sistemin karakteristiklerini (güvenilirlik, yaşam zamanı vb.) türetmek ve optimal performans ile çalışmasını sağlayacak tasarımı kurmaktır. Sistem teorisinde, bilinen en basit iki sistem seri ve paralel sistemlerdir. Herhangi bir seri sistemin çalışması için sistemi oluşturan tüm bileşenlerin çalışır durumda olması gerekirken, paralel bir sistemde en az bir bileşenin çalışması sistemin işlevde olması için yeterlidir.

Seri ve paralel sistemlerin daha genel bir hali olan *n'den k çıkışlı bir sistemin* çalışabilmesi için n bileşenden en az k $(1 \le k \le n)$ tanesinin çalışır durumda olması gerekmektedir. Bu tür sistemlerle günlük hayatta çok sık karşılaşılmaktadır. Örneğin tekerlekleri bileşen olarak düşünülebilecek bir otomobili *5'den 4 çıkışlı* bir sistem olarak ele almak mümkündür. Literatürde, *n'den k çıkışlı* sistemlere ilişkin yapılmış birçok çalışma bulunmaktadır. Bknz. Boland ve Proschan (1983), Risse (1987), Park (1988), Arulmozhi (2002).

Bazı durumlarda, ilgili sistemin çalışabilmesi için *ardıl* olarak *k* bileşenin çalışması gerekmektedir. Bu tür sistemler *ardıl n'den k çıkışlı* olarak adlandırılmaktadır. *Ardıl n'den k çıkışlı* sistem kavramı ilk kez Chiang ve Niu (1981) tarafından önerilmiş olup daha sonra birçok araştırmacı ilgili konu üzerinde çalışmışlardır.

2. GÜVENİLİRLİK ELEMANLARI

n bileşenden oluşan stokastik bir sistemde $X_1, X_2, ..., X_n$ ile bileşenlerin durumu ifade edilsin:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{i nci bileşen çalışıyor} \\ 0, & \text{i nci bileşen çalışmıyor} \end{cases}$$

Sistemin durumunu ifade eden ve

$$\phi(X_1, X_2, ..., X_n) = \begin{cases} 1, & \text{sistem çalışıyor} \\ 0, & \text{sistem çalışmıyor} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan iki değerli $\phi(X_1, X_2, ..., X_n)$ fonksiyonu yapı fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır. $\phi(X_1, X_2, ..., X_n)$ fonksiyonu ilgili sistemin işleyişinin modellenmesi aşamasında kullanılan en önemli araçtır.

Bu tanımlar ışığında n bileşenden oluşan seri sistemin yapı fonksiyonu:

$$\phi(X_1, X_2, ..., X_n) = \min(X_1, X_2, ..., X_n) = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

iken paralel sistemin yapı fonksiyonu:

$$\phi(X_1, X_2, ..., X_n) = \max(X_1, X_2, ..., X_n) = \coprod_{i=1}^{n} X_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i)$$

şeklinde olacaktır.

Tanım 2.1.

n bileşenden oluşan bir sistemin çalışır durumda olabilmesi için bileşenlerden en az *″k″* tanesinin işlevde olması gerekiyorsa bu tür sistemler ***n ‘ den k çıkışlı sistem*** olarak adlandırılmaktadır.

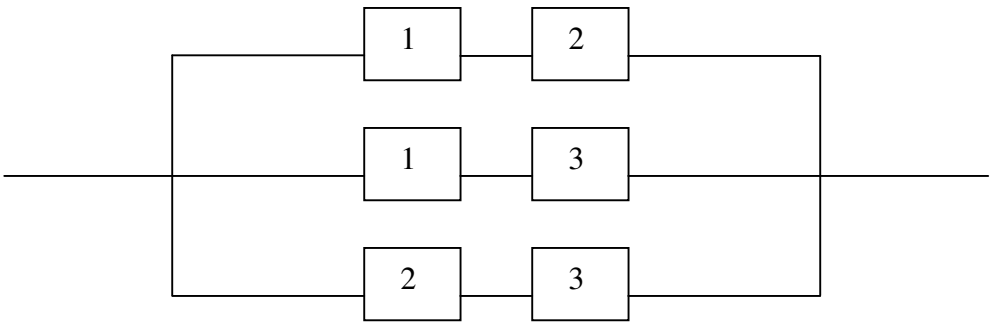
n ‘ den k çıkışlı bir sistemin yapı fonksiyonu :

$$\phi(X_1,...,X_n)=\begin{cases}1, & \sum_{i=1}^{n} X_i \geq k \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} X_i < k\end{cases}$$

şeklindedir.

Açıkça görüleceği üzere *k=1* için paralel , *k=n* için seri sistem elde edilmektedir.

3 adet motora sahip bir uçağın en az 2 motorunun çalışması durumunda uçak çalışıyor ise ilgili sistem 3’den 2 çıkışlı bir sistem olacaktır. 3’den 2 çıkışlı bir sistemi aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.



Şekil 2.1 *3’ den 2 çıkışlı sistem*

2.1. Sistem Güvenilirliği

$\phi(\underset{\sim}{X})$ yapı fonksiyonu ile tanımlanan bir sistemin güvenilirliği

$$R = E\phi(\underset{\sim}{X}) = P\{\phi(\underset{\sim}{X}) = 1\} \tag{2.1}$$

ile tanımlanmaktadır. Burada E, beklenen değer operatörünü ifade etmektedir.

Sistemi oluşturan bileşenler birbirinden bağımsız olup

i nci bileşenin güvenilirliğinin

$$E(X_i) = P\{X_i = 1\} = p \quad , \qquad i = 1,2,...,n$$

olduğu varsayılsın.

Bu durumda; *n* bileşenden oluşan seri bir sistemin güvenilirliği:

$$h_1(p) = p^n \tag{2.2}$$

paralel sistemin güvenilirliği:

$$h_2(p) = 1 - (1-p)^n \tag{2.3}$$

ve *n ' den k çıkışlı* bir sistemin güvenilirliği:

$$h_3(p) = P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \tag{2.4}$$

şeklinde olacaktır (Barlow ve Proschan, 1975).

Yukarıdaki sonuçlar sistemi oluşturan bileşenlerin birbirinden bağımsız ve aynı güvenilirliğe sahip olmaları durumunda geçerlidir.

Örnek 2.1 :

3 'den 2 çıkışlı bir sistemin güvenilirlik fonksiyonu:

$$\begin{aligned} h(p) &= P\{X_1=1, X_2=1, X_3=0\} + P\{X_1=1, X_2=0, X_3=1\} \\ &\quad + P\{X_1=0, X_2=1, X_3=1\} + P\{X_1=1, X_2=1, X_3=1\} \\ &= P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}P\{X_3=0\} + P\{X_1=1\}P\{X_2=0\}P\{X_3=1\} \\ &\quad + P\{X_1=0\}P\{X_2=1\}P\{X_3=1\} + P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}P\{X_3=1\} \\ &= pp(1-p) + p(1-p)p + (1-p)pp + ppp \\ &= 3p^2(1-p) + p^3. \end{aligned}$$

Sistemi oluşturan bileşenlerin birbirinden bağımsız ve

$$E(X_i) = P\{X_i = 1\} = p_i \ , \qquad i = 1,2,...,n$$

gibi farklı güvenilirliklere sahip olmaları durumunda seri ve paralel sistemlerin güvenilirlik fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi olacaktır.

$$h_1(p_1, p_2, ..., p_n) = p_1 p_2 ... p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} h_2(p_1, p_2, ..., p_n) &= 1 - (1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n) \\ &= \coprod_{i=1}^{n} p_i \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2. Sistemlerin Yaşam Süreleri

$T_1, T_2, ..., T_n$ ile n bileşene ait yaşam süreleri gösterilsin. Farz edelim ki $T_1, T_2, ..., T_n$ birbirinden bağımsız ve aynı $F(t) = P\{T_i \le t\}$, $i = 1,2,...,n$ dağılımına sahiptir. Bu durumda , seri bir sistemin yaşam süresi:

$$T_{1:n} = \min(T_1, T_2, ..., T_n)$$

olup seri sistemin yaşam süresinin dağılımı:

$$F_{1:n}(t) = 1 - (1 - F(t))^n , \tag{2.7}$$

paralel bir sistemin yaşam süresi:

$$T_{n:n} = \max(T_1, T_2, ..., T_n)$$

olup yaşam süresinin dağılımı

$$F_{n:n}(t) = F(t)^n \tag{2.8}$$

olacaktır.

n ' den k çıkışlı bir sistemin yaşam süresi $T_{n-k+1:n}$ ile ifade edilmekte olup bu sisteme ait yaşam süresinin dağılımı

$$F_{n-k+1:n}(t) = \frac{1}{B(n-k+1,k)} \int_0^t (F(u))^{n-k} (1 - F(u))^{k-1} dF(u) \tag{2.9}$$

ile verilmektedir. Burada $B(a,b)$ ile Beta fonksiyonu ifade edilmektedir.

Genel olarak $T_1, T_2, ..., T_n$ ile n bileşene ait yaşam süreleri gösterilmek üzere

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & , T_i > t \\ 0 & , T_i \leq t \end{cases} \quad , \; i = 1, 2, ..., \; n \tag{2.10}$$

olarak tanımlansın. $X_i(t)$, $i$nci bileşen t anında yaşıyor ise "1" diğer durumda "0" değerini almaktadır. Bu durumda T ile bir sistemin yaşam süresi gösterilecek olursa, sistemin t anında yaşıyor olması olasılığı

$$P\{T > t\} = h\left(\overline{F}(t)\right) \tag{2.11}$$

olacaktır.

Burada $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$.

(2.11) eşitliğinden hareketle *n'den k çıkışlı* bir sistemin yaşam süresinin dağılımı için (2.9) formülüne alternatif olan aşağıdaki formülü elde etmek mümkündür.

$$P\{T_{n-k+1:n} \leq t\} = 1 - P\{T_{n-k+1:n} > t\} = 1 - h_3\left(\overline{F}(t)\right) = 1 - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left(\overline{F}(t)\right)^j \left(F(t)\right)^{n-j}$$

3. ARDIL n' DEN k ÇIKIŞLI SİSTEMLER

Tanım 3.1 :

n bileşenden oluşan bir sistemin çalışır durumda olabilmesi için bileşenlerden ardıl olarak en az *"k"* tanesinin işlevde olması gerekiyorsa bu tür sistem ***ardıl n 'den k çıkışlı sistem*** olarak adlandırılır.

Örnek 3.1 :

"1" ile bileşenin çalışır durumda , "0" ile bozulmuş olduğu düşünülecek olursa durumları aşağıdaki gibi verilen $n = 5$ elemanlı bir sistemi göz önüne alalım.

1 1 0 1 0 0

Eğer bu sistem *5 ' den 3 çıkışlı* bir yapıda ise sistem çalışmakta, *ardıl 5 'den 3 çıkışlı* bir yapıda ise çalışmamaktadır. Çünkü *ardıl 5 'den 3 çıkışlı* bir sistemin çalışır durumda olabilmesi için üst üste en az 3 bileşenin çalışır durumda olması gerekmektedir.

Yukarıda tanımı verilen sistem literatürde *ardıl n'den k çıkışlı*: G sistem olarak bilinmektedir. İlgili sistemin bu şekilde isimlendirilmesi, sistemin çalışma prensibi üzerine kurulmuş olmasından kaynaklanmaktadır. Bir de *ardıl n'den k çıkışlı*: F sistem olarak adlandırılan sistemler mevcuttur.

Böyle bir sistem; bozulma prensibi üzerine kurulmuş olup *n* bileşenden oluşan sistemin bozulması için ard arda *k* adet bileşenin bozulmuş olması gerekmektedir. Bu çalışmada *ardıl n'den k çıkışlı*: G sistemler üzerinde durulmuştur.

Ardıl n'den k çıkışlı sistemler ve bu sistemlerin genel halleri ile mühendislik uygulamalarında sıklıkla karşılaşılmaktadır. Örneğin *n* adet bağlantı noktasından oluşan bir mühendislik yapısının (petrol boru hattı) çalışabilmesi için *ardıl k* adet bağlantı noktasının sağlam durumda olması ilgili sistemin *ardıl n'den k çıkışlı* yapıda modellenmesini gerektirir.

Birçok sistemin analiz edilmesi sürecinde olduğu gibi; *ardıl n'den k çıkışlı* sistemlerin analizi de temel olarak aşağıdaki çalışmaların yapılmasını kapsamaktadır:

- Sistemi karakterize eden yapı fonksiyonunun ortaya konulması
- Sisteme ilişkin güvenilirlik fonksiyonunun elde edilmesi
- Sistemin yaşam süresinin dağılımının elde edilmesi ve bu dağılım yardımıyla sistemin ortalama yaşam süresinin belirlenmesi

3.1. *Ardıl n'den k Çıkışlı* Sistemin Yapı ve Güvenilirlik Fonksiyonu

Yukarıda tanımlanan *ardıl n'den k çıkışlı sistemin* yapı fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmektedir.

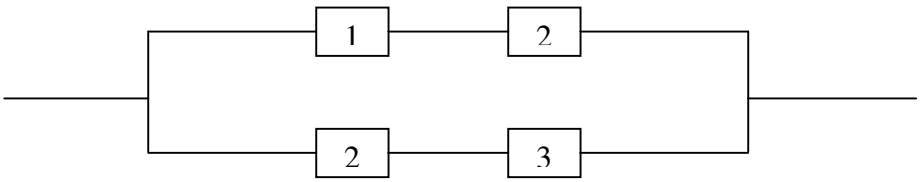
$$\phi(X_1, X_2, ..., X_n) = \coprod_{j=1}^{n-k+1} \prod_{i=j}^{j+k-1} X_i$$
$$= \max(\min(X_1, ..., X_k), \min(X_2, ...X_{k+1}), ..., \min(X_{n-k+1}, ..., X_n)) \quad (3.1)$$

Örnek 3.2:

Ardıl 3'den 2 çıkışlı bir sistemin yapı fonksiyonu

$$\phi(X_1, X_2, X_3) = \max(\min(X_1, X_2), \min(X_2, X_3))$$

şeklinde olup bu sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.



Şekil.3.1. *Ardıl 3'den 2 çıkışlı sistem*

Örnek 3.3 :

Ardıl 3 'den 2 çıkışlı bir sistemin güvenilirlik fonksiyonu:

$$\begin{aligned} h(p) &= P\{X_1=1,X_2=1,X_3=0\}+P\{X_1=0,X_2=1,X_3=1\}+P\{X_1=1,X_2=1,X_3=1\} \\ &= P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}P\{X_3=0\}+P\{X_1=0\}P\{X_2=1\}P\{X_3=1\} \\ &+ P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}P\{X_3=1\} \\ &= pp(1-p)+(1-p)pp+p^3 \\ &= 2p^2(1-p)+p^3 \end{aligned}$$

olacaktır.

Ardıl n'den k çıkışlı sistemin güvenilirlik fonksiyonu, $X_1, X_2, ...X_n$ iki değerli dizisi içerisindeki en uzun başarı *"(1)"* tekrarını gösteren L_n rasgele değişkeni ile karakterize edilmektedir.Örneğin ;

10111011

şeklinde verilen $n=8$ elemanlı dizide en uzun tekrar rasgele değişkeni L_8 'in aldığı değer 3'tür.

Daha açık olarak ilgili güvenilirlik fonksiyonu

$$h_{n,k}(p) = E\phi(X_1,...X_n) = P\{L_n \geq k\} \qquad (3.2)$$

olarak ifade edilir.

Sistemi oluşturan bileşenlerin birbirinden bağımsız ve aynı güvenilirliğe sahip olmaları durumunda *ardıl n'den k çıkışlı* sistemin güvenilirlik fonksiyonu

$$h_{n,k}(p)=1-\sum_{y=\left[\frac{n}{k}\right]}^{n}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-y}{k}\right]}(-1)^m\binom{y+1}{m}\binom{n-mk}{y}p^{n-y}q^{y} \qquad (3.3)$$

ile verilmektedir(Balakrishnan ve Koutras, 2002) . Burada $[a]$, a'nın tam kısmını göstermektedir.

$2k \geq n$ olması durumunda (3.3) ile verilen $h_{n,k}(p)$ için daha sade bir formül elde etmek mümkündür. Bu durumda

$$h(p)=P\{L_n \geq k\}=(n-k+1)p^k-(n-k)p^{k+1} \quad , \; 2k \geq n \qquad (3.4)$$

olacaktır, Tong (1985).

Eryılmaz (2005, 2006) , iki değerli bir rasgele dizi üzerinde tanımlanan L_n en uzun tekrar istatistiği aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

$$L_n=\max_{1\leq i\leq n}\eta_i=\max(\eta_1,\eta_2,...\eta_n) \qquad 1\leq i\leq n \qquad (3.5)$$

olup burada η_i rasgele değişkeni ile $X_1, X_2, ..., X_n$ dizisi içerisinde *i nci* adımdaki (denemedeki) başarı tekrarının uzunluğu gösterilmektedir. $\{\eta_i, i\leq 1\}$ rasgele değişkenler dizisi Markov özelliğine sahip olup geçiş olasılıkları aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$P\{\eta_i=j+1|\eta_{i-1}=j\}=P\{X_i=1\}=p \quad , \quad j\geq 0$$

$$P\{\eta_i=0|\eta_{i-1}=j\}=P\{X_i=0\}=1-p \quad , \quad j\geq 0$$

(3.5) eşitliğinden yararlanarak *ardıl n'den k çıkışlı sistemin* güvenilirlik fonksiyonunu hesaplamak ve bu fonksiyona ilişkin çeşitli alt ve üst sınırlar elde etmek mümkündür.

3.2. *Ardıl n'den k Çıkışlı Sistemin* Yaşam Süresi

$T_1, T_2, ..., T_n$ ile sistemi oluşturan bileşenlerin yaşam süreleri gösterilmek üzere *ardıl n'den k çıkışlı sistemin* yaşam süresi

$$T_{L:k|n} = \max\left(\min(T_1,...,T_k), \min(T_2,...,T_{k+1}),..., \min(T_{n-k+1},...T_n)\right) \tag{3.6}$$

ile ifade edilebilir.

$T_1, T_2, ..., T_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve aynı $F(t) = P\{T_i \le t\}$ $i = 1,2,...,n$ dağılımına sahip olsunlar. Bu durumda (2.11) eşitliğinden yararlanarak *ardıl n'den k çıkışlı bir sistemin* yaşam süresinin dağılımı

$$G_{n,k}(t) = 1 - h_{n,k}\left(\overline{F}(t)\right)$$

$$= \sum_{y=\lfloor n|k \rfloor}^{n} \sum_{m=0}^{\left\lceil \frac{n-y}{k} \right\rceil} (-1)^m \binom{y+1}{m} \binom{n-mk}{y} \overline{F}^{ny}(t) F^{y}(t) \ , \ 1 \le k \le n \tag{3.7}$$

olacaktır.

Aki ve Hirono (1996) ‘ da ispat edildiği üzere $1 \le k \le n$ için *ardıl n’den k çıkışlı* bir sistemin yaşam süresi dağılımını aşağıdaki gibi formüle etmek mümkündür.

$$G_{n,k}(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{n-i+1} F_{i:n}(t) \tag{3.8}$$

olup burada

$$w_i = \frac{r_{ik}}{n(n-1)...(n-i+1)} \quad ,$$

$$r_{mk} = (n-m+1)((m-1)!)N_k(n,m-1) - m!N_k(n,m)$$

$$N_k(n,m) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} (-1)^i \binom{n-m+1}{i} \binom{n-ki}{n-m} \tag{3.9}$$

(3.8) eşitliğine göre *ardıl n’den k çıkışlı* bir sistemin yaşam süresinin dağılımı sıra istatistiklerinin dağılımlarının lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilmektedir

(3.4) formülünden hareketle $2k \ge n$ için ilgili yaşam süresi dağılımı

$$G_{n,k}(t) = 1 - (n-k+1)\overline{F}^{k}(t) + (n-k)\overline{F}^{k+1}(t) \quad , \qquad 2k \ge n \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilebilir.

Örnek 3.4. :

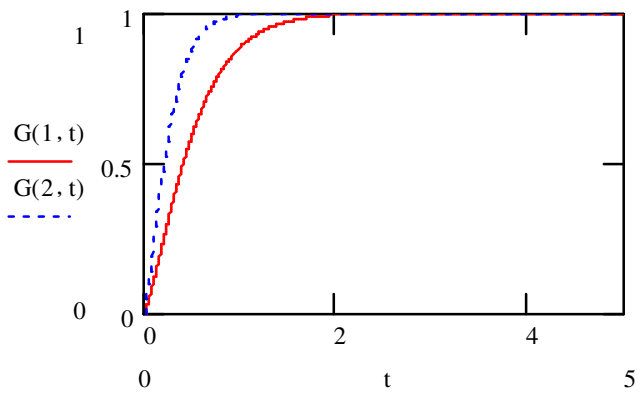
Sistemi oluşturan bileşenlerin yaşam sürelerinin dağılımlarının

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}\ , \qquad t>0$$

şeklinde verilen üstel dağılıma sahip olmaları durumunda *ardıl n'den k çıkışlı* bir sistemin $2k \geq n$ varsayımı altında yaşam süresinin dağılımı:

$$G_{n,k}(t)=1-(n-k+1)e^{-\lambda kt}+(n-k)e^{-\lambda(k+1)t}\ , \qquad t\geq 0.$$

Şekil 3.1 de sistemi oluşturan bileşenlerin $\lambda=1$ ve $\lambda=2$ parametreli üstel dağılıma sahip olmaları durumunda *ardıl 5'den 3 çıkışlı* sistemin yaşam süresi dağılımlarının grafikleri sunulmuştur.



Şekil 3.1. *Ardıl 5'den 3 çıkışlı* sistemin yaşam süresinin dağılımı

Örnek 3.5 :

Sistemi oluşturan bileşenlerin yaşam sürelerinin

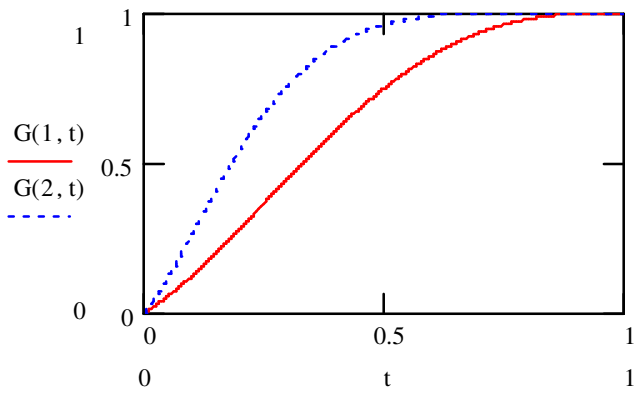
$$F(t)=1-(1-t)^{\theta} \quad , \quad 0<t<1 \quad , \ \theta>0 \tag{3.11}$$

ile verilen dağılıma sahip olmaları durumunda

$$G_{n,k}(t)=1-(n-k+1)(1-t)^{\theta k}+(n-k)(1-t)^{\theta(k+1)}$$

olacaktır.

Şekil 3.2 de sistemi oluşturan bileşenlerin $\theta=1$ ve $\theta=2$ parametreli ile (3.11) ile verilen dağılıma sahip olmaları durumunda *ardıl 5'den 3 çıkışlı* sistemin yaşam süresi dağılımlarının grafikleri sunulmuştur.



Şekil 3.2. *Ardıl 5'den 3 çıkışlı sistemin* yaşam süresinin dağılımı

Teorem 3.1:

$2k \geq n$ için *ardıl n'den k çıkışlı* bir sistemin ortalama yaşam süresi

$$E(T_{L:k/n}) = (n-k+1)E(T_{1:k}) - (n-k)E(T_{1:k+1}) \qquad (3.12)$$

olup burada $E(T_{1:k})$, k bileşenden oluşan seri sistemin ortalama yaşam süresine karşılık gelmektedir.

İspat :

(3.10) formülünden yararlanarak

$$P\{T_{L:k/n} > t\} = 1 - G_{n,k}(t)$$
$$= (n-k+1)\overline{F}^{k}(t) - (n-k)\overline{F}^{k+1}(t)$$

olarak bulunur.

$$E(T_{L:k|n}) = \int_{o}^{\infty} P\{T_{L:k|n} > t\}dt$$

$$= (n-k+1)\int_{0}^{\infty} \overline{F}^{k}(t)dt - (n-k)\int_{0}^{\infty} \overline{F}^{k+1}(t)dt \ ,$$

$E(T_{1:k}) = \int_{0}^{\infty} P\{T_{1:k} > t\}dt$ olduğundan

$$E(T_{L:k/n}) = (n-k+1)E(T_{1:k}) - (n-k)E(T_{1:k+1})$$

Örnek 3.6. :

$F(t)=1-e^{-\lambda t}$, $t>0$ olması durumunda $E(T_{1:k})=1/\lambda k$ olacağından

$$E(T_{L:k/n})=(n-k+1)\frac{1}{\lambda\, k}-(n-k)\frac{1}{\lambda(k+1)} \tag{3.13}$$

Tablo 3.1. de n,k *ve* λ 'nın farklı değerleri için (3.13) ile verilen ortalama yaşam süresine ilişkin sayısal değerler sunulmuştur.

Tablo 3.1 ***Ardıl n'den k çıkışlı*** **sistemin ortalama yaşam süresi**

n	**k**	λ	$E(T_{L:k/n})$
3	2	0.1	6.6667
3	2	0.5	1.3333
3	2	1	0.6667
4	2	0.1	8.3333
4	2	0.5	1.6667
4	2	1	0.8333
5	3	0.1	5.0000
5	3	0.5	1.0000
5	3	1	0.5000
5	4	0.1	3.0000
5	4	0.5	0.6000
5	4	1	0.3000
8	4	0.1	4.5000
8	4	0.5	0.9000
8	4	1	0.4500

Yukarıdaki tablodan aşağıdaki sonuçları elde etmek mümkündür:

Sonuç 3.1.

(i) $E(T_{L:k/n}) \geq E(T_{L:k+1/n})$

(ii) $E(T_{L:k/n+1}) \geq E(T_{L:k/n})$

Yukarıdaki sonuçtan açıkça görüldüğü üzere daha fazla sayıda bileşenden oluşan *ardıl* bir sistemin ortalama yaşam süresi daha büyük olmaktadır.

3.3. *Ardıl n'den k Çıkışlı Sistemlerin* Karşılaştırılması

Güvenilirlik analizinde ele alınan en önemli konulardan birisi sistemlerin stokastik karşılaştırmasıdır. X *ve* Y ile birbirinden bağımsız iki sisteme ait yaşam süreleri gösterilmek üzere

$$F(x) = P\{X \leq x\} \qquad \overline{F}(x) = P\{X > x\}$$
$$G(x) = P\{Y \leq x\} \qquad \overline{G}(x) = P\{Y > x\}$$

olarak tanımlansın

$$\overline{F}(x) \leq \overline{G}(x) \quad \forall x$$

ise X rasgele yaşam süresinin , Y rasgele yaşam süresinden stokastik olarak daha küçük olduğu söylenir ve durum $X \underset{st}{\leq} Y$ ile ifade edilir.

Birbirinden bağımsız olarak yürütülen iki sistemi göz önüne alalım ve bu sistemleri yöneten bileşenlerin birbirinden bağımsız oldukları varsayılsın. $T_1, T_2, ..., T_n$ *ve* $Z_1, Z_2, ...Z_n$ ile birinci ve ikinci sistemi yöneten bileşenlere ait yaşam süreleri gösterilmek üzere

$$F(t) = P\{T_i \le t\}$$
$$G(t) = P\{Z_i \le t\}, \qquad i = 1,2,...,n$$

olsun.

Teorem 3.2. (Singh ve Vijayasree , 1991)

$T \underset{st}{\le} Z$ olması durumunda

$$T_{i:n} \underset{st}{\le} Z_{i:n}, \qquad 1 \le i \le n.$$

n'den k çıkışlı bir sistemin yaşam süresi $T_{n-k+1:n}$ ile ifade edildiğinden, yukarıdaki teoremden yararlanarak, $T \underset{st}{\le} Z$ olması durumunda $T_{n-k+1:n} \underset{st}{\le} Z_{n-k+1:n}$ olduğunu görmek mümkündür.

$T_{L:k/n}$ *ve* $Z_{L:k/n}$ ile sırasıyla $T_1, T_2, ..., T_n$ *ve* $Z_1, Z_2, ...Z_n$ bileşenleri tarafından yürütülen *ardıl n'den k çıkışlı* sistemlerin yaşam süreleri gösterilsin.

Lemma : $T \underset{st}{\le} Z$ olması durumunda

$$T_{L:k/n} \underset{st}{\le} Z_{L:k/n}$$

olur.

İspat : $T_{L:k/n}$ *ve* $Z_{L:k/n}$ yaşam sürelerine sahip sistemlerin yaşam fonksiyonları (3.8) formülünden yararlanarak sırasıyla

$$P\{T_{L:k/n} > t\} = \sum_{i=1}^{n} w_{n-i+1} \overline{F}_{i:n}(t)$$
$$P\{Z_{L:k/n} > t\} = \sum_{i=1}^{n} w_{n-i+1} \overline{G}_{i:n}(t)$$

olarak ifade edilir.

Bir önceki teoremden bilindiği üzere $T \underset{st}{\leq} Z$ olması durumunda $T_{i:n} \underset{st}{\leq} Z_{i:n}$ olup bu da $\overline{F}_{i:n}(t) \leq \overline{G}_{i:n}(t)$, $\forall\ i = 1,2,...,n$ olduğu anlamına gelmektedir.

$$P\{T_{L:k/n} > t\} - P\{Z_{L:k/n} > t\} = \sum_{i=1}^{n} w_{n-i+1}\left(\overline{F}_{i:n}(t) - \overline{G}_{i:n}(t)\right)$$
$$\leq 0 \ \ olup$$

$T_{L:k/n} \underset{st}{\leq} Z_{L:k/n}$ elde edilir.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında; güvenilirlik analizinde en sık karşılaşılan sistemlerden birisi olan *ardıl n'den k çıkışlı sistemler* incelenmiştir. Ele alınan bu sisteme ilişkin yapı ve güvenilirlik fonksiyonları çeşitli örneklerle açıklanmış, yaşam süresi dağılımına ilişkin bazı formüller sunulmuştur. $2k \geq n$ durumu için bu sistemin ortalama yaşam süresine ilişkin oldukça kullanışlı bir formül türetilmiş olup bu karakteristik bazı yaşam zamanı dağılımları için örneklenmiştir.

Sistemlerin stokastik sıralamaları güvenilirlik teorisindeki en temel konulardan birisidir. Bu bağlamda farklı yaşam süresi dağılımına sahip aynı yapıdaki iki bağımsız sistemin karşılaştırılması oldukça önemlidir. Çalışmada birbirinden bağımsız iki *ardıl n'den k çıkışlı sistemin* yaşam sürelerinin stokastik sıralamasına ilişkin bir sonuç da elde edilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aki, S. ve Hirano, K. , 1996 , Lifetime distribution and estimation problems of consecutive k-out-of n: F systems, Ann. Inst. Statist. Math., 48,1, 185-199

Aki, S. ve Hirano, K. , 1997, "Lifetime distributions of consecutive k-out-of n: F systems", Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 30, 555-562.

Arulmozhi, G. 2002, Exact equation and an algorithm for reliability evaluation of k-out-of : G system, Reliab Engng Syst Safety , 78 ,87 – 91.

Balakrishnan, N. ve Koutras, M. , 2002, "Runs and Scans with Applications", John Wiley&Sons.

Barlow, R. ve Proschan, F. ,1975 "Statistical Theory of Reliability and Life Testing", Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Boland , PJ. ve Proschan , F. , 1983 , The reliability of k-out-of- n systems, Annals of Probability , 11 (3) , 760-764

Chiang , D. ve Niu , S.C., 1981, Reliabilty of consecutive k-out-of-n system, IEEE Trans. Reliabil. Vol. R-30, pp 87-89.

Eryılmaz, S. ,2005, "On the distribution and expectation of success runs in nonhomogeneous Markov dependent trials", Statistical Papers, 46, 1, 117-128.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Eryılmaz, S. ,2006, "Some results associated with the longest run statistic in a sequence of Markov dependent trials", Applied Mathematics &Computation, 175,119-130.

Park , DH., 1988 , The reliability of k-out-of-n systems when k compenents are equally reliable, Statistics&Probability Letters , 7 (3) , 175-178.

Risse , T. ,1987 , On the evaluation of the reliability k-out-of-n systems, IEEE Transactions on Reliability , 36 (4) , 433-435.

Singh, H. ve Vijayasree, G., 1991, ″Preservation of partial orderings under the formation of k-out-of-n : G systems of i.i.d. components″ , IEEE Transactions on Reliability, 40, 3, 273-276.

Tang ,Y.L. ,1985 , A rearrangement inequality for the longest with an application to network reliability , J. Appl.Probab. , 22, 386-393.

Xie, M. ve Lai, C.D. , 1998 "On reliability bounds via conditional inequalities", Journal of Applied Probability, 35, 104-114.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında İzmit'te doğan Engin GÜRSOY ilk ve orta öğrenimini Gölcük'te tamamlamıştır. 1991 yılında Kuleli Askeri Lisesi'nden, 1995 yılında Kara Harp Okuldan mezun olmuştur. Türk Silahlı Kuvvetleri bünyesinde çeşitli yerlerde görev yapmasına müteakip 2002 yılından bu yana İzmir'de görevini sürdürmektedir. 2003 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır.