

YARI-RIEMANN MANIFOLDUNDA LIGHTLIKE
HİPERYÜZEYLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Erol YAŞAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA 2006

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARI-RIEMANN MANİFOLDUNDA LIGHTLIKE
HİPERYÜZEYLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

EROL YAŞAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA, 2006

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Adil KILIÇ
Üye : Prof. Dr. Ali KÖKÇE
Üye : Prof. Dr. Rıdvan EZENTAS
Üye : Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN (Danışman)
Üye : Doç. Dr. Cengizhan MURATHAN

ONAY

Bu tez ... / ... / 2006 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

... / ... /2006

S.D.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Çiğdem SAVAŞKAN

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Yarı-Öklid Uzaylar.....	3
2.2. Yarı-Riemann Manifoldlar.....	6
2.3. Yarı-Riemann Manifoldların Lightlike Altmanifoldları.....	10
3. YARI-RİEMANN MANİFOLDUNUN LİGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİNİN GEOMETRİSİ.....	16
3.1. Lightlike Hiperyüzeyler.....	16
3.2 Lightlike Hiperyüzeylerin Geometrisinin Transversal Vektör Alanına Göre İfadesi.....	23
4.YARI-SİMETRİK METRİK VE NON-METRİK KONEKSİYONLU YARI-RİEMANN MANİFOLDUNUN LİGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİ..	29
4.1. Yarı-Simetrik Metrik Koneksiyonlu Yarı-Riemann Manifoldunun Lightlike Hiperyüzeyi.....	29
4.2. Gauss ve Codazzinin Konformal Denklemleri.....	36
4.3. Yarı-Simetrik Koneksiyonlu Lightlike Hiperyüzeylerin Ricci Eğriliği.....	39
4.4. Yarı-Simetrik Non-Metrik Koneksiyonlu Yarı-Riemann Manifoldunun Lightlike Hiperyüzeyi.....	43
5. YARI-SİMETRİK METRİK KONEKSİYONLU YARI-RİEMANN MANİFOLDUNUN LİGHTLIKE ALTMANİFOLDLARI.....	51
5.1. Yarı-Simetrik Koneksiyonlu Coisotropic Altmanifold.....	51
5.2. Yarı-Simetrik Koneksiyonlu Lightlike Altmanifold... ..	62
6. KAYNAKLAR.....	68
ÖZGEÇMİŞ.....	71

ÖZET

(Yarı-Riemann Manifoldunda Lightlike Hiperyüzeylerin Geometrisi Üzerine)

Tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konunun tarihi gelişimi ifade edildi.

İkinci bölümde, yarı-Öklid uzay, yarı-Riemann manifoldlar, yarı-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldları ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, lightlike hiperyüzeyler tanımlanarak, lightlike hiperyüzeylerle ilgili teoremler verildi. Daha sonra, R_0^{m+2} Öklid uzayının Riemann hiperyüzeyinin ikinci temel formu ile R_ν^{m+2} yarı-Öklid uzayın lightlike hiperyüzeyinin ikinci temel formu arasında bir bağıntı elde edildi. Bu bağıntı kullanılarak Riemann manifoldundaki hiperyüzeyler için iyi bilinen Euler ve Meusnier teoremlerinin lightlike hiperyüzeylerdeki karşılıkları elde edildi.

Dördüncü bölümde, yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyinin geometrisi ele alındı. Öncelikle, lightlike hiperyüzey üzerine indirgenen koneksiyonun, yarı-simetrik olduğu fakat metrik olmadığı gösterildi. Böylece bu koneksiyon göz önüne alınarak Gauss, Weingarten formülleri, şekil operatörü, eğrilik tensörü gibi geometrik kavramlar verilerek Gauss ve Codazzi denklemleri elde edildi. Daha sonra yarı-simetrik koneksiyonlu lightlike hiperyüzeyin Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart verildi. Son olarak da yarı-simetrik non-metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi için benzer sonuçlar elde edildi.

Son bölümde ise, yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldları çalışıldı. Burada simetrik koneksiyon üzerinde yapılan teoremler yarı-simetrik koneksiyonlar için ispat edilerek yeni sonuçlar elde edildi.

ANAHTAR KELİMELELER: Yarı-Riemann manifold, Lightlike hiperyüzey, Total umbilik altmanifold, Yarı-simetrik metrik koneksiyon, Coisotropik altmanifold, Ricci eğrilik tensörü.

ABSTRACT

(On the Geometry of Lightlike Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifold)

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the historical background of the subject has been considered.

In the second chapter, some fundamental definitions and theorems related to semi Euclidean space, semi-Riemannian manifolds, lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifold, lightlike submanifold of semi-Riemannian manifold have been given.

In the third chapter, lightlike hypersurfaces have been introduced and theorems about lightlike hypersurfaces have been given. Then the relation between the second fundamental form of a hypersurface of Euclidean space R_0^{m+2} and the second fundamental form of a lightlike hypersurface of semi-Euclidean space R_ν^{m+2} has been obtained. Based on this relation, the Euler and Meusnier theorems have been proved for lightlike hypersurfaces of pseudo-Riemannian manifolds.

In the fourth chapter, the geometry of a lightlike hypersurface of a semi-Riemannian manifold with a semi-symmetric metric connection has been dealt with. Firstly, it has been shown that the induced connection on lightlike hypersurface is semi-symmetric but not metric. Thus considering this connection, geometric objects such as Gauss, Weingarten formulae, shape operator, curvature tensor, equations of Gauss and Codazzi have been obtained. Later, the required conditions of Ricci tensor of lightlike hypersurface with semi-symmetric connection to be symmetric have been given. Finally, similar results for lightlike hypersurface of semi-Riemannian manifold with semi-symmetric non-metric connection have been obtained.

In the last chapter, lightlike submanifolds of a semi-Riemannian manifold have been studied. Then some basic theorems on symmetric connection have been studied in the field of semi-symmetric connection and the new results have been found out.

KEY WORDS: Semi-Riemannian manifold, Lightlike hypersurface, Totally umbilical submanifold, Semi-symmetric metric connection, Coisotropic submanifold, Ricci curvature tensor.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kıymetli tecrübelerinden ve bilgilerinden faydalandığım, çalışmamın her aşamasında beni destekleyen danışman hocam Doç. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN'e teşekkürlerimi sunarım.

SİMGELER DİZİNİ

V	: Reel vektör uzayı
$\widetilde{M}$	: Yarı-Riemann manifold
R	: Riemann eğrilik tensörü
$\mathcal{C}$	: Konformal eğrilik tensörü
h^ℓ	: M nin lightlike ikinci temel formu
h^S	: M nin perde ikinci temel formu
$\widetilde{g}$	: Skalar çarpma
ν	: Yarı-Riemann manifoldunun indeksi
ε_i	: $\begin{cases} -1, & 1 \leq i \leq \nu \\ +1, & \nu + 1 \leq i \leq n \end{cases}$
$\Gamma(TM)$	: M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
$T_P M$	: $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay
$RadTM$	: TM uzayının radikali
$\widetilde{\nabla}$	: Levi-Civita koneksiyon
T	: Torsiyon tensörü
Ric	: Ricci eğrilik tensörü
$S(TM)$	: Perde dağılım
B	: Lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formu
ξ	: Hiperyüzeyin normali
A	: Şekil operatörü
$\mathcal{D}$	: Dağılım
$tr(TM)$	: Lightlike transversal vektör demeti
∇^t	: $tr(TM)$ üzerindeki lineer koneksiyon
$k(X_P)$	: $X_P \in T_P M$ doğrultusundaki normal eğrilik
$\mathcal{L}_X$	: X vektör alanına göre Lie türevi
$\oplus$	: Ortogonal olmayan direkt toplam
$\perp$	: Ortogonal direkt toplam
P	: TM den $S(TM)$ ye projektif dönüşüm

H	: M nin ortalama eğriliği
$\overset{*}{\nabla}$	: Perde üzerindeki lineer koneksiyon
$S(TM^\perp)$	: Transversal ekran vektör demeti
$\dot{I}zA$	: A nın izi
∇^S	: $S(TM^\perp)$ üzerindeki lineer koneksiyon
∇^ℓ	: $ltr(TM)$ üzerindeki lineer koneksiyon
$\overset{\circ}{\nabla}$	: Yarı-simetrik koneksiyon
$\overset{*}{A}$	: Perde dağılımının şekil operatörü
$\overset{*}{H}$	: Perde dağılımının ikinci temel formu
π	: Bir 1-form
ρ	: Skalar eğrilik
m	: Yarı-simetrik koneksiyona göre lightlike hiperyüzeyinin ikinci temel formu

1.GİRİŞ

Lightlike hiperyüzeylerle ilgili ilk çalışma, 1961 yılında *R.Pensore* tarafından yapıldı. Bu çalışmada, spacetime da lightlike hiperyüzeyler için başlangıç değer problemi verilerek konu fiziksel açıdan ele alındı. Minkowski space-time da lightlike hiperyüzeylerin diferensiyel geometrisi üzerine ilk çalışmalar 1972 yılında Rosca ve Bonnor tarafından yapıldı.

Bir yarı-Riemann manifoldunun üzerindeki metrik tensör alanı, bu manifoldun keyfi bir hiperyüzeyi üzerine her zaman non-dejenere bir metrik tensör indirgemez. Yani yarı-Riemann manifold üzerindeki metrik tensör, hiperyüzey üzerine sadece simetrik bilinear bir dönüşüm olarak indirgenir. Eğer indirgenen bu simetrik bilinear dönüşümün çekirdeğinin boyutu 1 ise hiperyüzey, lightlike (null, dejenere) hiperyüzey olarak adlandırılır. Bu alanda yapılan çalışmalarda, *D.N. Küpeli* ve *K.L.Duggal-A.Bejancu* tarafından geliştirilen iki yöntem kullanılmaktadır. *D.N. Küpeli* tarafından geliştirilen birinci yöntemde; tanjant demetten bölüm uzayına olan izdüşüm kullanılarak non-dejenere bir metrik tensör alanı elde edildi. *D.N.Küpeli*, 1987 yılındaki çalışmasında geliştirdiği yöntemi kullanarak, yarı-Riemann manifoldunun dejenere altmanifoldlarının Gauss ve Codazzi denklemleri ile total umbilik dejenere altmanifoldlarını inceledi.

Lightlike hiperyüzeyin normal vektörü tanjant uzayda kalmaktadır. Böylece temel problem, tanjant demete tümleyen olan bir vektör alanının doğal bir yolla elde edilmemesidir. Böyle bir vektör alanının varlığı ilk defa *A.Bejancu-K.L.Duggal* tarafından gösterilerek ikinci yöntem ortaya koyuldu. Lightlike hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş koneksiyonun Ricci tensörünün simetrik olma şartları 1996 yılında *A.Bejancu* tarafından bulundu. *A.Ioan*, 1997 yılında yapmış olduğu çalışmasında dejenere manifoldlar için Gauss ve Codazzi denklemlerini elde ederek bazı örnekler verdi. Eş boyutu iki olan yarı-Riemann manifoldunda total umbilik lightlike altmanifoldların diferensiyel geometrisi 1998–1999 yıllarında *A.Bejancu, Duggal ve Jin* tarafından çalışıldı. Bu konuyla ilgili çalışmalara 2001 ve 2002 yıllarında Honda ve Ferrandez tarafından devam edildi. *K.L.Duggal* 2002 yılında

yarı-Riemann geometrisinin yöntemlerini kullanarak lightlike geometrinin problemlerini basite indirgeyen teknikleri buldu. 2003 yılında ise *Duggal* ve *Jin* ortak çalışmalarında sabit eğrilikli yarı-Riemann manifoldunun total umbilik altmanifoldların sınıfında yeni sonuçlar gösterdiler ve perde dağılımının integrallenebilme şartını ispatladılar. Aynı yıl içerisinde, Şahin tarafından lightlike hiperyüzeyin total geodezik olma şartları ve bu yüzeyin Ricci eğriliğini simetrik yapan bazı yeni sonuçlar gösterildi. *Şahin*, 2004 yılında yarı-Riemann manifoldunun total umbilik coisotropik altmanifoldları hakkında bazı yeni teoremleri ispatladı. Lorentz manifoldunun lightlike hiperyüzeyi üzerinde lightlike ortalama eğriliğinin özelliği ise 2005 yılında *Duggal* ve *Gimenez* tarafından verildi.

Bu çalışmada, *Duggal* ve *Bejancunun* yöntemleri kullanılarak lightlike hiperyüzeyler ve altmanifoldlar ele alındı. İkinci bölümde konuyla ilgili tanım ve teoremler verilerek *Duggal*'ın yöntemi tanıtıldı. Üçüncü bölümde, $\mathbb{R}_0^{n+2}$ Öklid uzayının hiperyüzeyi kullanılarak $\mathbb{R}_\nu^{n+2}$ yarı-Öklid uzayının lightlike hiperyüzeyinin geometrisi çalışıldı. Burada, $\mathbb{R}_0^{n+2}$ nin hiperyüzeyinin normal vektör demeti ile $\mathbb{R}_\nu^{n+2}$ nün lightlike hiperyüzeyin lightlike transversal vektör demeti arasındaki bağıntı hesaplandı. Bu bağıntı yardımıyla Öklid uzayındaki hiperyüzeyler için iyi bilinen Euler ve Meusnier teoremlerinin lightlike hiperyüzeylerdeki karşılıkları elde edildi. Dördüncü bölümde, ilk defa Friedman ve Schouten'ın tanımladığı daha sonra da Yano, Imai, Sharma ve Duggal tarafından çalışılan yarı-simetrik metrik koneksiyon kullanılarak, metrik ve non-metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyinin geometrisi çalışıldı. Son bölümde ise yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldun lightlike hiperyüzeyindeki yapılar lightlike altmanifoldlara genelleştirildi ve lightlike altmanifoldunun geometrisi ile ilgili temel teoremler verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde yarı-Riemann manifold ve lightlike altmanifoldlar tanıtılarak, çalışmamıza esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Yarı-Öklid Uzaylar

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

i) $g(u, v) = g(v, u),$

ii) $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w),$

$$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilinear form* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun.

i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g simetrik bilinear formuna *pozitif tanımlı*,

ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ ise g simetrik bilinear formuna *negatif tanımlı*,

iii) $\forall v \in V$ için $g(v, v) \geq 0$ ise g simetrik bilinear formuna *pozitif yarı-tanımlı*,

iv) $\forall v \in V$ için $g(v, v) \leq 0$ ise g simetrik bilinear formuna *negatif yarı-tanımlı* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde simetrik bilinear form olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere $\forall v \in V$ için

$$g(\xi, v) = 0$$

ise g simetrik bilinear formuna V üzerinde *dejenere* denir. Aksi durumda g ye *non-dejenere* denir. Buradan görülür ki, g nin non-dejenere olması için gerek

ve yeter şart $\forall u \in V$ için

$$g(u, v) = 0 \text{ iken } v = 0$$

olmasıdır (Duggal, 1996).

Tanım 2.1.4. V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde simetrik bilinear form olsun. V nin

$$RadV = \{\xi \in V \mid g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı altuzayına, g simetrik bilinear formuna göre V uzayının *radikal* (veya *null*) uzayı denir (Duggal, 1996).

Tanım 2.1.5. V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde simetrik bilinear form olsun.

$$g|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilinear formun *indeksi* denir ve ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.6. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilinear form g olsun. Bu durumda,

$$i) \ g(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \ i \neq j$$

$$ii) \ g(\alpha_i, \alpha_i) = 1, \ 1 \leq i \leq \gamma,$$

$$iii) \ g(\alpha_i, \alpha_i) = -1, \ \gamma + 1 \leq i \leq \gamma + \nu$$

$$iv) \ g(\alpha_i, \alpha_i) = 0, \ \gamma + \nu + 1 \leq i \leq n = \gamma + \nu + \mu$$

olacak şekilde V nin $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bazı vardır (Duggal, 1996).

Tanım 2.1.7. V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilinear forma V reel vektör uzayı üzerinde bir *skalar çarpım* (*yarı-Öklid metriği*) denir. V üzerindeki bir skalar çarpma g ise (V, g) ikilisine de skalar çarpım uzayı (*yarı-Öklid uzayı*) denir.

Eğer g pozitif tanımlı ise o zaman g bir *iç çarpım* (*Öklid metriği*) olur ve (V, g)

de *Öklid uzay* olarak adlandırılır. Eğer g nin indeksi $\nu = 1$ ise g ye *Lorentz (Minkowski) metriği* ve (V, g) yede *Lorentz (Minkowski) uzayı* denir. Eğer g dejenere ise o zaman V vektör uzayına g ye göre *lightlike (dejenere) vektör uzayı* denir (Duggal, 1996).

Tanım 2.1.8. V bir lightlike vektör uzayı ve $RadV$, V vektör uzayının radikali olsun. Radikal uzaya tümleyen olan non-dejenere altuzaya *perde uzay* denir ve SV ile gösterilir (Duggal, 1996).

Tanım 2.1.9. V bir reel vektör uzayı ve W da V nin altuzayı olsun. $g|_W$ dejenere ise W ya *lightlike (dejenere) altuzay* denir ve

$$W \cap W^\perp \neq \{0\}$$

dir. Burada,

$$W^\perp = \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

altuzayına W uzayının *diki* denir (Duggal, 1996).

Teorem 2.1.10. V bir yarı-Öklid uzay ve W , V nin bir altuzayı olsun. O zaman,

$$RadW = RadW^\perp = W \cap W^\perp$$

dir (Duggal, 1996).

Tanım 2.1.11. V bir yarı-Öklid uzay olsun. Bu uzayın;

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, \quad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, \mu\}$$

$$g(u_\alpha, f_i) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0, \quad g(u_\alpha, u_\beta) = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}, \varepsilon_\alpha = \mp 1$$

olacak şekildeki $\{f_1, \dots, f_\mu, f_1^*, \dots, f_\mu^*, u_1, \dots, u_t\}$ bazına yarı-Öklid uzayın *quasi-ortonormal bazı* denir (Duggal, 1996).

Teorem 2.1.12. V bir yarı-Öklid uzay ve W da bu uzayın bir lightlike altuzayı olsun. Bu durumda, W boyunca V uzayının bir quasi-ortonormal bazı vardır (Duggal, 1996).

2.2. Yarı-Riemann Manifolddar

Tanım 2.2.1. M bir C^∞ manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_p M$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g|_p : T_p M \times T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\rightarrow g|_p(X_p, Y_p) = g(X_p, Y_p) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere $(0, 2)$ tensör alanına M üzerinde bir *metrik tensör* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. M bir C^∞ manifold olsun. M , bir g metrik tensörü ile donatılmışsa, M ye bir *yarı-Riemann manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine *yarı-Riemann manifoldunun indeksi* denir ve $\text{ind}M$ ile gösterilir.

Eğer indeks ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}M$ dir. Özel olarak, $\nu = 0$ ise $\forall p \in M$ için $g|_p$, $T_p M$ üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir *Riemann manifoldu* olur. $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir *Lorentz manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4. M bir C^∞ n -boyutlu manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : M &\rightarrow T_p M \\ p &\rightarrow \mathcal{D}_p \subset T_p M \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\mathcal{D}$ dönüşümüne r -boyutlu *dağılım* ve $X \in \Gamma(TM)$ için $X_p \in \mathcal{D}_p$ ise X vektör alanına da $\mathcal{D}$ ye aittir denir. Eğer her $p \in M$ noktası için $\mathcal{D}_p$ de r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise $\mathcal{D}$

dağılımına *diferensiyellenebilirdir* denir (Duggal, 1996).

Tanım 2.2.5. M bir diferensiyellenebilir manifold ve K de M üzerinde herhangi bir tensör alanı olsun. Bu durumda $p \in M$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ ve $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_X K = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (K(p) - (\Phi_t K)(p))$$

ile tanımlanan $\mathcal{L}_X$ diferensiyel operatörüne X vektör alanına göre *Lie türevi* denir.

Burada Φ ,

$$\Phi : (t, x) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times U \rightarrow \Phi(t, x) \in M$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür (Duggal, 1996).

Teorem 2.2.6. M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\mathcal{L}_X$ de manifold üzerinde tanımlı Lie türevi olsun. O zaman $\forall Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$i) \mathcal{L}_X f = X(f)$$

$$ii) \mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

iii) Ψ , M üzerinde $(0, 2)$ tipinde bir tensor alanı olmak üzere

$$(\mathcal{L}_X \Psi)(Y, Z) = X(\Psi(Y, Z)) - \Psi([X, Y], Z) - \Psi(Y, [X, Z])$$

dir (Duggal, 1996).

Tanım 2.2.7. M bir C^∞ n -boyutlu manifold ve $\mathcal{D}$, M üzerinde r -boyutlu bir dağılım olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise $\mathcal{D}$ dağılımına *involutive* denir (Duggal, 1996).

Tanım.2.2.8. $\{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathbb{R}_\nu^n$ üzerinde doğal koordinatlar olsun. V ve $W = \sum W_i \partial_i$, $\mathbb{R}_\nu^n$ üzerinde vektör alanları iseler

$$\nabla_V W = \sum V(W_i) \partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre *kovaryant türevi* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.9. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki bir ∇ *koneksiyonu*

i) $\nabla_V W$, V ye göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir,

ii) $\nabla_V W$, W ya göre $\mathbb{R}$ lineerdir,

iii) $\nabla_V(fW) = V(f)W + f \nabla_V W$, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

şartlarını sağlayan ve

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.10. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

olacak şekilde M nin bir tek ∇ *Levi-Civita koneksiyonu* vardır ve bu koneksiyon

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile karakterize edilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.11. M bir C^∞ manifold ve ∇ , M üzerinde bir lineer koneksiyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(TM)$$

ise $\mathcal{D}$ dağılımına *paraleldir* denir (Duggal, 1996).

Tanım 2.2.12. M , bir C^∞ manifold ve $\overset{\circ}{\nabla}$, M üzerinde bir lineer koneksiyon olsun. Eğer $\overset{\circ}{\nabla}$ nın torsiyon tensörü $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$T(X, Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y$$

eşitliğini sağlıyor ise $\overset{\circ}{\nabla}$ ya *yarı-simetrik koneksiyon* denir. Burada π , bir 1-formdur (Yano, 1970).

Tanım 2.2.13. M , Levi-Civita koneksiyonu ∇ olan bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan M üzerinde (1, 3) tipindeki R fonksiyonuna M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.14. M bir yarı-Riemann manifoldu ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

- i) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(Y, X)Z, W)$,
- ii) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$,
- iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,
- iv) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.15. Eğer M manifoldu sabit bir c eğriliğine sahipse M nin eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X, Y)Z = c \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

şeklinde (Duggal, 1996).

Tanım 2.2.16. M bir yarı-Riemann manifold ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T_P M$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\begin{aligned} Ric : T_P M \times T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X_P, Y_P) &\rightarrow Ric(X_P, Y_P) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(e_i, X_P)Y_P, e_i) \end{aligned}$$

veya

$$Ric(X_P, Y_P) = iz\{Z_P \rightarrow R(Z_P, X_P)Y_P\}$$

şeklinde tanımlı Ric tensörüne M yarı-Riemann manifoldunun *Ricci eğrilik tensörü* ve $Ric(X_P, Y_P)$ değerine de *Ricci eğriliği* denir (Küpeli, 1996).

Tanım 2.2.17. M bir yarı-Riemann manifoldu ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T_P M$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\rho = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Ric(e_i, e_i)$$

değerine M yarı-Riemann manifoldunun *skalar eğriliği* denir (Küpeli, 1996).

Tanım 2.2.18. M bir yarı-Riemann manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} C(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \frac{1}{m-2} \{Ric(X, Z)Y - Ric(Y, Z)X + g(X, Z)\mathcal{Q}Y \\ &- g(Y, Z)\mathcal{Q}X\} - \frac{\rho}{(m-1)(m-2)} \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan (1,3) tipindeki tensör alanına M nin Weyl konformal eğrilik tensörü denir. Burada $\mathcal{Q}$, $g(\mathcal{Q}X, Y) = Ric(X, Y)$ şeklinde tanımlı Ricci operatörüdür (Duggal, 1996).

Tanım 2.2.19. M bir yarı-Riemann manifold olsun. Eğer $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$Ric(X_p, Y_p) = \lambda \tilde{g}(X_p, Y_p)$$

ise M ye *Einstein manifoldu* denir (Hacısalıhoğlu, H.H., 2003).

Tanım 2.2.20. M bir yarı-Riemann manifold ve R de M nin eğrilik tensörü olsun. Eğer, $R = 0$ ise M ye *lokal flat* ve $\nabla R = 0$ ise M ye *lokal simetrik uzay* denir (Hacısalıhoğlu, H.H. 2003).

2.3. Yarı-Riemann Manifoldunun Lightlike Altmanifoldları

Tanım 2.3.1. $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun bir C^∞ altmanifoldu M ve $\widetilde{M}$ deki

metrik $\tilde{g}$ olsun.

$$\begin{aligned}\varphi: M &\rightarrow \widetilde{M} \\ p &\rightarrow \varphi(p)\end{aligned}$$

inclusion(daldırma) dönüşümü için $p \in M$ noktasındaki türev dönüşümü

$$T_p M \xrightarrow{\varphi_*|_P} T_{\varphi(p)} \widetilde{M}$$

ve ek dönüşümü de

$$T_p M^* \xleftarrow{\varphi^*|_P} T_{\varphi(p)}^* \widetilde{M}^*$$

olmak üzere,

$$(\varphi^*|_P \tilde{g}|_P)(X_p, Y_p) = \tilde{g}(\varphi_*(X_p), \varphi_*(Y_p))|_P; \forall X_p, Y_p \in T_p M$$

eşitliği ile tanımlı $\varphi^*|_P (\tilde{g}|_P)$, M üzerinde bir metrik ise M ye $\widetilde{M}$ nin bir *yarı-Riemann altmanifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.2. $\widetilde{M}$, bir C^∞ -manifold ve $\mathcal{D}$, $\widetilde{M}$ üzerinde μ -boyutlu bir dağılım olsun. M , $\widetilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere, eğer M nin her p noktasında M manifoldunun tanjant uzayı ile $\mathcal{D}_p$ aynı ise M ye $\mathcal{D}$ dağılımının integral manifoldu denir (Duggal, 1996).

Tanım 2.3.3. Eğer $\mathcal{D}$ dağılımının M altmanifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda distribüsyonun maksimal integral manifoldu denir (Duggal, 1996).

Tanım 2.3.4. $\widetilde{M}$, bir C^∞ -manifold ve M , $\widetilde{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall p \in M$ için $\mathcal{D}$ distribüsyonunun p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{D}$ ye integrallenebilir denir (Duggal, 1996).

Tanım 2.3.5. M , $\widetilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. $\forall p \in M$ için $T_p M^\perp$ uzayının boyutuna M nin *dik tümleyeninin boyutu* (eş boyutu), $T_p M^\perp$ in indeksine de M nin *dik tümleyeninin indeksi* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.6. $\widetilde{M}$, bir yarı-Riemann manifold olsun. $\widetilde{M}$ nın dik tümleyeninin boyutu (eş boyutu) 1 olan yarı-Riemann altmanifolduna, $\widetilde{M}$ nın bir *yarı-Riemann hiperyüzeyi* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.7. $(m+n)$ -boyutlu bir yarı-Riemann $\widetilde{M}$ manifoldunun eş boyutu n olan bir altmanifoldu M olsun. $\forall p \in M$ için

$$Rad : p \in M \rightarrow RadT_pM$$

dönüşümü, M üzerinde rankı $r > 0$ olacak şekilde diferensiyellenebilir bir dağılım tanımlıyorsa M ye *r-lightlike altmanifold* denir.

Bir r -lightlike altmanifold; boyutu, eş boyutu ve rankına göre dört durumda incelenebilir:

1. Durum. Eğer $0 < r < \min\{m, n\}$ ise M nin TM tanjant demetinde $RadTM$ ye tümleyen olan bir $S(TM)$ perde dağılımı vardır ve

$$TM = RadTM \perp S(TM)$$

şeklinde yazılır. TM nin ortogonal demeti $TM^\perp$ olmak üzere $TM^\perp$ de $RadTM$ ye tümleyen olan non-dejenere bir $S(TM^\perp)$ transversal vektör demeti vardır ve

$$TM^\perp = RadTM \perp S(TM^\perp)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $S(TM)$ ve $S(TM^\perp)$, sırasıyla, $\widetilde{TM}|_M$ ve $S(TM)^\perp$ nin non-dejenere alt vektör demetleri olduğundan

$$\widetilde{TM}|_M = S(TM) \perp S(TM)^\perp$$

ve

$$S(TM)^\perp = S(TM^\perp) \perp S(TM^\perp)^\perp$$

dir.

2. Durum. Eğer $1 < r = n < m$ ise $RadTM = TM^\perp$ dir. Böylece $S(TM^\perp) = \{0\}$ olduğundan TM ve $\widetilde{TM}$, sırasıyla,

$$TM = S(TM) \perp TM^\perp$$

ve

$$\widetilde{TM} = TM \oplus ltr(TM) = S(TM) \perp (TM^\perp \oplus ltr(TM))$$

dir. Bu durumdaki M ye *coisotropik altmanifold* denir.

3. Durum. Eğer $1 < r = m < n$ ise $RadTM = TM$ dir. Buradan $S(TM) = \{0\}$ olduğundan $TM^\perp$ ve $\widetilde{TM}$, sırasıyla,

$$TM^\perp = TM \perp S(TM^\perp)$$

ve

$$\widetilde{TM} = (TM \oplus ltr(TM) \perp S(TM^\perp))$$

dir. Bu şekildeki M ye *isotropik altmanifold* denir.

4. Durum. Eğer $1 < r = m = n$ ise $RadTM = TM = TM^\perp$ dir. Buradan $S(TM) = S(TM^\perp) = \{0\}$ olduğundan

$$\widetilde{TM} = TM \oplus ltr(TM)$$

dir. Bu durumda M ye *tamamen lightlike altmanifold* denir (Duggal, 1996).

Teorem 2.3.8. $\widetilde{M}$, yarı-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldu M olsun. $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ de Levi-Civita koneksiyon ve $(S(TM), S(TM^\perp))$ çiftine göre $\widetilde{M}$ nin transversal vektör demeti $ltr(TM)$ olmak üzere; $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve

$V \in \Gamma(ltr(TM))$ için *Gauss ve Weingarten denklemleri*, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^\ell(X, Y) + h^s(X, Y)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + D_X^\ell SV + D_X^s LV$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$L : tr(TM) \rightarrow ltr(TM), \quad S : tr(TM) \rightarrow S(TM^\perp),$$

$$h^\ell(X, Y) = Lh(X, Y), \quad h^s(X, Y) = Sh(X, Y)$$

ve

$$\begin{aligned} D^S : \Gamma(TM) \times \Gamma(ltr(TM)) &\rightarrow \Gamma(S(TM^\perp)) \\ (X, LV) &\rightarrow D_X^s LV \\ D^\ell : \Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM^\perp)) &\rightarrow \Gamma(ltr(TM)) \\ (X, SV) &\rightarrow D_X^\ell SV \end{aligned}$$

dir (Duggal, 1996).

Teorem 2.3.9. $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldu M olsun. Eğer M coisotropik altmanifold ise $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için *Gauss ve Weingarten denklemleri*, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^\ell(X, Y)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^\ell N$$

dir. (Duggal, 1996).

Tanım 2.3.10. $\widetilde{M}$, yarı-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldu M olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h^\ell(X, Y) = \widetilde{g}(X, Y)H_L$$

ve

$$h^s(X, Y) = \widetilde{g}(X, Y)H_S$$

olacak şekilde $H_L \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $H_S \in \Gamma(S(TM^\perp))$ vektör alanları var ise M ye *total umbilik* denir (Ioan, 1997).

Teorem 2.3.11. $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike veya coisotropik altmanifoldu M olsun. O zaman P, TM tanjant demetinden perde dağılımı üzerine bir projeksiyon dönüşüm olmak üzere; $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(Rad(TM))$ için

$$\nabla_X Y = \overset{*}{\nabla}_X Y + \overset{*}{h}(X, Y)$$

ve

$$\nabla_X \xi = - \overset{*}{A}_\xi X + \overset{*}{\nabla}_X^t \xi$$

dir. Burada $\{\overset{*}{\nabla}_X Y, \overset{*}{A}_\xi X\}$ ve $\{\overset{*}{h}(X, Y), \overset{*}{\nabla}_X^t \xi\}$, sırasıyla, $S(TM)$ ve $RadTM$ nin elemanlarıdır (Duggal, 1996).

3. YARI-RIEMANN MANİFOLDUNUN LIGHTLIKE HIPERYÜZEYLERİNİN GEOMETRİSİ

Bu bölümde, Duggal ve Bejancu'nun yöntemleri kullanılarak lightlike hiperyüzeylerin geometrisi çalışıldı. Burada lightlike hiperyüzeylerin total umbilik, flat olma şartları ve indirgenmiş koneksiyonun Ricci tensörünün simetriklik durumu ile ilgili teoremler verildi.

3.1. Lightlike Hiperyüzeyler

$\widetilde{M}$ $(n+2)$ -boyutlu ve ν , $1 \leq \nu \leq n+1$, indeksli bir yarı-Riemann manifold olsun. $\widetilde{M}$ nin $(n+1)$ -boyutlu bir hiperyüzeyi M olmak üzere $\forall p \in M$ için

$$Rad : p \in M \longrightarrow RadT_pM$$

dönüşümü, M üzerinde rankı 1 olacak şekilde diferensiyellenebilir bir dağılım tanımlıyorsa M ye *lightlike hiperyüzey* denir.

M lightlike hiperyüzeyi için $S(TM)$, TM de $TM^\perp$ in tümleme vektör demeti olmak üzere

$$TM = S(TM) \perp TM^\perp \quad (3.1.1)$$

dir. Burada $S(TM)$ non-dejenere olduğundan $\widetilde{TM}$,

$$\widetilde{TM} |_M = S(TM) \perp S(TM)^\perp \quad (3.1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $tr(TM)$, $S(TM)^\perp$ nin tümleme vektör demetini göstermek üzere

$$S(TM)^\perp = TM^\perp \oplus tr(TM) \quad (3.1.3)$$

olur. (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.3) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\widetilde{TM} |_M = S(TM) \perp (TM^\perp \oplus tr(TM)) = TM \oplus tr(TM) \quad (3.1.4)$$

dir.

$\tilde{\nabla}$ ve ∇ , sırasıyla, $\tilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita ve lineer koneksiyonlar olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(M)$ için $\nabla_X Y$, $A_X V \in \Gamma(TM)$ ve $h(X, Y)$, $\nabla_X^\perp V \in \Gamma(ltr(TM))$ olmak üzere *Gauss* ve *Weingarten denklemleri*, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (3.1.5)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_X V + \nabla_X^\perp V \quad (3.1.6)$$

şeklinde verilir.

$\{\xi, N\}$, M lightlike hiperyüzeyi üzerindeki kesitlerin bir parçası olmak üzere B bilineer ve τ bir 1-formu $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X, Y) = \tilde{g}(h(X, Y), \xi) \quad (3.1.7)$$

ve

$$\tau(X) = \tilde{g}(\nabla_X^\perp V, \xi) \quad (3.1.8)$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece (3.1.7) ve (3.1.8) denklemleri (3.1.5) ve (3.1.6) de yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)N \quad (3.1.9)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_X V + \tau(X)N \quad (3.1.10)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve bu manifoldun lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. U koordinat komşuluğunda ξ , $\Gamma(TM^\perp)$ nin bir bazı olmak üzere $\forall W \in \Gamma(S(TM))$ için $tr(TM)$ lightlike transversal vektör demetinin

$$g(N, N) = g(N, W) = 0$$

ve

$$\tilde{g}(N, \xi) = 1$$

olacak şekilde bir tek N diferensiyellenebilir kesiti vardır (Duggal, 1996).

Teorem 3.1.2. $(M, g, S(TM))$, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

(i) ∇^* lineer koneksiyonu metriktir.

(ii) ∇ indirgenmiş koneksiyonu, $\eta(Z) = \tilde{g}(Z, N)$ olmak üzere

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = B(X, Y)\eta(Z) + B(X, Z)\eta(Y), \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

eşitliğini sağlar (Duggal, 1996).

Tanım 3.1.3. M bir $(n+1)$ -boyutlu lightlike hiperyüzey ve $S(TM)$ M nin bir perde dağılımı olsun. $\{E_1, \dots, E_n\}$, $S(TM)$ nin bir ortanormal bazı olmak üzere

$$H = - \sum_{a=1}^n B(E_a, E_a)$$

biçiminde tanımlanan H ye M nin *ortalama eğriliği* denir (Duggal, 2005).

Tanım 3.1.4. M , $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X, Y) = Fg(X, Y)$$

olacak şekilde M de C^∞ F fonksiyonu varsa M hiperyüzeyine *total umbilik* denir (Duggal, 1996).

Örnek 3.1.5 $\mathbb{R}_1^3$ deki null koni

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R}_1^3 - \{0\} \mid g(x, x) = 0\}$$

veya

$$\Lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 \mid f : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

şeklinde tanımlanır. f nin gradienti,

$$\text{grad}f = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

olmak üzere $\forall p \in \Lambda$ için $\text{grad}f|_p \neq 0$ dır. Diğer taraftan

$$g(\text{grad}f, \text{grad}f) = 0$$

olduğundan $\text{grad}f$ null koninin lightlike normal vektör alanıdır. Böylece

$$\widetilde{TM} = S(TM) \perp \text{Rad}TM \oplus \text{tr}(TM)$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\widetilde{g}(N, W_i) = \widetilde{g}(\text{grad}f, W_i) = 0, i \in \{1, 2\} \quad \text{ve} \quad \widetilde{g}(N, \text{grad}f) = 1$$

olacak şekilde N lightlike transversal ve W_i perde vektör alanları

$$N = \frac{(-x_1, x_2, x_3)}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}, W_1 = \frac{(0, x_3, -x_2)}{\sqrt{x_3^2 + x_2^2}}, W_2 = \frac{(0, -x_3, x_2)}{\sqrt{x_3^2 + x_2^2}}$$

biçiminde bulunur. Buradan $X = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \in T_x M$ için Weingarten formülü göz önüne alınırsa A_N şekil operatörü

$$A_N = \frac{1}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} I$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.6. $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi M olsun. O zaman M , Einstein ise M nin Ricci tensörü simetriktir.

İspat. M lightlike hiperyüzeyi Einstein olsun. O zaman $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $S(TM)$ nin $\{E_1, \dots, E_n\}$ ortonormal bazı için M nin Ricci eğrilik tensörü göz önüne alınır ve Gauss formülü kullanılırsa,

$$Ric(X, Y) - Ric(Y, X) = -2d\tau(X, Y)$$

elde edilir. Ayrıca, Einstein tanımından

$$kg(X, Y) - kg(Y, X) = -2d\tau(X, Y)$$

dir. Böylece

$$d\tau(X, Y) = 0$$

olur. Bu ise Ricci tensörünün simetrik olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.7. $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi M olsun. O zaman transversal vektör demeti üzerindeki ∇^t lineer koneksiyonun flat olması için gerek ve yeter şart lightlike transversal vektör demeti N nin paralel ve M nin total geodezik olmasıdır.

İspat. $M, \widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. O halde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için $T\widetilde{M}$ ve $tr(TM)$ üzerindeki koneksiyonlar, sırasıyla, $\widetilde{\nabla}$ ve ∇^t olmak üzere

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y)N &= -\nabla_X(A_N Y) - h(X, A_N Y) - A_{\tau(Y)N}X \\ &\quad + \nabla_X^t \nabla_Y^t N + \nabla_Y(A_N X) + h(Y, A_N X) + A_{\tau(X)N}Y \\ &\quad - \nabla_Y^t \nabla_X^t N - A_N[X, Y] + \nabla_{[X, Y]}^t N \end{aligned}$$

dir. Böylece lightlike transversal vektör demetinin eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} \widetilde{R}^t(X, Y)N &= \nabla_X^t \nabla_Y^t N + \nabla_Y^t \nabla_X^t N + \nabla_{[X, Y]}^t N \\ &\quad + h(Y, A_N X) - h(X, A_N Y) \end{aligned}$$

olur. Buna göre, ∇^t nin flat olması için gerek ve yeter şart N nin paralel ve M nin total geodezik olmasıdır.

Teorem 3.1.8. $\widetilde{M}(c)$, sabit kesitsel eğriliğe sahip bir yarı-Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman ∇^t koneksiyonunun flat olması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır.

İspat. $\widetilde{R}$, $\widetilde{M}(c)$ nin eğrilik tensörünü göstermek üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X, Y)N &= \nabla_Y(A_N X) - \nabla_X(A_N Y) + h(Y, A_N X) \\ &\quad - h(X, A_N Y) + \tau(X)A_N Y - \tau(Y)A_N X \\ &\quad - A_N[X, Y] + \widetilde{R}^t(X, Y)N\end{aligned}$$

dir. $\widetilde{M}$ nin sabit kesitsel eğriliği göz önüne alınır ve eşitliğin her iki tarafı ξ ile skalar çarpılırsa

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X, Y)N, \xi) = g(\widetilde{R}^t(X, Y)N, \xi) + B(Y, A_N X) - B(X, A_N Y)$$

elde edilir. Böylece

$$g(\widetilde{R}^t(X, Y)N, \xi) = B(X, A_N Y) - B(Y, A_N X)$$

olur. Bu ise ∇^t nin flat olması için gerek ve yeter şartın M nin total geodezik olması gerektiğini ifade eder.

Örnek 3.1.9. $\mathbb{R}_2^4$ de M hiperyüzeyi

$$x^3 - \frac{1}{2}(\cos x^1 + \sin x^1)^2 = x^0$$

şeklinde verilsin. O halde M için

$$g(\xi, \xi) = g(\xi, W) = g(N, W) = 0$$

$$g(\xi, N) = 1$$

olacak şekilde radikal, transversal vektör alanı ve perde uzayı

$$RadTM = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x^0} + (\cos x^1 + \sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^1} - (\cos x^1 + \sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\right\},$$

$$tr(TM) = -\frac{1}{2[1+(\cos x^1 + \sin x^1)^2]} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0} + (\cos x^1 + \sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^1} + (\cos x^1 + \sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^3} \right\}$$

ve

$$\begin{aligned} S(TM) &= \{W_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} - (\cos x^1 + \sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^0} \\ &+ W_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + (\cos x^1 + \sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^1}\} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece M , $\mathbb{R}_2^4$ de bir lightlike hiperyüzeydir.

Teorem 3.1.10. $\widetilde{M}$, flat koneksiyonlu bir yarı-Riemann manifold ve $\widetilde{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi M olsun. O zaman M ve $S(TM)$ nin total umbilik olması için gerek ve yeter şart λ nın

$$\xi(\lambda) - \lambda(\tau(\xi) + c) = 0$$

diferensiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat. $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ nin Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{R}(X, Y)PZ, N) &= (\nabla_X C)(Y, PZ) - (\nabla_Y C)(X, PZ) \\ &+ \tau(Y)C(X, PZ) - \tau(X)C(Y, PZ) \end{aligned}$$

dir. O halde $\widetilde{\nabla}$ nin flat olması göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= X(\lambda)g(Y, PZ) + \{B(X, Y)\eta(PZ) + B(X, PZ)\eta(Y)\} \\ &- Y(\lambda)g(X, PZ) + \{B(Y, X)\eta(PZ) + B(Y, PZ)\eta(Y)\} \\ &+ \tau(Y)g(X, PZ) - \tau(X)g(Y, PZ) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $X = \xi$ ve $B = cg$ değerleri yerine yazılırsa

$$\xi(\lambda) - \lambda(\tau(\xi) + c) = 0$$

olduğu görülmür.

Önerme 3.1.11. $\widetilde{M}$, sabit bir c eğriliğe sahip yarı-Riemann manifold ve M , $\widetilde{M}$ nin total umbilik lightlike altmanifoldu olsun. O zaman perde dağılımı total umbilik ise M sabit bir kesitsel eğriliğe sahiptir.

İspat. H , M nin bir ortalama eğriliği olsun. Buradan $\xi \in \Gamma(TM)$ için M nin ve $S(TM)$ perde dağılımının total umbilik olması göz önüne alınırsa,

$$\widetilde{g}(A_{\xi}^* X, Y) = B(X, PY) = \widetilde{g}(h(X, PY), \xi) = Hg(X, PY)$$

$$C(X, PW) = kg(X, PW)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, PW) &= c\{g(Y, Z)g(X, PW) - g(X, Z)g(Y, PW)\} \\ &+ Hg(X, Z)kg(Y, PW) - Hg(Y, Z)kg(X, PW) \\ &= (c + Hk)\{g(X, Z)g(Y, PW) - g(Y, Z)g(X, PW)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise M nin sabit bir kesitsel eğriliğe sahip olduğunu gösterir.

3.2. Lightlike Hiperyüzeylerin Geometrisinin Transversal Vektör Alanına Göre İfadesi

Ferrandez, 2005 yılındaki çalışmasında $\mathbb{R}_{\nu}^{n+2}$ yarı-Öklid uzayın lightlike hiperyüzeyinin transversal vektör demeti ile $\mathbb{R}_0^{n+2}$ Öklid uzayın hiperyüzeyinin normal vektör demetinin aynı olduğunu gösterdi. Daha sonra Gauss formüllerini kullanarak, $\mathbb{R}^{n+2}$ de M nin lightlike ve Riemann immersiyonları tarafından indirgenen geometrik objelerin arasında bazı önemli bağıntılar elde etti.

Bu bağıntı yardımıyla, hiperyüzeyler için iyi bilinen Euler ve Meusnier gibi teoremlerin lightlike hiperyüzeyler için karşılıkları elde edildi.

$\mathbb{R}_{\nu}^{n+2} = (\mathbb{R}^{n+2}, \widetilde{g}_{SE})$ ve $\mathbb{R}_0^{n+2} = (\mathbb{R}^{n+2}, \widetilde{g}_E)$, $(n + 2)$ -boyutlu yarı-Öklid ve Öklid uzaylar olsun. O zaman $1 \leq \nu \leq n + 1$ indeksli $\widetilde{g}_{SE}$ yarı-Öklid ve $\widetilde{g}_E$ Öklid

metrikleri, sırasıyla,

$$\tilde{g}_{SE}(x, y) = - \sum_{i=0}^{\nu} x^i y^i + \sum_{a=\nu+1}^{n+1} x^a y^a \quad (3.2.1)$$

ve

$$\tilde{g}_E(x, y) = \sum_{A=0}^{n+1} x^A y^A \quad (3.2.2)$$

dir. $\mathbb{R}^{n+2}$ nin M hiperyüzeyi

$$F(x^0, \dots, x^{n+1}) = 0$$

denklemiyle verilsin. Burada $F, U \subset M$ açık kümesinde C^∞ ve

$$rank[F'_{x^0}, \dots, F'_{x^{n+1}}] = 1$$

dir. Buradan $\tilde{g}_{SE}$ yarı-Öklid metriği göz önüne alınırsa, M nin normal vektör demeti

$$\xi = grad F_{SE} = - \sum_{i=0}^{\nu} F'_{x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{a=\nu+1}^{n+1} F'_{x^a} \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (3.2.3)$$

şeklinde bulunur. Böylece M nin lightlike hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart ξ nin bir null vektör alanı yani F nin

$$\sum_{i=0}^{\nu} (F'_{x^i})^2 = \sum_{a=\nu+1}^{n+1} (F'_{x^a})^2 \quad (3.2.4)$$

diferensiyel denkleminin bir çözümü olmasıdır.

Transversal vektör demetinin ve perde dağılımının elde edilmesi için M ye teğet olmayan

$$V = \sum_{i=0}^{\nu} F'_{x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.2.5)$$

vektör alanı göz önüne alınırsa

$$\tilde{g}_{SE}(V, \xi) = \sum_{i=0}^{\nu} (F'_{x_i})^2 \neq 0$$

olur. Böylece

$$N = \frac{1}{\tilde{g}(V, \xi)} \left\{ V - \frac{\tilde{g}(V, V)}{2\tilde{g}(V, \xi)} \xi \right\} \quad (3.2.6)$$

lightlike transversal vektör demeti

$$N = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{\nu} (F'_{x_i})^2 \right)^{-1} \sum_{A=0}^{n+1} F'_{x^A} \frac{\partial}{\partial x^A} \quad (3.2.7)$$

biçiminde elde edilir.

$N_0, \tilde{g}_E$ Öklid metriğine göre M nin birim normal vektör alanını göstermek üzere, (3.2.5) ve (3.2.7) denklemleri kullanılırsa

$$N = \alpha(x) N_0, \quad \alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=0}^{\nu} (F'_{x_i})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.8)$$

bulunur.

$\tilde{\nabla}, \mathbb{R}^{n+2}$ de $\tilde{g}_{SE}$ yarı-Öklid ve $\tilde{g}_E$ Öklid metriklerine göre Levi-Civita koneksiyonlar olsunlar. O zaman (3.2.8) denklemi göz önüne alınırsa, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\mathbb{R}_\nu^{n+2}$ de M lightlike hiperyüzeyinin Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)N = \nabla_X Y + \alpha(x)B(X, Y)N_0 \quad (3.2.9)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)N = -A_N X + \alpha(x)\tau(X)N_0 \quad (3.2.10)$$

dır. (3.2.8), (3.2.9) ve (3.2.10) denklemlerinden $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B_0(X, Y) = \alpha(x)B(X, Y) \quad (3.2.11)$$

ve

$$A_N X = \alpha(x)A_{N_0} X \quad (3.2.12)$$

elde edilir (Ferrandez, 2005).

Örnek 3.2.1 Örnek 3.1.5 göz önüne alınırsa Öklid uzaya göre f nin gradienti ve birim normal vektör alanı, sırasıyla,

$$gradf_E = (-2x_1, 2x_2, 2x_3) \text{ ve } N_0 = \frac{gradf_E}{\|gradf_E\|} = \frac{(-x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

dir. Böylece R_1^3 in null konisinin transversal vektör alanı ve şekil operatörü

$$N = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} N_0$$

ve

$$A_N = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} A_{N_0}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.2.2. $\mathbb{R}_\nu^{n+2}$ yarı-Öklidyen uzayın M lightlike hiperyüzeyi, $U \subset \mathbb{R}^{n+2}$ açık cümlesinde C^∞ F fonksiyonu için

$$Rank \left[\frac{\partial F}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x^n} \right] = 1$$

olan $F(x_0, \dots, x_{n+1}) = 0$ denklemiyle verilsin. O zaman $\xi = \nabla F$ vektör alanı, A_N nin sıfır özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür.

İspat. M , $\mathbb{R}_\nu^{n+2}$ yarı-Öklidyen uzayın lightlike hiperyüzeyi olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için M nin Gauss denklemi

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)N$$

dir. $\xi \in \Gamma(TM)$ için Gauss denklemi kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + B(X, \xi)N$$

elde edilir. Böylece bu eşitliğin her iki tarafı ξ ile skalar çarpılırsa

$$B(X, \xi) = \tilde{g}_{SE}(\tilde{\nabla}_X \xi, \xi)$$

olur. Diğer taraftan, $\tilde{g}_{SE}(\xi, \xi) = 0$ olduğundan $B(X, \xi) = 0$ dır. O halde (3.2.11) eşitliği göz önüne alınırsa $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{g}_E(A_{N_0} \xi, X) = 0$$

olur. Öyleyse, (3.2.12) eşitliğinden $A_N \xi = 0$ bulunur. Bu ise ξ vektör alanının A_N in sıfır özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.3. $\{\xi, X_1, \dots, X_n\}$, A_N şekil operatörünün farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz vektörler olsun. O zaman A_N in bu bazlara göre matrisi

$$A_N = \alpha(x) \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & k_n \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.14)$$

dir. Burada $0, k_1, \dots, k_n$ A_{N_0} nin özdeğerleridir.

Tanım 3.2.4. $M, \mathbb{R}_\nu^{n+2}$ yarı-Öklid uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M nin $\mathbb{R}_0^{n+2}$ da X_p doğrultusundaki normal eğriliği k_p olmak üzere,

$$\kappa_p = \alpha(x)k_p \quad (3.2.15)$$

ifadesine M nin $\mathbb{R}_\nu^{n+2}$ deki N transversal vektör alanına göre normal eğriliği denir.

Teorem 3.2.5. $M, \mathbb{R}_\nu^{n+2}$ yarı-Öklid uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M nin $\mathbb{R}_0^{n+2}$ daki şekil operatörü A_{N_0} ve A_{N_0} in farklı $\{0, k_1, \dots, k_n\}$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin bir cümlesi $\{\xi, X_1, \dots, X_n\}$ olmak üzere bir

$X_p \in \Gamma(TM)$ nin $X_1, \dots, X_n$ ile yaptığı Öklid açıları, sırayla, $\theta_1, \dots, \theta_n$ ise

$$\kappa_p = \alpha(x) \sum_{i=1}^n k_i \cos^2 \theta_i \quad (3.2.16)$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}_\nu^{n+2}$ yarı-Öklid uzayının lightlike hiperyüzeyi M ve M nin N lightlike transversal vektör alanına göre normal eğriliği de κ_p olsun. O zaman k_p , M hiperyüzeyinin normal eğriliği olmak üzere

$$k_p = \sum_{i=1}^n k_i \cos^2 \theta_i$$

olduğu biliniyor. Böylece (3.2.15) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\kappa_p = \alpha(x) \sum_{i=1}^n k_i \cos^2 \theta_i$$

elde edilir.

Teorem 3.2.6. $\mathbb{R}^{n+2}$ yarı-Öklid uzayının bir lightlike hiperyüzeyi M ve M üzerinde asimptotik olmayan bir eğri

$$\beta : I \rightarrow M$$

olsun. β nin bir p noktası ile p deki teğetinden geçen ve M nin p deki birim normali ile θ_i ($0 < \theta_i < \frac{\pi}{2}$) açısı yapan bir düzlem ile M nin arakesit eğrisi β_i olsun. M nin β ve β_i doğrultusundaki normal eğriliklerinin $p \in \beta \cap \beta_i$ noktasındaki k ve k_{0_i} değerleri için N transversal vektöre alanına göre κ normal eğriliği

$$\kappa = \alpha^{-1}(x) k_{0_i} \cos \theta_i$$

şeklindedir.

İspat. M , $\mathbb{R}_\nu^{n+2}$ yarı-Öklid uzayının bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M , $\mathbb{R}_0^{n+2}$ nin hiperyüzeyi olmak üzere, β eğrisinin X_p doğrultusundaki k normal eğriliği göz

önüne alınırsa

$$k = k_{0_i} \cos \theta_i$$

olduğu açıktır. Böylece (3.2.11) denkleminde, N lightlike transversal vektör alanına göre normal eğrilik

$$\kappa = \alpha^{-1}(x) k_{0_i} \cos \theta_i$$

dir.

4. YARI-SİMETRİK METRİK VE NON-METRİK KONEKSİYONLU YARI-RIEMANN MANİFOLDUNUN LIGHTLIKE HİPERYÜZEYİ

Bu bölümde, yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyinin geometrisi ele alındı. Lightlike hiperyüzeyi üzerine indirgenen yarı-simetrik metrik koneksiyonun, yarı-simetrik fakat metrik olmadığı gösterildi. Bu koneksiyon göz önüne alınarak Gauss ve Weingarten formülleri, ikinci temel form ve şekil operatörü gibi geometrik kavramlar elde edildi. Böylece lightlike hiperyüzeyin Gauss ve Codazzi denklemleri ile bunların konformal geometrideki karşılıkları verildi. Son olarak, lightlike hiperyüzeyin yarı-simetrik koneksiyonuna göre Ricci eğrilik tensörünü simetrik yapan şartlar elde edildi.

4.1 Yarı-Simetrik Metrik Koneksiyonlu Yarı-Riemann Manifoldunun Lightlike Hiperyüzeyi

$\widetilde{M}$, $(n + 2)$ -boyutlu C^∞ manifold ve M

$$\phi : M \longrightarrow \widetilde{M}$$

izometrik immersiyonu ile $\widetilde{M}$ içerisine daldırılmış $(n + 1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzey olsun., ν , $1 \leq \nu \leq n + 1$, indeksli $\widetilde{g}$ metrik tensörüne sahip yarı-Riemann manifold $\widetilde{M}$ olmak üzere, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için M lightlike hiperyüzeyi üzerine indirgenen g metriğinin rankı n ve

$$g(X, Y) = \widetilde{g}(\phi X, \phi Y)$$

dir. Böylece $\forall \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için yarı-simetrik metrik koneksiyon

$$\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} + \widetilde{\pi}(\widetilde{Y})\widetilde{X} - \widetilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Q} \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ de Levi-Civita koneksiyon, π bir-form ve $\widetilde{Q}$,

$$\widetilde{g}(\widetilde{Q}, \widetilde{X}) = \widetilde{\pi}(\widetilde{X})$$

şeklinde tanımlanan bir vektör alanıdır. $\tilde{Q}$ vektör alanı,

$$T\tilde{M} = TM \oplus tr(TM)$$

ortogonal olmayan direkt toplamından dolayı $Q \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ ve μ fonksiyonu için

$$\tilde{Q} = \phi Q + \mu N \quad (4.1.2)$$

şeklinde yazılabilir.

∇ ve $\overset{\circ}{\nabla}$, sırasıyla, $\tilde{\nabla}$ ve $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ den indirgenmiş koneksiyonlar olsun. O halde $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için $\tilde{\nabla}$ ve $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ koneksiyonlarına göre Gauss formülleri, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_{\phi X} \phi Y = \phi(\nabla_X Y) + B(X, Y) N \quad (4.1.3)$$

ve

$$\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{\phi X} \phi Y = \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) + m(X, Y) N \quad (4.1.4)$$

dir. Burada B ve m , sırasıyla, Levi-Civita ve yarı-simetrik koneksiyonlarına göre M nin ikinci temel formu ve $(0, 2)$ tipinde tensör alanıdır. (4.1.1) eşitliğinden

$$\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{\phi X} \phi Y = \tilde{\nabla}_{\phi X} \phi Y + \tilde{\pi}(\phi Y) \phi X - \tilde{g}(\phi X, \phi Y) \tilde{Q} \quad (4.1.5)$$

elde edilir. O halde (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4) denklemleri (4.1.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) + m(X, Y) N &= \phi(\nabla_X Y) + B(X, Y) N + \pi(Y) \phi X \\ &- g(X, Y) (\phi Q + \mu N) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

bulunur. $\tilde{\pi}(\phi Y) = \pi(Y)$ olduğu göz önüne alınırsa, (4.1.6) ifadesinden

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \pi(Y) X - g(X, Y) Q \quad (4.1.7)$$

ve

$$m(X, Y) = B(X, Y) - \mu g(X, Y) \quad (4.1.8)$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için (4.1.7), (4.1.8) denklemleri kullanılır ve Teorem 3.1.2 gözönüne alınır,

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{\nabla}_X g)(Y, Z) &= \{m(X, Y) + \mu g(X, Y)\}\eta(Z) \\ &+ \{m(X, Z) + \mu g(X, Z)\}\eta(Y) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

ve (4.1.7) denkleminde $\overset{\circ}{\nabla}$ indirgenmiş koneksiyon için torsiyon tensörü

$$T(X, Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y \quad (4.1.10)$$

biçiminde bulunur. Böylece (4.1.9) ve (4.1.10) eşitlikleri göz önüne alınır, aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.1.1. Yarı-simetrik metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun M lightlike hiperyüzeyi üzerine indirgenen koneksiyon, yarı-simetrik fakat metrik koneksiyon değildir.

$\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonuna göre Weingarten formülü

$$\widetilde{\nabla}_{\phi X} N = \phi(-A_N X) + \tau(X)N \quad (4.1.11)$$

dir. Burada A_N , M üzerinde indirgenmiş koneksiyona göre şekil operatörüdür (Duggal, 1996).

Böylece (4.1.1) ve (4.1.11) denklemleri kullanılırsa, $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik metrik koneksiyonun Weingarten formülü

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} N = \phi((-A_N + \lambda I)X - \lambda' Q) + (\tau(X) - \mu \lambda')N \quad (4.1.12)$$

elde edilir. Burada

$$\lambda = \tilde{\pi}(N) \text{ ve } \lambda' = g(\phi X, N)$$

dir.

Önerme 4.1.2. $S(TM)$ ve $S(TM)'$, M üzerinde iki perde dağılım olsun. m ve m' de $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyona göre M nin ikinci temel formu olmak üzere M üzerindeki ikinci temel form, perde dağılımından bağımsızdır.

İspat. $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için (4.1.4) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} m(X, Y) &= \tilde{g}(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \phi Y - \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y), \xi) \\ &= \tilde{g}(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \phi Y, \xi) - g(\phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y), \xi) \\ &= \tilde{g}(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \phi Y, \xi) \\ &= m'(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise yarı-simetrik koneksiyonuna göre ikinci temel formun perde dağılımından bağımsız olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.3. Yarı-simetrik koneksiyonlu lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formu dejeneredir.

İspat. $\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(Rad(TM))$ için (4.1.8) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} m(X, \xi) &= B(X, \xi) - \mu g(X, \xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece m dejeneredir.

$P, \Gamma(TM)$ den $\Gamma(S(TM))$ ye tanımlanan bir projeksiyon dönüşüm olsun. O halde $\overset{*}{\nabla}$ ve $\overset{\circ}{\nabla}$, sırasıyla, ∇ lineer ve $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyonlarından perde

üzerine indirgenmiş koneksiyonlar olmak üzere

$$TM = S(TM) \perp TM^\perp$$

eşitliğinden perde üzerindeki ∇ lineer ve $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyonlarına göre Gauss formülleri

$$\nabla_{\phi X} P\phi Y = \phi(\overset{*}{\nabla}_X PY) + C(X, PY)\xi \quad (4.1.13)$$

ve

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} P\phi Y = \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X^* PY) + D(X, PY)\xi \quad (4.1.14)$$

dir. Böylece (4.1.7), (4.1.13) ve (4.1.14) denklemi kullanılır ve

$$\phi Q = P\phi Q + \lambda\xi$$

değeri yerine yazılırsa, sırasıyla,

$$D(X, PY) = C(X, PY) - \lambda g(X, PY) \quad (4.1.15)$$

ve

$$\overset{\circ}{\nabla}_X^* PY = \overset{*}{\nabla}_X PY + \pi(PY)X - g(X, PY)PQ \quad (4.1.16)$$

elde edilir. Buradan $\forall P\phi X, P\phi Y$, ve $P\phi Z \in \Gamma(S(TM))$ için (4.1.16) denklemi göz önüne alınırsa

$$(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X}^* g)(P\phi Y, P\phi Z) = 0 \quad (4.1.17)$$

ve

$$\overset{*}{T}(P\phi X, P\phi Y) = \pi(P\phi Y)P\phi X - \pi(P\phi X)P\phi Y \quad (4.1.18)$$

olur. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.4. Yarı-simetrik koneksiyonlu M lightlike hiperyüzeyin $S(TM)$ dağılımı üzerindeki $\overset{\circ}{\nabla}^*$ lineer koneksiyonu bir yarı-simetrik metrik koneksiyondur.

$\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için ∇ ve $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonlarının Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\nabla_{\phi X} \xi = -\overset{*}{A}_\xi \phi X - \tau(\phi X) \xi \quad (4.1.19)$$

ve

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \xi = \nabla_{\phi X} \xi + \pi(\xi) \phi X - g(\phi X, \xi) \phi Q \quad (4.1.20)$$

dir.

Teorem 4.1.5. $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik metrik koneksiyonuna göre eğrilik tensörü $\overset{\circ}{\widetilde{R}}$ ve M lightlike hiperyüzeyinin $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyonuna göre eğrilik tensörü $\overset{\circ}{R}$ olsun. O zaman $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için M nin Gauss-Codazzi denklemleri

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\widetilde{g}}(\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y) \phi Z, \xi) &= (\overset{\circ}{\nabla}_X m)(Y, Z) - (\overset{\circ}{\nabla}_Y m)(X, Z) + m(Y, Z)(\tau(X) - \mu \lambda') \\ &\quad - m(X, Z)(\tau(Y) - \mu \lambda') + m(\pi(Y)X - \pi(X)Y, Z), \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\widetilde{g}}(\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y) \phi Z, N) &= g(\phi(\overset{\circ}{R}(X, Y)Z), N) + m(Y, Z)(-A_N + \lambda I)g(\phi X, N) \\ &\quad - m(X, Z)(-A_N + \lambda I)g(\phi Y, N) + \lambda' m(X, Z)g(\phi Q, N) \\ &\quad - \lambda' m(Y, Z)g(\phi Q, N), \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\widetilde{g}}(\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y)\phi Z, P\phi W) &= g(\phi(\overset{\circ}{R}(X, Y)Z), P\phi W) \\
&+ m(Y, Z)(-A_N + \lambda I)g(\phi X, P\phi W) \\
&- m(X, Z)(-A_N + \lambda I)g(\phi Y, P\phi W) \\
&+ \lambda' m(X, Z)g(\phi Q, P\phi W) - \lambda' m(Y, Z)g(\phi Q, P\phi W)
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

dir.

İspat. $\overset{\circ}{\widetilde{R}}$ ve $\overset{\circ}{R}$, sırasıyla, $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik metrik ve $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyonlarına göre $\widetilde{M}$ ve M nin eğrilik tensörleri olsunlar. Böylece $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için (4.1.4) ve (4.1.12) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y)\phi Z &= \phi(\overset{\circ}{R}(X, Y)Z) + m(Y, Z)\phi(-A_N + \lambda I)X \\
&- m(X, Z)\phi(-A_N + \lambda I)Y + \lambda' m(X, Z)Q - \lambda' m(Y, Z)Q \\
&+ m(\pi(Y)X - \pi(X)Y, Z)N + m(Y, Z)(\tau(X) - \mu\lambda')N \\
&+ \{(\overset{\circ}{\nabla}_X m)(Y, Z) - (\overset{\circ}{\nabla}_Y m)(X, Z)\}N - m(X, Z)(\tau(Y) - \mu\lambda')N
\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

elde edilir. Buradan (4.1.24) denklemi ile ξ , N ve $P\phi W$ vektör demetleri skalar çarpılırsa (4.1.21)-(4.1.23) eşitlikleri ile ifade edilen Gauss-Codazzi denklemleri bulunur.

4.2. Gauss ve Codazzinin Konformal Denklemleri

$\overset{\circ}{\widetilde{C}}$ ve $\overset{\circ}{C}$, sırasıyla, $\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}$ ve $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonlarına göre $\widetilde{M}$ ve M nin konformal eğrilik tensörlerini göstermek üzere $\widetilde{M}$ nin konformal eğrilik tensörü, $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\widetilde{C}}(\phi X, \phi Y, \phi Z, N) &= \overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y, \phi Z, N) + \widetilde{g}(X, N)\overset{\circ}{\widetilde{L}}(\phi Y, \phi Z) - \widetilde{g}(Y, N)\overset{\circ}{\widetilde{L}}(\phi X, \phi Z) \\
&+ \widetilde{g}(Y, Z)\overset{\circ}{\widetilde{L}}(\phi X, N) - \widetilde{g}(X, Z)\overset{\circ}{\widetilde{L}}(\phi Y, N)
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

dir. Burada

$$\overset{\circ}{\tilde{L}}(\phi Y, \phi Z) = -\frac{\overset{\circ}{\tilde{R}} ic(\phi Y, \phi Z)}{n} + \frac{\overset{\circ}{\tilde{\rho}}}{2(n+1)(n)} \tilde{g}(Y, Z) \quad (4.2.2)$$

dir.

$\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için M nin konformal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{C}}(\phi X, \phi Y, \phi Z, N) &= \overset{\circ}{R}(\phi X, \phi Y, \phi Z, N) + g(X, N) \overset{\circ}{L}(\phi Y, \phi Z) - g(Y, N) \overset{\circ}{L}(\phi X, \phi Z) \\ &+ g(Y, Z) \overset{\circ}{L}(\phi X, N) - g(X, Z) \overset{\circ}{L}(\phi Y, N) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

dir. Burada

$$\overset{\circ}{L}(\phi Y, \phi Z) = -\frac{\overset{\circ}{R} ic(\phi Y, \phi Z)}{n-1} + \frac{\overset{\circ}{\rho}}{2n(n-1)} g(Y, Z) \quad (4.2.4)$$

dir. (4.1.18) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{R}} ic(\phi Y, \phi Z) &= \overset{\circ}{R} ic(\phi Y, \phi Z) + \overset{\circ}{\tilde{R}}(\phi Y, \xi, \phi Z, N) \\ &+ m(Y, Z)(-A_N + \lambda I) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

elde edilir. Böylece $\forall \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$ için (4.2.1) denkleminde (4.2.2) değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{C}}(\phi Y, \xi, \phi Z, N) &= \overset{\circ}{\tilde{R}}(\phi Y, \xi, \phi Z, N) - \frac{(\overset{\circ}{\rho} + \overset{\circ}{\tilde{\rho}} \tilde{g}(Y, Z))}{2(n+1)(n)} \\ &+ \frac{\overset{\circ}{R} ic(\phi Y, \phi Z) - \tilde{g}(\phi Y, N) \overset{\circ}{R} ic(\xi, \phi Z) + \tilde{g}(Y, Z) \overset{\circ}{R} ic(\xi, N)}{n} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

elde edilir. Ayrıca (4.2.6) eşitliğindeki $\overset{\circ}{\tilde{R}}$ nin değeri (4.2.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{R} ic(\phi Y, \phi Z) &= \frac{(n-1)}{n} \overset{\circ}{\tilde{R}} ic(\phi Y, \phi Z) - \overset{\circ}{\tilde{C}}(\phi Y, \xi, \phi Z, N) \\ &- \frac{\overset{\circ}{\rho} + \overset{\circ}{\tilde{\rho}} \tilde{g}(Y, Z)}{2n(n+1)} - \frac{\tilde{g}(Y, N) \overset{\circ}{R} ic(\xi, \phi Z)}{n} + \frac{\tilde{g}(Y, Z) \overset{\circ}{R} ic(\xi, N)}{n} \\ &- m(Y, Z)(-A_N + \lambda I) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

elde edilir. Burada

$$\overset{\circ}{\rho} = \frac{(n-2)\overset{\circ}{\tilde{\rho}}}{n} + f(A_N - \lambda I) \quad (4.2.8)$$

ve

$$f = m(E_i, E_i) = iz \overset{*}{A}_\xi$$

dir. Böylece (4.2.4), (4.2.7) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{L}(\phi Y, \phi Z) &= \overset{\circ}{\tilde{L}}(\phi Y, \phi Z) + \frac{1}{n-1} \overset{\circ}{\tilde{C}}(\phi Y, \xi, \phi Z, N) \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \tilde{\rho} g(Y, Z) - \frac{1}{n(n-1)} g(Y, Z) \overset{\circ}{\tilde{R}} ic(\xi, N) \\ &\quad + \frac{1}{n(n-1)} g(Y, N) \overset{\circ}{\tilde{R}} ic(\xi, Z) + \frac{1}{n-1} m(Y, Z)(-A_N + \lambda I) \\ &\quad + \frac{1}{2n(n-1)} g(Y, Z) f(A_N - \lambda I) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

dir. (4.2.1) denkleminde (4.2.3), (4.2.9) denklemleri kullanılır ve yarı-simetrik koneksiyonlu lightlike hiperyüzeyin eğrilik tensörü göz önüne alınırsa, Gauss denkleminin konformal denklemleri

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{C}}(\phi X, \phi Y, \phi Z, P\phi W) &= \phi(\mathcal{C}(X, Y, Z, PW)) - \frac{1}{n-1} \{g(X, PW) \overset{\circ}{\tilde{C}}(\phi Y, \xi, \phi Z, P\phi W) \\ &\quad - g(Y, PW) \overset{\circ}{\tilde{C}}(\phi X, \xi, \phi Z, P\phi W) \\ &\quad + g(Y, Z) \overset{\circ}{\tilde{C}}(\phi X, \xi, P\phi W, P\phi W) \\ &\quad - g(X, Z) \overset{\circ}{\tilde{C}}(\phi Y, \xi, P\phi W, P\phi W)\} \\ &\quad + \frac{2\tilde{\rho}}{n^2} \{g(Y, PW)g(X, Z) - g(X, PW)g(Y, Z)\} \\ &\quad + \frac{\overset{\circ}{Ric}(\xi, PW)}{n(n-1)} \{g(X, PW)g(Y, Z) - g(Y, PW)g(X, Z)\} \\ &\quad + \frac{n-2}{n-1} (-A_N + \lambda) g(X, PW) m(Y, Z) \\ &\quad + \frac{2-n}{n-1} (-A_N + \lambda) g(Y, PW) m(X, Z) \\ &\quad - \frac{1}{n-1} \{g(Y, Z) m(X, PW) - g(X, Z) m(Y, PW)\} \\ &\quad - \frac{f(A_N - \lambda)}{n(n-1)} \{g(X, PW)g(Y, Z) - g(Y, PW)g(X, Z)\} \\ &\quad + \lambda' m(X, Z) g(Q, PW) - \lambda' m(Y, Z) g(Q, PW) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

ve

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\tilde{\mathcal{C}}}(\phi X, \phi Y, \phi Z, N) &= \phi(\mathcal{C}(X, Y, Z, N)) - \frac{1}{n-1}\{\eta(\phi X) \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{C}}}(\phi Y, \xi, \phi Z, N) \\
&\quad - \eta(\phi Y) \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{C}}}(\phi X, \xi, \phi Z, N) + g(Y, Z) \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{C}}}(\phi X, \xi, N, N) \\
&\quad - g(X, Z) \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{C}}}(\phi Y, \xi, N, N)\} + \frac{2\overset{\circ}{\rho}}{n^2}\{\eta(\phi Y)g(X, Z) \\
&\quad - \eta(\phi X)g(Y, Z)\} + \frac{\overset{\circ}{Ric}(\xi, PW)}{n(n-1)}\{\eta(\phi X)g(Y, Z) \\
&\quad - \eta(\phi Y)g(X, Z)\} + \frac{n-2}{n-1}(-A_N + \lambda)\eta(\phi X)m(Y, Z) \\
&\quad + \frac{2-n}{n-1}(-A_N + \lambda)\eta(\phi Y)m(X, Z) \\
&\quad - \frac{1}{n-1}\{g(Y, Z)m(X, N) - g(X, Z)m(Y, N)\} \\
&\quad - \frac{f(A_N - \lambda)}{n(n-1)}\{\eta(\phi X)g(Y, Z) - \eta(\phi Y)g(X, Z)\} \\
&\quad + \lambda' m(X, Z)\eta(\phi Q) - \lambda' m(Y, Z)\eta(\phi Q)
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

biçiminde bulunur. Benzer şekilde (4.2.1), (4.2.3) ve (4.2.11) denklemlerinden Codazzinin konformal denklemi

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathcal{C}}}(\phi X, \phi Y, \phi Z, \xi) = \phi(\overset{\circ}{\mathcal{C}}(X, Y, Z, \xi)) \tag{4.2.12}$$

olur.

4.3. Yarı-Simetrik Koneksiyonlu Lightlike Hiperyüzeyin Ricci Eğriliği

M , yarı-simetrik metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. M lightlike hiperyüzeyinin indirgenmiş $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörü; $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (4.1.7), (4.1.23) ve (4.1.24) denklemleri gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}(\phi X, \phi Y)\xi &= \overset{\circ}{\nabla}_{\phi Y}^* (\overset{*}{A}_{\xi} \phi X) + C(\phi Y, \overset{*}{A}_{\xi} \phi X)\xi - \overset{\circ}{\nabla}_{\phi X}^* (\overset{*}{A}_{\xi} \phi Y) - C(\phi X, \overset{*}{A}_{\xi} \phi Y)\xi \\
&\quad + g(\overset{*}{A}_{\xi} X, Q)\phi Y - g(\overset{*}{A}_{\xi} Y, Q)\phi X + g(X, \overset{*}{A}_{\xi} Y)\phi Q \\
&\quad - g(Y, \overset{*}{A}_{\xi} X)\phi Q - \tau(\phi X) \overset{*}{A}_{\xi} \phi Y + \tau(\phi Y) \overset{*}{A}_{\xi} \phi X + \overset{*}{A}_{\xi} [\phi X, \phi Y] \\
&\quad - 2d\tau(\phi X, \phi Y)\xi
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

şeklinde elde edilir.

$\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$ ve $\{w_1, \dots, w_n, \xi\}$ quasi-ortanormal bazı için M lightlike hiperyüzeyinin $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyonuna göre Ricci tensörü

$$Ric(\phi X, \phi Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(\phi X, \phi w_i) \phi Y, \phi w_i) + g(R(\phi X, \xi) \phi Y, N) \quad (4.3.2)$$

dir.

Teorem 4.3.1. , yarı-simetrik metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi M olsun. O zaman indirgenmiş koneksiyonun Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ tarafından indirgenen τ bir formunun kapalı, M nin total geodezik ve μ fonksiyonunun sıfır olmasıdır.

İspat. M , yarı-simetrik metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (4.3.2) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} Ric(\phi X, \phi Y) - Ric(\phi Y, \phi X) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(\overset{\circ}{R}(\phi X, \phi w_i) \phi Y, \phi w_i) + g(\overset{\circ}{R}(\phi X, \xi) \phi Y, N) \\ &- \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(\overset{\circ}{R}(\phi Y, \phi w_i) \phi X, \phi w_i) + g(\overset{\circ}{R}(\phi Y, \xi) \phi X, N) \end{aligned}$$

olur. O zaman (4.3.1) denklemi ile $\phi Q = P\phi Q + \lambda \xi$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} Ric(\phi X, \phi Y) - Ric(\phi Y, \phi X) &= C(\phi Y, \overset{*}{A}_\xi \phi X) - C(\phi X, \overset{*}{A}_\xi \phi Y) - 2d\tau(\phi X, \phi Y) \\ &+ \{m(X, PQ) + \mu g(X, PQ)\} \eta(\phi Y) \\ &- \{m(Y, PQ) + \mu g(Y, PQ)\} \eta(\phi X) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise teoremi ispatlar.

Teorem 4.3.2 $\widetilde{M}$, yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifold ve M , $\widetilde{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $\overset{*}{A}_\xi = 0, \xi \in \Gamma(Rad(TM))$,
- (ii) $TM^\perp$ paralel dağılımdır,
- (iii) $TM^\perp$ Killing dağılımdır.

İspat. $(i) \Leftrightarrow (ii) \forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in (Rad(TM))$ için (4.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \xi = - \overset{*}{A}_{\xi} \phi X - \tau(\phi X) \xi$$

elde edilir. Bu ise $i)$ ve $ii)$ nin denklğini gösterir.

$i) \Leftrightarrow iii) \forall \phi Z, \phi Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in (Rad(TM))$ için Lie türevinin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} (L_{\xi}g)(\phi Y, \phi Z) &= \xi(g(Y, Z)) - g([\xi, \phi Y], \phi Z) - g(\phi Y, [\xi, \phi Z]) \\ &= g(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Y} \xi, \phi Z) + g(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Z} \xi, \phi Y) \\ &= g(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Y} \xi + \pi(\xi)\phi Y - g(\xi, \phi Y)\phi Q, \phi Z) \\ &\quad - g(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Z} \xi + \pi(\xi)\phi Z - g(\xi, \phi Z)\phi Q, \phi Y) \\ &= g(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Y} \xi, \phi Z) + g(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Z} \xi, \phi Y) \\ &= g(- \overset{*}{A}_{\xi} \phi Y - \tau(\phi Y) \xi, \phi Z) + g(- \overset{*}{A}_{\xi} \phi Z - \tau(\phi Z) \xi, \phi Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 4.3.3. $\widetilde{M}(c)$, sabit kesitsel eğriliğe sahip yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifold ve M , $\widetilde{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(\phi X, \phi Y) = -ncg(X, Y) + \varepsilon_i(n-1)m(X, Y)(-A_N + \lambda I), \quad 1 \leq i \leq n+1 \quad (4.3.3)$$

dir.

İspat. $\widetilde{M}(c)$ nin yarı-simetrik metrik koneksiyonuna göre eğrilik tensörü $\overset{\circ}{R}$ olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi w_i) \phi Y &= \phi(\overset{\circ}{R}(X, w_i) Y) + m(w_i, Y)(-A_N + \lambda I) \phi X \\
&- m(X, Y) \phi(-A_N + \lambda I) \phi w_i + \lambda' m(X, Y) \phi Q \\
&- \lambda' m(w_i, Y) \phi Q + m(\pi(\phi w_i) X - \pi(\phi X) w_i, Y) \\
&+ \{(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} m)(\phi w_i, \phi Y) + m(w_i, Z)(\tau(\phi X) - \mu \lambda')\} N \\
&- \{(\overset{\circ}{\nabla}_{w_i} m)(\phi X, \phi Y) + m(X, Y)(\tau(\phi w_i) - \mu \lambda')\} N
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\widetilde{M}(c)$ yarı-Riemann manifoldunun c sabit eğrilikli olduğu göz önüne alınır ve Ricci eğrilik tensörünün tanımı kullanılırsa

$$Ric(X, Y) = -ncg(X, Y) + \varepsilon_i(n-1)m(X, Y)(-A_N + \lambda I)$$

elde edilir.

Teorem 4.3.4. M , $(n+2)$ -boyutlu $\widetilde{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman M nin Ricci tensörü dejeneredir.

İspat. Ric , M nin Ricci eğrilik tensörü olmak üzere $\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için (4.3.3) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
Ric(\phi X, \xi) &= -ncg(X, \xi) + \varepsilon_i(n-1)m(X, \xi)(-\overset{\circ}{A}_N + \lambda I) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise M nin Ricci tensörünün dejenere olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.5. M , yarı-simetrik metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}(c)$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman lightlike hiperyüzeyin Ricci tensörü simetriktir.

İspat. $\forall \phi X$ ve $\phi Y \in \Gamma(TM)$ için (4.3.3) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) - Ric(Y, X) &= -ncg(X, Y) + (n-1)\varepsilon_i m(X, Y)(-\overset{\circ}{A}_N + \lambda I) \\
&+ ncg(Y, X) - (n-1)\varepsilon_i m(Y, X)(-\overset{\circ}{A}_N + \lambda I) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece M nin Ricci tensörü simetriktir.

Teorem 4.3.6. M , yarı-simetrik metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}(c)$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman M nin Ricci tensörünün paralel olması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik ve μ fonksiyonunun sıfır olmasıdır.

İspat. $\overset{\circ}{\nabla}$, M üzerinde indirgenmiş yarı-simetrik koneksiyon olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$ için Ricci tensörünün kovaryant türevi kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Z} Ric)(\phi X, \phi Y) &= -nc(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Z} g)(\phi X, \phi Y) \\ &+ \varepsilon_i(n-1)(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Z} m)(\phi X, \phi Y)(-A_N + \lambda I) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.1.9) denkleminde

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Z} Ric)(\phi X, \phi Y) &= -nc\{(m(Z, X) + \mu g(Z, X))\eta(\phi Y) \\ &+ (m(Z, Y) + \mu g(Z, Y))\eta(\phi X)\} \\ &+ \varepsilon_i(n-1)(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Z} m)(\phi X, \phi Y)(-A_N + \lambda I) \end{aligned}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

4.4. Yarı-Simetrik Non-Metrik Koneksiyonlu Yarı-Riemann Manifoldunun Lightlike Hiperyüzeyi

Bu alt bölümde, yarı-simetrik non-metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyinin geometrisi incelendi. Bölüm 4.1 ve 4.2 de yapılan tüm çalışmaların yarı-simetrik non-metrik koneksiyon için karşılıkları elde edilerek benzer ve farklı sonuçlar verildi.

$\widetilde{M}$ $(n+2)$ -boyutlu C^∞ manifold ve M

$$\phi : M \rightarrow \widetilde{M}$$

izometrik immersiyonu ile $\widetilde{M}$ içerisine daldırılmış $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzey olsun. O zaman $\overset{\circ}{\nabla}$, $\widetilde{M}$ üzerinde yarı-simetrik non-metrik bir

koneksiyon olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\phi X} \phi Y = \widetilde{\nabla}_{\phi X} \phi Y + \pi(\widetilde{Y})\widetilde{X} \quad (4.4.1)$$

dir. Burada $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ de Levi-Civita koneksiyondur.

∇ ve $\overset{\circ}{\nabla}$, sırasıyla, $\widetilde{\nabla}$ ve $\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}$ den indirgenmiş koneksiyonlar olsun. O zaman $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için ∇ ve $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonlarına göre Gauss formülleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_{\phi X} \phi Y = \phi(\nabla_X Y) + B(X, Y) N \quad (4.4.2)$$

ve

$$\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\phi X} \phi Y = \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) + m(X, Y) N \quad (4.4.3)$$

dir. Böylece (4.4.1) eşitliğinden

$$\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\phi X} \phi Y = \overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \phi Y + \widetilde{\pi}(\phi Y)\phi X \quad (4.4.4)$$

olur. (4.4.2) ve (4.4.3) denklemleri (4.4.4) de yerine yazılırsa

$$\phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) + m(X, Y) N = \phi(\nabla_X Y) + B(X, Y) N + \widetilde{\pi}(\phi Y)\phi X \quad (4.4.5)$$

elde edilir. Böylece (4.4.5) denkleminde

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \pi(Y) X \quad (4.4.6)$$

ve

$$m(X, Y) = B(X, Y) \quad (4.4.7)$$

olur. Diğer taraftan $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$ için (4.4.6), (4.4.7) denklemleri ve Teorem 3.1.2 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
(\overset{\circ}{\nabla}_X g)(Y, Z) &= m(X, Y) \eta(Z) + m(X, Z) \eta(Y) \\
&\quad - \pi(Y) g(X, Z) - \pi(Z) g(X, Y)
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

elde edilir. Ayrıca (4.4.6) denkleminde

$$T(X, Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y$$

olur. Böylece aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.4.1. $\widetilde{M}$, bir yarı-simetrik non-metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldu ve M , $\widetilde{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman M üzerindeki indirgenmiş $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyonu metrik koneksiyon değildir.

$\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(tr(TM))$ için (4.1.11) ve (4.4.1) denklemleri kullanılırsa, $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik non-metrik koneksiyonun Weingarten formülü

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} N = -\phi(\overset{\circ}{A}_N X) + \tau(X) N \tag{4.4.9}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\tilde{\pi}(N) = \lambda \text{ ve } \overset{\circ}{A}_N = (A_N - \lambda I)$$

dir.

Teorem 4.4.2. $S(TM)$ ve $S(TM)'$, M üzerinde iki perde dağılım olsun. m ve m' , $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik non-metrik koneksiyonuna göre M nin ikinci temel formu olmak üzere M üzerindeki ikinci temel form perde dağılımından bağımsızdır.

İspat. $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için (4.4.3) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
m(X, Y) &= \tilde{g}(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \phi Y - \phi(\nabla_X Y), \xi) \\
&= \tilde{g}(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \phi Y, \xi) \\
&= m'(X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise yarı-simetrik non-metrik koneksiyonuna göre ikinci temel formun ekran dağılımından bağımsız olduğunu gösterir.

$P, \Gamma(TM)$ den $\Gamma(S(TM))$ ye tanımlanan bir projeksiyon olsun. O halde

$$TM = S(TM) \perp TM^\perp$$

eşitliğinden, perde üzerindeki ∇ ve $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonlarına göre Gauss formülleri

$$\nabla_{\phi X} P\phi Y = \phi(\overset{*}{\nabla}_X PY) + C(X, PY)\xi \quad (4.4.10)$$

ve

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} P\phi Y = \phi(\overset{\circ}{\overset{*}{\nabla}}_X PY) + D(X, PY)\xi \quad (4.4.11)$$

dir. Böylece (4.4.6), (4.4.10) ve (4.4.11) denklemleri kullanılırsa

$$D(X, PY) = C(X, PY) \quad (4.4.12)$$

ve

$$\overset{\circ}{\overset{*}{\nabla}}_X PY = \overset{*}{\nabla}_X PY + \pi(PY)X \quad (4.4.13)$$

elde edilir. Buradan da (4.4.13) denklemi göz önüne alınırsa $\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $P\phi Y, P\phi Z \in \Gamma(S(TM))$ için

$$(\overset{\circ}{\overset{*}{\nabla}}_{\phi X} g)(P\phi Y, P\phi Z) = -\pi(P\phi Y)g(X, PZ) - \pi(P\phi Z)g(PY, X) \quad (4.4.14)$$

ve

$$\overset{*}{T}(P\phi X, P\phi Y) = \pi(P\phi Y)P\phi X - \pi(P\phi X)P\phi Y \quad (4.4.15)$$

olur. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4.3. M bir lightlike hiperyüzey ve $S(TM), M$ nin perde dağılımı olsun. O zaman $S(TM)$ üzerindeki $\overset{*}{\nabla}$ lineer koneksiyonu yarı-simetrik fakat metrik koneksiyon değildir.

$\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonun Weingarten formülü

$$\overset{\circ}{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + \pi(\xi)X \quad (4.4.16)$$

dir.

Teorem 4.4.4. $\widetilde{M}$, yarı-Riemann manifoldunun $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik non metrik koneksiyonuna göre eğrilik tensörü $\overset{\circ}{\widetilde{R}}$ ve M lightlike hiperyüzeyinin $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik non-metrik koneksiyonuna göre eğrilik tensörü $\overset{\circ}{R}$ olsun. O zaman $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(tr(TM))$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için M nin Gauss-Codazzi denklemleri

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y)\phi Z, \xi) &= (\overset{\circ}{\nabla}_X)m(Y, Z) - (\overset{\circ}{\nabla}_Y)m(X, Z) \\ &\quad + m(Y, Z)\tau(X) - m(X, Z)\tau(Y) \\ &\quad + m(\pi(Y)X - \pi(X)Y, Z) \\ &\quad - \lambda\xi\{m(X, Z) - m(Y, Z)\}, \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y)\phi Z, N) &= g(\phi(R(X, Y)Z), N) - \lambda m(Y, Z)N \\ &\quad + \lambda m(X, Z)N, \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y)\phi Z, PW) &= g(\phi(R(X, Y)Z), PW) - m(X, Z)PW \\ &\quad + m(Y, Z)PW + m(X, Z)D(Y, PW) \\ &\quad - m(Y, Z)D(X, PW) \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

ve

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y)\phi Z, PW) &= g(\phi(R(X, Y)Z), PW) - m(X, Z)PW \\ &\quad + m(Y, Z)PW \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

dir.

İspat. $\overset{\circ}{\widetilde{R}}$ ve $\overset{\circ}{R}$, sırasıyla, $\overset{\circ}{\nabla}$ ve $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonlarına göre $\widetilde{M}$ ve M nin eğrilik tensörleri olsunlar. Böylece $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$ $N \in \Gamma(tr(TM))$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için (4.4.3) ve (4.4.9) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}(\phi X, \phi Y)\phi Z &= \phi(\overset{\circ}{R}(X, Y)Z) + (\overset{\circ}{\nabla}_X)m(Y, Z)N - (\overset{\circ}{\nabla}_Y)m(X, Z)N \\
&+ m(\pi(Y)X - \pi(X)Y, Z)N - m(Y, Z)\overset{\circ}{A}_N\phi X \quad (4.4.21) \\
&+ m(X, Z)\overset{\circ}{A}_N\phi Y + \{m(Y, Z)\tau(X) - m(X, Z)\tau(Y)\}N
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.4.21) ile ξ , N ve $P\phi W$ vektör demetleri skalar çarpılırsa (4.4.17)-(4.4.20) eşitlikleri ile ifade edilen Gauss ve Codazzi denklemleri bulunur.

Teorem 4.4.5. $\widetilde{M}$, yarı-simetrik non-metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifold ve M , $\widetilde{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman indirgenmiş koneksiyonun Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ tarafından indirgenen τ 1-formunun kapalı ve M nin total geodezik olmasıdır.

İspat. M , yarı-simetrik non metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (4.2.1) ve (4.2.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
Ric(\phi X, \phi Y) - Ric(\phi Y, \phi X) &= D(Y, \overset{*}{A}_\xi X) - D(X, \overset{*}{A}_\xi Y) + m(X, PQ)\eta(\phi Y) \\
&- m(Y, PQ)\eta(\phi X) - 2d\tau(\phi X, \phi Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise teoremi ispatlar.

Teorem 4.4.6. $\widetilde{M}(c)$, sabit kesitsel eğrilige sahip yarı-simetrik non metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifold ve M , $\widetilde{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(\phi X, \phi Y) = -ncg(X, Y) - (n-1)m(X, Y) \quad (4.4.22)$$

dir.

İspat. $\widetilde{M}(c)$ nin yarı-simetrik non-metrik koneksiyona göre eğrilik tensörü $\overset{\circ}{R}$ olmak üzere, $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için M nin Ricci tensörü tanımından

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}(\phi X, \phi w_i)\phi Y &= \phi(\overset{\circ}{R}(X, w_i)Y) + (\overset{\circ}{\nabla}_X m)(w_i, Y)N - (\overset{\circ}{\nabla}_{w_i} m)(X, Y)N \\
&+ m(\pi(w_i)X - \pi(X)w_i, Y)N \\
&- m(w_i, Y)A_N\phi X + m(X, Y)A_N\phi w_i \\
&+ \{m(w_i, Y)\tau(X) - m(X, Y)\tau(w_i)\}N
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\widetilde{M}(c)$ nin sabit kesitsel eğrilikli olduğu göz önüne alınır ve Ricci eğrilik tensörünün tanımı kullanılırsa

$$Ric(\phi X, \phi Y) = -ncg(X, Y) - (n-1)m(X, Y)$$

elde edilir.

Teorem 4.4.7. M , $(n+2)$ -boyutlu $\widetilde{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman M nin Ricci tensörü dejeneredir.

İspat. Ric , M nin Ricci eğrilik tensörü olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (4.4.22) denklemi kullanılırsa

$$Ric(\phi X, \xi) = 0$$

olur. Bu ise Ricci tensörünün dejenere olduğunu gösterir.

Teorem 4.4.8. M , yarı-simetrik non-metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}(c)$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman M nin Ricci tensörü simetrik-tir.

İspat. $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (4.4.21) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
Ric(\phi X, \phi Y) - Ric(\phi Y, \phi X) &= -ncg(X, Y) + (n-1)m(X, Y) \\
&+ ncg(Y, X) - (n-1)m(Y, X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece M nin Ricci tensörü simetrik-tir.

Teorem 4.4.9. M , yarı-simetrik non-metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}(c)$ yarı-Riemann

manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman M nin Ricci tensörünün paralel olması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır.

İspat. $\overset{\circ}{\nabla}$, M üzerinde indirgenmiş yarı-simetrik non-metrik koneksiyon olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için Ricci tensörünün kovaryant türevi tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_{\phi Z} Ric)(\phi X, \phi Y) &= \nabla_{\phi Z} Ric(\phi X, \phi Y) - Ric(\nabla_{\phi Z} \phi X, \phi Y) - Ric(\phi X, \nabla_{\phi Z} \phi Y) \\ &= \nabla_{\phi Z}(-ncg(X, Y) + (n-1)m(X, Y)) \\ &\quad + ncg(\nabla_{\phi Z} X, Y) + (n-1)m(\nabla_{\phi Z} \phi X, \phi Y) \\ &\quad + ncg(\phi X, \nabla_{\phi Z} \phi Y) + (n-1)m(X, \nabla_Z Y) \\ &= -nc(\nabla_{\phi Z} g)(\phi X, \phi Y) - (n-1)(\nabla_{\phi Z} m)(\phi X, \phi Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.1.9) ve (4.4.7) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_{\phi Z} Ric)(\phi X, \phi Y) &= -nc\{m(Z, X)\eta(\phi Y) + m(Z, Y)\eta(\phi X)\} \\ &\quad -\pi(\phi X)g(Z, Y) - \pi(\phi Y)g(Z, X) \\ &\quad -(n-1)(\nabla_{\phi Z} m)(\phi X, \phi Y) \end{aligned}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

5. YARI-SİMETRİK METRİK KONEKSİYONLU YARI-RIEMANN MANİFOLDUNUN LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde, yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldu üzerine indirgenmiş koneksiyonun yarı-simetrik fakat metrik olmadığı elde edildi. Böylece, yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyleri için verilen teorem ve sonuçların lightlike altmanifoldlara genellemesi yapıldı. Ayrıca yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun yarı-simetrik koneksiyonlu lightlike altmanifoldları için elde edilen teorem ve sonuçlar; benzer şekilde yarı-simetrik non-metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldları için de görülür.

5.1 Yarı-Simetrik Koneksiyonlu Coisotropik Altmanifold.

$\widetilde{M}$, $(m+n)$ -boyutlu C^∞ yarı-Riemann manifold ve M ,

$$\phi : M \rightarrow \widetilde{M}$$

izometrik immersiyonu ile $\widetilde{M}$ içerisine daldırılmış m -boyutlu bir coisotropik altmanifold olmak üzere, $\widetilde{M}$ deki $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyon $\forall \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} + \tilde{\pi}(\widetilde{Y})\widetilde{X} - \tilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Q} \quad (5.1.1)$$

şeklinde tanımlıdır.

P , TM den $S(TM)$ ye bir projektif dönüşüm olsun. (3.1.1) ve (3.1.4) denklemleri göz önüne alırsa, $\widetilde{Q}$ ve ϕQ vektör alanları, sırasıyla,

$$\widetilde{Q} = \phi Q + \sum_{i=1}^n \mu_i N_i, \quad (5.1.2)$$

ve

$$\phi Q = P\phi Q + \sum_{i=1}^n \eta_i(\phi Q)\xi_i, \quad (5.1.3)$$

şeklinde yazılabilir.

$\nabla, \widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun coisotropik altmanifold üzerine indirgenen bir lineer koneksiyonu olsun. O halde $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonuna göre Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_{\phi X} \phi Y = \phi(\nabla_X Y) + h(X, Y) \quad (5.1.4)$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_{\phi X} N_i = -\phi(A_{N_i} X) + \nabla_{\phi X}^\perp N_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1.5)$$

dir. Burada $\phi(\nabla_X Y), \phi(A_{N_i} X) \in \Gamma(TM)$ ve $h(X, Y), \nabla_{\phi X}^\perp N_i \in \Gamma(ltr(TM))$, $1 \leq i \leq n$, dir.

$\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik metrik koneksiyon ve $\overset{\circ}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}$ dan indirgenen bir koneksiyon olsun. O halde $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ ve $N_i \in \Gamma(ltr(TM)), 1 \leq i \leq n$, için (5.1.1) denklemi kullanılırsa $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonuna göre Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \phi Y = \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) + \overline{m}(X, Y) \quad (5.1.6)$$

ve

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} N_j = \sum_{i=1}^n -\phi((A_{N_i} X - \eta_i(Q)I)X - \eta_i(X)Q) + (\nabla_{\phi X}^\perp N_i - \mu_i \eta_i(\phi Q)N_i) \quad (5.1.7)$$

olur. Burada

$$\pi(N_j) = \sum_{i=1}^n \eta_i(\phi Q), \quad \tilde{g}(\phi X, N_i) = \sum_{i=1}^n \eta_i(\phi X), \quad 1 \leq j \leq n,$$

dir.

$\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için M nin U koordinat komşuluğu üzerinde, B_i, D_i simetrik bilineer formları ve $P_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, 1-formları

$$\begin{aligned} B_i(X, Y) &= \tilde{g}(h(X, Y), \xi_i), \\ D_i(X, Y) &= \tilde{g}(\overline{m}(X, Y), \xi_i), \\ P_{ij}(X) &= \tilde{g}(\nabla_{\phi X}^\perp N_i, \xi_j), \quad 1 \leq i, j \leq n, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$h(X, Y) = \sum_{i=1}^n B_i(X, Y)N_i, \quad (5.1.8)$$

$$\overline{m}(X, Y) = \sum_{i=1}^n D_i(X, Y)N_i, \quad (5.1.9)$$

$$\nabla_{\phi X}^\perp N_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}N_j, \quad 1 \leq j \leq n \quad (5.1.10)$$

elde edilir. Burada B_i ve D_i , $1 \leq i \leq n$, sırasıyla, simetrik ve yarı-simetrik koneksiyonlu coisotropik altmanifoldların ikinci temel formlarıdır. Böylece (5.1.8), (5.1.9) ve (5.1.10) denklemleri (5.1.4), (5.1.5), (5.1.6) ve (5.1.7) de yerine yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\phi X} \phi Y = \phi(\nabla_X Y) + \sum_{i=1}^n B_i(X, Y)N_i, \quad (5.1.11)$$

$$\widetilde{\nabla}_{\phi X} N_j = -\phi(A_{N_i} X) + \sum_{j=1}^n P_{ij}N_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1.12)$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \phi Y = \phi(\nabla_X Y) + \sum_{i=1}^n D_i(X, Y)N_i, \quad (5.1.13)$$

ve

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} N_i &= \sum_{i,j=1}^n \{ \phi((A_{N_i} X - \eta_i(\phi Q)I)X - \eta_i(X)\phi Q \\ &\quad + (P_{ij}(X)N_j - \mu_i \eta_i(\phi X)N_i)) \} \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

elde edilir.

$\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (5.1.1), (5.1.11) ve (5.1.13) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) + \sum_{i=1}^n D_i(X, Y)N_i &= \phi(\nabla_X Y) + \sum_{i=1}^n B_i(X, Y)N_i \\ &\quad + \tilde{\pi}(\phi Y)\phi X - \tilde{g}(\phi X, \phi Y)\tilde{Q}. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

dir. Böylece (5.1.2) ve (5.1.3) eşitlikleri (5.1.15) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \phi(\nabla_X Y) + \sum_{i=1}^n D_i(X, Y)N_i &= \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y + \pi(Y)X - g(X, Y)Q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \{ B_i(X, Y) - \mu_i g(X, Y) \} N_i. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

olur. Böylece (4.1.16) dan

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \pi(Y)X - g(X, Y)Q, \quad (5.1.17)$$

ve

$$D_i(X, Y) = B_i(X, Y) - \mu_i g(X, Y), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1.18)$$

elde edilir.

$\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi_i \in \Gamma(TM^\perp)$, $1 \leq i \leq n$, için (5.1.12) denklemi göz önüne alınır

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \xi_i = \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X \xi_i) + \sum_{j=1}^n D_i(X, \xi_j)N_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1.19)$$

bulunur. Buradan

$$D_i(X, \xi_i) = 0$$

ve

$$D_i(X, \xi_j) + D_j(X, \xi_i) = 0$$

olur. Böylece (5.1.1), (5.1.6), (5.1.7) ve (5.1.10) denklemlerinden

$$P_{ij}(X) = -\eta_i(\nabla_X \xi_j), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (5.1.20)$$

elde edilir.

$\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (5.1.17) ve (5.1.18) denklemleri göz önüne alınır

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} g)(\phi Y, \phi Z) &= \sum_{i=1}^n \{ (D_i(X, Y) + \mu_i g(X, Y))\eta_i(\phi Z) \\ &\quad - (D_i(X, Z) + \mu_i g(X, Z))\eta_i(\phi Y) \} \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

olur. Ayrıca (5.1.17) denkleminde

$$T(X, Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y \quad (5.1.22)$$

dir. Böylece (5.1.21) ve (5.1.22) den aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 5.1.1 Yarı-simetrik metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun

M coisotropik altmanifoldu üzerine indirgenen koneksiyon yarı-simetrik fakat metrik koneksiyon değildir.

P, TM den $S(TM)$ ye projektif dönüşüm olsun. $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (3.1.1) denklemi göz önüne alınırsa, perde dağılım üzerindeki $\overset{*}{\nabla}$ ve $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonlarına göre Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\nabla_{\phi X} P\phi Y = \phi(\overset{*}{\nabla}_X PY) + \overset{*}{h}(X, PY) \quad (5.1.23)$$

ve

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} P\phi Y = \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X PY) + \overset{*}{m}(X, PY) \quad (5.1.24)$$

dir. Burada $\phi(\overset{*}{\nabla}_X PY)$, $\phi(\overset{\circ}{\nabla}_X PY) \in \Gamma(S(TM))$ ve $\overset{*}{h}(X, PY)$, $\overset{*}{m}(X, PY) \in \Gamma(RadTM)$ dir. $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için perde üzerindeki ikinci temel formlar E_i ve C_i , sırasıyla,

$$E_i(X, PY) = \tilde{g}(\overset{*}{h}(X, PY), N_i) \quad (5.1.25)$$

ve

$$C_i(X, PY) = \tilde{g}(\overset{*}{m}(X, PY), N_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1.26)$$

şeklinde tanımlanırsa (5.1.23) ve (5.1.24) denklemleri

$$\nabla_{\phi X} P\phi Y = \phi(\overset{*}{\nabla}_X PY) + \sum_{i=1}^n E_i(X, PY)\xi_i \quad (5.1.27)$$

ve

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} P\phi Y = \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X PY) + \sum_{i=1}^n C_i(X, PY)\xi_i \quad (5.1.28)$$

olur. O halde (5.1.3), (5.1.27) ve (5.1.28) denklemleri göz önüne alınırsa $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi_i \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$\begin{aligned} \phi(\overset{\circ}{\nabla}_X PY) + \sum_{i=1}^n C_i(X, PY)\xi_i &= \phi(\overset{*}{\nabla}_X PY) + \sum_{i=1}^n E_i(X, PY)\xi_i + \pi(P\phi Y)\phi Q \\ &\quad - \tilde{g}(\phi X, P\phi Y)(P\phi Q + \sum_{i=1}^n \eta_i(\phi Q)\xi_i), \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

bulunur. Böylece (5.1.29) denkleminde

$$C_i(X, PY) = E_i(X, PY) - \eta_i(\phi Q)g(X, PY), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1.30)$$

ve

$$\overset{*}{\underset{\circ}{\nabla}}_X PY = \overset{*}{\nabla}_X PY + \pi(PY)Q - g(X, PY)PQ \quad (5.1.31)$$

olur. Diğer taraftan $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (5.1.1) ve (5.1.31) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\overset{*}{\underset{\circ}{\nabla}}_{\phi X} (g(P\phi Y, P\phi Z)) = 0 \quad (5.1.32)$$

ve

$$T^*(\phi X, \phi Y) = \pi(P\phi Y)\phi X - \pi(P\phi X)\phi Y \quad (5.1.33)$$

elde edilir. Böylece (5.1.32) ve (5.1.33) denklemlerinden aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 5.1.2. $\widetilde{M}$, yarı-simetrik metrik koneksiyonlu bir yarı-Riemann manifoldu ve M , $\widetilde{M}$ nin coisotropik altmanifoldu olsun. O zaman M nin $S(TM)$ perde dağılımı üzerindeki $\overset{*}{\underset{\circ}{\nabla}}$ lineer koneksiyonu bir yarı-simetrik metrik koneksiyondur.

$\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi_i \in \Gamma(RadTM)$, $1 \leq i \leq n$, için (5.1.16) denklemini kullanılır ve Tanım 2.6.2 göz önüne alınırsa, $\overset{*}{A}_{\xi_i} \phi X \in \Gamma(S(TM))$ ve $\overset{*}{\nabla}_{\phi X}^{\perp} \xi_i \in \Gamma(RadTM)$, $1 \leq i \leq n$, olmak üzere $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonuna göre Weingarten formülü

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \xi_i = - \overset{*}{A}_{\xi_i} \phi X + \overset{*}{\nabla}_{\phi X}^{\perp} \xi_i \quad (5.1.34)$$

dir.

Şimdi de Weingarten formülünün 1-formlar cinsinden ifade edilebileceğini göstere-
lim. $W_{ij}(\phi X)$ bir 1-formu, $1 \leq i, j \leq n$,

$$W_{ij}(X) = \widetilde{g}(\overset{*}{\nabla}_{\phi X}^{\perp} \xi_i, N_j),$$

şeklinde tanımlanır ve (5.1.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \xi_i = - \overset{*}{A}_{\xi_i} \phi X + \sum_{j=1}^n W_{ij}(X) \xi_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1.35)$$

olur. Böylece (5.1.4), (5.1.5), (5.1.8), (5.1.10), (5.1.27) ve (5.1.35) denklemleri kullanılırsa

$$E_i(X, PY) = \tilde{g}(A_{N_i} \phi X, P \phi Y), \quad (5.1.36)$$

$$B_i(X, PY) = \tilde{g}(A_{\xi_i} \phi X, P \phi Y), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1.37)$$

ve

$$W_{ij}(X) = -P_{ij}(X), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1.38)$$

elde edilir. Böylece (5.1.38) göz önüne alınırsa (5.1.35) eşitliği ,

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \xi_i = - \overset{*}{A}_{\xi_i} \phi X - \sum_{j=1}^n P_{ij}(X) \xi_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1.39)$$

olur. O halde $\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ için $\overset{*}{\xi}_i = \alpha_i \xi_i$ eşitliği göz önüne alınırsa $\overset{*}{N}_i = \frac{1}{\alpha_i} N_i$ ve

$$P_{ij}(\phi X) = \overset{*}{P}_{ij}(\phi X) + \phi X(\text{Log} \alpha_i)$$

elde edilir. Burada $P_{ij}, \xi_i \in \Gamma(\text{Rad} TM)$ ve P_{ij} 1-formunun dış türevi

$$dP_i(\phi X, \phi Y) = \frac{1}{2} \{ \phi X(P_i(\phi Y)) - \phi Y(P_i(\phi X)) - P_i([\phi X, \phi Y]) \}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 5.1.3. $\widetilde{M}$, yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifold ve $M, \widetilde{M}$ nin coisotropik altmanifoldu olsun. O zaman perde dağılımının integralenebilmesi için gerek ve yeter şart perde dağılımı üzerindeki $\eta_i, 1 \leq i \leq n$, 1-formların kapalı olmasıdır.

İspat $\overset{\circ}{\nabla}$, M üzerinde indirgenmiş yarı-simetrik koneksiyon olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (5.1.2), (5.1.3), (5.1.28) ve (5.1.37) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
[\phi X, \phi Y] &= \phi(\overset{*}{\nabla}_X PY) - \phi(\overset{*}{\nabla}_Y PX) + \sum_{i=1}^n \{C_i(X, PY) - C_i(Y, PX) \\
&+ \phi X(\eta_i(\phi Y)) - \phi Y(\eta_i(\phi X))\} \xi_i + \sum_{i=1}^n \{\eta_i(\phi X) \overset{*}{A}_{\xi_i} \phi Y - \eta_i(\phi Y) \overset{*}{A}_{\xi_i} \phi X\} \\
&+ \sum_{j,i=1}^n \{\eta_i(\phi Y) P_{ij}(\phi X) - \eta_i(\phi X) P_{ij}(\phi Y)\} \xi_j + \pi(\phi X) \phi Y - \pi(\phi Y) \phi X
\end{aligned} \tag{5.1.40}$$

bulunur. Böylece (5.1.40) denklemi, lightlike transversal vektör demeti N_i , $1 \leq i \leq n$, ile skalar çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([\phi X, \phi Y], N_i) &= \sum_{i=1}^n \{C_i(X, PY) - C_i(Y, PX) \\
&+ \phi X(\eta_i(\phi Y)) - \phi Y(\eta_i(\phi X))\} \\
&+ \sum_{j,i=1}^n \{\eta_i(\phi Y) P_{ij}(\phi X) - \eta_i(\phi X) P_{ij}(\phi Y)\} \\
&+ \sum_{i=1}^n \{\pi(\phi X) \eta_i(\phi Y) - \pi(\phi Y) \eta_i(\phi X)\}
\end{aligned} \tag{5.1.41}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
2d\eta_i(\phi X, \phi Y) &= \sum_{i=1}^n \{C_i(X, PY) - C_i(Y, PX) \\
&+ \sum_{j,i=1}^n \{\eta_i(\phi Y) P_{ij}(\phi X) - \eta_i(\phi X) P_{ij}(\phi Y)\} \\
&+ \sum_{i=1}^n \{\pi(\phi X) \eta_i(\phi Y) - \pi(\phi Y) \eta_i(\phi X)\}
\end{aligned} \tag{5.1.42}$$

bılunur. O halde (5.1.3) ve (5.1.39) denklemlerinden

$$2d\eta_i(\phi X, \phi Y) = C_i(X, PY) - C_i(Y, PX), \quad 1 \leq i \leq n, \tag{5.1.43}$$

ve

$$\eta_i([P\phi X, P\phi Y]) = C_i(X, PY) - C_i(Y, PX), \quad 1 \leq i \leq n, \tag{5.1.44}$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi de yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldun coisotropik altmanifoldunun Gauss ve Weingarten formülleri elde edilecektir. $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyonlu $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun eğrilik tensörü $\overset{\circ}{\widetilde{R}}$ ve $\overset{\circ}{\nabla}$ indirgenmiş koneksiyonlu M coisotropik altmanifoldun eğrilik tensörü $\overset{\circ}{R}$ olsun. Böylece $\forall \phi X$,

$\phi Y, \phi Z, \phi W \in \Gamma(TM)$ ve $\xi_k \in \Gamma(RadTM)$ için (5.1.13), (5.1.14) ve (5.1.37) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\tilde{R}}(\phi X, \phi Y)\phi Z &= \phi(\overset{\circ}{\tilde{R}}(X, Y)Z) + \sum_{i=1}^n \{(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} D_i)(\phi Y, \phi Z)N_i - (\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Y} D_i)(\phi X, \phi Z)N_i\} \\
&+ \sum_{i,j=1}^n D_i(Y, Z)\{-\phi((A_{N_i} - \eta_i(X)I)X - \eta_i(X)Q) \\
&+ (P_{ij}(\phi X)N_j - \mu_i \eta_i(\phi X)N_i)\} \\
&- \sum_{i,j=1}^n D_i(X, Z)\{-\phi((A_{N_i} - \eta_i(X)I)Y - \eta_i(Y)Q) \\
&+ (P_{ij}(\phi Y)N_j - \mu_i \eta_i(\phi Y)N_i)\},
\end{aligned} \tag{5.1.45}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(\phi X, \phi Y)\xi_k &= \phi(R(X, Y)\xi_k) + \sum_{i=1}^n \{(\nabla_{\phi X} D_i)(\phi Y, \xi_k)N_i - (\nabla_{\phi Y} D_i)(\phi X, \xi_k)N_i\} \\
&+ \sum_{i,j=1}^n D_i(Y, \xi_k)\{-\phi((A_{N_i} - \eta_i(X)I)X - \eta_i(X)Q) \\
&+ (P_{ij}(\phi X)N_j - \mu_i \eta_i(\phi X)N_i)\} \\
&- \sum_{i,j=1}^n D_i(X, \xi_k)\{-\phi((A_{N_i} - \eta_i(X)I)Y - \eta_i(Y)Q) \\
&+ (P_{ij}(\phi Y)N_j - \mu_i \eta_i(\phi Y)N_i)\}, \quad 1 \leq k \leq n,
\end{aligned} \tag{5.1.46}$$

ve

$$\begin{aligned}
R(\phi X, \phi Y)\xi_k &= \overset{\circ}{\nabla}_{\phi Y}^* (A_{\xi_k}^* \phi X) + \sum_{i=1}^n \{C_i(\phi Y, A_{\xi_k}^* \phi X) + \eta_i(\phi Q)g(\phi Y, A_{\xi_k}^* \phi X)\}\xi_i \\
&- \overset{\circ}{\nabla}_{\phi X}^* (A_{\xi_k}^* \phi Y) - \sum_{i=1}^n \{C_i(\phi X, A_{\xi_k}^* \phi Y) + \eta_i(\phi Q)g(\phi X, A_{\xi_k}^* \phi Y)\}\xi_i \\
&+ \sum_{i=1}^n \{P_{ik}(Y)A_{\xi_k}^* \phi X - P_{ik}(X)A_{\xi_k}^* \phi Y + g(A_{\xi_k}^* \phi X, \phi Q)\phi Y \\
&- g(A_{\xi_k}^* \phi Y, \phi Q)\phi X + g(\phi X, A_{\xi_k}^* \phi Y)\phi Q - g(\phi Y, A_{\xi_k}^* \phi X)\phi Q \\
&- 2dP_{ik}(\phi X, \phi Y)\xi_k\}, \quad 1 \leq k \leq n
\end{aligned} \tag{5.1.47}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.4. $\tilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ yarı-simetrik metrik koneksiyonuna göre eğrilik tensörü $\overset{\circ}{\tilde{R}}$ ve M coisotropik altmanifoldunun $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ yarı-simetrik koneksiyonuna göre eğrilik tensörü $\overset{\circ}{R}$ olsun. O zaman $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$ ve $P\phi W \in \Gamma(S(TM))$ için M nin Gauss ve Codazzi denklemleri

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\overset{\circ}{R}(\phi X, \phi Y)\phi Z, P\phi W) &= \phi(g(\overset{\circ}{R}(X, Y)Z, PW)) \\
&- \sum_{i=1}^n \{D_i(Y, Z)C_i(X, PW) + \eta_i(\phi Q)D_i(Y, Z)g(X, PW) \\
&- \eta_i(\phi X)g(X, PW) - \eta_i(\phi X)g(Q, PW) \\
&+ D_i(X, Z)C_i(Y, PW) + \eta_i(\phi Q)D_i(X, Z)g(Y, PW) \\
&- \eta_i(\phi Y)g(Y, PW) - \eta_i(\phi Y)g(Q, PW)\},
\end{aligned} \tag{5.1.48}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\overset{\circ}{R}(\phi X, \phi Y)\phi Z, \xi_i) &= \sum_{i=1}^n \{(\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} D_i)(\phi Y, \phi Z) - (\overset{\circ}{\nabla}_{\phi Y} D_i)(\phi X, \phi Z) \\
&+ D_i(Y, Z)(P_{ii}(\phi X) - \mu_i \eta_i(\phi X) \\
&- D_i(X, Z)(P_{ii}(\phi Y) - \mu_i \eta_i(\phi Y))\},
\end{aligned} \tag{5.1.49}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\overset{\circ}{R}(\phi X, \phi Y)\phi Z, N_i) &= \phi(g(\overset{\circ}{R}(X, Y)Z, N_i)) \\
&+ \sum_{i=1}^n D_i(Y, Z)\{-\eta_i(\phi X)\eta_i(\phi X) - \eta_i(\phi Q)\eta_i(\phi Q)\} \\
&- \sum_{i=1}^n D_i(X, Z)\{-\eta_i(\phi Y)\eta_i(\phi Y) - \eta_i(\phi Q)\eta_i(\phi Q)\},
\end{aligned} \tag{5.1.50}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\overset{\circ}{R}(\phi X, \phi Y)\xi_k, N_k) &= \sum_{k=1}^n \{C_k(\phi Y, \overset{*}{A}_{\xi_k} \phi X) - C_k(\phi X, \overset{*}{A}_{\xi_k} \phi Y) \\
&+ (D_k(\phi X, P\phi Y) + \mu_k g(X, PY))\eta_k(\phi Y) \\
&+ (D_k(\phi Y, P\phi X) + \mu_k g(Y, PX))\eta_k(\phi X) \\
&+ (D_k(\phi Y, P\phi X) + \mu_k g(Y, PX))\eta_k(\phi Q) \\
&+ (D_k(\phi X, P\phi Y) + \mu_k g(X, PY))\eta_k(\phi Q)\}
\end{aligned} \tag{5.1.51}$$

dir.

İspat. $\overset{\circ}{R}$ ve $\overset{\circ}{R}$, sırasıyla, $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik metrik ve $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyonlarına göre $\widetilde{M}$ ve M nin eğrilik tensörleri olsunlar. Buna göre $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W \in \Gamma(TM)$ $N_i \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $\xi_i \in \Gamma(RadTM), 1 \leq i \leq n$, için (5.1.45)-(5.1.47) eşitlikleri kullanılırsa Gauss ve Codazzi denklemleri elde edilir.

Teorem 5.1.5. $\widetilde{M}$ yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldunun coisotropic altmanifoldu M olsun. O zaman M nin Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik, $\mu_i, 1 \leq i \leq n$, fonksiyonunun sıfır ve

$$\sum_{k=1}^n dP_{kk} = 0$$

olmasıdır.

İspat M , yarı-simetrik metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun coisotropik altmanifoldu olsun. $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z, \phi W \in \Gamma(TM)$, $N_i \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $\xi_i \in \Gamma(RadTM)$, $1 \leq i \leq n$, için (4.2.2), (5.1.30), (5.1.36), (5.1.37) ve (5.1.45) denklemleri kullanılır ve birinci Bianchi özdeşliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} Ric(\phi X, \phi Y) - Ric(\phi Y, \phi X) &= \sum_{i,k=1}^n \{ (C_i(\phi Y, A_{\xi_k}^* \phi X) - C_i(\phi X, A_{\xi_k}^* \phi Y)) \\ &\quad + ((D_i(\phi X, P\phi Q) + \mu_i g(X, PQ))\eta_k(\phi Y) \\ &\quad - ((D_i(\phi Y, P\phi Q) + \mu_i g(Y, PQ))\eta_k(\phi X) \\ &\quad + ((D_i(\phi Y, P\phi X) + \mu_i g(Y, PX))\eta_k(\phi Q) \\ &\quad - ((D_i(\phi X, P\phi Y) + \mu_i g(X, PY))\eta_k(\phi Q) \\ &\quad - 2dP_{kk}(\phi X, \phi Y)) \} \end{aligned} \quad (5.1.52)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 5.1.6. $\widetilde{M}(c)$, sabit kesitsel eğrilığe sahip yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifoldun bir coisotropik altmanifoldu M olsun. O zaman $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için M nin Ricci tensörü

$$\begin{aligned} Ric(\phi X, \phi Y) &= -mcg(X, Y) + \sum_{i,j=1}^n \{ D_i(\xi_j, \phi Y)(\eta_j(A_{N_i}\phi X) \\ &\quad - \eta_i(\phi X)\eta_j(\phi X) - \eta_i(\phi X)\eta_j(\phi Q) \\ &\quad + (D_i(\phi X, \phi Y) + D_i(\phi X, \phi Y)\eta_j(\phi Q)) \} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m-n} \varepsilon_k \phi(A_{N_i} - \eta_i(w_k))D_i(\phi X, \phi Y) \end{aligned} \quad (5.1.53)$$

dir.

İspat $\widetilde{M}(c)$ nin yarı-simetrik koneksiyona göre eğrilik tensörü $\overset{\circ}{\widetilde{R}}$ olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için (5.1.45), (5.1.46), (5.1.50) denklemleri kullanılır ve Tanım 2.2.20 göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} Ric(\phi X, \phi Y) &= -(m-n)cg(X, Y) - \sum_{k=1}^{m-n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_k \phi(A_{N_i} - \eta_i(w_k)) D_i(\phi X, \phi Y) \\ &\quad - ncg(X, Y) + \sum_{j=1}^n \{D_i(\xi_j, \phi Y) \eta_j(A_{N_i} \phi X) - \eta_i(\phi X) \eta_j(\phi X) \\ &\quad - \eta_i(\phi X) \eta_j(\phi Q)\} + \sum_{j=1}^n \{D_i(\phi X, \phi Y) + D_i(\phi X, \phi Y) \eta_j(\phi Q)\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.7. $\widetilde{M}(c)$ yarı-simetrik metrik koneksiyonlu yarı-Riemann uzay formunun coisotropik altmanifoldu M olsun. O zaman radikal dağılım paraleldir.

İspat $\widetilde{\nabla}, \widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun bir yarı-simetrik metrik koneksiyonu olmak üzere, $\forall \phi X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi_i, \xi_j \in \Gamma(RadTM)$, $1 \leq i, j \leq n$, için

$$\widetilde{g}(\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\xi_i} \xi_j, \phi X) = -\widetilde{g}(\xi_j, \overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\xi_i} \phi X)$$

dir. Böylece (5.1.13) denklemi kullanılır ve total umbilik tanımını gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\xi_i} \xi_j, \phi X) &= -\widetilde{g}(\xi_j, \phi(\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\xi_i} X) + \sum_{i=1}^n D_i(\phi X, \xi_i) N_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n D_i(\phi X, \xi_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n \widetilde{g}(\phi X, \xi_i) H_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

5.2. Yarı-Simetrik Koneksiyonlu Lightlike Altmanifoldlar

$\widetilde{M}$, $(m+n)$ -boyutlu yarı-simetrik koneksiyonlu yarı-Riemann manifold ve $M, \widetilde{M}$ nin m -boyutlu lightlike altmanifoldu olsun. Buradan $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_{\phi X} \phi Y = \widetilde{\nabla}_{\phi X} \phi Y + \widetilde{\pi}(\phi Y) \phi X - \widetilde{g}(\phi X, \phi Y) \widetilde{Q} \quad (5.2.1)$$

dir. Burada $N_\alpha \in \Gamma(\text{ltr}(TM))$, $W_\beta \in \Gamma(S(TM^\perp))$, $1 \leq \alpha \leq n$, $r+1 \leq \beta \leq n$, için Teorem 2.3.8 göz önüne alınırsa, $\tilde{Q}$ vektör alanı

$$\tilde{Q} = \phi Q + \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha N_\alpha + \sum_{\beta=r+1}^n \lambda_\beta W_\beta \quad (5.2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\overset{\circ}{\nabla}$ ve ∇ , sırasıyla, $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ ve $\tilde{\nabla}$ dan indirgenen koneksiyonlar olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y \in \Gamma(TM)$ için ∇ ve $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonlarına göre Gauss denklemleri, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_{\phi X} \phi Y = \nabla_{\phi X} \phi Y + \sum_{\alpha=1}^r h_\alpha^\ell(X, Y) N_\alpha + \sum_{\beta=r+1}^n h_\beta^s(X, Y) W_\beta \quad (5.2.3)$$

ve

$$\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{\phi X} \phi Y = \overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} \phi Y + \sum_{\alpha=1}^r m_\alpha^\ell(X, Y) N_\alpha + \sum_{\beta=r+1}^n m_\beta^s(X, Y) W_\beta \quad (5.2.4)$$

dir. Böylece (5.2.2), (5.2.3) denklemleri (5.2.4) de yerine yazılırsa

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \pi(Y)X - g(X, Y)Q \quad (5.2.5)$$

ve

$$\begin{aligned} m_\alpha^\ell &= h_\alpha^\ell - \lambda_\alpha g, \quad 1 \leq \alpha \leq r, \\ m_\beta^s &= h_\beta^s - \lambda_\beta g, \quad r+1 \leq \beta \leq n, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.2.2), (5.2.3) ve (5.2.4) denklemleri kullanılır ve $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ nin metrik koneksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{\phi X} g)(\phi Y, \phi Z) &= \sum_{\alpha=1}^r \{(m_\alpha^\ell(X, Y) + \lambda_\alpha g(X, Y))\eta(\phi Z) \\ &+ (m_\alpha^\ell(X, Z) + \lambda_\alpha g(X, Z))\eta(\phi Y)\} \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

olur. Bu ise coisotropik altmanifold üzerine indirgenen koneksiyonun metrik olmadığını ifade eder.

Şimdi de coisotropik altmanifold için Weingarten formüllerini elde edelim. $\forall \phi X \in \Gamma(TM)$, $N_\alpha \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $W_\beta \in \Gamma(S(TM^\perp))$ için (5.2.1) eşitliği ile Tanım 2.3.2 kullanılırsa $\overset{\circ}{\nabla}$ yarı-simetrik koneksiyonu için Weingarten formülleri

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} N_\alpha = (-A_{N_\alpha} + \varepsilon_\alpha)\phi X + \eta_\alpha(\phi X)\phi Q + \nabla_{\phi X}^\ell N_\alpha + D^s(X, N_\alpha) \quad (5.2.8)$$

ve

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\phi X} W_\beta = -A_{W_\beta}\phi X + D^\ell(X, W_\beta) + \nabla_{\phi X}^s W_\beta + \varepsilon_\beta \lambda_\beta \phi X \quad (5.2.9)$$

dir. Böylece $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z \in \Gamma(TM)$, $1 \leq \alpha \leq r$, $r+1 \leq \beta \leq n$, için (5.2.4), (5.2.8) ve (5.2.9) denklemleri kullanılırsa, $\overset{\circ}{\nabla}$ koneksiyonuna sahip yarı-Riemann manifoldunun eğrilik tensörleri;

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{R}}(\phi X, \phi Y)\phi Z &= \phi(\overset{\circ}{R}(X, Y)Z) - m_\alpha^\ell(Y, Z)A_{N_\alpha}\phi X + m_\alpha^\ell(X, Z)A_{N_\alpha}\phi Y \\ &\quad + m_\beta^s(X, Z)A_{W_\beta}\phi X - m_\alpha^s(Y, Z)A_{W_\beta}\phi X + m_\alpha^\ell(Y, Z)\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha \phi X \\ &\quad - m_\alpha^\ell(X, Z)\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha \phi Y + m_\beta^s(Y, Z)\varepsilon_\beta \lambda_\beta \phi X - m_\beta^s(X, Z)\varepsilon_\beta \lambda_\beta \phi Y \\ &\quad + m_\alpha^\ell(Y, Z)\eta_\alpha(\phi X)\phi Q - m_\alpha^\ell(X, Z)\eta_\alpha(\phi Y)\phi Q + m_\alpha^\ell(Y, Z)\nabla_{\phi X}^\ell N_\alpha \\ &\quad - m_\alpha^\ell(X, Z)\nabla_{\phi Y}^\ell N_\alpha + m_\beta^s(Y, Z)D^\ell(X, W_\beta) - m_\beta^s(X, Z)D^\ell(Y, W_\beta) \\ &\quad - (\nabla_{\phi Y} m_\alpha^\ell)(\phi X, \phi Z)N_\alpha + (\nabla_{\phi X} m_\alpha^\ell)(\phi Y, \phi Z)N_\alpha \\ &\quad + m_\alpha^\ell(Y, Z)\eta_\alpha(\phi X)\lambda_\alpha N_\alpha - m_\alpha^\ell(X, Z)\eta_\alpha(\phi Y)\lambda_\alpha N_\alpha \\ &\quad + (\nabla_{\phi X} m_\alpha^\ell)(\phi Y, \phi Z)W_\beta - (\nabla_{\phi Y} m_\alpha^\ell)(\phi X, \phi Z)W_\beta \\ &\quad + (\nabla_{\phi X} m_\beta^s)(\phi Y, \phi Z)W_\beta - (\nabla_{\phi Y} m_\beta^s)(\phi X, \phi Z)W_\beta \\ &\quad + m_\alpha^\ell(Y, Z)D^s(X, N_\alpha) - m_\alpha^\ell(X, Z)D^s(Y, N_\alpha) + m_\beta^s(Y, Z)\nabla_{\phi X}^s W_\beta \\ &\quad - m_\beta^s(X, Z)\nabla_{\phi Y}^s W_\beta + m_\alpha^\ell(Y, Z)\eta_\alpha(\phi X)\lambda_\beta W_\beta - m_\alpha^\ell(X, Z)\eta_\alpha(\phi Y)\lambda_\beta W_\beta, \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{R}}(\phi X, \phi Y)N_\alpha &= \phi(R^\ell(X, Y)N_\alpha) + m_\alpha^\ell(Y, A_{N_\alpha}X)N_\alpha - m_\alpha^\ell(X, A_{N_\alpha}Y)N_\alpha \\ &\quad + D^\ell(X, D^s(Y, N_\alpha))N_\alpha - D^\ell(Y, D^s(X, N_\alpha))N_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\nabla_{\phi Y} A)(N_\alpha, \phi X) - (\nabla_{\phi X} A)(N_\alpha, \phi Y) + A_{D^s(X, N_\alpha)} Y \\
& - A_{D^s(Y, N_\alpha)} X + (\nabla_{\phi X} D^s)(Y, N_\alpha) W_\beta - (\nabla_{\phi Y} D^s)(X, N_\alpha) W_\beta \\
& + m^s(Y, A_{N_\alpha} X) W_\beta - m^s(X, A_{N_\alpha} Y) W_\beta \quad (5.2.11) \\
& + \eta(\phi Y) \{ \nabla_{\phi X} \phi Q + m_\alpha^\ell(X, Q) N_\alpha + m_\alpha^s(X, Q) W_\beta \} \\
& + \eta(\phi X) \{ \nabla_{\phi Y} \phi Q + m_\alpha^\ell(Y, Q) N_\alpha + m_\alpha^s(Y, Q) W_\beta \}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\tilde{R}}(\phi X, \phi Y) W_\beta &= \phi(R^s(X, Y) W_\beta + m_\alpha^s(Y, A_{W_\beta} X) W_\beta - m_\alpha^s(X, A_{W_\beta} Y) W_\beta) \\
&+ D^s(X, D^\ell(Y, W_\beta)) W_\beta - D^s(Y, D^\ell(X, W_\beta)) W_\beta \\
&+ (\nabla_{\phi Y} A)(W_\beta, \phi X) - (\nabla_{\phi X} A)(W_\beta, \phi Y) + D^\ell(X, W_\beta) A_{W_\beta} \phi Y \\
&- D^\ell(Y, W_\beta) A_{W_\beta} \phi X + (\nabla_{\phi X} D^\ell)(Y, W_\beta) - (\nabla_{\phi Y} D^\ell)(X, W_\beta) \\
&+ m_\alpha^\ell(Y, A_{W_\beta} X) N_\alpha - m_\alpha^\ell(X, A_{W_\beta} Y) N_\alpha \quad (5.2.12)
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

Teorem 5.2.1. $\widetilde{M}$ yarı-simetrik metrik koneksiyonlu bir yarı-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldu M olsun. O zaman $\overset{\circ}{\tilde{R}}$ ve $\overset{\circ}{R}$, sırasıyla, $\widetilde{M}$ ve M nin eğrilik tensörlerini olmak üzere $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z, \phi U \in \Gamma(TM)$, $N_\alpha \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $W_\beta \in \Gamma(S(TM^\perp))$ için M nin yapı denklemleri ;

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\tilde{g}}(\overset{\circ}{\tilde{R}}(\phi X, \phi Y) \phi Z, P \phi U) &= g(\phi(\overset{\circ}{R}(X, Y) Z), PU) - m_\alpha^\ell(Y, Z) \tilde{g}(A_{N_\alpha} \phi X, PU) \\
&+ m_\alpha^\ell(X, Z) \tilde{g}(A_{N_\alpha} \phi Y, PU) + m_\beta^s(X, Z) \tilde{g}(A_{W_\beta} \phi Y, PU) \\
&- m_\beta^s(Y, Z) \tilde{g}(A_{W_\beta} \phi X, PU) + m_\alpha^\ell(Y, Z) \varepsilon_\alpha \lambda_\alpha g(X, PU) \\
&- m_\beta^s(X, Z) \varepsilon_\beta \lambda_\beta g(Y, PU) + m_\beta^s(Y, Z) \varepsilon_\beta \lambda_\beta g(X, PU) \\
&- m_\alpha^\ell(X, Z) \varepsilon_\alpha \lambda_\alpha g(Y, PU) + m_\alpha^\ell(Y, Z) \eta_\alpha(\phi X) g(Q, PU) \\
&- m_\alpha^\ell(X, Z) \eta_\alpha(\phi Y) g(Q, PU), \quad (5.2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\widetilde{g}}(\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y)N_\alpha, P\phi U) &= g(A_{D^s(X, N_\alpha)}\phi Y, PU) - g(A_{D^s(Y, N_\alpha)}\phi X, PU) \\
&+ g((\nabla_Y A)(N_\alpha, X), PU) - g((\nabla_X A)(N_\alpha, Y), PU) \\
&+ \eta_\alpha(\phi Y)g(\nabla_X Q, PU) - \eta_\alpha(\phi X)g(\nabla_Y Q, PU)
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\widetilde{g}}(\overset{\circ}{\widetilde{R}}(\phi X, \phi Y)W_\beta, P\phi U) &= +g((\nabla_Y A)(W_\beta, X), PU) - g((\nabla_X A)(W_\beta, Y), PU) \\
&+ D^\ell(X, W_\beta)g(A_{W_\beta}Y, PU) - D^\ell(Y, W_\beta)g(A_{W_\beta}X, PU) \\
&+ g((\nabla_X D^\ell)(Y, W_\beta), PU) - g((\nabla_Y D^\ell)(X, W_\beta), PU)
\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

dir.

İspat. $\overset{\circ}{\widetilde{R}}$ ve $\overset{\circ}{R}$, sırasıyla, yarı-simetrik metrik koneksiyonlu $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun ve M lightlike altmanifoldunun eğrilik tensörleri olmak üzere, $\forall \phi X, \phi Y, \phi Z, \phi U \in \Gamma(TM)$, $N_\alpha \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $W_\beta \in \Gamma(S(TM^\perp))$ için (5.2.10), (5.2.11) ve (5.2.12) eşitlikleri $P\phi U$ vektör alanı ile skalar çarpılırsa (5.2.13), (5.2.14) ve (5.2.15) denklemleri elde edilir.

Örnek 5.2.2. $\mathbb{R}_2^4$ nin M yüzeyi

$$x^3 = \frac{x^1 + x^2}{\sqrt{2}}, \quad x^4 = \frac{\log(1 + (x^1 - x^2)^2)}{2}$$

şeklinde verilsin. Böylece M yüzeyi $\mathbb{R}_2^4$ nin bir lightlike altmanifoldudur ve $TM^\perp = Sp\{\xi\}$, $S(TM) = Sp\{X\}$, $S(TM^\perp) = Sp\{W\}$ ve $ltr(TM) = Sp\{N\}$ dir. Buradan

$$\xi = \partial_1 + \partial_2 + \sqrt{2}\partial_3,$$

$$X = \sqrt{2}[1 + (x^1 - x^2)^2]\partial_2 + [1 + (x^1 - x^2)]\partial_3 - \sqrt{2}(x^1 - x^2)\partial_4$$

$$W = 2(x^2 - x^1)\partial_2 + \sqrt{2}(x^2 - x^1)\partial_3 + [1 + (x^1 - x^2)^2]\partial_4$$

$$N = -\frac{1}{2}\partial_1 + \frac{1}{2}\partial_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_3$$

elde edilir. Böylece

$$T\widetilde{M} = Sp\{X\} \perp Sp\{\xi\} \perp Sp\{W\} \oplus Sp\{N\}$$

denklemini sağlanır.

6. KAYNAKLAR

- Ageshe, N., Chafle, M.R., 1991, On Submanifolds of a Riemannian Manifold with Semi-Symmetric Metric Connection, Tensor, N.S., 50.
- Ageshe, N., Chafle, M.R., 1992, A Semi-Symmetric Non-Metric Connection on a Riemannian Manifold, Indian J. Pure App. Math., 23(6), 399–409.
- Barua, B., Ray, A., 1985, Some Properties of a Semi-Symmetric Metric Connection in a Riemannian Manifold, Indian J. Pure App. Math., 16(7), 736 – 740.
- Bonnor, W.B., 1972, Null Hypersurfaces in Minkowski Space-Time Tensor, New Ser., 24, 327 – 345.
- Bejancu, A., 1996, Null Hypersurfaces of Semi-Euclidean Spaces, Saitama Math. J., 14, 25 – 40.
- Bejancu, A., Ferrandez, A., Lucas, P., 1998, A New Viewpoint on Geometry of a Lightlike Hypersurface in a Semi-Euclidean Space, Saitama math. J. 16, 31-38.
- Dautcourt, G., 1967, Characteristic Hypersurface in General Relativity, J. Math. Phys., 8, 1492 – 1501.
- Duggal, K. L., Sharma, R., 1986, Semi-Symmetric Metric Connection in a Semi-Riemannian Manifolds, Indian J. Pure App. Math., 17(11) 1276 – 1282.
- Duggal, K. L., Bejancu, A., 1996, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifold and Applications, Kluwer, Dordrecht.
- Duggal, K. L., Jin, D.H., 1999, Half Lightlike Submanifolds of Codimension 2, Math. J. Toyama Univ., 22, 121 – 161.
- Duggal, K. L., 2002, Riemannian Geometry of Half Lightlike Manifolds, Math.

- J. Toyama Univ., 25, 165 – 179.
- Duggal, K. L., Jin, H., 2003, Totally Umbilical Lightlike Submanifolds, Kodai Math. J., 26, 49 – 68.
- Duggal, K. L., Gimenez, A., 2005, Lightlike Hypersurfaces of Lorentzian Manifolds with Distinguished Screen, Journal of Geometry and Physics 55, 107 – 122.
- Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., 2003, Geometry of Lightlike Submanifolds in Lorentzian Form, Proc. del Congreso Geometria de Lorentz, Benalmádena Publ. RSME, 5, 125–139.
- Güneş, R., Şahin, B., Kılıç, E., 2003, On Lightlike Hypersurfaces of a Semi Riemannian Space Forms, Türk J. Math., 27, 283 – 29.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 2003, Tensör Geometri, AÜ Fen-Fakültesi, Ankara.
- Honda, K., 2001, Some Lightlike Submanifolds, Sut Journal of Mathematics 37(1), 69 – 78.
- Imai, T., 1972, Hypersurfaces of a Riemannian Manifold with Semi-Symmetric Metric Connection, Tensor, N.S., 23, 300 – 306.
- Ioan, C.A., 1997, Degenerate Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds Tensor, N.S., 58, 1 – 7.
- Katsuno, K., 1981, Null Hypersurfaces in Lorentzian Manifold II, Math.Proc Com.Phil.Soc., 89, 525.
- Kılıç, E., Şahin, B., Karadağ, B., Güneş, R., 2004, Coisotropic Submanifolds of a Semi-Riemannian Manifold, Turk J. Math., 28, 335 – 352.
- Küpeli, D., 1987, On Null Submanifolds in Spacetimes, Geo. Dedicata, 23 33 – 51.
- Lember, G., 1965, On Covariant Differentiation within a Null Hypersurfaces

Nuova C., 37, 1659 – 1672.

O'Neill, B., 1983, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, Inc., New York.

Yano, K., 1970, On Semi-Symmetric Metric Connection, *Revue, Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees*, 15, 1579 – 1581.

Yaşar, E., Çöken, C., Yücesan, A., 2005, Totally Umbilical Lightlike Hyper surfaces in Semi-Riemannian Manifold with Semi-Symmetric Metric Connection, *Int. J. of Pure and App. Math.*, 23, 379 – 391.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erol YAŞAR
Doğum yeri : Erdemli / MERSİN
Doğum Yılı : 1969
Medeni Hali : Evli, 1çocuk

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise 1984 – 1987 Hacı Ömer Sabancı Lisesi
Lisans 1987 – 1991 Selçuk Üniversitesi
Yüksek Lisans 1993 – 1996 Ohio Üniversitesi

Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi :

1992 – 1993 Selcuk Üni. Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü Arş. Gör.
1993 – 2001 Muğla Üni.Fen Edebiyat Fak.Matematik Bölümü, Arş. Gör.
2001 – ... Muğla Üni. Ula Ali Koçman M.Y.O. Öğr. Gör.