

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

S-KAPALI UZAYLAR

Esra YENİARAS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2007

Her hakkı saklıdır

Prof.Dr.Mustafa ÇİÇEK danışmanlığında Esra YENİARAS tarafından hazırlanan “**S-KAPALI UZAYLAR**” adlı tez çalışması 26/02/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr.Mustafa ÇİÇEK
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç.Dr. Alev KANIBİR CAMGÖZ
Hacettepe Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Ülkü MEHMETOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

S-KAPALI UZAYLAR

Esra YENİARAS

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa ÇİÇEK

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

İlk, giriş bölümünde tezin amacı verilmiştir.

İkinci bölümde S-kapalı uzayları inceleyebilmemiz için gerekli olan bazı temel kavramlar verilmiştir. Bu kavramlardan bazıları, yarı-açık, yarı-kapalı, regüler-açık, regüler-kapalı, regüler-yarı-açık ve α -cümledir. Yine yarı-iç, yarı-kapanış, yarı-komşuluk kavramları verilmiştir. Ayrıca zayıf sürekli fonksiyonlar, yarı-sürekli fonksiyonlar, yarı-kapalı fonksiyonlar, kararsız fonksiyonlar, ön-yarı-açık fonksiyonlar ve Wilansky anlamında hemen hemen açık fonksiyonlar da incelenmiştir. Bu bölümün son kısmında ise yarı-homeomorfizm tanımı verilmiştir.

Üçüncü ve son bölümde S-kapalı uzay kavramı tanıtılmış ve herhangi bir topolojik uzaya göre S-kapalı olma tanımı da verilmiştir. Yine S-kapalı altuzaylar incelenmiştir. S-kapalı uzayların, tamamen bağlantısız uzaylar, QHC uzayları ve H-kapalı uzaylarla olan ilişkileri incelenmiştir. S-kapalılığın yarı-topolojik bir özellik olduğundan, dolayısıyla da topolojik bir özellik olduğundan bahsedilmiştir.

2007, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler: S-kapalı, tamamen bağlantısız, hemen hemen kompakt, yarı-açık, yarı-kapalı, regüler-açık, regüler-kapalı, α -cümle, yarı-sürekli, kararsız

ABSTRACT

Master Thesis

S-CLOSED SPACES

Esra YENİARAS

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ÇİÇEK

This thesis consists of three chapters.

In the first, introduction chapter the purpose of the thesis is given.

In the second chapter, some fundamental concepts which will be needed in order to examine S-closed spaces, are given. Some of these fundamental concepts are, semi-open, semi-closed, regular-open, regular-closed, regular-semi-open and α -set. Furthermore the concepts of semi-interior, semi-closure and semi-neighbourhood are given. Also, the properties of weakly continuous functions, semi-continuous functions, semi-closed functions, irresolute functions, pre-semi-open functions and Wilansky's almost-open functions, are examined. The description of semi-homeomorphism is given as the last part of this chapter.

In the third and the last chapter, the concept of S-closed space is introduced and the description of being S-closed relative to some topological space, is also given. Furthermore the S-closed subspaces are examined. The relationships among S-closed spaces, extremally disconnected spaces, QHC spaces and H-closed spaces are examined. It is also mentioned that S-closedness is a semi-topological property thus a topological property.

2007, 75 pages

Key Words: S-closed, extremally disconnected, almost compact, semi-open, semi-closed, regular-open, regular-closed, α -set, semi-continuous, irresolute

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarım süresince görüş ve önerileriyle beni yönlendiren sayın hocam Prof. Dr. Mustafa ÇİÇEK'e, yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve bir yüksek lisans tezi hazırlayacak düzeye gelebilmem için her türlü kuramsal altyapıyı oluşturmamda, bana emeği geçen tüm hocalarıma, araştırma görevlilerine, arkadaşlarıma ve aileme teşekkür ederim.

Esra YENİARAS

Ankara, Şubat 2007

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	2
2.1 Topolojik Uzaylarda Yarı-açık ve Yarı-kapalı Altcümleler.....	2
2.2 Topolojik Uzaylarda Regüler-açık ve Regüler-kapalı Altcümleler.....	18
2.3 Topolojik Uzaylarda Regüler-yarı-açık Cümleler ve α -Cümleler.....	22
2.4 Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlarla, Açık Fonksiyonların Bazı Zayıflatılmış Biçimleri.....	28
2.5 Kararsız Fonksiyon, Ön-yarı-açık Fonksiyon ve Yarı-Homeomorfizm.....	38
3. S-KAPALI UZAYLAR.....	43
3.1 S-Kapalı Uzaylar, Uzaya Göre S-Kapalı Altcümleler ve S-Kapalı Altuzaylar.....	43
3.2 S-Kapalı Uzayların Sürekli Fonksiyonlarla Açık Fonksiyonların Bazı Zayıflatılmış Biçimleri ile Kararsız ve Ön-yarı-açık Fonksiyonlar Altındaki Altındaki Görüntü Özellikleri.....	58
3.3 S-Kapalı Uzayların QHC ve H-kapalı Uzaylarla İlişkileri.....	67
KAYNAKLAR.....	73
ÖZGEÇMİŞ.....	75

SİMGELER DİZİNİ

τ	Topoloji
$\mathcal{F}$	Kapalı altcümleler ailesi
τ_G	G altuzayının açık altcümleler ailesi
$\mathcal{V}(x)$	x noktasının komşuluklar ailesi
$\mathcal{V}_s(x)$	x noktasının yarı-komşuluklar ailesi
$S.O.(X)$	X in yarı-açık altcümleler ailesi
$S.C.(X)$	X in yarı-kapalı altcümleler ailesi
$R.O.(X)$	X in regüler-açık altcümleler ailesi
$R.C.(X)$	X in regüler-kapalı altcümleler ailesi
$R.S.O.(X)$	X in regüler-yarı-açık altcümleler ailesi
$\overset{o}{A}$	A cümlesinin içi
A_o	A cümlesinin yarı-içi
$\overline{A}$	A cümlesinin kapanışı
$\underline{A}$	A cümlesinin yarı-kapanışı
$\overline{A}^G$	A cümlesinin G altuzayına göre kapanışı
$X - A$	A cümlesinin X uzayına göre tümlemesi
A^s	A cümlesinin sınırı

1. GİRİŞ

Kompaktlığın hafif zayıflatılmış biçimi olan H-kapalı uzay kavramı ilk defa 1924’de Aleksandroff ve Urysohn tarafından verilmiştir. Hausdorff olmayan H-kapalı uzaylara ise literatürde QHC (Quasi-H-closed space) adı verilir.QHC uzaylarının bir alt sınıfını oluşturan S-kapalı uzay kavramı matematiğe ilk defa 1976 yılında Travis Thompson tarafından ithal edilmiştir. Bizim bu tezdeki amacımız S-kapalı uzaylarla ilgili bilinen bazı kuramsal temel bilgileri vermek suretiyle S-kapalı uzayların özelliklerini incelemektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Topolojik Uzaylarda Yarı-açık ve Yarı-kapalı Altcümleler

Bu kesimde 1963'de N.Levine tarafından verilen yarı-açık cümleler ve 1971'de Gene Crossley ve S.K. Hildebrand tarafından verilen yarı-kapalı cümlelerin S-kapalı uzaylarla ilgili çalışmalarımızda yararlanacağımız özelliklerini inceledik.

Tanım 2.1.1 (Yarı-açık Cümle) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $O \subset A \subset \overline{O}$ olacak biçimde $\exists O \in \tau$ varsa A'ya yarı-açık cümle denir (Levine 1963).

Örnek 2.1.1 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ topolojik uzayında $A =]0, 1]$ cümlesini gözönüne alalım.

$]0, 1[\subset]0, 1] \subset \overline{]0, 1[}$ ve $]0, 1[\in \mathcal{U}$ olduğundan $A =]0, 1]$ cümlesi yarı-açık bir cümledir.

Tanım 2.1.2 (Yarı-açık Altcümleler Ailesi) (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

$\{A \subset X \mid A \text{ yarı-açık}\}$ ailesine (X, τ) topolojik uzayının tüm yarı-açık altcümlelerinin ailesi denir ve $S.O.(X)$ ile gösterilir (Levine 1963).

Teorem 2.1.1 (X, τ) topolojik bir uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $A \in S.O.(X)$

(ii) $A \subset \overline{\overset{o}{A}}$ (Levine 1963)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $A \in S.O.(X)$ olsun. Bu durumda

$$O \subset A \subset \overline{O} \text{ olacak biçimde } \exists O \in \tau \quad (2.1.1)$$

Buradan $O \in \tau \iff \overset{o}{O} = O$ olduğu aşikardır.

$$O \subset A \implies \overset{o}{O} = O \subset \overset{o}{A} \implies \overline{O} \subset \overline{\overset{o}{A}} \quad (2.1.2)$$

(2.1.1) ve (2.1.2) den $A \subset \overline{O} \subset \overline{\overset{o}{A}}$ buradan da $A \subset \overline{\overset{o}{A}}$ elde edilir.

(ii) $\implies$ (i) $A \subset \overline{\overset{o}{A}}$ olsun. Bu durumda $O = \overset{o}{A}$ seğıelim $\implies O = \overset{o}{A} \in \tau$ dur.

Her zaman için

$$\overset{o}{A} \subset A \quad (2.1.3)$$

dır.

Ayrıca hipotezden

$$A \subset \overline{\overset{o}{A}} \quad (2.1.4)$$

olur.

O halde (2.1.3) ve (2.1.4)'den $O = \overset{o}{A} \subset A \subset \overline{\overset{o}{A}} = \overline{O}$ olacak biçimde $\exists O \in \tau$ elde edilir.

Lemma 2.1.1 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ ise $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ dır.

İspat. $\forall x \in \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ alalım. Bu durumda $\exists i_o \in I$ için $x \in \overline{A_{i_o}}$ olup

$$\exists i_o \in I \text{ ve } \forall V \in \mathcal{V}(x) \text{ için } V \cap A_{i_o} \neq \emptyset \quad (2.1.5)$$

bulunur.

Buradan $V \cap A_{i_o} \subset V \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ olup (2.1.5)'den $V \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \neq \emptyset$ olduğundan $x \in \overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)}$ elde edilir.

Uyarı 2.1.1 (X, τ) bir topolojik uzay ve $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun.

$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ önermesi genellikle doğru değildir.

Örnek 2.1.2 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında $Y =]-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{n} \mid n = 2, 3, \dots\}$ olmak üzere (Y, τ_Y) altuzayını ve $A = \{\frac{1}{n} \mid n = 2, 3, \dots\}$ cümlesini gözönüne alalım.

$$A = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \text{ olup, } \overline{A}^Y = \overline{\bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\}}^Y = \overline{A} \cap Y = (A \cup \{0\}) \cap Y = A \cup \{0\}$$

$$\overline{A}^Y = A \cup \{0\} \quad (2.1.6)$$

bulunur.

Öte yandan

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} \overline{\left\{ \frac{1}{n} \right\}}^Y = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} = A \quad (2.1.7)$$

dır.

O halde (2.1.6) ve (2.1.7)'den $\overline{\bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\}}^Y \not\subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} \overline{\left\{ \frac{1}{n} \right\}}^Y$ dir.

Teorem 2.1.2 (X, τ) bir topolojik uzay ve $(A_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ olsun. Bu durumda $\bigcup_{i \in I} A_i \in S.O.(X)$ dir (Levine 1963).

İspat. $\forall i \in I$ için $A_i \in S.O.(X)$ olsun. Tanım 2.1.1'den $\forall i \in I$ için $O_i \subset A_i \subset \overline{O_i}$ olacak biçimde $\exists O_i \in \tau$ dir.

O halde Lemma 2.1.1'den $\bigcup_{i \in I} O_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} \overline{O_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} O_i}$ olup

$O = \bigcup_{i \in I} O_i$ seçersek bu bize $O \in \tau$ olduğunu gösterir.

Bu ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in S.O.(X)$ olduğunu ispatlar.

Teorem 2.1.3 (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$, $A \in S.O.(X)$ ve $A \subset B \subset \overline{A}$ olsun. Bu durumda $B \in S.O.(X)$ dir (Levine 1963).

İspat. $A \in S.O.(X)$ olduğundan

$$U \subset A \subset \overline{U} \text{ olacak biçimde } \exists U \in \tau \quad (2.1.8)$$

dır.

Ayrıca hipotezden

$$A \subset B \subset \overline{A} \quad (2.1.9)$$

dır.

O halde (2.1.8) ve (2.1.9) 'dan

$$U \subset B \quad (2.1.10)$$

dır.

(2.1.8)'den

$$A \subset \overline{U} \implies \overline{A} \subset \overline{\overline{U}} = \overline{U} \quad (2.1.11)$$

dır.

(2.1.9) ve (2.1.11)'den

$$B \subset \overline{U} \quad (2.1.12)$$

dır.

Sonuçta (2.1.10) ve (2.1.12)'den $U \subset B \subset \overline{U}$ olacak biçimde $\exists U \in \tau$ elde edilir.

Bu ise $B \in S.O.(X)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.4 (X, τ) bir topolojik uzay ve $O \in \tau$ olsun. Bu durumda $O \in S.O.(X)$ dir.

İspat. $O \in \tau \iff O = \overset{\circ}{O}$ ve $\overset{\circ}{O} \subset \overline{\overset{\circ}{O}}$ olup Teorem 2.1.1'den $O \in S.O.(X)$ dir.

Uyarı 2.1.2 Teorem 2.1.4'ün karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 2.1.3 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ 'da $[1, 2[$ cümlesini gözönüne alalım.

$]1, 2[\subset [1, 2[\subset \overline{]1, 2[} = [1, 2]$ olup $[1, 2[\in S.O.(\mathbb{R})$ dir. Fakat $[1, 2[\notin \mathcal{U}$ dur.

O halde açık her cümle yarı-açık olmasına rağmen, yarı-açık her cümle açık olmak zorunda değildir.

Teorem 2.1.5 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset Y \subset X$ olmak üzere X 'in (Y, τ_Y) altuzayını alalım. $A \in S.O.(X)$ olsun. Bu durumda $A \in S.O.(Y)$

dir (Levine 1963).

İspat. $A \in S.O.(X)$ olduğundan

$$O \subset A \subset \overline{O} \text{ olacak biçimde } \exists O \in \tau \quad (2.1.13)$$

dır.

$A \subset Y$ olduğundan $O \subset Y$ dir. Bu ise bize

$O = O \cap Y$ eşitliğini verir. Böylece $O \in \tau_Y$ dir.

(2.1.13)'den $O = O \cap Y \subset A \cap Y \subset \overline{O} \cap Y = \overline{O}^Y$ elde edilir ki bu da $O \subset A \subset \overline{O}^Y$ demektir.

O halde $O \subset A \subset \overline{O}^Y$ olacak biçimde $\exists O \in \tau_Y$ bulundu.

Bu ise $A \in S.O.(Y)$ olması demektir.

Uyarı 2.1.3 Teorem 2.1.5'in karşısı her zaman doğru değildir.

Örnek 2.1.4 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ topolojik uzayında $Y = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ ve $A = \{1\}$ olsun.

$A \subset Y$ ve $A \in \mathcal{U}_Y$ olduğundan Teorem 2.1.4 gereği $A \in S.O.(Y)$ dir.

Fakat $A = \{1\} \not\subset \overbrace{\{1\}}^o = \overline{\emptyset} = \emptyset$ olup Teorem 2.1.2 gereği $A \notin S.O.(\mathbb{R})$ dir.

Uyarı 2.1.4 Genel olarak yarı-açık bir cümlemin tümlemesi yarı-açık olmak zorunda değildir. Ayrıca yarı-açık iki kümenin arakesiti de yarı-açık olmak zorunda değildir.

Örnek 2.1.5 (i) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojisinde $A =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ cümlesini gözönüne alalım. $A \in \mathcal{U}$ olup Teorem 2.1.4'den $A \in S.O.(\mathbb{R})$ dir.

$\mathbb{R}-A = \{0\}$ olup $\{0\} \not\subseteq \overline{\{0\}} = \bar{\emptyset} = \emptyset$ olduğundan Teorem 2.1.1 gereği $\{0\}$ yarı-açık değildir.

(ii) $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayında $\{a\}$ yarı-açıktır.

Fakat $(X - \{a\}) = \{b, c\}$ olup $\{b, c\} \not\subseteq \overline{\{b, c\}} = \bar{\emptyset} = \emptyset$ olduğundan $(X - \{a\})$ yarı-açık değildir.

(iii) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ 'da $[0, 1[$ ve $] -1, 0]$ cümleleri yarı-açık olmasına rağmen

$[0, 1[\cap] -1, 0] = \{0\}$ olup

$\{0\} \not\subseteq \overline{\{0\}} = \bar{\emptyset} = \emptyset$ olduğundan $\{0\}$ yarı-açık değildir.

Tanım 2.1.3 (Yarı-kapalı Cümle) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $X - A$ yarı-açık oluyorsa A 'ya yarı-kapalı cümle denir (Crossley and Hildebrand 1971).

Örnek 2.1.6 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında $A =] -\infty, 1[\cup [2, \infty[$ ne açık ne kapalı altcümlesini gözönüne alalım.

$\mathbb{R}-A = [1, 2[$ ve $[1, 2[\in S.O.(\mathbb{R})$ dir. Bu ise $A =] -\infty, 1[\cup [2, \infty[$ cümlesinin yarı-kapalı olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.4 (Yarı-kapalı Altçümleler Ailesi) (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

$\{A \subset X \mid A \text{ yarı-kapalı}\}$ ailesine (X, τ) topolojik uzayının tüm yarı-kapalı altcümleler ailesi denir ve $S.C.(X)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.6 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $A \in S.C.(X)$

(ii) $\overset{o}{F} \subset A \subset F$ olacak biçimde $\exists F \in \mathcal{F}$ (Crossley and Hildebrand 1971)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $A \in S.C.(X)$ olsun. Tanım 2.1.3'den $X - A \in S.O.(X)$ dir. Bu ise

$$O \subset X - A \subset \overline{O} \text{ olacak biçimde } \exists O \in \tau \quad (2.1.14)$$

demektir. Ayrıca $O \in \tau \iff X - O \in \mathcal{F}$ olduğunu biliyoruz. (2.1.14)'den

$$O \subset X - A \iff A \subset X - O \quad (2.1.15)$$

elde edilir. Yine (2.1.14)'den

$$X - A \subset \overline{O} \iff X - \overline{O} \subset A \quad (2.1.16)$$

elde edilir.

Öte yandan

$$\overbrace{X - O}^o = X - \overline{O} \quad (2.1.17)$$

dır.

Burada $X - O = F$ dersek (2.1.15), (2.1.16) ve (2.1.17) den $\overbrace{X - O}^o \subset A \subset X - O$ olacak biçimde $\exists F = X - O \in \mathcal{F}$ bulunur.

(ii) $\implies$ (i) Hipotezden $\overset{o}{F} \subset A \subset F$ olacak biçimde $\exists F \in \mathcal{F}$ vardır. Bu ise

$$X - F \subset X - A \subset X - \overset{o}{F} = \overline{X - F} \quad (2.1.18)$$

demektir. Ayrıca $F \in \mathcal{F} \iff X - F \in \tau$ olduğu aşıkardır.

Burada $X - F = O$ dersek (2.1.18)'den

$O \subset X - A \subset \overline{O}$ olacak biçimde $\exists O = X - F \in \tau$ bulmuş olduk.

O halde $X - A \in S.O.(X)$ dir. Bu ise $A \in S.C.(X)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.7 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki önermeler dengir:

(i) $A \in S.C.(X)$

(ii) $\overline{\overline{A}} \subset A$ (Crossley and Hildebrand 1971)

İspat. $A \in S.C.(X)$ olsun. Tanım 2.1.3'den $X - A \in S.O.(X)$ olduğunu biliyoruz.

O halde Teorem 2.1.1'den

$$X - A \subset \overline{\overline{X - A}} = X - \overline{\overline{A}} \quad \text{olup, buradan}$$

$$X - (X - \overline{\overline{A}}) \subset X - (X - A) \text{ bulunur. Bu ise}$$

$$\overline{\overline{A}} \subset A \text{ olduğunu gösterir.}$$

Teorem 2.1.8 Bir (X, τ) topolojik uzayında kapalı her cümle yarı-kapalıdır.

İspat. $F \subset X$ ve $F \in \mathcal{F}$ alalım, $F = \overline{F}$ olup $\overline{\overline{F}} \subset \overline{F} = F$ olduğundan

Teorem 2.1.7 gereği $F \in S.C.(X)$

Teorem 2.1.9 (X, τ) bir topolojik uzay ve $(F_i)_{i \in I} \subset S.C.(X)$ olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} F_i \in S.C.(X)$ dir (Crossley and Hildebrand 1971).

İspat. $\forall i \in I$ için $F_i \in S.C.(X)$ olsun. Tanım 2.1.3'den $X - F_i \in S.O.(X)$ dir. Teorem 2.1.2'den $\bigcup_{i \in I} (X - F_i) \in S.O.(X)$ idi.

O halde $X - (\bigcup_{i \in I} (X - F_i)) = \bigcap_{i \in I} (X - (X - F_i)) = \bigcap_{i \in I} F_i \in S.C.(X)$ elde edilir.

Tanım 2.1.5 (Yarı-komşuluk) (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun.

Eğer $x \in W_s \subset V_s$ olacak biçimde $\exists W_s \in S.O.(X)$ bulunabiliyorsa V_s cümlesine x noktasının bir yarı-komşuluğu denir.

x noktasının tüm yarı-komşuluklarının ailesi $\mathcal{V}_s(x)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.1.6 (Yarı-iç) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$\mathcal{A} = \{U \mid U \in S.O.(X), U \subset A\}$ ile A 'nın kapsadığı tüm yarı-açıkların ailesi gösterilsin. Bu durumda A cümlesinin yarı-içi

$$A_o = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U$$

şeklinde tanımlıdır (Crossley and Hildebrand 1971).

Tanım 2.1.7 (Yarı-kapanış) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$\mathcal{B} = \{D \mid D \in S.C.(X), A \subset D\}$ ile A 'yı kapsayan tüm yarı-kapalıların ailesi gösterilsin. Bu durumda A cümlesinin yarı-kapanışı

$$\underline{A} = \bigcap_{D \in \mathcal{B}} D$$

şeklinde tanımlıdır (Crossley and Hildebrand 1971).

Teorem 2.1.10 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:

(i) $A \in S.O.(X) \iff A_o = A$

(ii) $A \in S.C.(X) \iff \underline{A} = A$ (Crossley and Hildebrand 1971)

İspat. (i) $\mathcal{A} = \{U \mid U \in S.O.(X), U \subset A\}$ olmak üzere $A_o = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U$ şeklinde tanımlı idi.

$$\forall x \in A_o = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U \text{ alalım} \iff \exists U_o \in \mathcal{A} \ni x \in U_o \subset A$$

$\implies x \in A$ olduğundan

$$A_o \subset A \quad (2.1.19)$$

$\forall x \in A$ alalım, $A \in S.O.(X)$ olduğundan $x \in U_o = A$ olacak biçimde

$\exists U_o = A \in S.O.(X) \ni A = U_o \subset A$. Bu ise birleşim tanımından $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U = A_o$ olduğunu gösterir. O halde

$$A \subset A_o \quad (2.1.20)$$

Sonuçta (2.1.19) ve (2.1.20)'den $A_o = A$ olduğu görülür.

(ii) $\mathcal{B} = \{D \mid D \in S.C.(X), A \subset D\}$ olmak üzere $\underline{A} = \bigcap_{D \in \mathcal{B}} D$ şeklinde tanımlı idi.

$\forall x \in \underline{A} = \bigcap_{D \in \mathcal{B}} D$ alalım. $A \in S.C.(X)$ ve $A \subset A$ olduğundan $A \in \mathcal{B}$ dir. O halde

$$\underline{A} = \bigcap_{D \in \mathcal{B}} D \subset A \quad (2.1.21)$$

$\forall x \in A$ alalım. $\forall D \in \mathcal{B}$ için $x \in A \subset D \implies x \in D$.

O halde $\forall D \in \mathcal{B}$ için $x \in D \iff x \in \bigcap_{D \in \mathcal{B}} D = \underline{A}$ yani

$$A \subset \underline{A} \quad (2.1.22)$$

Sonuç olarak (2.1.21) ve (2.1.22)'den $\underline{A} = A$ elde edilir.

Teorem 2.1.11 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:

(i) $\underline{A} \in S.C.(X)$

(ii) $A_o \in S.O.(X)$ (Crossley and Hildebrand 1971)

İspat. (i) $\mathcal{B} = \{D \mid D \in S.C.(X), A \subset D\}$ olmak üzere $\underline{A} = \bigcap_{D \in \mathcal{B}} D$ ve $\forall D \in \mathcal{B}$ için $D \in S.C.(X)$ dir. O halde Teorem 2.1.9'dan

$\underline{A} \in S.C.(X)$ elde edilir.

(ii) $\mathcal{A} = \{U \mid U \in S.O.(X), U \subset A\}$ olmak üzere $A_o = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U$ ve $\forall U \in \mathcal{A}$ için $U \in S.O.(X)$ olduğundan Teorem 2.1.2 gereğince

$A_o \in S.O.(X)$ elde edilir.

Teorem 2.1.12 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $x \in \underline{A}$

(ii) $\forall V_s \in \mathcal{V}_s(x)$ için $V_s \cap A \neq \emptyset$

İspat. (i) $\implies$ (ii) Kabul edelim ki;

$\exists V_s \in \mathcal{V}_s(x)$ için $V_s \cap A = \emptyset$ olsun. Yarı-komşuluk tanımından $V_s \in \mathcal{V}_s(x)$

olduğundan $x \in W_s \subset V_s$ olacak biçimde $\exists W_s \in S.O.(X)$ dir.

Buradan $W_s \cap A \subset V_s \cap A = \emptyset$ olup $W_s \cap A = \emptyset$ bulunur.

Böylece $A \subset (X - W_s) = D_x \in S.C.(X)$ dir.

O halde $D_x \in \mathcal{B}$ dir.

Ayrıca $D_x = (X - W_s)$ ve $x \in W_s$

olduğundan $x \notin D_x$ ve buradan da $x \notin \bigcap_{D \in \mathcal{B}} D$ dir. O halde Tanım 2.1.7 den $x \notin \underline{A}$ dir.

(ii) $\implies$ (i) Kabul edelim ki;

$x \notin \underline{A}$ olsun. Bu durumda $x \notin \bigcap_{D \in \mathcal{B}} D$ dir.

Buradan $\exists D \in \mathcal{B}$ için $x \notin D$ elde ederiz.

Böylece $\exists D \in \mathcal{B}$ için $x \in (X - D)$ dir.

Burada $(X - D) = V_s$ dersek $V_s \in S.O.(X)$ olduğundan $x \in V_s \in \mathcal{V}_s(x)$ bulduk.

Öte yandan $A \subset D \implies X - D \subset X - A \iff V_s \subset X - A \iff V_s \cap A = \emptyset$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.13 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $\underline{A} = X$

(ii) $\forall O \in S.O.(X) \ni O \neq \emptyset$ için $O \cap A \neq \emptyset$

İspat. (i) $\implies$ (ii) Teorem 2.1.12'den

$$\underline{A} = X \iff \forall x \in X \text{ ve } \forall V_s \in \mathcal{V}_s(x) \text{ için } V_s \cap A \neq \emptyset \quad (2.1.23)$$

$\forall O \in S.O.(X)$ ve $O \neq \emptyset$ alalım $\implies \exists x \in O \in S.O.(X)$

$\iff O \in \mathcal{V}_s(x)$ olup (2.1.23)'den $O \cap A \neq \emptyset$ dir.

(ii) $\implies$ (i) $V_s \in \mathcal{V}_s(x) \iff x \in W_s \subset V_s$ olacak biçimde $\exists W_s \in S.O.(X)$ ve $x \in W_s \neq \emptyset$ olduğu da görülür.

O halde hipotezden

$$W_s \cap A \neq \emptyset \quad (2.1.24)$$

Ayrıca $W_s \subset V_s \implies W_s \cap A \subset V_s \cap A$ olup (2.1.24) dan $V_s \cap A \neq \emptyset$ sonucuna ulaşılır. Yani $\underline{A} = X$ dir.

Teorem 2.1.14 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki önermeler

denktir:

$$(i) \overline{A} = X$$

$$(ii) \underline{A} = X$$

İspat. (i) $\implies$ (ii) $\overline{A} = X$ olsun

$\forall U \in S.O.(X)$ alalım. Buradan $O \subset U \subset \overline{O}$ olacak biçimde $\exists O \in \tau$ dir.

Hipotezden ve $O \in \tau$ ve $\overline{A} = X$ olduğundan

$$O \cap A \neq \emptyset \quad (2.1.25)$$

$O \subset U$ olduğundan $O \cap A \subset U \cap A$ dir. O halde (2.1.25)'dan $U \cap A \neq \emptyset$ ve Teorem 2.1.13'den

$\underline{A} = X$ dir.

(ii) $\implies$ (i) $\underline{A} = X$ olsun.

$\underline{A} \subset \overline{A}$ olduğunu biliyoruz ve hipotezden $\underline{A} = X$ olduğundan

$$X \subset \overline{A} \quad (2.1.26)$$

Ayrıca $A \subset X$ olduğundan

$$\overline{A} \subset \overline{X} = X \quad (2.1.27)$$

O halde (2.1.26) ve (2.1.27)'den $\overline{A} = X$ elde edilir.

Teorem 2.1.15 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda

$$\overset{o}{A} \subset A_o \subset A \subset \underline{A} \subset \overline{A}$$

dir (Crossley and Hildebrand 1971).

İspat. (i) $\overset{o}{A} = \{x \mid \exists V \in \mathcal{V}(x) \ni V \subset A\}$ ve $\mathcal{A} = \{U \mid U \in S.O.(X), U \subset A\}$ olmak üzere bir A cümlesinin yarı-içi $A_o = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U$ idi.

$\forall x \in \overset{o}{A}$ alalım $\implies \exists V \in \mathcal{V}(x) \ni V \subset A$

$\implies x \in U \subset V$ olacak biçimde $\exists U \in \tau \ni V \subset A$

$\implies x \in U \subset A$ olacak biçimde $\exists U \in \tau$

$U \in \tau \implies U \in S.O.(X)$ dir. O halde $x \in U \subset A$ olacak biçimde $\exists U \in S.O.(X)$

$\iff x \in \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U = A_o$

$\implies \overset{o}{A} \subset A_o$

(ii) $\forall x \in A_o = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U$ alalım $\iff \exists U_x \in \mathcal{A} \ni x \in U_x \subset A$

$\implies x \in A$

$\implies A_o \subset A$

(iii) $\forall x \in A$ alalım. O halde $\forall V_s \in \mathcal{V}_s(x)$ için $V_s \cap A \neq \emptyset$ olduğundan Teorem 2.1.12'den $x \in \underline{A}$ dir.

(iv) $\forall x \in \underline{A}$ ve $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ alalım. Buradan

$$x \in O \subset V \text{ olacak biçimde } \exists O \in \tau \quad (2.1.28)$$

$O \in \tau$ ise $O \in S.O.(X)$ olduğunu Teorem 2.1.4'den biliyoruz.

O halde $x \in O$ ve $O \in S.O.(X) \iff O \in \mathcal{V}_s(x)$ dir.

Hipotezden $x \in \underline{A}$ idi . Teorem 2.1.12 den

$$O \cap A \neq \emptyset \quad (2.1.29)$$

(2.1.28)'den

$$O \subset V \implies O \cap A \subset V \cap A \quad (2.1.30)$$

dir. O halde (2.1.29) ve (2.1.30)'den $V \cap A \neq \emptyset$ bulundu. Bu ise $x \in \overline{A}$ olduğunu gösterir.

O halde $\underline{A} \subset \overline{A}$ dir.

Teorem 2.1.16 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:

$$(i) (X - A)_o = (X - \underline{A})$$

$$(ii) \underline{X - A} = (X - A_o)$$

İspat. (i) $(X - A)_o = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U \ni \forall U \in \mathcal{A}$ için $U \subset X - A$ ve $U \in S.O.(X)$ dir

.

$$U \subset X - A \iff A \subset X - U$$

$$U \in S.O.(X) \iff (X - U) \in S.C.(X)$$

$$(X - (X - A)_o) = (X - (\bigcup_{U \in \mathcal{A}} U)) = \bigcap_{U \in \mathcal{A}} (X - U) = \bigcap_{(X - U) \in \mathcal{B}} (X - U) \text{ olup burada}$$

$(X - U) = D$ dersek $\mathcal{B} = \{D \mid D \in S.C.(X) \text{ ve } A \subset D\}$ şeklinde tanımlanır.

$$\text{Buradan } (X - (X - A)_o) = \bigcap_{D \in \mathcal{B}} D$$

$$\iff (X - (X - A)_o) = \underline{A}$$

$$\iff (X - A)_o = (X - \underline{A}) \text{ elde edilir.}$$

$$(ii) \underline{X - A} = \bigcap_{D \in \mathcal{B}} D \ni \forall D \in \mathcal{B} \text{ için } D \in S.C.(X) \text{ ve } (X - A) \subset D \text{ dir.}$$

$$D \in S.C.(X) \iff (X - D) \in S.O.(X) \quad (2.1.31)$$

$$(X - A) \subset D \iff (X - D) \subset A \quad (2.1.32)$$

$(X - (\underline{X - A})) = (X - (\bigcap_{D \in \mathcal{B}} D)) = \bigcup_{D \in \mathcal{B}} (X - D) = \bigcup_{(X-D) \in \mathcal{A}} (X - D)$ olup burada

$(X - D) = U$ denirse 2.1.32'den $U \subset A$ olduğundan A nın kapsadığı bütün yarı-açıkların ailesi $\mathcal{A} = \{U \mid U \in S.O.(X), U \subset A\}$ ile gösterilirse 2.1.31 ve Tanım 2.1.6'dan

$(X - (\underline{X - A})) = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U = A_o$ olduğu görülür. Buradan $(\underline{X - A}) = X - A_o$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.1.17 (X, τ) bir topolojik uzay, $A, B \subset X$ ve $A \in S.C.(X)$ olsun. Eğer $\overset{o}{A} \subset B \subset A$ ise $B \in S.C.(X)$ dir (Crossley and Hildebrand 1971).

İspat.

$$A \in S.C.(X) \iff (X - A) \in S.O.(X) \quad (2.1.33)$$

Hipotezden $\overset{o}{A} \subset B \subset A \iff$

$$X - A \subset X - B \subset X - \overset{o}{A} = \overline{X - A} \quad (2.1.34)$$

O halde (2.1.33), (2.1.34) ve Teorem 2.1.3 gereği $(X - B) \in S.O.(X)$ dir. Bu ise $B \in S.C.(X)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.18 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer

$$A \in S.O.(X) \text{ ise } \overset{o}{A}, A_o, \underline{A}, \overline{A}$$

cümleleri de yarı-açıktır (Crossley and Hildebrand 1971).

İspat. $\overset{o}{A} \in \tau$ olup ,açık her cümle yarı-açık olduğundan $\overset{o}{A} \in S.O.(X)$ dir.

Teorem 2.1.11 'den biliyoruz ki her zaman için $A_o \in S.O.(X)$ dir.

Teorem 2.1.15'den $A \subset \underline{A} \subset \overline{A}$ olduğunu biliyoruz.O halde hipotezden $A \in S.O.(X)$ olduğu da dikkate alınrsa Teorem 2.1.3 gereğince $\underline{A} \in S.O.(X)$ olduğu görülür.

Son olarak da $\underline{A} \subset \overline{A} \subset \overline{\underline{A}} = \overline{A}$ olup $\underline{A} \in S.O.(X)$ olduğundan yine Teorem 2.1.3'den $\overline{A} \in S.O.(X)$ olduğu da görülür.

2.2 Topolojik Uzaylarda Regüler-açık ve Regüler-kapalı Altcümleler

Bu kesimde S-kapalı uzaylarla,S-kapalı altcümle ve altuzayların karakterize edilmesinde önemli rol oynayan ve 1937'de M.Stone tarafından verilen regüler-açık cümlelerle, 1968'de Singal ve Singal tarafından verilen regüler-kapalı cümlelerin özelliklerini inceledik.

Tanım 2.2.1 (Regüler-açık Cümle) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\overset{o}{\overline{A}} = A$ oluyorsa A 'ya regüler-açık cümle denir (Stone 1937).

(X, τ) topolojik uzayının tüm regüler-açık altcümleler ailesini $R.O.(X)$ ile göstereceğiz.

Örnek 2.2.1 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında $A =]0, 1[$ cümlesini gözönüne alalım. $\overset{o}{\overline{A}} = \overline{]0, 1[} = \overline{[0, 1]} =]0, 1[= A$ olup, $\overset{o}{\overline{A}} = A$ olduğundan A cümlesi regüler-açıktır.

Teorem 2.2.1 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.Eğer A regüler-açık ise A açıktır.

İspat. A regüler-açık $\iff \overset{o}{\overline{A}} = A$ olup bir cümleinin içi her zaman açık olduğundan $A \in \tau$ olduğu aşıkardır.

Uyarı 2.2.1 Teorem 2.2.1'nin karşıtı her zaman doğru olmak zorunda değildir. Yani açık her cümle regüler-açık olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.2 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında $A =]0, 1[\cup]1, 2[$ cümlesini gözönüne alalım. İkinci açıklar aksiyomundan biliyoruz ki A açıktır.

Fakat $\overline{\overset{o}{A}} = \overline{]0, 1[\cup]1, 2[} = \overbrace{[0, 2]}^o =]0, 2[$ olup A cümlesi açık olmasına rağmen $\overline{\overset{o}{A}} \neq A$ olduğundan regüler-açık değildir.

Tanım 2.2.2 (Regüler-kapalı Cümle) (X, τ) bir topolojik uzay ve $F \subset X$ olsun. Eğer $\overline{\overset{o}{F}} = F$ oluyorsa F 'ye regüler-kapalı cümle denir (Singal and Singal 1968).

X uzayının tüm regüler-kapalı altcümleler ailesini $R.C.(X)$ ile göstereceğiz.

Örnek 2.2.3 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında $F = [0, 1]$ cümlesini gözönüne alalım. $\overline{\overset{o}{F}} =]0, 1[$ olup $\overline{\overset{o}{F}} = [0, 1] = F$ dir. O halde F regüler-kapalı bir cümledir.

Teorem 2.2.2 (X, τ) bir topolojik uzay ve $F \subset X$ olsun. Eğer F regüler-kapalı ise F kapalıdır.

İspat. F regüler-kapalı olsun. Bu durumda $F = \overline{\overset{o}{F}}$ olup bir cümlenin kapanışı her zaman kapalı olduğundan F de kapalıdır.

Uyarı 2.2.2 Teorem 2.2.2'nin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani kapalı her cümle regüler-kapalı olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.4 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında $\forall q \in \mathbb{R}$ alalım. $\overline{\overset{o}{\{q\}}}$ tek nokta cümlesi $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ 'da kapalıdır. $\overbrace{\{q\}}^o = \emptyset$ olduğundan $\overline{\overbrace{\{q\}}^o} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ olup $\overline{\overbrace{\{q\}}^o} \neq \{q\}$ dur. Yani $\{q\}$ regüler-kapalı değildir.

Teorem 2.2.3 (X, τ) bir topolojik uzay ve $F \subset X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

$$(i) F \in R.O.(X)$$

$$(ii) X - F \in R.C.(X)$$

İspat. (i) $\implies$ (ii) F regüler-açık $\iff F = \overline{F}^o$

$$\iff X - F = X - \overline{F}^o = \overline{X - F}^o \iff X - F = \overline{X - F}^o \iff X - F \in R.C.(X)$$

$$(ii)\implies(i) X - F \text{ regüler-kapalı} \iff X - F = \overline{X - F}^o$$

$$\iff (X - (X - F)) = (X - \overline{X - F}^o) = \overline{X - (X - F)}^o$$

$$\iff F = \overline{F}^o$$

$$\iff F \in R.O.(X)$$

Teorem 2.2.4 (X, τ) bir topolojik uzay ve $F \subset X$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:

$$(i) \overline{F}^o \text{ regüler-açıktır}$$

$$(ii) \overline{\overline{F}^o} \text{ regüler-kapalıdır}$$

İspat. (i) Bir cümleinin içi her zaman kapanışı tarafından kapsanacağından

$$\overline{F}^o \subset \overline{F} \implies \overline{\overline{F}^o} \subset \overline{\overline{F}} = \overline{F} \implies \overline{\overline{F}^o} \subset \overline{F}^o \quad (2.2.1)$$

$$\overline{F}^o \subset \overline{\overline{F}^o} \implies \overline{\overline{F}^o} \subset \overline{\overline{\overline{F}^o}} \implies \overline{\overline{F}^o} \subset \overline{\overline{F}^o}^o \quad (2.2.2)$$

O halde (2.2.1) ve (2.2.2)'den $\overline{\overline{F}^o} = \overline{F}^o$ olup $\overline{F}^o \in R.O.(X)$ olduğu görülür.

(ii) Her cümle içini kapsadığından

$$\frac{o}{\overline{F}} \subset \frac{o}{\overline{F}} \implies \frac{o}{\overline{F}} \subset \overline{\frac{o}{\overline{F}}} = \frac{o}{\overline{F}} \quad (2.2.3)$$

Ayrıca bir cümlenin kapanışı o cümlenin kendisini kapsayacağından

$$\frac{o}{\overline{F}} \subset \frac{o}{\overline{F}} \implies \frac{o}{\overline{F}} \subset \frac{o}{\overline{F}} \implies \frac{o}{\overline{F}} \subset \frac{o}{\overline{F}} \implies \frac{o}{\overline{F}} \subset \frac{o}{\overline{F}} \quad (2.2.4)$$

O halde (2.2.3) ve (2.2.4)'den $\frac{o}{\overline{F}} = \frac{o}{\overline{F}}$ olup $\frac{o}{\overline{F}} \in R.C.(X)$ dir.

2.3 Topolojik Uzaylarda Regüler-yarı-açık Cümleler ve α -Cümleler

Bu kesimde S-kapalı uzayların ifadesinde ve S-kapalı altuzaylarla ilgili temel işlemlerde önemli rol oynayan ve 1968'de D.E.Cameron tarafından verilen regüler-yarı-açık cümlelerle, 1965'de O.Njastad tarafından verilen α -cümleleri inceledik.

Tanım 2.3.1 (Regüler-yarı-açık Cümle) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $U \subset A \subset \overline{U}$ olacak biçimde $\exists U \in R.O.(X)$ varsa A 'ya regüler-yarı-açık cümle denir (Cameron 1978).

(X, τ) topolojik uzayının tüm regüler-yarı-açık altcümlelerinin ailesini $R.S.O.(X)$ ile göstereceğiz.

Örnek 2.3.1 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında $A =]0, 1[$ cümlesini gözönüne alalım.

$$\frac{o}{A} = \overline{\frac{o}{A}} = \overline{]0, 1[} = \overline{[0, 1]} = [0, 1] = A \text{ olup } \frac{o}{\overline{A}} = A \text{ olduğundan } A \in R.O.(X) \text{'dir.}$$

O halde $]0, 1[= A \subset A \subset \overline{A} = [0, 1]$ olacak biçimde $\exists A \in R.O.(X)$ bulunduğundan A cümlesi regüler-yarı-açıktır.

Teorem 2.3.1 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A regüler-yarı-açık ise A yarı-açıktır (Cameron 1978).

İspat. $A \in R.S.O.(X) \iff U \subset A \subset \overline{U}$ olacak biçimde $\exists U \in R.O.(X)$ vardır. O halde Teorem 2.2.1'den $U \in \tau$ olduğu aşıkardır. Bu ise yarı-açık cümle tanımından $A \in S.O.(X)$ olduğunu gösterir.

Tanım 2.3.2 (α -cümle) (X, τ) bir topolojik uzay $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subset \frac{o}{\overline{A}}$ oluyorsa A 'ya bir α -cümle denir (Njastad 1965).

Teorem 2.3.2 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \in \tau$ ise A α -cümledir (Njastad 1965).

İspat.

$$A \in \tau \iff A = \overset{o}{A} \implies A \subset \overset{o}{A} \quad (2.3.1)$$

Ayrıca her cümle kapanışı tarafından kapsanacağından

$$\overset{o}{A} \subset \overline{\overset{o}{A}} \quad (2.3.2)$$

(2.3.1) ve (2.3.2)'den $A \subset \overline{\overset{o}{A}} \implies \overset{o}{A} \subset \overset{o}{\overline{\overset{o}{A}}} \iff A \subset \overset{o}{\overline{\overset{o}{A}}} \iff A \text{ } \alpha\text{-cümledir.}$

Teorem 2.3.3 (X, τ) bir topolojik uzay $A \subset X$ olsun. Eğer

$$A \text{ } \alpha\text{-cümle ise } A \in S.O.(X)$$

(Noiri 1978)

$$\textbf{İspat. } A \text{ } \alpha\text{-cümle} \iff A \subset \overset{o}{A} \subset \overline{\overset{o}{A}} \implies A \subset \overline{\overset{o}{A}} \iff A \in S.O.(X)$$

Uyarı 2.3.1 Teorem 2.3.3'ün karşısı genellikle doğru değildir. Yani her yarı-açık cümle α -cümle olmak zorunda değildir.

Örnek 2.3.2 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında $]0, 1] \in S.O.(\mathbb{R})$ dir. Fakat;

$$\overline{\overset{o}{]0, 1]}} = \overline{\overset{o}{]0, 1[}} = \overline{\overset{o}{[0, 1]}} =]0, 1[\text{ olup }]0, 1] \not\subset]0, 1[\text{ olduğundan }]0, 1] \text{ bir } \alpha\text{-cümle değildir.}$$

Teorem 2.3.4 (X, τ) bir topolojik uzay $A \subset X$, A bir α -cümle ve $B \in S.O.(X)$ olsun. Bu durumda $A \cap B \in S.O.(X)$ (Njastad 1965).

$$\textbf{İspat. } A \cap B \in S.O.(X) \iff A \cap B \subset \overline{\overset{o}{A \cap B}} \text{ olduğunu görelim.}$$

$\forall x \in A \cap B$ ve $\forall U \in \mathcal{V}(x)$ alalım. Buradan $x \in A$ ve $x \in B$

$$x \in A \quad \alpha - \text{cümle} \implies A \subset \frac{o}{\overline{A}} \quad (2.3.3)$$

$$x \in B \in S.O.(X) \implies B \subset \overline{\frac{o}{B}} \quad (2.3.4)$$

O halde (2.3.3) ve (2.3.4)'den $x \in \frac{o}{\overline{A}}$ ve $x \in \overline{\frac{o}{B}}$ dir.

$x \in \frac{o}{\overline{A}} \in \tau \implies \frac{o}{\overline{A}} \in \mathcal{V}(x)$ olup, $U \in \mathcal{V}(x)$ olduğu da gözönüne alınırsa komşuluk aksiyomlarından

$$\frac{o}{\overline{A}} \cap U \in \mathcal{V}(x) \quad (2.3.5)$$

elde edilir

Öte yandan $x \in \overline{\frac{o}{B}} \iff \forall V \in \mathcal{V}(x) \text{ için } V \cap \frac{o}{B} \neq \emptyset$ dir. O halde (2.3.5)'den

$$(\frac{o}{\overline{A}} \cap U) \cap \frac{o}{B} \neq \emptyset \quad (2.3.6)$$

olduğu görülür

Diğer taraftan

$$A \subset \frac{o}{\overline{A}} \implies \frac{o}{\overline{A}} \subset \frac{o}{A} = \frac{o}{\overline{A}} \iff \frac{o}{\overline{A}} \cap \frac{o}{A} = \frac{o}{A} \quad (2.3.7)$$

$$(2.3.6) \text{ ve } (2.3.7)'den \quad (\frac{o}{\overline{A}} \cap U) \cap \frac{o}{B} \cap \frac{o}{A} = (U \cap \frac{o}{B}) \cap (\frac{o}{\overline{A}} \cap \frac{o}{A}) = U \cap (\frac{o}{B} \cap \frac{o}{A}) \neq \emptyset$$

elde edilir ki bu da $x \in \overline{\frac{o}{A} \cap \frac{o}{B}}$ olması demektir.

O halde $x \in \overline{\frac{o}{A} \cap \frac{o}{B}} = \overline{\frac{o}{A \cap B}}$ olup bu ise $A \cap B \subset \overline{\frac{o}{A \cap B}}$ olması demektir. Sonuçta $A \cap B \in S.O.(X)$ dir.

Teorem 2.3.5 (X, τ) topolojik uzay, $A \subset G \subset X$ olsun. Eğer $G \in \tau$ ise aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $A \in S.O.(G)$

(ii) $A = W \cap G$ olacak biçimde $\exists W \in S.O.(X)$

İspat. (i) $\implies$ (ii) $A \in S.O.(G)$ olsun. Bu durumda

$$U_G \subset A \subset \overline{U_G}^G \text{ olacak biçimde } \exists U_G \in \tau_G. \quad (2.3.8)$$

$U_G \in \tau_G \iff U_G = U \cap G$ olacak biçimde $\exists U \in \tau$ dir. O halde (2.3.8)'den

$$U \cap G \subset A \subset \overline{U \cap G}^G = \overline{U \cap G} \cap G \subset \overline{U \cap G} \quad (2.3.9)$$

Öte yandan $G \in \tau$ olup Teorem 2.3.2 gereği G α -cümledir. O halde Teorem 2.3.4'den $U \cap G \in S.O.(X)$ olduğu aşıkardır.

Böylece (2.3.9)'dan ve Teorem 2.1.3'den $A \in S.O.(X)$ olduğu görülür.

$A \subset G$ olduğundan $A = A \cap G$ olacak biçimde $\exists A \in S.O.(X)$ bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

(ii) $\implies$ (i) $A = W \cap G$ olacak biçimde $\exists W \in S.O.(X)$ olsun.

$G \in \tau$ olup Teorem 2.3.2'den G α -cümledir.

O halde Teorem 2.3.4'den $A = W \cap G \in S.O.(X)$ dir.

Buradan da Teorem 2.1.5 gereği $A \in S.O.(G)$ olduğu görülür.

Lemma 2.3.1 (X, τ) bir topolojik uzay $A, B \subset X$ olsun. Eğer $A \in \tau$ ise bu taktirde

$$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$$

dır.

İspat. $\forall x \in A \cap \overline{B}$ ve $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ alalım.

$x \in A$ ve $A \in \tau$ ise $A \in \mathcal{V}(x)$ dir. O halde komşuluk aksiyomlarından $V \cap A \in \mathcal{V}(x)$ dir.

Ayrıca hipotezden $x \in \overline{B}$ idi. O halde $V \cap A \cap B \neq \emptyset$

$$\implies x \in \overline{A \cap B}$$

$$\implies A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$$

Sonuç 2.3.1 (X, τ) bir topolojik uzay $A \subset X, A \in \tau$ ve $B \in S.O.(X)$ olsun. Bu durumda $A \cap B \in S.O.(X)$

İspat. $B \in S.O.(X)$ olduğundan Teorem 2.1.1'den $B \subset \overline{\overset{o}{B}}$ dir.

Buradan $A \cap B \subset A \cap \overline{\overset{o}{B}}$ olup Lemma 2.3.1'den $A \cap B \subset \overline{A \cap \overset{o}{B}}$ dir. O halde

$$A \in \tau \text{ olduğundan } A \cap B \subset \overline{\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}} = \overline{\overset{o}{A \cap B}} \text{ bulunur.}$$

Bu ise Teorem 2.1.1'den $A \cap B \in S.O.(X)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.6 (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset Y \subset X$ ve $Y \in S.O.(X)$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $A \in S.O.(X)$

(ii) $A \in S.O.(Y)$ (Noiri 1973)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $A \in S.O.(X)$ olduğundan

$$O \subset A \subset \overline{O} \text{ olacak biçimde } \exists O \in \tau \quad (2.3.10)$$

$O \subset A \subset Y \implies O \subset Y \iff O = O \cap Y \iff O \in \tau_Y$ dir. Ayrıca (2.3.10)'dan

$$O = O \cap Y \subset A \cap Y \subset \overline{O} \cap Y = \overline{O}^Y \quad (2.3.11)$$

$A \subset Y \iff A \cap Y = A$ olduğu da dikkate alınarak (2.3.11) ifadesi $O \subset A \subset \overline{O}^Y$ olacak biçimde $\exists O \in \tau_Y$ önermesine dönüştür. Bu ise

$A \in S.O.(Y)$ olması demektir.

(ii) $\implies$ (i) $A \in S.O.(Y)$ olsun. Bu durumda

$$A \in S.O.(Y) \iff W \subset A \subset \overline{W}^Y \text{ olacak biçimde } \exists W \in \tau_Y \quad (2.3.12)$$

$$W \in \tau_Y \iff W = U \cap Y \text{ olacak biçimde } \exists U \in \tau \quad (2.3.13)$$

O halde (2.3.12) ve (2.3.13)'den

$$U \cap Y \subset A \subset \overline{U \cap Y}^Y = \overline{U \cap Y} \cap Y \subset \overline{U \cap Y} \quad (2.1.23)$$

Ayrıca $U \in \tau$ ve $Y \in S.O.(X)$ olduğundan Sonuç 2.3.1'den $U \cap Y \in S.O.(X)$ olduğu görülür. O halde Teorem 2.1.3 ve (2.1.23) önermesinden

$A \in S.O.(X)$ olduğu sonucuna kolayca ulaşılır.

Teorem 2.3.7 (X, τ) bir topolojik uzay $A \subset X$, A bir α -cümle ve $V \in S.O.(X)$ ise $A \cap V \in S.O.(A)$ dır (Njastad 1965).

İspat. A α -cümle ve $V \in S.O.(X)$ olup Teorem 2.3.4'den $A \cap V \in S.O.(X)$ dir. Öte yandan A α -cümle olup Teorem 2.3.3 gereği

$A \in S.O.(X)$ ve $A \cap V \subset A$ olduğundan Teorem 2.3.6 gereği $A \cap V \in S.O.(A)$ olduğu

görlür.

2.4 Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlarla Açık Fonksiyonların Bazı Zayıflatılmış Biçimleri

Bu kesimde 1961 ve 1963'de N. Levine tarafından sürekli fonksiyonların zayıflatılmış biçimleri olarak tanımlanmış olan zayıf sürekli fonksiyon ve yarı-sürekli fonksiyonla, açık fonksiyonların zayıflatılmış bir biçimi olarak 1967'de Wilansky tarafından tanımlanmış olan hemen hemen açık fonksiyonun, ilerde S-kapalı uzaylarda yararlanacağımız özelliklerini inceledik.

Tanım 2.4.1 (Zayıf Sürekli Fonksiyon) (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $x \in X$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall V \in \mathcal{V}(f(x)) \text{ için } \exists U \in \mathcal{V}(x) \ni f(U) \subset \overline{V}$$

oluyorsa f fonksiyonuna zayıf sürekli dir denir (Levine 1961).

Teorem 2.4.1 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) f zayıf sürekli dir

(ii) $\forall U \in \tau'$ için $f^{-1}(U) \subset \overbrace{f^{-1}(\overline{U})}^o$ (Levine 1961)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $f : X \rightarrow Y$ zayıf sürekli olsun.

$\forall U \in \tau'$ alalım $\implies f^{-1}(U) \subset X$ dir. $\forall x \in f^{-1}(U) \iff f(x) \in U \in \tau'$ dur. O halde f zayıf sürekli olduğundan $\exists O \in \mathcal{V}(x) \ni f(O) \subset \overline{U}$

olur.

Bu durumda $x \in O \subset f^{-1}(f(O)) \subset f^{-1}(\overline{U})$ dir.

Ayrıca $O \in \tau \iff O = \overset{o}{O}$ olduğunu da gözönüne alırsak $x \in O = \overset{o}{O} \subset \overbrace{f^{-1}(\overline{U})}^o$

$\implies x \in \overbrace{f^{-1}(\overline{U})}^o \implies f^{-1}(U) \subset \overbrace{f^{-1}(\overline{U})}^o$ dir.

(ii) $\implies$ (i) $\forall U \in \tau'$ için $f^{-1}(U) \subset \overbrace{f^{-1}(\overline{U})}^o$ olsun $\implies f$ 'in zayıf sürekli olduğunu görelim.

$\forall x \in X$ ve $\forall U \in \mathcal{V}(f(x))$ alalım

$$f(x) \in U \iff x \in f^{-1}(U) \quad (2.4.1)$$

Ayrıca hipotez gereği

$$f^{-1}(U) \subset \overbrace{f^{-1}(\overline{U})}^o \quad (2.4.2)$$

O halde (2.4.1) ve (2.4.2)'den $x \in \overbrace{f^{-1}(\overline{U})}^o = O$ dersek $O \in \tau$ olduğu açıktır.

$f(O) = f(\overbrace{f^{-1}(\overline{U})}^o)$ dir ve $\overbrace{f^{-1}(\overline{U})}^o \subset f^{-1}(\overline{U})$ her zaman vardır

$\implies f(O) \subset f(f^{-1}(\overline{U})) \subset \overline{U} \implies f(O) \subset \overline{U}$ sonucuna ulaşılır ki bu da f 'in zayıf sürekli olduğunu ispatlar.

Teorem 2.4.2 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

Eğer f sürekli ise f zayıf sürekli dir.

İspat. f sürekli olsun, $\forall x \in X$ ve $\forall V \in \mathcal{V}(f(x))$ alalım, f sürekli olduğundan

$\exists U \in \mathcal{V}(x) \ni f(U) \subset V$ dir. Ayrıca her cümle kapamış tarafından kapsandığından dolayı

$V \subset \overline{V}$ dir. O halde

$$\exists U \in \mathcal{V}(x) \ni f(U) \subset V \subset \overline{V} \implies f(U) \subset \overline{V}$$

elde edilir ki bu da f 'in zayıf sürekli olduğunu kanıtlar.

Teorem 2.4.3 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ zayıf sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$\forall V \in \tau'$ için $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\overline{V})$ dir (Noiri 1974).

İspat. Kabul edelim ki $\overline{f^{-1}(V)} \not\subset f^{-1}(\overline{V})$ olsun $\Longleftrightarrow \exists x \in X \ni x \in \overline{f^{-1}(V)}$ ve $x \notin f^{-1}(\overline{V})$ dir.

$$x \in \overline{f^{-1}(V)} \Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x) \text{ için } U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset \quad (2.4.3)$$

$x \notin f^{-1}(\overline{V}) \Longleftrightarrow f(x) \notin \overline{V} \Longleftrightarrow \exists W \in \mathcal{V}(f(x)) \ni W \cap V = \emptyset$ elde edilir.

Ayrıca hipotezden $V \in \tau' \implies V \cap \overline{W} = \emptyset$ dir, şöyle ki;

Kabul edelim ki $V \cap \overline{W} \neq \emptyset$ olsun $\Longleftrightarrow \exists x \in V \cap \overline{W} \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \in V \in \mathcal{V}(x)$ ve $x \in \overline{W} \Longleftrightarrow \forall S \in \mathcal{V}(x)$ için $S \cap W \neq \emptyset$ olup

$V \in \mathcal{V}(x)$ olduğundan $V \cap W \neq \emptyset$ elde edilir ki bu da hipotezle çelişir. O halde

$$V \cap \overline{W} = \emptyset \quad (2.4.4)$$

dir.

Öte yandan f zayıf sürekli olduğundan $\exists U \in \mathcal{V}(x) \ni f(U) \subset \overline{W}$ dir.

O halde (2.4.4)'den

$$V \cap f(U) \subset V \cap \overline{W} = \emptyset \implies V \cap f(U) = \emptyset \quad (2.4.5)$$

Ayrıca $f(U \cap f^{-1}(V)) \subset f(U) \cap V$ olup (2.4.3)'den $f(U) \cap V \neq \emptyset$ olur ki bu da (2.4.5) ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup

$\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\overline{V})$ önermesi doğrudur.

Tanım 2.4.2 (Yarı-süreklı Fonksiyon): (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve

$$f : X \rightarrow Y$$

bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\forall U \in \tau' \text{ için } f^{-1}(U) \in S.O.(X)$$

oluyorsa f fonksiyonuna yarı-süreklı bir fonksiyon denir (Levine 1963).

Lemma 2.4.1 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) f yarı-süreklı

(ii) $\forall F \in \mathcal{F}'$ ise $f^{-1}(F) \in S.C.(X)$ (Crossley and Hildebrand 1971)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $\forall K \in \mathcal{F}' \iff Y - K \in \tau'$ ve f yarı-süreklı olduğundan

$$f^{-1}(Y - K) = X - f^{-1}(K) \in S.O.(X)$$

dir. Bu ise $f^{-1}(K) \in S.C.(X)$ olduğunu gösterir.

(ii) $\implies$ (i) $\forall U \in \tau'$ alalım $\iff Y - U \in \mathcal{F}'$.

O halde hipotezden $f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U) \in S.C.(X)$

$\iff f^{-1}(U) \in S.O.(X)$ olup f yarı-süreklıdır.

Teorem 2.4.4 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $A \subset X$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) f yarı-süreklı

(ii) $\forall A \subset X$ için $f(\underline{A}) \subset \overline{f(A)}$ (Crossley and Hildebrand 1971)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $\forall A \subset X$ alalım. $\overline{f(A)} \in \mathcal{F}'$ olduğu aşıkardır.

O halde Lemma 2.4.1'den

$$f^{-1}(\overline{f(A)}) \in S.C.(X)$$

O halde Teorem 2.1.10 dan

$$f^{-1}(\overline{f(A)}) = \underline{f^{-1}(\overline{f(A)})} \quad (2.4.6)$$

Buradan

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$$

$\implies A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ olup buradan da

$$\underline{A} \subset \underline{f^{-1}(\overline{f(A)})} \quad (2.4.7)$$

O halde (2.4.6) ve (2.4.7)'den

$$f(\underline{A}) \subset f(\underline{f^{-1}(\overline{f(A)})}) = f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}$$

dir. O halde

$f(\underline{A}) \subset \overline{f(A)}$ olduğu görülür.

(ii) $\implies$ (i) $\forall F \in \mathcal{F}'$ alalım $\implies f^{-1}(F) \subset X$ ve (ii) hipotezinden

$$f(\underline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \text{ ve } \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F \implies f(\underline{f^{-1}(F)}) \subset F$$

$$\implies f^{-1}(f(\underline{f^{-1}(F)})) \subset f^{-1}(F)$$

Buradan

$$\underline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F) \quad (2.4.8)$$

dir. Ayrıca her zaman

$$f^{-1}(F) \subset \underline{f^{-1}(F)} \quad (2.4.9)$$

O halde (2.4.8) ve (2.4.9)'dan $f^{-1}(F) = \underline{f^{-1}(F)} \iff f^{-1}(F) \in S.C.(X)$

Tanım 2.4.3 (Hemen Hemen Açık Fonksiyon) (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall V \in \mathcal{V}(x) \text{ için } \overline{f(V)} \in \mathcal{V}(f(x))$$

oluyorsa f fonksiyonuna hemen hemen açık fonksiyon denir (Wilansky 1967).

Teorem 2.4.5 Açık her fonksiyon hh-açıktır.

İspat. (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $x \in X$ ve $f : X \rightarrow Y$ açık bir fonksiyon olsun. O halde $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ için $f(V) \in \mathcal{V}(f(x))$ dir. Ayrıca

$f(V) \subset \overline{f(V)}$ olup komşuluk aksiyomlarından $\overline{f(V)} \in \mathcal{V}(f(x))$ olduğu kolayca görülür. Bu ise f in hh-açık olduğunu gösterir.

Lemma 2.4.2 (X, τ) topolojik bir uzay $A, B \subset X, B \in \tau$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\overline{A} \cap B = \emptyset$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\exists A \subset X$ ve $\exists B \in \tau \ni A \cap B = \emptyset$ ve $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ olsun.

$$\overline{A} \cap B \neq \emptyset \iff \exists x \in \overline{A} \cap B \iff x \in \overline{A} \text{ ve } x \in B$$

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}(x) \text{ için } V \cap A \neq \emptyset \quad (2.4.10)$$

$$x \in B \text{ ve } B \in \tau \implies B \in \mathcal{V}(x) \quad (2.4.11)$$

O halde (2.4.10) ve (2.4.11)'den $B \cap A \neq \emptyset$ olup hipotezle çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $\overline{A} \cap B = \emptyset$ dir.

Lemma 2.4.3 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ hh-açık bir fonksiyon olsun.

Bu durumda $\forall A \in \tau'$ için $f^{-1}(\overline{A}) \subset \overline{f^{-1}(A)}$ dır (Wilansky 1967).

İspat. f hh-açık fakat $f^{-1}(\overline{A}) \not\subset \overline{f^{-1}(A)}$ olsaydı

$\exists x \in f^{-1}(\overline{A}) \ni x \notin \overline{f^{-1}(A)}$ olurdu. Buradan

$$x \in f^{-1}(\overline{A}) \iff f(x) \in \overline{A} \quad (2.4.12)$$

Ayrıca $x \notin \overline{f^{-1}(A)} \iff \exists U \in \mathcal{V}(x) \ni U \cap f^{-1}(A) = \emptyset$

$\implies f(U \cap f^{-1}(A)) = \emptyset$ ve $f(U \cap f^{-1}(A)) = f(U) \cap A$

$\iff f(U) \cap A = \emptyset$ ve $A \in \tau'$ olup Lemma 2.4.2 den

$\iff$

$$\overline{f(U)} \cap A = \emptyset \quad (2.4.13)$$

Ayrıca f hh-açık olduğundan

$$\overline{f(U)} \in \mathcal{V}(f(x)) \quad (2.4.14)$$

O halde (2.4.13) ve (2.4.14) den $f(x) \notin \overline{A}$ elde edilir ki bu ise (2.4.12) ile çelişir.

O halde kabultümüz yanlış olup $f^{-1}(\overline{A}) \subset \overline{f^{-1}(A)}$ dir.

Teorem 2.4.6 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ zayıf sürekli, hh-açık bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\forall F \subset Y \ni F \in R.C.(Y) \implies f^{-1}(F) \in R.C.(X)$$

(Singal and Singal 1968)

İspat. $\forall F \subset Y \ni F \in R.C.(Y)$ alalım, her zaman $\overset{o}{F} \in \tau'$ olduğunu biliyoruz. O halde f zayıf sürekli olduğundan Teorem 2.4.3'den

$$\overline{f^{-1}(\overset{o}{F})} \subset f^{-1}(\overline{\overset{o}{F}}) \quad (2.4.15)$$

Ayrıca hh-açık olduğundan Lemma 2.4.3'den

$$f^{-1}(\overline{\overset{o}{F}}) \subset \overline{f^{-1}(\overset{o}{F})} \quad (2.4.16)$$

O halde $F \in R.C.(Y) \iff F = \overline{\overset{o}{F}}$ olduğu da dikkate alınırsa (2.4.15) ve (2.4.16)'den $\overline{f^{-1}(\overset{o}{F})} = f^{-1}(\overline{\overset{o}{F}}) = f^{-1}(F)$ ve her zaman için $\overline{f^{-1}(\overset{o}{F})} \in \mathcal{F}$ olduğundan $f^{-1}(F) \in \mathcal{F} \iff f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$ dir.

Öte yandan;

$$\overline{\overbrace{f^{-1}(F)}^o} \subset \overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F) \implies \overline{\overbrace{f^{-1}(F)}^o} \subset f^{-1}(F) \quad (2.4.17)$$

Ayrıca f zayıf sürekli ve $\overset{o}{F} \in \tau'$ olup Teorem 2.4.1'den

$$f^{-1}(\overset{o}{F}) \subset \overbrace{f^{-1}(\overline{\overset{o}{F}})}^o = \overbrace{f^{-1}(F)}^o \implies \overline{f^{-1}(\overset{o}{F})} \subset \overline{\overbrace{f^{-1}(F)}^o} \quad (2.4.18)$$

O halde (2.4.16) ve (2.4.18) den

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(\overline{\overset{o}{F}}) \subset \overline{f^{-1}(\overset{o}{F})} \subset \overline{\overbrace{f^{-1}(F)}^o}$$

olup buradan da

$$f^{-1}(F) \subset \overline{\overbrace{f^{-1}(F)}^o} \quad (2.4.19)$$

O halde (2.4.17) ve (2.4.19)'den $f^{-1}(F) = \overline{\overbrace{f^{-1}(F)}^o} \iff f^{-1}(F) \in R.C.(X)$

Tanım 2.4.4 (Yarı-kapalı Fonksiyon) (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve

$$f : X \rightarrow Y$$

bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall F \in \mathcal{F}$ için $f(F) \in S.C.(X)$

oluyorsa f fonksiyonuna yarı-kapalı fonksiyon denir (Noiri 1973).

Teorem 2.4.7 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ örten bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) f yarı-kapalı

(i) $\forall B \subset Y$ ve $f^{-1}(B) \subset U$ koşulunu gerçekleştiren $\forall U \in \tau$ için $B \subset V$ olacak biçimde $\exists V \in S.O.(Y) \ni f^{-1}(V) \subset U$ (Noiri 1973)

İspat. (i) $\implies$ (ii) f yarı-kapalı olsun, $\forall B \subset Y$ ve $f^{-1}(B) \subset U$ olacak biçimde $\forall U \in \tau$

alalım ve $V = Y - f(X - U)$ diyelim.

$U \in \tau \iff X - U \in \mathcal{F}$ ve f yarı-kapalı olduğundan

$$f(X - U) \in S.C.(Y) \iff V = Y - f(X - U) \in S.O.(Y) \quad (2.4.20)$$

$$X - U \subset f^{-1}(f(X - U)) \implies X - f^{-1}(f(X - U)) \subset X - (X - U) = U$$

$$\iff f^{-1}(Y - f(X - U)) \subset U$$

olup buradan da

$$f^{-1}(V) \subset U \quad (2.4.21)$$

$$\text{Ayrıca hipotezden } f^{-1}(B) \subset U \implies X - U \subset X - f^{-1}(B) = f^{-1}(Y - B)$$

$$\implies f(X - U) \subset f(f^{-1}(Y - B)) = Y - B$$

ise

$$Y - (Y - B) \subset Y - f(X - U) \iff B \subset V \quad (2.4.22)$$

O halde (2.4.20),(2.4.21) ve (2.4.22)'den ispat tamamlanır.

$$(ii) \implies (i) \quad \forall F \in \mathcal{F} \implies f(F) \in S.C.(Y) \text{ mi } (?)$$

$$\iff Y - f(F) \in S.O.(Y) \text{ mi } (?)$$

$$\forall y \in (Y - f(F)) \text{ alalım } \iff \{y\} \subset Y - f(F)$$

$$\implies f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(Y - f(F))$$

$$\implies f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(Y - f(F)) = X - f^{-1}(f(F))$$

$$\implies f^{-1}(\{y\}) \subset X - f^{-1}(f(F)) \subset X - F \text{ ve } X - F \in \tau \text{ olup (ii) hipotezinden}$$

$$\{y\} \subset V_{(y)} \text{ olacak biçimde } \exists V_{(y)} \in S.O.(Y) \ni f^{-1}(V_{(y)}) \subset X - F$$

$$\implies f(f^{-1}(V_{(y)})) = V_{(y)} \subset f(X - F)$$

$$\implies y \in V_{(y)} \subset Y - f(F)$$

$$\implies Y - f(F) = \bigcup_{y \in Y - f(F)} V_{(y)} \text{ olup Teorem 2.1.2'den}$$

$$Y - f(F) = \bigcup_{y \in Y - f(F)} V_{(y)} \in S.O.(Y) \text{ elde edilir.}$$

$$\implies f(F) \in S.C.(Y)$$

$$\implies f \text{ yarı-kapalıdır.}$$

2.5 Kararsız Fonksiyon,Ön-yarı-açık Fonksiyon ve Yarı-homeomorfizm

Bu kesimde S-kapalı uzayların yarı-topolojik bir uzay olmasında önemli rol oynayan ve 1971'de Gene Crossley ve S.K.Hildebrand tarafından tanımlanan kararsız fonksiyonlarla, ön-yarı-açık fonksiyonların özelliklerini inceledik ve bunlardan yararlanarak yarı-homeomorfizm tanımını verdik.

Tanım 2.5.1 (Kararsız Fonksiyon) (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve

$$f : X \rightarrow Y$$

bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall S \in S.O.(Y)$ için $f^{-1}(S) \in S.O.(X)$ oluyorsa

f fonksiyonuna kararsız fonksiyon denir (Crossley and Hildebrand 1972).

Teorem 2.5.1 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) f kararsız

(ii) $\forall A \in S.C.(Y)$ için $f^{-1}(A) \in S.C.(X)$ (Crossley and Hildebrand 1972)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $\forall A \in S.C.(Y)$ alalım $\iff Y - A \in S.O.(Y)$ ve f kararsız olduğundan $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A) \in S.O.(X)$

$$\iff f^{-1}(A) \in S.C.(X)$$

(ii) $\implies$ (i) f kararsız mı (?) $\iff \forall A \in S.O.(Y)$ için $f^{-1}(A) \in S.O.(X)$ mi (?)

$\forall A \in S.O.(Y)$ alalım $\iff Y - A \in S.C.(Y)$ ve (i) hipotezinden

$$f^{-1}(Y - A) \in S.C.(X) \iff X - f^{-1}(A) \in S.C.(X)$$

$$\iff f^{-1}(A) \in S.O.(X)$$

$\implies f$ kararsızdır

Teorem 2.5.2 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) f kararsız

(ii) $\forall A \subset X$ için $f(\underline{A}) \subset \underline{f(A)}$ (Crossley and Hildebrand 1972)

İspat. (i) $\implies$ (ii) f kararsız olsun ve $\forall A \subset X$ alalım, Teorem 2.1.11'den

$\underline{f(A)} \in S.C.(Y)$ olduğunu biliyoruz. O halde Teorem 2.5.1'den

$$f^{-1}(\underline{f(A)}) \in S.C.(X) \iff f^{-1}(\underline{f(A)}) = \underline{\underline{f^{-1}(f(A))}} \quad (2.5.1)$$

Her cümle yarı-kapanış tarafından kapsandığından $f(A) \subset \underline{f(A)}$

$$\implies f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\underline{f(A)})$$

$$\implies A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\underline{f(A)}) \text{ ve (2.5.1)'den}$$

$$\underline{A} \subset \underline{\underline{f^{-1}(f(A))}} \subset \underline{\underline{f^{-1}(\underline{f(A))}}} = \underline{\underline{f^{-1}(\underline{f(A))}}}$$

$$\implies f(\underline{A}) \subset f(f^{-1}(\underline{f(A)})) \subset \underline{f(A)}$$

$$\implies f(\underline{A}) \subset \underline{f(A)}$$

(ii) $\implies$ (i) f kararsız mı (?) $\iff \forall A \in S.C.(Y)$ için $f^{-1}(A) \in S.C.(X)$ mi (?)

$\forall A \in S.C.(Y)$ alalım, (ii) hipotezinden $f(\underline{f^{-1}(A)}) \subset \underline{f(f^{-1}(A))} \subset \underline{A} = A$ olup

$$\underline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(f(\underline{f^{-1}(A)})) \subset f^{-1}(A) \quad (2.5.2)$$

Ayrıca her zaman

$$f^{-1}(A) \subset \underline{f^{-1}(A)} \quad (2.5.3)$$

O halde (2.5.2) ve (2.5.3)'den $f^{-1}(A) = \underline{f^{-1}(A)} \iff f^{-1}(A) \in S.C.(X)$

$\implies f$ kararsızdır.

Tanım 2.5.2 (Ön-yarı-açık Fonksiyon) (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall A \in S.O.(X)$ için $f(A) \in S.O.(Y)$ oluyorsa f fonksiyonuna ön-yarı-açık fonksiyon denir (Crossley and Hildebrand 1972).

Teorem 2.5.3 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ 1-1, örten, ön-yarı-açık bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f^{-1} : Y \rightarrow X$ kararsızdır.

İspat. f^{-1} kararsız $\iff \forall S \in S.O.(X)$ için $(f^{-1})^{-1}(S) \in S.O.(Y)$ olduğunu göstereceğiz.

$\forall S \in S.O.(X)$ alalım, f 1-1, örten olduğundan $(f^{-1})^{-1}(S) = f(S)$ olup f ön-yarı-açık olduğundan $(f^{-1})^{-1}(S) = f(S) \in S.O.(Y)$ dir. O halde f^{-1} kararsızdır.

Tanım 2.5.3 (Yarı-homeomorfizm) (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve

$$f : X \rightarrow Y$$

bir fonksiyon olsun. Eğer f 1-1, örten, kararsız ve ön-yarı-açık ise f fonksiyonuna yarı-homeomorfizm denir (Crossley and Hildebrand 1972).

Lemma 2.5.1 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli ve açık bir

fonksiyon olsun. Bu durumda $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

Lemma 2.5.2 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $O \subset X$ ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(\overline{O}) \subset \overline{f(O)}$ dır.

Lemma 2.5.3 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda ;

f sürekli ve açık ise f kararsız ve ön-yarı-açıktır (Crossley and Hildebrand 1972).

İspat. f sürekli ve açık olsun. $\forall A \in S.O.(Y)$ alalım $\iff O \subset A \subset \overline{O}$ olacak biçimde $\exists O \in \tau'$

$\implies f^{-1}(O) \subset f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\overline{O})$ ve Lemma 2.5.1'den f sürekli ve açık olduğundan $f^{-1}(\overline{O}) = \overline{f^{-1}(O)}$

olup buradan

$$f^{-1}(O) \subset f^{-1}(A) \subset \overline{f^{-1}(O)} \quad (2.5.4)$$

Ayrıca $O \in \tau'$ ve f sürekli olduğundan

$$f^{-1}(O) \in \tau \quad (2.5.5)$$

Sonuçta (2.5.4) ve (2.5.5)'den $f^{-1}(A) \in S.O.(X)$ elde edilir ki bu da f 'in kararsız olduğunu gösterir.

Şimdi ise f 'in ön-yarı-açık olup olmadığına bakalım:

f ön-yarı-açık mı $(?) \iff \forall A \in S.O.(X)$ için $f(A) \in S.O.(Y)$ mi $(?)$

$\forall A \in S.O.(X)$ alalım $\iff O \subset A \subset \overline{O}$ olacak biçimde $\exists O \in \tau$

$\implies f(O) \subset f(A) \subset f(\overline{O})$

Ayrıca $O \in \tau$ ve f açık olduğundan $f(O) \in \tau'$ dur.

Öte yandan f sürekli olup Lemma 2.5.2'den $f(\overline{O}) \subset \overline{f(O)}$ olduğu da dikkate alınırsa $f(O) \subset f(A) \subset f(\overline{O}) \subset \overline{f(O)}$ olacak biçimde $\exists f(O) \in \tau'$

$$\iff f(A) \in S.O.(Y)$$

$\implies f$ ön-yarı-açıktır.

Teorem 2.5.4 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. Bu durumda f bir yarı-homeomorfizmdir (Crossley and Hildebrand 1972).

İspat. f homeomorfizm olsun $\iff f$ 1-1, örten, sürekli ve tersi de sürekli. Tersinin sürekliliği f 'in açık olmasını gerektirir. f sürekli ve açık olduğundan Lemma 2.5.3'den f kararsız ve ön-yarı-açıktır. O halde f bir yarı-homeomorfizmdir.

Tanım 2.5.4 (Yarı-topolojik Özellikler) Yarı-homeomorfizm altında korunan özelliklere yarı-topolojik özellikler denir (Crossley and Hildebrand 1972).

Uyarı 2.5.1 Teorem 2.5.4'ün karşısı her zaman doğru olmak zorunda değildir. Yani her yarı-homeomorfizm bir homeomorfizm olmak zorunda değildir.

Örnek 2.5.1 $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ ve $\tau' = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ olsun,

$f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ fonksiyonu 1-1, örten ve sürekli. Ayrıca $S.O.(X, \tau) = S.O.(X, \tau')$

$$x \longrightarrow f(x) = x$$

olup $\forall A \in S.O.(X, \tau')$ için $f^{-1}(A) = A \in S.O.(X, \tau)$ olduğundan f kararsızdır. Öte yandan $\forall A \in S.O.(X, \tau)$ için $f(A) = A \in S.O.(X, \tau')$ olup f ön-yarı-açıktır. O halde f bir yarı-homeomorfizmdir. Fakat

$\exists \{a, c\} \in \tau$ için $f(\{a, c\}) = \{a, c\} \notin \tau'$ olup f açık değildir. Dolayısıyla homeomorfizm değildir.

3. S-KAPALI UZAYLAR

3.1 S-Kapalı Uzaylar, Uzaya Göre S-kapalı Altcümleler ve S-kapalı Altuzaylar

Bu kesimde ilk kez 1976'da T.Thompson tarafından verilen S-kapalı uzay kavramı ve 1977'de T.Noiri tarafından verilen uzaya göre S-kapalı altcümle kavramları incelenmiş ve S-kapalı altuzayların özellikleri üzerinde durulmuştur.

Tanım 3.1.1 (S-kapalı Uzay) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer

$X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimdeki $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ için $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni$

$X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$ oluyorsa (X, τ) 'ya S-kapalı uzay denir (Thompson 1976).

Tanım 3.1.2 (Uzaya Göre S-kapalı Altcümle) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer

$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimdeki $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ için $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni$

$A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$ oluyorsa A X 'e göre S-kapalıdır denir (Noiri 1977).

Teorem 3.1.1 (X, τ) bir topolojik uzay ve $G \subset X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) G X 'e göre S-kapalı

(ii) $G \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ olacak biçimdeki $\forall (A_i)_{i \in I} \subset R.C.(X)$ için $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni$
 $G \subset \bigcup_{i \in J} A_i$ (Noiri 1977)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $G \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ olacak biçimde $\forall (A_i)_{i \in I} \subset R.C.(X)$ alalım.

$\forall i \in I$ için $A_i \in R.C.(X) \iff A_i = \overline{\overline{A_i}^o} \implies A_i \subset \overline{\overline{A_i}^o}$ olup

Teorem 2.1.1'den $A_i \in S.O.(X)$ dir.

G X 'e göre S-kapalı olduğundan $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni G \subset \bigcup_{i \in J} \overline{A_i}$ dir. Ayrıca $\forall i \in I$ için $A_i \in R.C.(X)$ olup Teorem 2.2.2'den $A_i \in \mathcal{F}$ dir.

$\forall i \in I$ için $A_i \in \mathcal{F} \iff A_i = \overline{A_i}$ olduğu da gözönüne alınırsa $G \subset \bigcup_{i \in J} A_i$ elde edilir.

(ii) $\implies$ (i) $G \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ alalım.

$\forall i \in I$ için $U_i \in S.O.(X)$ olup Teorem 2.1.1'den

$$U_i \subset \overline{U_i}^o \quad (3.1.1)$$

Ayrıca her zaman

$$\overline{U_i}^o \subset \overline{U_i} \quad (3.1.2)$$

O halde (3.1.1)'den $G \subset \bigcup_{i \in I} U_i \subset \bigcup_{i \in I} \overline{U_i}^o$ dir.

Öte yandan Teorem 2.2.4 gereği $(\overline{U_i}^o)_{i \in I} \subset R.C.(X)$ olup hipotezden

$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni G \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}^o$ dir.

Ayrıca (3.1.2)'den $\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}^o \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \implies G \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$\implies G$ X 'e göre S-kapalıdır.

Teorem 3.1.2 (X, τ) bir topolojik uzay ve $G \in \tau$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) (G, τ_G) S-kapalıdır.

(ii) G X 'e göre S-kapalıdır (Noiri 1977)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $G \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ alalım.

$\forall i \in I$ için $U_i \in S.O.(X)$ ve $G \in \tau$ olup Sonuç 2.3.1'den $G \cap U_i \in S.O.(X)$ dir.

$\forall i \in I$ için $U_i \cap G \subset G \subset X$ olup Teorem 2.1.5 gereği

$G_i = U_i \cap G \in S.O.(G)$ olduğu görülür.

$G \subset \bigcup_{i \in I} U_i \iff G = \bigcup_{i \in I} U_i \cap G \iff G = \bigcup_{i \in I} G_i$ ve $(G_i)_{i \in I} \subset S.O.(G)$ edildi. O halde (G, τ_G) S-kapalı olduğundan

$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni G = \bigcup_{i \in J} \overline{G_i}^G = \bigcup_{i \in J} \overline{G_i}$ dir.

$\forall i \in I$ için $G_i = U_i \cap G \subset U_i$ olup buradan $G \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$ elde edilir ki bu da G 'nin X 'e göre S-kapalı olduğunu gösterir.

(ii) $\implies$ (i) $G = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(G)$ alalım.

$G \in \tau$ olup Teorem 2.1.4'den $G \in S.O.(X)$ dir.

$\forall i \in I$ için $U_i \in S.O.(G)$ ve $U_i \subset G \subset X$ olup Teorem 2.3.6 gereği $U_i \in S.O.(X)$ olduğu görülür.

Hipotezden G X 'e göre S-kapalı olduğundan $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni G \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$\implies G = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \cap G = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}^G$

$\implies (G, \tau_G)$ S-kapalıdır.

Teorem 3.1.3 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) (X, τ) S-kapalı

(ii) $\forall G \in R.O.(X)$ için (G, τ_G) S-kapalıdır (Noiri 1977).

İspat. (i) $\implies$ (ii) $\forall G \in R.O.(X)$ alalım. Teorem 2.2.1'den $G \in \tau$ dur.

$G \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ alalım.

Teorem 2.1.11 gereği $G \in R.O.(X) \iff (X - G) \in R.C.(X)$

$\iff (X - G) = \overline{\overbrace{(X - G)}^o}$

$\implies (X - G) \subset \overline{\overbrace{(X - G)}^o}$ olup Teorem 2.1.1'den $(X - G) \in S.O.(X)$ dir.

$$G \subset \bigcup_{i \in I} U_i \implies G \cup ((X - G)) \subset (\bigcup_{i \in I} U_i) \cup (X - G)$$

$$\implies X \subset (\bigcup_{i \in I} U_i) \cup (X - G)$$

$$\implies X = \{(\bigcup_{i \in I} U_i) \cup (X - G)\} \cap X$$

$$\implies X = \{(\bigcup_{i \in I} U_i) \cup (X - G)\} \text{ ve } (X, \tau) \text{ S-kapalı olduğundan } (\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni$$

$$X = \overline{\{(\bigcup_{i \in J} U_i) \cup (X - G)\}} = \overline{\bigcup_{i \in J} U_i} \cup \overline{(X - G)} = (\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cup \overline{(X - G)}$$

$$\implies X = (\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cup (X - \overset{o}{G}) \text{ olup } G \in \tau \text{ olduğundan } (X - \overset{o}{G}) = (X - G)$$

$$\implies X = (\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cup (X - G)$$

$$\implies X \cap G = \{(\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cup (X - G)\} \cap G$$

$$\implies G = X \cap G = \{(\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cap G\} \cup \{(X - G) \cap G\}$$

$$\implies G = (\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cap G$$

$$\iff G \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \text{ olup } G \text{ } X\text{'e göre S-kapalıdır. Ayrıca } G \in \tau \text{ olup Teorem 3.1.2 gereği } (G, \tau_G) \text{ S-kapalıdır.}$$

$$(ii) \implies (i) \text{ } X \subset \overline{X} \text{ ve } X = \overset{o}{\overline{X}} \text{ olup } X \in R.O.(X) \text{ dir. O halde (ii) hipotezinden } (X, \tau) \text{ S-kapalıdır.}$$

Lemma 3.1.1 (X, τ) topolojik bir uzay, $A, B \subset X$, $A \cap B \neq \emptyset$ olsun.

Eğer $B \in R.O.(X)$ ve A X 'e göre S-kapalı ise $A \cap B$ de X 'e göre S-kapalıdır

(Noiri 1978).

İspat. $A \cap B \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ alalım.

$$B \in R.O.(X) \iff (X - B) \in R.C.(X) \implies (X - B) \in S.O.(X) \text{ dir.}$$

$$(A \cap B) \cup (X - B) \subset (\bigcup_{i \in I} U_i) \cup (X - B)$$

$$\begin{aligned}
&\implies (A \cup (X - B)) \cap (B \cup (X - B)) \subset (\bigcup_{i \in I} U_i) \cup (X - B) \\
&\implies A \subset (A \cup (X - B)) \subset (\bigcup_{i \in I} U_i) \cup (X - B) \text{ olup } A \text{ } X\text{'e göre S-kapalı olduğundan ,} \\
&(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni A \subset (\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cup \overline{(X - B)} \\
&\implies A \subset (\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cup (X - \overset{o}{B}) \text{ olup } B \in R.O.(X) \implies B \in \tau \\
&\iff B = \overset{o}{B} \text{ olduğundan } A \subset (\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cup (X - B) \\
&\implies A \cap B \subset \{(\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cup (X - B)\} \cap B \\
&\implies A \cap B \subset \{(\bigcup_{i \in J} \overline{U_i}) \cap B\} \cup \{(X - B) \cap B\} \\
&\implies A \cap B \subset (\bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \cap B) \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \text{ olup } A \cap B \text{ } X\text{'e göre S-kapalıdır.}
\end{aligned}$$

Lemma 3.1.2 (X, τ) topolojik bir uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A X 'e göre S-kapalı ise $\overline{A}$ ve $\overset{o}{A}$ cümleleri de X 'e göre S-kapalıdır (Noiri 1978).

İspat. (i) $\overline{A} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ alalım.

$$\begin{aligned}
&A \subset \overline{A} \text{ ve } A \text{ } X\text{'e göre S-kapalı olduğundan } (\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \\
&\implies \overline{A} \subset \bigcup_{i \in J} \overline{\overline{U_i}} = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \\
&\implies \overline{A} \text{ } X\text{'e göre S-kapalıdır.}
\end{aligned}$$

(ii) A X 'e göre S-kapalı olup (i)'den dolayı $\overline{A}$ X 'e göre S-kapalıdır.

Teorem 2.2.4 gereği $\overset{o}{A} \in R.O.(X)$ dir.

Öte yandan $\overset{o}{A} \subset \overline{A} \iff \overset{o}{A} \cap \overline{A} = \overset{o}{A}$ olduğundan Lemma 3.1.1 gereği $\overset{o}{A}$ de X 'e göre S-kapalıdır.

Lemma 3.1.3 (X, τ) topolojik bir uzay ve J_o sonlu elemanlı bir indis cümlesi olsun. Eğer $\forall k \in J_o$ için G_k X 'e göre S-kapalı ise

$G = \bigcup_{k \in J_o} G_k$ da X 'e göre S-kapalıdır (Noiri 1978).

İspat. $G = \bigcup_{k \in J_o} G_k \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ alalım.

$\forall k \in J_o$ için $G_k \subset G = \bigcup_{k \in J_o} G_k \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olup G_k X 'e göre S-kapalı olduğundan

$$(\exists J_k)(J_k \subset I) \ni (J_k \text{ sonlu}) \ni G_k \subset \bigcup_{i \in J_k} \overline{U_i}$$

$$\implies G = \bigcup_{k \in J_o} G_k \subset \bigcup_{i \in \bigcup_{k \in J_o} J_k} \overline{U_i} \text{ olacak biçimde bir}$$

$$(\exists J' = \bigcup_{k \in J_o} J_k)(J' \subset I) \ni (J' \text{ sonlu}) \text{ bulundu.}$$

O halde $G = \bigcup_{k \in J_o} G_k$ X 'e göre S-kapalıdır.

Teorem 3.1.4 (X, τ) topolojik bir uzay olsun, J sonlu elemanlı bir indis cümlesi olmak üzere $X = \bigcup_{i \in J} G_i$ ve $\forall i \in J$ için

(G_i, τ_{G_i}) S-kapalı ve $G_i \in \tau$ ise (X, τ) S-kapalıdır (Noiri 1980).

İspat. $\forall i \in J$ için $G_i \in \tau$ ve (G_i, τ_{G_i}) S-kapalı olduğundan Teorem 3.1.2 gereği $\forall i \in J$ için G_i X 'e göre S-kapalıdır.

O halde Lemma 3.1.3'den $X = \bigcup_{i \in J} G_i$ de X 'e göre S-kapalıdır. Bu ise $X \in \tau$ olduğundan yine Teorem 3.1.2 gereği (X, τ) topolojik uzayının S-kapalı olduğunu kanıtlar.

Teorem 3.1.5 (X, τ) topolojik bir uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) (X, τ) S-kapalı

(ii) $\forall F \in R.C.(X)$ için F X 'e göre S-kapalıdır (Noiri 1980).

İspat. (i) $\implies$ (ii) $\forall F \in R.C.(X)$ alalım.

$$F \in R.C.(X) \iff F = \overline{\overset{o}{F}} \implies \overset{o}{F} = \overline{\overset{o}{F}} \text{ olup Teorem 2.2.4 gereği } \overset{o}{F} \in R.O.(X) \text{ dir.}$$

Teorem 3.1.3 gereği $(\overset{o}{F}, \tau_{\overset{o}{F}})$ S-kapalıdır.

Yine Teorem 3.1.2'den $\overset{o}{F}$ X 'e göre S-kapalıdır. O halde Lemma 3.1.2 gereği $\overline{\overset{o}{F}} = F$ X 'e göre S-kapalıdır.

(ii) $\implies$ (i) $\forall F \in R.C.(X)$ alalım. Hipotez gereği F X 'e göre S-kapalıdır.

$F \in R.C.(X)$ olup regüler-kapalı her cümle kapalı olduğundan

$F \in \mathcal{F} \iff F = \overline{F} \implies \overset{o}{F} = \overline{\overset{o}{F}}$ olup Lemma 3.1.2'den

$$\overset{o}{F} \text{ } X \text{ 'e göre S-kapalıdır} \quad (3.1.3)$$

$\overset{o}{F} = \overline{\overset{o}{F}}$ olup $\overset{o}{F} \in R.O.(X) \iff (X - \overset{o}{F}) \in R.C.(X)$ olduğundan hipotez gereği

$$(X - \overset{o}{F}) \text{ } X \text{ 'e göre S-kapalıdır} \quad (3.1.4)$$

(3.1.3), (3.1.4) ve Lemma 3.1.3'den $X = \overset{o}{F} \cup (X - \overset{o}{F})$ X 'e göre S-kapalıdır.

O halde $X \in \tau$ olduğundan Teorem 3.1.2'den (X, τ) S-kapalıdır.

Teorem 3.1.6 (X, τ) topolojik bir uzay olsun. Eğer $\exists G \subset X \ni \overline{G} = X$ ve G X 'e göre S-kapalı ise (X, τ) S-kapalıdır (Noiri 1980).

İspat. $X \subset \bigcup_{i \in I} F_i$ olacak biçimde $\forall (F_i)_{i \in I} \subset R.C.(X)$ alalım.

$G \subset X \subset \bigcup_{i \in I} F_i$ ve G X 'e göre S-kapalı olduğundan Teorem 3.1.1'den

$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni G \subset \bigcup_{i \in J} F_i$ olup buradan

$$\overline{G} \subset \overline{\bigcup_{i \in J} F_i} \subset \bigcup_{i \in J} \overline{F_i} \quad (3.1.5)$$

Ayrıca $\forall i \in I$ için $F_i \in R.C.(X) \implies F_i \in \mathcal{F} \iff F_i = \overline{F_i}$ olup (3.1.5)'den $\overline{G} \subset \bigcup_{i \in J} F_i$ dir.

Burada hipotezden $\overline{G} = X$ ifadesi yerine konursa;

$X \subset \bigcup_{i \in J} F_i$ olup X, X 'e göre S-kapalıdır.

O halde $X \in \tau$ olması sebebiyle Teorem 3.1.2'den (X, τ) S-kapalıdır.

Teorem 3.1.7 (X, τ) topolojik bir uzay, $A \subset X$ ve $A \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer A^s X 'e göre S-kapalı ise A X 'e göre S-kapalıdır (Noiri 1978).

İspat. $A \in \mathcal{F} \iff A = \overline{A} \iff \overset{o}{A} = \overline{\overset{o}{A}} \in R.O.(X)$ olup Lemma 3.1.1 gereği

$$X \cap \overset{o}{A} = \overset{o}{A} \text{ } X \text{'e göre S-kapalı} \quad (3.1.6)$$

dır.

Hipotezden

$$A^s = A - \overset{o}{A} \text{ } X \text{'e göre S-kapalı} \quad (3.1.7)$$

idi.

(3.1.6),(3.1.7) ve Lemma 3.1.3'den

$$A^s \cup \overset{o}{A} = (A - \overset{o}{A}) \cup \overset{o}{A} = A$$

olup A X 'e göre S-kapalıdır.

Teorem 3.1.8 (X, τ) topolojik bir uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) (X, τ) S-kapalı

(ii) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset R.S.O.(X)$ için $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni$

$X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$ (Cameron 1978)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset R.S.O.(X)$ alalım.

Teorem 2.3.1 gereğince $\forall i \in I$ için $U_i \in S.O.(X)$ dir. O halde (X, τ) S-kapalı olduğundan

$$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$$

(ii) $\implies$ (i) Kabul edelim ki (X, τ) S-kapalı olmasın

$\iff X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\exists (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X) \ni (\forall J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu})$ için

$X \neq \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$ dir.

$\forall i \in I$ için $U_i \in S.O.(X)$ olup

$$U_i \subset \overline{\overline{U_i}} \quad (3.1.8)$$

dır.

Ayrıca yine $\forall i \in I$ için her zaman

$$U_i \subset \overline{U_i} \implies \overline{\overline{U_i}} \subset \overline{\overline{\overline{U_i}}} \implies \overline{\overline{U_i}} \subset \overline{\overline{\overline{U_i}}} \quad (3.1.9)$$

O halde (3.1.8) ve (3.1.9)'dan

$$U_i \subset \overline{\overline{U_i}} \subset \overline{\overline{\overline{U_i}}} \quad (3.1.10)$$

Öte yandan

$$\overline{\overline{\overline{U_i}}} \subset \overline{\overline{U_i}} \quad (3.1.11)$$

$\implies$ (3.1.10) ve (3.1.11)'den $\overline{\overline{\overline{U_i}}} \subset \overline{\overline{U_i}} \cup U_i \subset \overline{\overline{\overline{U_i}}}$ olacak biçimde $\exists \overline{\overline{\overline{U_i}}} \in R.O.(X)$

$\iff \overline{\overline{\overline{U_i}}} \cup U_i \in R.S.O.(X)$ dir.

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \subset \bigcup_{i \in I} (\overline{\overline{\overline{U_i}}} \cup U_i) \iff X = \bigcup_{i \in I} (\overline{\overline{\overline{U_i}}} \cup U_i) \cap X \text{ ve}$$

$$\forall i \in I \text{ için } (\overline{\overline{\overline{U_i}}} \cup U_i) \subset X \iff (\overline{\overline{\overline{U_i}}} \cup U_i) \cap X = (\overline{\overline{\overline{U_i}}} \cup U_i)$$

olduğu da dikkate alınırsa;

$X = \bigcup_{i \in I} (\overline{\overline{\overline{U_i}}} \cup U_i)$ olacak biçimde bir $(\overline{\overline{\overline{U_i}}} \cup U_i)_{i \in I} \subset R.S.O.(X)$ elde edildi.

O halde (ii) hipotezinden

$$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni X = \bigcup_{i \in J} \overset{o}{(\overline{U_i} \cup U_i)} \quad (3.1.12)$$

Öte yandan $\forall i \in I$ için $\overline{U_i} \subset \overline{U_i}$ ve $U_i \subset \overline{U_i} \implies \overset{o}{(\overline{U_i} \cup U_i)} \subset \overline{U_i}$ olup (3.1.12)'den $X \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$\iff X = \bigcup_{i \in J} (\overline{U_i} \cap X)$ ve $\forall i \in I$ için $\overline{U_i} \subset X \iff \overline{U_i} \cap X = \overline{U_i}$ olduğu da dikkate alınırsa buradan

$X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$ elde edilir ki bu da kabulümüz ile çelişir.

O halde kabulümüz yanlış olup (X, τ) S-kapalıdır.

Sonuç 3.1.2 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Tanım 3.1.1, Teorem 3.1.1,

Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.8'in direk bir sonucu olarak aşağıdaki önermelerin denk olduğu aşıkardır:

(i) (X, τ) S-kapalı

(ii) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimdeki $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ için $(\exists J)(J \subset I) \ni$

$(J \text{ sonlu}) \ni X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

(iii) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimdeki $\forall (U_i)_{i \in I} \subset R.C.(X)$ için $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni$

$X = \bigcup_{i \in J} U_i$

(iv) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimdeki $\forall (U_i)_{i \in I} \subset R.S.O.(X)$ $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni$

$X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

Teorem 3.1.9 (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve A bir α -cümle olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) (A, τ_A) S-kapalı

(ii) A X 'e göre S-kapalı (Noiri 1978)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimdeki $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ alalım.

A bir α -cümle olduğundan Teorem 2.3.7 gereğince $\forall i \in I$ için $A \cap U_i \in S.O.(A)$ dır.

$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \iff A = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A)$ olup (A, τ_A) S-kapalı olduğundan

$$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni A = \bigcup_{i \in J} \overline{(U_i \cap A)} \quad (3.1.13)$$

Ayrıca $\forall i \in I$ için $A \cap U_i \subset U_i$ olup (3.1.13)'den $A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$\implies A$ X 'e göre S-kapalı

(ii) $\implies$ (i) $A = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimdeki $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(A)$ alalım. A α -cümle olup Teorem 2.3.3'dan $A \in S.O.(X)$ dir.

Ayrıca $\forall i \in I$ için $U_i \in S.O.(A)$ olduğundan Teorem 2.3.6 gereğince $U_i \in S.O.(X)$ olduğu kolayca görülebilir.

$\implies A$ X 'e göre S-kapalı olduğundan $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$$\iff A = \bigcup_{i \in J} (\overline{U_i} \cap A)$$

$$\implies A = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}^A$$

$\implies (A, \tau_A)$ S-kapalıdır

Teorem 3.1.10 (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset Y \subset X$ ve Y bir α -cümle olsun.

Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) A (Y, τ_Y) 'a göre S-kapalı

(ii) A (X, τ) 'ya göre S-kapalı (Noiri 1978)

İspat. (i) $\implies$ (ii) A (Y, τ_Y) 'a göre S-kapalı olsun

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \text{ olacak biçimdeki } \forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X) \quad (3.1.14)$$

alalım.

Y bir α -cümle olup Teorem 2.3.7'den

$$\forall i \in I \text{ için } U_i \cap Y \in S.O.(Y) \quad (3.1.15)$$

Ayrıca hipotezden

$$A \subset Y \quad (3.1.16)$$

O halde (3.1.14) ve (3.1.16)'dan $A \subset (\bigcup_{i \in I} U_i) \cap Y$

$$\iff A \subset \bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y)$$

Ayrıca (3.1.15)'den $(U_i \cap Y)_{i \in I} \subset S.O.(Y)$ olup

A (Y, τ_Y) 'a göre S-kapalı olduğundan

$$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{(U_i \cap Y)}^Y$$

$$\implies A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{(U_i \cap Y)} \cap Y$$

$$\implies A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{(U_i \cap Y)}$$

$$\implies A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$$

$$\implies A \text{ } (X, \tau) \text{'ya göre S-kapalıdır.}$$

(ii) $\implies$ (i) A (X, τ) 'ya göre S-kapalı olsun

$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(Y)$ alalım. Y bir α -cümle olup

$\implies$ Teorem 2.3.3 den $Y \in S.O.(X)$ dir. O halde Teorem 2.3.6'dan

$\forall i \in I$ için $U_i \in S.O.(X)$ dir.

$A (X, \tau)$ 'ya göre S-kapalı olduğundan $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$ dir.
Ayrıca hipotezden $A \subset Y$ olduğundan

$$A \subset \bigcup_{i \in J} (\overline{U_i} \cap Y) = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}^Y \implies A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}^Y \\ \implies A (Y, \tau_Y) \text{ 'a göre S-kapalıdır}$$

Teorem 3.1.11 (X, τ) topolojik bir uzay, $A \subset Y \subset X$ ve $Y \in \tau$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) (A, τ_A) S-kapalı
- (ii) $(A, (\tau_Y)_A)$ S-kapalı (Noiri 1978)

İspat. $A \in \tau$ olup Teorem 2.3.2 gereği A α -cümledir.

(A, τ_A) S-kapalı ve A α -cümle olduğundan Teorem 3.1.9 'dan

$$A \text{ } X \text{'e göre S-kapalı} \tag{3.1.17}$$

Ayrıca $Y \in \tau$ olup yine Teorem 2.3.2 gereği

$$Y \text{ } \alpha \text{ - cümledir} \tag{3.1.18}$$

O halde (3.1.17), (3.1.18) ve Teorem 3.1.10 'dan

$$A (Y, \tau_Y) \text{ uzayına göre S-kapalıdır} \tag{3.1.19}$$

Yine (3.1.19) ve Teorem 3.1.9 'dan $(A, (\tau_Y)_A)$ S-kapalıdır.

Teorem 3.1.12 (X, τ) topolojik bir uzay, $A, B \subset X$, A X 'e göre S-kapalı ve

$B \in R.O.(X)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:

- (i) $A \cap B \ B$ 'ye göre S-kapalı
- (ii) $B \subset A$ ise $B \ X$ 'e göre S-kapalı
- (iii) $A \in \mathcal{F}$ ise $\overset{o}{A} \ X$ 'e göre S-kapalı (Noiri 1978)

İspat. (i) $A \ X$ 'e göre S-kapalı ve $B \in R.O.(X)$ olsun ,bu durumda Lemma 3.1.1 gereği $A \cap B \ X$ 'e göre S-kapalıdır.

$B \in R.O.(X)$ olup Teorem 2.2.1 gereği $B \in \tau$ dir. O halde Teorem 2.3.2 gereği $B \ \alpha$ -cümledir.

$A \cap B \subset B \subset X$, $B \ \alpha$ -cümle ve $A \cap B \ X$ 'e göre S-kapalı olup Teorem 3.1.10 gereği $A \cap B \ B$ 'ye göre S-kapalıdır.

(ii) $B \subset A \iff A \cap B = B$ olup Lemma 3.1.1'den $A \cap B = B \ X$ 'e göre S-kapalıdır.

(iii) $A \in \mathcal{F} \iff A = \overline{A} \implies \overset{o}{A} = \overline{\overset{o}{A}} \in R.O.(X)$ olup $\overset{o}{A} = \overline{\overset{o}{A}} \subset \overline{A} = A \iff$

$\overline{\overset{o}{A}} \cap A = \overset{o}{A}$ olduğu da gözönüne alınırsa,

$\implies \overset{o}{A} = \overline{\overset{o}{A}} \in R.O.(X)$ olup hipotezden $A \ X$ 'e göre S-kapalı olduğundan Lemma 3.1.1'den $\overline{\overset{o}{A}} \cap A \ X$ 'e göre S-kapalıdır

$\iff \overline{\overset{o}{A}} \cap \overline{A} = \overline{\overset{o}{A}} = \overset{o}{A} \ X$ 'e göre S-kapalıdır.

Teorem 3.1.13 (X, τ) topolojik bir uzay $A \subset X$ ve $A \ X$ 'e göre S-kapalı olsun. Bu durumda $(\overline{\overset{o}{A}}, \tau_{\overline{\overset{o}{A}}})$ S-kapalıdır (Noiri 1978).

İspat. $\overline{\overset{o}{A}} \in \tau$ olup Teorem 2.3.2 gereğince $\overline{\overset{o}{A}}$ bir α -cümledir. Ayrıca $A \ X$ 'e göre S-kapalı olup Lemma 3.1.2 gereği $\overline{\overset{o}{A}}$ de X 'e göre S-kapalıdır. O halde Teorem 3.1.9'dan $(\overline{\overset{o}{A}}, \tau_{\overline{\overset{o}{A}}})$ S-kapalıdır.

Teorem 3.1.14 (X, τ) topolojik bir uzay, $A \in \tau$ ve (A, τ_A) S-kapalı olsun ise $(\overline{A}, \tau_{\overline{A}})$

S-kapalıdır (Noiri 1978).

İspat. $\overline{A} = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(\overline{A})$ alalım.

$$A \in \tau \iff A = \overset{o}{A} \implies A \subset \overset{o}{A} \quad (3.1.20)$$

Ayrıca

$$\overset{o}{A} \subset \overline{\overset{o}{A}} \quad (3.1.21)$$

O halde (3.1.20) ve (3.1.21)'den $A \subset \overline{\overset{o}{A}} \iff A \in S.O.(X)$ dir .

O halde Teorem 2.1.18'den

$$\overline{A} \in S.O.(X) \quad (3.1.22)$$

$\forall i \in I$ için $U_i \subset \overline{A} \subset X$ ve $U_i \in S.O.(\overline{A})$ olup (3.1.22) ve Teorem 2.3.6 gereği

$$U_i \in S.O.(X) \quad (3.1.23)$$

Ayrıca $A \in \tau \implies A$ α -cümledir. O halde (A, τ_A) S-kapalı olduğundan Teorem 3.1.9 gereği A X 'e göre S-kapalıdır.

$A \subset \overline{A} = \bigcup_{i \in I} U_i$ ve (3.1.23)'den $(U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ olup A X 'e göre S-kapalı olduğundan $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni A \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$$\iff A = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \cap A$$

$$\implies \overline{A} = \overline{\bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \cap A} \subset \bigcup_{i \in J} \overline{\overline{U_i} \cap A}$$

$$\implies \overline{A} \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \cap \overline{A}$$

$$\iff \overline{A} = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \cap \overline{A} \cap \overline{A} = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \cap \overline{A} = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}^{\overline{A}}$$

$$\implies (\overline{A}, \tau_{\overline{A}}) \text{ S-kapalıdır.}$$

3.2 S-kapalı Uzayların Sürekli Fonksiyonlarla Açık Fonksiyonların Bazı Zayıflatılmış Biçimleri ile Kararsız ve Ön-yarı-açık Fonksiyonlar Altındaki Görüntü Özellikleri

Bu kesimde tamamen bağlantısız uzay tanımından ve özelliklerinden de yararlanılarak, S-kapalı uzayların hh-açık, zayıf sürekli, yarı-kapalı, kararsız ve ön-yarı-açık fonksiyonlarla, yarı-homeomorfizmler altındaki görüntü özelliklerini inceledik.

Teorem 3.2.1 (X, τ) S-kapalı, (Y, τ') herhangi bir topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ kararsız ve örten olsun ise (Y, τ') S-kapalıdır (Thompson 1977).

İspat. $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ olacak biçimde $\forall (V_i)_{i \in I} \subset S.O.(Y)$ alalım.

$\forall i \in I$ için $V_i \in S.O.(Y)$ ve f kararsız olduğundan $f^{-1}(V_i) \in S.O.(X)$ dir.

$X = f^{-1}(Y) \implies X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ ve $(f^{-1}(V_i))_{i \in I} \subset S.O.(X)$ olup (X, τ) S-kapalı olduğundan $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni X = \bigcup_{i \in J} \overline{f^{-1}(V_i)}$

dir. Bu ise Teorem 2.1.14 'den $X = \bigcup_{i \in J} \overline{f^{-1}(V_i)}$ olduğunu gösterir.

Ayrıca f örten olduğundan

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{i \in J} \overline{f^{-1}(V_i)}\right) \quad (3.2.1)$$

Öte yandan f kararsız olduğundan Teorem 2.5.2 gereği

$$\overline{f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_i)\right)} \subset \overline{f\left(\bigcup_{i \in J} \overline{f^{-1}(V_i)}\right)} = \bigcup_{i \in J} \overline{f(f^{-1}(V_i))} \quad (3.2.2)$$

Yine hipotezden f örten olduğundan $f(f^{-1}(V_i)) = V_i$ olduğu da dikkate alınırsa (3.2.2)'den $\overline{f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_i)\right)} \subset \bigcup_{i \in J} \overline{V_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in J} V_i}$ olup (3.2.1)'den

$$Y \subset \overline{\bigcup_{i \in J} V_i} = \bigcup_{i \in J} \overline{V_i} \iff Y = \bigcup_{i \in J} (\overline{V_i} \cap Y) \quad (3.2.3)$$

$\forall i \in I$ için $\overline{V_i} \subset Y \iff \overline{V_i} \cap Y = \overline{V_i}$ olduğu da dikkate alınırsa (3.2.3)'den $Y = \bigcup_{i \in I} \overline{V_i}$ sonucuna ulaşılır ki bu da (Y, τ') uzayının S-kapalı olduğunu ispatlar.

Tanım 3.2.1 (Tamamen Bağlantısız Uzay) (X, τ) topolojik bir uzay olsun. Eğer $\forall A \in \tau$ için $\overline{A} \in \tau$ oluyorsa (X, τ) 'ya tamamen bağlantısız uzay denir (Noiri 1980).

Teorem 3.2.2 (X, τ) topolojik bir uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) (X, τ) tamamen bağlantısız
- (ii) $A \cap B = \emptyset$ olacak biçimdeki $\forall A, B \in \tau$ için $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$

İspat. (i) $\implies$ (ii) (X, τ) tamamen bağlantısız olsun ve $A \cap B = \emptyset$ olacak biçimdeki $\forall A, B \in \tau$ alalım, Lemma 2.3.1'den

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad (3.2.4)$$

$A \in \tau$ ve (X, τ) tamamen bağlantısız $\implies \overline{A} \in \tau$ olup (3.2.4)'dan ve Lemma 2.3.1'den $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$

(ii) $\implies$ (i) (X, τ) tamamen bağlantısız $\iff \forall A \in \tau$ için $\overline{A} \in \tau$ olduğunu göstereceğiz.

$\overline{A} = B$ diyelim. Bu durumda

$$X - B = (X - \overline{A}) \in \tau \quad (3.2.5)$$

$$\implies A \cap (X - \overline{A}) = A \cap \overbrace{(X - A)}^o \subset A \cap (X - A) = \emptyset$$

$$\implies A \cap (X - \overline{A}) = A \cap (X - B) = \emptyset \text{ ayrıca hipotezden } A \in \tau \text{ ve (3.2.5)'den } (X - B) \in \tau \text{ olup (ii)'den } \overline{A} \cap \overline{(X - B)} = \emptyset$$

$$\iff \overline{A} \cap (X - \overset{o}{B}) = \emptyset$$

$$\iff B = \overline{A} \subset (X - (X - \overset{o}{B})) = \overset{o}{B} \text{ olup buradan}$$

$$B \subset \overset{o}{B} \quad (3.2.6)$$

dir. Ayrıca her zaman

$$\overset{o}{B} \subset B \quad (3.2.7)$$

O halde (3.2.6) ve (3.2.7) den $\overset{o}{B} = B$

$\iff B = \overline{A} \in \tau$ olup (X, τ) tamamen bağlantısızdır.

Lemma 3.2.1 (X, τ) tamamen bağlantısız bir topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\forall U \in S.O.(X) \text{ için } \underline{U} = \overline{U}$$

dir.

İspat. Teorem 2.1.15 den $\forall U \subset X$ için

$$U \subset \underline{U} \subset \overline{U} \implies \underline{U} \subset \overline{U} \quad (3.2.8)$$

Kabul edelim ki $\underline{U} \not\subset \overline{U}$ olsun $\iff \exists x \in \overline{U} \ni x \notin \underline{U}$ dir. Teorem 2.1.12 den

$$x \notin \underline{U} \iff \exists V_s \in \mathcal{V}_s(x) \ni U \cap V_s = \emptyset \quad (3.2.9)$$

dir.

$V_s \in \mathcal{V}_s(x) \iff x \in V \subset V_s$ olacak biçimde $\exists V \in S.O.(X)$ dir. O halde (3.2.9) den

$$V \cap U \subset V_s \cap U = \emptyset \implies V \cap U = \emptyset$$

$$\implies \overset{o}{V} \cap \overset{o}{U} = \overset{o}{V \cap U} \subset V \cap U = \emptyset$$

$$\implies \overset{o}{V} \cap \overset{o}{U} = \emptyset \text{ olup Teorem 3.2.2 'dan } \overline{\overset{o}{V}} \cap \overline{\overset{o}{U}} = \emptyset \text{ dir.}$$

Öte yandan

$$U \in S.O.(X) \implies U \subset \overline{U}^o \implies \overline{U} \subset \overline{\overline{U}^o} = \overline{U}^o \quad (3.2.10)$$

Ayrıca her zaman

$$\overline{U}^o \subset U \implies \overline{\overline{U}^o} \subset \overline{U} \quad (3.2.11)$$

O halde (3.2.10) ve (3.2.11)'den

$$\overline{U} = \overline{\overline{U}^o} \quad (3.2.12)$$

dır. Benzer şekilde

$$V \in S.O.(X) \implies \overline{V} = \overline{\overline{V}^o} \quad (3.2.13)$$

dır. Öte yandan

$$x \in V \implies x \in \overline{V} \quad (3.2.14)$$

dir. $\overline{\overline{V}^o} \cap \overline{\overline{U}^o} = \emptyset$ olduğundan (3.2.12) ve (3.2.13) den $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ dir. O halde

(3.2.14) den $x \notin \overline{U}$ dir.

Bu ise $x \in \overline{U}$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup

$$\underline{U} \subset \overline{U} \quad (3.2.15)$$

Sonuçta (3.2.8) ve (3.2.15)'den $\underline{U} = \overline{U}$ dir.

Teorem 3.2.3 (X, τ) tamamen bağlantısız ve (Y, τ') herhangi bir topolojik olsun.

Ayrıca $f : X \longrightarrow Y$ kararsız ve $G \subset X \ni G$ X 'e göre

S-kapalı olsun. Bu durumda $f(G)$ Y 'ye göre S-kapalıdır (Noiri 1980).

İspat. $f(G) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ olacak biçimde $\forall (V_i)_{i \in I} \subset S.O.(Y)$ alalım.

$\forall i \in I$ için $V_i \in S.O.(Y)$ ve f kararsız olduğundan $f^{-1}(V_i) \in S.O.(X)$ dir.

$G \subset f^{-1}(f(G)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ olup G X e göre S-kapalı olduğundan

$$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni G \subset \bigcup_{i \in J} \overline{f^{-1}(V_i)} = \overline{\bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_i)}$$

olup X tamamen bağlantısız olduğundan Lemma 3.2.2 gereği $G \subset \overline{\bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_i)}$

$\implies f(G) \subset \overline{f(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_i))}$ dir. Buradan ise f kararsız olduğundan Teorem 2.5.2 gereği

$f(G) \subset \overline{f(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_i))} \subset \bigcup_{i \in J} \overline{f(f^{-1}(V_i))} \subset \bigcup_{i \in J} \overline{V_i} = \bigcup_{i \in J} \overline{V_i}$ olup $f(G)$ Y 'ye göre S-kapalıdır.

Teorem 3.2.4 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ zayıf süreklili ve hh-açık olsun. Eğer G X 'e göre S-kapalı ise $f(G)$ Y 'ye göre S-kapalıdır (Noiri 1980).

İspat. $f(G) \subset \bigcup_{i \in I} F_i$ olacak biçimde $\forall (F_i)_{i \in I} \subset R.C.(Y)$ alalım. f zayıf süreklili ve hh-açık olduğundan

$\implies$ Teorem 2.4.6 gereği $\forall i \in I$ için $f^{-1}(F_i) \in R.C.(X)$ dir.

$f(G) \subset \bigcup_{i \in I} F_i \implies G \subset f^{-1}(f(G)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(F_i)$ olup G X 'e göre S-kapalı olduğundan $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni$

$$G \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(F_i) \implies f(G) \subset f(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(F_i)) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(F_i))$$

$$\implies f(G) \subset \bigcup_{i \in J} F_i$$

$\implies f(G)$ Y 'ye göre S-kapalıdır.

Sonuç 3.2.1 (X, τ) S-kapalı bir topolojik uzay ve (Y, τ') herhangi bir topolojik uzay olsun ve $f : X \longrightarrow Y$ örten, zayıf süreklili, hh-açık

olsun ise (Y, τ') S-kapalıdır.

İspat. (X, τ) S-kapalı $\iff X, X'$ e göre S-kapalıdır.

O halde Teorem 3.2.4'dan $f(X) = Y$, Y 'ye göre S-kapalıdır

$\Longleftrightarrow (Y, \tau')$ S-kapalıdır.

Sonuç 3.2.2 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ örten, sürekli ve açık olsun.

(X, τ) S-kapalı ise (Y, τ') S-kapalıdır.

İspat. Teorem 2.4.2 gereği sürekli her fonksiyon zayıf sürekli ve Teorem 2.4.5 gereği açık her fonksiyon h-h-açık olduğundan Sonuç 3.2.1 gereği

(Y, τ') S-kapalıdır.

Teorem 3.2.5 (X, τ) tamamen bağlantısız bir topolojik uzay

$$f : X \longrightarrow Y$$

yarı-kapalı, h-h-açık, örten bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$\forall y \in Y$ için $\{f^{-1}(y)\}$ X ' e göre S-kapalı ve $G \subset Y$ olsun.

Eğer $G \subset Y$ 'ye göre S-kapalı ise $f^{-1}(G)$ X 'e göre S-kapalıdır.

İspat.

$$f^{-1}(G) \subset \bigcup_{i \in I} F_i \text{ olacak biçimde } \forall (F_i)_{i \in I} \subset R.C.(X) \quad (3.2.16)$$

alalım.

$\forall y \in G$ için $\{y\} \subset G$ olduğundan

$$f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(G) \Longleftrightarrow \{f^{-1}(y)\} \subset f^{-1}(G) \quad (3.2.17)$$

O halde (3.2.16) ve (3.2.17) den $\{f^{-1}(y)\} \subset \bigcup_{i \in I} F_i$ olup $\{f^{-1}(y)\}$ X ' e göre S-kapalı

olduğundan

$$(\exists J(y))(J(y) \subset I) \ni (J(y) \text{ sonlu }) \ni \{f^{-1}(y)\} \subset \bigcup_{i \in J(y)} F_i \quad (3.2.18)$$

$\forall i \in I$ için $\overline{F_i} \in \tau$ ve (X, τ) tamamen bağlantısız olduğundan

$$\overline{\overline{F_i}} \in \tau \quad (3.2.19)$$

dur.

$\forall i \in I$ için $F_i \in R.C.(X) \iff F_i = \overline{\overline{F_i}}$ olup (3.2.19) dan $F_i \in \tau$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi $\{f^{-1}(y)\} \subset \bigcup_{i \in J(y)} F_i = U(y)$ diyelim.

O halde (3.2 .18) ve açıklar aksiyomlarından $U(y) \in \tau$ olduğu aşıkardır.

f örten ve yarı-kapalı olduğundan Teorem 2.4.7 gereğince

$$\forall y \in G \text{ için } \exists V(y) \in S.O.(Y) \ni y \in V(y) \text{ ve } f^{-1}(V(y)) \subset U(y) \quad (3.2.20)$$

Buradan $G \subset \bigcup_{y \in G} V(y) \subset S.O.(Y)$ olacak biçimde bir $(V(y))_{y \in G} \subset S.O.(Y)$ vardır.

G Y 'ye göre S-kapalı olduğundan $\exists \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset G \ni G \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{V(y_j)}$ olup

$$f^{-1}(G) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^n \overline{V(y_j)}\right) \quad (3.2.21)$$

Öte yandan $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $V(y_j) \in S.O.(Y) \iff V(y_j) \subset \overline{\overline{V(y_j)}}$

$\implies \overline{\overline{V(y_j)}} \subset \overline{\overline{\overline{V(y_j)}}} = \overline{\overline{\overline{V(y_j)}}}$ olup (3.2.21)'den

$$f^{-1}(G) \subset \bigcup_{j=1}^n f^{-1}\left(\overline{\overline{\overline{V(y_j)}}}\right) \quad (3.2.22)$$

dir. Ayrıca f lh-açık olup Lemma 2.4.3 gereği

$$\bigcup_{j=1}^n f^{-1}(\overbrace{V(y_j)}^o) \subset \bigcup_{j=1}^n \overbrace{f^{-1}(V(y_j))}^o \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{f^{-1}(V(y_j))} \text{ olup (3.2.20)'den}$$

$$\bigcup_{j=1}^n f^{-1}(\overbrace{V(y_j)}^o) \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{f^{-1}(V(y_j))} \subset \overline{\bigcup_{j=1}^n U(y_j)} = \bigcup_{j=1}^n \overline{U(y_j)} \quad (3.2.23)$$

olup

$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $U(y_j) \in R.C.(X) \implies U(y_j) \in \mathcal{F} \iff U(y_j) = \overline{U(y_j)}$ olduğu da gözönüne alınırsa (3.2.22) ve (3.2.23) den

$$f^{-1}(G) \subset \bigcup_{j=1}^n U(y_j) = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i \in (J(y_j))} F_i = \bigcup_{i \in \bigcup_{j=1}^n J(y_j)} F_i \text{ olup } \bigcup_{j=1}^n J(y_j) = J' \text{ dersek}$$

J' sonludur.

O halde $f^{-1}(G)$ X' e göre S-kapalıdır.

Teorem 3.2.6 S-kapalılık yarı-topolojik bir özelliktir. Dolayısıyla topolojik bir özelliktir (Crossley and Hildebrand 1972).

İspat. S-kapalılığın yarı-topolojik bir özellik olup olmadığını göstermek için bir yarı-homeomorfizm altında korunup korunmadığına

bakacağız. (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir yarı-homeomorfizm olsun.

(X, τ) S-kapalı $\iff (Y, \tau')$ S-kapalı mı (?)

$(\implies)$ (X, τ) S-kapalı olsun $\implies (Y, \tau')$ S-kapalı mı (?)

$Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(Y)$ alalım. $\forall i \in I$ için $U_i \in S.O.(Y)$ olup f bir yarı-homeomorfizm olduğundan kararsızdır, bu nedenle

$$f^{-1}(U_i) \in S.O.(X) \quad (3.2.24)$$

$Y = \bigcup_{i \in I} U_i \implies X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ ve (3.2.24) ten

$(f^{-1}(U_i))_{i \in I} \subset S.O.(X)$ olup (X, τ) S-kapalı olduğundan

$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni X = \bigcup_{i \in J} \overline{f^{-1}(U_i)} \iff X = \overline{\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)}$ olup

Teorem 2.1.14 gereği $X = \overline{\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)}$

$\implies Y = f(X) = f\left(\overline{\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)}\right) = \overline{f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)\right)}$ olup yine f kararsız olduğundan

Teorem 2.5.2 gereği

$Y = \overline{f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} U_i\right)\right)} \subset \overline{f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} U_i\right)\right)} = \overline{\bigcup_{i \in J} U_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in J} U_i} = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$ dir

$\implies Y \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \iff Y = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \cap Y \iff Y = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$\implies (Y, \tau')$ S-kapalıdır.

$(\Leftarrow:)(Y, \tau') \text{ S-kapalı olsun} \implies (X, \tau) \text{ S-kapalı mı (?)}$

$X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset S.O.(X)$ alalım. $\forall i \in I$ için $U_i \in S.O.(X)$ olup f ön-yarı-açık olduğundan $f(U_i) \in S.O.(Y)$ dir.

f örten olduğundan $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(U_i)$ ve $(f(U_i))_{i \in I} \subset S.O.(Y)$ bulundu. O halde hipotezden (Y, τ') S-kapalı olduğundan

$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni Y = \bigcup_{i \in J} \overline{f(U_i)} = \overline{\bigcup_{i \in J} f(U_i)}$ olup Teorem 2.1.14 gereği $Y = \overline{\bigcup_{i \in J} f(U_i)}$ dir.

f ön-yarı-açık ve 1-1, örten olduğundan Teorem 2.5.3 gereği f^{-1} kararsızdır.

$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\overline{\bigcup_{i \in J} f(U_i)}\right) = \overline{f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} f(U_i)\right)}$ dir.

f^{-1} kararsız olduğundan Teorem 2.5.2 gereği

$X = \overline{f^{-1}\left(f\left(\bigcup_{i \in J} U_i\right)\right)} \subset \overline{f^{-1}\left(f\left(\bigcup_{i \in J} U_i\right)\right)} = \overline{\bigcup_{i \in J} U_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in J} U_i} = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$\implies X \subset \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \iff X = \bigcup_{i \in J} (\overline{U_i} \cap X) \iff X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$\implies (X, \tau)$ S-kapalıdır.

Sonuç olarak S-kapalılık yarı-topolojik bir özelliktir. Her homeomorfizm bir yarı-homeomorfizm olduğundan S-kapalılık aynı zamanda topolojik bir özelliktir.

3.3 S-kapalı Uzayların QHC ve H-kapalı Uzaylarla İlişkileri

Bu kesimde ilk defa 1924'de Alexandroff ve Urysohn tarafından verilen QHC uzayları ve H-kapalı uzayların S-kapalı uzaylarla olan ilişkileri incelenmiştir.

Tanım 3.3.1 (Quasi H-kapalı Uzay) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer

$X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset \tau$ için

$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$ oluyorsa (X, τ) 'ya Quasi-H-kapalı uzay denir ve QHC ile gösterilir (Cameron 1978).

Teorem 3.3.1 (X, τ) S-kapalı ise (X, τ) QHC uzayıdır (Cameron 1978).

İspat. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset \tau$ alalım.

$\forall i \in I$ için $U_i \in \tau \implies U_i \in S.O.(X)$ dir.

(X, τ) S-kapalı olduğundan $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$\implies (X, \tau)$ QHC uzayıdır.

Teorem 3.3.2 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) (X, τ) QHC uzayı

(ii) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset R.O.(X)$ için $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni$

$X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$ (Cameron 1978)

İspat. (i) $\implies$ (ii) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset R.O.(X)$ alalım.

$\forall i \in I$ için $U_i \in R.O.(X)$ olup Teorem 2.2.1 gereği $U_i \in \tau$ dur.

O halde $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde bir $\forall (U_i)_{i \in I} \subset \tau$ bulundu. Hipotezden (X, τ) QHC uzayı olduğundan ,

$$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \text{ elde edilir.}$$

(ii) $\implies$ (i)

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ olacak biçimde } \forall (U_i)_{i \in I} \subset \tau \quad (3.3.1)$$

alalım

$$\forall i \in I \text{ için } U_i \in \tau \iff U_i = \overset{o}{U_i} \text{ olup her zaman } U_i \subset \overline{U_i} \text{ olduğundan } U_i = \overset{o}{U_i} \subset \overline{\overset{o}{U_i}}$$

$$\implies \forall i \in I \text{ için } U_i \subset \overline{\overset{o}{U_i}} \text{ dir.}$$

$$\text{O halde (3.3.1)'den } X = \bigcup_{i \in I} U_i \subset \bigcup_{i \in I} \overline{\overset{o}{U_i}}$$

$$\implies X \subset \bigcup_{i \in I} \overline{\overset{o}{U_i}}$$

$$\implies X = \left(\bigcup_{i \in I} \overline{\overset{o}{U_i}} \right) \cap X$$

$$\implies X = \left(\bigcup_{i \in I} \overline{\overset{o}{U_i}} \right) \text{ ve Teorem 2.2.4 gereği } (\overline{\overset{o}{U_i}})_{i \in I} \subset R.O.(X) \text{ dir. O halde hipotezden}$$

$$(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni X = \bigcup_{i \in J} \overline{\overset{o}{U_i}} \text{ dir.}$$

$$\text{Ayrıca } \forall i \in I \text{ için } \overline{\overset{o}{U_i}} \subset \overline{U_i} \implies \overline{\overset{o}{U_i}} \subset \overline{\overline{U_i}} = \overline{U_i} \text{ olduğundan } X = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \text{ dir.}$$

Sonuç olarak (X, τ) QHC uzayıdır.

Teorem 3.3.3 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay,

$$f : X \longrightarrow Y$$

yarı-kapalı, hıh-açık, örten bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\forall y \in Y$ için $\{f^{-1}(y)\}$

(X, τ) uzayında kompakt olsun.

Eğer (Y, τ') S-kapalı ise (X, τ) QHC uzayıdır.

İspat.

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ olacak biçimde } \forall (U_i)_{i \in I} \subset \tau \quad (3.3.2)$$

alalım

$$\forall y \in Y \text{ için } \{y\} \subset Y \implies f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\} \subset f^{-1}(Y) = X$$

O halde (3.3.2)'den $\{f^{-1}(y)\} \subset X = \bigcup_{i \in I} U_i$ ve $(U_i)_{i \in I} \subset \tau$ dur.

$\{f^{-1}(y)\}$ kompakt olduğundan

$$(\exists J(y))(J(y) \subset I) \ni (J(y) \text{ sonlu}) \ni \{f^{-1}(y)\} \subset \bigcup_{i \in J(y)} U_i \text{ dir. Burada}$$

$$U(y) = \bigcup_{i \in J(y)} U_i \quad (3.3.3)$$

dersek ikinci açıklar aksiyomundan $U(y) \in \tau$ olduğu aşıkardır.

f yarı-kapalı olduğundan Teorem 2.4.7 gereği

$$\exists V(y) \in S.O.(Y) \ni \{y\} \subset V(y) \text{ ve } f^{-1}(V(y)) \subset U(y) \quad (3.3.4)$$

$$V(y) \in S.O.(Y) \iff G \subset V(y) \subset \overline{G} \text{ olacak biçimde } \exists G \in \tau' \quad (3.3.5)$$

(3.3.5)'den

$$f^{-1}(\overline{V(y)}) \subset f^{-1}(\overline{G}) \quad (3.3.6)$$

f hh-açık olup Lemma 2.4.3 gereği

$$f^{-1}(\overline{G}) \subset \overline{f^{-1}(G)} \quad (3.3.7)$$

yine (3.3.5)'den

$$\overline{f^{-1}(G)} \subset \overline{f^{-1}(V(y))} \quad (3.3.8)$$

O halde (3.3.6), (3.3.7) ve (3.3.8)'den

$$f^{-1}(\overline{V(y)}) \subset \overline{f^{-1}(V(y))} \quad (3.3.9)$$

$\forall y \in Y$ için $\{y\} \subset V(y)$ elde edilmişti. Buradan $Y \subset \bigcup_{y \in Y} V(y)$ olduğu görülür.

O halde (Y, τ') S-kapalı olduğundan

$$\exists \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset Y \ni Y = \bigcup_{j=1}^n \overline{V(y_j)}$$

$$\implies X = f^{-1}(Y) = \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(\overline{V(y_j)}) \text{ olup (3.3.9) dan}$$

$$X = \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(\overline{V(y_j)}) \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{f^{-1}(V(y_j))} \quad (3.3.10)$$

dir.

Öte yandan (3.3.4) den

$$\overline{f^{-1}(V(y))} \subset \overline{U(y)} \quad (3.3.11)$$

dir. O halde (3.3.10) ve (3.3.11) den

$$X \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{f^{-1}(V(y_j))} \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{U(y_j)} \implies X \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{U(y_j)} \quad (3.3.12)$$

Ayrıca

$$\bigcup_{j=1}^n \overline{U(y_j)} \subset X \quad (3.3.13)$$

O halde (3.3.12) ve (3.3.13)'den $X = \bigcup_{j=1}^n \overline{U(y_j)}$ elde edilir.

O halde (3.3.3)'den $X = \bigcup_{j=1}^n \overline{\bigcup_{i \in J(y_j)} U_i} = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i \in J(y_j)} \overline{U_i} = \bigcup_{i \in \bigcup_{j=1}^n J(y_j)} \overline{U_i}$

olup $J' = \bigcup_{j=1}^n J(y_j)$ dersek, J' sonludur. Sonuçta $X = \bigcup_{i \in J'} \overline{U_i}$ elde edilir.

Bu ise (X, τ) 'nin bir QHC uzayı olduğunu ispatlar.

Tanım 3.3.2 (Mükemmel Fonksiyon) (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay,

$$f : X \longrightarrow Y$$

sürekli, kapalı ve örten olsun. Ayrıca $\forall y \in Y$ için $\{f^{-1}(y)\}$ kompakt olsun. Bu durumda f fonksiyonuna mükemmel fonksiyon denir (Noiri 1977).

Teorem 3.3.4 (X, τ) bir topolojik uzay, (Y, τ') S-kapalı ve $f : X \longrightarrow Y$ açık ve mükemmel bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X, τ) QHC uzayıdır.

İspat. f açık ve Teorem 2.4.5 gereği açık her fonksiyon hh-açık olduğundan f hh-açıktır. Ayrıca f mükemmel bir fonksiyon olduğundan örten ve kapalıdır. Kapalı her fonksiyon yarı-kapalı olduğundan f yarı-kapalıdır. Öte yandan yine f mükemmel bir fonksiyon olduğundan $\forall y \in Y$ için $\{f^{-1}(y)\}$ (X, τ) uzayında kompakttır. O halde Teorem 3.3.3 gereğince (X, τ) bir QHC uzayıdır.

Tanım 3.3.3 (H-kapalı Uzay) (X, τ) bir Hausdorff uzayı ve QHC uzayı ise (X, τ) 'ya H-kapalı uzay denir (Thompson 1976).

Teorem 3.3.5 (X, τ) S-kapalı bir uzay, (Y, τ') de bir Hausdorff uzayı ve $f : X \longrightarrow Y$ yarı-sürekli ve örten olsun. Bu durumda (Y, τ') H-kapalıdır (Thompson 1977).

İspat. (Y, τ') uzayının bir H-uzayı olduğunu biliyoruz. Şimdi (Y, τ') 'nin QHC uzayı olup olmadığına bakalım.

$Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak biçimde $\forall (U_i)_{i \in I} \subset \tau$ alalım.

$X = f^{-1}(Y) \iff X = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ ve $\forall i \in I$ için $U_i \in \tau$ olup f yarı-sürekli olduğundan $f^{-1}(U_i) \in S.O.(X)$ dir. O halde

(X, τ) S-kapalı olduğundan $(\exists J)(J \subset I) \ni (J \text{ sonlu}) \ni X = \bigcup_{i \in J} \overline{f^{-1}(U_i)} = \overline{\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)}$ olup

Buradan Teorem 2.1.14 gereği $X = \overline{\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)}$

$\implies f(X) = \overline{f(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i))}$ dir.

Buradan f örten olduğundan $Y = \overline{f(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i))}$ elde edilir.

Öte yandan f yarı-sürekli olduğundan Teorem 2.4.4 gereğince $Y \subset \overline{f(f^{-1}(\bigcup_{i \in J} U_i))}$

$\iff Y = \overline{f(f^{-1}(\bigcup_{i \in J} U_i))} \cap Y$

$\iff Y = \overline{f(f^{-1}(\bigcup_{i \in J} U_i))} = \overline{\bigcup_{i \in J} U_i} = \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$

$\implies (Y, \tau')$ QHC uzayıdır.

Sonuçta (Y, τ') Hausdorff uzayı olan bir QHC uzayı olduğundan H-kapalıdır.

KAYNAKLAR

- Cameron, D.E. 1978. Properties of S-closed Spaces. *Proce. Amer. Math. Soc.*, 72, 581- 86.
- Crossley, G. and Hildebrand, S.K. 1972. Semi-Topological Properties. *Fund. Math.*, 74, 233-254.
- Levine, N. 1961. A decomposition of continuity in topological spaces. *Am. Math. Monthly*, 68, 44-46.
- Levine, N. 1963. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces. *Amer. Math. Monthly*, 70, 36-41.
- Njastad, O. 1965. On some classes of nearly open sets. *Pacific Journal of Mathematics.*, 15, 961-970
- Noiri, T. 1973. Ageneralization of closed mappings. *Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 8, 54, 412-415.
- Noiri, T. 1973. On semi-continuous mappings. *Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 54, 210-214.
- Noiri, T. 1974. On weakly continuous mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 46, 120-124.
- Noiri, T. 1977. On S-closed spaces. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 91, 189-194.
- Noiri, T. 1980. Properties of S-closed spaces. *Acta. Math. Hung.*, 35, 431-436.
- Noiri, T. 1978. On S-closed subspaces. *Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 8, 64, 157-162.
- Singal, M.K. and Singal, A.R. 1968. Almost-continuous mappings. *Yokohama Math. J.*, 16, 63-73.
- Sivaraj, D. 1984. A note on S-closed spaces. *Acta. Math. Hung.*, 44, (3-4), 207-213.

- Stone, M.H. 1937. Applications of Theory of Boolean Rings to General Topology. Trans. Amer. Math. Soc., 41, 375-481.
- Thompson, T. 1976. S-closed spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 60, 335-338.
- Thompson, T. 1977. Semi continuous and irresolute images of S-closed spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 60, 335-338.
- Wilansky, A. 1967. Topics in Functional Analysis Lecture Notes in Mathematics. 45, Springer-Verlag, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Esra YENİARAS

Doğum Yeri: İstanbul

Doğum Tarihi: 16.03.1979

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise: Çamlıca Kız Lisesi, (1997)

Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, (2004)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (Eylül 2004-Şubat 2007)