

**T.C.
MİMAR SİNAN
GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**VARYASYON HESABI VE OPTİMAL KONTROL TEORİSİNİN
KUADRATİK FONKSİYONELLERİNİN İNCELENMESİ**

**Gülay İlona TELSİZ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ**

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Mahammad TAGHİYEV**

İSTANBUL – 2004

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
SUMMARY.....	iii
GİRİŞ.....	1

BÖLÜM 1.

KUADRATİK FONKSİYONELLERİN POZİTİFLİĞİNİN SONLU BOYUTLU FORMLARLA İNCELENMESİ

1.1. Kuadratik Fonksiyonelin Minimumunun Varlığı Probleminin Direkt Yöntemle İspatı.....	8
1.2. Jacobi Şartının Sonlu Boyutlu Kuadratik Formlarla İspatı.....	17
1.3. Sonlu Kuadratik Formların Üçgen Dönüşümü ile Kanonik Biçimde Yazılışı.....	22
1.4. Jacobi Koşulunun Üçgen Dönüşümü ile İspatı.....	28

BÖLÜM 2.

GENELLEŞTİRİLMİŞ HİLBERT ÖRNEĞİ

2.1. $H(x) = \int_0^1 (t^\alpha \dot{x}^2 - \lambda x^2) dt \rightarrow \inf$ Probleminin İncelenmesi.....	30
2.2. $J(x(.)) = \int_0^1 (t^\alpha \dot{x} ^\beta - \lambda x ^\beta) dt \rightarrow \inf$ Probleminin İncelenmesi.....	42

BÖLÜM 3.

SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYON İÇEREN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ

3.1. Sınırlı Varyasyonlu Fonksiyon İçeren Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı	55
3.2. Sınırlı Varyasyonlu Fonksiyon İçeren Optimal Kontrol Problemi İçin Maksimum Prensibi.....	58

BÖLÜM 4.

GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYON İÇEREN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN DUALİTE YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

4.1. Genelleştirilmiş Fonksiyon İçeren Optimal Kontrol Probleminin Dualite Yöntemiyle Çözümü.....	64
4.2. Genelleştirilmiş Weierstrass Örneği.....	71

BÖLÜM 5.

BANACH UZAYLARINDA MİNİMUM PROBLEMİNE SONLU BOYUTLU YAKLAŞIM

5.1. Banach Uzaylarında Minimum Problemine Sonlu Boyutlu Yaklaşım.....	74
--	----

BÖLÜM 6.

KUADRATİK OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN İKİNCİ MERTEBEDEN BİR KOŞUL

6.1. Kuadratik Optimal Kontrol Problemi İçin İkinci Mertebeden Bir Koşul.....	82
---	----

BÖLÜM 7.

KUADRATİK FONKSİYONELLERİN KENDİNE EŞLENİK NOKTALARI

7.1. Kuadratik Fonksiyonellerin Kendine Eşlenik Noktaları.....	86
--	----

SONUÇ.....	90
------------	----

KAYNAKLAR.....	91
----------------	----

ÖZGEÇMİŞ.....	96
---------------	----

ÖNSÖZ

Danışmanım Sayın Prof. Dr. Mahammad Taghiyev'e, Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Belgin Mazlumoğlu'na, bana emeği geçen bütün hocalarıma, desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen sevgili dostlarıma ve aileme içten teşekkürlerimi sunarım.

Gülay İlona Telsiz

İstanbul, 2004

ÖZET

Bu çalışmada Varyasyon Hesabı ve Optimal Kontrol Teorisi'nde karşımıza çıkan “Kuadratik Fonksiyoneller” farklı yönlerden incelenmiştir.

Varyasyon hesabında direkt yöntemlerin önemli bir yeri olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada varyasyon hesabının kuadratik fonksiyonelleri direkt yöntemlerle incelenmiş, klasik Jacobi koşulları sonlu kuadratik formların üçgen dönüşümü ile kanonik şekle getirilişinin bir sonucu olarak ortaya konmuştur.

Tezde, Hilbert'in varyasyon hesabında “Varlık Teoremi” ile ilgili verdiği bir örneğin çok geniş bir genellemesi ele alınmış ve bütün yönleriyle detaylı olarak incelenmiştir.

Ayrıca, idare edicisi sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar uzayından olan dinamik sistemler ele alınmış, bu sistemlerin çözümlerinin varlığı incelendikten sonra optimallik için şartlar yazılmıştır. İdare edicisi δ - fonksiyonu olan sistemler, ekstremal problemler teorisinin dualite yöntemleriyle çözülmüştür.

SUMMARY

In this study, “Quadratic Functionals” are encountered in the “Calculus of Variation and Optimal Control Theory” are examined in different perspectives.

It is known that, direct methods have important position in Calculus of Variation. In this study Quadratic Functionals of Calculus of Variation are examined by direct methods. Classical Jacobi conditions are put forward as a result of given canonical form with triangel transformation of finite quadratic forms.

In this thesis, the generalization of the example related with the existence theorem given by Hilbert, is investigated in detail.

Dynamic systems whose controller are from the space of functions of bounded variation are also examined. After investigating the existence of the system's solutions the conditions of optimality are written. The systems whose controller are δ - functions are solved by duality methods.

GİRİŞ

İnsanlar yüzyıllar boyunca karşılaştıkları problemlere en iyi çözümü getirmek gibi bir ihtiyaçla karşılaşmışlardır. Matematikte de en iyi çözümün arandığı maksimum ve minimum problemlerinin incelenmesi çok eski zamanlara dayanmaktadır [54]. Asırlar boyunca, karşılaşılan problemler kendilerine özgü yöntemlerle çözülmüş ve tüm problemlerin çözümüne yol gösterecek yaklaşımlar oluşmamıştır. Yaklaşık olarak üçyüz yıl önce, matematiksel analizin oluşumu döneminde, daha genel çözüm metodlarının ilk örnekleri ortaya konulmaya başlanmıştır. Bu öncüler Newton, Leibnitz, Kepler, Bernoulli, Fermat gibi büyük doğa bilimcileri ve matematikçilerdi.

Aynı dönemde çok önemli bir şey daha anlaşılmıştı “Birçok doğa yasası varyasyon prensipleriyle ifade edilebilir”. XVII. yüzyılın sonuna doğru Brachistochrone ve Newton problemi gibi problemlerin çözümü ile başlayan bu girişim, sonraları geometride, fizikte, mekanikte ortaya çıkan benzer problemlerin incelenmesi, matematiğin yeni ve çok önemli bir dalının, “Varyasyon Hesabı”nın oluşumuna yol açmıştır. Varyasyon hesabının sonraki ikiyüz yıldaki güçlü gelişimi sonucu konunun tükendiği işaretleri ortaya çıkmaya başlamıştır.

Fakat son 50-60 yılda ekonominin, tekniğin hızlı gelişimi, bu zamana kadar karşılaşılmayan yeni, farklı yapıda ekstremum problemlerinin ortaya çıkmasına sebep oldu. Bu yeni problemler eski yöntemlerle çözülememekteydi. Ortaya çıkan bu gereksinim sonucu klasik matematiksel analizin sınırları genişletildi ve günümüzde “Ekstremal Problemler” adıyla bilinen önemli bir dalı oluştu [2], [14], [25], [34], [43], [44],[54],[55], [58]. Klasik analizin yanısıra konveks kümeler ve fonksiyonların özelliklerini inceleyen yeni bir analiz “Konveks Analiz” ortaya çıkmış oldu.

Diğer yandan teknik bilimlerin, özellikle uzay teknolojisinin bir takım ihtiyaçları klasik varyasyon hesabı yöntemleri ile karşılanamadığından yeni metodların geliştirilmesi gerekmiştir. Bu gereksinim de iki büyük matematikçinin

ortaya koyduğu teorilerle karşılaşmış oldu. Onlardan biri “Dinamik Programlama” yaklaşımının mimarı R. Bellman [5], diğeri ise, “Optimal Kontrol Teorisi”nin kurucusu L. Pontryagin’dır [41]. Böylece ekstremal problemler teorisinde gerek soyut yaklaşımlar açısından gerekse de somut problemlerin çözülebilmesi açısından yeni bir döneme girilmiş oldu.

Ekstremal problemler teorisi, metodları ve yapısı itibarıyla olgun bir teori olmakla birlikte bir takım problemlerin çözümünde teorik ve pratik açıdan zorluklar bulunmaktadır. Özellikle somut problemlerin çözümü pratik açıdan çok önemli oldukları için yeni daha basit yaklaşımlar gerektirmektedir. Ayrıca Optimal Kontrol ve Varyasyon Hesabının klasik sonuçları belli koşullar altında geçerlidir. Bu koşulların sağlanmaması problemin incelenmesini önemli ölçüde zorlaştırmaktadır. Bu çalışmamızda söz konusu zorlukların bir kaçını aşmaya çalıştık ve ekstremal problemlerin çözümlerini kolaylaştıracak yaklaşımlar sergiledik.

Temeli L. Euler tarafından ortaya konan ve “Varyasyon Hesabının Direkt Yöntemleri” adıyla bilinen ayrıklaştırma yönteminin matematiksel analizde önemli bir yeri vardır. Bu yöntemin temel düşüncesi, verilen varyasyon problemini, sonlu değişkenli fonksiyonların ekstremum problemine indirgemektir. İndirgenmiş problem, matematiksel analizin bilinen metodları ile çözülür ve sonra limite geçilerek varyasyon probleminin çözümü elde edilir. Çalışmamızda bu yöntem, varyasyon hesabının kuadratik;

$$J(x) = \int_a^b (Px^2 + R\dot{x}^2) dt$$

fonksiyoneline uygulanmıştır.

Varyasyon hesabında güçlendirilmiş Legendre koşulu ile ilgili iki önemli örnek bulunmaktadır. Bunlardan birincisi Hilbert örneğidir [2], [11], [54].

$$\int_0^1 t^{\frac{2}{3}} \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \inf$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

probleminin çözümü $x(t) = t^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon mutlak süreklidir, fakat varyasyon hesabının problemlerinin geleneksel olarak incelendiği $C^1[0,1]$ uzayından değildir. Bu örnek, varyasyon hesabının problemlerini C^1 uzayında incelemenin her zaman doğal olmadığını göstermektedir.

Weierstrass örneği ise,

$$\int_0^1 t^2 \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \inf$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

biçimindedir. Bu örneği Weierstrass, matematiksel fizikte Dirichlet prensibi adı ile bilinen önermenin Riemann tarafından esaslandırılmasına itiraz olarak göstermiştir. Bu örnekte çözüm fonksiyonu mutlak sürekli fonksiyonlar uzayına ($AC[0,1]$) bile ait değildir. Her iki örnekte çözümlerin düzgün olmamasının nedeni aynıdır: Güçlendirilmiş Legendre şartı $t=0$ noktasında sağlanmamaktadır. Bu şartın sağlanmaması ilk örnekte çözümün $C^1[0,1]$ uzayından olmamasına, ikinci örnekte ise $AC[0,1]$ uzayından bile olmamasına sebep olmuştur. Bu tip problemler Varyasyon Hesabının dejenere olmuş problemleri olarak bilinmektedir. Bu konuda Morse M. [37], Leighton W. [27], Hestenes M. R. [23], Taghiyev M. [52], [53] gibi matematikçilerin önemli araştırmaları vardır.

Yukarıda da adı geçen Hilbert ve Weierstrass örnekleri bizim çalışmamızda da genelleştirilmiş bir biçimde ele alınmıştır. Biz Hilbert örneğini,

$$J(x(.)) = \int_0^1 \left(t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda |x|^\beta \right) dt$$

biçiminde genelleştirerek, Güçlendirilmiş Legendre şartının bir noktada bozulması durumunu bu genelleştirilmiş örnek üzerinde detaylı olarak inceledik.

Ayrıca, çözümleri olmayan klasik varyasyon hesabı ve optimal kontrol problemlerinin genişletilerek incelenmesi, sıçrayışla değişebilen sistemlerin modelleştirilmesi sonucu , optimizasyon teorisinde “İmpuls Kontrol Teorisi” ortaya çıkmıştır. Bu konuda [20], [38], [39], [56], [59], [63] gibi çalışmalar vardır. Klasik optimal kontrol probleminde, U kontrol kümesinin sınırsız bir küme olduğu durumda, yörüngesi sürekli fonksiyon olan bir çözüm bulunamayabilir. Bu durum, klasik optimal kontrol problemlerinin çözümünde temel gerek şart olan Pontryagin’in “Maksimum Prensibi”nin klasik şekliyle geçerli olmamasından kaynaklanmaktadır. Çünkü bu şart, optimal idare edicinin varlığının kabulü üzerine kurulmuştur. Örneğin;

$$J(u) = \int_0^1 x^2(t) dt \rightarrow \min$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = -1, \quad u(t) \geq 0$$

probleminde her idare edici için $J(u) \geq 0$ olacağı açıktır. $x(t)$ sürekli fonksiyon ise $J(u) = 0$ olabilmesi için $x(t) \equiv 0$ olması gerekir. Fakat $x(t) \equiv 0$ fonksiyonu $x(0) = -1$ koşulunu sağlamaz. Diğer taraftan,

$$x_n(t) = \begin{cases} nt-1 & , t \in [0, 1/n] \\ 0 & , t \in (1/n, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan yörünge dizisine karşılık gelen idare ediciler,

$$u_n(t) = \begin{cases} n & , t \in [0, 1/n] \\ 0 & , t \in (1/n, 1] \end{cases}$$

biçimindedir ve bu $\{x_n(t)\}$ dizisi noktasal olarak,

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -1 & , t = 0 \\ 0 & , t \in (0, 1] \end{cases}$$

süreksiz fonksiyonuna yakınsaktır. Ayrıca;

$$J(u_n) = \int_0^1 x_n^2(t) dt = \frac{1}{3n} \rightarrow 0$$

olup $\{u_n\}$ minimize eden dizidir. Başka bir deyimle, $J(u)$ fonksiyonelinin infimumu sıfırdır fakat bu alt sınır hiçbir idare edici ile elde edilememektedir. Fonksiyonelin minimum değeri, genelleştirilmiş fonksiyonlar, δ -fonksiyonlar üzerinden elde edilmektedir. Süreksiz yörüngeleri ilk olarak araştıran Lowden'in incediği

$$J(u) = \int_0^1 u(t) dt \rightarrow \min$$

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad u(t) \geq 0.$$

problemde ise optimal idare edici yoktur. Minimum değeri gerçekleştiren yörünge sınır koşullarını sağlamamaktadır. Şöyle ki; $\dot{x} = x + u$ denkleminde u çekilip fonksiyonelde yerine yazılırsa, problem

$$J(u) = \int_0^1 (\dot{x}(t) - x(t)) dt = 1 - \int_0^1 x(t) dt$$

biçimine dönüşür. O halde $J(u) \rightarrow \min$ problemi ile $J_1(u) = \int_0^1 x(t) dt \rightarrow \max$

problemi birbirine denk problemlerdir. Böylece problem, yörüngenin altında kalan alanın maksimize edilmesi problemine indirgenmiş olur. Son (1,1) noktasından

geriye $\hat{u} = 0$, $\hat{x}(t) = e^{t-1}$ yörüngesi ile hareket edilirse, $\hat{x}(0) = e^{-1} \neq 0$ olduğundan $\hat{x}(t)$ sınır şartını sağlamaz dolayısıyla kabul edilebilir bir yörünge değildir. Fakat $(\hat{x}, \hat{u})$ ikilisi için $J(\hat{u}) = 0$ ve $J_1(\hat{u}) = 1 - e^{-1}$ olup şartları sağlayan kabul edilebilir her $u(t)$ için $J_1(u) < J_1(\hat{u})$ dır, yani $(\hat{x}, \hat{u})$ ikilisi en iyi çözümdür. Bu çözüme istenildiği kadar yaklaşılabılır. Gerçekten de;

$$x_n(t) = \begin{cases} nt e^{\left(\frac{1-t}{n}\right)} & , \quad t \in [0, 1/n) \\ e^{(t-1)} & , \quad t \in [1/n, 1] \end{cases}$$

$$u_n(t) = \begin{cases} n(1-t) e^{\left(\frac{1-t}{n}\right)} & , \quad t \in [0, 1/n) \\ 0 & , \quad t \in [1/n, 1] \end{cases}$$

dizileri için, $J(u_n) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{n} \right) e^{\left(\frac{1-t}{n}\right)} \rightarrow e^{-1}$ ve $J_1(u_n) = 1 - J(u_n) \rightarrow 1 - e^{-1} = J_1(\hat{u})$

elde edilir. J_1 fonksiyoneli $1 - e^{-1}$ değerini yalnız $\hat{x}(t)$ yörüngesi üzerinde elde edilebilir. $\hat{x}(t)$ sınır şartını sağlamadığından optimal idare edici yoktur. $\{x_n\}$ yörüngeler dizisi;

$$\hat{x}_n(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in [0, 1/n) \\ e^{(t-1)} & , \quad t \in [1/n, 1] \end{cases}$$

süreksiz fonksiyonuna noktasal olarak yakınsamaktadır.

Bu örnekler minimize eden yörüngelerin süreksiz fonksiyonlara yaklaşabileceğini göstermektedir. Benzer durumları incelemek için Optimal Kontrol teorisinde farklı yöntemler geliştirilmiştir. Bu çalışmada bu yöntemlerin ikisine değinilmiştir. Birinci yöntem, çözümü olmayan varyasyon problemlerini genişletip gerek ve yeter şartların elde edilmesi ile ilgilidir. Bu konuyla ilgili [3], [10], [12], [25], [30], [31], [32], [33] gibi çalışmalar vardır. Bu sistemler için önce varlık

teoremleri ispatlanmış, ardından klasik kontrol teorisinde kullanılan Rozonoer yöntemiyle gerek şartın esasını oluşturan Maksimum Prensibi bu sistemler için ispatlanmıştır.

İkinci yöntem ise Ekstremlal problemler için önemli bir yeri olan dualite yöntemiyle bağlıdır. Luapunov'un vektör ölçülerle bağlı güzel bir teoreminin uygulaması sonucu faz değişkenlerine lineer bağlı olan sistemler için gerek ve yeter biçimde teoremler ispatlanabilir [3], [4], [14], [21], [25], [34], [36], [44]. Bu çalışmada, yukarıda adı geçen Weierstrass örneğini

$$J(x(.)) = \int_0^1 t^\alpha \frac{|\dot{x}|^\beta}{\beta} dt$$

biçiminde genelleştirerek dualite metodlarının varyasyon hesabında nasıl kullanılabileceği bu örnekle gösterilmiştir. Bu örnek, dualite yöntemiyle, sonlu sayıda noktada güçlendirilmiş Legendre koşulunu sağlamayan (dejenere olmuş) daha genel problemlerin çözülebileceğini göstermektedir.

Çalışmamızın bütünlük arz etmesi açısından, tezde soyut varlık teoremlerine de yer verilmiştir. Bu varlık teoremleri iki amaçla ispatlanmıştır. Birincisi, ele alınan çözümsüz optimizasyon problemlerine genel bir yaklaşım sergilemek, ikincisi de sonlu boyuta indirgeme düşüncesini soyut şekilde göstermektir. Sonlu boyuta indirgeme Bölüm1'de incelenmiştir. Bölüm 6'da kuadratik optimal kontrol problemi için ikinci mertebeden bir koşul belirlenmiştir. Klasik varyasyon hesabında kendine eşlenik nokta kavramınının büyük rol oynadığı bilinmektedir [1], [6], [7], [8], [15], [16], [24], [62]. Eşlenik nokta ikinci dereceden lineer homojen bir denklemin sıfırları olarak tanımlanır. Eğer Euler-Jacobi denkleminin trivyal olmayan çözümü verilen aralıkta sonsuz kez sıfır oluyorsa bu denkleme salınımlı denklem denir. Tezde Euler-Jacobi denkleminin salınımlı olması için yeter koşul belirlenmiştir.

BÖLÜM 1

KUADRATİK FONKSİYONELLERİN POZİTİFLİĞİNİN SONLU BOYUTLU FORMLARLA İNCELENMESİ

1.1. Kuadratik Fonksiyonelin Minimumunun Varlığı Probleminin Direkt Yöntemle İspatı

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \min$$

şeklinde verilen klasik varyasyon hesabı probleminin ikinci varyasyonu,

$$P(t) = \frac{1}{2} \left(F_{xx}(t) - \frac{d}{dt} F_{x\dot{x}}(t) \right) \text{ ve } R(t) = \frac{1}{2} F_{\dot{x}\dot{x}}(t) \text{ olmak üzere;}$$

$$\delta^2 J = \int_{t_1}^{t_2} \left[P(t)(\delta x)^2 + R(t)(\delta \dot{x})^2 \right] dt$$

biçiminde bir kuadratik fonksiyoneldir ve varyasyon hesabındaki önemi bilinmektedir ([23], [25]). $\delta^2 J$ kuadratik fonksiyonelinin negatif olmaması için gerek şart $R(t) \geq 0$ (Legendre şartı) olmasıdır.

Bu bölümde; matematik literatüründe geniş şekilde yer alan ([2], [6], [7], [11], [15], [16], [24]);

$$\delta^2 J = \int_{t_1}^{t_2} \left[P(t)\eta^2 + R(t)\eta'^2 \right] dt \quad (1.1.1)$$

kuadratik fonksiyonelinin negatif olmaması probleminin $R(t) > 0$ (Güçlendirilmiş Legendre şartı) ve $P(t), R(t) \in C^1[a, b]$ koşulları altında incelenmesi, farklı bir yöntemle yapılacaktır.

$${}^0C^1 = \left\{ x(.) \mid x(.) \in C^1[a, b], x(a) = x(b) = 0 \right\} \text{ ve } S = \left\{ x(.) \in {}^0C^1 \mid \int_a^b x^2 dt = 1 \right\}$$

birim küre olmak üzere, $J_{ab}(x) = \int_a^b [P(t)x^2 + R(t)x'^2] dt$ ve $P(t), R(t) \in C^1[a, b]$,

$R(t) > 0$ olsun.

$$\text{Bu durumda } m = \min P(t), t \in [a, b] \text{ ise } J_{ab}(x) \geq \int_a^b m x^2 dt + \int_a^b R(t) x'^2 dt \geq m$$

olduğundan (1.1.1) fonksiyoneli S birim küresinde alttan sınırlıdır.

Lemma 1.1.1.

$K > 0$ sabit bir sayı olmak üzere $x_0, x_1, \dots, x_n$;

$$|x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i| < K \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.1.2)$$

eşitsizliğini sağlayan sayılar olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir;

$$\left| \frac{x_s - x_r}{s - r} - \frac{x_q - x_s}{q - s} \right| \leq K \cdot \frac{q - r}{2} \quad (1.1.3)$$

$$0 \leq r < s < q \leq 7.$$

İspat. (1.1.2) ile verilen eşitlikler $i = j+1$ den $i = s-1$ 'e kadar taraf tarafa toplanırsa;

$$|x_{j+1} - x_j - (x_s - x_{s-1})| \leq K |s - j - 1| \quad (1.1.4)$$

ve bu eşitlik de $j = r$ den $j = s-1$ indisine kadar taraf tarafa toplanırsa ve düzenlenirse;

$$\left| \frac{x_s - x_r}{s - r} - (x_s - x_{s-1}) \right| \leq K \frac{(s - r - 1)}{2} \quad (1.1.5)$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$\left| \frac{x_q - x_s}{q - s} - (x_s - x_{s-1}) \right| \leq K \frac{(q - s + 1)}{2} \quad (1.1.6)$$

olup (1.1.5) ve (1.1.6) eşitsizliklerinden (1.1.3) eşitsizliği elde edilir. $\square$

Lemma 1.1.2.

$[a, b]$ aralığında sürekli $f(t)$ fonksiyonu, $a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$ koşuluna uyan her t_1, t_2, t_3 sayıları için;

$$\left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{f(t_3) - f(t_2)}{t_3 - t_2} \right| < K \cdot \frac{t_3 - t_1}{2} \quad (1.1.7)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $f(t)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sürekli türevi vardır.

İspat. Bir t_0 noktasında teoremin hükmü geçerli olmasın. Bu durumda, t_0 noktasının $|t - t_0| < h$ civarında,

$$\left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{f(t'_2) - f(t'_1)}{t'_2 - t'_1} \right| > \gamma \quad (1.1.8)$$

eşitsizliğini sağlayan $t_1 < t_2, t'_1 < t'_2$ noktaları ve bir $\gamma > 0$ sayısı vardır. t_3 için,

$K \frac{t_3 - t_0}{2} = \frac{\gamma}{6}$ olsun ve h sayısı $|t - t_0| < h$ için $K \frac{|t - t_0|}{2} < \frac{\gamma}{6}$ eşitsizliği sağlanacak

kadar küçük seçilsin. Bu durumda,

$$\left| \frac{f(t_3) - f(t)}{t_3 - t} - \frac{f(t_3) - f(t_0)}{t_3 - t_0} \right| < \frac{\gamma}{6}$$

olur. (1.1.7) eşitsizliği önce t_1, t_2, t_3 ; sonra da t'_1, t'_2, t'_3 için yazılıp düzenlenirse;

$$\left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{f(t_3) - f(t_0)}{t_3 - t_0} \right| < \frac{\gamma}{2} \quad \text{ve} \quad \left| \frac{f(t'_2) - f(t'_1)}{t'_2 - t'_1} - \frac{f(t_3) - f(t_0)}{t_3 - t_0} \right| < \frac{\gamma}{2} \quad \text{eşitsizlikleri}$$

ve bu iki eşitsizlikten;

$$\left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{f(t'_2) - f(t'_1)}{t'_2 - t'_1} \right| < \gamma$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (1.1.8) eşitsizliğiyle çelişir. O halde her $t \in [a, b]$ için $f(t)$ fonksiyonunun sürekli türevi vardır. $\square$

$$1.1.1. \quad J_{ab}(x) = \int_a^b [P(t)x^2 + R(t)x'^2] dt \quad \text{kuadratik fonksiyonelinin } S \text{ küresi}$$

üzerindeki minimum değerinin direkt yöntemle bulunması:

$$J_{ab}(x) = \int_a^b [P(t)x^2 + R(t)x'^2] dt \quad \text{kuadratik fonksiyoneli} \quad t_i = a + i \Delta t \quad \text{ve} \quad \Delta t = \frac{b-a}{n}$$

olmak üzere ayrıklaştırılırsa;

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} \left[P(t_i)x_i^2 + R(t_i) \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \right)^2 \right] \Delta t$$

olur. Ayrıca $S^{(n)} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum x_i^2 \Delta t = 1 \right\}$ ve $J_0^{(n)} = \inf J(x)$, $x \in S^{(n)}$ olsun.

Bu durumda $J_0^{(n)} = \min \frac{1}{\Delta t} J^{(n)}$, $\sum x_i^2 = 1$.

Lemma 1.1.3.

$J_0 = \inf J_{ab}(x)$, $x \in S$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n \rightarrow \infty} J_0^{(n)} \leq J_0$ dır.

İspat. $J_0 = \inf J_{ab}(x)$, $x \in S$ ise, her $\varepsilon > 0$ için öyle $x = x(t) \in S$ fonksiyonu vardır ki, $J_{ab}(x) \leq J_0 + \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. $x(a) = x(b) = 0$ olduğundan $x = x(t)$ fonksiyonu, $x_0, x_n = 0$ olmak üzere, köşeleri $(a + i \Delta t, x_i)$ $i = 0, 1, \dots, n-1$ olan poligonlara yaklaştırılabilir. Ayrıca;

$$J_{ab}(x) \geq J^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - \varepsilon \quad (1.1.9)$$

ve $|\eta| < \varepsilon$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \Delta t = 1 + \eta \quad (1.1.10)$$

$\bar{x} = \frac{x_i}{\sqrt{1+\eta}}$ olsun. Bu durumda;

$$J^{(n)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}) = \frac{1}{1+\eta} J^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (1.1.11)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n-1} \bar{x}_i^2 \Delta t = 1 \quad (1.1.12)$$

eşitlikleri elde edilir. (1.1.12) eşitliğinden;

$$J^{(n)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}) \geq J_0^{(n)}$$

olup (1.1.9), (1.1.10), (1.1.11) gözönüne alınırsa buradan;

$$\begin{aligned}
J_0 &\geq J_{ab}(x) - \varepsilon \\
&\geq J^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - 2\varepsilon \\
&= (1 + \eta)J^{(n)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}) - 2\varepsilon \\
&\geq (1 + \eta)J_0^{(n)} - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse; $J_0 \geq (1 + \eta) \liminf_{n \rightarrow \infty} J_0^{(n)} - 2\varepsilon$ elde edilir.

ε ve η keyfi sayılar olduğundan $J_0 \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_0^{(n)}$ olur. $\square$

O halde öyle $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ dizisi vardır ki, $\liminf_{n_k \rightarrow \infty} J_0^{(n_k)}$ limiti vardır ve

$\liminf_{n_k \rightarrow \infty} J_0^{(n_k)} \leq J_0$ dır. $J_0^{(n)}$ sayısı $\frac{1}{\Delta t} J^{(n)}$ formunun en küçük özdeğeri olduğundan

$J_0^{(n)} = \lambda_0^{(n)}$ yazılabilir. $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, köşe noktaları $(a + i \Delta t, x_i)$ $i = 0, 1, \dots, n-1$ olan

P_n poligonu olarak düşünülürse $J^{(n)}$, P_n poligonunun fonksiyonu olur. $P_n(t)$

poligonuna Euler direkt metodu ([16]) uygulanırsa,

$$P(t_i)x_i - \left\{ R(t_i) \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} - R(t_{i-1}) \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right\} \frac{1}{\Delta t} + \lambda_0^{(n)} x_i = 0$$

elde edilir ve $R(t_i) = R(t_{i-1}) + \Delta t R'(\xi_i)$, $t_{i-1} < \xi_i < t_i$ ve böylece;

$$\frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{\Delta t^2} = \frac{1}{R(t_{i-1})} \left\{ P(t_i)x_i + \lambda_0^{(n)} x_i - R'(\xi_i) \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \right\}$$

eşitliğine ulaşılır. $S = \max_{a \leq t \leq b} \frac{P(t) + J_0}{R(t)}$ ve $T = \frac{\max_{a \leq t \leq b} R'(t)}{\max_{a \leq t \leq b} R(t)}$ olsun.

O halde;

$$\left| \frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{\Delta t} \right| \leq S|x_i|\Delta t + T \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \right| \Delta t \quad (1.1.13)$$

ve buradan da $i = j$ den $i = s$ ya kadar toplamakla;

$$\left| \frac{x_{j-1} - x_j}{\Delta t} - \frac{x_{s+1} - x_s}{\Delta t} \right| \leq S \sum_{i=j}^s |x_i| \Delta t + T \sum_{i=j}^s \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \right| \Delta t \quad (1.1.14)$$

elde edilir. Diğer taraftan Cauchy- Schwarz eşitsizliğinden ([50]);

$$\sum |x_i| \Delta t \leq \sqrt{\sum x_i^2 \sum \Delta t^2} = \sqrt{\sum x_i^2 \Delta t \sum \Delta t}$$

olup $\sum x_i^2 \Delta t = 1$ ve $\sum \Delta t = b - a$ olduğuna göre buradan;

$$\sum |x_i| \Delta t \leq \sqrt{b - a} \quad (1.1.15)$$

bulunur. *Lemma 1.1.3.*'e göre, n sayısı yeteri kadar büyük seçildiğinde minimum veren P_n poligonu için;

$$\left| \sum P(t_i) x_i^2 \Delta t + \sum R(t_i) \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \right)^2 \Delta t \right| = |J_0^{(n)}| \leq |J_0| + 1$$

ve $A^2 = \frac{1}{\min_{a \leq t \leq b} R(t)} (|J_0| + 1 + \max_{a \leq t \leq b} P(t))$ olmak üzere, $\sum \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \right)^2 \Delta t \leq A^2$ olur. Yine

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$$\sum \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \right| \Delta t \leq A \sqrt{b-a}$$

elde edilir. (1.1.14) ve (1.1.15) kullanılırsa böylece her j, s için,

$$\left| \frac{x_{j-1} - x_j}{\Delta t} - \frac{x_{s+1} - x_s}{\Delta t} \right| \leq (S + TA) \sqrt{b-a}$$

eşitsizliğine ulaşılır. $\sum x_i^2 \Delta t = 1$ olduğundan x_i lerin hepsi birden sıfır olamaz, ayrıca $x_0 = x_n = 0$ olduğundan $\frac{x_{s+1} - x_s}{\Delta t}$ ($s = 1, 2, \dots, n-1$) ifadesi en azından bir defa pozitif, bir defa da negatif değer alacaktır. O halde,

$$\left| \frac{x_{j-1} - x_j}{\Delta t} \right| \leq (S + TA) \sqrt{b-a} = c_1 = \text{sabit} \quad (1.1.16)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $j=1$ den $j=k \leq n-1$ değerine kadar taraf tarafa toplanırsa,

$$|x_k| \leq c_1 \sum \Delta t = c_1 (b-a) \quad (1.1.17)$$

olur ve böylece (1.1.13) eşitsizliği,

$$\left| \frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{\Delta t^2} \right| \leq S c_1 (b-a) + T c_1 = c_2 = \text{sabit}$$

biçiminde yazılabilir. O halde *Lemma 1.1.1.*'den,

$$\left| \frac{x_s - x_r}{(s-r)\Delta t} - \frac{x_q - x_s}{(q-s)\Delta t} \right| \leq c_2 \frac{q-r}{2} \Delta t \quad (1.1.18)$$

eşitsizliği elde edilir. (1.1.16) ve (1.1.17) şartlarıyla $P_{n_1}(t), P_{n_2}(t), \dots, P_{n_k}(t), \dots$ poligonlar dizisi, fonksiyonlar ailesi için Hilbert'in belirlediği kompaktlık koşulunu sağlanmaktadır ([45]). Bu diziden düzgün yakınsak $P^{(1)}(t), P^{(2)}(t), \dots, P^{(k)}(t), \dots$ dizisi seçilsin ve $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(t) = x_0(t)$ olsun. $x_0(a) = x_0(b) = 0$ olup (1.1.18) eşitsizliğinden

her

$t_1 < t_2 < t_3$ sayısı için,

$$\left| \frac{x_0(t_2) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{x_0(t_3) - x_0(t_2)}{t_3 - t_2} \right| < C \cdot \frac{t_3 - t_1}{2}$$

yazılabilir ve bu durumda *Lemma 1.1.2.*'ye göre $x_0(t)$ fonksiyonunun sürekli türevi vardır ve $P^{(1)}(t), P^{(2)}(t), \dots, P^{(k)}(t), \dots$ dizisi düzgün yakınsak olduğundan,

$$\int_a^b x_0^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta t = 1$$

olur, yani $x_0(t) \in S$ dir. Ayrıca $J(x_0) = J_0$ dır. Gerçekten de, (1.1.18) eşitsizliğinden

$$\varphi_n(t) = \frac{P^{(n)}(t_{k+1}) - P^{(n)}(t_k)}{\Delta t} \quad \text{ve} \quad t_k \leq t < t_k + \Delta t = t_{k+1} \quad \text{olmak üzere} \quad \{\varphi_n(t)\}$$

$x'_0(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı sonucu çıkar. O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(P^{(n)}) = \int_a^b (P x_0^2 + R x_0'^2) dt = J(x_0)$$

ve *Lemma 1.1.3.*'e göre $\lim_{n \rightarrow \infty} J(P^{(n)}) = J_0$ yani $J(x_0) = J_0$ dır.

1.2. Jacobi Şartının Sonlu Boyutlu Kuadratik Formlarla İspatı

Bu kısımda ise $P(t) = \frac{1}{2} \left(F_{xx}(t) - \frac{d}{dt} F_{x\dot{x}}(t) \right)$ ve $R(t) = \frac{1}{2} F_{\dot{x}\dot{x}}(t)$ olmak üzere,

$h(a) = h(b) = 0$ şartı altında;

$$J_{ab}(h) = \int_a^b (P(t)h^2 + R(t)h'^2) dt \quad (1.2.1)$$

kuadratik fonksiyoneli, sonlu değişkenli kuadratik formlar kullanılarak araştırılacak ve klasik yöntemle elde edilen sonuçlar bu yöntemle elde edilecektir.

Öncelikle (1.2.1) fonksiyoneline, ilk kez Legendre tarafından uygulanan ([16]), aşağıdaki dönüşüm uygulanacaktır:

$w = w(t)$, $C^1[a, b]$ uzayından herhangi bir fonksiyon olsun. O halde, $h(a) = h(b) = 0$ olduğundan;

$$\int_a^b (2hh'w + h^2w') dt = \int_a^b d(wh^2) = 0 \quad (1.2.2)$$

olur ve bu ifadeyi fonksiyonele eklersek fonksiyonelin değeri değişmez.

Bu durumda;

$$J_{ab}(h) = \int_a^b \left\{ (P + w')h^2 + 2whh' + Rh'^2 \right\} dt \quad (1.2.3)$$

dir. $w(t) \in C^1[a, b]$ fonksiyonu integralaltı ifade tam kare olacak şekilde seçilsin.

Bunun sağlanması için gerek ve yeter şart;

$$(F_{x\dot{x}'} + w)^2 - F_{x'\dot{x}'}(F_{xx} + w') = 0 \quad (1.2.4)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. (1.2.4) denklemi birinci dereceden lineer olmayan bir denklemdir. O halde bu denklemin $[a, b]$ aralığında $C^1[a, b]$ sınıfından bir çözümü varsa (1.2.1) integrali aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$J_{ab}(h) = \int_a^b F_{x'x'} \left\{ h' + \frac{F_{xx'} + w}{F_{x'x'}} \right\}^2 dt \quad (1.2.5)$$

Legendre, $F_{x'x'} > 0$ olması durumunda (1.2.4) denkleminin $[a, b]$ aralığında tanımlı bir çözümünün her zaman olduğunu varsayarak $F_{x'x'} > 0$ şartının $J_{ab} > 0$ olması için yeterli olduğunu ileri sürmüştür ([16]). Fakat $F_{x'x'} > 0$ olduğu halde (1.2.4) denkleminin $[a, b]$ aralığında tanımlı bir çözümü olmayabilir. Legendre'nin bu hatası Jacobi tarafından düzeltilmiştir. Jacobi (1.2.4) denklemine;

$$w = -F_{xx'} - F_{x'x'} \frac{u'}{u} \quad (1.2.6)$$

dönüşümünü uygulayarak aşağıdaki biçime getirmiştir;

$$\left(F_{xx'} - \frac{d}{dt} F_{x'x'} \right) u - \frac{d}{dt} (F_{x'x'} u') = 0. \quad (1.2.7)$$

(1.2.7) denklemi ikinci dereceden bir denklemdir ve varyasyon hesabında “Jacobi denklemi” olarak bilinir ([16]). Bu denklemin $[a, b]$ aralığında sıfıra çevrilmeyen çözümü varsa, (1.2.4) denkleminin de $[a, b]$ aralığında tanımlı çözümü vardır ve dolayısıyla J_{ab} fonksiyoneli negatif değildir. $F_{x'x'} = 0$ olması durumunda (1.2.7) denklemi ikinci dereceden denklem olma niteliğini kaybeder ve problemin incelenmesi zorlaşır. (1.2.6) dönüşümü (1.2.5)'de yerine yazılırsa;

$$J_{ab}(h) = \int_a^b F_{x'x'} \frac{(u'h - uh')^2}{u^2} dt \quad (1.2.8)$$

elde edilir. Yapılan bu dönüşüme de “Jacobi dönüşümü” denir. Jacobi dönüşümleri diferansiyel denklemlerle bağlı dönüşümlerdir. Bu bölümde uygulanacak yöntem ise sonlu kanonik formların kanonik şekle getirilmesi ile ilgilidir.

$$J_{ab}(x) = \int_a^b [P(t)x^2 + R(t)x'^2] dt \quad (1.2.9)$$

kuadratik fonksiyoneli

$$x(a) = x(b) = 0, \quad R(t) > 0, \quad t \in [a, b] \quad (1.2.10)$$

şartları altında ele alınacaktır. $[a, b]$ aralığı n eşit parçaya ayrılсын ve x_i, P_i, R_i sırasıyla $x(t), P(t), R(t)$ fonksiyonlarının i . bölğü noktasındaki değeri olsun. Bu durumda (1.2.9) fonksiyoneli $x_0 = x_n = 0$ ve $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere ayrıklaştırılırsa;

$$J_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[P_i x_i^2 + R_i \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \right)^2 \right] \Delta t \quad (1.2.11)$$

şeklinde $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ değişkenlerine bağlı bir fonksiyonel elde edilir. Ayrıca;
 $J(x(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ dır. J_{n-1} sonlu değişkenli kuadratik formu;

$$\left. \begin{aligned} a_{ii} &= P_i \Delta t + \frac{R_{i-1} + R_i}{\Delta t} \\ a_{i+1i} &= a_{ii+1} = -\frac{R_i}{\Delta t} \\ a_{ij} &= 0 \quad j \neq i-1, i, i+1 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.12)$$

olmak üzere $J_{n-1} = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ biçiminde yazılabilir. Δt yeterince küçük alınırsa

$R(t) > 0$ eşitsizliğine göre;

$$a_{ii} > 0, \quad a_{i+1i} = a_{ii+1} < 0 \quad (1.2.13)$$

olur. Sonlu kuadratik formlar teorisinden bilindiği gibi ([50]) J_{n-1} kuadratik formunun pozitif olması için, Δ_i determinantları göstermek üzere;

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1} \quad (1.2.14)$$

dizisinin tüm elemanlarının pozitif olması gerek ve yeter koşuldur (Sylvester koşulu [50]). J_{n-1} kuadratik formunun katsayıları (1.2.12) ve (1.2.13) şartlarını sağladığından Sylvester koşulu farklı şekilde yazılabilir. $a_{ij} = 0 \quad j \neq i-1, i, i+1$ koşulunu gözönünde bulundurarak, x_{n-1} keyfî bir sayı olmak üzere, J_{n-1} fonksiyonunun stasyoner noktaları bulunacaktır.

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{array} \right\} \quad (1.2.15)$$

Bu durumda x_1 verildiğinde bu sistemden ardışık olarak, $x_2 = \frac{a_{11}}{a_{12}}, x_3, \dots, x_{n-1}$

değerleri bulunabilir. Π_n , i . köşesi $(i\Delta t, x_i)$ olan poligon olsun. Π_n poligonunun t eksenini ile keşistiği noktaların sayısı, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ dizisindeki işaret değişimi sayısına eşittir.

Lemma 1.2.1.

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ dizisindeki işaret değişimi, (1.2.14) dizisindeki işaret değişimine eşittir.

İspat. (1.2.15) lineer denklemler sisteminin katsayılarından oluşan matris;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Şimdi;

$$\delta_{i-1} = (-1)^{i-1} \prod_{j=1}^{n-1} a_{jj+1} \Delta_{i-1} \quad (1.2.16)$$

olsun. $a_{jj+1} < 0$ olduğundan;

$$\delta_i = (-1)^k K_i |\Delta_{i-1}|, \quad K_i = \prod_{j=i}^k |a_{jj+1}| \quad (1.2.17)$$

yazılabilir. Diğer taraftan (1.2.15) sistemi çözülürse; $\frac{x_1}{\delta_1} = \frac{x_2}{\delta_2} = \dots = \frac{x_n}{\delta_n}$ veya;

$$\frac{x_1}{K_1 \Delta_0} = \frac{x_2}{K_2 \Delta_1} = \dots = \frac{x_n}{K_n \Delta_{n-1}} \quad (1.2.18)$$

ve K_i ler pozitif olduğu için (1.2.18) ile lemma ispatlanmış olur. $\square$

Böylece (1.2.18) eşitliklerinden aşağıdaki sonuç elde edilir,

Sonuç: Π_n poligonunun t ekseni ile keştiği noktaların sayısı, (1.2.14) dizisindeki işaret değişimi sayısına eşittir.

(1.2.15) sisteminde a_{ij} değerlerinin ifadesi yerlerine yazılırsa;

$$P_i x_i - \frac{1}{\Delta t} \left(R_i \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} - R_{i-1} \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.2.19)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse yine; $Px - \frac{d}{dt}(Rx') = 0$ Jacobi denklemi elde edilmiş olur. $n \rightarrow \infty$ olduğunda Π_n poligonu Jacobi denkleminin $(a, 0)$ noktasından geçen γ integral eğrisine yaklaşır. γ eğrisinin t eksenini ile kesiştiği noktaların sayısı, J_{ab} kuadratik formunun negatif özdeğerlerinin sayısına eşittir. Özel durumda J_{ab} kuadratik formunun pozitif olabilmesi için γ eğrisinin t eksenini $[a, b]$ kapalı aralığında kesmemesi yeterli, (a, b) açık aralığında kesmemesi ise gerekli şarttır.

1.3. Sonlu Kuadratik Formların Üçgen Dönüşümü ile Kanonik Biçimde Yazılışı

$\sum a_{ij} x_i x_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) biçimindeki bir sonlu kuadratik formun “kareler toplamı” biçiminde, başka bir deyimle “kanonik” biçimde yazılışı Lineer Cebir’in temel konularındandır. Lineer Cebir’de genelde iki yolla yapılır: Lagrange ve Jacobi yöntemiyle. İntegral şeklindeki kuadratik formlar, sonlu kuadratik formların limiti olarak düşünülebileceğinden dolayı integral biçimindeki kuadratik formların işaretlerinin belirlenmesinde sonlu kuadratik formlardan yararlanılabilir. Bu bölümde sonlu kuadratik formlara Jacobi dönüşümünün bir benzeri uygulanacaktır.

Tanım 1.3.1.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin,

$$x_j = \sum_{k=j}^n \alpha_{jk} y_k \quad (1.3.1)$$

biçimdeki dönüşümüne bu değişkenlerin üçgen dönüşümü denir. (1.3.1) eşitliğinden görüldüğü gibi x_j değişkeni yalnız $y_j, y_{j+1}, \dots, y_n$ değişkenlerine bağlıdır.

dönüşümünün determinanti ise $\prod_{i=1}^n \alpha_{ii}$ dir. $\sum a_{ij} x_i x_j$ kuadratik formunun üçgen dönüşümü ile $\sum \mu_i y_i^2$ biçiminde yazılabildiği varsayılsa;

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \prod_{i=1}^n \alpha_{ii}^2 = \mu_1 \dots \mu_n$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \prod_{i=1}^n \alpha_{ii}^2 = \mu_1 \dots \mu_p$$
$$\mu_p = \frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}} \alpha_{pp}^2 \quad (1.3.2)$$
$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \dots + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 & = & y_2 + \alpha_{23}y_3 + \dots + \alpha_{2n}y_n \\ x_3 & = & y_3 + \dots + \alpha_{3n}y_n \\ & \dots & \dots \\ x_n & = & y_n \end{array}$$

biçiminde, $\sum a_{ij}x_i x_j$ formu ise,

$$\sum \frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}} \cdot y_p^2 \quad (1.3.3)$$

şeklinde yazılır. (1.3.3) eşitliğinden ve kuadratik formlar teorisinin eylemsizlik kuralından, negatif özdeğerlerin sayısının $\Delta_0 = 1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ dizisindeki işaret değişimi sayısına eşit olduğu görülmektedir. (1.3.2) ve (1.3.3) formüllerinin uygulanması $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{p-1}$ determinantlarının sıfırdan farklı olmasına bağlıdır. Bu sebeple aşağıdaki işlemlerde bu determinantların sıfırdan farklı olduğu varsayılacaktır.

$B_1, B_2, \dots, B_m$ kuadratik formları aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$B_1 = A, \quad B_{m+1} = B_m - \frac{z_m^2}{k_m} \quad (1.3.4)$$

$$z_m = \frac{1}{2} \frac{\partial B_m}{\partial x_m}, \quad k_m = \frac{\partial z_m}{\partial x_m} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_m}{\partial x_m^2}$$

k_m, x_m^2 nin B_m deki katsayısıdır. $\Delta_m \neq 0$ ise $k_m \neq 0$ olduğu gösterilecektir.

Lemma 1.3.2.

B_m kuadratik formları (ve dolayısıyla z_m ler de) yalnız $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlıdır.

İspat. Lemma $m=1$ için doğrudur. $m=r$ için geçerli olsun. Yani B_r (ve z_r) $x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlı olsun. (1.3.4) 'e göre B_{r+1} formu da aynı değişkenlere bağlıdır. Fakat;

$$\frac{\partial B_{r+1}}{\partial x_r} = \frac{\partial B_r}{\partial x_r} - \frac{2}{k_r} z_r \cdot \frac{\partial z_r}{\partial x_r} = 2z_r - 2z_r = 0$$

olduğuna göre B_{r+1} , x_r değişkenine bağlı değildir. Yani $x_{r+1}, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlıdır. $\square$

Lemma 1.3.3.

x değişkeninden z değişkenine dönüşüm, A formunu kanonik biçime getiren bir üçgen dönüşümüdür.

İspat. B_m formlarının tanımına göre;

$$B_{m+1} = B_m - \frac{z_m^2}{k_m} = B_{m-1} - \frac{z_{m-1}^2}{k_{m-1}} - \frac{z_m^2}{k_m} = A - \sum_{i=1}^m \frac{z_i^2}{k_i}$$

ve böylece, $A = \sum_{i=1}^m \frac{z_i^2}{k_i} + B_{m+1}$ eşitliği elde edilir. *Lemma 1.3.2.*'den,

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{k_i} \quad (1.3.5)$$

Lemma 1.3.4.

$A_i = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ olsun. z_i ($i=1, 2, \dots, n$) değişkenlerinin her biri , $\alpha_{ii}=1$ olmak

üzere, $A_1, A_2, \dots, A_i$ değişkenleri ile aşağıdaki biçimde gösterilebilir;

$$z_i = \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} A_j = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} a_{jk} .$$

İspat. $i=1$ olsun. Bu durumda $z_1 = A_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_1}$ olur. Lemmanın $i \leq m$ için geçerli olsun. (1.3.5) eşitliğinden,

$$z_{m+1} = \frac{1}{2} \frac{\partial B_{m+1}}{\partial x_{m+1}} = A_{m+1} + \sum_{j=1}^m c_j z_j, \quad c_j = -\frac{2}{k_j} \frac{\partial z_j}{\partial x_{m+1}}$$

bulunur. c_j ($j \leq m$) ler $A_1, A_2, \dots, A_m$ değişkenlerine lineer bağımlı olduğun gözönünde bulundurulursa lemanın $i = m+1$ için de geçerli olduğu görülür. $\square$

z_m de $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ değişkenlerinin katsayıları sıfır olduğu için, $\sum_{i=1}^m \alpha_{mi} a_{ik} = 0$

($k=1, 2, \dots, m-1$) olur. Bu sistem α_{mi} değişkenlerine göre çözülürse; (l_m oran katsayısı olmak üzere)

$$\alpha_{mi} = l_m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i-11} & a_{i+11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i-12} & a_{i+12} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m-1} & a_{2m-1} & \dots & a_{i-1m-1} & a_{i+1m-1} & \dots & a_{mm-1} \end{vmatrix} \quad (1.3.6)$$

ve bu ifade z_m de yerine yazılırsa;

$$z_m = l_m \begin{vmatrix} A & A_2 & \dots & A_m \\ a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m-1} & a_{2m-1} & \dots & a_{mm-1} \end{vmatrix} \quad (1.3.7)$$

olur. $A_i = \sum a_{ik} x_k$ olduğu hatırlanırsa;

$$z_m = l_m \sum_{k=m}^n \Delta_m^k x_k \quad , \quad \Delta_m^k = \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1k} & \dots & a_{mk} \\ a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m-1} & a_{2m-1} & \dots & a_{mm-1} \end{vmatrix} \quad (1.3.8)$$

elde edilir. $k < m$ ise $\Delta_m^k = 0$ olduğu açıktır. A_m nin katsayılarını karşılaştırsak;
 $1 = \pm l_m \Delta_{m-1}$ ve buradan $l_m = \pm \frac{1}{\Delta_{m-1}}$ dir.

Yeni $y_1, y_2, \dots, y_n$ değişkenleri;

$$y_m = \frac{1}{\Delta_m} \sum_{k=m}^n \Delta_m^k x_k \quad (1.3.9)$$

eşitliği ile tanımlanırsa, orantılı olduklarından $z_m = \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} y_m$ ve böylece (1.3.9)

dönüşümü A formunu kanonik şekle dönüştürür:

$$A = \sum_{m=1}^n \frac{z_m^2}{k_m} = \sum_{m=1}^n \mu_m y_m^2 \quad , \quad \mu_m = \left(\frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} \right)^2 \frac{1}{k_m}. \quad (1.3.10)$$

Diğer taraftan, (1.3.9) dönüşümünde x_m nin katsayısı 1 dir: $\Delta_m = \Delta_m^m$. O halde (1.3.3)

formülü uygulanabilir ve $\mu_m = \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}$ elde edilir. (1.3.10) daki ifade ile

karşılaştırılırsa;

$k_m = \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}$ ve bu eşitlikten $\Delta_i \neq 0$ ise $k_i \neq 0$ olduğu görülür.

O halde A formunun son şekli aşağıdaki gibidir;

$$A = \sum \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} y_j^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta_j \Delta_{j-1}} \left(\sum_{i=j}^n \Delta_j^i x_i \right)^2. \quad (1.3.11)$$

(1.3.11) eşitliği A nın kanonik biçimde yazılımıdır.

Sonuç: (1.3.11) formülünden kuadratik formların pozitifliği için Sylvester teoreminin ([50]) koşullarının yeterli olduğu görülmektedir.

1.4. Jacobi Koşulunun Üçgen Dönüşümü ile İspatı

Sylvester teoremi kullanılarak J_{ab} kuadratik fonksiyonelinin pozitifliği koşulu elde edilmişti. Aynı sonuç, sonlu kuadratik formların üçgen dönüşümü ile kanonik biçime getirilmesi yöntemiyle de elde edilebilir.

$$\Delta_i = \Delta_i^{(i)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (1.4.1)$$

olsun. $\Delta_i^{(j)}$, Δ_i den i . sütunun yerine j . sütunun yazılması ile elde edilen determinant

olsun. $\Delta_i^{(j)} = 0$, $j \neq i, i+1, i+2$ ve $\Delta_i^{(i+1)} = a_{ii+1} \Delta_{i-1}$.

Bu durumda, J_n kuadratik formu;

$$J_n = \sum \frac{1}{\Delta_i \Delta_{i-1}} \left(\sum \Delta_i^{(j)} x_i \right)^2 \quad (1.4.2)$$

biçiminde yazılabilir.

O halde,

$$J_n = \sum \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \left\{ x_i + \frac{\Delta_i^{(i+1)}}{\Delta_i} x_{i+1} \right\}^2$$

$$= \sum \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \left\{ x_i + \frac{a_{ii+1} \Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_{i+1} \right\}^2$$

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, (1.2.15) denkleminin trivyal olmayan bir çözümü olsun. (1.2.16)

(1.2.17) ve (1.2.18) denklemlerinden;

$$J_n = \sum -\frac{a_{ii+1} \eta_{i+1}}{\eta_i} \left(x_i - \frac{\eta_i}{\eta_{i+1}} x_{i+1} \right)^2$$

$$= \sum -\frac{a_{ii+1} \eta_{i+1}}{\eta_i \eta_{i+1}^2} [x_i (\eta_{i+1} - \eta_i) - \eta_i (x_{i+1} - x_i)]^2$$

$$= \sum R_i \frac{\eta_i}{\eta_{i+1}} \left[\frac{x_i \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta t} - \eta_i \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}}{\eta_i} \right]^2$$

elde edilir. Eğer Jacobi denkleminin çözümü olan γ eğrisi $[a, b]$ aralığında t eksenini kesmiyorsa $\Pi_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ poligonu da aynı özelliğe sahiptir. Bu durumda

son eşitliğin sağ tarafı tanımlıdır. $\Delta t \rightarrow 0$ ise $\frac{\eta_i}{\eta_{i+1}} \rightarrow 1$ olup limite geçilirse;

$\int_a^b R \frac{(x \eta' - \eta x')^2}{\eta^2} dt$ integraline ulaşılır. Böylece, J_{ab} kuadratik fonksiyoneli,

$$J_{ab} = \int_a^b R \frac{(x \eta' - \eta x')^2}{\eta^2} dt \quad (1.4.3)$$

biçiminde yazılabilir.

BÖLÜM 2

GENELLEŞTİRİLMİŞ HİLBERT ÖRNEĞİ

Hilbert, Legendre şartının varyasyon hesabındaki rolünü incelerken aşağıdaki örneği vermiştir;

$$\int_0^1 (t^2 \dot{x}^2 + 12x^2) dt \rightarrow \inf$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Bu problemin özelliği $t = 0$ noktasında güçlendirilmiş Legendre şartının sağlanmamasıdır. Bu bölümde Hilbert'in bu örneği aşağıdaki genel halde ele alınacaktır;

$$2.1. \quad H(x) = \int_0^1 (t^\alpha \dot{x}^2 - \lambda x^2) dt \rightarrow \inf \quad \text{Probleminin İncelenmesi}$$

$$H(x) = \int_0^1 (t^\alpha \dot{x}^2 - \lambda x^2) dt \rightarrow \inf$$

(2.1.1)

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \xi.$$

(2.1.1) probleminde $\lambda \leq 0$ için $H(x) \geq 0$ olduğu açıktır, o halde $\lambda > 0$ olsun.

Teorem 2.1.1.

i) $\xi = 0$ için $L_0 = \{x(\cdot) \in C[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0, t^\alpha \dot{x}^2 \in L_1[0,1]\}$ alt uzayında

$H(x) \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart, $\alpha \leq 2$ ve

$$\lambda_0 = \begin{cases} 1/4 & , \alpha = 2 \\ \frac{\gamma_{\nu,1}^2 (2-\alpha)^2}{4} & , \alpha < 2 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

olmak üzere $\lambda \leq \lambda_0$ olmasıdır. Burada $\gamma_{\nu,1}$, $J_\nu(\cdot)$ Bessel fonksiyonunun birinci sıfırındır ve $\nu = \frac{|1-\alpha|}{2-\alpha}$ dır. $H(x) = 0$ durumu $\alpha < 1$ ve $\lambda = \lambda_0$ için aşağıdaki $\hat{x}(t)$ fonksiyonu üzerinde gerçekleşir;

$$\hat{x}(t) = c t^{\frac{1-\alpha}{2}} J_\nu(\gamma_{\nu,1} t^{\frac{2-\alpha}{2}}) , \quad c = \text{sabit}$$

Diğer durumlarda $H(x) = 0$ eşitliği $\hat{x} \equiv 0$ durumunda sağlanır.

ii) $\xi \neq 0$ için $L = \{x(\cdot) \in C[0,1] \mid x(0) = 0, x(1) = \xi, t^\alpha \dot{x}^2 \in L_1[0,1]\}$ olmak üzere $\inf_{x \in L} H(x) = s > -\infty$ olabilmesi için gerek ve yeter şart λ_0 , (2.1.2) eşitliğiyle tanımlanmak üzere $\alpha \leq 2$, $\lambda < \lambda_0$ olmasıdır. $\alpha < 1$ ise $H(x)$ fonksiyonelinin mutlak minimumu aşağıdaki $\hat{x}(t)$ fonksiyonu üzerinde gerçekleşir;

$$\hat{x}(t) = \frac{\xi}{J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)} t^{\frac{1-\alpha}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha} t^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)$$

ve minimum değer;

$$H(\hat{x}(\cdot)) = \sqrt{\lambda} \xi^2 \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)}{J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)}$$

olur. $1 \leq \alpha < 2$ durumunda ise (2.1.1) probleminin aşağıdaki şekilde tanımlanan genelleştirilmiş bir çözümü vardır;

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t = 0 \\ \frac{\xi}{J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)} t^{\frac{1-\alpha}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha} t^{\frac{2-\alpha}{2}}\right) & , \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

ve minimum değer;

$$H(\hat{x}(.)) = -\sqrt{\lambda} \xi^2 \frac{J_{\nu+1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)}{J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)}$$

olur. $\alpha = 2$ durumunda (2.1.1) probleminin $s = \frac{1}{2}\sqrt{|1-4\lambda|}$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanan genelleştirilmiş bir çözümü vardır;

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t = 0 \\ \xi t^{\frac{1}{2}+s} & , \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

ve minimum değer;

$$H(\hat{x}(.)) = \left(-\frac{1}{2} + s\right) \xi^2$$

olur.

İspat.

i) $\xi = 0$ olsun.

i.1) $\alpha > 2$ ise $\inf H(x) = -\infty$ olduğu gösterilecektir:

$n^2 = \varepsilon^{1-\alpha}$ olmak üzere aşağıdaki minimize eden dizi ele alınacak olursa;

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{\varepsilon} t & , \quad 0 \leq t \leq \varepsilon \\ \frac{n}{\varepsilon} (2\varepsilon - t) & , \quad \varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon \\ 0 & , \quad 2\varepsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$$

buradan,

$$\begin{aligned} H(x_n(.)) &= \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^\varepsilon [t^\alpha - \lambda t^2] dt + \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^2 \int_\varepsilon^{2\varepsilon} [t^\alpha - \lambda(2\varepsilon - t)^2] dt \\ &= \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{2\varepsilon} t^\alpha dt - 2\lambda \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^\varepsilon t^2 dt \\ &= \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \frac{2\lambda}{3} \varepsilon^{2-\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. $n^2 = \varepsilon^{1-\alpha}$ olduğundan $\varepsilon \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$. O halde $\inf H(x(.)) = -\infty$.

i.2) $\alpha \leq 2$ ise (2.1.1) probleminin Euler denklemi;

$$\frac{d}{dt}(2t^\alpha \dot{x}) + 2\lambda x = 0 \quad (2.1.3)$$

yani,

$$t^\alpha \ddot{x} + \alpha t^{\alpha-1} \dot{x} + \lambda x = 0 \quad (2.1.4)$$

olur. $\alpha \neq 2$ ise, denklemi $t^{2-\alpha}$ ile çarpmakla; $t^2\ddot{x} + \alpha t\dot{x} + \lambda t^{2-\alpha}x = 0$ şeklindeki Bessel diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, $\gamma = \frac{|1-\alpha|}{2-\alpha}$ olmak üzere,

$$x(t) = t^{\frac{1-\alpha}{2}} Z_{\gamma} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha} t^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) \quad (2.1.5)$$

biçimindedir. Burada $Z_{\gamma}(\cdot)$ Bessel denkleminin genel çözümüdür. c_1 ve c_2 sabit sayılar olmak üzere $Z_{\gamma}(\cdot) = c_1 J_{\gamma}(\cdot) + c_2 Y_{\gamma}(\cdot)$ ve $J_{\gamma}(\cdot)$, $Y_{\gamma}(\cdot)$ sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden Bessel fonksiyonlarıdır ([60]).

Diğer taraftan $\alpha = 2$ ise (2.1.4) denklemi bir Euler diferansiyel denklemdir

ve $s = \frac{1}{2}\sqrt{|1-4\lambda|}$ olmak üzere çözümü aşağıdaki şekildedir;

$$x(t) = \begin{cases} c_1 t^{\frac{1}{2}+s} + c_2 t^{\frac{1}{2}-s} & , \quad \lambda < \frac{1}{4} \\ t^{\frac{1}{2}} (c_1 + c_2 \ln t) & , \quad \lambda = \frac{1}{4} \\ t^{\frac{1}{2}} (c_1 \cos(s \ln t) + c_2 \sin(s \ln t)) & , \quad \lambda > \frac{1}{4} \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Bu aşamada, Euler denklemi (2.1.3) eşitliği ile verilen (2.1.1) problemi için sırasıyla $\alpha < 1$, $1 \leq \alpha < 2$ ve $\alpha = 2$ olmak üzere üç durum ele alınacaktır:

i.2.1) $\alpha < 1$ olsun. Bu durumda, $\gamma_{v,1}$, $J_{\gamma}(\cdot)$ Bessel fonksiyonunun birinci sıfırını

göstermek üzere $\lambda \leq \frac{\gamma_{v,1}^2(2-\alpha)^2}{4}$ ve $\lambda > \frac{\gamma_{v,1}^2(2-\alpha)^2}{4}$ durumları söz konusudur.

i.2.1.1) $\lambda \leq \frac{\gamma_{v,1}^2(2-\alpha)^2}{4}$ ise $H(x(.)) \geq 0$ olduğu gösterilecektir:

Bunun için $x_*(t) = t^{\frac{1-\alpha}{2}} J_\gamma \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha} t^{\frac{2-\alpha}{2}} \right)$ ve $x_*(0) = 0$ olmak üzere $H(x(.))$

fonksiyonelinin $H(x) = \int_0^1 t^\alpha \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}_*}{x_*} x \right)^2 dt$ biçiminde gösterilebileceği ispatlanacaktır:

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^\alpha \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}_*}{x_*} x \right)^2 dt = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left(t^\alpha \dot{x}^2 - 2t^\alpha \frac{\dot{x}_*}{x_*} x \dot{x} + t^\alpha \frac{\dot{x}_*^2}{x_*^2} x^2 \right) dt$$

ve kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^\alpha \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}_*}{x_*} x \right)^2 dt = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left(t^\alpha \dot{x}^2 + x^2 \left(\frac{d}{dt} \left(t^\alpha \frac{\dot{x}_*}{x_*} \right) + t^\alpha \frac{\dot{x}_*^2}{x_*^2} \right) \right) dt - t^\alpha \frac{\dot{x}_*}{x_*} x^2 \Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}$$

ve (2.1.4) denkleminde,

$$-\lambda = t^\alpha \frac{\ddot{x}_*}{x_*} + \alpha t^{\alpha-1} \frac{\dot{x}_*}{x_*} = \frac{d}{dt} \left(t^\alpha \frac{\dot{x}_*}{x_*} \right) + t^\alpha \frac{\dot{x}_*^2}{x_*^2} \quad (2.1.7)$$

elde edilir, dolayısıyla buradan;

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^\alpha \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}_*}{x_*} x \right)^2 dt = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left(t^\alpha \dot{x}^2 - \lambda x^2 \right) dt - t^\alpha \frac{\dot{x}_*}{x_*} x^2 \Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \quad (2.1.8)$$

yazılabilir. $\varepsilon \rightarrow 0$ ise $t^\alpha \frac{\dot{x}_*}{x_*} x^2 \Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \rightarrow 0$ olduğunu göstermek için $\theta = t^{1-\alpha}$, $u(\theta) = x(t)$

dönüşümü yapılacak olursa; (2.1.3) denklemi aşağıdaki şekli alır;

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \lambda (1-\alpha)^{-2} \theta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} u = 0 \quad (2.1.9)$$

ayrıca, $\xi = \varepsilon^{1-\alpha} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ ve $u_*(\xi) = x_*(\varepsilon)$, $u'_*(\xi) = \frac{du_*}{d\theta} \Big|_{\theta=\xi}$, $u(\xi) = x(\varepsilon)$

olmak üzere;

$$\varepsilon^\alpha \frac{\dot{x}_*(\varepsilon)}{x_*(\varepsilon)} x^2(\varepsilon) = (1-\alpha) \frac{u'_*(\xi)}{u_*(\xi)} u_*^2(\xi) \quad (2.1.10)$$

elde edilir. $x_*(t) \geq 0$, $t \in [0,1]$ olduğundan her $\theta \in [0,1]$ için $u_*(\theta) \geq 0$ olur. O

halde (2.1.9) denkleminde, her $\theta \in [0,1]$ için $u''_*(\theta) \leq 0$ ve dolayısıyla $u'_*(\theta)$

fonksiyonu azalan olduğundan $u_*(\xi) = u_*(\xi) - u_*(0) = \xi u'_*(\eta) \geq \xi u'_*(\xi) \geq 0$.

Bu eşitsizliklerden; $0 \leq \frac{u'_*(\xi)}{u_*(\xi)} \leq \xi^{-1}$ yazılabilir. Dolayısıyla;

$$0 \leq \frac{u'_*(\xi)}{u_*(\xi)} u^2(\xi) \leq \xi^{-1} u^2(\xi). \quad (2.1.11)$$

Diğer taraftan Cauchy eşitsizliğinden $u^2(\xi) = \left(\int_0^\xi u' d\theta \right)^2 \leq \xi \int_0^\xi u'^2 d\theta$ olup

düzenlenirse $\varepsilon \rightarrow 0$ için;

$$\xi^{-1} u^2(\xi) \leq \int_0^\xi u'^2 d\theta = (1-\alpha)^{-1} \int_0^\varepsilon t^\alpha \dot{x}^2 dt \rightarrow 0.$$

O halde (2.1.11) eşitsizliğinden; $\frac{u'_*(\xi)}{u_*(\xi)} u^2(\xi) \rightarrow 0$. Böylece (2.1.10) denkleminde;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon^\alpha \frac{\dot{x}_*(\varepsilon)}{x_*(\varepsilon)} x^2(\varepsilon) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((1-\alpha) \frac{u'_*(\xi)}{u_*(\xi)} u_*^2(\xi) \right) = 0$$

ve benzer şekilde $\varepsilon \rightarrow 0$ için $(1-\varepsilon)^\alpha \frac{\dot{x}_*(1-\varepsilon)}{x_*(1-\varepsilon)} x^2(1-\varepsilon) \rightarrow 0$ bulunur. Böylece

(2.1.8) eşitliğine dönülürse;

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^\alpha \dot{x}^2 - \lambda x^2) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (t^\alpha \dot{x}^2 - \lambda x^2) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^\alpha \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}_*}{x_*} x \right)^2 dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t^\alpha \frac{\dot{x}_*}{x_*} \Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon} \\ &= \int_0^1 t^\alpha \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}_*}{x_*} x \right)^2 dt \end{aligned}$$

O halde $H(x(.)) \geq 0$. Ayrıca $H(x(.)) = 0 \Leftrightarrow \dot{x} - \frac{\dot{x}_*}{x_*} x = 0$, yani $x = c x_*$, $c = \text{sabit}$.

Sonuç olarak, $\alpha < 1$ için (2.1.2) eşitliğinden $\lambda_0 = \frac{\gamma_{v,1}^2 (2-\alpha)^2}{4}$ olup;

$\lambda = \lambda_0$ ise, yani $\gamma_{v,1} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}$ ise $\hat{x} = c x_*$ fonksiyonu $H(x)$ fonksiyoneline

mutlak minimum verir.

$\lambda < \lambda_0$ ise, $\hat{x} \equiv 0$ fonksiyonu $H(x)$ fonksiyoneline mutlak minimum verir.

i.2.1.2) $\lambda > \frac{\gamma_{v,1}^2 (2-\alpha)^2}{4}$ ise $\inf H(x(.)) = -\infty$ olduğu gösterilecektir:

$$\tilde{x}(t) = t^{\frac{1-\alpha}{2}} J_\nu \left(\gamma_{v,1} t^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) \quad (2.1.12)$$

olmak üzere $x_n(t) = n.\tilde{x}(t)$ alınır; $H(x_n(.)) = n^2 \frac{\gamma_{\nu,1}^2 - \lambda \left(\frac{2}{2-\alpha} \right)^2}{2-\alpha} J_{\nu-1}^2(\gamma_{\nu,1}) \rightarrow -\infty$,
yani $\inf H(x) = -\infty$.

i.2.2) $1 \leq \alpha < 2$ olsun. Bu durumda;

i.2.2.1) $\lambda \leq \frac{\gamma_{\nu,1}^2 (2-\alpha)^2}{4}$ ise $H(x(.)) \geq 0$ ve eşitlik durumu $\hat{x} \equiv 0$ fonksiyonu

için elde edilir. Bu durum i.2.1) durumuna benzerdir. Fakat buradaki fark $x_*(0) \neq 0$

veya $x_*(0)$ belirsiz olmasıdır. Bu sebeple $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\varepsilon^\alpha \frac{\dot{x}_*(\varepsilon)}{x_*(\varepsilon)} x^2(\varepsilon) \rightarrow 0$ olduğu

gösterilmelidir. $y = t^\alpha \frac{\dot{x}_*}{x_*}$ olsun. Türev alınırsa ve (2.1.7) eşitliği hatırlanırsa $y(t)$

fonksiyonunun $\dot{y} = -\lambda - t^{-\alpha} y^2$ Riccati denklemini sağladığı görülür. O halde $\dot{y} < 0$ olup $y(t)$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında azalandır ve $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = M$ olacak şekilde bir

M sayısı vardır. Dolayısıyla $-\frac{\dot{y}}{y^2} = t^{-\alpha} + \frac{\lambda}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = \int_0^t t^{-\alpha} dt + \int_0^t \frac{\lambda}{y^2} dt$ ve

buradan $t^{-\alpha} \in L_1[0,1]$ ve $\alpha < 1$ elde edilir. Çelişki. O halde $\varepsilon \rightarrow 0$ için,

$\varepsilon^\alpha \frac{\dot{x}_*(\varepsilon)}{x_*(\varepsilon)} x^2(\varepsilon) \rightarrow 0$ dır.

i.2.2.2) $\lambda > \frac{\gamma_{\nu,1}^2 (2-\alpha)^2}{4}$ ise $\inf H(x(.)) = -\infty$ olduğu gösterilecektir:

$\tilde{x}(t)$ fonksiyonu (2.1.12) eşitliğiyle tanımlanmak ve $c = n \varepsilon^{-\frac{1+\alpha}{2}} J_\nu \left(\gamma_{\nu,1} \varepsilon^{\frac{2-\alpha}{2}} \right)$

olmak üzere;

$$x_{n\varepsilon}(t) = \begin{cases} ct & , \quad 0 \leq t \leq \varepsilon \\ n\tilde{x}(t) & , \quad \varepsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\{x_{n\varepsilon}\}$ dizisi ve $\varepsilon \rightarrow 0$ için;

$$H(x_{n\varepsilon}) = c^2 \left(\frac{\varepsilon^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \lambda \frac{\varepsilon^3}{3} \right) + n^2 \int_{\varepsilon}^1 (t^{\alpha} \dot{\tilde{x}}^2 - \lambda \tilde{x}^2) dt \rightarrow n^2 \int_0^1 (t^{\alpha} \dot{\tilde{x}}^2 - \lambda \tilde{x}^2) dt \rightarrow -\infty ,$$

yani $\inf H(x) = -\infty$.

i.2.3) $\alpha = 2$ olsun. Bu durumda $\lambda \leq \frac{1}{4}$ ve $\lambda > \frac{1}{4}$ olmak üzere iki durum söz

konusudur:

i.2.3.1) $\lambda \leq \frac{1}{4}$ ise $H(x(.)) \geq 0$ ve eşitlik durumu $\hat{x} \equiv 0$ fonksiyonu için elde

edilir. Bu durum i.2.2.1) durumunun benzeridir.

i.2.3.2) $\lambda > \frac{1}{4}$ ise $\inf H(x(.)) = -\infty$ olup i.2.2.2) durumuna benzer, burada

$c = n^{\frac{3}{2}} \ln n$ olmak üzere, minimize eden dizi olarak aşağıdaki dizi seçilebilir;

$$x_n(t) = \begin{cases} ct & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ -t^{-\frac{1}{2}} \ln t & , \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

ii) $\xi \neq 0$ olsun.

ii.1) $\alpha > 2$ ise $\inf H(x(.)) = -\infty$ olduğu gösterilecektir:

$c = \xi n^{1-\gamma}$ ve $1-\alpha < 2\gamma < -1$ olmak üzere;

$$x_n(t) = \begin{cases} ct & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ \xi t^{\gamma} & , \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

dizisi için , $n \rightarrow \infty$ ise $H(x_n(.)) \rightarrow -\infty$, yani $\inf H(x(.)) = -\infty$.

ii.2) $\alpha \leq 2$ durumu i.2) şikkındaki durumun benzeridir. Burada da $\alpha < 1$, $1 \leq \alpha < 2$ ve $\alpha = 2$ olmak üzere üç durum ele alınacaktır.

ii.2.1) $\alpha < 1$ olsun. Bu durumda ise , $\gamma_{\nu,1}$, $J_\nu(.)$ Bessel fonksiyonunun birinci sıfırını göstermek üzere $\lambda < \frac{\gamma_{\nu,1}^2(2-\alpha)^2}{4}$ ve $\lambda \geq \frac{\gamma_{\nu,1}^2(2-\alpha)^2}{4}$ durumları söz konusudur.

$$\text{ii.2.1.1)} \quad \lambda < \frac{\gamma_{\nu,1}^2(2-\alpha)^2}{4} \quad \text{ise} \quad \inf H(x(.)) = \sqrt{\lambda} \xi^2 \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)}{J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)} \quad \text{olduğu}$$

gösterilecektir. Bunun için $x_*(t) = \frac{\xi}{J_\gamma\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)} J_\gamma\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha} t^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)$ olmak üzere $H(x(.))$

fonksiyonelinin $H(x) = \frac{\dot{x}_*(1)}{x_*(1)} \xi^2 + \int_0^1 t^\alpha \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}_*}{x_*} x\right)^2 dt$ biçiminde gösterilebileceği

ispatlanmalıdır. Bu ispat i.2.1.1) şikkındaki ispatın aynısıdır. Fakat $x(1) = \xi$

olduğundan $\varepsilon \rightarrow 0$ için $(1-\varepsilon)^\alpha \frac{\dot{x}_*(1-\varepsilon)}{x_*(1-\varepsilon)} x^2(1-\varepsilon) \rightarrow \frac{\dot{x}_*(1)}{x_*(1)} \xi^2$ olur.

$$\text{ii.2.1.2)} \quad \lambda \geq \frac{\gamma_{\nu,1}^2(2-\alpha)^2}{4} = \lambda_0 \quad \text{ise} \quad \inf H(x(.)) = -\infty \quad \text{olduğu gösterilecektir:}$$

$\{\lambda_n\}$, $\lambda_n < \lambda_0$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda;

$$H(x) = \int_0^1 (t^\alpha \dot{x}^2 - \lambda x^2) dt \leq \int_0^1 (t^\alpha \dot{x}^2 - \lambda_n x^2) dt = H_n(x) ,$$

$$\inf H(x) \leq \inf H_n(x) = \sqrt{\lambda_n} \xi^2 \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{2-\alpha}\right)}{J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{2-\alpha}\right)} \rightarrow -\infty ,$$

yani $\inf H(x(.)) = -\infty$.

ii.2.2) $1 \leq \alpha < 2$ olsun. Bu durumda ii.2.1) şikkındaki tamamen benzer şekilde;

$$\inf H(x(.)) = \begin{cases} -\sqrt{\lambda} \xi^2 \frac{J_{\nu+1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)}{J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}\right)} , & \lambda < \lambda_0 \\ -\infty & , \lambda \geq \lambda_0 \end{cases}$$

olduğu gösterilebilir.

ii.2.3) $\alpha = 2$ olsun. Bu durumda da yine $\lambda \leq \frac{1}{4}$ ve $\lambda > \frac{1}{4}$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

ii.2.3.1) $\lambda \leq \frac{1}{4}$ ise $\inf H(x(.)) = \left(-\frac{1}{2} + s\right) \xi^2$ dir.

ii.2.3.2) $\lambda > \frac{1}{4}$ ise $\inf H(x(.)) = -\infty$ olup i.2.2.2) durumuna benzer, burada

$c = \xi n^{\frac{3}{2}}$ olmak üzere, minimize eden dizi olarak aşağıdaki dizi seçilebilir;

$$x_n(t) = \begin{cases} ct & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ \xi t^{\frac{1}{2}} & , \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

$$2.2. \ J(x(.)) = \int_0^1 (t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda |x|^\beta) dt \rightarrow \inf \text{ Probleminin İncelenmesi}$$

Bu kısımda, (2.1.1) problemiyle verilen kuadratik Hilbert örneğinin aşağıdaki genel hali ele alınacaktır;

$$J(x(.)) = \int_0^1 (t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda |x|^\beta) dt \rightarrow \inf$$

$$(2.2.1)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Bu problem α ve β parametrelerine göre irdelenecektir ve $\beta \geq 1$ ve $\lambda > 0$ koşulları altında $J(x(.))$ fonksiyonelinin negatif olmama koşulu araştırılacaktır.

Teorem 2.2.1.

$J(x(.))$ fonksiyonelinin $L_0 = \{x(.) \in C[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0, t^\alpha |\dot{x}|^\beta \in L_1[0,1]\}$ alt uzayında negatif olmaması için gerek ve yeter koşul, $\bar{x}(t, \lambda)$ fonksiyonu

$$\frac{d}{dt} \left(t^\alpha |\dot{x}|^{\beta-1} \text{sign } \dot{x} \right) + \lambda |x|^{\beta-1} \text{sign } x = 0 \quad (2.2.2)$$

Euler denkleminin çözümü olmak üzere ve λ_0 ,

$$\lambda_0 = \begin{cases} \beta^{-\beta} & , \quad \alpha = \beta \text{ veya } \alpha \leq \beta = 1 \\ \max \{ \lambda \mid \bar{x}(0, \lambda) = 0, \bar{x}(t, \lambda) \neq 0, \forall t \in (0,1) \} & , \quad \alpha < \beta - 1 \\ \max \{ \lambda \mid \bar{x}(t, \lambda) \neq 0, \forall t \in (0,1), \bar{x}(1, \lambda) = 0 \} & , \quad \beta - 1 \leq \alpha < \beta \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmak üzere $\alpha \leq \beta$ ve $\lambda \leq \lambda_0$ olmasıdır.

İspat.

Sırasıyla $\alpha > \beta$, $\alpha \leq \beta = 1$, $\alpha = \beta > 1$, $\alpha < \beta - 1$ ve $\beta - 1 \leq \alpha < 1$ durumları ele alınacaktır.

i) $\alpha > \beta$ ise $\inf J(x(.)) = -\infty$ olduğu gösterilecektir:

$n^\beta = \varepsilon^{\beta-\alpha-1}$ olmak üzere aşağıdaki minimize eden dizi ele alınacak olursa;

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{\varepsilon} t & , \quad 0 \leq t \leq \varepsilon \\ \frac{n}{\varepsilon} (2\varepsilon - t) & , \quad \varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon \\ 0 & , \quad 2\varepsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \varepsilon \rightarrow 0$ olup, buradan;

$$\begin{aligned} J(x_n(.)) &= \int_0^1 (t^\alpha |\dot{x}_n|^\beta - \lambda |x_n|^\beta) dt \\ &= \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^\beta \int_0^\varepsilon t^\alpha dt - 2\lambda \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^\beta \int_0^\varepsilon t^\beta dt \\ &= \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \frac{2}{1+\beta} \varepsilon^{-\alpha+\beta} \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\inf J(x(.)) = -\infty$ dur.

ii) $\alpha \leq \beta = 1$ olsun. Bu durumda $\lambda \leq 1$ ve $\lambda > 1$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

ii.1) $\lambda \leq 1$ ise $\inf J(x(.)) = 0$ olduğu gösterilecektir:

Kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\int_0^1 |x| dt = - \int_0^1 t \dot{x} \operatorname{sign} x dt \leq \int_0^1 t |\dot{x}| dt$$

ve buradan,

$$J(x(.)) = \int_0^1 (t^\alpha |\dot{x}| - \lambda |x|) dt \geq \int_0^1 (t^\alpha - t \lambda) |\dot{x}| dt = \int_0^1 t (t^{\alpha-1} - \lambda) |\dot{x}| dt$$

bulunur. $t^{\alpha-1} - \lambda \geq 1 - \lambda \geq 0$ olduğundan integralaltı ifade negatif değildir.

Dolayısıyla $J(x(.)) \geq 0$ ve $J(0) = 0$ olduğundan $\inf J(x(.)) = 0$ elde edilir.

ii.2) $\lambda > 1$ ise $\inf J(x(.)) = -\infty$ olduğu gösterilecektir:

$\lambda > 1$ ise öyle bir $\tau \in (0,1)$ vardır ki, her $t \in [\tau, 1]$ için $t^{\alpha-1} - \lambda < 0$ şartı sağlanır (bu durumda $t \mapsto t^{\alpha-1}$ fonksiyonu monotondur). $x_1(t) \neq 0$, $\forall t \in (\tau, 1)$ ve $x_1(\tau) = x_1(1) = 0$ olmak üzere $\bar{x}(t)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq \tau \\ x_1(t) & , \quad \tau \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Diğer taraftan, $\alpha \leq 1$ olduğu da hatırlanırsa;

$$\int_0^1 t^\alpha |\dot{\bar{x}}| dt = \int_0^1 t^\alpha \operatorname{sign} \dot{\bar{x}} d\bar{x} \leq \alpha \int_0^1 |\bar{x}| t^{\alpha-1} dt \leq \int_0^1 |\bar{x}| t^{\alpha-1} dt$$

ve buradan;

$$J(\bar{x}(.)) = \int_0^1 \left(t^\alpha |\dot{\bar{x}}| - \lambda |\bar{x}| \right) dt \leq \int_0^1 \left(t^{\alpha-1} - \lambda \right) |\bar{x}| dt = \int_\tau^1 \left(t^{\alpha-1} - \lambda \right) |x_1(t)| dt$$

yani $J(\bar{x}(.)) < 0$ elde edilir. Eğer $x_n(t) = n \bar{x}(t)$ olarak seçilirse, $n \rightarrow \infty$ için $J(x_n(.)) = n J(\bar{x}(.)) \rightarrow -\infty$ yani $\inf J(x(.)) = -\infty$ dur.

iii) $\alpha = \beta > 1$ olsun. Bu durumda ise $\lambda \leq \beta^{-\beta}$ ve $\lambda > \beta^{-\beta}$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

iii.1) $\lambda \leq \beta^{-\beta}$ ise $\inf J(x(.)) = 0$ olduğu gösterilecektir:

Kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\int_0^1 |x|^\beta dt = -\beta \int_0^1 |x|^{\beta-1} t \dot{x} \operatorname{sign} x dt \leq \beta \int_0^1 |x|^{\beta-1} t |\dot{x}| dt$$

ve buradan, Hölder eşitsizliği kullanılırsa, $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$ olmak üzere,

$$\int_0^1 |x|^\beta dt \leq \beta \left(\int_0^1 |x|^\beta dt \right)^{\frac{1}{\beta'}} \left(\int_0^1 t^\beta |\dot{x}|^\beta dt \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

böylece,

$$\int_0^1 |x|^\beta dt \leq \beta^\beta \int_0^1 t^\beta |\dot{x}|^\beta dt$$

bulunur. O halde, $\lambda \leq \beta^{-\beta}$ olduğundan;

$$J(x(.)) = \int_0^1 \left(t^\beta |\dot{x}|^\beta - \lambda |x|^\beta \right) dt \geq \int_0^1 \left(t^\beta |\dot{x}|^\beta - \beta^{-\beta} |x|^\beta \right) dt \geq 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, $J(x(.)) \geq 0$ ve $J(0) = 0$, dolayısıyla $\inf J(x(.)) = 0$.

Not: $\alpha \leq \beta$ ise öyle λ_0 vardır ki, $\lambda \leq \lambda_0$ değerleri için $\inf J(x(.)) = 0$. Gerçekten de $\alpha \leq \beta$ ise her $t \in [0,1]$ için $t^\alpha \geq t^\beta$. O halde $\lambda_0 = \beta^{-\beta}$ olarak seçilirse,

$$J(x(.)) = \int_0^1 \left(t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda |x|^\beta \right) dt \geq \int_0^1 \left(t^\beta |\dot{x}|^\beta - \beta^{-\beta} |x|^\beta \right) dt \geq 0$$

ve $J(0) = 0$ olduğundan $\inf J(x(.)) = 0$ dır.

iii.2) $\lambda > \beta^{-\beta}$ ise $\inf J(x(.)) = -\infty$ olduğu gösterilecektir:

$c = n^{1+\frac{1}{\beta}} \ln n$ olmak üzere aşağıdaki minimize eden dizi ele alınacak olursa;

$$x_n(t) = \begin{cases} ct & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ -t^{-\frac{1}{\beta}} \ln t & , \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ve buradan;

$$\begin{aligned} J(x_n(.)) &= \int_0^1 \left(t^\alpha |\dot{x}_n|^\beta - \lambda |x_n|^\beta \right) dt \\ &= \int_0^{1/n} |c|^\beta (1-\lambda) t^\beta dt + \int_{1/n}^1 \left(\left| \frac{1}{\beta} \ln t - 1 \right|^\beta t^{-1} - \lambda |\ln t|^\beta t^{-1} \right) dt \\ &= \frac{1-\lambda}{1+\beta} \ln^\beta n - \frac{\beta}{\beta+1} + \frac{\beta^{-\beta}}{\beta+1} (\ln n + \beta)^{\beta+1} - \frac{\lambda}{\beta+1} \ln^{\beta+1} n \end{aligned}$$

bulunur. O halde $n \rightarrow \infty$ için $J(x_n(.)) \rightarrow -\infty$, yani $\inf J(x(.)) = -\infty$ dur.

iv) $\alpha < \beta - 1$ olsun. Bu durumda (2.2.2) Euler denkleminin $\bar{x}(0, \lambda) = 0$ koşuluna uyan $\bar{x}(t, \lambda)$ çözümü vardır. Şöyle ki, $\alpha \leq 0$ ise $y = t^\alpha |\dot{x}|^{\beta-1} \text{sign } \dot{x}$ olmak üzere aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\dot{x} = t^{-\frac{\alpha}{\beta-1}} |y|^{\frac{1}{\beta-1}} \text{sign } y \quad (2.2.3)$$

$$\dot{y} = -\lambda |x|^{\beta-1} \text{sign } x .$$

(2.2.3) sisteminin $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ başlangıç koşuluna uyan bir $x(t)$, $y(t)$ çözümü vardır ([49]). Dolayısıyla (2.2.2) denkleminin $x(0) = 0$ koşuluna uyan bir $x = x(t)$ çözümü de vardır. $\alpha \geq 0$ ise, $s = t^{\frac{1-\alpha}{\beta-1}}$, $u(s) = x(t)$ olmak üzere (2.2.2) denklemi aşağıdaki biçime dönüşür;

$$\frac{d}{ds} \left(\left| \frac{du}{ds} \right|^{\beta-1} \text{sign } \frac{du}{ds} \right) + \lambda \left(1 - \frac{\alpha}{\beta-1} \right)^{-\beta} s^{\frac{\frac{\alpha}{\beta-1}}{1-\frac{\alpha}{\beta-1}}} |u|^{\beta-1} \text{sign } u = 0 . \quad (2.2.4)$$

Bu durumda $u' = \frac{du}{ds}$ ve $f(s) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta-1} \right)^{-\beta} s^{\frac{\frac{\alpha}{\beta-1}}{1-\frac{\alpha}{\beta-1}}}$ için (2.2.4) denklemi,

$$\frac{d}{ds} \left(|u'|^{\beta-1} \text{sign } u' \right) + \lambda f(s) |u|^{\beta-1} \text{sign } u = 0 \quad (2.2.5)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $v = |u'|^{\beta-1} \text{sign } u'$ olmak üzere aşağıdaki sistem elde edilir:

$$u' = |v|^{\frac{1}{\beta-1}} \text{sign } v \quad (2.2.6)$$

$$v' = -\lambda f(s) |u|^{\beta-1} \text{sign } u .$$

(2.2.6) sisteminin $u(0)=0$, $v(0)=1$ başlangıç koşuluna uyan bir $u(s)$, $v(s)$ çözümü vardır. Dolayısıyla (2.2.2) Euler denkleminin $x(0)=0$ $x \neq 0$ koşullarına

uyan bir $x = x(t)$ çözümü vardır ve $\dot{x}(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta-1}\right) t^{-\frac{\alpha}{\beta-1}} u'(s) \neq 0$.

Aşağıda $\lambda_0 = \max \{ \lambda \mid \bar{x}(0, \lambda) = 0, \bar{x}(t, \lambda) \neq 0, \forall t \in (0, 1) \}$ değerinin varlığı gösterilecektir:

λ_0 mevcut olmasın. Bu durumda $\bar{x}(0, \lambda) = 0, \bar{x}(t, \lambda) \neq 0, \forall t \in (0, 1)$ koşulunu sağlayan λ yoktur. Yani her λ için öyle $\tau \in (0, 1)$ vardır ki $\bar{x}(\tau, \lambda) = 0$,

$\bar{x}(t, \lambda) \neq 0, \forall t \in (0, \tau)$. O halde her $t \in (0, \tau)$ için $\bar{x}(t, \lambda) > 0$ olsun. Bu durumda $J(x(.)) < 0$ olacak şekilde bir $x(.)$ fonksiyonu vardır (çelişki). Bunu göstermek için diferansiyel denklemler teorisinden bilinen Sturm teoreminin benzeri aşağıda lemma olarak ispatlanacaktır. Bu lemma tek başına da ilginç bir sonuçtur.

Lemma 2.2.2.

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$ (2.2.2) Euler denkleminin sıfırdan farklı iki çözümü olsun. Bu durumda $x_1(t)$ fonksiyonunun iki komşu t_1 ve t_2 sıfırı arasında $x_2(t)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı vardır veya $x_2 = c x_1(t)$ dir.

İspat. $x_2(t)$ fonksiyonunun $[t_1, t_2]$ aralığında sıfırının olmadığını varsayalım. Bu

durumda, $f = \frac{\dot{x}_2}{x_2}$ ve $P_\beta(f, x_1) = (\beta-1)|f x_1|^\beta - \beta|f x_1|^{\beta-1} \dot{x}_1 \operatorname{sgn}(f x_1) + |\dot{x}_1|^\beta$ olmak

üzere,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{x_1}{|x_2|^{\beta-1} \operatorname{sign} x_2} \left(|\dot{x}_1|^{\beta-1} \operatorname{sign} \dot{x}_1 |x_2|^{\beta-1} \operatorname{sign} x_2 - |\dot{x}_2|^{\beta-1} \operatorname{sign} \dot{x}_2 |x_1|^{\beta-1} \operatorname{sign} x_1 \right) \right\} = t^\alpha P_\beta(f, x_1) \quad (2.2.7)$$

yazılabilir. $\varphi = \left| \frac{\dot{x}_1}{f x_1} \right|$ için;

$$\begin{aligned}
P_\beta(f, x_1) &\geq (\beta - 1) |f x_1|^\beta - \beta |f x_1|^{\beta-1} |\dot{x}_1| + |\dot{x}_1|^\beta \\
&= |f x_1|^\beta \left\{ [1 + (\varphi - 1)]^\beta - 1 - \beta(\varphi - 1) \right\} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

olup eşitlik $\varphi \equiv 1$ durumunda sağlanır, bu durumda $f = \frac{\dot{x}_1}{x_1} = \frac{\dot{x}_2}{x_2}$ yani $x_2 = c x_1(t)$.

O halde $\psi(t) = \frac{x_1}{|x_2|^{\beta-1} \text{sign } x_2} \left(|\dot{x}_1|^{\beta-1} \text{sign } \dot{x}_1 |x_2|^{\beta-1} \text{sign } x_2 - |\dot{x}_2|^{\beta-1} \text{sign } \dot{x}_2 |x_1|^{\beta-1} \text{sign } x_1 \right)$

fonksiyonu monoton artandır. Diğer taraftan, $x_1(t_1) = x_1(t_2) = 0$ olduğundan

$\psi(t_1) = \psi(t_2) = 0$ dır. Dolayısıyla $\psi \equiv 0$ olmalıdır:

$$|\dot{x}_1|^{\beta-1} \text{sign } \dot{x}_1 |x_2|^{\beta-1} \text{sign } x_2 - |\dot{x}_2|^{\beta-1} \text{sign } \dot{x}_2 |x_1|^{\beta-1} \text{sign } x_1 = 0 \quad .$$

O halde $x_2 = c x_1(t)$. $\square$

Sonuç: Eğer $\bar{x}(0, \lambda) = \bar{x}(\tau, \lambda) = 0$ olacak biçimde bir $\tau \in (0, 1)$ varsa, (2.2.2) denkleminin $\bar{x}(t, \lambda)$ ile çakışmayan her $\bar{\bar{x}}(t, \lambda)$ çözümünün $[0, \tau]$ aralığında bir sıfırı vardır. Bu nokta v olsun. $\bar{\bar{x}}(t_2, \lambda) = 0$, $\dot{\bar{\bar{x}}}(t, \lambda) < 0$, $\forall t \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$, $\tau < t_2 < \tau + \varepsilon$ olacak şekilde $\bar{\bar{x}}(t, \lambda)$ çözümü ele alınacak olursa, $\bar{\bar{x}}(t, \lambda)$ fonksiyonu $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ aralığında monoton azalandır ve $\bar{\bar{x}}(\tau, \lambda) > \bar{\bar{x}}(t_2, \lambda) = 0$ dır. $t = v$ noktasında $\bar{x}(v, \lambda) > 0$ ve $t = \tau$ noktasında $\bar{\bar{x}}(\tau, \lambda) < 0$ dır. O halde öyle bir $t_1 \in (v, \tau)$ vardır ki $\bar{x}(t_1, \lambda) = \bar{\bar{x}}(t_1, \lambda)$ eşitliği sağlanır. Bu durumda;

$$x(t) = \begin{cases} \bar{x}(t, \lambda) & , \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ \bar{\bar{x}}(t, \lambda) & , \quad t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & , \quad t_2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}
J(x(.)) &= \int_0^{t_1} \left(t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda |\bar{x}|^\beta \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(t^\alpha \left| \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}} \right|^\beta - \lambda |\bar{x}|^\beta \right) dt \\
&= t_1^\alpha \left| \dot{\bar{x}}(t_1) \right|^{\beta-1} \text{sign } \dot{\bar{x}} \bar{x}(t_1) - t_1^\alpha \left| \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}}(t_1) \right|^{\beta-1} \text{sign } \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}} \bar{x}(t_1)
\end{aligned}$$

ve (2.2.7) denkleminde x_1 ve x_2 yerine $\bar{x}$ ve $\frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}}$ yazılacak olursa, her $t \in (v, \tau)$ için,

$$\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|^{\beta-1} \text{sign } \bar{x}} \left(\left| \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}} \right|^{\beta-1} \text{sign } \dot{\bar{x}} \bar{x} - \left| \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}} \right|^{\beta-1} \text{sign } \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}} \bar{x} \right) = - \int_t^\tau t^\alpha P_\beta(f, \bar{x}) dt$$

$$\left| \dot{\bar{x}}(t_1) \right|^{\beta-1} \text{sign } \dot{\bar{x}} \bar{x}(t_1) - \left| \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}}(t_1) \right|^{\beta-1} \text{sign } \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}} \bar{x}(t_1) = - \int_{t_1}^\tau t^\alpha P_\beta(f, \bar{x}) dt < 0$$

Bu eşitsizlikten, $J(x(.)) = -t_1^\alpha \int_{t_1}^\tau t^\alpha P_\beta(f, \bar{x}) dt < 0$ elde edilir. O halde, λ_0 yoksa,

$J(x(.)) < 0$ olacak şekilde bir $x(.)$ ve λ vardır (çelişki). O halde λ_0 mevcuttur. $\square$

Lemma 2.2.3.

$\lambda \leq \lambda_0$ ise $J(x(.)) \geq 0$ dır.

İspat.

$$J(x(.)) = \int_0^1 (t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda |x|^\beta) dt \geq \int_0^1 (t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda_0 |x|^\beta) dt$$

olduğuna göre,

$$J_0(x(.)) = \int_0^1 (t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda_0 |x|^\beta) dt \geq 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $f = \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}}$ olmak üzere, (2.2.2) Euler denkleminden,

$$\frac{d}{dt} \left(t^\alpha |f|^{\beta-1} \operatorname{sign} f \right) + (\beta-1) t^\alpha |f|^\beta + \lambda = 0$$

Kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{1-\eta} t^\alpha P_\beta(f, x) dt &= \int_{\eta}^{1-\eta} t^\alpha |\dot{x}|^\beta dt + \int_{\eta}^{1-\eta} (\beta-1) |f|^\beta t^\alpha |x|^\beta dt \\ &\quad - \int_{\eta}^{1-\eta} \beta |f|^{\beta-1} \operatorname{sign} f t^\alpha |x|^{\beta-1} \operatorname{sign} x \dot{x} dt \\ &= \int_{\eta}^{1-\eta} t^\alpha |\dot{x}|^\beta dt + \int_{\eta}^{1-\eta} \left[(\beta-1) |f|^\beta t^\alpha + \frac{d}{dt} \left(t^\alpha |f|^{\beta-1} \operatorname{sign} f \right) \right] |x|^\beta dt \\ &\quad - \left[|f|^{\beta-1} \operatorname{sign} f t^\alpha |x|^\beta \right]_{\eta}^{1-\eta} \end{aligned}$$

olup bu eşitlikten,

$$\int_{\eta}^{1-\eta} (t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda |x|^\beta) dt = \left[|f|^{\beta-1} \operatorname{sign} f t^\alpha |x|^\beta \right]_{\eta}^{1-\eta} + \int_{\eta}^{1-\eta} t^\alpha P_\beta(f, x) dt$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki terim $\eta \rightarrow 0$ için sıfıra yakınsar. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} |f|^{\beta-1} \operatorname{sign} f t^\alpha |x|^\beta &= \left| \frac{\dot{x}}{\bar{x}} \right|^{\beta-1} \frac{\operatorname{sign} \dot{x}}{\operatorname{sign} \bar{x}} t^\alpha |x|^\beta \\ &= \left| \frac{\bar{u}'}{\bar{u}} \right|^{\beta-1} \frac{\operatorname{sign} \bar{u}'}{\operatorname{sign} \bar{u}} \left| \frac{ds}{dt} \right|^{\beta-1} t^\alpha |u|^\beta \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{\beta-1} \right)^{\beta-1} \left| \frac{\bar{u}'}{\bar{u}} \right|^{\beta-1} \frac{\operatorname{sign} \bar{u}'}{\operatorname{sign} \bar{u}} |u|^\beta \end{aligned}$$

olup bu durumda $\eta \rightarrow 0$ için $\left[|f|^{\beta-1} \operatorname{sign} f t^\alpha |x|^\beta \right]_{\eta}^{1-\eta} \rightarrow 0$ olduğunu göstermek için

$\varepsilon \rightarrow 0$ için $\left[\left| \frac{\bar{u}'}{\bar{u}} \right|^{\beta-1} \frac{\text{sign } \bar{u}'}{\text{sign } \bar{u}} |u|^\beta \right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} \rightarrow 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\int_0^1 |u'|^\beta ds = \int_0^1 |\dot{x}|^\beta \left(\frac{ds}{dt} \right)^{1-\beta} dt = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta-1} \right)^{1-\beta} \int_0^1 t^\alpha |\dot{x}|^\beta dt$$

dir. Bu durumda $u' \in L^\beta[0,1]$ olup,

$$|u(\xi)| = \left| \int_0^\xi u' ds \right| \leq \int_0^\xi |u'| ds \leq \xi^{\frac{1}{\beta'}} \left(\int_0^\xi |u'|^\beta ds \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

ve böylece, $|u(\xi)|^\beta \leq \xi^{\beta-1} \int_0^\xi |u'|^\beta ds$ olur. O halde $\xi \rightarrow 0$ için $\xi^{1-\beta} |u(\xi)|^\beta \rightarrow 0$.

Lagrange formülüne göre $0 < \theta < \xi$ olmak üzere, $\bar{u}(\xi) = \bar{u}(\xi) - \bar{u}(0) = \xi \bar{u}'(\theta)$ yazılabilir, bu durumda, $|\bar{u}(\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u} = \xi^{\beta-1} |\bar{u}'(\theta)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}'$. (2.2.5) denkleminde her $s \in (0, \xi)$ için $\bar{u}(s) \geq 0$ ise $\frac{d}{ds} (|\bar{u}'|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}') \leq 0$ olur. O halde $|\bar{u}'|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}'$ azalan fonksiyondur ve $|\bar{u}(\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u} \geq \xi^{\beta-1} |\bar{u}'(\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}' \geq 0$ dir. Bu eşitsizlikten,

$$1 \geq \frac{|\bar{u}'(\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}'}{|\bar{u}(\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}} \xi^{\beta-1} \geq 0$$

elde edilir. Her $s \in (0, \xi)$ için $\bar{u}(s) \leq 0$ ise de benzer şekilde aynı sonuç elde edilir.

O halde, $\xi \rightarrow 0$ için;

$$\frac{|\bar{u}'(\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}'}{|\bar{u}(\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}} |u(\xi)|^\beta = \frac{|\bar{u}'(\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}'}{|\bar{u}(\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}} \xi^{\beta-1} \xi^{1-\beta} |u(\xi)|^\beta \rightarrow 0$$

ve benzer olarak,

$$\frac{|\bar{u}'(1-\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}'}{|\bar{u}(1-\xi)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}} |u(1-\xi)|^\beta \rightarrow 0$$

olduğu görülür. Böylece;

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda |x|^\beta) dt &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\eta^{1-\eta} (t^\alpha |\dot{x}|^\beta - \lambda |x|^\beta) dt \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[|f|^{\beta-1} \text{sign } f t^\alpha |x|^\beta \right]_\eta^{1-\eta} + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\eta^{1-\eta} t^\alpha P_\beta(f, x) dt \\ &= \int_0^1 t^\alpha P_\beta(f, x) dt \geq 0 \end{aligned}$$

olur ve eşitlik durumu $x = c \bar{x}$ iken sağlanır.

$\lambda > \lambda_0$ ise $J(x(.)) < 0$ olacak şekilde bir $x(.)$ vardır. Zira λ_0 ın tanımına göre $\bar{x}(\tau, \lambda) = 0$ olacak biçimde bir $\tau \in (0, 1)$ vardır. O halde $J(x(.)) < 0$ dır.

v) $\beta - 1 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durum iv) durumuna benzerdir. Sadece, $\eta \rightarrow 0$ için,

$$\eta^\alpha |f(\eta)|^{\beta-1} \text{sign } f |x(\eta)|^\beta \rightarrow 0 \quad \text{olduğu gösterilmelidir.} \quad s = t^{\frac{1-\alpha}{\beta-1}} - 1, \quad u(s) = x(t)$$

$$\text{dönüşümü yapılırsa } h \rightarrow 0 \quad \text{için} \quad \frac{|\bar{u}'(h)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}'}{|\bar{u}(h)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}} |u(h)|^\beta \rightarrow 0 \quad \text{olur.}$$

Benzer işlemler

$$0 \leq \frac{|\bar{u}'(h)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}'}{|\bar{u}(h)|^{\beta-1} \text{sign } \bar{u}} h^{\beta-1} \leq 1$$

eşitsizliği elde edilir. $h \rightarrow 0$ için $h^{1-\beta} |u(h)|^\beta \rightarrow 0$ olduğunu gösterelim.

$u' \in L^\beta(0, \infty)$ olduğundan dolayı öyle $h_0 > 0$ vardır ki, her $\varepsilon > 0$ için $\int_{h_0}^{\infty} |u'|^\beta dt < \varepsilon$.

$h > h_0$ olsun. Bu durumda,

$$|u(h)| \leq |u(h_0)| + \int_{h_0}^h |u'| ds \leq |u(h_0)| + (h - h_0)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left\{ \int_{h_0}^{\infty} |u'|^\beta ds \right\}^{\frac{1}{\beta}} < |u(h_0)| + \varepsilon^{\frac{1}{\beta}} h^{\frac{\beta-1}{\beta}}$$

ve böylece $h^{1-\beta} |u(h)|^\beta < 2\varepsilon$ elde edilir. $\square$

BÖLÜM 3

SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYON İÇEREN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ

3.1. Sınırlı Varyasyonlu Fonksiyon İçeren Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı

$VB(a, b)$; $[a, b]$ aralığında sınırlı varyasyonlu ve $[a, b]$ aralığında soldan sürekli fonksiyonlar kümesini göstermek üzere ([40]), $VB(a, b)$ uzayı,

$$\|u(t)\|_{VB(a,b)} = |u(a)| + \text{Var}_a^b u(t)$$

normu ile bir Banach uzayıdır ([45]).

Tanım 3.1.1.

$$\text{i) } \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(a) = u(a) \quad , \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(b) = u(b)$$

ve $u(t)$ fonksiyonunun süreksizlik noktaları dışındaki t ler için,

$$\text{ii) } \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(t) = u(t)$$

$$\text{iii) } \sup_m \text{Var}_a^b u_m(t) < \infty$$

ise $\{u_m\}$ dizisi $u(t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $C^*(a, b)$ uzayında $*$ – zayıf yakınsaklığa eşdeğerdir.

Bu kısımda, $f(x, t)$, n boyutlu vektör fonksiyon, $b(t)$, $m \times n$ boyutlu matris fonksiyon, $u(t)$, m boyutlu ve sınırlı varyasyonlu vektör fonksiyon olmak üzere,

$$\dot{x} = f(x, t) + b(t)\dot{u}(t) \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (3.1.1)$$

denklemini ele alınacaktır.

Tanım 3.1.2.

$u(t) \in VB_m(t_0, t_1)$ olmak üzere,

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau) du(\tau) \quad (3.1.2)$$

integral denklemini sağlayan $x(t) \in VB_n(t_0, t_1)$ vektör fonksiyonuna, (3.1.1) denkleminin zayıf çözümü denir.

Böylece (3.1.1) denkleminin $[t_0, t_1]$ aralığındaki zayıf çözümü, eğer varsa, (3.1.2) integral denkleminin çözümü olarak düşünülecektir.

Teorem 3.1.3.

$(t, x) \mapsto f(t, x)$, $t \mapsto b(t)$ sürekli fonksiyonlar olsun ve $(t, x) \mapsto f(t, x)$ lokal Lipschitz koşulunu sağlasın, yani $x_1, x_2 \in S_R(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^0\| \leq R\}$, $t \geq t_0$ için $\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L(R)\|x_1 - x_2\|$, ($L(R)$ = sabit) eşitsizliği sağlansın. Bu durumda sıfır mertebeden $\dot{u}(t)$ genelleştirilmiş fonksiyonu için (3.1.1) denkleminin çözümü vardır ve tektir.

Not: (3.1.1) denkleminin çözümünün tekliği şöyle anlaşılmalıdır; eğer $x'(t) \in VB_n(t_0, t'_1)$ ve $x''(t) \in VB_n(t_0, t''_1)$ (3.1.1) denklemini iki zayıf çözümü ise, $x'(t) = x''(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1)$, $t_1 = \min\{t'_1, t''_1\}$; $x'(t_1) = x''(t_1)$ $t'_1 = t''_1$; eğer $t'_1 > t''_1$ ise $x''(t_1) = x'(t_1 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} x'(t)$.

İspat. Bir $T > t_0$ noktası sabit tutulsun. $\text{Var}_{t_0}^T u(t) = N \max_{t_0 \leq t \leq T} \|b(t)\| = N_b$, $R = 2NN_b$

ve $\max_{x \in S_R(x^0), t \in [t_0, T]} \|f(t, x)\| = N_f$ olsun. $t_1 < t_0 + \min \left\{ T - t_0, \frac{R}{2N_f}, \frac{1}{2L(R)} \right\}$

$VB_n(t_0, t_1)$ Banach uzayında;

$$\Phi(x)(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(x(t), \tau) d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau) du(\tau) \text{ , } t \in [t_0, t_1]$$

biçiminde tanımlanan, lineer olmayan $\Phi(x)$ operatörü ele alınacak olursa $\Phi(x)$ operatörünün $B_R(x^0) = \left\{ x \in VB_n(t_0, t_1) \mid \|x(t) - x^0\|_{VB_n(t_0, t_1)} \leq R \right\}$ küresini $B_R(x^0)$ a tasvir ettiği görülür. Gerçekten de $\text{Var}_{t_0}^{t_1} u(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|du(t)\|$ olduğu gözönünde

bulundurulursa, $x(t) \in B_R(x^0) \subset VB_n(t_0, t_1)$ için;

$$\|\Phi(x) - x^0\|_{VB_n(t_0, t_1)} \leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(x(t), t)\| dt + \int_{t_0}^{t_1} \|b(t)\| \|du(t)\|$$

$$\leq N_f(t_1 - t_0) + N_b N < R$$

elde edilir. Ayrıca $\Phi(x)$, $B_R(x^0)$ küresinde büzen operatördür:

$x_1(t), x_2(t) \in B_R(x^0) \subset VB_n(t_0, t_1)$ için,

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_{VB_n(t_0, t_1)} \leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(x_1(\tau), \tau) - f(x_2(\tau), \tau)\| d\tau$$

$$\leq L(R)(t_1 - t_0) \max_{t_0 \leq \tau \leq t_1} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\|$$

$$\leq q \|x_1 - x_2\|_{VB_n(t_0, t_1)}$$

ve $q = L(R)(t_1 - t_0) < 1$. Dolayısıyla sabit nokta teoremine göre ([13]), $\Phi : B_R(x^0) \rightarrow B_R(x^0)$ büzen operatörünün bir tek sabit noktası vardır. Bu noktanın da (3.1.1) denkleminin zayıf lokal çözümü olduğu açıktır. $\square$

3.2. Sınırlı Varyasyonlu Fonksiyon İçeren Optimal Kontrol Problemi İçin Maksimum Prensibi

$f(x, t), b(t)$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in VB_1(t_0, t_1)$ olsun. *Teorem 3.1.3.* 'de aşağıdaki denklemler sisteminin tek zayıf çözümü olduğu ispatlanmıştır;

$$\dot{x} = f(x, t) + b(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n \quad (3.2.1)$$

Bu kısımda,

$$u(t) \in VB_1(t_0, t_1), \quad |u(t)| \leq 1 \quad (3.2.2)$$

olmak üzere,

$$J = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min \quad (3.2.3)$$

problemi ele alınacaktır.

J fonksiyoneli (3.2.1) sisteminin zayıf çözümleri üzerinde tanımlı bir fonksiyoneldir. $\varphi(x) \in C^1$, $t_0 = \text{sabit}$, $t_1 = \text{sabit}$ olsun.

(3.2.1)-(3.2.3) probleminin gerek koşullarını belirlemek için ;

$$H_0(x, p, u, t) = \left[p^T f_x(x, t) b(t) - p^T \dot{b}(t) \right] u$$

fonksiyonu ve

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}^T &= -p^T f_x(x(t), t) \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_1 \\ p^T(t_1) &= -\varphi_x(x(t_1)) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

eşlenik denklemler sisteminden yararlanılacaktır.

Teorem 3.2.1.

$(x(t), u(t))$ ikilisi (3.2.1)-(3.2.3) probleminin çözümü olsun. Bu durumda;

$$\max_{\tilde{u}} H_0(x(t), p(t), \tilde{u}, t) = H_0(x(t), p(t), u(t), t) \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.2.5)$$

İspat. $(x(t), p(t))$ ikilisi, (3.2.1) ve (3.2.4) denklemlerinin $u(t)$ idare edicisine göre, $(x(t) + \delta x(t), p(t) + \delta p(t))$ ise $u(t) + \delta u(t)$ idare edicisine göre zayıf çözümleri olsun. Bu durumda $H(x, p, u, t) = p^T f(x, t) + p^T b(t)u$ olmak üzere;

$$I(x(t), p(t), u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} [p^T \dot{x}(t) - H(x(t), p(t), \dot{u}(t), t)] dt = 0 \quad (3.2.6)$$

$$\Delta \equiv I(x(t) + \delta x(t), p(t) + \delta p(t), u(t) + \delta u(t)) - I(x(t), p(t), u(t)) \equiv 0 .$$

(3.2.6) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &= \int_{t_0}^{t_1} [p^T(t) \delta \dot{x}(t) + \delta p^T(t) \dot{x}(t)] dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta p^T(t) \delta \dot{x}(t) \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} [H(x(t) + \delta x(t), p(t) + \delta p(t), \dot{u}(t) + \delta \dot{u}(t)) - H(x(t), p(t), \dot{u}(t))] dt \end{aligned}$$

olur. (3.2.1) ve (3.2.4) denklemleri gözönünde bulundurulursa, $y^T = (x^T, p^T)$ ve

$$\delta \frac{\partial H(y(t), \dot{u}(t), t)}{\partial y} = \frac{\partial H(y + \delta y, \dot{u} + \delta \dot{u}, t)}{\partial y} - \frac{\partial H(y, \dot{u}, t)}{\partial y} p^T \quad \text{olmak üzere;}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[p^T(t) \delta \dot{x}(t) + \delta p^T(t) \dot{x}(t) \right] dt = p^T(t) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(y(t), \dot{u}(t), t)}{\partial y} \delta y dt$$

ve

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta p^T(t) \delta \dot{x}(t) dt = \frac{1}{2} \delta p^T(t) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \delta \frac{\partial H(y(t), \dot{u}(t), t)}{\partial y} \delta y dt$$

elde edilir. Taylor açılımını kullanılırsa ([18]); $\lim_{\|\delta y(t)\|_{C[t_0, t_1]} \rightarrow 0} \frac{o(\|\delta y(t)\|_{C[t_0, t_1]})}{\|\delta y(t)\|_{C[t_0, t_1]}} = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left[H(y(t) + \delta y(t), \dot{u}(t) + \delta \dot{u}(t), t) - H(y(t), \dot{u}(t), t) \right] dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left[H(y(t), \dot{u}(t) + \delta \dot{u}(t), t) \right. \\ &\quad \left. - H(y(t), \dot{u}(t), t) \right] dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(y(t), \dot{u}(t), t)}{\partial y} \delta y dt \\ &\quad + o(\|\delta y(t)\|_{C[t_0, t_1]}) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[p^T(t) + \frac{1}{2} \delta p^T(t) \right] \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[H(y(t), \dot{u}(t) + \delta \dot{u}(t), t) - H(y(t), \dot{u}(t), t) \right] dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H(y(t), \dot{u}(t) + \delta \dot{u}(t), t)}{\partial y} - \frac{\partial H(y(t), \dot{u}(t), t)}{\partial y} \right] \delta y dt + o(\|\delta y(t)\|_{C[t_0, t_1]}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki işlemde;

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H(y(t) + \delta y(t), \dot{u}(t) + \delta \dot{u}(t), t)}{\partial y} - \frac{\partial H(y(t), \dot{u}(t), t)}{\partial y} \right] \delta y dt = o\left(\|\delta y(t)\|_{C[t_0, t_1]}\right)$$

dır. $\delta x(t_0) = 0$, $\delta p(t_1) = 0$ olduğu gözönünde tutulursa buradan;

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H(y(t), \dot{u}(t) + \delta \dot{u}(t), t)}{\partial y} - \frac{\partial H(y(t), \dot{u}(t), t)}{\partial y} \right] \delta y dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} b(t) \delta \dot{u}(t) \delta p(t) dt \end{aligned}$$

ve $\eta_2 = o\left(\|\delta y(t)\|_{C[t_0, t_1]}\right)$ olmak üzere,

$$\varphi_x(x(t_1)) \delta x(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} [H(y(t), \dot{u}(t) + \delta \dot{u}(t), t) - H(y(t), \dot{u}(t), t)] dt + \eta_1 + \eta_2$$

eşitliğine ulaşılır. Diğer taraftan $\varphi(x)$ fonksiyonuna Taylor açılımı uygulanırsa;

$$\delta J = \varphi(x(t_1) + \delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) = \varphi_x(x(t_1)) \delta x(t_1) + o\left(\|\delta x(t_1)\|\right)$$

$$\begin{aligned} &= -\int_{t_0}^{t_1} [H(x(t), \dot{u}(t) + \delta \dot{u}(t), t) - H(x(t), \dot{u}(t), t)] dt \\ &\quad + \eta_1 + \eta_2 + o\left(\|\delta x(t_1)\|\right) \end{aligned}$$

ve $\eta = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} b^T(t) \delta \dot{u}(t) \delta p(t) dt + o\left(\|\delta x(t)\|_{C[t_0, t_1]}\right) + o\left(\|\delta y(t)\|_{C[t_0, t_1]}\right)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \delta J &= -\int_{t_0}^{t_1} [H_0(x(t), p(t), u(t) + \delta u(t), t) - H_0(x(t), p(t), u(t), t)] \\ &\quad - p(t) b(t) \delta u(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \eta \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Aşağıda $u(t)$ idare edicisine uygulanacak olan varyasyon, optimal kontrol teorisinde geometrik görüntüsünden dolayı “iğne varyasyon” olarak adlandırılır ([25]). $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ olmak üzere,

$$\delta u(t) = \begin{cases} \varepsilon, & t \in [t', t''] \\ 0, & t \notin [t', t''] \end{cases}$$

olsun. (3.1.2) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} |\delta x(t)| &\leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(x(\tau) + \delta x(\tau), \tau) - f(x(\tau), \tau)\| d\tau + \left\| \int_{t_0}^t b(\tau) d\delta u(\tau) \right\| \\ &\leq L_f \int_{t_0}^{t_1} \|\delta x(\tau)\| d\tau + \|b(\tau)\|_{C[t_0, t_1]} \text{Var}_{t_0}^{t_1} \delta u(\tau) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada L_f , f fonksiyonunun Lipschitz sabitidir. Bellman-Gronwell eşitsizliği ([25]) kullanılırsa;

$$\|\delta x(t)\|_{C[t_0, t_1]} \leq 2\varepsilon \|b(t)\|_{C[t_0, t_1]} e^{\{L_f(t_1 - t_0)\}}$$

ve benzer şekilde;

$$\|\delta p(t)\|_{C[t_0, t_1]} \leq L\varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitliklerden $\eta = o(\varepsilon)$ olduğu görülür. $u(t)$ optimal idare edici ise, $\delta J = \varphi(x(t_1) + \delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) \geq 0$ eşitsizliği sağlanmalıdır. (3.2.5) eşitliği bir $\tau_1 \in (t_0, t_1)$ noktasında sağlanmasın. $u(t)$, $x(t)$, $p(t)$ fonksiyonlarının soldan sürekliliği dolayısıyla (3.2.5) eşitliği bir $[\tau_0, \tau_1] \subset (t_0, t_1)$ aralığında da

sağlanmayacaktır ve $H^*(t) = p^T f_x(x, t)b(t) - p^T \dot{b}(t)$ fonksiyonu bu aralıkta işaretini değiştirmez. Zira $H^*(\tau_1) \neq 0$.

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \varepsilon \operatorname{sign} H^*(\tau_1), & t \in [\tau_o, \tau_1] \\ u(t), & t \notin [\tau_o, \tau_1] \end{cases}$$

olsun ve $\varepsilon > 0$ sayısı $\tilde{u}(t)$ idare edicisi (3.2.2) eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilsin. Bu durumda (3.2.7)den;

$$\delta J = - \int_{\tau_0}^{\tau_1} H^*(t) \delta u(t) dt + \eta = - \varepsilon \int_{\tau_0}^{\tau_1} |H^*(t)| dt + o(\varepsilon)$$

olup $\varepsilon > 0$ sayısı $\delta J < 0$ olacak şekilde seçilebilir. Bu $u(t)$ idare edicisinin optimalliği ile çelişir. O halde (3.2.5) eşitsizliği her noktada sağlanmalıdır. $\square$

BÖLÜM 4

GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYON İÇEREN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN DUALİTE YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

4.1. Genelleştirilmiş Fonksiyon İçeren Optimal Kontrol Probleminin Dualite Yöntemiyle Çözümü

Bu bölümde dualite yöntemlerinin dejenere olmuş optimal kontrol problemlerine uygulanması ele alınacaktır. Öncelikle faz değişkenlerine göre lineer olan optimal kontrol problemi, dualite yöntemlerinin uygulanabileceği biçime getirilecektir.

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ n boyutlu faz vektörü, $u = (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r$ idare etme vektörü, $A(t)$ $n \times n$ matris, $b(t, u)$ n boyutlu vektör, $a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$ n boyutlu vektör, $g(t, u)$ t ve u değişkenlerine bağlı bir fonksiyon, $u(t) \in U$ ve $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ olmak üzere,

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} [(a(t), x) + g(t, u)] dt \rightarrow \min \quad (4.1.1)$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t, u) \quad (4.1.2)$$

$$u(t) \in U \quad (4.1.3)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \quad (4.1.4)$$

problemi ele alınsın. $A(t)$, $b(t,u)$, $a(t)$ ve $g(t,u)$ fonksiyonlarının hangi fonksiyonel özelliklere sahip oldukları [11], [58] referanslarında açıklanmaktadır ve bu koşullarla (4.1.1)-(4.1.4) problemi birçok problemi kapsamaktadır.

$t_0 \leq t \leq t_1$ olmak üzere $u(t)$ idare edici bir fonksiyon ise (4.1.2) denkleminin $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan çözümü Cauchy formülü ile elde edilebilir. Şöyle ki; $F(t)$ matrisi $\dot{x}(t) = A(t)x$ denkleminin çözümü ise (4.1.2) denkleminin $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan çözümü;

$$x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_{t_0}^t F^{-1}(\tau) b(\tau, u(\tau)) d\tau \quad (4.1.5)$$

formülü ile verilmektedir ([25]). Bu durumda (4.1.1)-(4.1.4) problemi;

$$B(t, u) = F^{-1}(t) b(t, u) \quad (4.1.6)$$

$$f(t, u) = \left(\int_t^{t_1} F^T(\tau) a(\tau) d\tau, B(t, u) \right) + (F^T(t) a(t), x_0) + g(t, u) \quad (4.1.7)$$

($F^T(t)$, $F(t)$ matrisinin transpozesi) ve

$$z_0 = F^{-1}(t_1)x_1 - x_0 \quad (4.1.8)$$

biçiminde tanımlanmak üzere;

$$\dot{z} = B(t, u) \quad (4.1.9)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, u) dt \rightarrow \min \quad (4.1.10)$$

$$z(t_0) = 0, \quad z(t_1) = z_0 \quad (4.1.11)$$

problemine dönüşür. (4.1.9)-(4.1.11) problemi dualite yöntemlerinin uygulanabileceği şekildedir. Bu yöntemler matematik literatüründe geniş olarak yer almaktadır ([11], [25], [35], [44]).

$t \in [t_0, t_1]$ bir nokta, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ bir vektör olmak üzere,

$$h(t, p) = \sup_{u \in U} [(p, B(t, u)) - f(t, u)] \quad (4.1.12)$$

biçiminde tanımlanan $h(t, p)$ fonksiyonunun $+\infty$ değerini de alabileceği gözardı edilmeden her $t \in [t_0, t_1]$ ve her $p \in \mathbb{R}^n$ için bu şekilde $h(t, p)$ teşkil edilirse, $h: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ fonksiyonu elde edilir. Dualite yönteminin temel prensibi,

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^n} \left[(p, z_0) - \int_{t_0}^{t_1} h(t, p) dt \right] \quad (4.1.13)$$

supremumunun “hemen hemen” her z_0 için (4.1.10) fonksiyonelinin minimumu ile aynı olduğunu ifade eder ([44]). $\mathbb{R}^n$ uzayında,

$E = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists u(t) \in U, f(t, u(t)) \in L_1([t_0, t_1]), (4.1.9) \text{ denkleminin } z(t_0) = 0 \text{ koşulunu}$
sağlayan $z(t)$ çözümü $[t_0, t_1]$ aralığında tanımlanmıştır ve $z(t_1) = z_0\}$

biçiminde tanımlanan E kümesine (4.1.6)-(4.1.8), (4.1.2) probleminin efektif kümesi denir. E kümesinin önemli bir özelliği konveks olmasıdır. Bu kümenin konveksliği Luapunov’un vektör ölçüleri hakkındaki önemli teoreminden elde edilir ([3]). O halde aşağıdaki Teorem yazılabilir:

Teorem 4.1.1.

Eğer z_0 noktası E efektif kümesinin iç noktası ise (4.1.13) supremumu bir $p \in \mathbb{R}^n$ için sağlanır ve bu değer (4.1.9)-(4.1.11), (4.1.2) probleminin minimumuna eşittir.

(4.1.10) supremumunu bulma problemine (4.1.9)-(4.1.11), (4.1.2) probleminin dual problemi denir. Dualite yöntemiyle, (4.1.9)-(4.1.11) probleminde $J(u)$ fonksiyonelinin minimumu, optimal $u(t)$ idare edicisini bulmadan elde edilebilmektedir. Bunun için sadece (4.1.13) supremumunu hesaplamak yeterlidir.

(4.1.13) dual probleminin çözümü p^* olmak üzere, P kümesi

$$P = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \int_{t_0}^{t_1} h(t, p) dt < \infty\}$$

biçiminde tanımlansın ve (4.1.13) ifadesinin supremum değeri p^* için elde ediliyor olsun (supremum sonlu ise $\int_{t_0}^{t_1} h(t, p) dt > -\infty$)

Teorem 4.1.2.

Eğer p^* noktası P kümesinin iç noktası ise, (4.1.9)-(4.1.11), (4.1.2) probleminin $u^*(t)$ çözümü vardır ve aşağıdaki iki eşitlikle belirlenir;

$$\int_{t_0}^{t_1} B(t, u^*(t)) dt = z_0 \quad (4.1.14)$$

$$f(t, u^*(t)) + h(t, p^*) = (p^*, B(t, u^*(t))). \quad (4.1.15)$$

$h(t, p)$ fonksiyonun tanımından ve (4.1.15) eşitliğinden;

$$(p^*, B(t, u^*(t)) - f(t, u^*(t))) = \max_{u \in U} [(p^*, B(t, u)) - f(t, u)] \quad (4.1.16)$$

elde edilir. Bu ise (4.1.9)-(4.1.11), (4.1.2) problemi için Pontryagin'in maksimum prensibinin ifadesidir.

Gerçekten de; $u^*(t)$ fonksiyonu (4.1.1)-(4.1.4) probleminin çözümü olsun. Bu durumda (4.1.16) eşitliğinde $B(t, u)$ ve $f(t, u)$ fonksiyonlarının (4.1.6) ve (4.1.7)'deki ifadeleri yerlerine konursa;

$$\begin{aligned} (p^*, B(t, u^*(t)) - f(t, u^*(t))) &= \max_{u \in U} \left[(p^*, F^{-1}(t)b(t, u)) - \left(\int_t^{t_1} F^T(\tau) a(\tau) d\tau, B(t, u) \right) - g(t, u) \right] \\ &\quad + (F^T(t)a(t), x_0) \\ &= \max_{u \in U} \left[\left((F^{-1}(t))^T p^* - (F^{-1}(t))^T \int_t^{t_1} F^T(\tau) a(\tau) d\tau, b(t, u) \right) - g(t, u) \right] \\ &\quad + (F^T(t)a(t), x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. $\psi(t)$ fonksiyonu;

$$\psi(t) = (F^{-1}(t))^T p^* - (F^{-1}(t))^T \int_t^{t_1} F^T(\tau) a(\tau) d\tau \quad (4.1.17)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $F(t)$ matrisinin $\dot{x}(t) = A(t)x$ denkleminin çözümü olduğu da kullanılırsa;

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t) + a(t) \quad (4.1.18)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Ayrıca (4.1.16) eşitliğinden;

$$(\psi(t), b(t, u^*(t)) - g(t, u^*(t))) = \max_{u \in U} [(\psi(t), b(t, u)) - g(t, u)] \quad (4.1.19)$$

olup (4.1.18) ve (4.1.19) eşitlikleri (4.1.1)-(4.1.4) problemi için Pontryagin'in maksimum prensibinin ifadesidir. p^* vektörünün P kümesinin iç noktası olmadığı durumda (4.1.9)-(4.1.11), (4.1.2) probleminde, genelde, optimal idare edicinin var olduğu söylenemez. Fakat bu durumda problem “genelleşmiş” fonksiyon olan δ -fonksiyonunun yardımıyla çözülebilir. $B(t, u) \equiv B(t)u$ olarak kabul edilecektir. $\delta(t - \tau)$ fonksiyonu her $\varphi(t) \in C[a, b]$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\int_a^b \varphi(t) \delta(t - \tau) dt = \begin{cases} \varphi(t) & \tau \in [a, b] \\ 0 & \tau \notin [a, b] \end{cases}$$

$v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \in [t_0, t_1]$ olmak üzere,

$$v(t) = u(t) + \sum_{i=1}^k v_i \delta(t - \tau_i) \quad (4.1.20)$$

biçiminde “genelleştirilmiş” idare edicileri ele alalım. Bu şekildeki her idare edici (4.1.9) denkleminin;

$$z(t) = \int_{t_0}^t B(t) v(t) dt$$

biçiminde bir çözümünü belirler. (4.1.9) denkleminin $u(t)$ idare edicisine karşılık gelen çözümü sürekli bir fonksiyondur. Buna karşılık $v(t)$ genelleştirilmiş idare edicisine karşılık gelen $z(t)$ fonksiyonu, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ noktalarında süreksiz olan ve bu noktalarda sıçrayışları $v_1, v_2, \dots, v_k$ olan bir fonksiyondur.

P_τ kümesi ve s_τ fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlansın;

$$P_\tau = \{p \in \mathbb{R}^n \mid h(t, p) < \infty\}$$

$$s_{\tau}(v) = \sup_{p \in P_{\tau}}(p, v).$$

Bu durumda (4.1.10) fonksiyoneli (4.1.20) idare edicisi üzerinde tanımlanırsa;

$$J(v) = J(u) + \sum_{i=1}^k s_{\tau_i}(v_i) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, u(t)) dt + \sum_{i=1}^k s_{\tau_i}(v_i) \quad (4.1.21)$$

$J(v) < \infty$ olduğu takdirde $\lim_{m \rightarrow \infty} J(u_m) = J(v)$ olacak biçimde $\{u_m(t)\}$ idare ediciler dizisi vardır ve her $t \in [t_0, t_1]$ için;

$$z_m(t) = \int_{t_0}^t B(\tau) u_m(\tau) d\tau \rightarrow z(t) = \int_{t_0}^t B(\tau) v(\tau) d\tau$$

olur. Ayrıca z_0 noktası (4.1.9)-(4.1.11), (4.1.2) probleminin efektif kümesinin iç noktası ve $z(t_1) = z_0$ ise $\{u_m(t)\}$ dizisi $z_m(t_1) = z_0$ olacak biçimde seçilebilir ([25]).

Böylece (4.1.9)-(4.1.11), (4.1.2) problemi (4.1.21) fonksiyonelinin aşağıdaki koşula uyan $v(t)$ fonksiyonları üzerindeki minimum problemine eşdeğer olur;

$$\int_{t_0}^{t_1} B(t) v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} B(t) u(t) dt + \sum_{i=1}^k B(\tau_i) v_i = z_0 \quad (4.1.22)$$

Teorem 4.1.3.

(4.1.13) supremum ifadesinde supremum p^* noktasında gerçekleşiyorsa; $v^*(t) = u^*(t) + \sum_{i=1}^k v_i^* \delta(t - \tau_i)$ idare edicisinin (4.1.20) - (4.1.22) probleminde optimal olabilmesi için gerek ve yeter şart $v^*(t)$ fonksiyonunun (4.1.22) eşitliğini ve aşağıdaki koşulları sağlamasıdır;

$$f(t, u^*(t)) + h(t, p^*) = (p^*, B(t)u^*(t)) \quad (4.1.23)$$

$$(p^*, B(\tau_i)v_i^*) \geq (p^*, B(\tau_i)v) \quad , \quad \forall v \in P_{\tau_i} \quad i=1, \dots, k. \quad (4.1.24)$$

(4.1.18) koşulunda $v_i^* \neq 0$ ise $p^* \notin \text{int } P_{\tau_i}$ olur ve $p^* \in \text{int } P$ ise *Teorem 4.1.3.* ,

Teorem 4.1.2.'ye indirgenmiş olur. $p^* \notin \text{int } P_{\tau_i}$ koşulunu sağlayan τ_i noktaları kritik anlar olarak adlandırılacaktır.

4.2. Genelleştirilmiş Weierstrass Örneği

Aşağıdaki problem ele alınacaktır;

$$J(u) = \int_0^1 t^\alpha \frac{|u|^\beta}{\beta} dt \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (4.2.1)$$

$$\dot{z} = u \quad , \quad z(0) = 0 \quad , \quad z(1) = z_0 \quad , \quad u \in \square$$

Bu problemde efektif küme $\square$ ile çakıştığından *Teorem 4.1.1.* kullanılabilir. (z_0 iç noktadır). $h(t, p)$ fonksiyonu hesaplanırsa;

$$h(t, p) = t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \frac{|p|^{\beta'}}{\beta'} \quad , \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$$

elde edilir. $p \neq 0$ ise $h(t, p)$ fonksiyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\alpha < \beta - 1$ olmasıdır.

i) $\alpha < \beta - 1$ ise;

$$\int_0^1 h(t, p) dt = \frac{\beta - 1}{\beta - 1 - \alpha} \frac{|p|^{\beta'}}{\beta'}$$

$$\max_p \left(pz_0 - \int_0^1 h(t, p) dt \right) = \left(\frac{\beta - 1 - \alpha}{\beta - 1} \right)^{\beta-1} \frac{|z_0|^\beta}{\beta}$$

olur ve maksimum değer;

$$p^* = \left(\frac{\beta - 1 - \alpha}{\beta - 1} |z_0| \right)^{\beta-1} \text{sign } z_0$$

noktasında elde edilir. Bu durumda P kümesi reel doğru ile çakıştığından p^* noktası içi nokta olur ve *Teorem 4.1.2.*'ye göre $u^*(t)$ optimal idare edici;

$$\int_0^1 u^*(t) dt = z_0, \quad p^* u^*(t) - f(t, u^*(t)) = h(t, p^*)$$

eşitliklerinden belirlenebilir ki bu idare edici;

$$u^*(t) = t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} |p^*|^{\beta'-1} \text{sign } p^* = z_0 \frac{\beta - 1 - \alpha}{\beta - 1} t^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

fonksiyonudur.

ii) $\alpha \geq \beta - 1$ ise bu durumda $h(t, p)$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğu bir tek $p = 0$ noktası vardır:

$$\int_0^1 h(t, p) dt = \begin{cases} 0 & , p = 0 \\ \infty & , p \neq 0 \end{cases}$$

Teorem 4.1.1.'e göre fonksiyonelin infimumu (4.1.13) supremumuna eşittir ve her z için sıfırdır, $p^* = 0$. P kümesi ise tek bir noktadan oluşmaktadır: $P = \{0\}$.

Bu durumda Teorem 4.1.3. uygulanırsa, her $\tau \neq 0$ için $P_\tau = P$, $P_0 = \{0\}$. O halde $\tau = 0$ olmak üzere tek kritik nokta vardır ve optimal idare edici; $v^*(t) = u^*(t) + v^* \delta(t)$ biçiminde aranır. (4.1.23) eşitliğinden $f(t, u^*(t)) = 0$ elde edilir ve $u^*(t) = 0$ olur. (4.1.24) koşulu da sağlanmaktadır. (4.1.22) eşitliğinden $v^* = z_0$ ve böylece $v^*(t) = z_0 \delta(t)$ genelleştirilmiş idare edicisi (4.2.1) probleminin çözümüdür.

BÖLÜM 5

BANACH UZAYLARINDA MİNİMUM PROBLEMİNE SONLU BOYUTLU YAKLAŞIM

5.1. Banach Uzaylarında Minimum Problemine Sonlu Boyutlu Yaklaşım

X bir Banach uzayı, X^* bu uzayın eşleniği, yani X uzayında tanımlı sürekli lineer fonksiyonellerin oluşturduğu lineer uzay olsun. $f \in X^*$ olmak üzere,

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \quad (5.1.1)$$

biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyoneli X^* eşlenik uzayında bir norm tanımlar ve X^* bu norma göre bir Banach uzayıdır.

X bir lineer uzay, X^* ise bu uzayın cebirsel duali, yani X uzayında tanımlı tüm lineer fonksiyonellerin oluşturduğu lineer uzay olsun. X^* lineer uzayının cebirsel duali de benzer şekilde oluşturulabilir. $X^{**} = (X^*)^*$ uzayına da X lineer uzayının ikinci cebirsel duali denir. X ve X^{**} uzayları arasında doğal bir bağlantı vardır. Şöyle ki; $x \in X$, $f \in X^*$, $g \in X^{**}$ olmak üzere;

$$g(f) = g_x(f) = f(x) \quad (5.1.2)$$

eşitliğinde $x \in X$ sabit tutulup $f \in X^*$ ise değişken olarak düşünülürse her $x \in X$ elemanı X^{**} uzayının bir $g_x \in X^{**}$ elemanı ile eşleştirilebilir. $\Pi: X \rightarrow X^{**}$, $\Pi(x) = g_x$ veya $x \mapsto g_x$ olmak üzere Π tasviri her zaman birebirdir. Bu tasvir aynı zamanda üzerine ise, yani $\Pi(X) = X^{**}$ ise X uzayına “cebirsel refleksif (yansımali) uzay” denir. Tüm sonlu boyutlu uzaylar refleksiftir.

X uzayı bir normlu uzay ise cebirsel refleksifliğin yanısıra topolojik refleksiflik de söz konusudur. X^* normlu uzayının eşleniği, $X^{**} = (X^*)^*$ uzayına da X normlu uzayının ikinci duali denir. $x \in X$ sabit tutulmak üzere ve $f \in X^*$ için $g_x: X^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g_x(f) = f(x)$ fonksiyoneli lineer ve süreklidir. Ayrıca $\|g_x\| = \|x\|$ eşitliği sağlanır. $\Pi: X \rightarrow X^{**}$, $\Pi(x) = g_x$ olmak üzere bu Π tasvirine X uzayından X^{**} uzayına “kanonik tasvir” denir. Π tasviri X normlu uzayından $\Pi(X)$ görüntü kümesine bir izomorfizmdir.

Tanım 5.1.1.

X bir normlu uzay, X^{**} bu uzayın ikinci duali ve $\Pi: X \rightarrow X^{**}$ kanonik tasvir olmak üzere $\Pi(X) = X^{**}$ ise X uzayına “refleksif uzay” denir.

Tüm sonlu boyutlu uzaylar, Hilbert uzayları, $1 < p < \infty$ olmak üzere L_p uzayları refleksiftir. Refleksif uzaylarda $B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ birim küresi zayıf topolojiye göre kompakttır. Ayrıca her sınırlı dizinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır.

X refleksif bir Banach uzayı, $U \subset X$ boş olmayan, kapalı konveks bir alt küme, $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli konveks ve alttan yarı sürekli olsun. Her $x \in U$ için $F(x) \neq -\infty$ olmak üzere aşağıdaki minimizasyon problemi ele alınacaktır:

$$F(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U \quad (5.1.3)$$

$F(u) = \inf_{v \in U} F(v)$ eşitliğine uyan her $u \in U$ (5.1.3) probleminin çözümüdür. (5.1.3)

problemi yerine, $\hat{F}: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli;

$$\hat{F} = \begin{cases} F(u) & u \in U \\ +\infty & u \notin U \end{cases} \quad (5.1.4)$$

biçiminde tanımlanmak üzere,

$$\hat{F}(u) \rightarrow \inf, \quad u \in X \quad (5.1.5)$$

problemi ele alınabilir. Bu iki problem eşdeğerdir, yani her iki problemin çözüm kümeleri ve infimum değerleri aynıdır. (5.1.4) ile tanımlanan $\hat{F}$ fonksiyoneli de konveks ve alttan yarı süreklidir.

Teorem 5.1.2.

U kümesi sınırlı veya $u \in U$, F fonksiyoneli için; $u \in U$, $\|u\| \rightarrow +\infty$ ise $\lim F(u) = +\infty$ (coercive) olsun. Bu durumda (5.1.3) probleminin en az bir çözümü vardır. Eğer F fonksiyoneli kesin konveks ise bu çözüm tektir.

İspat. $\{u_n\} \subset U$ minimize eden bir dizi, yani $F(u_n) \rightarrow \inf_{v \in U} F(v) = \alpha$ olsun. $\alpha \in [-\infty, \infty]$ fakat $\alpha \neq -\infty$ olduğu gösterilecektir. Eğer U kümesi sınırlı ise $\{u_n\} \subset U$ dizisi de sınırlıdır. Eğer U kümesi sınırlı değil ancak F fonksiyoneli coercive ise, $F(u_n)$ dizisinin üstten sınırlılığından $\{u_n\} \subset U$ dizisi yine sınırlı olur. X refleksif uzay olduğundan $\{u_n\}$ dizisinin bir $u \in U$ elemanına zayıf yakınsak bir $\{u_{n_i}\}$ alt dizisi vardır. Konveks ve alttan yarı sürekli F aynı zamanda X uzayının zayıf topolojisine göre de alttan yarı süreklidir. O halde $F(u) \leq \lim_{n_i \rightarrow \infty} F(u_{n_i}) = \alpha$ olur.

Yani u çözümdür ve $\alpha \neq -\infty$. Eğer F fonksiyoneli kesin konveks ve $u_1, u_2 \in U$ iki farklı çözüm ise (yani $F(u_1) = F(u_2) = \alpha$) $\frac{u_1 + u_2}{2} \in U$ da çözümdür, fakat aynı zamanda,

$$F\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right) < \frac{1}{2}(F(u_1) + F(u_2)) = \alpha \quad (5.1.6)$$

eşitsizliği geçerli olduğundan çelişkiye ulaşılır. O halde F fonksiyoneli kesin konveks ise bu çözüm tektir. $\square$

Aşağıdaki lemma, sonlu boyutlu uzaylarda kolaylıkla ispatlanabilen bir sonucun Banach uzaylarına genellemesidir:

Lemma 5.1.3.

X bir Banach uzayı, $A \subset X$ konveks bir küme, $\text{int } A \neq \emptyset$, $y_0 \in \text{int } A$ olsun. Eğer $y \in \bar{A}$ ise, $(y_0, y) = \{z \mid z = (1-t)y + ty_0, t \in (0,1)\}$ açık aralığının her noktası, A kümesinin iç noktasıdır.

İspat. $z \in (y_0, y)$ açık aralığının herhangi bir noktası olsun. Bu durumda;

$$z = (1-t)y + ty_0 = y + t(y_0 - y), \quad t \in (0,1) \quad (5.1.7)$$

$f : X \rightarrow X$ olmak üzere $g \mapsto f(g)$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlansın,

$$f(g) = z + \lambda(g - z), \quad \lambda = -\frac{t}{1-t} \quad (5.1.8)$$

Bu fonksiyon süreklidir, tersi vardır ve aşağıdaki şekildedir;

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda}(y + (\lambda - 1)z).$$

Bu ters fonksiyon da süreklidir. $g \mapsto f(g)$ fonksiyonunun hem kendisi hem de tersi sürekli olduğundan $f: X \rightarrow X$ bir homomorfizmdir. Ayrıca (5.1.7) ve (5.1.8) eşitliklerinden, $f(y_0) = y$ olduğu görülür. $f: X \rightarrow X$ bir homomorfizm olduğundan $y_0 \in Q \subset A$ bir açık küme ise $f(Q)$ kümesi de X uzayında bir açık kümedir ([13]). $y \in f(Q)$ ve öyle bir $h \in Q$ bulunabilir ki $f(h) \in A$ olsun. Gerçekten de, γ yeterince küçük pozitif bir sayı ise (5.1.7) eşitliğinden; $q = y + \gamma(y_0 - y) \in f(Q)$, $q \in A$. O halde $h = f^{-1}(q)$ alınabilir. (5.1.8) eşitliği de gözönünde bulundurulursa;

$$f(h) - z = \lambda(h - z) = \lambda(h - f(h)) + \lambda(f(h) - z) \quad (5.1.9)$$

ve buradan,

$$z = f(h) + \frac{\lambda}{\lambda - 1}(h - f(h)) \quad (5.1.10)$$

elde edilir. φ tasviri aşağıdaki biçimde tanımlansın;

$$g \mapsto \varphi(g) = f(h) + \frac{\lambda}{\lambda - 1}(g - f(h)) \quad (5.1.11)$$

Bu durumda (5.1.10) eşitliği gözönüne alınırsa z , h fonksiyonun φ tasviri altındaki görüntüsüdür. Ayrıca $\lambda < 0$ olduğundan,

$$0 < \frac{\lambda}{\lambda - 1} < 1 \quad (5.1.12)$$

olur. O halde $g \mapsto \varphi(g)$ fonksiyonu X uzayından X uzayına bir homomorfidir ve $\varphi(Q) \subset X$ açık kümedir ve $h \in Q$ için $z \in \varphi(Q)$ dir. $g \in Q$ herhangi bir nokta olsun. $f(h) \in A$ ve A konveks olduğundan, (5.1.11) ve (5.1.12) ifadelerinden

$\varphi(g) \in A$ ve dolayısıyla $\varphi(Q) \subset A$ elde edilir. O halde z , A kümesinin iç noktasıdır. $\square$

Sonlu Boyutlu Yaklaşım:

X refleksif, ayrılabilir bir Banach uzayı olsun. Ayrıca X uzayında her $w \in X$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in X_n} \|u - w\|_X = 0 \quad (5.1.13)$$

şartını sağlayan $\{X_n\}$ sonlu boyutlu alt uzaylar dizisi var olsun.

$$J(v) \rightarrow \inf, \quad v \in U_d$$

problemi yerine,

$$u_n \in X_n \cap U_d, \quad J(u_n) = \inf_{v \in X_n \cap U_d} J(v) \quad (5.1.14)$$

problemi ele alınsın.

Teorem 5.1.4.

X refleksif, ayrılabilir bir Banach uzayı, $\{X_n\}$ (5.1.13) koşulunu sağlayan sonlu boyutlu alt uzaylar dizisi ve $\text{int } U_d \neq \emptyset$ olsun. *Lemma 5.1.3.*'ün koşulları sağlanıyorsa, yeterince büyük n sayısı için (5.1.14) probleminin u_n çözümü vardır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{v \in U_d} J(v) \quad (5.1.15)$$

olur.

İspat. $u \in U$ yani $u \in U_d$ ve $J(u) = \inf_{v \in U_d} J(v)$ olsun. $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, $t_i \in (0,1)$ ve $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = 0$

alınacak olursa *Lemma 5.1.3.*'e göre,

$$z_i = u + t_i(g - u) \in \text{int } U_d, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|z_i - u\|_X = 0 \quad (5.1.16)$$

yazılabilir. O halde her $\varepsilon > 0$ sabit sayısı için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bazı $i = i_\varepsilon$ vardır;

$$\|z_{i_\varepsilon} - u\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.1.17)$$

$z_{i_\varepsilon} \in \text{int } U_d$ olduğundan,

$$d(\gamma, z_{i_\varepsilon}) = \{v \mid v \in X, \|v - z_{i_\varepsilon}\| \leq \gamma\} \quad (5.1.18)$$

olmak üzere bazı $\gamma > 0$ sabit sayıları için

$$0 < \gamma \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(\gamma, z_{i_\varepsilon}) \subset U_d \quad (5.1.19)$$

olur. (5.1.7) koşuluna göre $\exists l > 0$ vardır ki, her $n \geq l$ için

$$\|g_n - z_{i_\varepsilon}\| \leq \gamma \quad (5.1.20)$$

eşitsizliğini sağlayan $g_n \in X_n$ elemanı vardır. (5.1.17) ve (5.1.20) eşitsizliklerinden her $n \geq l$ için;

$$\|g_n - u\| \leq \|g_n - z_{i_\varepsilon}\| + \|z_{i_\varepsilon} - u\| \leq \varepsilon$$

ve dolayısıyla $g_n \in U_d$ elde edilir. O halde öyle $\{g_n\}$ dizisi vardır ki;

$$g_n \in X_n \cap U_d, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - u\| = 0 \quad (5.1.21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n) = J(u) = \inf_{v \in U_d} J(v) \quad (5.1.22)$$

sağlanır. $n \geq l$ için $X_n \cap U_d \neq \emptyset$ ayrıca $X_n \cap U_d$ kompakt, $v \mapsto J(v)$ sürekli olduğundan (5.1.14) probleminin çözümü vardır ([25]). Bu çözüm u_n olsun. Bu durumda;

$$J(g_n) \geq J(u_n) \geq J(u) \quad (5.1.23)$$

(5.1.22) ve (5.1.23) den ise (5.1.15) eşitliği elde edilir. $\square$

BÖLÜM 6

KUADRATİK OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN İKİNCİ MERTEBEDEN BİR KOŞUL

6.1. Kuadratik Optimal Kontrol Problemi İçin İkinci Mertebeden Bir Koşul

Bu bölümde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ sütun vektörler olmak üzere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ biçiminde kullanılacaktır. A, B, C, Q ve R t değişkenine bağlı matrisler, S_f sabit matris ve bu matrislerden Q, R, S_f simetrik matris olsun. Ayrıca $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto Q(t)$, $t \mapsto R(t)$, matris fonksiyonları $C^1[t_0, t_1]$ uzayından, $t \mapsto B(t)$, $t \mapsto C(t)$, matris fonksiyonları $C^2[t_0, t_1]$ uzayından olsun.

Gösterim kolaylığı açısından; $\alpha = (\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^n, \alpha_2^1, \alpha_2^2, \dots, \alpha_2^m)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ vektörü $\alpha = (\alpha_1^T | \alpha_2^T)$ biçiminde gösterilecektir. $n \times n$ boyutlu X matrisi, $n \times m$ boyutlu Y matrisi, $m \times n$ boyutlu Z matrisi ve $m \times m$ boyutlu T matrisinden oluşan birleştirilmiş matris $B = \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & T \end{array} \right)$ biçiminde ve bu matrisin doğurduğu kuadratik form $(\alpha_1^T | \alpha_2^T) \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & T \end{array} \right) (\alpha_1 | \alpha_2)$ olarak gösterilecektir. Bu kabuller altında, aşağıdaki problem ele alınacaktır:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} x^T Q x + u^T C x + \frac{1}{2} u^T R u \right\} dt + \frac{1}{2} x^T(t_1) S_f x(t_1) \quad (6.1.1)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.1.2)$$

$$x(t_1) = 0 \quad (6.1.3)$$

Teorem 6.1.1.

(6.1.1) eşitliği ile verilen J fonksiyonelinin negatif olmaması için yeterli şart, sürekli türevlenebilir, simetrik ve her $t \in [t_0, t_1]$ için;

$$\left(\frac{\dot{P} + Q + PA + A^T P}{C + B^T P} \middle| \frac{(C + B^T P)^T}{R} \right) \geq 0, \quad (6.1.4)$$

ve

$$S_f - P(t_1) \geq 0 \quad (6.1.5)$$

koşullarını sağlayan bir $t \mapsto P(t)$ matris fonksiyonunun varlığıdır.

İspat. (6.1.2) eşitliğinden $\frac{1}{2} x^T P(Ax + Bu - \dot{x}) = 0$ dır. Dolayısıyla bu ifade (6.1.1)

fonksiyoneline eklenirse değeri değişmez. O halde;

$$J = \hat{J} = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} x^T Q x + u^T C x + \frac{1}{2} u^T R u + \frac{1}{2} x^T P(Ax + Bu - \dot{x}) \right\} dt + \frac{1}{2} x^T(t_1) S_f x(t_1).$$

$x^T P \dot{x}$ terimine kısmi integrasyon uygulanır ve düzenlenirse;

$$\hat{J} = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} x^T (\dot{P} + Q + PA + A^T P) x + u^T (C + B^T P) x + \frac{1}{2} u^T R u \right\} dt + \frac{1}{2} x^T(t_1) (S_f - P(t_1)) x(t_1)$$

elde edilir. Bu ifadenin negatif olmaması için ise (6.1.4) ve (6.1.5) eşitsizliklerinin sağlanması yeterlidir. $\square$

Teorem 6.1.2.

Her $t \in [t_0, t_1]$ için $R(t) > 0$ olsun. Bu durumda (6.1.1) eşitliği ile verilen J fonksiyonelinin negatif olmaması için yeterli şart, sürekli türevlenebilir, simetrik ve her $t \in [t_0, t_1]$ için;

$$-\dot{S} = Q + SA + A^T S - (C + B^T S)^T R^{-1} (C + B^T S), \quad (6.1.6)$$

ve

$$S_f - S(t_1) \geq 0 \quad (6.1.7)$$

koşullarını sağlayan bir $t \mapsto S(t)$ matris fonksiyonunun varlığıdır.

İspat. (6.1.6) ve (6.1.7) koşullarını sağlayan $t \mapsto S(t)$ matris fonksiyonunun varlığından yola çıkılarak *Teorem 6.1.1.*'in koşullarının sağlandığı gösterilirse *Teorem 6.1.2.* ispatlanmış olur. Bu amaçla $\alpha = (\alpha_1^T | \alpha_2^T)$ vektörünün α_1 bileşeni sabit tutularak,

$$(\alpha_1^T | \alpha_2^T) \left(\frac{\dot{S} + Q + SA + A^T S}{C + B^T S} \middle| \frac{(C + B^T S)^T}{R} \right) (\alpha_1 | \alpha_2) \quad (6.1.8)$$

kuadratik formunun α_2 değişkenine göre minimum problemi ele alınırsa, minimum $\alpha_2 = -R^{-1}(C + B^T S)\alpha_1$ değeri için elde edilir ve (6.1.8) kuadratik formunun minimum değeri de buradan;

$$\alpha_1^T [\dot{S} + Q + SA + A^T S - (C + B^T S)^T R^{-1} (C + B^T S)] \alpha_1$$

olarak bulunur. (6.1.6) eşitliği sağlanıyorsa bu kuadratik formun minimum değeri her α_1 için sıfır olmalıdır. O halde,

$$\left(\frac{\dot{S} + Q + SA + A^T S}{C + B^T S} \middle| \frac{(C + B^T S)^T}{R} \right) \geq 0$$

olup (6.1.7) koşuluyla birlikte *Teorem 6.1.1.*'in koşulları sağlanmış olur. Yani J fonksiyoneli negatif değildir. $\square$

BÖLÜM 7

KUADRATİK FONKSİYONELLERİN KENDİNE EŞLENİK NOKTALARI

7.1. Kuadratik Fonksiyonellerin Kendine Eşlenik Noktaları

$$J = \int_0^b (R(t)x'^2 - P(t)x^2) dt$$

kuadratik fonksiyonelinin Euler-Jacobi denklemi olan

$$\frac{d}{dt}(R(t)x'(t)) + P(t)x = 0 \quad (7.1.1)$$

denklemini, $R(t), P(t) \in C(0, \infty)$ ve $R(t) > 0$, $x \in (0, \infty)$ şartları altında $t = 0$ noktası etrafında sonsuz salınımlı olması araştırılacaktır.

Tanım 7.1.1

(7.1.1) denkleminin $t = 0$ noktası etrafında sonsuz kez sıfıra çevrilen çözümü varsa, $t = 0$ noktasına kendine eşlenik denir.

Kendine eşlenik noktanın varlığı verilen kuadratik fonksiyonelin minimum problemi ile çok yakından ilgilidir. Eğer $[a, b]$ parçası verilen fonksiyonelin kendine eşlenik noktasını içeriyorsa, bu fonksiyonelin minimum değeri $-\infty$ olacaktır. O halde bir kuadratik fonksiyonelin kendine eşlenik noktasının varlığını belirlemek, bu fonksiyonelin minimum değerinin bulunması açısından büyük önemi vardır. Bu bölümde kuadratik fonksiyonelin kendine eşlenik noktası için bir yeter şart ortaya konmuştur.

(7.1.1) denkleminde $P(t)$ fonksiyonu $t = 0$ noktası etrafında pozitif olsun:

$$\exists \delta > 0 \quad P(t) > 0 \quad , \quad 0 < t < \delta \quad (7.1.2)$$

Bu durumda (7.1.1) denkleminin singular olduğu durum ele alınırsa,

$$\int_0^1 \frac{dt}{R(t)} = +\infty \quad , \quad \int_0^1 P(t) dx = +\infty \quad , \quad (7.1.3)$$

aşağıdaki teorem yazılabilir:

Teorem 7.1.2

(7.1.1) denklemi (7.1.2) ve (7.1.3) şartlarını sağlıyorsa, bu denklemin her çözümü $(0,1)$ aralığında sonsuz kez sıfıra çevrilir ve $t = 0$ kendine eşlenik noktadır.

İspat. Teoremin hükmü geçerli olmasın. Şöyle ki, öyle bir $\delta > 0$ olsun ki $(0, \delta)$ aralığında $x(t) > 0$. (7.1.1) denkleminin her iki tarafı $x(t)$ ile bölünürse; $0 < t < \delta$ için,

$$\frac{(R(t)x')'}{x(t)} + P(t) = 0$$

ve (t, δ) aralığında integrallenirse;

$$\int_t^\delta \frac{(R(t)x')'}{x(t)} dt + \int_t^\delta P(t) dt = 0$$

ve kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$R(t) \frac{x'(t)}{x(t)} = R(\delta) \frac{x'(\delta)}{x(\delta)} + \int_t^\delta R(t) \frac{x'^2(t)}{x^2(t)} dt + \int_t^\delta P(t) dt$$

eşitliği elde edilir.

$t = 0$ noktası etrafında; $-(R(t)x'(t))' = P(t)x(t) > 0$ olur. Bu durumda, $(R(t)x'(t))' < 0$, dolayısıyla; $\int_t^\delta (R(t)x'(t))' dt < 0$, yani $R(\delta)x'(\delta) - R(t)x'(t) < 0$ eşitsizliği sağlanır. Buradan;

$$x'(t) > \frac{R(\delta) x'(\delta)}{R(t)}$$

bulunur. Bu eşitsizlik integrallenirse;

$$\int_t^\delta x'(t) dt > \int_t^\delta \frac{R(\delta) x'(\delta)}{R(t)} dt \quad \Leftrightarrow \quad x(\delta) - x(t) > R(\delta) x'(\delta) \int_t^\delta \frac{dt}{R(t)}$$

ve $t \rightarrow 0^+$ iken $\int_t^\delta \frac{dt}{R(t)} \rightarrow +\infty$ olacağından son eşitsizlikle çelişir. O halde $(0, \delta)$ aralığında $x(t) > 0$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı yoktur. $t = 0$ kendine eşlenik noktadır. $\square$

Örneğin, $\ddot{x} + \frac{5}{4t^2} x = 0$ denklemi ele alınacak olursa $R(t) \equiv 1$, $P(t) = \frac{5}{4t^2}$

olup $\int_0^1 \frac{dt}{R(t)} = 1 < +\infty$ dur ve (7.1.2) şartı sağlanmaz. Fakat bu denklemin lineer

bağımsız çözümleri $x_1(t) = \sqrt{t} \sin(\log t)$ ve $x_2(t) = \sqrt{t} \cos(\log t)$ fonksiyonlarıdır ve bu çözümlerin herbiri $t = 0$ noktası etrafında sonsuz kez sıfıra çevrilir.

Dolayısıyla $t = 0$ kendine eşlenik noktadır. O halde (7.1.2) koşulu $t = 0$ noktasının kendine eşlenik nokta olabilmesi için yeter koşuldur.

SONUÇ

Bu çalışmada direkt yöntemler, $J(x) = \int_a^b (Px^2 + R\dot{x}^2) dt$ fonksiyoneline uygulanarak önce çok değişkenli;

$$J_{n-1} = \sum \left[P_i x_i^2 + R_i \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \right)^2 \right] \Delta t$$

fonksiyonu oluşturulmuş ve J_{n-1} kuadratik formu özel bir yöntemle kareler toplamı biçiminde yazılmıştır. Daha sonra $J(x)$ kuadratik formu,

$$J(x) = \int_a^b R \frac{(x\dot{h} - h\dot{x})^2}{h^2} dt$$

biçiminde gösterilmiştir. Böylece Varyasyon hesabının temel koşulu olan Jacobi koşulu direkt yöntemlerin yardımıyla ispatlanmıştır. Sergilediğimiz bu yaklaşımın varyasyon probleminin pratik çözümü açısından önemi açıktır.

Genelleştirilmiş örneklerin detaylı olarak incelenmesiyle elde edilen sonuçlar,

$$J(x) = \int_0^1 (Px^2 + R\dot{x}^2) dt$$

biçiminde olan genel fonksiyonelin incelenmesinde önemli rol oynayabilir.

Ayrıca dualite yöntemiyle çözülen örnek, sonlu sayıda noktada güçlendirilmiş Legendre koşulunu sağlamayan (dejenere olmuş) daha genel problemlerin çözümüne katkı sağlayabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Akhiezer N. I., (1962), The Calculus of Variations, Blaisdell.
- [2] Alekseev V. M., Tichomirov V. M., (1981), The Lagrange principle and optimal control problems, Moscow State Univ. Press., Moscow.
- [3] Arkin V. L., Levin V. L., (1972), "Convexity of values of vector integrals, theorems on measurable choice and variational problems", *Uspechi Matemat. Nauk*, (V.27), 21-77.
- [4] Blackwell D., (1951), "The range of certain convex integrals", *Proc. Amer. Math. Soc.*, (V.2), 390-395.
- [5] Bellman R., (1957), Dynamic Programming, Princeton University Press.
- [6] Bliss G., (1925), Calculus of Variations, Math. Assoc. Amer.
- [7] Bolza O., (1946), Lectures on the Calculus of Variations, Stechert.
- [8] Carathéodory C., (1965), Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Eng. Transl., Holden Day.
- [9] Cesari L., (1965), "Existence theorems for optimal solutions in Pontryagin and Lagrange problems", *J. SIAM Contr.*, (V.3), 475-498.
- [10] Cesari L., (1966), "Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints" *I,II Trans. Amer. Math. Soc.*, (V.124), 369-412, 413-430.
- [11] Cesari L., (1983), Optimization Theory and Applications, Springer-Verlag, New York.
- [12] Cesari L., Brandi P. and Salvatory A., (1987), "Existence theorems concerning simple integrals of calculus of variation for discontinuous solutions", *Arch. Ration Mech. And Anal.*, (V.98 N.4), 307-328.
- [13] Dunford N. and Schwartz J.T., (1958), Linear Operators, Interscience Publishers, a division of John Wiley & New York (I)
- [14] Ekeland I., (1979), "Nonconvex minimization problems" *Bull. Amer. Math. Anal.*, (V.1 N.2), 443-447.
- [15] Fleming W. H., and Rishel R. W., (1975), Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, New York.

- [16] Gelfand I. M. and Fomin S. V., (1963), *Calculus of Variations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [17] Graves L. M., (1931), "On the problem of Lagrange" *Amer. J. Math.*, (V.13), 547-554.
- [18] Graves L. M., (1946), *The Theory of Functions of Real Variables*, McGraw-Hill.
- [19] Greub W., (1975), *Linear Algebra*, Springer Verlag, New York.
- [20] Goh B. S., (1966), "The second variation for singular Bolza problem", *SIAM J. Contr.*, (V.4 N.2), 309-325.
- [21] Halkin H. and Neustadt L. W., (1966), "General necessary conditions for optimization problems", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, (V.56), 1066-1071.
- [22] Hermes H. and LaSalle J. P., (1969), *Functional Analysis and Time Optimal Control*, Academic Press.
- [23] Hestenes M. R. and Mcshane E. J., (1940), "A theorem on quadratic forms and its applications in the calculus of variations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, (V.47), 501-512.
- [24] Hestenes M. R., (1966), *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley and Sons, New York.
- [25] Ioffe A. D. and Tichomirov V. M., (1979), *Theory of Extremal Problems*, North-Holland.
- [26] Kawasaki H., (1966), "Conjugate points for minimization problem in a finite dimensional space", *Kyushu University Preprint Series in Mathematics*, (V.23), 1-12.
- [27] Leighton W. and Martin A. D., (1955), "Principal quadratic functionals", *Trans. Amer. Math. Soc.*, (V.78), 98-128.
- [28] Lusternik L., (1926), "Über einige anwendungen der direkten methoden in variationsrechnung", *Rec. Math.*, 173-201.
- [29] Lusternik L., (1934), "On constrained extrema of functionals", *Matem. Sbornik*, (V.3), 390-401.
- [30] McShane E. J., (1934), "Existence theorem for ordinary problems of calculus of variations" *Ann. Scuola Norm. Piza*, (V.3) 181-211.

- [31] McShane E. J., (1938), "Some existence theorems for the problems of the calculus of variations", *Duke Math. J.*, (V.4), 132-156.
- [32] McShane E. J., (1940), "Existence theorems for Bolza problem in the calculus of variations", *Duke Math. J.*, 28-61.
- [33] Miller B. M., (1996), "The generalized solution of nonlinear optimization problems with impulse control" *SIAM J. Contr. And Optim.*, (V.34 N.4), 1420-1440.
- [34] Moreau J. J., (1962), Fonctions convexes en dualité, Fac. Des Sciences de Montpellier, Sem. De mathématiques.
- [35] Moreau J. J., (1966), "Convexity and duality", Functional Analysis and Optimisation, Acad. Press., New York, 145-169.
- [36] Moreau J. J., (1971), "Weak and strong solutions of dual problems", Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Acad. Press., New York, 181-214.
- [37] Morse M., (1973), "Singular Quadratic Functionals", *Math. Anal.* ,(201), 315-340.
- [38] Motta M., Rampazzo F., (1996), "Dynamic programming for nonlinear system driven by ordinary and impulsive controls", *SIAM J. Contr. And Optim.*, (V.34 N.1), 199-225.
- [39] Murray J. M., (1986), "Existence theorems for optimal control and calculus of variations problems where the state can jump", *SIAM J. Contr. And Optim.*, (V.24,N.3), 412-438.
- [40] Natanson I. P., (1961), Theory of Functions of the Real Variable I, Ungar.
- [41] Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V. and Mishchenko E. F., (1962), The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience.
- [42] Reid T. W., (1946), "A matrix differential equation of Riccati type", *Amer. J. Math.* (V.68-70), 237-246, 250.
- [43] Rockafellar R. T., (1964), "Duality theorems for convex functions", *Duke Math. Soc.* (V.70), 189-192.
- [44] Rockafellar R. T., (1970), Convex analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [45] Riesz F. and Nagy B. Sz., (1955), Functional Analysis, Frederick Ungar Publishing Company, New York.

- [46] Roxin E., (1962), "The existence of optimal controls" *Michigan Math. J.*, (V.9), 109-119.
- [47] Rozonoer L. I., (1959), "The maximum principle of L. S. Pontryagin in optimal system theory", *Automatic Remote Control*, (V.20), 1288-1303, 1405-1421.
- [48] Rudin W., (1991), "Functional Analysis", McGraw-Hill, Inc.
- [49] Sheple L. R., (1980), *Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York.
- [50] Shilov G. E., (1977), *Linear Algebra*, Dover Pub., New York.
- [51] Silva G. N., Vinter R. B., (1997), "Necessary optimality conditions for optimal impulsive control problem", *SIAM J. Contr. And Optim.*, (V.35 N.6), 1829-1846.
- [52] Tagiyev M. H., (1979), "Necessary and sufficiency conditions for strong extremum in degenerate problem in the calculus of variations", *Uspechi Matemat. Nauk*, (V.34), 211-213.
- [53] Tagiyev M. H., (1979), "Sufficient condition for strong extremum in degenerate problem in the calculus of variation", *Proceedings of Azerbaijan Akad. Sci.*, (N.5), 38-48.
- [54] Tikhomirov V. M., (1986), *Fundamental Principles of The Theory of Extremal Problems*, John Wiley and Sons, New York.
- [55] Van Slyke R. M., Wets R. J. B., (1968), "A duality theory for abstract mathematical programmes with applications to optimal control theory" *J. Math. Anal. Appl.*, (V.22), 679-706.
- [56] Vinter R. B., Pereira F. M., (1988), "A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories", *SIAM J. Contr. And Optim.*, (V.26 N.1), 205-229.
- [57] Warga J., (1962), "Relaxed variational problems" *J. Math. Anal. Appl.*, (V.4), 111-127.
- [58] Warga J., (1972), *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press.
- [59] Warga J., Zhu Q. J., (1994), "The equivalence of extremals in different representation of unbounded control problems", *SIAM J. Contr. And Optim.*, (V.32 N.4), 1151-1169.

- [60] Watson G. N., (1922), Theory of Bessel Functions, Cambridge.
- [61] Yosida K., (1974), Functional Analysis, Springer-Verlag, New York.
- [62] Young L. C., (1969), Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Saunders.
- [63] Zavalischin S. T., (1994), "Impulse dynamic systems and application to mathematical economics" *Dynamic Systems and App.*, (V.3 N.3), 443-450.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Almanya'nın Düren şehrinde doğdu. 1993 yılında Kadıköy Kız Lisesinden, 1997 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 1999 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans eğitimini tamamladı. 1998 yılından beri Mimar Sinan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevine devam etmektedir.