

**DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN GENELLEŞTİRİLMİŞ
FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ**

Miraç ÇETİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ARALIK 2006
ANKARA**

Miraç ÇETİN tarafından hazırlanan DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Üye : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

Üye : Doç. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN

Üye : Doç. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ

Üye : Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Tarih : 15 /12 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Miraç ÇETİN

DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN GENELLEŞTİRİLMİŞ**FİBONACCI VE LUCAS DİZİLERİ****(Yüksek Lisans Tezi)****Miraç ÇETİN****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Aralık 2006****ÖZET**

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayılarının dördüncü basamaktan genelleştirilmeleri tanımlandı ve bu tanımlardan yararlanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için bazı özellikler elde edildi. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için üreteç fonksiyonları, bazı özdeşlikler ve kombinatoriyal gösterimler elde edildi. Son olarak bu diziler için üreteç matrisleri verildi.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler : Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları, üreteç fonksiyonu, üreteç matrisi
Sayfa Adedi : 52
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

**GENERALIZED FOURTH ORDER FIBONACCI AND LUCAS
SEQUENCES**

(M.Sc. Thesis)

Miraç ÇETİN

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

December 2006

ABSTRACT

In this study, the generalized fourth order Fibonacci and Lucas numbers were defined and using this definitions, some properties of the generalized fourth order Fibonacci and Lucas were obtained. Also the generating functions, some identities and combinatorial representations were obtained. Finally, the generating matrices for the generalized Fibonacci and Lucas sequences was given.

Science Code : 204.1.025

Key Words : The Generalized Fibonacci and Lucas numbers, the generating functions, the generating matrix

Page Number: 52

Adviser : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. Dursun TAŐCI 'ya yine tecrübelerinden faydalandığım hocam Dr. Emrah KILIÇ 'a ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ	9
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİNİN BAZI KOMBİNATORİYAL ÖZELLİKLERİ	39
4. ÜRETEÇ MATRİSLERİ	47
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	52

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\{F_n\}$	Fibonacci dizisi
$\{L_n\}$	Lucas dizisi
$\{P_n\}$	Pell dizisi
$\{R_n\}$	Pell-Lucas dizisi
F_n	n .ci Fibonacci sayısı
L_n	n .ci Lucas sayısı
P_n	n .ci Pell sayısı
R_n	n .ci Pell-Lucas sayısı
$\{u_n\}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{v_n\}$	Genelleştirilmiş Lucas dizisi
$F(x)$	Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu
$g(x)$	Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu
$h(x)$	Genelleştirilmiş Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

1.GİRİŞ

Fibonacci sayıları, her $n \geq 1$ için $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n 'e n . ci Fibonacci sayısı denir.

Fibonacci ve benzer diziler aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

$\{x_n\}$ dizisi; $x_0 = a$, $x_1 = b$ başlangıç koşulları ile birlikte, her $n \geq 1$ için

$$x_{n+1} = kx_n + x_{n-1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlansın [1-11]. $\{x_n\}$ dizisinin bazı özel durumlarını göz önüne alalım.

Eğer $k = 1$, $x_0 = 0$ ve $x_1 = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{F_n\}$ Fibonacci dizisidir.

Eğer $k = 1$, $x_0 = 2$ ve $x_1 = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{L_n\}$ Lucas dizisidir.

Eğer $k = 2$, $x_0 = 0$ ve $x_1 = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{P_n\}$ Pell dizisidir.

Eğer $k = 2$, $x_0 = 2$ ve $x_1 = 2$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{R_n\}$ Pell-Lucas dizisidir.

Şimdi Fransız matematikçi Binet tarafından Fibonacci sayıları için verilen Binet formülünü vereceğiz [1-6].

1.1. Teorem

F_n ; n .ci Fibonacci sayısı olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olup burada $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ 'dir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 1$ olsun. O halde

$$F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1$$

olup $n = 1$ için ifade doğrudur. Şimdi eşitliğin n için doğru olduğunu kabul edelim. Buna göre $(n + 1)$ için doğru olduğunu gösterelim. Fibonacci sayılarının tanımından ve kabulümüzden

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}(1 + \alpha) - \beta^{n-1}(\beta + 1)}{\alpha - \beta} \end{aligned} \tag{1.1}$$

yazarız. Burada $\alpha^2 = \alpha + 1$ ve $\beta^2 = \beta + 1$ olduğundan Eş. 1.1 'i

$$F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

olarak elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

Benzer şekilde Lucas sayıları için Binet formülü $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ olmak üzere $L_n = \alpha^n + \beta^n$ 'dir [1-10].

Yukarıda bahsettiğimiz $\frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$ sayısına altın oran denir. Ayrıca Altın oran

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

eşitliği ile de verilir [12-13].

Pell ve Pell-Lucas sayıları için Binet formülleri sırasıyla $P_n = \frac{\gamma^n - \phi^n}{\gamma - \phi}$ ve $R_n = \gamma^n + \phi^n$ 'dir. Burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}$, $\phi = 1 - \sqrt{2}$ 'dir.

Fibonacci sayılarının indirgeme bağıntısı yardımıyla, negatif indisli Fibonacci sayılarının ilk birkaç terimi

$$F_{-1} = F_1 - F_0, F_{-2} = F_0 - F_{-1}, \dots$$

şeklinde elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

n	0	1	2	3	4	5....
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5....

ve bunu genelleştirerek aşağıdaki Teoremi elde ederiz:

1.2. Teorem

$\{F_n\}$ Fibonacci dizisi ve her n tamsayısı için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

dir [1].

İspat

Bu eşitliğin ispatı için Fibonacci sayılarının Binet formülünü göz önüne alalım. O halde

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{\alpha - \beta} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{(\alpha\beta)^n (\alpha - \beta)}$$

yazarız. $\alpha\beta = -1$ olduğundan

$$F_{-n} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{(\alpha\beta)^n (\alpha - \beta)} = \frac{-(\alpha^n - \beta^n)}{(-1)^n (\alpha - \beta)} = (-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) = (-1)^{n+1} F_n$$

bulunur.

Benzer şekilde Lucas sayılarının tanımından ilk birkaç Lucas sayısı için aşağıdaki tabloyu göz önüne alarak

n	0	1	2	3	4	5
L_n	2	1	3	4	7	11

ve bu sayıların tanımını kullanarak, negatif indisli terimleri elde etmek için Lucas sayılarının indirgeme bağıntısını geriye doğru genişleterek

$$\begin{array}{cccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ L_{-n} & 2 & -1 & 3 & -4 & 7 & -11 & \dots \end{array}$$

elde ederiz. Böylece genel olarak $L_{-n} = (-1)^n L_n$ 'dir.

Benzer şekilde Pell ve Pell-Lucas sayılarının negatif indisli terimleri sırasıyla ;

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n \text{ ve } R_{-n} = (-1)^n R_n \text{ eşitliklerini sağlar [12-13].}$$

Şimdi Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bazı ilişkiler için aşağıdaki formülleri verelim [1-14].

$$1) L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

$$2) 5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}$$

$$3) F_{2n} = F_n L_n$$

$$4) L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$$

$$5) 2F_{n+1} = F_n + L_n$$

Bu eşitliklerin sağlandığı kolayca gösterilebilir. Örneğin $F_{2n} = F_n L_n$ eşitliğini göz önüne alalım. Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülünü kullanarak

$$F_n L_n = \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^n + \beta^n)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = F_{2n}$$

olduğu kolayca elde edilebilir.

Benzer şekilde Pell ve Pell-Lucas sayıları için aşağıdaki bazı özdeşlikleri verebiliriz [7-10, 12-13].

$$1) R_n = P_{n+1} + P_{n-1}$$

$$2) 8P_n = R_{n+1} + R_{n-1}$$

$$3) P_{2n} = P_n R_n$$

$$4) 4P_{n+1} = R_n + R_{n+1}$$

Fibonacci sayıları kendi aralarında bazı ilginç özelliklere sahiptir. Bu özelliklerden bir tanesini aşağıdaki Teorem ile hatırlatalım.

1.3. Teorem

Her $n \geq 1$ tamsayısı için ardışık Fibonacci sayıları aralarında asaldır. Yani $(F_{n+1}, F_n) = 1$ 'dir.

İspat

Kabul edelim ki $(F_{n+1}, F_n) = d$ ve $d > 1$ olsun. O halde en büyük ortak bölen tanımından dolayı d/F_{n+1} ve d/F_n yazarız. Ayrıca tamsayılar da bölünebilme tanımından biliyoruz ki d sayısı bunların farkı olan $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ sayısını da böler, yani d/F_{n-1} 'dir. Benzer şekilde d/F_n ve d/F_{n-1} olduğundan bunların farkı olan $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$ 'de d tarafından bölünür, yani d/F_{n-2} 'dir. Bu işlemler $(n-1)$

defa yapılarak d/F_1 bulunur. Fakat $F_1 = 1$ olduğundan bu $d > 1$ seçilmesi ile bir çelişkidir. O halde $(F_{n+1}, F_n) = 1$ olup ispat tamamlanır.

Fibonacci ve Lucas sayılarının polinomları tanımlanarak bunların değişik özellikleri elde edilmiştir [15-18]. Bu özelliklerinin yanı sıra bu sayıların bazı kombinatoryal özelliklerini de burada hatırlatacağız.

$$1) \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} F_{2i} = 5^n F_{2n}$$

$$2) \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} F_{2i} = 5^n L_{2n+1}$$

$$3) \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} L_{2i} = 5^n L_{2n}$$

$$4) \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} L_{2i} = 5^{n+1} F_{2n+1}$$

Fibonacci sayıları aşağıdaki 2×2 K matrisinin kuvvetleri alınmasıyla elde edilebilir.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

için

$$K^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu bilinmektedir [2]. Buradaki K matrisine Fibonacci sayılarının üreteç matrisi denir. Benzer şekilde Pell sayıları için üreteç matrisi;

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu bilinmektedir [2].

Üreteç fonksiyonları sabit katsayılı lineer indirgeme dizileri ve bu dizilerin çeşitli formüllerini elde etmekte çok kullanışlıdır [21]. Örneğin Fibonacci sayılarının üreteç

fonksiyonu $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ ile verilir.

Yukarıda bahsedilen tüm dizilerin tanımında esas olan her terimin kendinden önceki ilk iki terimin toplanmasıyla tanımlanmasıdır. Bunlardan başka olarak Fibonacci ve Lucas sayılarının daha farklı genelleştirilmeleri yapılmıştır. Bu genelleştirmelerde ki esas ise dizinin her teriminin kendinden önceki üç ya da daha fazla elemanın toplanmasıyla tanımlanmasıdır. Örneğin, Tribonacci dizisi ismi verilen genelleştirilmiş Fibonacci dizisinde ise her terim kendinden önceki ilk üç terimin toplamı olarak aşağıda ki bağıntı ile tanımlanır: $n \geq 2$,

$$T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2}$$

burada başlangıç terimleri ise $T_0 = 0, T_1 = 1$ ve $T_2 = 1$ 'dir [19-20].

2.DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas dizilerinin 4-basamak genelleştirmelerini ve bunların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

2.1. Tanım

Her $n \geq 4$ tamsayısı için genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ 'nin n .ci terimi

$$u_n = pu_{n-2} - u_{n-4}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada $a \geq 1$ tamsayı olmak üzere başlangıç koşulları $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = a$ ve $u_3 = p - 1$ 'dir.

2.2. Tanım

Her $n \geq 4$ tamsayısı için genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_n\}$ 'nin n .ci terimi

$$v_n = pv_{n-2} - v_{n-4}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada $a \geq 1$ tamsayı olmak üzere başlangıç koşulları $v_0 = 2, v_1 = a, v_2 = p$ ve $v_3 = a(p + 1)$ 'dir.

Eğer $p = 3$ ve $a = 1$ alınırsa, u_n ; n .ci Fibonacci sayısı ve v_n ; n .ci Lucas sayısıdır.

Eğer $p = 6$ ve $a = 2$ alınırsa, u_n ; n .ci Pell sayısı ve v_n ; n .ci Pell-Lucas sayısıdır.

Şimdi $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ terimleri için bazı formüller elde edeceğiz. İlk olarak $\{u_n\}$ dizisinin terimlerini kullanarak aşağıdaki fonksiyonu tanımlayacağız.

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i = u_0 x^0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \dots \quad (2.1)$$

olsun. Başlangıç koşulları $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = a$, $u_3 = p - 1$ için

$$g(x) - x - ax^2 - (p-1)x^3 = \sum_{i=4}^{\infty} u_i x^i$$

yazabiliriz. Burada $\{u_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından dolayı

$$g(x) - x - ax^2 - (p-1)x^3 = \sum_{i=4}^{\infty} [pu_{i-2} - u_{i-4}]x^i$$

yazarız. Böylece gerekli düzenlemeleri yaparak

$$\begin{aligned} g(x) - x - ax^2 - (p-1)x^3 &= p \sum_{i=4}^{\infty} u_{i-2} x^i - \sum_{i=4}^{\infty} u_{i-4} x^i \\ &= px^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i - px^3 - x^4 \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i \end{aligned}$$

elde ederiz. Eş. 2.1 'i kullanarak

$$g(x) - x - ax^2 - (p-1)x^3 = px^2 g(x) - x^4 g(x) - px^3$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$g(x)(1 - px^2 + x^4) = x + ax^2 - x^3$$

$$g(x) = \frac{x + ax^2 - x^3}{1 - px^2 + x^4} \quad (2.2)$$

olarak elde ederiz. Ayrıca

$$1 - px^2 + x^4 = (x - \sqrt{\tau})(x + \sqrt{\tau})(x - \sqrt{\sigma})(x + \sqrt{\sigma}) \quad (2.3)$$

olduğu görülür. Burada

$$\tau = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2} \quad (2.4)$$

ve

$$\sigma = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2} \quad (2.5)$$

dir. Aşağıdaki eşitlikler kolayca görülür.

$$\tau + \sigma = p \quad (2.6)$$

$$\tau - \sigma = \sqrt{p^2 - 4} \quad (2.7)$$

$$\tau \sigma = 1 \quad (2.8)$$

Şimdi Eş. 2.3 'ü kullanarak Eş. 2.2 'yi

$$g(x) = \frac{A}{x - \sqrt{\tau}} + \frac{B}{x + \sqrt{\tau}} + \frac{C}{x - \sqrt{\sigma}} + \frac{D}{x + \sqrt{\sigma}} \quad (2.9)$$

olarak yazabiliriz. Eş. 2.9 'da gerekli düzenlemeler yapılır ve Eş. 2.2 'i göz önüne alınırsa

$$A = \frac{\sqrt{\tau}(1-\tau) + a\tau}{2\sqrt{\tau}(\tau-\sigma)}, \quad B = \frac{\sqrt{\tau}(1-\tau) - a\tau}{2\sqrt{\tau}(\tau-\sigma)}$$

$$C = \frac{\sqrt{\sigma}(\sigma-1) - a\sigma}{2\sqrt{\sigma}(\tau-\sigma)}, \quad D = \frac{\sqrt{\sigma}(\sigma-1) + a}{2\sqrt{\sigma}(\tau-\sigma)}$$

olduğu görülür. Böylece

$$B - A = \frac{-a\tau}{\sqrt{\tau}(\tau-\sigma)} \quad (2.10)$$

$$D - C = \frac{a\sigma}{\sqrt{\sigma}(\tau-\sigma)} \quad (2.11)$$

$$A + B = \frac{1-\tau}{\tau-\sigma} \quad (2.12)$$

$$C + D = \frac{\sigma-1}{\tau-\sigma} \quad (2.13)$$

olarak elde ederiz. Eş. 2.9 'u aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$g(x) = -\frac{A}{\sqrt{\tau}} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{\sqrt{\tau}}} + \frac{B}{\sqrt{\tau}} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{\sqrt{\tau}}} - \frac{C}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{\sqrt{\sigma}}} + \frac{D}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{\sqrt{\sigma}}}$$

Eğer $\frac{1}{1 \pm \frac{x}{\sqrt{\tau}}}$ ve $\frac{1}{1 \pm \frac{x}{\sqrt{\sigma}}}$ ifadelerinin seri açılımını kullanırsak

$$g(x) = -\frac{A}{\sqrt{\tau}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\tau}} + \frac{x^2}{(\sqrt{\tau})^2} + \frac{x^3}{(\sqrt{\tau})^3} + \dots \right) + \frac{B}{\sqrt{\tau}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{\tau}} + \frac{x^2}{(\sqrt{\tau})^2} - \frac{x^3}{(\sqrt{\tau})^3} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{C}{\sqrt{\sigma}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\sigma}} + \frac{x^2}{(\sqrt{\sigma})^2} + \frac{x^3}{(\sqrt{\sigma})^3} + \dots \right) + \frac{D}{\sqrt{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{\sigma}} + \frac{x^2}{(\sqrt{\sigma})^2} - \frac{x^3}{(\sqrt{\sigma})^3} + \dots \right) \\
& = \left[\frac{B-A}{\sqrt{\tau}} + \frac{D-C}{\sqrt{\sigma}} \right] - \left[\frac{A+B}{(\sqrt{\tau})^2} + \frac{C+D}{(\sqrt{\sigma})^2} \right] x + \left[\frac{B-A}{(\sqrt{\tau})^3} + \frac{D-C}{(\sqrt{\sigma})^3} \right] x^2 \\
& \quad - \left[\frac{A+B}{(\sqrt{\tau})^4} + \frac{C+D}{(\sqrt{\sigma})^4} \right] x^3 + \dots
\end{aligned}$$

olarak buluruz. Ayrıca Eş. 2.10, Eş. 2.11, Eş. 2.12 ve Eş. 2.13 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
g(x) &= \left[\frac{-a}{\tau-\sigma} + \frac{a}{\tau-\sigma} \right] + \left[\frac{\tau-1}{\tau(\tau-\sigma)} + \frac{1-\sigma}{\sigma(\tau-\sigma)} \right] x + \left[\frac{-a}{\tau(\tau-\sigma)} + \frac{a}{\sigma(\tau-\sigma)} \right] x^2 \\
& \quad + \left[\frac{\tau-1}{\tau^2(\tau-\sigma)} + \frac{1-\sigma}{\sigma^2(\tau-\sigma)} \right] x^3 + \dots
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{\tau-\sigma} \left[\frac{-1}{\tau^n} + \frac{1}{\sigma^n} \right] x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\tau-\sigma} \left[\frac{\tau-1}{\tau^{n+1}} + \frac{1-\sigma}{\sigma^{n+1}} \right] x^{2n+1}$$

yazabiliriz. Burada Eş. 2.1 'i göz önüne alırsak

$$u_{2n} = \frac{a}{\tau-\sigma} \left[\frac{-1}{\tau^n} + \frac{1}{\sigma^n} \right] \tag{2.14}$$

ve

$$u_{2n+1} = \frac{1}{\tau-\sigma} \left[\frac{\tau-1}{\tau^{n+1}} + \frac{1-\sigma}{\sigma^{n+1}} \right] \tag{2.15}$$

olarak elde ederiz. Buradan Eş. 2.8 'i göz önüne alırsak

$$u_{2n} = \frac{a}{\tau - \sigma} [\tau^n - \sigma^n] \quad (2.16)$$

ve

$$u_{2n+1} = \frac{1}{\tau - \sigma} [\sigma^{n+1}(\tau - 1) + \tau^{n+1}(1 - \sigma)] \quad (2.17)$$

eşitliklerini yazarız. Diğer taraftan Eş. 2.4 ve Eş. 2.5 'i kullanırsak

$$\tau - 1 = \frac{p - 2 + \sqrt{p^2 - 4}}{2} \quad (2.18)$$

$$1 - \sigma = \frac{2 - p + \sqrt{p^2 - 4}}{2} \quad (2.19)$$

$$\tau = \left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^2 \quad (2.20)$$

ve

$$\sigma = \left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^2 \quad (2.21)$$

buluruz.

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ için Binet formülünü vereceğiz.

2.1. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ için

$$u_{2n} = \frac{a}{\sqrt{p^2 - 4}} \left[\left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n} \right] \quad (2.22)$$

ve

$$u_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{p+2}} \left[\left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+1} - \left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+1} \right] \quad (2.23)$$

dir.

İspat

Eş. 2.7, Eş. 2.20 ve Eş. 2.21 'in Eş. 2.16 'da kullanılması ile

$$u_{2n} = \frac{a}{\sqrt{p^2 - 4}} \left[\left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n} \right]$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer şekilde Eş. 2.17 'de Eş. 2.7, Eş. 2.18, Eş. 2.19, Eş. 2.20 ve Eş. 2.21 'i kullanarak

$$u_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4}} \left[\left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+2} \left(\frac{p-2 + \sqrt{p^2 - 4}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+2} \left(\frac{2-p + \sqrt{p^2 - 4}}{2} \right) \right]$$

elde ederiz. Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak

$$u_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{p+2}} \left[\left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+1} - \left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+1} \right]$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Benzer şekilde $\{v_n\}$; genelleştirilmiş Lucas dizisi için Binet formüllerini elde edeceğiz.

Katsayıları $\{v_n\}$ dizisinin terimlerinden oluşan

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x^i = v_0 x^0 + v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + \dots$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\{v_n\}$ dizisinin başlangıç koşulları $v_0 = 2, v_1 = a, v_2 = p$ ve $v_3 = a(p+1)$ için

$$h(x) - 2 - ax - px^2 - (ap+a)x^3 = \sum_{i=4}^{\infty} v_i x^i$$

olur. Burada $\{v_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$h(x) - 2 - ax - px^2 - (ap+a)x^3 = \sum_{i=4}^{\infty} [pv_{i-2} - v_{i-4}] x^i$$

yazarız. Böylece gerekli düzenlemeleri yaparak

$$h(x) - 2 - ax - px^2 - (ap+a)x^3 = p \sum_{i=4}^{\infty} v_{i-2} x^i - \sum_{i=4}^{\infty} v_{i-4} x^i$$

$$= px^2 \sum_{i=0}^{\infty} v_i x^i - 2px^2 - apx^3 - x^4 \sum_{i=0}^{\infty} v_i x^i$$

buluruz. Burada $h(x)$ fonksiyonunun tanımını kullanarak

$$h(x) - 2 - ax - px^2 - (ap + a)x^3 = px^2 h(x) - x^4 h(x) - 2px^2 - apx^3$$

yazarız. Böylece

$$h(x)(1 - px^2 - x^4) = 2 + ax - px^2 + ax^3$$

$$h(x) = \frac{2 + ax - px^2 + ax^3}{1 - px^2 - x^4} \quad (2.24)$$

elde ederiz. Şimdi Eş. 2.3 'ü kullanarak

$$h(x) = \frac{E}{x - \sqrt{\tau}} + \frac{F}{x + \sqrt{\tau}} + \frac{G}{x - \sqrt{\sigma}} + \frac{H}{x + \sqrt{\sigma}} \quad (2.25)$$

olarak yazabiliriz. Eş. 2.25 'de gerekli düzenlemeleri yapar ve Eş. 2.24 'ü göz önüne alırsak

$$E = \frac{a\sqrt{\tau}(\tau+1) - (p\tau-2)}{\sqrt{\tau}(\tau-\sigma)}, \quad F = \frac{a\sqrt{\tau}(\tau+1) + (p\tau-2)}{\sqrt{\tau}(\tau-\sigma)}$$

$$G = \frac{-a\sqrt{\sigma}(\sigma+1) + (p\sigma-2)}{\sqrt{\sigma}(\tau-\sigma)}, \quad H = \frac{-a\sqrt{\sigma}(\sigma+1) - (p\sigma-2)}{\sqrt{\sigma}(\tau-\sigma)}$$

elde ederiz. Buradan aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$F - E = \frac{p\tau - 2}{\sqrt{\tau}(\tau - \sigma)} \quad (2.26)$$

$$H - G = \frac{2 - p\sigma}{\sqrt{\sigma}(\tau - \sigma)} \quad (2.27)$$

$$E + F = \frac{a(\tau + 1)}{\tau - \sigma} \quad (2.28)$$

$$G + H = \frac{-a(\sigma + 1)}{\tau - \sigma} \quad (2.29)$$

Böylece

$$h(x) = -\frac{E}{\sqrt{\tau}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{\sqrt{\tau}}} + \frac{F}{\sqrt{\tau}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{\sqrt{\tau}}} - \frac{G}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{\sqrt{\sigma}}} + \frac{H}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{\sqrt{\sigma}}}$$

olarak yazabiliriz. Eğer $\frac{1}{1 \pm \frac{x}{\sqrt{\tau}}}$, $\frac{1}{1 \pm \frac{x}{\sqrt{\sigma}}}$ ifadelerinin seri açılımları göz önüne

alınırsa

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{E}{\sqrt{\tau}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\tau}} + \frac{x^2}{(\sqrt{\tau})^2} + \frac{x^3}{(\sqrt{\tau})^3} + \dots \right) + \frac{F}{\sqrt{\tau}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{\tau}} + \frac{x^2}{(\sqrt{\tau})^2} - \frac{x^3}{(\sqrt{\tau})^3} + \dots \right) \\ &\quad - \frac{G}{\sqrt{\sigma}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\sigma}} + \frac{x^2}{(\sqrt{\sigma})^2} + \frac{x^3}{(\sqrt{\sigma})^3} + \dots \right) + \frac{H}{\sqrt{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{\sigma}} + \frac{x^2}{(\sqrt{\sigma})^2} - \frac{x^3}{(\sqrt{\sigma})^3} + \dots \right) \\ &= \left[\frac{F - E}{\sqrt{\tau}} + \frac{H - G}{\sqrt{\sigma}} \right] - \left[\frac{E + F}{(\sqrt{\tau})^2} + \frac{G + H}{(\sqrt{\sigma})^2} \right] x + \left[\frac{F - E}{(\sqrt{\tau})^3} + \frac{H - G}{(\sqrt{\sigma})^3} \right] x^2 \\ &\quad - \left[\frac{E + F}{(\sqrt{\tau})^4} + \frac{G + H}{(\sqrt{\sigma})^4} \right] x^3 + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Eş. 2.26, Eş. 2.27, Eş. 2.28 ve Eş. 2.29 kullanılırsa

$$h(x) = \left[\frac{p\tau - 2}{\tau(\tau - \sigma)} - \frac{p\sigma - 2}{\sigma(\tau - \sigma)} \right] - \left[\frac{a(\tau + 1)}{\tau(\tau - \sigma)} - \frac{a(\sigma + 1)}{\sigma(\tau - \sigma)} \right] x + \left[\frac{p\tau - 2}{\tau^2(\tau - \sigma)} - \frac{p\sigma - 2}{\sigma^2(\tau - \sigma)} \right] x^2 - \left[\frac{a(\tau + 1)}{\tau^2(\tau - \sigma)} - \frac{a(\sigma + 1)}{\sigma^2(\tau - \sigma)} \right] x^3 + \dots$$

yazılabilir. Böylece

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\tau - \sigma} \left[\frac{p\tau - 2}{\tau^{n+1}} - \frac{p\sigma - 2}{\sigma^{n+1}} \right] x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{\tau - \sigma} \left[\frac{\sigma + 1}{\sigma^{n+1}} - \frac{\tau + 1}{\tau^{n+1}} \right] x^{2n+1}$$

dir. Burada $h(x)$ fonksiyonunun tanımı ve Eş. 2.8 göz önüne alınırsa

$$v_{2n} = \frac{1}{\tau - \sigma} \left[\sigma^n (p - 2\sigma) - \tau^n (p - 2\tau) \right] \quad (2.30)$$

ve

$$v_{2n+1} = \frac{a}{\tau - \sigma} \left[\tau^{n+1} (1 + \sigma) - \sigma^{n+1} (1 + \tau) \right] \quad (2.31)$$

elde edilir. Ayrıca Eş. 2.4, Eş. 2.5 ve Eş. 2.7 'yi göz önüne alırsak $p - 2\sigma = \tau - \sigma$ ve $p - 2\tau = -(\tau - \sigma)$ olarak yazabiliriz. Buradan Eş.2.30 'u

$$v_{2n} = \tau^n + \sigma^n \quad (2.32)$$

yazabiliriz.

2.2. Teorem

$\{v_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için Binet formülleri

$$v_{2n} = \left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n} \quad (2.33)$$

ve

$$v_{2n+1} = \frac{a}{\sqrt{p-2}} \left[\left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+1} + \left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+1} \right] \quad (2.34)$$

dir.

İspat

Eş. 2.32 'de Eş. 2.20 ve Eş. 2.21 'i kullanarak

$$v_{2n} = \left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n}$$

elde ederiz.

Eş. 2.4 'ü kullanarak $\tau + 1 = \frac{p+2 + \sqrt{p^2-4}}{2}$ ve Eş.2.5 'i kullanarak

$\sigma + 1 = \frac{p+2 - \sqrt{p^2-4}}{2}$ eşitliklerini elde ederiz. Daha sonra bu eşitlikler ve Eş.

2.20, Eş. 2.21 'i Eş. 2.31 'de kullanırsak

$$v_{2n+1} = \frac{a}{\sqrt{p^2-4}} \left[\left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+2} \left(\frac{p+2 - \sqrt{p^2-4}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+2} \left(\frac{p+2 + \sqrt{p^2-4}}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{a}{\sqrt{p-2}} \left[\left(\frac{\sqrt{p-2} + \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+1} + \left(\frac{\sqrt{p-2} - \sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+1} \right]$$

olup ispat biter.

2.3. Teorem

Her $n \geq 1$ tamsayısı ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ için

$$u_{2n} = au_{2n-1} + u_{2n-2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 1$ olsun. Başlangıç koşulları $u_0 = 0$ ve $u_1 = 1$ için $u_2 = au_1 + u_0 = a$ 'dir. Şimdi herhangi bir $n > 1$ sayısı için eşitliğin doğru olduğunu, yani $u_{2n} = au_{2n-1} + u_{2n-2}$ kabul edelim. Buna göre eşitliğin $(n+1)$ için doğru, yani $u_{2(n+1)} = au_{2n+1} + u_{2n}$ olduğunu gösterelim. Burada $\{u_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısı gereği $u_{2n+2} = pu_{2n} - u_{2n-2}$ yazabiliriz. Kabulümüz ve indirgeme bağıntısından

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= p(au_{2n-1} + u_{2n-2}) - (au_{2n-3} + u_{2n-4}) \\ &= a(pu_{2n-1} - u_{2n-3}) + (pu_{2n-2} - u_{2n-4}) \\ &= au_{2n+1} + u_{2n} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

2.4. Teorem

$\{u_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$au_{2n+1} = (p-2)u_{2n} + au_{2n-1}$$

dir.

İspat

Teorem 2.3 'den $au_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n}$ yazabiliriz. $\{u_n\}$ dizisinin tanımını kullanarak $au_{2n+1} = (pu_{2n} - u_{2n-2}) - u_{2n}$ elde ederiz. Böylece gerekli düzenlemeleri yapar ve Teorem 2.3 'ü göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} au_{2n+1} &= (p-1)u_{2n} - (u_{2n} - au_{2n-1}) \\ &= (p-2)u_{2n} + au_{2n-1} \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz.

2.5. Teorem

$\{v_n\}$; genelleştirilmiş Lucas dizisi olmak üzere her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$v_{2n+1} = av_{2n} + v_{2n-1}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. O halde $v_1 = a$ ve $v_2 = p$ başlangıç koşulları için $v_3 = av_2 + v_1 = a(p+1)$ olup $n=1$ için iddia doğrudur. Kabul edelim ki $n > 1$ için iddia doğru olsun, yani $v_{2n+1} = av_{2n} + v_{2n-1}$. Buna göre eşitliğin $(n+1)$ için doğru olduğunu gösterelim. $\{v_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından dolayı $v_{2n+3} = pv_{2n+1} - v_{2n-1}$ yazarız. Kabulümüzden

$$v_{2n+3} = p(av_{2n} + v_{2n-1}) - (av_{2n-2} + v_{2n-3})$$

eşitliği sağlanır. Burada gerekli düzenlemeleri yapar ve $\{v_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısını kullanırsak

$$v_{2n+3} = a(pv_{2n} - v_{2n-2}) + (pv_{2n-1} - v_{2n-3}) = av_{2n+2} + v_{2n+1}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

2.6. Teorem

Her $n \geq 1$ tamsayısı ve genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_n\}$ için

$$av_{2n} = (p-2)v_{2n-1} + av_{2n-2}$$

dir.

İspat

Teorem 2.5 'den $av_{2n} = v_{2n+1} - v_{2n-1}$ eşitliğine sahibiz. $\{v_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$av_{2n} = (pv_{2n-1} - v_{2n-3}) - v_{2n-1} = (p-1)v_{2n-1} - v_{2n-3}$$

yazabiliriz. Teorem 2.5 'i kullanarak

$$av_{2n} = (p-1)v_{2n-1} - (v_{2n-1} - av_{2n-2}) = (p-2)v_{2n-1} + av_{2n-2}$$

elde ederiz.

2.7. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için

$$v_n = u_{n+1} + u_{n-1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ için iddianın doğruluğunu araştıralım. Başlangıç koşulları $u_0 = 0$ ve $u_2 = a$ için $v_1 = u_2 + u_0 = a$ olup $n=1$ için iddia doğrudur. Şimdi herhangi bir $n > 1$ sayısı için eşitliğin doğruluğunu kabul edelim. Buna göre eşitliğin $(n+1)$ için doğru olduğunu gösterelim. Burada $\{v_n\}$ dizisinin tanımı gereği $v_{n+1} = pv_{n-1} - v_{n-3}$ olup kabulümüz gereği

$$v_{n+1} = p(u_n + u_{n-2}) - (u_{n-2} + u_{n-4})$$

yazabiliriz. Gerekli düzenlemeleri yaparak ve $\{v_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$v_{n+1} = (pu_n - u_{n-2}) + (pu_{n-2} - u_{n-4}) = u_{n+2} + u_n$$

elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

2.8. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için

$$u_{2n} = u_n v_n$$

dir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. $u_1=1$ ve $v_1=a$ başlangıç koşulları için $u_2 = u_1 v_1 = a$ eşitliği sağlanır. Kabul edelim ki $(n-1)$ için iddia doğru olsun, yani $u_{2n-2} = u_{n-1} v_{n-1}$. Buna göre eşitliğin n için doğru olduğunu gösterelim. Teorem 2.7'den $u_n v_n = u_n (u_{n+1} + u_{n-1})$ 'dir. $\{u_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$\begin{aligned} u_n v_n &= u_n (p u_{n-1} - u_{n-3}) + u_{n-1} (p u_{n-2} - u_{n-4}) \\ &= p u_{n-1} (u_n + u_{n-2}) - u_n u_{n-3} - u_{n-1} u_{n-4} \end{aligned}$$

elde ederiz. Teorem 2.7'den

$$u_n v_n = p u_{n-1} v_{n-1} - u_n u_{n-3} - u_{n-1} u_{n-4} \quad (2.35)$$

olur.

Eğer n çift sayı ise $(n-2)$ 'de çift sayı olur. Buna göre Teorem 2.3'den

$u_n = a u_{n-1} + u_{n-2}$, $u_{n-2} = a u_{n-3} + u_{n-4}$ eşitliklerini yazabiliriz. Bu eşitlikleri Eş. 2.35'de kullanarak

$$\begin{aligned}
u_n v_n &= pu_{n-1} v_{n-1} - u_{n-3} (au_{n-1} + u_{n-2}) - u_{n-1} (u_{n-2} - au_{n-3}) \\
&= pu_{n-1} v_{n-1} - u_{n-3} u_{n-2} - u_{n-1} u_{n-2} \\
&= pu_{n-1} v_{n-1} - u_{n-2} (u_{n-3} + u_{n-1})
\end{aligned}$$

elde ederiz. Teorem 2.7 'den $u_n v_n = pu_{n-1} v_{n-1} - u_{n-2} v_{n-2}$ bulunur. Kabulümüzden ve $\{u_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından $u_n v_n = pu_{2n-2} - u_{2n-4} = u_{2n}$ elde ederiz.

Eğer n tek sayı ise $(n-2)$ 'de tek sayı olur. Buna göre Teorem 2.4 'den

$$au_n = (p-2)u_{n-1} + au_{n-2}, \quad au_{n-2} = (p-2)u_{n-3} + au_{n-4} \quad \text{eşitliklerini yazabiliriz.}$$

Burada Tanım 2.1 de kabul ettiğimiz başlangıç koşullardan biri olan $a \geq 1$ tamsayısı ile Eş. 2.35 'in her iki tarafını çarpar ve yukarıda bulduğumuz iki eşitliği kullanırsak

$$\begin{aligned}
au_n v_n &= pau_{n-1} v_{n-1} - u_{n-3} ((p-2)u_{n-1} + au_{n-2}) - u_{n-1} (au_{n-2} - (p-2)u_{n-3}) \\
&= pau_{n-1} v_{n-1} - au_{n-2} (u_{n-3} + u_{n-1})
\end{aligned}$$

elde ederiz. Teorem 2.7 'den $au_n v_n = pau_{n-1} v_{n-1} - au_{n-2} v_{n-2}$ yazabiliriz. Kabulümüz ve $\{u_n\}$ dizisinin tanımından $au_n v_n = pau_{2n-2} - au_{2n-4} = au_{2n}$ olur. Şimdi eşitliğin iki tarafını a 'ya bölersek $u_n v_n = u_{2n}$ elde ederiz. Böylece her n pozitif tamsayısı için ispat tamamlanır.

2.9. Teorem

$\{u_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olmak üzere her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$(u_n, u_{n+1}) = 1$$

dir.

İspat

Kabul edelim ki $(u_n, u_{n+1}) = d$ ve $d > 1$ olsun. En büyük ortak bölen tanımından dolayı d/u_{n+1} ve d/u_n 'dir. Genelliği bozmayacağı için n tek sayı olsun, o zaman $(n+1)$ çift sayı olur. Teorem 2.3 'den $u_{n+1} = au_n + u_{n-1}$ yazabiliriz. Bu ifadeyi düzenlersek $u_{n+1} - au_n = u_{n-1}$ elde ederiz. Burada d/u_{n+1} ve d/u_n olduğundan d sayısı $u_{n+1} - au_n = u_{n-1}$ sayısını da böler, yani d/u_{n-1} 'dir. Benzer şekilde n tek olduğundan ve Teorem 2.4 'den $au_n = (p-2)u_{n-1} + au_{n-2}$ yazabiliriz. d/u_n ve d/u_{n-1} olduğundan ve bölünebilme özelliklerinden $au_n = (p-2)u_{n-1} + au_{n-2}$ sayısı da d tarafından bölünür, yani d/au_{n-2} 'dir. Bu şekilde devam edilerek d/u_{n-3} , d/au_{n-4} vs. olduğu görülür ve böylece d/u_1 bulunur. Fakat $u_1 = 1$ olduğundan bu d/u_1 olması ile bir çelişkidir. Çünkü kabulümüz gereği $d > 1$ idi. O halde $(u_n, u_{n+1}) = 1$ olup ispat tamamlanır.

2.1. Önerme

Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ve her n tamsayısı sayısı için

$$u_{-n} = (-1)^{n+1} u_n$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Öncelikle $n = 2k$ olsun. O halde $u_{-2k} = -u_{2k}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Eş.

$$2.16 \text{ 'dan } u_{-2k} = \frac{a}{\tau - \sigma} [\tau^{-k} - \sigma^{-k}] = \frac{a}{\tau - \sigma} \left[\frac{\sigma^k - \tau^k}{(\tau\sigma)^k} \right] \text{ elde ederiz. Eş. 2.8 'den}$$

$$u_{-2k} = \frac{-a}{\tau - \sigma} [\tau^k - \sigma^k] \text{ olur. Böylece Eş. 2.16 'dan } u_{-2k} = -u_{2k} \text{ olarak buluruz.}$$

Şimdi $n = 2k + 1$ olsun. Bu durumda $u_{-2k-1} = u_{2k+1}$ olduğunu göstermeliyiz. Eş. 2.17'den

$$\begin{aligned}
 u_{-2k-1} = u_{2(-k-1)+1} &= \frac{1}{\tau - \sigma} \left[\sigma^{-k-1+1}(\tau - 1) + \tau^{-k-1+1}(1 - \sigma) \right] \\
 &= \frac{1}{\tau - \sigma} \left[\sigma^{-k}(\tau - 1) + \tau^{-k}(1 - \sigma) \right] \\
 &= \frac{1}{\tau - \sigma} \left[\frac{\tau - 1}{\sigma^k} + \frac{1 - \sigma}{\tau^k} \right] \\
 &= \frac{1}{\tau - \sigma} \left[\frac{\tau^k(\tau - 1) + \sigma^k(1 - \sigma)}{(\tau\sigma)^k} \right]
 \end{aligned}$$

dir. Eş. 2.8'i kullanarak gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\begin{aligned}
 u_{-2k-1} &= \frac{1}{\tau - \sigma} \left[\tau^k(\tau - 1) + \sigma^k(1 - \sigma) \right] \\
 &= \frac{1}{\tau - \sigma} \left[\tau^k(\tau - \tau\sigma) + \sigma^k(\tau\sigma - \sigma) \right] \\
 &= \frac{1}{\tau - \sigma} \left[\tau^{k+1}(1 - \sigma) + \sigma^{k+1}(\tau - 1) \right] \\
 &= u_{2k+1}
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

2.2. Önerme

Genelleştirilmiş Lucas sayıları ve her n tamsayısı sayısı için

$$v_{-n} = (-1)^n v_n$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Öncelikle $n = 2k$ olsun. Bu durumda $v_{-2k} = v_{2k}$ olduğunu göstermeliyiz. Eş. 2.32 'yi kullanarak $v_{-2k} = \tau^{-k} + \sigma^{-k} = \frac{\sigma^k + \tau^k}{(\tau\sigma)^k}$ buluruz. Eş. 2.8 'den $v_{-2k} = \tau^k + \sigma^k = v_{2k}$ eşitliği sağlanır. Şimdi $n = 2k + 1$ olsun. O halde $v_{-2k-1} = -v_{2k+1}$ olduğunu göstermeliyiz. Eş. 2.31 'den

$$\begin{aligned} v_{-2k-1} = v_{2(-k-1)+1} &= \frac{a}{\tau - \sigma} \left[\tau^{-k-1+1}(1 + \sigma) - \sigma^{-k-1+1}(1 + \tau) \right] \\ &= \frac{a}{\tau - \sigma} \left[\frac{(1 + \sigma)}{\tau^k} - \frac{(1 + \tau)}{\sigma^k} \right] \\ &= \frac{a}{\tau - \sigma} \left[\frac{\sigma^k(1 + \sigma) - \tau^k(1 + \tau)}{(\tau\sigma)^k} \right] \end{aligned}$$

elde ederiz. Eş. 2.8 'den

$$\begin{aligned} v_{-2k-1} &= \frac{a}{\tau - \sigma} \left[\sigma^k(\tau\sigma + \sigma) - \tau^k(\tau\sigma + \tau) \right] \\ &= \frac{a}{\tau - \sigma} \left[\sigma^{k+1}(\tau + 1) - \tau^{k+1}(\sigma + 1) \right] \\ &= \frac{-a}{\tau - \sigma} \left[\tau^{k+1}(\sigma + 1) - \sigma^{k+1}(\tau + 1) \right] \\ &= -v_{2k+1} \end{aligned}$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

2.10. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için

$$v_{n-1} + v_{n+1} = (p+2)u_n$$

sağlanır.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 1$ olsun. Başlangıç koşulları $v_0 = 2$, $v_2 = p$ için $v_0 + v_2 = p + 2 = (p+2)u_1$ eşitliği sağlanır. Şimdi herhangi bir $n > 1$ sayısı için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Buna göre eşitliğin $(n+1)$ için doğru olduğunu gösterelim. Burada $\{v_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısı gereği

$$v_n + v_{n+2} = (pv_{n-2} - v_{n-4}) + (pv_n - v_{n-2})$$

dir. Gerekli düzenlemeleri yaparak ve kabulümüzü kullanarak

$$\begin{aligned} v_n + v_{n+2} &= p(v_n + v_{n-2}) - (v_{n-2} + v_{n-4}) \\ &= p(p+2)u_{n-1} - (p+2)u_{n-3} \\ &= (p+2)(pu_{n-1} - u_{n-3}) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\{v_n\}$ dizisinin tanımından $v_n + v_{n+2} = (p+2)u_{n+1}$ olup ispat tamamlanır.

2.3. Önerme

$\{u_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için

$$u_n + u_{n+4} = pu_{n+2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$\{u_n\}$ dizisinin tanımından $u_{n+4} = pu_{n+2} - u_n$ olur ve bu eşitliğin her iki tarafına u_n eklersek $u_n + u_{n+4} = u_n + (pu_{n+2} - u_n) = pu_{n+2}$ ifadesini elde ederiz.

2.4. Önerme

$\{v_n\}$ genelleştirilmiş Lucas dizisi için

$$v_n + v_{n+4} = pv_{n+2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$\{v_n\}$ dizisinden $v_{n+4} = pv_{n+2} - v_n$ yazarız. Burada eşitliğin her iki tarafına v_n eklersek $v_n + v_{n+4} = v_n + (pv_{n+2} - v_n) = pv_{n+2}$ olarak elde ederiz.

2.5. Önerme

$\{u_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci ve $\{v_n\}$ genelleştirilmiş Lucas dizileri olmak üzere

$$u_{n-3} + u_{n+3} = (p-1)v_n$$

dir.

İspat

$\{u_n\}$ dizisinin tanımından $u_{n+3} = pu_{n+1} - u_{n-1}$ ve $u_{n+1} = pu_{n-1} - u_{n-3}$ yazabiliriz.

Buradan $u_{n+3} + u_{n-1} = pu_{n+1}$ ve $u_{n+1} + u_{n-3} = pu_{n-1}$ 'dir. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$u_{n+3} + u_{n-1} + u_{n+1} + u_{n-3} = pu_{n+1} + pu_{n-1}$$

$$(u_{n+3} + u_{n-3}) + (u_{n-1} + u_{n+1}) = p(u_{n+1} + u_{n-1})$$

elde ederiz. Böylece Teorem 2.7 'den $(u_{n+3} + u_{n-3}) + v_n = pv_n$ ve $(u_{n+3} + u_{n-3}) = (p-1)v_n$ eşitliği sağlanır.

2.11. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için

$$au_{2n+1} = u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Teorem 2.8 'den dolayı $u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n = u_{2n+2} - u_{2n}$ 'dir. Teorem 2.3 'den

$$u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n = (au_{2n+1} + u_{2n}) - u_{2n} = au_{2n+1}$$

2.12. Teorem

$\{u_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci ve $\{v_n\}$ genelleştirilmiş Lucas dizileri olmak üzere

$$v_{2n+1} = u_{n+1}v_{n+1} + u_n v_n$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Teorem 2.8 'i göz önüne alırsak $u_{n+1}v_{n+1} + u_n v_n = u_{2n+2} + u_{2n}$ yazarız. Teorem 2.7 'den $u_{n+1}v_{n+1} + u_n v_n = v_{2n+1}$ olduğu görülür.

2.13. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ için

$$u_n u_{n+3} - u_{n+1} u_{n+2} = a(-1)^{n+1}$$

dir.

İspat

İspatta genelliği bozmayacağı için n 'i tek kabul edelim. Kabulümüzden $(n+3)$ ve $(n+1)$ çift sayı olur. Böylece Teorem 2.3 'den

$$a(u_n u_{n+3} - u_{n+1} u_{n+2}) = a u_n (a u_{n+2} + u_{n+1}) - a u_{n+2} (a u_n + u_{n-1}) = -a(u_{n-1} u_{n+2} - u_n u_{n+1})$$

olarak bulunur. Kabulümüz ve Teorem 2.4 'den

$$a(u_n u_{n+3} - u_{n+1} u_{n+2}) = -[u_{n-1}((p-2)u_{n+1} + a u_n) - u_{n+1}((p-2)u_{n-1} + a u_{n-2})]$$

dir. Gerekli düzenlemeleri yapar ve benzer şekilde devam edersek

$$\begin{aligned}
a(u_n u_{n+3} - u_{n+1} u_{n+2}) &= a(-1)^2 (u_{n-2} u_{n+1} - u_{n-1} u_n) \\
&\vdots \\
&= a(-1)^{n+1} (u_{-1} u_2 - u_0 u_1) \\
&= a^2 (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Eşitliğin her iki tarafı a 'ya bölünürse ispat hemen görülür.

2.14. Teorem

Genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_n\}$ için

$$v_n v_{n+3} - v_{n+1} v_{n+2} = a(p+2)(-1)^n$$

sağlanır.

İspat

İspatta genelliği bozmayacağı için n 'i çift kabul edelim. Kabulümüzden $(n+3)$ ve $(n+1)$ tek sayı olur. Buradan hareketle Teorem 2.5 'den

$$a(v_n v_{n+3} - v_{n+1} v_{n+2}) = av_n (av_{n+2} + v_{n+1}) - av_{n+2} (av_n + v_{n-1}) = -a(v_{n-1} v_{n+2} - v_n v_{n+1})$$

elde ederiz. Kabulümüz ve Teorem 2.6 'dan dolayı

$$a(v_n v_{n+3} - v_{n+1} v_{n+2}) = -[v_{n-1} ((p-2)v_{n+1} + av_n) - v_{n+1} ((p-2)v_{n-1} + av_{n-2})]$$

yazarız. Gerekli düzenlemeler yapılır benzer şekilde devam edilirse

$$a(v_n v_{n+3} - v_{n+1} v_{n+2}) = -[-a(v_{n-2} v_{n+1} - v_{n-1} v_n)]$$

$$\begin{aligned}
&= a(-1)^2 (v_{n-2}v_{n+1} - v_{n-1}v_n) \\
&\vdots \\
&= a(-1)^n (v_0v_3 - v_1v_2) \\
&= a(-1)^n (2a(p+1) - ap) \\
&= a(ap + 2a)(-1)^n
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece eşitliğin her iki tarafı a 'ya bölünürse, istenilen elde edilir.

2.15. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ için

$$au_{2m+n} = u_{2m+2}u_n - u_{2m}u_{n-2}$$

dir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. O halde $au_{2m+1} = u_{2m+2}u_1 - u_{2m}u_{-1}$ olduğunu gösterelim. $u_1 = 1$, $u_{-1} = 1$ ve Teorem 2.3 'den $u_{2m+2}u_1 - u_{2m}u_{-1} = u_{2m+2} - u_{2m} = au_{2m+1}$ elde edilir ve $n=1$ için eşitliğin doğruluğu gösterilmiş olur. Şimdi $n = 1, 2, 3, \dots, k$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Böylece

$$au_{2m+k} = u_{2m+2}u_k - u_{2m}u_{k-2} \quad (2.36)$$

ve

$$au_{2m+k-1} = u_{2m+2}u_{k-1} - u_{2m}u_{k-3} \quad (2.37)$$

eşitliklerine sahibiz. Buna göre eşitliğin $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

Eğer k tek sayı ise Eş. 2.36 'yı a ile çarpar ve Eş. 2.37 ile taraf tarafa toplarsak

$$a(au_{2m+k} + u_{2m+k-1}) = u_{2m+2}(au_k + u_{k-1}) - u_{2m}(au_{k-2} + u_{k-3})$$

olarak buluruz. Burada Teorem 2.3 'den $au_{2m+k+1} = u_{2m+2}u_{k+1} - u_{2m}u_{k-1}$ elde ederiz.

Eğer k çift sayı ise Eş. 2.36 'yı $(p-2)$ ve Eş. 2.37 'yi a ile çarpar ve taraf tarafa toplarsak

$$a[(p-2)u_{2m+k} + au_{2m+k-1}] = u_{2m+2}((p-2)u_k + au_{k-1}) - u_{2m}((p-2)u_{k-2} + au_{k-3})$$

olarak elde ederiz. Teorem 2.4 'den $a(au_{2m+k+1}) = a(u_{2m+2}u_{k+1} - u_{2m}u_{k-1})$ olup, burada eşitliğin her iki tarafı a 'ya bölünürse sonuç elde edilir. Böylece her n için ifadenin doğruluğu gösterilmiş olur.

2.16. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için

$$u_{2n}((v_{2n})^2 - 1) = u_{6n}$$

dir.

İspat

Teorem 2.15 'den $au_{6n} = au_{4n+2n} = (u_{4n+2}u_{2n} - u_{4n}u_{2n-2})$ 'dir. Teorem 2.8 'den

$au_{6n} = u_{2n}(u_{2n+1}v_{2n+1}) - u_{2n-2}(u_{2n}v_{2n})$ yazarız. Teorem 2.7 'den

$$au_{6n} = u_{2n} [u_{2n+1}(u_{2n+2} + u_{2n}) - u_{2n-2}(u_{2n+1} + u_{2n-1})]$$

elde ederiz. Teorem 2.3 'i kullanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} au_{6n} &= u_{2n} [u_{2n+1}(au_{2n+1} + 2u_{2n}) - (u_{2n} - au_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1})] \\ &= u_{2n} [a(u_{2n+1})^2 + 2u_{2n}u_{2n+1} - (u_{2n}u_{2n+1} + u_{2n}u_{2n-1} - au_{2n-1}u_{2n+1} - a(u_{2n-1})^2)] \\ &= u_{2n} [a(u_{2n+1})^2 + a(u_{2n-1})^2 + u_{2n}u_{2n+1} - u_{2n}u_{2n-1} + au_{2n-1}u_{2n+1}] \\ &= u_{2n} [a(u_{2n+1})^2 + a(u_{2n-1})^2 + (au_{2n-1} + u_{2n-2})u_{2n+1} - u_{2n}u_{2n-1} + au_{2n-1}u_{2n+1}] \\ &= u_{2n} [a((u_{2n+1})^2 + (u_{2n-1})^2 + 2u_{2n+1}u_{2n-1}) + u_{2n-2}u_{2n+1} - u_{2n}u_{2n-1}] \\ &= u_{2n} [a(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 + u_{2n-2}u_{2n+1} - u_{2n}u_{2n-1}] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece Teorem 2.7 ve Teorem 2.13 'den $au_{6n} = u_{2n} [a(v_{2n})^2 - a(-1)^{2n-2+1}]$ yazarız. Burada eşitliğin her iki tarafını a 'ya bölersek $u_{6n} = u_{2n} [(v_{2n})^2 - 1]$ elde ederiz.

2.17. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için

$$u_{2n} = aK$$

olacak şekilde bir K tamsayısı vardır.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 1$ olsun. Başlangıç koşulu $u_2 = a$ için $K = 1$ olur. Böylece $n = 1$ için iddia doğrulanır. Şimdi $n > 1$ için iddia doğru olsun,

yani $u_{2n} = aK$. Buna göre eşitliğin $(n+1)$ için doğru olduğunu gösterelim. Teorem 2.3 'den $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = au_{2n+1} + u_{2n}$ olup, kabulümüzden

$$u_{2n+2} = au_{2n+1} + aK = a(u_{2n+1} + K)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $u_{2n+1} + K = M$ olsun. O halde $u_{2n+2} = aM$ yazarız. Böylece $(n+1)$ için $u_{2n+2} = aM$ olacak şekilde bir M tamsayısı bulunur. Buda ispatı tamamlar.

2.18. Teorem

$\{u_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olmak üzere her n, m tamsayısı için

$$u_{2m} / u_{2mn}$$

dir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. u_{2m} / u_{2m} eşitliği sağlanır. O halde $n=1$ için iddia doğrudur. Şimdi kabul edelim ki $n=1,2,3,\dots,k$ için iddia doğru olsun, yani u_{2m} / u_{2mk} . Buna göre eşitliğin $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Teorem 2.15 'den $au_{2m(k+1)} = u_{2mk+2}u_{2m} - u_{2mk}u_{2m-2}$ şeklinde yazabiliriz. Teorem 2.17 'den $au_{2m(k+1)} = aKu_{2m} - aMu_{2mk}$ buluruz. Bu eşitliği a 'ya bölersek $u_{2m(k+1)} = Ku_{2m} - Mu_{2mk}$ elde ederiz. Kabulümüzden u_{2m} / u_{2mk} ve u_{2m} / u_{2m} olduğundan $u_{2m} / u_{2m(k+1)}$ olarak elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

3.GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİNİN BAZI KOMBİNATORİYAL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin bazı kombinatoriyal gösterimlerini elde edeceğiz.

3.1. Teorem

$\{u_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} u_{2i} = (p+2)^n u_{2n}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

EŐ. 2.16 'dan

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} u_{2i} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \frac{a}{\tau - \sigma} [\tau^i - \sigma^i] = \frac{a}{\tau - \sigma} \left[\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \tau^i - \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \sigma^i \right]$$

olup, burada Binom ağılımmı kullanarak

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} u_{2i} = \frac{a}{\tau - \sigma} [(1 + \tau)^{2n} - (1 + \sigma)^{2n}]$$

Şeklinde yazabiliriz. EŐ. 2.4 ve EŐ. 2.5 'den

$$1 + \tau = \frac{p+2 + \sqrt{p^2 - 4}}{2} = \sqrt{p+2} \sqrt{\tau} \quad (3.1)$$

$$1 + \sigma = \frac{p+2 - \sqrt{p^2 - 4}}{2} = -\sqrt{p+2} \sqrt{\sigma} \quad (3.2)$$

eşitliklerini elde edebiliriz. Buradan hareketle

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} u_{2i} = \frac{a}{\tau - \sigma} \left[(\sqrt{p+2} \sqrt{\tau})^{2n} - (-\sqrt{p+2} \sqrt{\sigma})^{2n} \right] = \frac{a(p+2)^n}{\tau - \sigma} [\tau^n - \sigma^n]$$

yazarız. Böylece Eş. 2.16 'dan $\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} u_{2i} = (p+2)^n u_{2n}$ olduğu görülür.

3.2. Teorem

$\{v_n\}$ genelleştirilmiş Lucas dizisi için

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} v_{2i} = (p+2)^n v_{2n}$$

dir.

İspat

Eş.2. 32 den

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} v_{2i} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (\tau^i + \sigma^i) = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \tau^i + \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \sigma^i$$

ifadesi elde edilir. Burada Binom açılımını göz önüne alırsak

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} v_{2i} = (1 + \tau)^{2n} + (1 + \sigma)^{2n}$$

yazabiliriz. Eş. 3.1 ve Eş. 3.2 'den

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} v_{2i} &= (\sqrt{p+2} \sqrt{\tau})^{2n} + (-\sqrt{p+2} \sqrt{\sigma})^{2n} \\ &= (p+2)^n \tau^n + (p+2)^n \sigma^n \\ &= (p+2)^n [\tau^n + \sigma^n] \end{aligned}$$

olarak bulabiliriz. Eş. 2.32 'den $\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} v_{2i} = (p+2)^n v_{2n}$ elde ederiz.

3.3. Teorem

Genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_n\}$ için

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} v_{2i} = (p+2)^{n+1} u_{2n+1}$$

sağlanır.

İspat

Eş. 2.32 'den

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} v_{2i} = \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} (\tau^i + \sigma^i) = \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} \tau^i + \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} \sigma^i$$

yazarız. Binom açılımdan

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} v_{2i} = (1+\tau)^{2n+1} + (1+\sigma)^{2n+1}$$

bulunur. Eş. 3.1 ve Eş. 3.2 'u kullanarak gerekli hesaplamaları yaparsak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} v_{2i} &= \left(\frac{p+2+\sqrt{p^2-4}}{2} \right)^{2n+1} + \left(\frac{p+2-\sqrt{p^2-4}}{2} \right)^{2n+1} \\ &= (\sqrt{p+2})^{2n+1} \left[\left(\frac{\sqrt{p+2}+\sqrt{p-2}}{2} \right)^{2n+1} - \left(\frac{\sqrt{p-2}-\sqrt{p+2}}{2} \right)^{2n+1} \right] \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece Eş. 2.23 'den $\sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} v_{2i} = (p+2)^{n+1} u_{2n+1}$ olarak bulunur.

Şimdi u_n ve v_n terimleri için bazı kombinatoriyal ifadeler vereceğiz. Bunun öncesinde u_n ve v_n terimlerinin ilk birkaç terimi için aşağıdaki tabloyu verelim.

$\frac{u_n}{u_0} = 1$	$\frac{v_n}{v_0} = 2$
$u_1 = 1$	$v_1 = a$
$u_2 = a$	$v_2 = p$
$u_3 = p-1$	$v_3 = a(p+1)$
$u_4 = ap$	$v_4 = p^2 - 2$
$u_5 = p^2 - p - 1$	$v_5 = a(p^2 + p - 1)$
$u_6 = a(p^2 - 1)$	$v_6 = p^3 - 3p$
$u_7 = p^3 - p^2 - 2p + 1$	$v_7 = a(p^3 + p^2 - 2p - 1)$
$u_8 = a(p^3 - 2p)$	$v_8 = p^4 - 4p^2 + 2$
$u_9 = p^4 - p^3 - 3p^2 + 2p + 1$	$v_9 = a(p^4 + p^3 - 3p^2 - 2p + 1)$
$u_{10} = a(p^4 - 3p^2 + 1)$	$v_{10} = p^5 - 5p^3 + 5p$

Şimdi daha sonra kullanacağımız bir eşitlik verelim.

$$\binom{n}{p} + 2\binom{n+1}{p-1} - \binom{n}{p-2} = \binom{n+2}{p} \quad (3.3)$$

3.4. Teorem

u_n ; n .ci genelleştirilmiş Fibonacci sayısı olsun. O halde $n \geq 1$ için

$$u_{2n} = a \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-1-k}{k} p^{n-1-2k} (-1)^k \quad (3.4)$$

ve

$$u_{2n-1} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left[\binom{n-1-k}{k} p^{n-1-2k} - \binom{n-2-k}{k} p^{n-2-2k} \right] (-1)^k \quad (3.5)$$

dir. Burada $\lfloor n \rfloor$; n 'yi geçmeyen en büyük tamsayıyı göstermektedir.

İspat

Eş. 3.4 'de $n \rightarrow n+1$ olarak alınırsa

$$u_{2n+2} = a \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} p^{n-2k} (-1)^k$$

bulunur ve bu ifadede $n \rightarrow 2n$ olarak alınırsa

$$u_{4n+2} = a \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{k} p^{2n-2k} (-1)^k \quad (3.6)$$

elde edilir. Şimdi Eş. 3.4 'ün doğru olduğunu göstermek için Eş. 3.6 'nın doğru olduğunu gösterelim. İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. Bu durumda

$$u_6 = a \sum_{k=0}^1 \binom{2-k}{k} p^{2(1-k)} (-1)^k = a \binom{2}{0} p^2 - ap^0 = a(p^2 - 1)$$

olup $n = 1$ için iddia doğrudur. Kabul edelim ki $n > 1$ için iddia doğru olsun. O halde

$$u_{4n-2} = a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2-k}{k} p^{2n-2k-2} (-1)^k \quad (3.7)$$

ifadesine sahibiz. Buna göre eşitliğin $(n+1)$ için doğru olduğunu gösterelim. $\{u_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$\begin{aligned} u_{4n+6} &= pu_{4n+4} - u_{4n+2} \\ &= p(pu_{4n+2} - u_{4n}) - u_{4n+2} \\ &= (p^2 - 1)u_{4n+2} - pu_{4n} \end{aligned}$$

ve

$$u_{4n+2} = pu_{4n} - u_{4n-2}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu son iki eşitliği kullanarak

$$u_{4n+6} = (p^2 - 1)u_{4n+2} - (u_{4n+2} + u_{4n-2}) = (p^2 - 2)u_{4n+2} - u_{4n-2}$$

bulabiliriz. Kabulümüzden Eş. 3.6 ve Eş. 3.7 'yi göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} u_{4n+6} &= (p^2 - 2)a \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{k} p^{2n-2k} (-1)^k - a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2-k}{k} p^{2n-2k-2} (-1)^k \\ &= (p^2 - 2)a \left[\binom{2n}{0} p^{2n} (-1)^0 - \binom{2n-1}{1} p^{2n-2} + \binom{2n-2}{2} p^{2n-4} - \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{n+3}{n-3} p^6 (-1)^{n-3} + \binom{n+2}{n-2} p^4 (-1)^{n-2} + \binom{n+1}{n-1} p^2 (-1)^{n-1} + (-1)^n \Big] \\
& - a \left[\binom{2n-2}{0} p^{2n-2} - \binom{2n-3}{1} p^{2n-4} + \dots + \binom{n+2}{n-4} p^6 (-1)^{n-4} \right. \\
& \left. + \binom{n+1}{n-3} p^4 (-1)^{n-3} + \binom{n}{n-2} p^2 (-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} \right] \\
= & ap^{2n+2} - \left[\binom{2n-1}{1} + 2 \binom{2n}{0} \right] ap^{2n} + \left[\binom{2n-2}{2} + 2 \binom{2n-1}{1} \right. \\
& \left. - \binom{2n-2}{0} \right] ap^{2n-2} - \left[\binom{2n-3}{3} + 2 \binom{2n-2}{2} - \binom{2n-3}{1} \right] ap^{2n-4} + \dots \\
& + \left[\binom{n+2}{n-2} (-1)^{n-2} + 2 \binom{n+3}{n-3} (-1)^{n-2} - \binom{n+2}{n-4} (-1)^{n-4} \right] ap^6 \\
& + \left[\binom{n+1}{n-1} (-1)^{n-1} + 2 \binom{n+2}{n-2} (-1)^{n-1} - \binom{n+1}{n-3} (-1)^{n-3} \right] ap^4 \\
& + \left[\binom{n}{n} (-1)^n + 2 \binom{n+1}{n-1} (-1)^n - \binom{n}{n-2} (-1)^{n-2} \right] ap^2 + \left[2(-1)^{n+1} - (-1)^{n-1} \right] a \\
= & ap^{2n+2} - \binom{2n+1}{1} ap^{2n} + \binom{2n}{2} ap^{2n-2} - \binom{2n-1}{3} ap^{2n-4} + \dots \\
& + \binom{n+4}{n-2} ap^6 (-1)^{n-2} + \binom{n+3}{n-1} ap^4 (-1)^{n-1} + \binom{n+2}{n} ap^2 (-1)^n + a(-1)^{n+1} \\
= & a \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2-k}{k} p^{2n-2k+2} (-1)^k
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu son eşitlikten ispat kolayca görülür. Benzer şekilde Eş. 3.5 'in de doğruluğu gösterilebilir.

Burada v_n ' ler için ispatını yapmayacağımız bir teorem vereceğiz.

3.5. Teorem

v_n ; n .ci genelleştirilmiş Lucas sayısı olsun. O halde $n \geq 1$ için

$$v_{2n} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left[\binom{n-1-k}{k} p^{n-2k} - 2 \binom{n-2-k}{k} p^{n-2-2k} \right] (-1)^k$$

ve

$$v_{2n+1} = a \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[\binom{n-k}{k} p^{n-2k} + \binom{n-k-1}{k} p^{n-1-2k} \right] (-1)^k$$

şeklinde yazılır.

4.ÜRETEÇ MATRİSLERİ

Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için üreteç matrisleri vereceğiz.

4.1. Teorem

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } X_n = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} & 0 \\ 0 & u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} \\ u_{2n} & 0 & u_{-(2n-2)} & 0 \\ 0 & u_{2n} & 0 & u_{-(2n-2)} \end{bmatrix} \quad 4 \times 4 \text{ mertebeli matrisler}$$

olmak üzere her n pozitif tamsayısı için

$$Z^{2n} = X_n$$

dir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 1$ olsun. O halde $u_0 = 0$, $u_2 = a$, $u_4 = pa$ başlangıç koşulları için $Z^2 = X_1$ olup $n = 1$ için iddia doğrudur. Şimdi kabul edelim ki n için iddia doğru olsun. Buna göre eşitliğin $(n+1)$ için doğru olduğunu göstereyim. Bu durumda tümevarım hipotezi ve kabulümüzden

$$Z^{2(n+1)} = Z^2 Z^{2n} = X_1 X_n$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a} \begin{bmatrix} u_4 & 0 & u_{-2} & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & u_{-2} \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{a} \begin{bmatrix} u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} & 0 \\ 0 & u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} \\ u_{2n} & 0 & u_{-(2n-2)} & 0 \\ 0 & u_{2n} & 0 & u_{-(2n-2)} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} u_4 u_{2n+2} + u_{-2} u_{-2n} & 0 & u_4 u_{-2n} + u_{-2} u_{-(2n-2)} & 0 \\ 0 & u_4 u_{2n+2} + u_{-2} u_{-2n} & 0 & u_4 u_{-2n} + u_{-2} u_{-(2n-2)} \\ u_2 u_{2n+2} & 0 & u_2 u_{-2n} & 0 \\ 0 & u_2 u_{2n+2} & 0 & u_2 u_{-2n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

buluruz. Daha sonra $u_0 = 0$, $u_2 = a$, $u_4 = pa$ başlangıç koşulları, $u_{-n} = (-1)^{n+1} u_n$ eşitliği ve $\{u_n\}$ dizisinin tanımı göz önüne alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} Z^{2(n+1)} &= \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a(pu_{2n+2} - u_{2n}) & 0 & a(pu_{-2n} - u_{-(2n-2)}) & 0 \\ 0 & a(pu_{2n+2} - u_{2n}) & 0 & a(pu_{-2n} - u_{-(2n-2)}) \\ au_{2n+2} & 0 & au_{-2n} & 0 \\ 0 & au_{2n+2} & 0 & au_{-2n} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a} \begin{bmatrix} u_{2n+4} & 0 & u_{-(2n+2)} & 0 \\ 0 & u_{2n+4} & 0 & u_{-(2n+2)} \\ u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} & 0 \\ 0 & u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} \end{bmatrix} \\ &= X_{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her n pozitif tamsayısı için ispat tamamlanır.

4.2. Teorem

Z matrisi Teorem 4.1 deki gibi ve $Y_n = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & u_{2n+4} & 0 & u_{-(2n+2)} \\ u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} & 0 \\ 0 & u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} \\ u_{2n} & 0 & u_{-(2n-2)} & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

her n pozitif tamsayısı için

$$Z^{2n+1} = Y_n$$

dir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 1$ olsun. $u_0 = 0$, $u_2 = a$, $u_4 = pa$, $u_6 = a(p^2 - 1)$ olduğundan $Z^3 = Y_1$ 'dir. O halde $n = 1$ için iddia doğrudur. Kabul

edelim ki eşitlik $n > 1$ için doğru olsun. Buna göre $(n+1)$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Kabulümüz ve Teorem 4.1 'den

$$\begin{aligned}
Z^{2(n+1)+1} &= Z^{2n+3} = Z^2 Z^{2n+1} = X_1 Y_n \\
&= \frac{1}{a} \begin{bmatrix} u_4 & 0 & u_{-2} & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & u_{-2} \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & u_{2n+4} & 0 & u_{-(2n+2)} \\ u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} & 0 \\ 0 & u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} \\ u_{2n} & 0 & u_{-(2n-2)} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} 0 & u_4 u_{2n+4} + u_{-2} u_{2n+2} & 0 & u_4 u_{-(2n+2)} + u_{-2} u_{2n} \\ u_4 u_{2n+2} + u_{-2} u_{2n} & 0 & u_4 u_{-2n} + u_{-2} u_{-(2n-2)} & 0 \\ 0 & u_2 u_{2n+4} & 0 & u_2 u_{-(2n+2)} \\ u_2 u_{2n+2} & 0 & u_2 u_{-2n} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $u_0 = 0$, $u_2 = a$, $u_4 = pa$, $u_{-n} = (-1)^{n+1} u_n$ eşitlikleri ve $\{u_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
Z^{2(n+1)+1} &= \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} 0 & a(pu_{2n+4} - u_{2n+2}) & 0 & a(pu_{-(2n+2)} - u_{-2n}) \\ a(pu_{2n+2} - u_{2n}) & 0 & a(pu_{-2n} - u_{-(2n-2)}) & 0 \\ 0 & au_{2n+4} & 0 & au_{-(2n+2)} \\ au_{2n+2} & 0 & au_{-2n} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & u_{2n+6} & 0 & u_{-(2n+4)} \\ u_{2n+4} & 0 & u_{-(2n+2)} & 0 \\ 0 & u_{2n+4} & 0 & u_{-(2n+2)} \\ u_{2n+2} & 0 & u_{-2n} & 0 \end{bmatrix} \\
&= Y_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her n pozitif tamsayısı için ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

1. Vajda, S., "Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section", *Halsted Press*, New York, 10-100 (1989).
2. Robbins, N., "Beginning Number Theory", *Wm. C. Brown Publishers*, Oxford, 200-240 (1993).
3. Hogatt Jr., V. E., "The Fibonacci and Lucas Numbers", *Houghton Mifflin*, Boston, 1-70 (1969).
4. Dunlap, R. A., "The Golden Ratio and Fibonacci Numbers", *World Scientific Pres*, 5-45 (1997).
5. Rosen, K., "Elementary Number Theory and Its Applications 3rd ed.", *Addison-Wesley*, Reading Mass, 20-50 (1992).
6. Lucas, E., "Theorie des Nombres", *Blanchard*, Paris, 1-70 (1961).
7. Serkland, C. E., "The Pell Sequence and Some Generalizations", Unpublished Master's Thesis", *San Jose State University*, San Jose, California, 92-136 (1972).
8. Horadam, A. F., "A Generalized Fibonacci Sequence", *Amer. Math. Monthly*, 68: 455-459 (1961).
9. Horadam, A. F., "Basic Properties of Certain Generalized Sequence of Numbers", *The Fibonacci Quarterly*, 3 (3):161-176 (1965).
10. Horadam, A. F., "Special Properties of Sequence $W_n(a, b; p, q)$ ", *The Fibonacci Quarterly*, 5 (5): 424-434 (1967).
11. Brousseau, B. A., "Linear Recursion Relations-Lesson Eight : Asymptotic Relations in Recursion Relations", *The Fibonacci Quarterly*, 8 (3): 311-316 (1970).
12. Horadam, A. F., "Pell Identities", *The Fibonacci Quarterly*, 9 (3): 245-252, 263 (1971).
13. Horadam, A. F. and Mahon, Bro. J. M., "Pell and Pell-Lucas Polynomials", *The Fibonacci Quarterly*, 23 (1): 7-20 (1985).
14. King, C. H., "Some Properties of the Fibonacci Numbers", Master's Thesis, *San Jose State College*, San Jose, 120-160 (1960).
15. Roab, J. A., "A Generalization of the Connection Between The Fibonacci Sequence and Pascal's Triangle", *The Fibonacci Quarterly*, 1 (3): 21-31 (1963).

16. Filippini, P. and Horadam, A. F., "Derivative Sequences of the Fibonacci and Lucas Polynomials", *Applications of Fibonacci Numbers*, edited by G. E. Bergum, A. N. Philippou and A. F. Horadam, **Kluwer Publishing**, Dordrecht, 99-108 (1991).
17. Buschman, R. G., "Fibonacci Numbers, Chebyshev Polynomials, Generalizations and Difference Equations", *The Fibonacci Quarterly*, 1 (4): 1-8 (1963).
18. Horadam, A. F., "Generating Functions of Powers of A Certain Generalized Sequence of Numbers", *Duke Mathematical Journal*, 32 (3): 437-446 (1965).
19. Yılmaz Özgür, N., "Generalizations of Fibonacci and Lucas Sequences", *Note di Matematica*, 21 (1): 113-125 (2002).
20. Yılmaz Özgür, N., "On the Sequences Related to Fibonacci and Lucas Numbers", *J. Korean Math. Soc.*, 42 (1): 135-151 (2005).
21. Wilf, H. S. , "Generatingfunctionology Third Ed. ", **A.K. Peters, Ltd.** , Wellesley M.A. , 1-245 (2006).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÇETİN, Miraç
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 15.01.1983 Yerköy
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 355 17 46
e-mail : miraccetin@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2004
Lise	Keçiören Lisesi	1999

Yabancı Dil

İngilizce