

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ABEL VE CESÀRO TOPLANABİLME METODLARI İÇİN
TAUBER TİPİ TEOREMLER**

Ümit TOTUR

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

II. Danışman: Doç. Dr. İbrahim ÇANAK

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2011**

TEZ ONAYI

Ümit Totur tarafından hazırlanan “**Abel ve Cesàro Toplanabilme Metodları için Tauber Tipi Teoremler**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

II. Danışman: Doç. Dr. İbrahim ÇANAK

Ege Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri :

Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI

Maltepe Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Ali KÖKCE

Süleyman Demirel Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER

Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Salih AYTAR

Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç Dr. Suna SALTAN

Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Mehmet Cengiz KAYACAN

Enstitü Müdür Vekili

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Tanımlar ve Gösterimler	3
2.2. Klasik Tauber Teorisine Kısa Bir Bakış	14
3. CESÀRO TOPLANABİLME METODU İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER.....	18
3.1. Kaynak Özeti.....	18
3.2. Lemmalar	22
3.3. Teorem 3.4 ün İspatı	27
4. ABEL TOPLANABİLME METODU İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER.....	31
4.1. Lemmalar	31
4.2. Teoremler ve İspatlar	32
4.3. Genelleştirilmiş Abel Toplanabilme Metodu İçin Tauber Tipi Teoremler	42
5. SONUÇLAR	48
6. KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	51

ÖZET

Doktora Tezi

ABEL VE CESÀRO TOPLANABİLME METODLARI İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Ümit TOTUR

**Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kısaca toplanabilme metodları ve Tauber teorisinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, tez boyunca kullanılacak olan tanım ve gösterimler verilmiş, klasik Tauber tipi teoremler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, Cesàro toplanabilme metodu için Tauber tipi teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Abel toplanabilme metodu için Tauber tipi teoremler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Abel toplanabilme metodu, Cesàro toplanabilme metodu, Tauber tipi teoremler, klasik kontrol modülü, genel kontrol modülü, tek taraflı sınırlılık, yavaş salınımlı dizi, tek taraflı yavaş salınımlı dizi.

2011, 52 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

TAUBERIAN THEOREMS FOR ABEL AND CESÀRO SUMMABILITY METHODS

Ümit TOTUR

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, historical development of classical Tauberian theory and summability theory are mentioned, shortly.

In the second chapter, the definitions and notations, which are going to be used throughout the thesis, are given and classical Tauberian theorems are investigated.

In the third chapter, Tauberian theorems for Cesàro summability method are given.

In the fourth chapter, Tauberian theorems for Abel summability method are given.

Key Words: Abel summability method, Cesàro summability method, Tauberian theorems, classical control modulo, general control modulo, one-sidedly boundedness, slowly oscillating sequence, one-sidedly slowly oscillating sequence.

2011, 52 pages

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca beni yönlendiren, bilgi ve tecrübesiyle bana her konuda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU'na; doktoranın her aşamasında bana destek olan Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN'e; yüksek lisanstan itibaren bu alanda çalışmamdaki en büyük pay sahibi, bir danışmandan öte gördüğüm ve her konuda destek aldığım, hayatımda önemli bir yere sahip olan İkinci Danışman'ım Doç. Dr. İbrahim ÇANAK'a teşekkür ederim.

Beni yetiştiren, maddi manevi her türlü desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve doktora yapıyorken hayatımı birleştirdiğim, bu zorlu süreçte her zaman yanımda olan hayatımın en değerli varlığı sevgili eşime sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

2225-D-10 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Ümit TOTUR

ISPARTA, 2011

SİMGELER DİZİNİ

$(\sigma_n^{(1)}(u))$	(u_n) dizisinin aritmetik ortalamalar dizisi
$u_n = O(1)$	(u_n) dizisinin sınırlı olması
$u_n = o(1)$	(u_n) dizisinin sıfıra yakınsak olması
Δu_n	(u_n) dizisinin geri farkı
$(\sigma_n^{(m)}(u))$	(u_n) dizisinin m . mertebeden aritmetik ortalamalar dizisi
$(V_n^{(0)}(\Delta u))$	(u_n) dizisinin bir üretici
$(V_n^{(m)}(\Delta u))$	$(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin m . mertebeden aritmetik ortalamalar dizisi
$\omega_n^{(o)}(u)$	(u_n) dizisinin klasik kontrol modülü
$\omega_n^{(m)}(u)$	(u_n) dizisinin m . mertebeden genel kontrol modülü
$[\lambda n]$	λn sayısının tam değeri
$\tau_{n, [\lambda n]}(u)$	(u_n) dizisinin De la Vallée Poussin ortalaması

1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisi XVIII. yüzyıldan günümüze kadar devam etmekte olan matematiksel analizin çok geniş bir çalışma alanıdır. Toplanabilme metodlarının genel amacı belli koşullar altında ıraksak dizilerin yapıları hakkında bazı bilgiler elde edilmesini sağlamaktır. Her yakınsak dizi aynı noktaya regüler bir metod tarafından toplanabilir. Fakat bir metod tarafından toplanabilen her dizinin yakınsak olması gerekmez. Bunun sağlanabilmesi uygun koşullar altında mümkündür. Bu türdeki çalışmalar A. Tauber (1897) in yapmış olduğu çalışmayla başlayıp günümüze kadar devam eden bir araştırma konusu olmuştur. Tauber (1897), Abel toplanabilme metodu tarafından toplanabilen bir dizinin hangi koşullar altında yakınsak olduğunu göstermiştir. Bu alanda ilk çalışmayı Tauber yaptığı için bir toplanabilme metodundan yakınsaklığın yeniden elde edilmesini sağlayan koşullara Tauber koşulu ve bu türdeki teoremlere Tauber tipi teorem adı verilmektedir. Bu tez boyunca sadece Abel ve Cesàro toplanabilme metodu ele alınacak ve bu metodlar için Tauber tipi teoremler verilecektir.

Literatürdeki klasik çalışmalardaki amaç Tauber'in verdiği koşulları zayıflatmak olmuştur. Bu alanda yapılan çalışmalardan başlıcaları, Littlewood (1910), Landau (1910), Hardy ve Littlewood (1914), Schmidt (1925) ve Karamata (1930) olarak sıralanabilir.

Daha sonra Dik (2001a) ve Dik (2001b) çalışmalarında bir dizinin tamsayı mertebeli salınım davranışlarının genel kontrol modülü kavramını kullanarak klasik Tauber tipi teoremlerdeki koşulları genelleştirip Abel ve Cesàro toplanabilme metodu için yeni tipte teoremler elde etmişlerdir.

Çanak ve Totur (2007), Dik (2001a) ve Dik (2001b) tarafından kullanılan bir dizinin tamsayı mertebeli salınım davranışlarının genel kontrol modülü tanımından daha işlevsel olarak yararlanabilmek için bu tanımın iki farklı yazılışını göstermişler ve bu farklı yazılışlar sayesinde Dik (2001a) ve Dik (2001b)'in verdikleri teoremleri genelleştirmişlerdir. Abel ve Cesàro toplanabilme metodu için bir dizinin tamsayı mertebeli salınım davranışlarının genel kontrol modülü kavramının koşul olarak

kullanıldığı Tauber tipi teoremlerin verildiği başlıca bazı çalışmalar Stanojević (1998), Stanojević (1999), Stanojević vd. (1999), Stanojević ve Stanojević (2002), Dik vd. (2004), Çanak vd. (2007), Çanak ve Totur (2008), Çanak (2008), Çanak (2010), Çanak vd. (2010) şeklinde sıralanabilir.

Yüzyılı aşkın bir süredir toplanabilme teorisinde yapılan bu alandaki çalışmalar günümüzde önemini hâlâ korumaya devam etmektedir.

Hazırlanan bu doktora çalışmasında Abel ve Cesàro toplanabilme metodları için Tauber tipi yeni teoremler verilmesi amaçlanmıştır. Bu nedenle, tezde öncelikle Abel toplanabilme metodu ve Cesàro toplanabilme metodu tanıtılıp, gerekli tanımlar ve notasyonlar verilmiştir. Daha sonra Tauber teorisinin gelişiminden ve yapılan bazı klasik çalışmalardan bahsedilmiştir. Son olarak da bu tipteki bazı klasik teoremler genelleştirilip Tauber tipi yeni teoremler verilmiştir. Ayrıca elde edilen bu teoremlerin önceki çalışmalarla karşılaştırılması yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanacak olan tanım ve gösterimlere yer verilecek olup, klasik Tauber teorisi özetlenecektir.

2.1. Tanımlar ve Gösterimler

$u = (u_n)$ reel sayıların bir dizisi olmak üzere, bu dizinin aritmetik ortalamaları

$\sigma_n^{(1)}(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ ile gösterilsin. Sonlu bir s sayısı için

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = s \quad (2.1)$$

ise (u_n) dizisine s ye *Cesàro toplanabilirdir* denir (Hardy, 1991).

Ayrıca, $0 \leq x < 1$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = s \quad (2.2)$$

ise (u_n) dizisine s ye *Abel toplanabilirdir* denir (Hardy, 1991).

Burada ilk akla gelen “Bu metodların sınıfı ile adi yakınsaklık sınıfı arasında nasıl bir ilişki vardır?” sorusudur. Bu soruya şöyle cevap verilebilir:

Her yakınsak dizi aynı noktaya Cesàro ve Abel toplanabilirdir. Fakat Cesàro veya Abel toplanabilir olan her dizinin yakınsak olması gerekmez. Aşağıdaki örnekte bu incelenebilir.

Örnek 2.1. $(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right)$ dizisi ıraksak bir dizidir. Fakat hem Cesàro hem de

Abel toplanabilirdir. Gerçekten (u_n) dizisi

$$(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right) = \begin{cases} 1, & n \text{ çift ise} \\ 0, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir ve (u_n) dizisinin aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\left(\sigma_n^{(1)}(u) \right) = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \right) = \begin{cases} \frac{n+2}{2(n+1)}, & n \text{ çift ise} \\ \frac{1}{2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olur. Buradan $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{1}{2}$ elde edilir. Yani $(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right)$ dizisi $\frac{1}{2}$ ye Cesàro

toplanabilir. Diğer taraftan, $0 \leq x < 1$ için,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right) x^n &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right) x^{n+1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \right) x^n \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \right) x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \right) x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

olduğu görülür. Böylece, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{1}{2}$ elde edilir. Yani $(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right)$

dizisi $\frac{1}{2}$ ye Abel toplanabilir.

Yukarıdaki örnekten de görüleceği gibi (2.1) ve (2.2) limitini gerçekleyen dizilerin sınıfları yakınsak olan dizilerin sınıfından daha geniştir.

Buna ek olarak, her Cesàro toplanabilir olan dizi aynı noktaya Abel toplanabilirdir. Fakat tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek Abel toplanabilirdir olup Cesàro toplanabilir olmayan bir dizi örneği olarak verilebilir.

Örnek 2.2. $(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k \right)$ dizisi ıraksak bir dizidir ve aynı zamanda Cesàro toplanabilir değildir. Fakat Abel toplanabilirdir. Çünkü (u_n) dizisi

$$(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k \right) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift ise} \\ -\frac{n-1}{2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir ve (u_n) dizisinin aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\sigma_n^{(1)}(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ -\frac{1}{2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir. Buradan $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisinin ıraksak olduğu görülür. Diğer bir taraftan, $0 \leq x < 1$ için,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k \right) x^n &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k \right) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k \right) x^{n+1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k \right) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k \right) x^n \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k \right) x^n \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $0 \leq x < 1$ için,

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ olduğundan, terim terime türevlenirse,

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ bulunur. Eşitliğin her iki tarafı x ile çarpılırsa,

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^n = -\frac{x}{(1+x)^2}$ elde edilir. O halde,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k \right) x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{x}{(1+x)^2} \right) = -\frac{1}{4}$$

bulunur. Yani $(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k \right)$ dizisi $-\frac{1}{4}$ e Abel toplanabilirdir.

Yukarıdaki Örnek 2.2 den de görüleceği gibi (2.2) limitini gerçekleyen dizilerin sınıfı (2.1) i gerçekleyen dizilerin sınıfından daha geniştir.

(2.1) veya (2.2) limitini gerçekleyen dizilerin sınıfından yakınsaklığa geçiş (u_n) dizisi üzerine konulan uygun koşullar altında mümkündür. Bu türdeki ilk çalışma A. Tauber (1897) tarafından yapılmıştır. Bu yüzden genel olarak bir toplanabilme metodundan yakınsaklığın yeniden elde edilmesi için konulan koşullara *Tauber koşulları* ve bu koşulları içeren teoremlere de *Tauber tipi teoremler* denir. Bu çalışma alanı günümüze kadar devam eden bir araştırma konusu olmuştur. Tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerinde sırasıyla Cesàro ve Abel toplanabilme metodları için Tauber tipi teoremler verilmiştir.

Tez boyunca kullanacak olan tanım ve gösterimler aşağıda verilmiştir.

Negatif olmayan bir n tamsayısı için, (u_n) reel bir sayı dizisi olsun. Tez boyunca $u_n = O(1)$ gösterimi (u_n) dizisinin sınırlılığını ve $u_n = o(1)$ gösterimi (u_n) dizisinin sıfıra yakınsamasını ifade edecektir. Ayrıca negatif olmayan bir C sayısı için $u_n \geq -C$ ise (u_n) dizisine tek taraflı sınırlı denir.

Bir (v_n) reel sayı dizisi için

$$u_n = v_n + \sum_{k=1}^n \frac{v_k}{k} + u_0$$

ise (u_n) dizisine (v_n) tarafından *düzenli olarak üretilen bir dizi* ve (v_n) dizisine (u_n) dizisinin bir *üreteci* denir (Dik vd., 2004).

Bir (u_n) dizisi ve her negatif olmayan n tamsayısı için $V_n^{(0)}(\Delta u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k \Delta u_k$ olmak üzere,

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u) \quad (2.3)$$

dir. Burada $\Delta u_n = u_n - u_{n-1}$, $u_{-1} = 0$ şeklinde tanımlanmıştır. Literatürde *Kronecker eşitliği* olarak da bilinen (2.3) eşitliği ispatlarda sıkça kullanılacaktır. Ayrıca

$\sigma_n^{(1)}(u) = u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{V_k^{(0)}(\Delta u)}{k}$ olduğundan (2.3) eşitliği

$$u_n = V_n^{(0)}(\Delta u) + \sum_{k=1}^n \frac{V_k^{(0)}(\Delta u)}{k} + u_0 \quad (2.4)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (2.4) eşitliğinden $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin (u_n) dizisinin bir üreteci olduğu kolayca görülür.

Negatif olmayan bir m tamsayısı için, (u_n) dizisinin m . mertebeden aritmetik ortalamalarının dizisi

$$\sigma_n^{(m)}(u) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sigma_k^{(m-1)}(u), & m \geq 1 \\ u_n, & m = 0 \end{cases}$$

şeklinde, $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin m . mertebeden aritmetik ortalamaları

$$V_n^{(m)}(\Delta u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n V_k^{(m-1)}(\Delta u) = \sigma_n^{(1)}(V^{(m-1)}(\Delta u))$$

şeklinde tanımlanır.

Bir (u_n) dizisinin salınım davranışlarının *klasik kontrol modülü* $\omega_n^{(o)}(u) = n\Delta u_n$ şeklinde; pozitif bir m tamsayısı için, salınım davranışlarının *m. mertebeden genel kontrol modülü* $\omega_n^{(m)}(u) = \omega_n^{(m-1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(m-1)}(u))$ şeklinde tanımlanmıştır (Dik, 2001a; Dik, 2001b).

Ayrıca bir (u_n) dizisi için, m pozitif bir tamsayısı olmak üzere, $(n\Delta)_m u_n = (n\Delta)_{m-1}((n\Delta)u_n) = n\Delta((n\Delta)_{m-1}u_n)$ şeklinde ifade edilir. Burada $(n\Delta)_0 u_n = u_n$ ve $(n\Delta)_1 u_n = n\Delta u_n$ dir.

Çanak ve Totur (2007), salınım davranışlarının *m. mertebeden genel kontrol modülünü* ispatlarda daha işlevsel olarak kullanabilmek için farklı iki yazılışını göstermişlerdir.

Lemma 2.3. Her $m \geq 1$ tamsayısı için $\omega_n^{(m)}(u) = (n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u)$ dir.

İspat. İspatta matematiksel tümevarım yöntemi kullanılacaktır. Salınım davranışlarının *m. mertebeden genel kontrol modülünün* tanımından, $m = 1$ için

$$\omega_n^{(1)}(u) = \omega_n^{(o)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(o)}(u)) = n\Delta u_n - V_n^{(o)}(\Delta u_n) = n\Delta V_n^{(o)}(\Delta u)$$

elde edilir. $m = k$ için eşitliğin doğru olduğu, yani

$$\omega_n^{(k)}(u) = (n\Delta)_k V_n^{(k-1)}(\Delta u) \quad (2.5)$$

olduğu kabul edilsin. Tümevarım gereği $m = k + 1$ için doğru olduğunu ispatlanmalıdır. Yani $\omega_n^{(k+1)}(u) = (n\Delta)_{k+1} V_n^{(k)}(\Delta u)$ eşitliğini gösterilmelidir. Tanımdan $\omega_n^{(k+1)}(u) = \omega_n^{(k)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(k)}(u))$ bulunur. (2.5) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \omega_n^{(k+1)}(u) &= (n\Delta)_k V_n^{(k-1)}(\Delta u) - (n\Delta)_k V_n^{(k)}(\Delta u) = (n\Delta)_k (V_n^{(k-1)}(\Delta u) - V_n^{(k)}(\Delta u)) \\ &= (n\Delta)_k ((n\Delta)V_n^{(k)}(\Delta u)) \end{aligned}$$

$$= (n\Delta)_{k+1} V_n^{(k)}(\Delta u)$$

elde edilir. Böylece, her pozitif m tamsayısı için Lemma 2.3 ün doğru olduğu sonucuna varılmış olur.

Lemma 2.4. Her $m \geq 1$ tamsayısı için, $\binom{m-1}{j} = \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-j)}{j!}$ olmak

üzere $\omega_n^{(m)}(u) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m-1}{j} n\Delta V_n^{(j)}(\Delta u)$ dir.

İspat İspatta matematiksel tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $m=1$ için,

$$\omega_n^{(1)}(u) = n\Delta u_n - V_n^{(0)}(\Delta u_n) = n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = \sum_{k=0}^0 (-1)^k \binom{0}{k} n\Delta V_n^{(k)}(\Delta u) \text{ elde edilir. } m=k$$

için eşitliğin doğru olduğu kabul edilsin. Bu

$$\omega_n^{(k)}(u) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} n\Delta V_n^{(j)}(\Delta u) \quad (2.6)$$

ile gösterilir. Tümevarım gereği $m = k+1$ için doğru olduğunu ispatlanmalıdır. Yani

$$\omega_n^{(k+1)}(u) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} n\Delta V_n^{(j)}(\Delta u) \text{ eşitliğini gösterilmelidir. Tanımdan}$$

$$\omega_n^{(k+1)}(u) = \omega_n^{(k)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(k)}(u)) \text{ bulunur. (2.6) eşitliğinden,}$$

$$\omega_n^{(k+1)}(u) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} n\Delta V_n^{(j)}(\Delta u) - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} n\Delta V_n^{(j+1)}(\Delta u)$$

elde edilir. İkinci toplamda $j+1 = i$ olarak alınırsa,

$$\omega_n^{(k+1)}(u) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} n\Delta V_n^{(j)}(\Delta u) + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k-1}{i-1} n\Delta V_n^{(i)}(\Delta u) \quad (2.7)$$

bulunur. (2.7) eşitliğinin ikinci toplamında j indisine göre yeniden yazıp, birinci toplamın ilk terimi ve ikinci toplamın son terimi ayrı olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\omega_n^{(k+1)}(u) &= (-1)^0 \binom{k-1}{0} n \Delta V_n^{(o)}(\Delta u) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} n \Delta V_n^{(j)}(\Delta u) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j-1} n \Delta V_n^{(j)}(\Delta u) + (-1)^k \binom{k-1}{k-1} n \Delta V_n^{(k)}(\Delta u) \quad (2.8)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.8) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\omega_n^{(k+1)}(u) &= (-1)^0 \binom{k-1}{0} n \Delta V_n^{(o)}(\Delta u) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \left[\binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1} \right] n \Delta V_n^{(j)}(\Delta u) \\
&\quad + (-1)^k \binom{k-1}{k-1} n \Delta V_n^{(k)}(\Delta u)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Kombinasyon özelliğinden $\binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1} = \binom{k}{j}$ olduğu hatırlanarak,

$$\begin{aligned}
\omega_n^{(k+1)}(u) &= (-1)^0 \binom{k-1}{0} n \Delta V_n^{(o)}(\Delta u) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} n \Delta V_n^{(j)}(\Delta u) \\
&\quad + (-1)^k \binom{k-1}{k-1} n \Delta V_n^{(k)}(\Delta u) \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} n \Delta V_n^{(j)}(\Delta u)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Böylece her pozitif m tamsayısı için Lemma 2.4 ün doğru olduğu sonucuna varılmış olur.

Schmidt (1925), bir (u_n) dizisinin yavaş salınımlı olmasını aşağıdaki gibi tanımlamıştır (Hardy, 1991; Boos, 2000; Korevaar, 2004).

Tanım 2.5. $n > m \rightarrow \infty$ için $\frac{n}{m} \rightarrow 1$ olmak üzere $u_n - u_m = o(1)$ sağlanıyorsa (u_n) dizisine *yavaş salınımlı dizi* denir.

Stanojević (1998) yavaş salınımlı dizi tanımını daha işlevsel olarak kullanabilmek için yavaş salınımlı diziyi aşağıdaki gibi yeniden tanımlamıştır.

Tanım 2.6. Bir (u_n) dizisi için, $[\lambda n]$, λn nin tam değeri olmak üzere,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \limsup_n \max_{n+1 \leq k \leq [\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^k \Delta u_j \right| = 0$$

ise (u_n) dizisine *yavaş salınımlı dizi* denir. Yavaş salınımlı dizilerin sınıfı yakınsak olan dizilerin sınıfını kapsar. Yani her yakınsak dizi yavaş salınımlıdır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $(u_n) = (\log n)$ dizisi yavaş salınımlıdır fakat yakınsak değildir. Gerçekten,

$$\sum_{j=n+1}^k \Delta \log j = \sum_{j=n+1}^k \log \left(\frac{j}{j-1} \right) = \log \prod_{j=n+1}^k \frac{j}{j-1} = \log \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdots \frac{k}{k-1} \right)$$

olur. Buradan tanım uygulanırsa, $\max_{n+1 \leq k \leq [\lambda n]} \log \left(\frac{k}{n} \right) = \log \left(\frac{[\lambda n]}{n} \right)$ elde edilir. Önce $n \rightarrow \infty$ için üst limit alıp ardından $\lambda \rightarrow 1^+$ için limit alındığında tanımın sağlandığı görülür. Ayrıca yavaş salınımlılığın tanımından, bir (u_n) dizisi yavaş salınımlı ise $\Delta u_n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$ olduğu kolayca görülebilir.

Dik (2001b), bir (u_n) dizisinin yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter koşulun $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin yavaş salınımlı ve sınırlı olması gerektiğini göstermiştir. Böylece yavaş salınımlı bir dizinin aritmetik ortalamalarının dizisinin de yavaş salınımlı olduğu (2.4) ten söylenebilir.

Şimdi verilecek tanım, yavaş salınımlı dizi tanımının bir genelleştirilmesidir. Bu tanım Dik (2001a) ve Dik (2001b) tarafından verilmiştir.

Tanım 2.7. Bir (u_n) dizisi ve $\lambda > 1$ için $[\lambda n]$, λn nin tam değeri olmak üzere,

$$\limsup_n \max_{n+1 \leq k \leq [\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^k \Delta u_j \right| < \infty$$

ise (u_n) dizisine *ılımlı salınımlı dizi* denir. Tanımdan yavaş salınımlı her dizinin ılımlı salınımlı olduğu kolayca görülür. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin,

$$u_n = \begin{cases} 1, & k = 2^n, \quad n = 1, 2, \dots \\ -1, & k = 2^n + 1, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

dizisi ılımlı salınımlıdır fakat yavaş salınımlı değildir.

Dik (2001b), bir (u_n) dizisi ılımlı salınımlı ise $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin sınırlı olduğunu göstermiştir. Dik tarafından verilen bu sonuç ile ılımlı salınımlı olan bir dizinin aritmetik ortalamaları dizisinin yavaş salınımlı olduğu görülür.

Aşağıdaki tanım, yavaş salınımlı dizi tanımının başka bir genelleştirilmesidir. Bu tanım Szász (1952) tarafından verilmiştir.

Tanım 2.8. Bir $u = (u_n)$ dizisi için $[\lambda n]$, λn nin tam değeri olmak üzere,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \limsup_n \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} (|\Delta u_j| - \Delta u_j) = 0$$

ise (u_n) dizisine *tek taraflı yavaş salınımlı dizi* denir.

Tanımdan kolayca görüleceği gibi her yavaş salınımlı dizi tek taraflı yavaş salınımlıdır (Szász, 1952). Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $(u_n) = (n)$ dizisi tek taraflı yavaş salınımlıdır ama yavaş salınımlı değildir.

Szász (1952), bir (u_n) dizisi tek taraflı yavaş salınımlı ise $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin tek taraflı sınırlı olduğunu göstermiştir.

Yavaş salınımlı bir dizinin başka bir genelleştirilmesi Schmidt (1925) tarafından verilmiştir (Bingham vd., 1989).

Tanım 2.9. Bir (u_n) dizisi için, $[\lambda n]$, λn nin tam değeri olmak üzere,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \liminf_n \min_{n \leq k \leq [\lambda n]} \sum_{j=n+1}^k \Delta u_j \geq 0$$

ise (u_n) dizisine *yavaş azalan dizi* denir.

Salınım davranışlarıyla ilgili verilen tanımlardan aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Eğer $\omega_n^{(0)}(u) = O(1)$ ise (u_n) dizisi yavaş salınımlıdır. Ayrıca eğer bir $C > 0$ için $\omega_n^{(0)}(u) \geq -C$ ise (u_n) dizisi yavaş azalandır (Boos, 2000).

Tek taraflı yavaş salınım dizi ile yavaş azalan dizi arasındaki ilişki Szász (1952)'ın sonucundan elde edilebilir öyle ki; bir (u_n) dizisi tek taraflı yavaş salınımlı ise aritmetik ortalamalarının dizisi olan $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi yavaş azalandır.

Bu kısımda bir reel sayı dizisinin farklı tür ortalamalarından bahsedilecektir.

Bir (u_n) dizisinin *De la Vallée Poussin ortalaması*, n yeterince büyük olmak üzere,

$\lambda > 1$ için

$$\tau_{n, [\lambda n]}^>(u) = \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} u_k$$

ve $0 < \lambda < 1$ için

$$\tau_{n, [\lambda n]}^<(u) = \frac{1}{n - [\lambda n]} \sum_{k=[\lambda n]+1}^n u_k$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca Agnew (1932), yukarıdaki tanımı genelleştirerek (u_n) dizisinin $D_{p,q}$ ile gösterilen *ertelenmiş Cesàro ortalamasını*,

$$(D_{p,q}u)_n = \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} u_k$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada negatif olmayan tamsayıların dizileri olan (p_n) ve (q_n) , $p_n < q_n$ ve $q_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ koşullarını sağlamaktadırlar.

Bu tez boyunca $P_n := \frac{p_n}{n}$ ve $Q_n := \frac{q_n}{n}$ olmak üzere, $(\frac{P_n}{P_n-1})$ ve $(\frac{Q_n}{1-Q_n})$ dizilerinin sınırlı olduğu kabul edilecektir ve (u_n) dizisinin *ertelenmiş Cesàro ortalamalarının dizisi* $p_n > n$ için

$$(D_{n,p}u)_n = \frac{1}{p_n - n} \sum_{k=n+1}^{p_n} u_k$$

ve $n > q_n$ için

$$(D_{q,n}u)_n = \frac{1}{n - q_n} \sum_{k=q_n+1}^n u_k$$

şeklinde alınacaktır.

2.2. Klasik Tauber Teorisine Kısa Bir Bakış

Klasik Tauber teoremlerinde, dizinin kendisini ya da salınım davranışlarının klasik kontrol modülösunu kısıtlayan bazı araçlardan yararlanarak (2.1) veya (2.2) limitlerinden birini gerçekleyen dizilerin sınıfından yakınsak dizilerin sınıfı elde edilmektedir. İlk olarak Tauber (1897), (u_n) dizisi için (2.2) limiti mevcut ve

$$\omega_n^{(o)}(u) = o(1) \tag{2.9}$$

ise (u_n) dizisinin yakınsak olduğunu göstermiştir (Hardy, 1991; Boos, 2000; Korevaar, 2004). Bu teoreme literatürde *Tauber'in Birinci Teoremi* denir.

Tauber (1897), (2.9) koşulunu daha zayıf bir koşul olan $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra yakınsamasıyla değiştirilebileceğini göstermiştir (Peyerimhoff, 1969; Powell ve Shah, 1972; Hardy, 1991; Korevaar, 2004). Bu teorem literatürde *Tauber'in İkinci Teoremi* olarak adlandırılır.

Teorem 2.10. (*Tauber'in İkinci Teoremi*) (u_n) dizisi için (2.2) limiti mevcut ve

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = \sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) = o(1) \quad (2.10)$$

ise (u_n) dizisi yakınsaktır.

Bundan sonra yapılan çalışmalarda (2.1) veya (2.2) limitinin varlığından yakınsaklığı daha zayıf araçlarla elde edilebilmesi amaçlanmıştır.

Littlewood (1910), (2.9) koşulunun önemli bir genelleştirilmesi olan

$$\omega_n^{(o)}(u) = O(1) \quad (2.11)$$

koşulu ile (2.2) limitinin varlığından yakınsaklığın elde edilebildiğini göstermiştir (Peyerimhoff, 1969; Powell ve Shah, 1972; Hardy, 1991; Korevaar, 2004).

Fakat Rényi (1946), (2.11) koşulu yerine $V_n^{(0)}(\Delta u) = \sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) = O(1)$ koşulu alındığından (2.2) limitinin varlığından (u_n) dizisinin yakınsaklığının elde edilemediği kanıtlamıştır. Buna ek olarak, bir (u_n) dizisi için (2.2) limiti mevcut ve $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ ise (u_n) dizisinin yakınsaklığı yerine $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisinin yakınsaklığının elde edilebileceği görülür.

Landau (1910), (u_n) dizisi için (2.1) limiti mevcut ve bir $C > 0$ için,

$$\omega_n^{(o)}(u) \geq -C \quad (2.12)$$

ise (u_n) dizisinin yakınsaklığını elde etmiştir (Hardy, 1991; Korevaar, 2004).

Daha sonra, Hardy ve Littlewood (1914), Landau'nun verdiği koşul ile Abel toplanabilir bir dizinin yakınsak olabildiğini göstermişlerdir. Bu teoreme de literatürde *Hardy-Littlewood Teoremi* adı verilir (Hardy, 1991; Korevaar, 2004).

Teorem 2.11. (*Hardy-Littlewood Teoremi*) (u_n) dizisi için (2.2) limiti mevcut ve (2.12) koşulu sağlanıyorsa (u_n) dizisi yakınsaktır.

Klasik Tauber teorisinin temelini oluşturan bu çalışmaların ardından yakınsaklığın yeniden elde edilebilmesi için yeni araçlara ihtiyaç duyulmuştur. İlk kısımda verilen yavaş salınımlılık tanımı bu araçlardan biridir. Schmidt (1925), Littlewood'un verdiği (2.11) koşulunun (u_n) dizisinin yavaş salınlı olması koşulu ile yer değiştirebileceğini göstermiştir. Bu teoreme literatürde *Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi* denir (Hardy, 1991; Korevaar, 2004).

Teorem 2.12. (*Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi*) (u_n) dizisi için (2.2) limiti mevcut ve (u_n) dizisi yavaş salınlı ise (u_n) yakınsaktır.

Ayrıca Schmidt (1925), (u_n) dizisinin yavaş azalan olmasıyla da Abel toplanabilme metodundan yakınsaklığa geçiş yapılabildiğini göstermiştir (Hardy, 1991; Korevaar, 2004).

Teorem 2.13. (u_n) dizisi için (2.2) limiti mevcut ve (u_n) dizisi yavaş azalan ise (u_n) yakınsaktır.

Benzer olarak Stanojević (1999), bir (u_n) dizisi (2.1) limitini sağlıyorsa ve Stanojević anlamında yavaş salınlı ise (u_n) dizinin yakınsak olduğunu göstermiştir.

Karamata (1930) yaptığı çalışmasında Abel toplanabilme metodu ile Cesàro toplanabilme metodu arasındaki ilişkiyi incelemiş ve Abel toplanabilir bir dizinin

kendisi üzerine koşul koyarak dizinin Cesàro toplanabilir olduğunu elde etmiştir. Bu sonuç aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Bu teoreme literatürde *Karamata'nın Temel Teoreminin Sonucu* denir.

Teorem 2.14. (*Karamata'nın Temel Teoreminin Sonucu*) (u_n) dizisi için (2.2) limiti mevcut ve negatif olmayan bir C sayısı için $u_n \geq -C$ ise $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = s$ dir.

3. CESÀRO TOPLANABİLME METODU İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde Cesàro toplanabilme metodu için Tauber tipi teoremler hakkında literatürde yapılan çalışmalardan söz edilmiştir. Ayrıca bu çalışmalardaki koşulların ışığında bir dizinin ya da üreticinin Cesàro toplanabilir olmasından yakınsaklığın veya daha genel sonuçların elde edilmesini sağlayan koşullar verilmiştir. Bu koşulların önceki yapılan çalışmalardaki koşulların genelleştirilmesi olduğu gösterilmiştir.

3.1. Kaynak Özeti

Landau (1910)'nın Cesàro toplanabilme metodu için verdiği (2.12) koşulundan bir önceki bölümde bahsedilmiştir. Dik (2001b), Landau'nun teoremindeki bir dizinin salınım davranışlarının klasik kontrol modülusunun tek taraflı sınırlı olması koşulu yerine 1. mertebeden genel kontrol modülusunun tek taraflı sınırlı olmasının yeterli olduğunu göstermiştir. Yani, bir (u_n) dizisi için (2.1) limiti mevcut ve bir $C > 0$ için

$$\omega_n^{(1)}(u) \geq -C \quad (3.1)$$

ise $u = (u_n)$ dizisi yakınsaktır.

Çanak ve Totur (2007), Dik(2001b)'in teoremini geliştirerek aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.1. Bir $u = (u_n)$ dizisi için (2.1) limiti mevcut olsun. Negatif olmayan bir $M = (M_n)$ dizisi için

$$(\sigma_n^{(1)}(M)) \text{ yavaş salınımlı ve } \sigma_n^{(1)}(M) = O(1) \quad (3.2)$$

olmak üzere

$$\omega_n^{(2)}(u) \geq -M_n \quad (3.3)$$

ise (u_n) dizisi s ye yakınsaktır.

Bir (u_n) dizisinin Cesàro toplanabilmesinden yakınsaklığının elde edilmesi yerine bazı koşullar altında (u_n) dizisinin üretcecinin Cesàro toplanabilmesinden dizi hakkında daha genel bilgiler elde edilebilir. Bu amaç doğrultusunda Stanojević ve Stanojević (2002) aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 3.2. Bir (u_n) dizisinin üretceci sonlu bir s sayısına Cesàro toplanabilir olsun. Negatif olmayan bir $M = (M_n)$ dizisi için (3.2) koşulu sağlansın. O halde (3.3) sağlanıyorsa (u_n) dizisi yavaş salınımlıdır.

Çanak (2008), aşağıda verilen teoremde, (3.2) koşulu yerine daha genel koşullar koyarak (u_n) dizisinin üretcecinin Cesàro toplanabilmesinden (u_n) nin yavaş salınımlılığını elde etmiştir.

Teorem 3.2. Bir (u_n) dizisinin üretceci sonlu bir s sayısına Cesàro toplanabilir olsun. Negatif olmayan bir $M = (M_n)$ dizisi için

$$(\lambda - 1) \limsup_{n \rightarrow \infty} \tau_{n, [\lambda n]}^>(M) = o(1), \lambda \rightarrow 1^+ \quad (3.4)$$

$$(\lambda - 1) \limsup_{n \rightarrow \infty} \tau_{n, [\lambda n]}^<(M) = o(1), \lambda \rightarrow 1^- \quad (3.5)$$

olmak üzere

$$\omega_n^{(2)}(u) \geq -M_n$$

ise (u_n) dizisi yavaş salınımlıdır.

Tezin bu bölümünde, Çanak (2008)'in teoremi genelleştirilerek daha zayıf koşullar altında bir dizinin üretcecinin Cesàro toplanabilmesinden dizinin yavaş salınımlılığı elde edilmiştir.

Teorem 3.4. $u = (u_n)$ dizisi reel sayıların bir dizisi olsun. Negatif olmayan bir $M = (M_n)$ dizisi için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n - n}{n} \right) (D_{n,p} M)_n = 0 \quad (3.6)$$

ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - q_n}{q_n} \right) (D_{q,n} M)_n = 0 \quad (3.7)$$

olmak üzere

$$\omega_n^{(m)}(u) \geq -M_n \quad (3.8)$$

koşulu sağlansın.

Eğer $V^{(0)}(\Delta u) = (V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi sonlu bir s sayısına Cesàro toplanabilir ise $u = (u_n)$ yavaş salınımlıdır.

Örnek 3.5. (u_n) dizisi $u_n = \begin{cases} 1 & , n = 2^j, j = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$ şeklinde tanımlansın.

(u_n) dizisinin iki alt dizisi farklı değerlere yakınsadığından (u_n) dizisinin yakınsak olmadığı açıktır. Fakat $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisinin yavaş salınımlı olduğu Teorem 3.4 yardımıyla gösterilebilir. Gerçekten,

(u_n) dizisinin klasik kontrol modülü yazıldığında

$$\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = \begin{cases} j & , n = 2^j, j = 1, 2, 3, \dots \\ -j & , n = 2^j + 1, j = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

elde edilir. Buradan $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin sınırlı olduğu kolayca görülür.

$(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi için (3.8) koşulu $(M_n) = (C)$ ve $m = 1$ alındığında sağlanır. Ayrıca $\lambda > 1$ için $p_n = [\lambda n]$ alındığında (3.6) koşulu ve $0 < \lambda < 1$ için $q_n = [\lambda n]$ alındığında (3.7) koşulu sağlanır.

Bunlara ek olarak, $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n x^n$ serisi düşünölsün. Bu seri bir fonksiyon olarak $f(\Delta u, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$ ile ifade edilebilir. Burada $0 \leq x < 1$ ise $f(\Delta u, x) \geq 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece

$$\liminf_{x \rightarrow 1^-} f(\Delta u, x) \geq 0 \quad (3.9)$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$f(\Delta u, x) = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} x^{2^n} \leq (1-x) \left(x^2 + x^4 + x^8 + C \left(\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \right)^{-1} \right)$$

olduğı görülür. $x \rightarrow 1^-$ için üst limit alındığında

$$\limsup_{x \rightarrow 1^-} f(\Delta u, x) \leq 0 \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.9) ve (3.10) dan (u_n) dizisi sıfıra Abel toplanabilir olur. (2.3) eşitliğinden $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ dizisi de sıfıra Abel toplanabilir olur. Teorem 2.11 den dolayı $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ sıfıra yakınsaktır.

O halde Teorem 3.4 ün tüm koşulları $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi için sağlanmıştır. Böylece $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi yavaş salınımlı olur.

Teorem 3.4 ü ispatlayabilmek için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç duyulacaktır.

3.2. Lemmalar

Lemma 3.6. $u = (u_n)$ dizisi verilsin. $p_n > n$ için,

$$(i) \quad (D_{n,p}u)_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{p_n + 1}{p_n - n} (\sigma_{p_n}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u))$$

ve $n > q_n$ için

$$(ii) \quad (D_{q,n}u)_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{q_n + 1}{n - q_n} (\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_{q_n}^{(1)}(u))$$

dir.

İspat. (i) Bir (u_n) dizisinin ertelenmiş Cesàro ortalaması tanımından $p_n > n$ için,

$$(D_{n,p}u)_n = \frac{1}{p_n - n} \sum_{k=n+1}^{p_n} u_k = \frac{1}{p_n - n} \left(\sum_{k=0}^{p_n} u_k - \sum_{k=0}^n u_k \right) \quad (3.11)$$

Aritmetik ortalama tanımından

$$\sum_{k=0}^{p_n} u_k = (p_n + 1) \sigma_{p_n}^{(1)}(u) \text{ ve } \sum_{k=0}^n u_k = (n + 1) \sigma_n^{(1)}(u)$$

olduğundan (3.11) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$(D_{n,p}u)_n = \frac{p_n + 1}{p_n - n} \sigma_{p_n}^{(1)}(u) - \frac{n + 1}{p_n - n} \sigma_n^{(1)}(u)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafından $\sigma_n^{(1)}(u)$ çıkarılırsa

$$(D_{n,p}u)_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{p_n + 1}{p_n - n} (\sigma_{p_n}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u))$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

(ii) Bir (u_n) dizisinin ertelenmiş Cesàro ortalaması tanımından $n > q_n$ için,

$$(D_{q,n}u)_n = \frac{1}{n - q_n} \sum_{k=q_n+1}^n u_k = \frac{1}{n - q_n} \left(\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{q_n} u_k \right) \quad (3.12)$$

dir. Aritmetik ortalama tanımından

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)\sigma_n^{(1)}(u) \text{ ve } \sum_{k=0}^{q_n} u_k = (q_n+1)\sigma_{q_n}^{(1)}(u)$$

olduğundan bu ifadeler (3.12) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$(D_{q,n}u)_n = \frac{n+1}{n - q_n} \sigma_n^{(1)}(u) - \frac{q_n+1}{n - q_n} \sigma_{q_n}^{(1)}(u)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafından $\sigma_n^{(1)}(u)$ çıkarılırsa

$$(D_{q,n}u)_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{q_n+1}{n - q_n} (\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_{q_n}^{(1)}(u))$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Lemma 3.6 dan (u_n) dizisi s ye Cesàro toplanabilir ise, (u_n) dizisinin ertelenmiş Cesàro ortalamasının da s ye yakınsak olduğu kolayca görülür.

Lemma 3.7. $u = (u_n)$ dizisi verilsin. $p_n > n$ için

$$(i) \quad u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{p_n+1}{p_n - n} (\sigma_{p_n}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u)) - \frac{1}{p_n - n} \sum_{k=n+1}^{p_n} (u_k - u_n)$$

ve $n > q_n$ için

$$(ii) \quad u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{q_n+1}{n - q_n} (\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_{q_n}^{(1)}(u)) - \frac{1}{n - q_n} \sum_{k=q_n+1}^n (u_k - u_n)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (i) Tanımlarından hareketle $(D_{n,p}u)_n - u_n$ farkı yazılırsa

$$(D_{n,p}u)_n - u_n = \frac{1}{p_n - n} \sum_{k=n+1}^{p_n} u_k - u_n = \frac{1}{p_n - n} \sum_{k=n+1}^{p_n} (u_k - u_n)$$

elde edilir. Buradan, yukarıdaki eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$u_n = (D_{n,p}u)_n - \frac{1}{p_n - n} \sum_{k=n+1}^{p_n} (u_k - u_n)$$

olduğu görülür. Son eşitliğin her iki tarafından $\sigma_n^{(1)}(u)$ çıkarılırsa

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = ((D_{n,p}u)_n - \sigma_n^{(1)}(u)) - \frac{1}{p_n - n} \sum_{k=n+1}^{p_n} (u_k - u_n)$$

bulunur. Lemma 3.6 (i) den $(D_{n,p}u)_n - \sigma_n^{(1)}(u)$ eşitliği yerine konursa,

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{p_n + 1}{p_n - n} (\sigma_{p_n}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u)) - \frac{1}{p_n - n} \sum_{k=n+1}^{p_n} (u_k - u_n)$$

elde edilir. $\square$

(ii) Tanımlarından hareketle $(D_{q,n}u)_n - u_n$ farkı yazılırsa

$$(D_{q,n}u)_n - u_n = \frac{1}{n - q_n} \sum_{k=q_n+1}^n u_k - u_n = \frac{1}{n - q_n} \sum_{k=q_n+1}^n (u_k - u_n)$$

elde edilir. Buradan, yukarıdaki eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$u_n = (D_{q,n}u)_n - \frac{1}{n - q_n} \sum_{k=q_n+1}^n (u_k - u_n)$$

olduğu görülür. Son eşitliğin her iki tarafından $\sigma_n^{(1)}(u)$ çıkarılırsa

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = ((D_{q,n}u)_n - \sigma_n^{(1)}(u)) - \frac{1}{n - q_n} \sum_{k=q_n+1}^n (u_k - u_n)$$

bulunur. Lemma 3.6 (ii) den $(D_{n,p}u)_n - \sigma_n^{(1)}(u)$ eşitliği yerine konursa,

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{q_n + 1}{n - q_n} (\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_{q_n}^{(1)}(u)) - \frac{1}{n - q_n} \sum_{k=q_n+1}^n (u_k - u_n)$$

elde edilir. $\square$

Lemma 3.8. Negatif olmayan bir $M = (M_n)$ dizisi

$$\omega_n^{(0)}(u) \geq -M_n$$

koşulunu gerçeklerse,

$$(i) \quad -((D_{n,p}u)_n - u_n) \leq \frac{p_n - n}{n} (D_{n,p}M)_n$$

$$(ii) \quad u_n - (D_{q,n}u)_n \geq -\frac{n - q_n}{q_n} (D_{q,n}M)_n$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (i) Hipotez gereği $\omega_n^{(0)}(u) \geq -M_n$ olduğundan $-\Delta u_n \leq \frac{M_n}{n}$ olduğu kolayca

görülür. Bu eşitsizlikte her iki taraf $j = n+1, \dots, k$ için toplanırsa

$$\sum_{j=n+1}^k -\Delta u_j = -(u_k - u_n) \leq \sum_{j=n+1}^k \frac{M_j}{j} \quad (3.13)$$

olur. (3.13) eşitsizliği $k = n+1, \dots, p_n$ için toplanıp daha sonra bulunan eşitsizliğin

her iki tarafı $(\frac{1}{p_n - n})$ ile çarpılırsa

$$-\frac{1}{p_n - n} \sum_{k=n+1}^{p_n} (u_k - u_n) \leq \frac{1}{p_n - n} \sum_{k=n+1}^{p_n} \sum_{j=n+1}^k \frac{M_j}{j}$$

elde edilir. Ertelenmiş Cesàro ortalaması tanımı gereği son eşitsizlikten

$$-((D_{n,p}u)_n - u_n) \leq \sum_{j=n+1}^{p_n} \frac{M_j}{j} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=n+1}^{p_n} M_j$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı $p_n - n$ ile çarpılıp bölünürse,

$$-((D_{n,p}u)_n - u_n) \leq \frac{p_n - n}{n} \left(\frac{1}{p_n - n} \sum_{j=n+1}^{p_n} M_j \right)$$

bulunur. Burada, $M = (M_n)$ dizisi için ertelenmiş Cesàro ortalaması tanımından yararlanarak,

$$-((D_{n,p}u)_n - u_n) \leq \frac{p_n - n}{n} (D_{n,p}M)_n$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

(ii) Hipotez gereği $\omega_n^{(0)}(u) \geq -M_n$ olduğundan $\Delta u_n \geq -\frac{M_n}{n}$ olduğu kolayca görülür.

Bu eşitsizlikte her iki taraf $j = k+1, \dots, n$ için toplanırsa

$$\sum_{j=k+1}^n \Delta u_j = u_n - u_k \geq -\sum_{j=k+1}^n \frac{M_j}{j} \quad (3.14)$$

olur. (3.14) eşitsizliği $k = q_n + 1, \dots, n$ için toplanıp daha sonra bulunan eşitsizliğin

her iki tarafı $(\frac{1}{n - q_n})$ ile çarpılırsa

$$-\frac{1}{n - q_n} \sum_{k=q_n+1}^n (u_n - u_k) \geq -\frac{1}{n - q_n} \sum_{k=q_n+1}^n \sum_{j=k+1}^n \frac{M_j}{j}$$

elde edilir. Ertelenmiş Cesàro ortalaması tanımı gereği son eşitsizlikten

$$u_n - (D_{q,n}u)_n \geq - \sum_{j=q_n+1}^n \frac{M_j}{j} \geq - \frac{1}{q_n} \sum_{j=q_n+1}^n M_j$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı $n - q_n$ ile çarpılıp bölünürse,

$$u_n - (D_{q,n}u)_n \geq - \frac{n - q_n}{q_n} \left(\frac{1}{n - q_n} \sum_{j=q_n+1}^n M_j \right)$$

bulunur. Burada, $M = (M_n)$ dizisi için ertelenmiş Cesàro ortalaması tanımından yararlanarak,

$$u_n - (D_{q,n}u)_n \geq - \frac{n - q_n}{q_n} (D_{q,n}M)_n$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

3.3. Teorem 3.4 ün İspatı

Bu bölümde Teorem 3.4 ün ispatı verilip teoremden elde edilen sonuçlar gösterilecektir.

İspat. Hipotezden $\omega_n^{(m)}(u) \geq -M_n$ olduğundan Lemma 2.3 ten $(n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u) \geq -M_n$ elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenerek yeniden yazılırsa $n\Delta((n\Delta)_{m-1} V_n^{(m-1)}(\Delta u)) \geq -M_n$ bulunur. İşlemler daha kolay yürütülebilsin diye bir $\gamma = (\gamma_n)$ dizisi $\gamma_n := (n\Delta)_{m-1} V_n^{(m-1)}(\Delta u) = \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u))$ şeklinde tanımlansın. Hipotez gereği $V^{(0)}(\Delta u) = (V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi s sayısına Cesàro toplanabilir olduğundan $V_n^{(1)}(\Delta u) \rightarrow s$, $n \rightarrow \infty$ olduğu kolayca görülür. Buradan (2.3) eşitliğinden yararlanarak $n\Delta V_n^{(2)}(\Delta u) = V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1)$ elde edilir. Böylece Lemma 2.4 ten,

$$\sigma_n^{(1)}(\gamma) = \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j \binom{m-2}{j} n \Delta V_n^{(j+2)}(\Delta u) = o(1) \quad (3.15)$$

olur. İspatın bu adımında gösterilmesi gereken $\gamma_n = o(1)$ olmasıdır. O halde (γ_n) dizisi Lemma 3.7 (i) e uygulanır ve Lemma 3.6 (i) ile Lemma 3.8 (i) kullanılırsa

$$\gamma_n - \sigma_n^{(1)}(\gamma) \leq (D_{n,p}\gamma)_n - \sigma_n^{(1)}(\gamma) + \frac{p_n - n}{n} (D_{n,p}M)_n \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.16) eşitsizliğinin her iki tarafının üst limiti alınır, üst limit özelliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \limsup_n (\gamma_n - \sigma_n^{(1)}(\gamma)) &\leq \limsup_n ((D_{n,p}\gamma)_n - \sigma_n^{(1)}(\gamma)) \\ &\quad + \limsup_n \left(\frac{p_n - n}{n} (D_{n,p}M)_n \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir.

Lemma 3.6 (i) den, (3.17) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra gider. Böylece

$$\limsup_n (\gamma_n - \sigma_n^{(1)}(\gamma)) \leq 0 \quad (3.18)$$

elde edilmiş olur.

Benzer olarak, (γ_n) dizisi Lemma 3.7 (ii) ye uygulanır ve Lemma 3.6 (ii) ile Lemma 3.8 (ii) kullanılırsa,

$$\gamma_n - \sigma_n^{(1)}(\gamma) \geq (D_{q,n}\gamma)_n - \sigma_n^{(1)}(\gamma) - \frac{n - q_n}{q_n} (D_{q,n}M)_n \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.19) eşitsizliğinin her iki tarafının alt limiti alınır, alt limit özelliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \liminf_n (\gamma_n - \sigma_n^{(1)}(\gamma)) &\geq \liminf_n ((D_{q,n}\gamma)_n - \sigma_n^{(1)}(\gamma)) \\ &\quad + \liminf_n \left(-\frac{n-q_n}{q_n} (D_{q,n}M)_n \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. Lemma 3.6 (ii) den, (3.20) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra gider. Böylece

$$\liminf_n (\gamma_n - \sigma_n^{(1)}(\gamma)) \geq 0 \quad (3.21)$$

elde edilmiş olur.

Son olarak, (3.18) ve (3.21) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\gamma_n = o(1) \quad (3.22)$$

bulunur. Lemma 2.4, (γ_n) dizisine uygulanırsa,

$$\gamma_n = \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j \binom{m-2}{j} n \Delta V_n^{(j+1)}(\Delta u) = o(1) \quad (3.23)$$

elde edilir.

(3.23) eşitliğinden $n \Delta V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1)$ olmasını kullanarak, $n \Delta V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1)$ olduğu görülür. Son olarak, (2.3) eşitliğinden yararlanarak elde edilen

$$n \Delta V_n^{(1)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)$$

eşitliğinden hipotez gereği $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ bulunur.

$$u_n = V_n^{(0)}(\Delta u) + \sum_{k=1}^n \frac{V_k^{(0)}(\Delta u)}{k} + u_0$$

gösteriminden (u_n) dizisinin yavaş salınımlı olduğu görülür. $\square$

Teoremin bir sonucu olarak Cesàro toplanabilme metodu için Tauber tipi teorem verilebilir.

Sonuç 3.9. (u_n) dizisi reel sayıların bir dizisi olsun. Negatif olmayan bir $M = (M_n)$ dizisi için (3.6), (3.7) ve (3.8) koşulları sağlansın. Eğer (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Cesàro toplanabilir ise (u_n) dizisi s ye yakınsaktır.

İspat. (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Cesàro toplanabilir ise (2.3) eşitliğinde $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi sıfıra Cesàro toplanabilirdir. Dolayısıyla teoremin ifadesi gerçekleşmiş olur. İspatın son adımında $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ bulunur. (u_n) dizisi s ye Cesàro toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(u))$ s ye yakınsaktır. O halde, (2.3) eşitliğinden ispat tamamlanmış olur. $\square$

4. ABEL TOPLANABİLME METODU İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde Abel toplanabilme metodu için bilinen klasik bazı Tauber tipi teoremlerin bir tür genelleştirilmesi verilmiştir. Yapılan çalışmanın bir sonucu olarak Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi elde edilmiştir. Ayrıca verilen koşulların genelleştirilmiş Abel toplanabilme metodu için de gerçekleştiği gösterilmiştir.

Aşağıda elde edilecek yeni sonuçların ispatlarında kullanılacak lemmalar verilmiştir.

4.1. Lemmalar

Lemma 4.1. (Szász; 1952) Bir (u_n) dizisi tek taraflı yavaş salınımlı ise negatif olmayan bir C sayısı için $V_n^{(0)}(\Delta u) \geq -C$ dir.

Daha önce de (u_n) dizisi yavaş salınımlı ise $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ olduğu verilmişti.

Lemma 4.2 de $u_n - \sigma_n^{(1)}(u)$ farkı iki farklı şekilde yazacaktır. Hatırlanacağı gibi bir önceki bölümde Lemma 3.7 de $u_n - \sigma_n^{(1)}(u)$ farkının iki yazılışı gösterilmişti. Verilecek olan Lemma 4.2, Lemma 3.7 nin özel bir durumudur.

Lemma 4.2. (Stanojević;1998) $u = (u_n)$ reel sayı dizisi için,

(i) $\lambda > 1$ ve yeterince büyük n tamsayısı için,

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} (\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u)) - \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} (u_k - u_n) \quad (4.1)$$

dir.

(ii) $1 < \lambda < 2$ ve yeterince büyük n tamsayısı için,

$$u_n - \sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(u) = \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1} (\sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u))$$

$$+\frac{1}{[(\lambda-1)n]+1}\sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^n\sum_{j=k+1}^n\Delta u_j \quad (4.2)$$

dir.

İspat.

(i) Lemma 3.7 (i) de $p_n = [\lambda n]$ alındığında $\lambda > 1$ için $p_n > n$ şartı sağlanır.

(ii) Lemma 3.7 (ii) de $q_n = [\lambda n]$ alındığında $1 < \lambda < 2$ için $n > q_n$ şartı sağlanır.

4.2. Teoremler ve İspatlar

Teorem 4.3. Bir (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Abel toplanabilir ve (u_n) tek taraflı yavaş salınımlı ise $\lim_n u_n = s$ dir.

İspat. (u_n) dizisi s ye Abel toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi de s ye Abel toplanabilir. Böylece (2.3) eşitliğinden $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi sıfıra Abel toplanabilir. Diğer taraftan Lemma 4.1 den negatif olmayan bir C sayısı için

$$V_n^{(0)}(\Delta u) \geq -C \quad (4.3)$$

olur. Teorem 2.14 kullanarak (4.3) eşitsizliği ve $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olmasından,

$$V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1)$$

elde edilir. Lemma 4.2 (i), $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisine uygulanırsa,

$$V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} (V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(0)}(\Delta u))$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \sum_{j=n+1}^k \Delta V_j^{(0)}(\Delta u) \\
& \leq \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} (V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(0)}(\Delta u)) \\
& + \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \sum_{j=n+1}^k (|\Delta V_j^{(0)}(\Delta u)| - \Delta V_j^{(0)}(\Delta u)) \\
& \leq \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} (V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\
& + \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} (|\Delta V_j^{(0)}(\Delta u)| - \Delta V_j^{(0)}(\Delta u))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının üst limiti alınırsa,

$$\begin{aligned}
\limsup_n (V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) & \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1} \limsup_n (V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\
& + \limsup_n \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} (|\Delta V_j^{(0)}(\Delta u)| - \Delta V_j^{(0)}(\Delta u))
\end{aligned}$$

elde edilir. $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ dizisi yakınsak olduğundan yukarıdaki son eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim sıfıra gider ve

$$\limsup_n (V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \leq \limsup_n \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} (|\Delta V_j^{(0)}(\Delta u)| - \Delta V_j^{(0)}(\Delta u)) \quad (4.4)$$

olur. (4.4) eşitsizliğinde her iki tarafın $\lambda \rightarrow 1^+$ için limiti alındığında

$$\limsup_n (V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \leq 0 \quad (4.5)$$

elde edilir. Benzer şekilde, Lemma 4.2 (ii), $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisine uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
V_n^{(0)}(\Delta u) - V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) &= \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1} (V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\
&+ \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^n \sum_{j=k+1}^n \Delta V_j^{(0)}(\Delta u) \\
&\geq \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1} (V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\
&+ \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^n \sum_{j=k+1}^n (\Delta V_j^{(0)}(\Delta u) - |\Delta V_j^{(0)}(\Delta u)|) \\
&\geq \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1} (V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\
&- \sum_{j=n-[(\lambda-1)n]}^n (|\Delta V_j^{(0)}(\Delta u)| - \Delta V_j^{(0)}(\Delta u))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının alt limiti alınırsa,

$$\begin{aligned}
\liminf_n (V_n^{(0)}(\Delta u) - V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u)) &\geq \frac{1}{\lambda-1} \liminf_n (V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\
&+ \liminf_n \left(- \sum_{j=n-[(\lambda-1)n]}^n (|\Delta V_j^{(0)}(\Delta u)| - \Delta V_j^{(0)}(\Delta u)) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ dizisi yakınsak olduğundan yukarıdaki son eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim sıfıra gider ve

$$\begin{aligned}
\liminf_n (V_n^{(0)}(\Delta u) - V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u)) \\
\geq - \limsup_n \sum_{j=n-[(\lambda-1)n]}^n (|\Delta V_j^{(0)}(\Delta u)| - \Delta V_j^{(0)}(\Delta u)) \quad (4.6)
\end{aligned}$$

olur. (4.6) eşitsizliğinde her iki tarafın $\lambda \rightarrow 1^+$ için limit alındığında

$$\liminf_n (V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \geq 0 \quad (4.7)$$

bulunur.

(4.5) ve (4.7) eşitsizliklerinden

$$\lim_n (V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. Bu durumda $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1)$ olduğundan $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ olduğu kolayca görülür. (u_n) dizisi s ye Abel toplanabilir olduğundan $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ olduğundan Tauber'in ikinci teoremi gereği, $\lim_n u_n = s$ elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Aşağıdaki teorem Szász (1951) tarafından verilen teoremin gelişmiş halidir. Teorem 4.4 te aynı koşullar altında Szász'ın teoremindeki $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin tek taraflı sınırlı olması koşuluna gerek olmadığı görülür.

Teorem 4.4. (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Abel toplanabilir ve $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ tek taraflı yavaş salınımlı ise $\lim_n u_n = s$ dir.

İspat. (u_n) dizisi s ye Abel toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi de s ye Abel toplanabilirdir. Böylece (2.3) eşitliğinden $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi sıfıra Abel toplanabilirdir. Diğer bir taraftan $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ tek taraflı yavaş salınımlı olduğundan

$$V_n^{(0)}(\Delta V_n^{(0)}(\Delta u)) = n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u)$$

eşitliğinden yararlanarak, Lemma 4.1 den negatif olmayan bir C sayısı için

$$n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u) \geq -C \quad (4.9)$$

olur. $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olmasından ve

$$V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u)$$

eşitliğinden $(n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u))$ dizisi de sıfıra Abel toplanabilir. Teorem 2.14 $(n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u))$ dizisi için kullanarak (4.9) eşitsizliği ve $(n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olmasından

$$n\Delta V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1)$$

elde edilir. Ayrıca

$$n\Delta V_n^{(2)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta V^{(1)}(\Delta u))$$

eşitliğinden ve $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olmasından, Tauber'in ikinci teoremi gereği,

$$V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1)$$

elde edilir. İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.3 ün ispatı gibi yapılabilir. $\square$

Teorem 4.4 teki koşul dizinin klasik kontrol modülusunun aritmetik ortalamasının tek taraflı yavaş salınımlı olmasıydı. Teorem 4.5 te bu koşul genelleştirilerek salınım davranışlarının m . mertebeden genel kontrol modülusunun aritmetik ortalamasının tek taraflı yavaş salınımlı olmasının da Abel toplanabilme metodu için bir Tauber koşulu olduğu verilmiştir.

Teorem 4.5. (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Abel toplanabilir ve $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi tek taraflı yavaş salınımlı ise $\lim_n u_n = s$ dir.

İspat. (u_n) dizisi s ye Abel toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi de s ye Abel toplanabilir. Böylece (2.3) eşitliğinden $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi sıfıra Abel toplanabilir. Ayrıca $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin aritmetik ortalamaları dizisi olan $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ dizisi de sıfıra Abel toplanabilir. (2.3) eşitliğinden $(V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)))$

dizisi de sıfıra Abel toplanabilir. İşlemler benzer şekilde sürdürülürse $(\sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olduğu görülür. Diğer bir taraftan, $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi tek taraflı yavaş salınımlı olduğundan

$$V_n^{(0)}(\Delta(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))) = n\Delta\sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))$$

eşitliğinden bir $C > 0$ sayısı için $n\Delta\sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) \geq -C$ elde edilir. Teorem 2.11 $(\sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisine uygulanırsa

$$\sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) = o(1) \quad (4.10)$$

elde edilir.

$(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi Lemma 4.2 (i) e uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) &= \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} (\sigma_{[\lambda n]}^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \\ &\quad - \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \sum_{j=n+1}^k \Delta\sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) \\ &\leq \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} (\sigma_{[\lambda n]}^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \\ &\quad + \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \sum_{j=n+1}^k (|\Delta\sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))| \\ &\quad \quad \quad - \Delta\sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))) \\ &\leq \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} (\sigma_{[\lambda n]}^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \\ &\quad + \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} (|\Delta\sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))| - \Delta\sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının üst limiti alındığında

$$\begin{aligned} \limsup_n (\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) &\leq \frac{\lambda}{\lambda-1} \limsup_n (\sigma_{[\lambda n]}^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \\ &\quad + \limsup_n \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} (|\Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))| - \Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))) \end{aligned}$$

bulunur. O halde (4.10) eşitliğinden yukarıdaki son eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim sifıra gider ve

$$\begin{aligned} \limsup_n (\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) &\leq \\ \limsup_n \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} (|\Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))| - \Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))) &\quad (4.11) \end{aligned}$$

olur. (4.11) eşitsizliğinde her iki tarafın $\lambda \rightarrow 1^+$ için limiti alınırsa,

$$\limsup_n (\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \leq 0 \quad (4.12)$$

elde edilir. Benzer şekilde $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi Lemma 4.2 (ii) ye uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) &= \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1} (\sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \\ &\quad + \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^n \sum_{j=k+1}^n \Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) \\ &\geq \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1} (\sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \\ &\quad + \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^n \sum_{j=k+1}^n (\Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) \\ &\quad \quad \quad - |\Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))|) \\ &\geq \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1} (\sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \\ &\quad - \sum_{j=n-[(\lambda-1)n]}^n (|\Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))| - \Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliği her iki tarafının alt limiti alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \liminf_n (\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \geq \\
& \quad \frac{1}{\lambda-1} \liminf_n (\sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(2)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \\
& \quad + \liminf_n \left(- \sum_{j=n-[(\lambda-1)n]}^n (|\Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))| - \Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.10) eşitliğinden yukarıdaki son eşitsizliğin sağındaki ilk terim sıfıra gider ve

$$\begin{aligned}
& \liminf_n (\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \geq \\
& \quad - \liminf_n \sum_{j=n-[(\lambda-1)n]}^n (|\Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u))| - \Delta \sigma_j^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) eşitsizliğinde her iki tarafın $\lambda \rightarrow 1^+$ için limiti alınır,

$$\liminf_n (\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) \geq 0 \tag{4.14}$$

olur. (4.12) ve (4.14) eşitsizliklerinden

$$\lim_n (\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u))) = 0 \tag{4.15}$$

elde edilir. O halde buradan (4.10) ifadesinden dolayı

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) = o(1) \tag{4.16}$$

bulunur. (u_n) dizisi s ye Abel toplanabilir olduğundan, $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)))$ de sıfıra Abel toplanabilirdir. Ayrıca

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) = V_n^{(0)}(\Delta \sigma^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u))) = o(1)$$

olduğundan Teorem 2.10 a $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)))$ uygulanırsa

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)) = o(1) \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.16) ve (4.17) den dolayı işlemler benzer şekilde devam ettirilirse,

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) = V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$$

bulunur. Sonuç olarak Teorem 2.10 ve hipotezden $\lim_n u_n = s$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.5 te $m=0$ alınırsa Teorem 4.4 ün elde edileceğine dikkat edilmelidir.

Teorem 4.6. (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Abel toplanabilir ve $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi yavaş azalan ise $\lim_n u_n = s$ dir.

İspat. (u_n) dizisi s ye Abel toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi de s ye Abel toplanabilirdir. Böylece (2.3) eşitliğinden $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi sıfıra Abel toplanabilirdir. Ayrıca $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin aritmetik ortalamaları dizisi olan $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ dizisi de sıfıra Abel toplanabilirdir. (2.3) eşitliğinden $(V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)))$ dizisi de sıfıra Abel toplanabilirdir. İşlemler benzer şekilde sürdürülürse $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olduğu görülür. Diğer taraftan, $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi yavaş azalan olduğundan Teorem 2.13, $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisine uygulanırsa

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) = o(1) \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) eşitliğinden negatif olmayan bir C sayısı için

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) = n\Delta(\sigma^{(2)}(\omega^{(m-1)}(u))) \geq -C \quad (4.19)$$

bulunur. (4.19) eşitsizliğinden $(\sigma_n^{(2)}(\omega^{(m-1)}(u)))$ dizisinin yavaş azalan olduğu görülür. (u_n) dizisi s ye Abel toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)))$ dizisi sıfıra Abel toplanabilir olur. Teorem 2.13 $(\sigma_n^{(2)}(\omega^{(m-1)}(u)))$ dizisine uygulanırsa

$$\sigma_n^{(2)}(\omega^{(m-1)}(u)) = o(1) \quad (4.20)$$

elde edilir. (2.3) eşitliğinde (u_n) yerine $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)))$ yazılırsa (4.18) ve (4.20) ifadelerinden

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)) = o(1) \quad (4.21)$$

bulunur. (4.18) ve (4.21) den dolayı işlemler benzer şekilde devam ettirilirse,

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) = V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$$

olur. Sonuç olarak Teorem 2.10 ve hipotezden $\lim_n u_n = s$ elde edilir.

Sonuç 4.7. (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Abel toplanabilir ve $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi tek taraflı yavaş salınımlı ise $\lim_n u_n = s$ dir.

İspat. $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi tek taraflı yavaş salınımlı olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi yavaş azalandır. Bu durumda Teorem 4.6 nın ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.8. (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Abel toplanabilir ve $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi yavaş salınımlı ise $\lim_n u_n = s$ dir.

İspat. Her yavaş salınımlı dizi yavaş azalan olduğundan Sonuç 4.7 nin ifadesine kolayca ulaşılır.

Sonuç 4.9. (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Abel toplanabilir ve $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)))$ dizisi yavaş azalan ise $\lim_n u_n = s$ dir.

Sonuç 4.9, Jakimovski (1954) tarafından yapılan çalışmada elde edilmiştir.

Sonuç 4.10. (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Abel toplanabilir ve $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)))$ dizisi yavaş salınımlı ise $\lim_n u_n = s$ dir.

Sonuç 4.10, Dik (2001b) tarafından yapılan çalışmada elde edilmiştir.

Sonuç 4.11 (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına Abel toplanabilir ve (u_n) yavaş salınımlı ise $\lim_n u_n = s$ dir.

Sonuç 4.11, daha önceki bölümlerde de bahsedilen Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi'dir.

4.3. Genelleştirilmiş Abel Toplanabilme Metodu İçin Tauber Tipi Teoremler

Genelleştirilmiş Abel toplanabilme metodu aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4.12. $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi bir s sayısına Abel toplanabilir ise (u_n) dizisine s ye (A, m) toplanabilir denir (Stanojević, Çanak ve Stanojević; 1999).

Yukarıdaki tanımdan kolayca görüleceği gibi özel olarak $m=0$ alınırsa (A, m) toplanabilme metodu Abel toplanabilme metoduna indirgenmiş olur.

Ayrıca bir (u_n) dizisi Abel toplanabilir ise (A, m) toplanabilirdir. Fakat tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $0 < x < 1$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonu $f(x) = \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$ şeklinde tanımlansın. (u_n) dizisi bu fonksiyonun Taylor katsayılarının dizisi olarak seçildiğinde (u_n) dizisinin (A, m) toplanabilirdir olduğu fakat Abel toplanabilir olmadığı görülür.

Abel toplanabilme metoduyla Cesàro toplanabilme metodu arasındaki ilişki ikinci bölümde verilmişti. Bu bilgilere ek olarak bir dizinin m . mertebeden aritmetik ortalamalarının dizisi olan $(\sigma_n^{(m)}(u))$ yakınsak ise bu dizi Abel toplanabilirdir. Buradan tüm mertebeden aritmetik ortalamalar dizilerinin sınıfının Abel toplanabilen dizilerin sınıfının içinde olduğunu görülür (Hardy, 1991).

Teorem 4.3, Teorem 4.4 ve Teorem 4.5 kullanılarak, Bölüm 4.2 de verilen teoremler genelleştirilerek (u_n) dizisi veya onun tarafından üretilen belli dizilerin tek taraflı yavaş salınımlı olması koşulunun (A, m) toplanabilme metodu için de bir Tauber koşulu olduğu aşağıdaki teoremlerde gösterilecektir.

Teorem 4.13. Bir (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına (A, m) toplanabilir ve (u_n) tek taraflı yavaş salınımlı ise $\lim_n u_n = s$ dir.

İspat. (u_n) dizisi s ye (A, m) toplanabilir olduğundan, tanım gereği $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi s ye Abel toplanabilirdir. Böylece (2.3) eşitliğinde (u_n) yerine $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi yazılırsa $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olduğu görülür. Hipotez gereği (u_n) tek taraflı yavaş salınımlı olduğundan dolayı Lemma 4.1 den negatif olmayan bir C sayısı için

$$V_n^{(0)}(\Delta u) \geq -C$$

olur. Buradan, her iki tarafın m kez aritmetik ortalaması alındığında negatif olmayan bir C sayısı ve negatif olmayan m tamsayısı için,

$$V_n^{(m)}(\Delta u) \geq -C \quad (4.22)$$

elde edilir. Teorem 2.14, $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisine uygulanırsa (4.22) eşitsizliğinden ve $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olmasından

$$V_n^{(m+1)}(\Delta u) = o(1)$$

olduğu görülür. Ayrıca $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi s ye Abel toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(m+1)}(u))$ dizisi de s ye Abel toplanabilirdir. O halde

$$V_n^{(m+1)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta \sigma^{(m+1)}(u))$$

eşitliğinden yararlanarak Tauber'in ikinci teoremi gereği

$$\lim_n \sigma_n^{(m+1)}(u) = s$$

elde edilir. Buradan (u_n) dizisinin s ye Abel toplanabilir olduğu görülür. Böylece Teorem 4.3 ün koşulları sağlanmış olur. İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.3 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. $\square$

Teorem 4.14. (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına (A, m) toplanabilir ve $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ tek taraflı yavaş salınımlı ise $\lim_n u_n = s$ dir.

İspat. (u_n) dizisi s ye (A, m) toplanabilir olduğundan, tanım gereği $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi s ye Abel toplanabilirdir. Böylece (2.3) eşitliğinde (u_n) yerine $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi yazılırsa $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olduğu görülür. Diğer bir taraftan hipotez gereği $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ tek taraflı yavaş salınımlı olduğundan

$$V_n^{(0)}(\Delta V_n^{(0)}(\Delta u)) = n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u)$$

eşitliğinden yararlanarak, Lemma 4.1 den negatif olmayan bir C sayısı için

$$n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u) \geq -C$$

olur. Buradan, her iki tarafın m kez aritmetik ortalaması alındığında negatif olmayan bir C sayısı ve negatif olmayan m tamsayısı için,

$$n\Delta V_n^{(m+1)}(\Delta u) \geq -C \quad (4.23)$$

elde edilir. $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olmasından, ve $V_n^{(m)}(\Delta u) - V_n^{(m+1)}(\Delta u) = n\Delta V_n^{(m+1)}(\Delta u)$ eşitliğinden $(n\Delta V_n^{(m+1)}(\Delta u))$ dizisi sıfıra Abel toplanabilirdir. Teorem 2.14, $(n\Delta V_n^{(m+1)}(\Delta u))$ dizisine uygulanırsa (4.23) eşitsizliği ve $(n\Delta V_n^{(m+1)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilirdir olmasından

$$n\Delta V_n^{(m+2)}(\Delta u) = o(1)$$

olduğu görülür. Ayrıca $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olmasından, $(V_n^{(m+1)}(\Delta u))$ dizisi de sıfıra Abel toplanabilirdir. O halde

$$n\Delta V_n^{(m+2)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta V_n^{(m+1)}(\Delta u))$$

eşitliğinden yararlanarak, Teorem 2.10, $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisine uygulanırsa

$$V_n^{(m+1)}(\Delta u) = o(1)$$

elde edilir. Buna ek olarak $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi s ye Abel toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(m+1)}(\Delta u))$ dizisi de s ye Abel toplanabilirdir. O halde

$$V_n^{(m+1)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta \sigma_n^{(m+1)}(u))$$

eşitliğinden yararlanarak yine Teorem 2.10, $(\sigma_n^{(m+1)}(\Delta u))$ dizisine uygulanırsa $\lim_n \sigma_n^{(m+1)}(u) = s$ elde edilir. Buradan (u_n) dizisinin s ye Abel toplanabilir olduğu görülür. Böylece Teorem 4.4 ün koşulları sağlanmış olur. İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.4 ün ispatı gibi yapılabilir. $\square$

Teorem 4.15. (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına (A, m) toplanabilir ve $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ tek taraflı yavaş salınımlı ise $\lim_n u_n = s$ dir.

İspat. (u_n) dizisi s ye (A, m) toplanabilir olduğundan, tanım gereği $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi s ye Abel toplanabilirdir. Böylece (2.3) eşitliğinde (u_n) yerine $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi yazılırsa $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olduğu görülür. Buna ek olarak $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisinin aritmetik ortalamaları olan $(V_n^{(m+1)}(\Delta u))$ dizisinin de sıfıra Abel toplanabilir olmasından $(n\Delta V_n^{(m+1)}(\Delta u))$ dizisi de sıfıra Abel toplanabilirdir. Yani $(\sigma_n^{(m+1)}(\omega^{(1)}(u)))$ dizisi sıfıra Abel toplanabilirdir. İşlemler benzer şekilde devam ettirilirse $(\sigma_n^{(m+1)}(\omega^{(m+1)}(u)))$ dizisinin de sıfıra Abel toplanabilir olduğu görülür. Diğer taraftan $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ tek taraflı yavaş salınımlı olduğundan

$$V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(1)}(\omega^{(m)}(u))) = \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m+1)}(u))$$

eşitliğinden yararlanarak, Lemma 4.1 den negatif olmayan bir C sayısı ve negatif olmayan m tamsayısı için

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m+1)}(u)) \geq -C$$

olur. Buradan, her iki tarafın m kez aritmetik ortalaması alındığında negatif olmayan bir C sayısı ve negatif olmayan m tamsayısı için,

$$\sigma_n^{(m+1)}(\omega^{(m+1)}(u)) \geq -C \quad (4.24)$$

elde edilir. Ayrıca $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olmasından $(\sigma_n^{(m)}(\omega^{(m+1)}(u)))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olduğu yukarıdaki işlemler ile görülür. Teorem 2.14 $(\sigma_n^{(m)}(\omega^{(m+1)}(u)))$ dizisine uygulanırsa (4.24) eşitsizliği ve $(\sigma_n^{(m)}(\omega^{(m+1)}(u)))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olması

$$\sigma_n^{(m+1)}(\omega^{(m+1)}(u)) = o(1) \quad (4.25)$$

elde edilir. Ayrıca $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisinin sıfıra Abel toplanabilir olmasından, $(\sigma_n^{(m+1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi de sıfıra Abel toplanabilir. O halde

$$\sigma_n^{(m+1)}(\omega^{(m+1)}(u)) = V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(m+1)}(\omega^{(m)}(u)))$$

eşitliğinden yararlanarak, Teorem 2.10, $(\sigma_n^{(m+1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisine uygulanırsa

$$\sigma_n^{(m+1)}(\omega^{(m)}(u)) = o(1) \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.25) ve (4.26) ifadelerinden dolayı işlemler benzer şekilde m kez devam ettirilirse

$$\sigma_n^{(m+1)}(\omega^{(0)}(u)) = V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$$

olduğu görülür. Buna ek olarak $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi s ye Abel toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(m+1)}(\Delta u))$ dizisi de s ye Abel toplanabilirdir. O halde

$$V_n^{(m+1)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta \sigma_n^{(m+1)}(u))$$

eşitliğinden yararlanarak yine Teorem 2.10 $(\sigma_n^{(m+1)}(\Delta u))$ dizisine uygulanırsa $\lim_n \sigma_n^{(m+1)}(u) = s$ elde edilir. Buradan (u_n) dizisinin s ye Abel toplanabilir olduğu görülür. Böylece Teorem 4.5 in koşulları sağlanmış olur. İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.5 in ispatına benzer şekilde yapılabilir. $\square$

5. SONUÇLAR

Tezin 3. bölümünde, yeni sonuç olarak elde edilen Teorem 3.4 de, Çanak (2008) tarafından verilen teorem genelleştirilmiştir. Bu teoremde bir dizinin üreticinin Cesàro toplanabilmesinden dizinin yavaş salınımlılığının daha zayıf koşullar altında elde edildiği görülmüştür. Teorem 3.4 ün ispatını yaparken kullanılan Lemma 3.6, Lemma 3.7, Lemma 3.8 yine bu çalışmada elde edilmiştir.

Tezin 4. bölümünde, yeni sonuç olarak Teorem 4.3, Teorem 4.4, Teorem 4.5, Teorem 4.13, Teorem 4.14, Teorem 4.15 elde edilmiştir. Bu teoremler Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi olarak bilinen teoremin bir genelleştirilmesidir.

6. KAYNAKLAR

- Agnew, R. P., 1932. On deferred Cesàro means. *Annals of Mathematics*, 33 (2), 413- 421.
- Bingham, N. H., Goldie, C. M., Teugels, J. L., 1989. *Regular variation*. Cambridge University Press, 494s. Cambridge.
- Boos, J., 2000. *Classical and modern methods in summability*. Oxford University Press, 586 s. New York.
- Çanak, İ., Totur, Ü., 2007. A Tauberian theorem with a generalized one-sided condition. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 60360.
- Çanak, İ., Totur, Ü., Dik, M., 2007. Subsequential convergence conditions. *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 87414.
- Çanak, İ., 2008. An extended Tauberian theorem for the $(C,1)$ summability method. *Applied Mathematics Letters*, 21 (1), 74-80.
- Çanak, İ., Totur, Ü., 2008. Tauberian theorems for Abel limitability method. *Central European Journal of Mathematics*, 6 (2), 301-306.
- Çanak, İ., 2010. A short proof of the generalized Littlewood Tauberian theorem. *Applied Mathematics Letters*, 23 (7), 818-820.
- Çanak, İ., Totur, Ü., Dik, M., 2010. One-sided Tauberian conditions for (A,k) summability method. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 (5-6), 425-430.
- Dik, F., 2001a. Tauberian theorems for convergence and subsequential convergence with moderately oscillatory behavior. *Mathematica Moravica*, 5, 19-56.
- Dik, M., 2001b. Tauberian theorems for sequences with moderately oscillatory control moduli. *Mathematica Moravica*, 5, 57-94.
- Dik, M., Dik, F., Çanak, İ., 2004. Classical and neoclassical Tauberian theorems for regularly generated sequences. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 13, 233-240.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E., 1914. Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 13 (2), 174-191.
- Hardy, G. H., 1991. *Divergent series*. Second Edition, AMS Chelsea Publishing, 396s. USA.
- Jakimovski, A., 1954. On a Tauberian theorem by O. Szász. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5, 67-70.
- Karamata, J., 1930. Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. *Mathematische Zeitschrift*, 32, 319-320.
- Korevaar, J., 2004. *Tauberian Theory – A century of developments*. Springer-Verlag, 483s. New York.

- Landau, E., 1910. Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. *Prace Mat - Fiz*, 21, 97-177.
- Littlewood, J. E., 1910. The converse of Abel's theorem on power series. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 9 (2), 434 - 448.
- Peyerimhoff, A., 1969. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer- Verlag, 111 s., New York.
- Powell, R. E., Shah, S. M., 1972. *Summability theory and its applications*. Van Nostrand Reinhold Company Limited, 178 s. London.
- Rényi, A., 1946. On a Tauberian Theorem of O. Szász. *Acta Univ. Szeged Sect. Sci. Math.*, XI, 119-123.
- Schmidt, R., 1925. Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. *Mathematische Zeitschrift*, 22, 89-152.
- Stanojević, Č. V., 1998. *Analysis of Divergence: Control and Management of Divergent Process*, Graduate Research Seminar Lecture Notes, edited by Ć. Çanak. University of Missouri- Rolla, Fall 1998, 56s. USA.
- Stanojević, Č. V., 1999. *Analysis of Divergence: Applications to the Tauberian Theory*. Graduate Research Seminar, University of Missouri – Rolla.
- Stanojević, Č. V., Çanak, Ć., Stanojević, V. B, 1999. Analysis of divergence. Control and management of divergent processes, in: W. O. Bray, Č. V. Stanojević, (Eds.), *Tauberian theorems for generalized Abelian summability methods*. Proceedings of the 7th international workshop in analysis and its applications, IWAA, Orono, ME, USA, June 1-6, 1997. Boston, MA: Birkhäuser, Applied and Numerical Harmonic Analysis, 13-26. USA.
- Stanojević, Č. V., Stanojević, V. B, 2002. Tauberian retrieval theory. *Publications de l'Institut Mathématique (N.S)*, 71, 105-111.
- Szász, O., 1951. On a Tauberian theorem for Abel summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 1, 117-125.
- Szász, O., 1952. *Introduction to the Theory of Divergent Series* (Written by J. Barlaz.) New York: Stechert-Hafner, Inc.; Cincinnati: Department of Mathematics, Graduate School of Arts and Sciences, University of Cincinnati, 81s. Cincinnati.
- Tauber, A., 1897. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 8, 273-277.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ümit TOTUR

Doğum Yeri ve Yılı: İzmir - 1978

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce



Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : İzmir Atatürk Lisesi (1995)

Lisans : Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (1999)

Yüksek Lisans: Adnan Menderes Ünv. Fen Bil. Enst. Matematik A.B.D. (2006)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Özel İzmir Başarı Dershaneleri (1999-2001)

Özel İzmir Hedef Dershanesi (2001-2002)

Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2002-...)

Yayınları (SCI ve diğer makaleler)

1. Çanak, İ., Totur, Ü., 2006. Tauberian conditions for a general limitable method. Int. J. Math. Math. Sci., Art. ID 82342.
2. Çanak, İ., Totur, Ü., 2007. A Tauberian theorem with a generalized one-sided condition. Abstr. Appl. Anal., Art. ID 60360. (SCI Exp.)
3. Çanak, İ., Totur, Ü., Dik, M., 2007. Subsequential convergence conditions. J. Inequal. Appl., Art. ID 87414. (SCI Exp.)
4. Çanak, İ., Totur, Ü., 2008. A note on Tauberian theorems for regularly generated sequences. Tamkang J. Math., 39 (2), 187-191.
5. Çanak, İ., Totur, Ü., 2008. Tauberian theorems for Abel limitability method. Cent. Eur. J. Math., 6 (2), 301-306. (SCI Exp.)
6. Çanak, İ., Totur, Ü., 2010. Some Tauberian conditions for Borel summability methods. Applied Mathematics Letters, 23, 302-305. (SCI)

7. Çanak, İ., Totur, Ü., Dik, M., 2010. One-sided Tauberian conditions for (A,k) summability method. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 (5-6), 425-430. (SCI Exp.)
8. Çanak, İ., Totur, Ü., 2010. A Condition under which slow oscillation of a sequence follows from Cesàro summability of its generator sequence. *Applied Mathematics and Computation*, 216 (5), 1618-1623. (SCI Exp.)
9. Çanak İ., Erdem Y., Totur Ü., 2010. Some Tauberian Theorems for $(A)(C,\alpha)$ summability method. *Mathematical and Computer Modelling*, 52 (5-6), 738-743. (SCI Exp.)
10. Çanak, İ., Totur, Ü., Dik, M., 2010. Some conditions under which subsequential convergence follows from (A,m) summability. *Filomat*, 24 (1), 133-139. (SCI Exp.)
11. Totur Ü., Çanak İ., 2010. Tauberian conditions under which convergence follows from Abel summability. *Applied Mathematics Letters*, 23 (12), 1439-1443. (SCI)
12. Totur Ü., Dik, M., 2011. Extended Tauberian conditions for $(C,1)$ summability method. *Applied Mathematics Letters*, 24 (1), 66-70. (SCI)
13. Çanak, İ., Totur, Ü., 2011. A Tauberian theorem for Cesàro summability of integrals. *Applied Mathematics Letters*, 24 (3), 391-395. (SCI)
14. Totur Ü., Çanak İ., 2011. Some sufficient conditions for subsequential convergence of a sequence. *Computers and Mathematics with Applications*, 61 (3), 567-572. (SCI Exp.)
15. Totur Ü., Çanak İ., Dik, M., 2011. Some one-sided conditions under which subsequential convergence follows from (A,k) summability method. *Applied Mathematics Letters*, 24 (5), 692-696. (SCI)
16. Çanak İ., Totur Ü., 2011. Tauberian conditions for Cesàro summability of integrals. *Applied Mathematics Letters*, 24 (6), 891-896. (SCI)