ÇİFT ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRALLER
VE MAKSİMAL İNTEGRAL OPERATÖRLER
İÇİN KESTİRİMLER

Gülhan UNAY

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2011

# ÇİFT ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRALLER VE MAKSİMAL İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇİN KESTİRİMLER

Gülhan UNAY

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Temmuz-2011

KABUL ve ONAY SAYFASI

Gülhan UNAY'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Çift Çekirdekli Singüler İntegraller ve Maksimal İntegral Operatörler İçin Kestirimler " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

..../..../2011

Üye : ..........................................................................

Üye : ..........................................................................

Üye : ..........................................................................

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../..... gün ve ............ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Atalay KÜÇÜKBURSA

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

# ÇİFT ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRALLER VE MAKSİMAL İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇİN KESTİRİMLER

Gülhan UNAY
Matematik Bölümü Yüksek Lisans Tezi, 2011
Tez Danışmanı: Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

## ÖZET

Bu tezde, $T^*f$ maksimal singüler integralin sınırlanma problemi $Tf$ singüler integralyardıyla çözülmüştür. Burada $T^*f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ normuna göre sınırlılığını gösterilmiştir. Riesz dönüşümleri singüler integral operatör olduğu için $T$ çift yüksek mertebeli Riesz dönüşümü ise bu durumda

$$T^*f(x) \leq CM(Tf)(x)$$

eşitsizliğinin varolduğu gösterilmiştir. Burada $C$, sabit ve $M$ de Hardy-Littlewood maksimal operatördür. Ayrıca $T^*f$ ve $M(T)$ arasındaki eşitsizliği elde etmek için ve düzgün çift homojen Calderon-Zygmund operatörü için $T$ ile $T^*$ nin kestirimlerinin denk olduğu incelendi. Esas amaç sonuçları $T$ operatörünün çekirdeğine ve cebirsel koşullara göre eşitsizlikleri ve $L^2$ uzayına karakterize elde etmektir. $P_j$, $j$ ıncı mertebeden küresel harmonik olmak üzere çift çekirdekli klasik Riesz dönüşümü için kestirimler incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Calderon-Zygmund Singüler Operatör, Riesz Dönüşümü.

**ESTIMATES FOR THE MAKSIMAL SINGULAR INTEGRAL IN TERMS OF THE SINGULAR INTEGRAL: THE CASE OF EVEN KERNELS**

Gülhan UNAY
Department of Mathematics, M.S. Thesis, 2011
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. İsmail EKİNCİOĞLU

## SUMMARY

In this thesis we study the problem of controlling the maximal singular integral $T^*f$ by the singular integral $Tf$. The most basic form of control one may consider is the estimate of the $L^2(\mathbb{R}^n)$ norm of $Tf$. We show that if $T$ is an even higher order Riesz transform, then one has the stronger pointwise inequality $T^*f(x) \leq CM(Tf)(x)$, where $C$ is a constant and $M$ is the Hardy-Littlewood maximal operator. We prove that $L^2$ estimate of $T^*$ by $T$ is equivalent, for even smooth homogeneous Calderon-Zygmund operators, to the pointwise inequality between $T^*$ and $M(T)$. Our main result characterizes the $L^2$ and pointwise inequalities in terms of an algebraic condition expressed in terms of the kernel of $T$. Let $\Omega = \Sigma P_j$ the expansion of $\Omega$ in spherical harmonics $P_j$ of degree $j$. Then our characterizing condition states that $T$ is of the form $R \circ U$, where $U$ is an invertible operator in $A$ and $R$ is a higher order Riesz transform associated with a homogeneous harmonic polynomial $P$ which divides each $P_j$ in the ring of polynomials in $n$ variables with real coefficients.

**Key Words:** Calderon-Zygmund Singular Operator, Riesz Transform.

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen başta değerli hocam sayın Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU' na ve desteğini hep yanımda hissettiğim canım aileme teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

# 1 BÖLÜM

## 1.1 Giriş

$T$, $\mathbb{R}^n$ de çekirdeği

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \tag{1}$$

olan düzgün, homojen, Calderon-Zygmund singüler operatörü olsun. Burada $\Omega$, $C^\infty S^{n-1}$ sınıfından $S^{n-1}$ birim küre üzerine kısıtlanmış

$$\int_{|x|=1} \Omega(x) d\sigma(x) = 0$$

şartını sağlayan sıfırıncı dereceden reel değerli homojen fonksiyondur.
$\sigma$, $S^{n-1}$ in yüzey ölçüsüdür.

$$Tf(x) = p.v. \int f(x-y)K(y)dy \tag{2}$$

$$\equiv lim_{\epsilon \to 0} T^\epsilon f(x)$$

$T^*$ maksimal singüler integral olsun.

$$T^* f(x) = sup_{\epsilon > 0} |T^\epsilon f(x)| \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

John Mateu, Joan Orobitg, Joan Verdera [14] çalışmasında $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ için

$$||T^* f||_2 \leq C||Tf||_2 \tag{3}$$

eşitsizliğinin var olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Riesz dönüşümleri singüler integral operatör olduğu için $T$ çift, yüksek mertebeli Riesz dönüşümü ise bu durumda

$$T^* f \leq CM(Tf)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

dir. Burada $C$sabit ve $M$, Hardy-Littlewood maksimal operatördür. Klasik Cotlar eşitsizliğinin geliştirilmiş bir versiyonu $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$T^* f \leq C(M(Tf)(x) + Mf(x))$$

dir. Eğer $T$, çift, yüksek mertebeli Riesz Dönüşümü ise (4) eşitsizliğinin geçerli olduğunu göstermeliyiz.

Çekirdeği

$$\Omega(x) = \frac{P(x)}{|x|^d}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

olan $T$ yüksek mertebeli Riesz dönüşümüdür. Burada P, derecesi $d \geq 1$ olan homojen,harmonik polinomdur. Eğer $P(x) = x_j$ ise $R_j$. Riesz dönüşümünü elde edilir. Eğer $P$ homojen polinomu harmonik değil fakat $\int_{S^{n-1}} P(x)dx = 0$ ise $T$ operatörüne polinom opearatörü denir. Böylece eğer $T = R$ çift, yüksek mertebeli Riesz dönüşümü

$$||R^* f||_{1,\infty} \leq C||Rf||_1 \tag{5}$$

eşitsizliğini sağlar ve

$$||R^* f||_{1,\infty} \leq C||f||_1$$

ile birleştirirsek buradan

$$||R^* f||_{1,\infty} \leq Cmin\{||Rf||_1, ||f||_1\}$$

elde edilir.

Buradaki asıl amaç çift çekirdekli operatörler için cebirsel koşullar altında $\Omega$ fonksiyonunun kürsel harmonik açılımı yapılması durumunda (3) ve (4) eşitsizliklerinin birbirine denk olduğunu göstermektir. Örneğin (3) eşitsizliği ile verilen çift polinom opeartörler için geçerli iken (4) eşitsizliği geçerli değildir. Bu tür operatörler $(T^* f)$, $(Tf)$ ile sınırlılığını bildiğimiz anlamda bunu yapamayız. Bu nedenlede birkaç notasyon tanımlamaya ihtiyacımız var. $\Omega$ nın küresel harmonik açılımına sahip oluğundan

$$\Omega(x) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(x) \qquad x \in S^{n-1} \tag{6}$$

yazılabilir. Burada $P_j$, $j$ ıncı dereceden homojen, harmonik bir polinomdur. Eğer $\Omega$ çift ise bu durumda $j$. dereceden $P_j$ sıfırlanmayabilir. Bu çalışmada diğer önemli bir konu

$$\lambda I + S$$

biçiminde tanımlanan $L^2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı operatörler içeren bir $A$ cebirinin olmasıdır. Burada $\lambda$ reel sayı ve $S$ düzgün, homojen, Calderom-Zygmund operatörüdür. Şimdi ana teoremimizi verelim.

**Teorem** : $T$, çekirdeği

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

şeklinde tanımlanan çift, homojen Calderon-Zygmund operatörü ve $x \in S^{n-1}$ için

$$\Omega(x) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(x)$$

küresel harmonik açılımına sahip olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) $x \in \mathbb{R}^n$ için $T^*f(x) \leq CM(Tf)(x)$

(ii) $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ için $||T^*f||_2 \leq C||Tf||_2$

(iii) $T$ operatörü $T = R \circ U$ alalım. Burada $U$, $A$ cebiri ile terslenebilir opearatör ve reel katsayılı $n$ değişkenli polinomlar halkasında her $P_j$ yi bölen homojen, harmonik polinomla ilgili olan bir yüksek mertebeli Riesz dönüşümüdür.

(iv) $\forall j$ için $P_{2j} = P_{2j_0} Q_{2j-2j_0}$ ve

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \gamma_{2j} Q_{2j-2j_0}(\xi) \neq 0 \qquad \xi \in S^{n-1}$$

olacak şekilde bir $2j - 2j_0$ ıncı dereceden $Q_{2j-2j_0}$ homojen polinomu vardır. Burada her $j$ tamsayısı için

$$\gamma_j = i^{-j} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{j}{2})}{\Gamma(\frac{n+j}{2})} \tag{7}$$

dır. $\gamma_j$, çekirdeği homojen, harmonik polinomu ile verilen yüksek mertebeli bir Riesz dönüşümünün Fourier katsayısıdır.

$$\widehat{Rf}(\xi) = \gamma_j \frac{P(\xi)}{|\xi|^j} \widehat{f}(\xi) \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Çalışmamızda $\sum_{j=j_0}^{\infty} \gamma_{2j} Q_{2j-2j_0}(x)$ serisi $C^\infty(S^{n-1})$ uzayında yakınsaktır. Eğer $U$, $A$ cebirinde tanımlı operatör ise

$$T = R \circ U$$

olur. $\lambda \neq 0$ bazı reel sayılar için

$$P = \lambda P_{2j_0}$$

olduğunu göstermeliyiz. Kabül edelim ki $P$ böler $P_{2j_0}$ dır. Kabülümüzden $P$ nin derecesi olan $d$ nin $2j_0$ olduğunu göstermeliyiz. $M(\xi)$, $U$ nun Fourier çarpanını olsun. $\xi \in S^{n-1}$ için $T$ nin Fourier çarpanı

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \gamma_{2j} Q_{2j-2j_0}(\xi) = \gamma_d P(\xi)\mu(\xi),$$

dir. Eğer $d < 2j_0$ ise $P \perp 2j$ ve

$$\int_{|\xi|=1} P(\xi)^2 \mu(\xi) d\xi = 0$$

dir. Buradan da$P(\xi) = 0$, $|\xi| = 1$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde kabülümüz yanlıştır.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde çift çekirdekli, yüksek mertebeli Riesz dönüşümlerinin teoremin $(i)$ koşulunu sağladığı gösterildi. Dördücü bölümün birinci kısmında polinomlar için $(iii) \to (i)$ in ispatı yapıldı. İkinci kısmında ise polinomlar için $(ii) \to (iii)$ ün ispatı yapıldı. Beşinci bölümüm birinci kısmında genel durum için $(iii) \to (i)$ in ispatı yapıldı ve ikinci kısmında genel durum için $(ii) \to (iii)$ ün ispatı yapıldı. Altıncı bölümde ise bölüm dört ve bölüm beşteki bazı lemmaların ispatlarına yer verildi. Son bölümümüz ise çalışmamızla ilgili örneklere ve bir probleme yer verildi.

# 2 BÖLÜM

## 2.1 Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1** Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşümlere operatör denir.

**Tanım 2.1.2** Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu için hemen hemen her yerde
$Tf(x) \geq 0$ ise $T$ operatörüne pozitif operatör denir.

**Tanım 2.1.3** (Destek-Support) Bir $f$ fonksiyonunun desteği

$$Suppf = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.1.4** (Gamma Fonksiyonu) $\Gamma(n)$ sembolü ile gösterilen ve

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona gamma fonksiyonu denir.

**Tanım 2.1.5** (Harmonik Fonksiyon ) $\mathbb{R}^n$ nin $U$ açık kümesi üzerinde
$f : U \to R$ şeklinde tanımlı, Laplace denklemini

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} + \cdots + \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} = 0$$

sağlayan iki kere türevlenebilir bir fonksiyondur.

**Tanım 2.1.6** Her $\lambda > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$K(\lambda x) = \lambda^\alpha K(x)$$

ise $K(x)$ çekirdeğine $\alpha$. dereceden homojendir, denir.

**Tanım 2.1.7** (Radyal Fonksiyon) Eğer, $n$-değişkenli bir $g(x)$ fonksiyonu herhangi bir tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun yardımıyla $g(x) = f(|x|)$ şeklinde gösterilebiliyorsa $g$ ye radyal fonksiyon denir.

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2})$$

**Tanım 2.1.8** (Dirac-Delta Fonksiyonu)

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0. \end{cases}$$

şeklinde tanmlanan $\delta$ fonksiyonuna Dirac-Delta fonksiyonu denir.

**Tanım 2.1.9** (Fourier Dönüşümü) $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki bir $f$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\hat{f}$ veya $Ff$ ile gösterilir ve

$$(Ff)(x) = \hat{f} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x.\xi)} f(\xi) d\xi$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$(x\xi) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_{n\xi_n}$$

dir.

**Tanım 2.1.10** $f$ ve $K$ $\mathbb{R}^n$ de tanımlı ve ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$h(x) = (f * K)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x - y) dy$$

biçimindeki $h(x)$ fonksiyonuna $f$ ve $K$ nın konvolüsyonu denir. Eğer $\alpha = n$ ise $h(x)$ integraline singüler integral denir. Burada $\alpha$, $K$ nın homojenlik mertebesi ve $n$ uzayın boyutudur.

**Tanım 2.1.11** (Karakteristik Fonksiyon) $A \subset \mathbb{R}^n$ için,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

ise $\chi_A(x)$ e karakteristik fonksiyondur denir.

**Tanım 2.1.12** (Riesz Dönüşümü) $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$R_j f(x) = p.v.c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1} f(y) dy} \qquad 1 \leq j \leq n$$

Burada

$$c_n = \pi^{-(\frac{n+1}{2})} \Gamma(\frac{n+1}{2})$$

dir.

**Tanım 2.1.13** (Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörü)
Varsayalım ki $K(x) \in L^1_{loc} \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ dır.

$$|K(x)| \leq B|x|^{-n}$$

$$\int_{r \leq |x| \leq R} K(x) dx = 0 \qquad 0 < r < R < \infty$$

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq B \qquad y \neq 0$$

yukarıdaki şartları sağlayan çekirdeğe Calderon-Zygmund çekirdeği denir. Burada $B$, $x$ ve $y$ den bağımsız bir sabittir.

Kabul edelim $K$, Calderon-Zygmund çekirdeği

$\epsilon > 0$, $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|y| \geq \epsilon} f(x-y) K(y) dy$$

aşağıdaki şartları sağlar.

(i) $||T_\epsilon||_p \leq A_p ||f||_p$ burada $A_p$, $\epsilon$ ve $f$ den bağımsızdır.

(ii) $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$Tf(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) K(y) dy$$

olacak şekilde bir $T$ vardır.

(iii) $||Tf||_p \leq A_p||f||_p$

**Tanım 2.1.14** (Dağılım Fonksiyonu) $\mu > 0$, $(X, \mu)$ ölçülebilir bir uzay ve $f$, $X$ üzerinde $\mu$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Her $\alpha > 0$ için

$$E_\alpha = E_\alpha(f) = \{x \in X : |f(x)| > 0\}$$

ölçülebilir ve $\mathbb{R}^+$ den $\mathbb{R}^+$ ya tanımlanan $f_*(\alpha) = \mu(E_\alpha)$ fonksiyonuna $f$ in dağılım fonksiyonu denir.

**Tanım 2.1.15** ($L^p$ Uzayı) $f$, integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$L^p = L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty\}$$

$$||f||_p = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

**Tanım 2.1.16** $f$, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir olsun. Bu durumda herhangi $x \in \mathbb{R}^n$ için $f$ in Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = sup_{r>0}\frac{1}{r^n}\int_{|y|<r} |f(x-y)|dy$$

# 3 BÖLÜM

## 3.1 Çift Çekirdekli Yüksek Mertebeli Riesz Dönüşümleri

Bu kısımda şunu göstereceğiz. Eğer T, çift, yüksek mertebeli Riesz Dönüşümü ise bu durumda

$$T^*f(x) \leq CM(Tf)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

dir. B, merkezi 0, yarıçapı 1 birim olan açık yuvar olsun. $\partial B$ bu yuvarın sınırı ve $\overline{B}$ da bu yuvarın kapanışı olsun. (1) i kanıtlamak için aşağıdaki durumları gözönüne alacağız. $B$ ve $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$ üzerinde farklı bir $\varphi$ fonksiyonu verelim. Bu $\varphi$ fonksiyonu, $B \cup (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$ üzerinde $N$. ıncı mertebeye kadar diferansiyellenebilir ve $(N-1)$ mertebeye kadar türevleri $\partial B$ sınırına sürekli genişletilebilir olsun. Soru, $N$ mertebeli dağılım türevleri ile $B$ ve $(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$ de adi türevleri elde edilen ifadeleri karşılaştırmaktır.

**Lemma 3.1.1** $\varphi$ , $\partial B$ sınırına sürekli genişletilebilir, $B \cup (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik

$$\partial_j\varphi = \partial_j\varphi(x)\chi_B(x) + \partial_j\varphi(x)\chi_{\mathbb{R}^n\ \overline{B}}(x)$$

vardır. Burada sol taraf $j$ ıncı mertebeden $\varphi$ fonksiyonunun dağılım türevidir.

**İspat** $\psi$ bir test fonksiyon olsun.

$$< \partial_j\varphi, \psi >= -\int \varphi\ \partial_j\psi = -\int_B \varphi\ \partial_j\psi - \int_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}} \varphi\ \partial_j\psi$$

Şimdi Green-Stokes teoremini $\psi$ den $\varphi$ ye kadar türevleri elde etmek için $B$ ve $\mathbb{R}^n\setminus\ \overline{B}$ bölgelerine uygulayalım. $\partial B$ üzerindeki $\varphi$ fonksiyonunun sürekliliğinden sınır terimleri açık olarak iptal edilebilir ve aşağıdakini elde edebiliriz.

$$< \partial_j\varphi, \psi >= \int (\chi_B\partial_j\varphi + \chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}\partial_j\varphi)\psi dx$$

İkinci mertebeden türevler ve radial fonksiyonlar için bir önceki ifadenin benzerini verelim.

**Sonuç 3.1.2** Kabul edelim ki $\varphi$ radial fonksiyon olsun.

$$\varphi(x) = \varphi_1(|x|)\chi_B(x) + \varphi_2(|x|)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(x)$$

Burada $\varphi_1$, $[0,1)$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir ve $\varphi_2$ de $[1,\infty)$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilirdir. $L$, sabit katsayılı ikinci mertebeden diferansiyellenebilir operatör olsun. Bu durumda $L_\varphi$ dağılımı

$$\varphi_1(1)=\varphi_2(1), \quad \varphi_1^{'}(1)=\varphi_2^{'}(1)$$

koşulu ve $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1,\varphi_2$ 1 noktasına kadar sürekliliği genişletilmesi şartları altında

$$L_\varphi = L\varphi(x)\chi_B(x)+L\varphi(x)\chi_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}}(x)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat** Bu kanıt, Lemma (3.1.1) in iki kez uygulanmasıyla sonuçlandırılabilir. İkinci uygulamadan önce hipotezden

$$\varphi_1^{'}(1)=\varphi_2^{'}(1)$$

ifadesinden $\varphi$ nin birinci mertebeden tüm kısmi türevlerinin 1 noktasında sürekliliğini söyleyebiliriz.

Şimdi (1) in kanıtı için esas tartışmamızın detaylarını belirleyelim. (1) in kanıtını öteleme ve genişleme yaparak

$$|T^1f(0)|\leq C\ M(Tf)(0) \tag{9}$$

(9) un ispatına indirgenebilir. Burada

$$T^1f(0)=\int_{|y|>1}f(y)K(y)dy$$

birinci seviyeden kesik integraldir. Bizim singüler integralimizin çekirdeğini tekrar gözöününe alırsak

$$K(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n}=\frac{P(x)}{|x|^{n+d}}$$

Burada P,derecesi $d\geq 2$ olan çift, homojen, harmonik polinomdur. Bu fikir, $B$ üzerinde ölçülebilir, sınırlı ve destekli $b$ fonksiyonu için

$$K(x)\chi_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}}(x)=T(b)(x) \tag{10}$$

özdeşliğine karşılık gelir. $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1\leq p<\infty$ için

$$\begin{aligned} T^1 f(0) &= \int \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(y) K(y) f(y) dy \\ &= \int T(b)(y) f(y) dy \\ &= \int_B b(y) T f(y) dy \end{aligned}$$

olur. Böylelikle (2) yi elde etmiş olduk. Burada $C = V_n \|b\|\|_\infty$ , $V_n$ ile $\mathbb{R}^n$ birim yuvarının hacmi gösterilmektedir. Şimdi (10) un ispatına tekrar dönersek $d = 2N$ ve $E$, $N$ ıncı mertebeden $\triangle^N$ Laplace denkleminin standart temel çözümü olsun.

$$\varphi(x) = E(x)\chi_{R^n \setminus \overline{B}}(x) + (A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{d-1}|x|^{2d-2})\chi_B(x) \tag{11}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada $A_0, A_1, \ldots, A_{d-1}$ sabitleri aşağıdaki gibi seçilsin. $\varphi(x)$ radial fonksiyon olduğundan $\Delta^j \varphi$ her $j$ pozitif tamsayısı için doğrudur. Böylece önceki sonucu buraya $N$ kez uygulamak için $2N = d$ koşul şartı gerekli ve $A_0, A_1, \ldots, A_{d-1}$ sabitlerinin gösterilmesi gerekir. Bu nedenle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}$ sabitleri için

$$\Delta^N \varphi = (\alpha_1 + \alpha_2|x|^2 + \cdots + \alpha_{N-1}|x|^{2(N-1)})\chi_B(x) = b(x) \tag{12}$$

dir. Burada son eşitlik $b$ nin tanımıdır.

$$\varphi = E \star \Delta^N \varphi$$

olduğundan iki tarafında türevlerini alırsak

$$P(\partial)\varphi = P(\partial)E \star \Delta^N \varphi \tag{13}$$

elde edilir. $P(\partial)\varphi$ yi hesaplamak için Fourier dönüşümlerini alalım.

$$\widehat{P(\partial)E}(\xi) = P(i\xi)\widehat{E}(\xi) = \frac{P(\xi)}{|\xi|^d}$$

dir. Diğer taraftan iyi bilinmektedir ki

$$P.V.\widehat{\frac{P(x)}{|x|^{n+d}}}(\xi) = \gamma_d \frac{P(\xi)}{|\xi|^d}$$

dir. Her pozitif $j$tamsayısı için $\gamma_j = i^{-j}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\frac{n+j}{2}}$de $\gamma_d$ nin değerini tahmin etmek şu an bizim için önemli değildir. Biz sonuç olarak $d$ ye bağlı bazı $c_d$ sabiteleri için

$$P(\partial)E = c_d P.V. \frac{P(x)}{|x|^{n+d}}$$

Böylelikle

$$P(\partial)\varphi = c_d P.V. \frac{P(x)}{|x|^{n+d}} \star \Delta^N \varphi = c_d T(b)$$

sol taraf $P(\partial)\varphi$ nin hesaplanmasıdır. Sonuç (3.1.2) den şuna sahibiz.

$$P(\partial)\varphi = c_d K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}} + P(\partial)(A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{d-1}|x|^{2d-2})(x)\chi_B(x)$$

böylece (3) ün ispatı tamamlanmış oldu, bizim sadece

$$P(\partial)(|x|^{2j}) = 0, \quad 1 \leq j \leq d-1 \tag{14}$$

ifadesini göstermemiz gerekir. $P$ nin derecesi $|x|^{2j}$ nin derecesinden çok daha küçük olduğuna dikkat edersek bu yüzden önceki eşitlik aşikar olmaz. Fourier dönüşümlerini alırsak

$$P\widehat{(\partial)(|x|}^{2j}) = c_j P(\xi)\Delta^j \delta,$$

elde ederiz. Burada $\delta$, orjinde Dirac delta fonksiyonudur ve $c_j$ $j$ ye bağlı bir sabittir. $\psi$ bir test fonksiyon olsun. Buradan P harmonik fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} < P(\xi)\Delta^j \delta, \varphi > &= < \Delta^j \delta, P(\xi)\varphi(\xi) > \\ &= < \Delta^{j-1}\delta, 2\nabla P(\xi)\nabla\varphi(\xi) + P(\xi)\Delta\varphi(\xi) > \end{aligned}$$

Önceki hesaplamaları itere edersek de şunu elde ederiz.

$$< P(\xi)\Delta^j \delta, \varphi > = < \delta, D(\xi) > = D(0)$$

Burada D, $\partial^\alpha \varphi(\xi)\partial^\beta P(\xi)$ biçimindeki uzunluğu $|\beta| \leq j \leq d-1$ çarpımların bir lineer kombinasyonudur. Bu nedenle $\partial^\beta P(\xi)$, derecesi $d-j \geq 1$ homojen polinom ve $\partial^\beta P(0) = 0$ dır. Bu da bizi $D(0) = 0$ olmasına götürür. Böylece (7) nin ispatı dolayısıyla (3) ün ispatı tamamlanmış oldu.

# 4 BÖLÜM

## 4.1 Yeterlilik Koşulunun İspatı : Polinom Durumu

Bu kısımda T nin çift polinom operatör olduğunu varsayalım. $2N$ çift tamsayıları için ($N \geq 1$), $|x|^{2N}\Omega(x)$, $2N$ inci dereceden homojen polinomdur. Böyle bir polinomu

$$|x|^{2N}\Omega(x) = P_2(x)|x|^{2N-2} + \cdots + P_{2j}(x)|x|^{2N-2j} + \cdots + P_{2N}(x)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $P_{2j}$, derecesi $2j$ $(1 \leq j \leq N)$ olan homojen harmonik polinomdur. Diğer bir deyişle küresel harmoniklerdeki $\Omega$ nın açılımı

$$\Omega(x) = P_2(x) + P_4(x) + \cdots + P_{2N}(x), \quad |x| = 1$$

dir. Önceki kısımda olduğu gibi $B$ birim yuvarının dışındaki $K(x)$ çekirdeği için bir ifade elde etmek istiyoruz. Bunun için

$$Q(x) = \gamma_2 P_2(x)|x|^{2N-2} + \cdots + \gamma_{2j}P_{2j}(x)|x|^{2N-2j} + \cdots + \gamma_{2N}P2N(x)$$

polinomu ile tanımlanan diferansiyellenebilir $Q(\partial)$ operatörüne ihtiyacımız var.
Eğer $E$,$\Delta^N$ nın standart temel çözümü ise

$$Q(\partial)E = P.V.K(x)$$

tir. Bu iki tarafın Fourier dönüşümü alınarak kolayca sağlandığı gösterilebilir. Şimdi önceki kısımdaki $\varphi$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $\varphi = E \star \Delta^N\varphi$ ifadesini elde ederiz ve böylece

$$Q(\partial)\varphi = Q(\partial)E \star \Delta^N\varphi = P.V.K(x) \star b = T(b)$$

dir. Burada $b$, $\Delta^N\varphi$ deki gibi tanımlandı. Diğer bir deyişle sonuç (3.1.2) den

$$Q(\partial)\varphi = K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}} + Q(\partial)(A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{2N-1}|x|^{4N-2})(x)\chi_B(x) \tag{15}$$

tir. Önceki kısmdaki ortaya çıkanın tersine

$$S(x) := -Q(\delta)(A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{2N-1}|x|^{4N-2})(x)$$

teriminin $Q$ nun harmonik olması gerekmediğinden sıfır olmasına gerek yoktur. Amacımız,

$$|\beta(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \quad |x| \geq 2 \tag{16}$$

ve

$$S(x)\chi_B(x) = T(\beta)(x) \tag{17}$$

kestirimini sağlayan $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunu bulmaktır. Bu ikinci kısımda verilen teoremin (i) şartının ispatını verir. (15), (17), ve S(x) tanımından

$$K(x)\chi_{R^n\setminus\overline{B}}(x) = Tb(x) + T(\beta)(x) \tag{18}$$

$\gamma = b + \beta$ olsun. (9) u aşağıdaki gibi gösterelim. Her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\begin{aligned}
T^1 f(0) &= \int \chi_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}}(y)K(y)f(y)dy \\
&= \int T(\gamma)(y)f(y)dy \\
&= \int \gamma(y)Tf(y)dy \\
&= \int_{2B} \gamma(y)Tf(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus 2B} \gamma(y)Tf(y)dy
\end{aligned}$$

ve böylece (16) eşitsizliğinde $\beta$ ile $\gamma$ yer değiştirdiğinde aşağıdaki elde edilir.

$$\begin{aligned}
|T^1 f(0) \quad| &\leq C(\|\gamma\|_\infty \frac{1}{2B}\int_{2B} |Tf(y)|dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus 2B} \frac{|Tf(y)|}{|y|^{n+1}}dy) \\
&\leq CM(Tf)(0)
\end{aligned}$$

(16) ve (17) yi sağlayan $\beta$ yı belirlemek için hipotezimizi ve teoremdeki (iii) şartını gözönüne alalım. Buradan $T = R \circ U$ olduğunu söyleyebiliriz. Burada R, yüksek mertebeli bir Riesz dönüşümü; U, A cebirinde terslenebilir bir operatör ve P, n değişkenli polinomlar halkasında $(1 \leq j \leq N)$ R böler $P_{2J}$ olan polinomdur.

İki adımda $\beta$ yı tanımlayalım. Birinci adım

$$S(x)\chi_B(x) = R(\beta_1)(x) \tag{19}$$

olacak şekilde $L^\infty(\beta)$ da birinci mertebeden Lipschitz şartını sağlayan $L^\infty(\beta)$ da bir fonksiyonun varlığını ve

$$\int \beta_1(x)dx = 0$$

koşunu gerçekleyen $\beta_1$ fonksiyonunun varlığını göstermektir. Daha sonra $\beta_1$ üzerinde Lipschitz şartının nasıl kullanıldığı daha açık olacaktır. (19) u kanıtlamak ve S(x) için açık bir formüle ihtiyacımız var ve bu yuzden de aşağıdaki [8] formülünü kullanacağız.

**Lemma 4.1.1** L, mertebesi $l$ olan bir homojen polinom ve $f$ bir değişkenli, düzgün bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$L(\partial)f(r) = \sum_{\nu\geq 0} \frac{1}{2^{\nu}.\nu!}.\Delta^{\nu}.L(x)(\frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r})^{l-\nu}.f(r) \quad r = |x|.$$

Lemma (4.1.1) in sonucu olarak aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

**Lemma 4.1.2** $P_{2j}$ derecesi $2j$ olan homojen, harmonik bir polinom olsun ve $k$ negatif olmayan bir tamsayı olsun. Bu durumda eğer $2j \leq\ k$ ise

$$P_{2j}(\partial)(|x|^{2k}) = 2^{2j}.\frac{k!}{(k-2j)!}.P_{2j}(x)|x|^{2(k-2j)}$$

ve eğer $2j > k$ ise

$$P_{2j}(\partial)(|x|^{2k}) = 0$$

dır. Diğer taraftan aşağıdaki

$$\Delta^{j}(|x|^{2k}) = 4^{j}.\frac{j!.k!}{(k-j)!}, k \geq j \tag{20}$$

ve

$$\Delta^{j}(|x|^{2k}) = 0 \tag{21}$$

kolayca elde edilir. Lemma (4.1.2), (20) ve (21) den bazı $c_{jk}$ sabitleri için $Q(x)$ ve $S(x)$ in bazı tanımları gözönüne alındığında

$$S(x) = \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j}^{N-1} c_{jk}P_{2j}(x)|x|^{2(k-j)} \tag{22}$$

elde ederiz. Bu nedenle negatif olmayan her bir $k$ ve $1 \leq j \leq N$ için $S(x)$ ile $P_{2j}(x)$ yer değiştirdiğinde (19) u ispat etmek yeterlidir. Bu fikir

$$P(\partial)\psi(x) = P_{2j}(x)|x|^{2k}\chi_{B}(x) \tag{23}$$

olacak şekilde bir $\psi$ fonksiyonu için araştırmak gerekir. Aslında eğer (23) sağlanır ve $2d$ P nin derecesi ise bu durumda E nin $\Delta^d$ nın temel çözümü olması ve $\psi$ fonksiyonunun yeterince iyi olması şartıyla

$$\psi = E \star \Delta^d \psi$$

olur. Buradan eğer $\beta_1 = c\Delta^d \psi$ ise

$$P(\partial)\psi = P(\partial)E \star \Delta^d \psi = cP.V. \frac{P(x)}{|x|^{n+2d}} \star \Delta^d \psi = R(\beta_1).$$

Bu sonuç,(23) ün çözümünü verir. Burada $\Delta^d \psi$, $B$ üzerinde destekli ve Lipschitz şartını sağlar ve aynı zamanda integrali sıfıra eşittir. (23) ün Fourier dönüşümünü alırsak

$$(-1)^d P(\xi)\widehat{\psi(\xi)} = (-1)^{j+k} P_{2j(\partial)} \Delta^k (\widehat{\chi_B(\xi)}) \tag{24}$$

elde edilir. $m = n/2$ için

$$\widehat{\chi_B(\xi)} = \frac{J_m(\xi)}{|\xi|^m}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

vardır. Burada $J_m$, m ıncı mertebeden Bessel fonksiyonudur.

$$G_\lambda(\xi) = \frac{J_\lambda(\xi)}{|\xi|^\lambda} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda > 0$$

alalım. (24) ün sağ tarafını hesaplamak için Lemma (4.1.1) i $L(x) = P_{2j}(x)|x|^{2k}$ ve $f(r) = G_m(r)$ ye 4 uygularsak

$$P(\xi)\widehat{\psi(\xi)} = (-1)^{j+k+d} \sum_{\nu \geq 0} \frac{(-1)^\nu}{2^\nu \nu!} \Delta^\nu (P_{2j}(\xi)|\xi|^{2k}) G_{m+2j+2k-\nu}(\xi),$$

elde ederiz. Bilinen formdan

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} G_\lambda(r) = -G_{\lambda+1}(r), \quad r > 0, \quad \lambda > 0$$

olur. $P_{2j}(\xi)$ $2j$ıncı dereceden homojen olduğundan $\nabla P_{2j}(\xi)\xi = 2jP_{2j}(\xi)$ olur ve buradan bazı $a_{jk\nu}$ sabitleri için

$$\Delta^\nu (P_{2j}(\xi)|\xi|^{2k}) = a_{jk\nu} P_{2j}(\xi)|\xi|^{2(k-\nu)}$$

elde edilir. Böylece diğer $a_{jk\nu}$ sabitleri için

$$P(\xi)\widehat{\psi(\xi)} = \sum_{\nu \geq 0} a_{jk\nu} P_{2j}(\xi)|\xi|^{2(k-\nu)} G_{m+2j+2k-\nu}(\xi) \tag{25}$$

elde ederiz.

Hipotezlerden $n$ değişkenli polinomlar halkasında P, $P_{2j}$ yi böler ve böylece $2j-2d$ ıncı dereceden homojen polinomlar için

$$P_{2j}(\xi) = P(\xi)Q_{2j-2d}(\xi)$$

olur. (25) te $P(\xi)$ çarpanını çıkardığımızda

$$\widehat{\psi(\xi)} = Q_{2j-2d}(\xi)\sum_{\nu=0}^{k} a_{jk\nu}|\xi|^{2(k-\nu)}G_{m+2j+2k-\nu}(\xi)$$

bu sonuç elde edilir.

$$((1-\widehat{|x|^2})^{\lambda}\chi_B(x))(\xi) = c_\lambda G_{m+\lambda}(\xi)$$

dan sonuç olarak

$$\psi(x) = Q_{2j-2d}(\partial)\sum_{\nu=0}^{k} a_{jk\nu}\Delta^{k-\nu}((1-|x|^2)^{2j+2k-\nu}\chi_B(x))$$

elde edilir.

$\psi$ nin $\beta$ ya kısıtlanması bir polinomdur ve bu polinom $\partial B$ de $2d$ mertebeye kadar ve $\psi$, $B$ nin dışında sıfır olur. Bundan dolayı $\Delta^d\psi$, $B$ de desteklidir ve $B$ ile arakesitinin integrali sıfır olan bir polinomdur. Bu $\beta$ nın elde edilmesinin ilk adımını tamamlar.

İkinci adım aşağıdaki gibi gösterilebilir. $T = R \circ U$ ve $U$ nun $A$ cebirinde terslenebilir olması hipotezinden

$$R(\beta_1) = T(U^{-1}\beta_1)$$

elde edilir.

$$\beta = U^{-1}\beta_1 \tag{26}$$

alalım.

$$\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{27}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bazı pozitif $C$ sabitleri için

$$|\beta(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}} \qquad |x| \geq 2 \tag{28}$$

dir. Böylece $U^{-1} \in A$, $\lambda$ reel sayıları ve bazı düzgün homojen Calderon-Zygmund $V$ operatörü için

$$U^{-1} = \lambda I + V$$

olur. Böylece

$$\beta = \lambda\beta_1 + V(\beta_1)$$

yazılabilir. Şimdi $\beta_1$, $B$ de destekli ve $B$ üzerinde integrali 0 olsun. Bu (28) kestirimini elde etmek için yeterlidir. Gerçekten, $L(x)$, $V$ nin çekirdeği ve $|x| \geq 2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} V(\beta_1)(x) &= \int L(x-y)\beta_1(y)dy \\ &= \int (L(x-y) - L(x))\beta_1(y)dy \end{aligned} \tag{29}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} |V(\beta_1)(x)| &\leq \int |L(x-y) - L(x)||\beta_1(y)|dy, \\ &\leq C\int_C \frac{|y|}{|x|^{n+1}}|\beta_1(y)|dy, \\ &= \frac{C}{|x|^{n+1}}. \end{aligned} \tag{30}$$

$\beta$ nın sınırlılığı hassas bir konudur. $V$ operatörü ve $\beta_1$ fonksiyonuna daha sonraki lemmayı uygularsak bu hemen görülür. Burada $\beta_1$ in Lipchitz koşulunu sağladığını kullandık. $K(x) = \Omega(x)/|x|^n$ çekirdekli T düzgün, homojen Calderon-Zygmund operatörünün sabiti

$$\|T\|_{CZ} \equiv \|K\|_{CZ} = \|\Omega\|_\infty + \||x|\nabla\Omega(x)\|_\infty \tag{31}$$

$B$ üzerindeki Lipschitz fonksiyonu minimal Lipschitz sabiti için standart notasyonları kullanacağız. Yani şu şekilde alacağız.

$$|f|_{Lip(1,B)} = sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} : x, y \in B, \quad x \neq y\right\} < \infty$$

**Lemma 4.1.3:** T, çekirdeği $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ olan homojen singüler operatör olsun. Burada

$\Omega$, çift çekirdekli 0 ıncı dereceden homojen fonksiyon, sürekli diferansiyellenebilir ve birim küre üzerindeki integrali 0 dır. Bu durumda

$$\|T(f\chi_B)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|K\|_{CZ}(||f||_{L^\infty(B)} + ||f||_{Lip(1,B)})$$

dir. Burada $C$ yalnızca $n$ e bağlı pozitif bir sabittir.

**İspat:** Birim küre üzerindeki $T(f\chi_B)$ davranışını açıklayarak işe başlayalım. İddia ediyoruz ki

$$|T_\epsilon(f\chi_B)(\alpha)| \leq C||K||_{CZ}(||f||_{L^\infty(B)} + ||f||_{Lip(1,B)}, \quad |a| = 1, \quad \epsilon > 0$$

dır. Gerçekten eğer iddianın ispatındaki detaylar görülürse, $T(f\chi_B)(\alpha)$ integralinin esas değeri küre üzerindeki tüm $a$ lar için vardır ve istenen eşitsizliği sağlar.

$$\begin{aligned} T_\epsilon(f\chi_B)(a) &= \int_{\epsilon<|x-a|<1/2} \chi_B(x)f(x)K(a-x)dx + \int_{1/2<|x-a|} \cdots \\ &= I_\epsilon + II \end{aligned}$$

Açık olarak

$$|II| \leq \int_{1/2<|x-a|} \chi_B(x)|f(x)|\frac{|\Omega(x-a)|}{|x-a|^n}dx \leq 2^n|B|\|\Omega\|_\infty\|f\|_{L^\infty(B)}.$$

$I_\epsilon$ terimine göre yazarsak

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \int_{\epsilon<|x-a|<1/2} \chi_B(x)(f(x)-f(a))K(a-x)dx \\ &\quad +f(a)\int_{\epsilon<|x-a|<1/2} \chi_B(x)K(a-x)dx \\ &= III_\epsilon + f(a)IV_\epsilon, \end{aligned}$$

ve aşağıdaki şekildeki kestirim kolayca elde edilebilir.

$$|III_\epsilon| \leq ||f||_{Lip(1,B)} \int_B |x-a||K(a-x)|dx \leq C||\Omega||_\infty||f||_{Lip(1,B)}$$

$$IV_\epsilon = \int_\epsilon^{1/2} \left( \int_{A(r)} \Omega(w)d\sigma(w) \right) \frac{dr}{r} \tag{32}$$

olur. Burada

$$A(r) = \{w : |w| = 1, |a + rw| < 1\}.$$

$H$, $a$ noktasında $S = \{w : |w| = 1\}$ olacak şekilde tanjant hiper düzlemi olsun. $V$ ile burada orjini içeren $H$ sınırını içine alan yarı uzay olmak üzere $A(r) \subset S \cap V$ dir. $\Omega$ çift olduğundan

$$0 = \int_S \Omega(w)d\sigma(w) = 2\int_{S\cap V} \Omega(w)d\sigma(w)$$

olur. Böylece

$$\int_{A(r)} \Omega(w)d\sigma(w) = -\int_{(S\cap V)\backslash A(r)} \Omega(w)d\sigma(w)$$

dir ve buradan

$$\left|\int_{A(r)} \Omega(w)d\sigma(w)\right| \leq ||\Omega||_\infty \sigma((S\cap V)\backslash A(r))$$

$H$, $S$ ye $a$ noktasında teğet olduğundan

$$\sigma((S\cap V)\backslash A(r)) \leq Cr$$

elde ederiz. (32) den

$$|IV_\epsilon| \leq C||\Omega||_\infty$$

yazarız. $|a| < 1$ olduğunu kabul edelim. $II$, ve $III$ terimlerini aynı yolla elde etmeden önce $IV_\epsilon$ nun sol tarafını tekrar ele alalım. Genelliği bozmadan $\epsilon_0 < 1/4$ olduğunu kabul edelim. $a_o = a/|a|$ alalım. Bu durumda

$$A = \{x \in \ B : \epsilon_0 < |x - a| < 1/2\}$$

ve

$$A_0 = \{x \in B : \epsilon_0 < |x - a| < 1/2\}$$

olur. $IV_\epsilon$ ifadesini elde etmek için $\epsilon_0$ ile $\epsilon$ ve $a$ ile $a_0$ ı yer değiştirelim. $\epsilon \leq \epsilon_0$ için

$$\int_{\epsilon<|x-a|<1/2} \chi_B(x)K(a-x)dx = \int_{\epsilon_0<|x-a|<1/2} \chi_B(x)K(a-x)dx$$

olur. Bu durumda

$$\left|\int_{\epsilon<|x-a|<1/2} \chi_B(x)K(a-x)dx - \int_{\epsilon_0<|x-a_0|<1/2} \chi_B(x)K(a_0-x)dx\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_A K(a-x)dx - \int_{A_0} K(a_0-x)dx \right| \\
&\leq \int_{A\cap A_0} |K(a-x)| - K(a_0-x)dx| \\
&\quad +| \int_{A/A_0} \chi_B(x)K(a-x)dx| + | \int_{A_0/A} \chi_B(x)K(a_0-x)dx| \\
&= J_1 + J_2 + J_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $x \in A \cap A_0$ ise

$$|K(a-x) - K(a_0-x)| \leq C||K||_{CZ} \frac{|a-a_0|}{|x-a|^{n+1}}$$

olur. Buradan

$$J_1 \leq C||K||_{CZ}|a-a_0| \int_{|x-a|>\epsilon_0} \frac{dx}{|x-a|^{n+1}} \leq C||K||_{CZ}$$

olur. $J_2$ kestirimi için

$$A\backslash A_0 = (A \cap B(a_0, \epsilon_0)) \cup (A \cap (\mathbb{R}^n \backslash B(a_0, 1/2)))$$

Şimdi eğer $|x-a_0| \geq 1/2$ ise $|x-a| \geq 1/4$ ve

$$J_2 \leq ||\Omega||_\infty \left( \int_{|x-a_0|<\epsilon_0} \frac{dx}{\epsilon_0^n} + \int_B 4^n dx \right) \leq C||\Omega||_\infty$$

elde edilir. $J_3$ için de benzer tartışma yapılabilir. $|a| > 1$ durumu benzer yolla tamamlanabilir. $\beta$ nın inşaası tamamlanmış olur ve Teoremin polinom operatörler için ispatı tamamlanmış olur. Lemma(4.1.3) ün bir çeşidi aynı ispat yöntemleri ile $\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}$ ile $B$ yer değiştirildiğinde geçerli olduğu dikkate alınabilir. Yani Lemma (4.1.3) ün kabulleri altında

$$||T(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}})||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C||K||_{CZ} \left( ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B})} + ||f||_{Lip(1,\mathbb{R}^n\backslash\overline{B})} \right)$$

elde edilir.

## 4.2 Gereklilik Koşulunun İspatı: Polinom Durumu

Bu kısımda T, çekirdeği

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} = \frac{P_2(x)}{|x|^{2+n}} + \frac{P_4(x)}{|x|^{4+n}} + \cdots + \frac{P_{2N}(x)}{|x|^{2N+n}}, \quad x \neq 0,$$

burada $P_{2j}$, $2j$ ıncı dereceden homojen harmonik polinomdur. $Q$,

$$Q(x) = \gamma_2 P_2(x)|x|^{2N-2} + \cdots + \gamma_{2j} P_{2j}(x)|x|^{2N-2j} + \cdots + \gamma_{2N} P_{2N}(x).$$

şeklinde tanımlanan $2N$ ıncı dereceden homojen polinom olsun. Bu durumda

$$\widehat{P.V.K}(\xi) = \frac{Q(\xi)}{|x|^{2N}}, \quad \xi \neq 0$$

dır. Böylece birinci mertebeden $T^1$ parçalı operatörü

$$\int (T^1 f)^2(x)dx \leq \int (T^* f)^2(x)dx \leq C \int (Tf)^2(x)dx$$

açık olarak elde edilir. $T^1$ in çekirdeği

$$K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x) = T(b)(x) + S(x)\chi_B(x), \tag{33}$$

dir. Burada $b$, (12) de verilmiştir ve

$$-S(x) = Q(\delta)(A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{2N-1}|x|^{4N-2})(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

dir. (33) e göre $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned} ||S\chi_B * f||_2 &\leq C||T^1 f||_2 + ||b * Tf||_2 \\ &\leq C\left(||Tf||_2 + ||\widehat{b}||_\infty ||Tf||_2\right) \\ &= C||Tf||_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Placherel e göre yukarıdaki $L^2$ eşitsizliğini Fourier dönüşümü arasındaki bir noktasal eşitsizlik dönüşümüdür. Yani

$$|\widehat{S\chi_B}(\xi)| \leq C|\widehat{P.V.K}(\xi)| = C\frac{|Q(\xi)|}{|\xi|^{2N}} \tag{34}$$

dir. Amacımız (34) ün $Q$ sıfır cümlesi ile $P_{2j}$ arasındaki bağıntının sağlandığını göstermektir. $\mathbb{R}^n$ deki her $f$ fonksiyonu için $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ dır.

**Lemma 4.2.1**

$$Z(Q) \subset Z(P_2 j), \quad 1 \leq j \leq N. \tag{35}$$

**İspat** $S$ nin (22) de verilen açılımından

$$S(x) = \sum_{l=N+1}^{2N-1} \sum_{j=1}^{l-N} c_{lj} P_{2j}(x) |x|^{2(l-N-j)}$$

şeklinde yazabiliriz. $\widehat{\chi_B} = G_m$, $m = n/2$ olduğundan Lemma (4.1.1) den

$$\begin{aligned} \widehat{S\chi_B}(\xi) &= S(l\delta)\overline{\chi_B}(\xi) \\ &= \sum_{l=N+1}^{2N-1} \sum_{j=1}^{l-N} c_{lj}(-1)^{l-N} P_{2j}(\delta) \triangle^{(l-N-j)} G_m(\xi) \\ &= \sum_{l=N+1}^{2N-1} \sum_{j=1}^{l-N} \sum_{k=0}^{l-N-j} c_{l,j,k} P_{2j}(\xi) |\xi|^{2(l-N-j-k)} G_{m+2l-2N-k}(\xi) \end{aligned} \tag{36}$$

elde edilir. $\forall p \geq 0$ için $G_p(\xi)$ tam fonksiyonu pozitif reel eksenine kısıtlaması olan bir radyal fonksiyondur 4. $\xi = r\xi_0,\ |\xi_0| = 1,\ r \geq 0$ alalım. Bu durumda

$$\widehat{S\chi_B}(\xi)(r\xi_0) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}(\xi_0) r^{2p}, \tag{37}$$

olur ve kuvvet serisi, $\forall\ \xi_0$ için sonlu yakınsaklık yarıçapına sahiptir. Kabul edelim ki $Q(\xi_0) = 0$ olsun. (34) den $\forall r \geq 0$ için $\widehat{S\chi_B}(\xi)(r\xi_0) = 0$ ve buradan $\forall p \geq 1$ için $a_{2p}(\xi_0) = 0$ dır. $p = 1$ için $a_2(\xi_0) = P_2(\xi_0) C_2$ olur. Burada

$$C_2 = \sum_{l=N+1}^{2N-1} c_{l,1,l-N-1} G_{m+l-N+1}(0)$$

dır. Daha sonra $C_2 \neq 0$ olduğu kabul edilecektir ve bu durumda $P_2(\xi_0) = 0$ dır. $P_2(\xi_0) = \cdots = P_{2(j-1)}(\xi_0) = 0$ hipotezini alalım. Bu durumda
$J \leq N - 1$ ise $a_{2j}(\xi_0) = P_{2j}(\xi_0) C_{2j}$ olur. Burada

$$C_{2j} = \sum_{l=N+1}^{2N-1} c_{l,j,l-N-j} G_{m+l-N+j}(0) \tag{38}$$

dır. $C_{2j} \neq 0$ olduğundan $1 \leq j \leq N-1$ için $P_{2j}(\xi_0) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Böylece

$$0 = Q(\xi_0) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_{2j} P_{2j}(\xi_0)$$

olur ve $P_N(\xi_0) = 0$ elde edilir.

**Lemma 4.2.2**

$$C_{2j} = \frac{-\pi^{\frac{n}{2}}}{V_n\ 2^{\frac{n}{2}}\ \Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{(-1)^j}{j\ 4^j\ \Gamma(2j+\frac{n}{2})}, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

dir.

Lemma (4.2.2) nin ispatı uzun ve karmaşık olduğundan kısım 6 ya ertelendi.

**Lemma 4.2.3** Eğer $f$, $\mathbb{R}^n$ de işareti değişen reel değerli sürekli bir fonksiyon ise bu durumda $H^{n-1}(Z(f))$, $H^{n-1}$, $n-1$ boyutlu Hausdorff ölçüsüdür. Özellikle $Z(f)$ in Hausdorff mertebesi en az $n-1$ dir.

**İspat** Genelliği bozmadan kabul edelim ki $f(0) > 0$ ve $f(p) < 0$ dır. Burada $p = (0, \ldots, 0, 1)$ dir. Yeterince küçük $\epsilon > 0$ için $|x| < \epsilon$ ise $f(x) > 0$ ve $|x - p| < \epsilon$ ise $f(x) < 0$ dır. $B = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\ ve\ |x| < \epsilon\}$ kümesini alalım. Bolzano teoreminden $\forall x \in B$ için $0 \leq t \leq 1$ olacak şekilde $f$ nin parçalanışındaki bazı noktaların $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ sıfır olduğunu söyleriz. Böylece $Z(f)$ kümesinin $\{x : x_n = 0\}$ hiperdüzlemi üzerindeki dik izdüşümü $B$ kümesini içerir ve böylece $H^{n-1}(Z(f)) > H^{n-1}(B) > 0$ dır.

**Lemma 4.2.4** $F$ ve $G$ , $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ de polinomlar olsunlar. Varsayalım ki $G$ indirgenemez ve $H^{n-1}(Z(F) \cap Z(G)) > 0$ olsun. Bu durumda $F = GH$ olacak şekilde $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ de bir $H$ polinomu vardır.

**İspat** V(P) ile $\{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0$ polinomlarının kompleks hiper düzlemini gösterelim. Hipotezden $V(F) \cap V(G)$ boştan farklıdır. Eğer $V(F)$, $V(G)$ nin içinde değilse $V(F) \cap V(G)$ nın kompleks boyutu $n-2$ den büyük değildir. Reel boyutu, kompleks boyutundan küçük eşit olduğundan sonuç olarak $Z(G) \cap Z(F)$ nin reel boyutu $n-2$ den büyük olmadığını elde ederiz.

Bu gerçek $n-1$ Hausdorf pozitif ölçü boyutuna çelişkidir. Bu yüzden $V(G) \subset V(F)$ dir ve buradan da bazı $H \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ için $F = G\ H$ olur. Böylece $F$ ve $G$ reel katsayılara sahip olacaktır, aynısı $H$ da da olacaktır. Şimdi gerek şartın ispatını verelim.

$j_0$, $P_{2j_0} \neq 0$ olacak şekilde birinci pozitif indeks olsun. $j_0 \leq j \leq N$ için $P_{2j_0}$ böler $P_{2j}$ olduğunu göstermek istiyoruz. $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tek çarpanlama bölgesi olduğundan $P_{2j_0}$ ı indirgenemez çarpanların çarpımı şeklinde ifade edebiliriz. Yani $R_{k,1} \leq k \leq M$ ki aynı zamanda homojen olduğundan açıkça $Z(P_{2j_0}) = \cup_k Z(R_k)$ ve

$$Z(Q) = \bigcup_k (Z(Q) \cap Z(R_k))$$

yazarız. $Q$ nun integrali küre üzerinde 0 olduğundan $Q$ nun işareti değişir ve böylece Lemma (4.2.3) den en az bir $k$ vardır öyle ki $H^{n-1}(Z(Q) \cap Z(R_k)) > 0$ dır. $k = 1$ olması için notasyon değiştirirsek bu durumda Lemma (4.2.4) e göre $R_1$ böler $Q$ dur. $j_0 \leq j \leq N$ için aynı zamanda $R_1$ ve $P_{2j}$ ye Lemma (4.2.4) ü uygulayabiliriz; çünkü Lemma (4.2.1) e göre $Z(Q) \cap Z(R_1) \subset Z(P_{2j}) \cap Z(R_1)$ dir. Böylece $j_0 \leq j \leq N$ için $R_1$ böler $P_{2j}$ olur. $Q_1$ ve $P_{2j,1}$ belli homojen polinomları için

$$Q = R_1 Q_1$$

ve

$$P_{2j} = R_1\ P_{2j,1}, \quad j_0 \leq j \leq N$$

alalım. $M = 1$ olduğunda yapmıştık. (34) ü yeniden yazmak için (37) yı şu formda kullanalım.

$$\left| \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}(\xi_0) r^{2p} \right| \leq C|Q(\xi_0)|, \quad 0 < r \tag{39}$$

dir. $a_{2p}$ katsayısının tanımı ve (36) dan

$$a_{2p}(\xi_0) = \sum_{j=j_0}^{N-1} \mu_j(p) P_{2j}(\xi_0)$$

ve

$$\begin{aligned} a_{2p}(\xi_0) &= R_1(\xi_0) \sum_{j=j_0}^{N-1} \mu_j(p) P_{2j,1}(\xi_0) \\ &= R_1(\xi_0) a_{2p,1}(\xi_0) \end{aligned} \tag{40}$$

olacak şekilde bir reel $\mu_j(p)$vardır. Burada son eşitlik $a_{2p,1}(\xi_0)$ sayılarının tanımını sağlar. (39) daki $R_1(\xi_0)$ ortak çarpanını basitleştirmek için

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}(\xi_0) r^{2p} \leq C|Q_1(\xi_0)|, \quad 0 < r \tag{41}$$

şeklinde yazabiliriz. (41) tamamlamak için bölme sürecinde ikinci adıma başlamalıyız. $\forall p \geq 1$ için $Q_1(\xi_0) = 0$ ise $a_{2p,1}(\xi_0) = 0$ dır. Böylece Lemma (4.2.1) in ispatı gibi

$$Z(Q_1) \subset Z(P_{2j,1}), \quad j_0 \leq j \leq N$$

olur. Bölme lemmasını uygulamak için $Q_1$ sıfır kümesinin yeterince büyük olduğunu belirlemek ve bölme lemmasında $Q_1$ nin işareti değiştiğini kabul etmek gerekir. $M > 1$ ve $R_1$ in derecesinin $2j_0$ dan daha küçük olduğunu kabul edelim. $R_1$ ve $Q$ açılımlarını gözönünde bulundurursak bunların $L^2(d\sigma)$ da ortogonal olduğunu görürüz. Böylece

$$0 = \int R_1(\xi) Q(\xi) d\sigma(\xi) = \int R_1^2(\xi) Q_1(\xi) d\sigma(\xi)$$

olur bu da bize $Q_1$ in işaretinin değiştiğini verir. $P_{2j_0,1} = \Pi_{k=2}^{M}$ olduğundan $j_0 \leq j \leq N$ için $R_k$ nın birini, $R_2$ nin $P_{2j,1}$ i böldüğü sonucuna varırız. $j_0 \leq j \leq N$ için $P_{2jo}2$ ın, $P_{2j}$ yi böldüğü ortaya çıktı. $k$ ıncı adımda $Q = \Pi_{l=1}^{k} R_1 Q_k$ ve

$$0 = \int \sum_{l=1}^{k} R_1(\xi) Q_k(\xi) d\sigma(\xi) = \int \sum_{l=1}^{k} R_1^2(\xi)\ Q_k(\xi)\ d\sigma(\xi)$$

yazılır. Dolayısıyla $Q_k$ nın işareti değişmiş olur.

$$a_{2p,k}(\xi_0) = \sum_{j=j_0}^{N-1} \mu_j(p)\ P_{2j,k}(\xi_0), \quad 1 \leq k \leq M$$

elde ederiz. Böylece $M$ ıncı adımda $p = j_0$ için

$$a_{2j_0,M}(\xi_0) = C_{2j_0} \neq 0. \tag{42}$$

olur. Derecesi $2j - 2j_0$ olan homojen $Q_{2j-2j_0}$ polinomları için $P_{2j} = P_{2j_0} Q_{2j-2j_0}$ alalım. Böylece

$$\begin{aligned} Q(\xi) &= \sum_{j=j_0}^{N} \gamma_{2j}\ P_{2j}(\xi)\ |\xi|^{2N-2j} \\ &= P_{2j_0}(\xi) \sum_{j=j_0}^{N} \gamma_{2j}\ Q_{2j-2j_0}(\xi)\ |\xi|^{2N-2j} \end{aligned}$$

olur. (39) dan ve $|\xi_0| = 1$ ve $0 < r <$ için $a_{2p,M}(\xi_0)$ katsayılarının tanımından

$$\left| \sum_{p=j_0}^{\infty} a_{2p,M}(\xi_0) r^p \right| \leq C \left| \sum_{j=j_0}^{N} \gamma_{2j} \; Q_{2j-2j_0}(\xi_0) \right|, \quad 0 < r$$

elde ederiz. (42) gözönüne alınırsa

$$\sum_{j=j_0}^{N} \gamma_{2j} \; Q_{2j-2j_0}(\xi_0) \neq 0, \quad |\xi_0| = 1$$

sonucu yazılır. Böylece polinom durumu gereklilik şartının ispatı tamamlanmış olur.

# 5 BÖLÜM

## 5.1 Yeterlilik Koşulunun İspatı:Genel Durum

(6) serisinin yakınsaklığı hakkında çeşitli gerçekleri açıklayarak işe başlayalım. $\Omega$, integrali 0 olan $C^{\infty}(S^{n-1})$ uzayında bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\Omega$ küresel harmoniklerle (6) şeklinde yazılabilir. Herhangi bir pozitif $r$ tamsayısı için

$$\sum_{j\geq 1}(j(j+n-2))^{r}||P_j||_2^2 = (-1)^r \int_{S^{n-1}} \triangle_S^r \Omega \Omega d\sigma \tag{43}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $\triangle_S$ küresel koordinatlarda Laplace operatörünün gösterimidir. Bu durumda

$$\sum_{j\geq 1}(j(j+n-2))^{r}||P_j||_2^2 = \|\triangle_S^r \Omega\|_2 \|\Omega\|_2$$

olur. Burada $L^2$ normu $d\sigma$ ya göre alınmıştır. Böylece Schwarz Eşitsizliğinden, her pozitif $M$ tamsayısı için

$$\sum_{j\geq 1} j^M \|P_j\|_2 < \infty \tag{44}$$

olur. Aynı zamanda

$$\sum_{j\geq 1} j^M \|P_j\|_{\infty} < \infty \tag{45}$$

eşitsizliğini elde etmek istiyoruz. Burada $S^{n-1}$ üzerinden supremum normu alınmıştır. Bu daha sonraki lemmadan kolayca görülür. Bu ispat Fulvio Ricci tarafından yapılmıştır.

**Lemma 5.1.1** Tüm $q$ ıncı dereceden homojen polinomlar için

$$||Q||_{\infty} \leq C q^{\frac{n-1}{2}} ||Q||_2$$

dir. Burada $C$ yalnızca $n$ e bağlı pozitif bir sabittir.

**İspat** $Q_1, Q_2, \ldots, Q_d$ ortonormal bazı $q$ dereceli tüm homojen polinomların $S^{n-1}$ e kısıtlanmasını içeren $L^2$ nin bir alt uzayı olarak alalım.

$$S(x) = \sum_{j=1}^{d} Q_j(x)^2, \ x \in S^{n-1}$$

fonksiyonunun göz önüne alalım. İddiamız $S$, dönme altında invaryanttır ve böylece sabittir. $d\sigma$ ihtimal ölçümü olduğundan bu sabit $\Sigma_{j=1}^{d}\int Q_j(x)^2 d\sigma(x) = d$ olmak zorundadır. Şimdi $Q$, derecesi $q$ olan homojen polinom ve $Q = \Sigma_{j=1}^{d}\lambda_j Q_j$ alalım. Bu durumda

$$|Q(x)| \leq \left(\sum_{j=1}^{d}(\lambda_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{d}Q_j(x)^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||Q||_2 d^{\frac{1}{2}},\ x\epsilon\ S^{n-1}$$

olur. Bu da $d = \binom{n+q-1}{q} \simeq q^{n-1}$ olduğundan lemmanın ispatını verir. İddiayı göstermek için $\rho$ yu rotasyon alalım. Bu durumda

$$Q_j(\varrho(x))^2 = \sum_{j=1}^{d} Q_j(x)^2,\ x\ \epsilon\ S^{n-1}$$

yazarız. $Q_j(p(x))$ $\sigma$ rotasyon invaryantına göre bir ortonormal baz şeklinde yazılabilir. Böylece $T$, $K(x) = \Omega(x)/|x|^n$ çekirdekli çift, düzgün,homojen, Calderon-Zygmund operatörü ve $\Omega$ nın küresel harmonik açılımı

$$\Omega(x) = \sum_{j=1}^{\infty} P_{2j}(x) \tag{46}$$

dir. Hipotezden her bir $P_{2j}$ yi derecesi $2d$ olan bir homojen harmonik polinomu böler. Diğer bir deyişle $P_{2j} = PQ_{2j-2d}$ dir. Burada $Q_{2j-2d}$ derecesi $2j-2d$ olan bir homojen polinomdur. $\Sigma_j Q_{2j-2d}(x)$ serisinin $C^\infty S^{n-1}$ de yakınsak olduğunu göstermek istiyoruz. Yani her pozitif $M$ tamsayısı için

$$\sum_{j\geq d} j^M ||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty \tag{47}$$

olduğunu göstermeliyiz. Daha sonraki lemma ifade ediyor ki $S^{n-1}$ üzerinden supremum normu alınarak iki homojen polinomun bölümü sınırlı kalır.

**Lemma 5.1.2** P, özdeş olarak sıfır olmayan bir homojen polinom olsun. Bu durumda her $q$ dereceli $Q$ homojen polinomları için

$$||Q||_\infty \leq Cq^{2(n-1)/\epsilon}||PQ||_\infty$$

olacak şekilde bir pozitif $\epsilon$ ve bir $C = C(n,P)$ pozitif sabiti vardır.

**İspat** Bazı pozitif $\epsilon$ sayıları için

$$\int_{|x|=1}\frac{1}{|P(x)|^\epsilon}d\sigma(x) < \infty \tag{48}$$

olduğu ispat edilebilir. Bu durumda Lemma (5.1.1) ve Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}|Q||_\infty| &\leq Cq^{(n-1)/2}||Q||_2\\ &\leq Cq^{(n-1)/2}\left(\int_{|x|=1}\frac{1}{|P(x)|^\epsilon}d\sigma(x)\right)^{1/4}\left(\int_{|x|=1}|P(x)|^\epsilon|Q|^4d\sigma(x)\right)^{1/4}\\ &\leq Cq^{(n-1)/2}||PQ||_\infty^{\epsilon/4}\left(\int_{|x|=1}|Q|^{4-\epsilon}d\sigma(x)\right)^{1/4}\\ &\leq Cq^{(n-1)/2}||PQ||_\infty^{\epsilon/4}||Q||_\infty^{1-\epsilon/4},\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da lemmanın ispatını tamamlar. (48) i ispat edelim. $d$, $P$ nin derecesi olsun. Ricci ve Stein den iyi bilindiği üzere $|P(x)|$, $A^\infty$ sınıfında bir ağırlıktır. Gerçekten eğer $\epsilon d < 1$ ise

$$\int_{|x|<1}\frac{1}{|P(x)|^\epsilon}d(x) \leq C(\epsilon, d)\left(\int_{|x|<1}|P(x)|dx\right)^{-\epsilon} < \infty$$

dur. $P$, homojen polinom olduğundan (48) küresel koordinatlar alarak kolayca gösterilebilir. Şimdi (47), lemma (5.1.2) ve (45) ten ispat edilebilir. Gerçekten $M_0 = 2(n-1)/\epsilon$ alındığında

$$||Q_{2j-2d}||_\infty \leq C(n,P)(2j)^{M_0}||P_{2j}||_\infty$$

ve

$$\sum_{j\geq d} j^M||Q_{2j-2d}||_\infty \leq C(n,P)\sum_{j\geq 1}(2j)^{M+M_0}||P_{2j}||_\infty < \infty$$

elde edilir. Bu kısmın geri kalanı da kestirim ve kompaktlığı elde etmeye ayrılmıştır. Hipotezden $T = R\circ U$ burada $R$, tüm $P_{2j}$polinomları bölen $2d$ dereceli $P$ harmonik polinom ile ilgili yüksek mertebeli Riesz dönüşümüdür ve $U$, $A$ cebirinde terslenebilirdir. $T$ nin Fourier katsayısı

$$\sum_{j=d}^{\infty}\gamma_{2j}\frac{P_{2j}(\xi)}{|\xi|^{2j}} = \gamma_{2d}\frac{P(\xi)}{|\xi|^{2d}}\sum_{j\geq d}\frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}}\frac{Q_{2j-2d}}{|\xi|^{2j-2d}},\ \xi\ \epsilon\ \mathbb{R}^n/\{0\}.$$

Böylece $U$ nun Fourier katsayısı

$$\mu(\xi) = \gamma_{2d}^{-1}\sum_{j\geq d}\gamma_{2j}\frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}} \tag{49}$$

ve bu seri $C^\infty(S^{n-1})$ de yakınsaktır; çünkü $\gamma_{2j}\simeq(2j)^{-n/2}$ dir. $N\geq d$ için

$$\mu_N(\xi) = \gamma_{2d}^{-1}\sum_{j=d}^{N}\gamma_{2j}\frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}}, \xi\in\mathbb{R}^n/\{0\}. \tag{50}$$

alalım. Eğer

$$K_N(x) = \sum_{j=d} N \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

ve $T_N$, $K_N$ çekirdekli polinom operatörü ise $T_N = R \circ U_N$ dir. Burada $U_N$ $\mu_N(\xi)$ Fourier çarpanlı A cebirinde bir operatördür. Şimdi $N$ üzerinden $\mu_N(\xi)$ $S^{n-1}$ de sıfır olmayacak şekilde yeterince büyük olduğunu kabul edelim. Gerçekten daha sonra şu eşitsizliği gözönüne alacağız.

$$|\partial^\alpha \mu_N^{-1}(\xi)| \leq C, \quad |\xi| = 1, \quad 0 \leq |\alpha| \leq n+3, \tag{51}$$

ki bu eşitsizlik $C^\infty(S^{n-1})$ de yakınsak olmasından dolayı alınabilir. 51 de $C$, sadece $n$ ve $\mu$ ye bağlı pozitif bir sabitir.

$T$ ile $T_N$ yer değiştirirse $T_N$, teoremimizin (iii) şartını sağladığından $\mu_N(\xi) \neq 0, |\xi| = 1$ , ve bu da dördüncü kısmın sonuçlarını açıklar. Özellikle

$$K_N(x)\chi_{\mathbb{R}^n/\overline{B}}(x) = T_N(b_N)(x) + T_N(\beta_N)(x)$$

dir. Burada $b_N$ ve $\beta_N$ sırasıyla $b$, $\beta$ (18) de tanımlandı. $b_N$ nin $T$ ye bağlı olmadığını hatırlamak önemlidir. (12) de görüldüğü gibi $b_N$ fonksiyonu $\Delta^N$ operatörünün temel çözümü $N$ e bağlıdır.

**Lemma 4.3**

(1) $|\widehat{b_N(\xi)}| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$

(2) $||b_N||_{L^\infty(B)} \leq C(2N)^{2n+2}$

(3) $||\nabla b_N||_{L^\infty(B)} \leq C(2N)^{2n+4}$

olacak şekilde bir pozitif C sabiti vardır.

**İspat** Önce (1) i ispatlayalım. $h_1, h_2, \ldots h_d$, $L^2(d\sigma)$ tüm $2N$ inci dereceden homojen harmonik polinomları içeren altuzayının ortonormal bir bazı olsun. Lemma (5.1.1) deki gibi $S^{n-1}$ de $h_1^2 + h_2^2 + \ldots h_d^2 = d$ alalım.

$$H_j(x) = \frac{1}{\gamma_{2N}\sqrt{d}} h_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ve $S_J$, çekirdeği $K(x) = H_j(x)/|x|^{2N+n}$ olan yüksek mertebeli Riesz dönüşümü olsun. $S_j^2$ nin Fourier çarpanı

$$\frac{1}{d}\frac{h_j(\xi)^2}{|\xi|^{4N}}, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$$

ve buradan

$$\sum_{j=1}^{d} S_j^2 = I$$

dır. (10) dan

$$K_j(x)\chi_{\mathbb{R}^n/\overline{B}}(x) = S_j(b_N)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq j \leq d$$

ve böylece

$$b_N = \sum_{j=1}^{d} S_j\left(K_j(x)\chi_{\mathbb{R}^n/\overline{B}}(x)\right) \tag{52}$$

olur.

**Lemma 5.1.4** $K$, yüksek mertebeli bir Riesz dönüşümünün çekirdeği ise yalnızca $n$ e bağlı bazı $C$ sabitleri için

$$|K(x)\chi_{\mathbb{R}^n/\overline{B}}(\xi)| \leq C|(P.V.K(x))(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

dır.

(52) ve önceki lemmadan

$$\begin{aligned} |\widehat{b_N}(\xi)| &\leq \sum_{j=0}^{d} |\widehat{P.V.K}(x)(\xi)||K_j(x)\chi_{\mathbb{R}^n/\overline{B}}(x)(\xi)| \\ &\leq C\sum_{j=0}^{d} |\widehat{P.V.K_j}(x)(\xi)|^2 \\ &= C \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Lemma (5.1.3) deki (2) nin ispatına dönelim. (52) deki açıklamaya göre $b_N$ için lemma (4.1.3) teki $S_j$ operatörlerini $K_j$ operatörlerine uygulayalım. $K_j(x)$, $\mathbb{R}^n \backslash B$ de Lipschitz koşulunu sağlar ve

$$||b_N||_\infty \leq Cdmax_{1\leq j\leq d}||K_j||_{CZ}\left(||K_j||_{L\infty(R^n\backslash\overline{B})} + ||K|_j||_{Lip(1,\mathbb{R}^n\backslash\overline{B})}\right) \tag{53}$$

elde ederiz. $d \simeq (2N)^{n-2}$ olduğu bilinmektedir. Diğer bir deyişle

$$||K_j||_{CZ} \leq ||H_j||_\infty + ||\nabla H_j||_\infty$$

burada $S^{n-1}$ üzerinden supremum normu alındı. Dolayısıyla

$$||H_j||_\infty = \frac{1}{\gamma_{2N}}||\frac{h_j}{\sqrt{d}}||_\infty \leq \frac{1}{\gamma_{2N}} \simeq (2N)^{n/2}$$

yazılabilir. $H_j$ nin gradiyentinin kestirimleri için

$$||\nabla H_j||_\infty \leq C(2N)^{n/2+1}||H_j||_2 \tag{54}$$

eşitliğini kullanalım. Burada $L^2$ normu $d\sigma$ ya göre alınmıştır. $h_j$ ortonormal sistem olduğundan

$$||H_j||_2 = \frac{1}{\sqrt{d}\gamma_{2N}} \simeq \frac{(2N)^{n/2}}{(2N)^{(n-2)/2}} \simeq 2N$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliği gözönüne alırsak

$$||K_j||_{CZ} \leq C(2N)^{n/2+2}$$

elde edilir. Diğer taraftan doğrudan hesap yardımıyla

$$||K_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})} + ||K_j||_{Lip(1,\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})} \leq CN||H_j||_\infty + ||\nabla H_j||_\infty \leq C(2N)^{n/2+2}$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan

$$||b_N||_{L^\infty(B)} \leq C(2N)^{n-2}(2N)^{n/2+2}(2N)^{n/2+2} = C(2N)^{2n+2}$$

bulunur. Simdi lemma (5.1.3) deki (3) ün ispatını yapalım. (12) deki $b$ nin tanımını hatırlarsak $0 \leq j \leq N-1$ olacak şekilde bazı reel $\alpha_j$ katsayıları için

$$b_N(x) = \alpha_0 + \alpha_1|x|^2 + \ldots + \alpha_{N-1}|x|^{2N-2} \quad |x| < 1,$$

şeklindedir. $t$ reel değişkenli $p(t)$ polinomunun tanımından $b_N(x) = p(|x|), \quad |x| < 1$ olacak şekilde

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t^2 + \ldots + \alpha_{N-1}t^{2N-2}$$

olsun. Lemmanın ikinci kısmından

$$sup_{0\leq t\leq 1}|p(t)| \leq C(2N)^{2n+2}$$

ve böylece Markov eşitsizliğinden

$$sup_{0\leq t\leq 1}|p'(t)| \leq (2N-2)^2 sup_{0\leq t\leq 1}|p(t)| \leq C(2N)^{2n+4}$$

elde edilir. Şimdi (3), $\frac{\delta b_N}{\delta x_j} = p'(|x|)\frac{\delta |x|}{\delta x_j}$ eşitsizliğinden görülür ve bu da $|\nabla b_N(x)| \leq p'(|x|), \quad |x| < 1$ eşitsizliğini verir.

Amacımız teoremimizin $(iii)$ şartı altında

$$K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x) = T(\gamma)(x), \quad x\epsilon\mathbb{R}^n \tag{55}$$

olacak şekilde $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayında bir $\gamma$ fonksiyonu bulmaktır. Eğer bir $T$ polinom operatörü ise bu önceki bölümdeki $b+\beta$ şeklindeki bir $\gamma$ için ispat edilebilir.

$\Omega$ küresel harmoniklere göre (36) açılımına sahip olduğundan

$$\begin{aligned} K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x) &= \sum_{j\geq 1} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}} \\ &= \sum_{j\geq 1} T_j(b_j)(x), \end{aligned}$$

Burada $T_j$ çekirdeği $P_{2j}(x)/|x|^{2j+n}$ olan yüksek mertebeli Riesz dönüşümü ve $b_j$ (2) inci kısımda elde edilen fonksiyondur. $T_j$ nin Fourier çarpanı

$$\gamma_{2j}\frac{P_{2j}(\xi)}{|\xi|^{2j}} = \gamma_{2d}\frac{P(\xi)}{|\xi|^{2d}}\frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}}\frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$T_j = R \circ S_j$ olacak şekilde $S_j$ operatörünün Fourier çarpanı

$$\frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}}\frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}}, \quad \xi\epsilon\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{56}$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} K(x)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x) &= \sum_{j\geq d} (RoS_j)(b_j) \\ &= \sum_{j\geq d} T\left((U^{-1}oS_j)(b_j)\right) \\ &= T\left(\sum_{j\geq d} (U^{-1}oS_j)(b_j)\right). \end{aligned}$$

dir. Son eşitlik $\Sigma_{j\geq d}(U^{-1}oS_j)(b_j)$ serisinin $L^2(\mathbb{R}^n)$ de mutlak yakınsak olmasını sağlar. Bu da

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq d}||(U^{-1}oS_j)(b_j)||_2 &\leq \sum_{j\geq d}||Q_{2j-2d}||_\infty ||b_j||_{L^2(R^n)} \\ &\leq \sum_{j\geq d}||Q_{2j-2d}||_\infty ||b_j||_{L^\infty(B)} \\ &\leq \sum_{j\geq d}(2N)^{2n+2}||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty\end{aligned}$$

kestiriminden görülür.

Şimdi iddia ediyoruz ki $\sum_{j\geq d}(U^{-1}oS_j)(b_j)$ serisi $\mathbb{R}^n$ de bir $\gamma$ fonksiyonuna düzgün yakınsar ki bu (55) de ispat edilecektir. $U^{-1}oS_j$ operatörünün bir Calderon- Zygmund operatörü olması gerekmez; çünkü bu operatörün çarpanının küre üzerinde integrali sıfır olması gerekmez. Bununla birlikte $U^{-1}oS_j = c_jI + V_j$ olarak yazılabilir. Burada

$$c_j = \frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}}\int_{S^{n-1}}\mu(\xi)^{-1}Q_{2j-2d}(\xi)d\sigma(\xi)$$

dır. Burada $V_j$ Calderon- Zygmund operatörünün Fourier çarpanı

$$\mu(\xi)^{-1}\frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}}\frac{Q_{2j-2d}(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}} - c_j \tag{57}$$

Şimdi

$$\sum_{j\geq d}(U^{-1}oS_j)(b_j) = \sum_{j\geq d}c_jb_j + \sum_{j\geq d}V_j(b_j)$$

yazılabilir. Burada ilk seri çok zor değildir çünkü Lemma (5.1.3) ün (2) koşulu ve (47) den

$$\sum_{j\geq d}|c_j|||b_j||_{L^\infty(B)} \leq C\sum_{j\geq d}(2j)^{-n/2}(2j)^{2n+2}||Q_{2j-2d}||_\infty < \infty$$

dur. İkinci seri daha zordur. Lemma (4.1.3) ve Lemma (5.1.3) ün (2) ve (3) koşulundan

$$\begin{aligned}||V_j(b_j)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C||V_j||_{CZ}\left(||b_j||_{L^\infty(B)} + ||\nabla b_j||_{L^\infty(B)}\right) \\ &\leq C(2j)^{2n+4}||V_j||_{CZ}\end{aligned}$$

dır. $V_j$ operatörünün çekirdeğinin Calderon-Zygmund sabitini sınırlamak kolay değildir; çünkü çekirdeği için açık bir ifadeye sahip değiliz. Çarpana göre çekirdeğin sabitini sınırlamanın bir yoluna ihtiyacımız vardır ve bu daha sonraki lemmanın neyi gerektirdiğini gösterecektir.

**Lemma 5.1.5** $V$, Fourier çarpanı $m$ olan düzgün, homojen, Calderon-Zygmund operatörü olsun. Bu durumda $n$ e bağlı bazı $C$ sabiti için

$$||V||_{CZ} \leq C||\triangle_S^{n+3}m||_2^{1/2}||m||_2^{1/2}$$

dir. Burada $\triangle_S$, $d\sigma$ ya göre $L^2$ normuna göre küresel Laplace operatörünün gösterimidir.

**İspat** $\omega$, $C^{\infty}(S^{n-1})$sınıfından ve küre üzerinde integrali sıfır olamayan sıfırıncı dereceden homojen fonksiyon olacak şekilde $V$ nin çekirdeği $\omega(x)/|x|^n$ olsun. $\omega$ nın küresel harmonik açılımını düşünürsek $\omega(x) = \Sigma_{j\geq 1}p_j(x)$, $|x| = 1$ $V$ nin çekirdeği $\Sigma_{j\geq 1}p_j(x)/|x|^{j+n}$, $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ve Fourier çarpanı$m(\xi) = \Sigma_{j\geq 1}\gamma_j p_j(\xi)$, $|\xi| = 1$ (31) in tanımından bir Calderon-Zygmund operatörünün çekirdeğinin sabiti

$$||V||_{CZ} \leq C\sum_{j\geq 1}(j||p_j||_\infty + ||\nabla p_j||_\infty,)$$

dur. Burada $S^{n-1}$ üzerinden supremum normu alındı. (refeq54) te $H_j$, $p_j$ ile yer değiştirdiğinde ve Lemma (5.1.1) den

$$\begin{aligned} ||V||_{CZ} &\leq C\sum_{j\geq 1}\left(j^{1+(n-1)/2}||p_j||_2 + j^{n/2+1}||p_j||_2\right) \\ &\leq C\sum_{j\geq 1}\left(j^{n/2+2}||p_j||_2\right) \end{aligned}$$

$\gamma_j \simeq j^{-n/2}$ olduğundan yukarıdaki toplamı sınırlandırmalıyız. Schwarz eşitsizliğinden ve (33) de $m$ ile $\Omega$ ve $P_j$ ile $\gamma_j p_j$ yer değiştirirsek

$$\begin{aligned} \sum_{j\geq 1} j^{n+2}||\gamma_j p_j||_2 &\leq C\left(\sum_{j\geq 1} j^{2n+6}||\gamma_j p_j||_2^2\right)^{1/2} \\ &\leq C\left(\sum_{j\geq 1}(j(j+n-2))^{n+3}||\gamma_j p_j||_2^2\right)^{1/2} \\ &= C\left((-1)^n\int_{S^{n-1}}\triangle_S^{n+3}m\ m\ d\sigma\right)^{1/2} \\ &\leq C||\triangle_S^{n+3}m||_2^{1/2}||m||_2^{1/2}. \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma (5.1.5), $0 \leq k \leq n+3$ için $V_j$ nin kestirimi $L^2(d\sigma)$ normuna göre $\nabla^k Q_{2j-2d}$ kestirimine indirgenebilir. İlk olarak $k = 1$ durumunu gözönüne alalım.

$P_{2j} = PQ_{2j-2d}$ olduğundan

$$\nabla P_{2j} = \nabla PQ2j - 2d + P\nabla Q2j - 2d,$$

ve böylece Lemma (5.1.2) ve (54) de $H_j$ ile $P_{2j}$ yer değiştirilirse

$$\begin{aligned} ||\nabla Q2j - 2d||_{|\infty} &\leq Cj^M ||P\nabla Q2j - 2d||_{|\infty} \\ &\leq Cj^M \left(||\nabla P_{2j}||_{|\infty} + ||Q2j - 2d||_{|\infty}\right) \\ &\leq Cj^M \left(Cj^{n/2+1}||P_{2j}||_2 + Cj^M ||P_{2j}||_{|\infty}\right) \\ &\leq Cj^M ||P_{2j}||_2 \end{aligned}$$

olacak şekilde büyük bir pozitif $M = M(n, P)$ tamsayısı vardır. Burada son eşitsizlikteki $M$ notasyonu değiştirmeksizin artırılabilir. Tümevarım yöntemiyle yeterince büyük $M = M(n, P)$ tamsayıları için

$$||\nabla^k Q2j - 2d||_{|\infty} \leq Cj^M ||P_{2j}||_2, \quad 0 \leq k \leq n+3$$

elde ederiz. Son olarak $V_j$ nin çekirdeğinin sabiti için

$$||V_j||_{CZ} \leq Cj^M ||P_{2j}||_2,$$

elde edilir ve böylece

$$||V_j(b_j)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Cj^M ||P_{2j}||_2,$$

olur. Burada yine $M = M(n, P)$ sayısı pozitif bir tamsayıdır. Bu yüzden $\Sigma j \geq d(U^{-1}oS_j)(b_j)$ serisi $\mathbb{R}^n$ de düzgün yakınsak olur. (45) in ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi kompaktlık durumunun gösterildiği teoremin ispatının yeterlilik şartı da ispat edilecektir. Çekirdeği $K_N$ olan $T_N$ operatörü ve Lemma (5.1.3) de verilen $U_N$ operatörlerinin tanımından

$$K_N(x)_{\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}}(x) = T_N(b_N)(x) + T_N(\beta_N)(x) \tag{58}$$

dir. Diğer taraftan $\gamma$ nın elde edilmesinden

$$K_N(x)_{\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}}(x) = T_N(\gamma_N)(x), \quad \gamma_N = \sum_{j \geq d}^{N} (U^{-1}oS_j)(b_j) \tag{59}$$

elde ederiz. Dikkat edilirse $\mathbb{R}^n$ nin tamamı üzerinde $\gamma$ nın supremum normu kestirimini (41) garantilemektedir. Böylelikle $||\gamma_N||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $N$ de düzgündür. $T_N$ injektif olduğundan (58) ve (59) dan

$$b_N + \beta_N = \gamma_N \tag{60}$$

sonucuna varırız. Özellikle $b_N + \beta_N$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ nin sınırında düzgündür.

(59) ve (56) da verilen $U_N$ ve $S_j$ çarpanlarının açılımına göre

$$\widehat{\gamma_N}(\xi) = \sum_{j=d}^{N} \frac{1}{\mu_N(\xi)} \frac{\gamma_{2j}}{\gamma_{2d}} \frac{Q2j - 2d(\xi)}{|\xi|^{2j-2d}} \widehat{b_j(\xi)}$$

dir. Bu da $M = 0$ için Lemma (5.1.3) ve (37) den

$$\begin{aligned} ||\widehat{\gamma_N}(\xi)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C \sum_{J=d}^{N} ||Q2j - 2d||_\infty \\ &\leq C \sum_{J=d}^{\infty} ||Q2j - 2d||_\infty \\ &\leq C \end{aligned} \tag{61}$$

sonucunu verir. Burada $C$, $N$ e bağlı değildir. Hatırlarsak kısım 3, (26) dan $\int \beta_{1,N}(x)dx = 0$ koşulunu sağlayan $B$ üzerinde sınırlı destekli bir fonksiyondur.

$$\beta_N = U_N^{-1}(\beta_{1,N})$$

Böylece

$$\widehat{\beta_{1,N}} = \mu_N \widehat{\beta_N} = \mu_N(\widehat{\gamma_N} - \widehat{b_N})$$

dir. Lemma(5.1.3) den

$$||\beta_{1,N}||_{L^\infty(\mathbb{R})^n} \leq C.$$

Buradan $N \rightarrow$ için

$$\widehat{b_N} \rightarrow a_0 \text{ve} \widehat{\beta_{1,N}} \rightarrow a_1$$

zayıf * $L^\infty(\mathbb{R})^n$ de olduğunu kabul edelim. Böylece

$$b_N \rightarrow \Phi_0 = F^{-1} a_0 \text{ve } \beta_{1,N} \rightarrow \Phi_1 = F^{-1} a_1$$

dir. Burada $\mathcal{F}^{-1}$ Fourier dönüşümünün tersidir. Özellikle $\Phi_0$ ve $\Phi_1$, $\overline{B}$ da destekli dağılımlardır ve

$$\langle \Phi_1, 1 \rangle = \lim_{N\to\infty} \int \beta_{1,N}(x)dx = 0 \tag{62}$$

dır. Şimdi $\beta_N$ dizisinin yakınsaklık özelliklerini anlamak istiyoruz. Böylece

$$\widehat{\beta_N}(\xi) = \mu_N^{-1}(\xi)\widehat{\beta_{1,N}}(\xi)$$

ve $\mu_N^{-1}(\xi), \mu^{-1}(\xi)\mathbb{R})^n/\{0\}$ da noktasal sınırlı yakınsaklığına sahibiz. Buradan $L^\infty\mathbb{R})^n$ nin zayıf * topolojisinde $\beta_N \to \mu^{-1}a_1$ dir. Böylece

$$\beta_N \to U^{-1}(\Phi_1)$$

dir. (60) da $N \to \infty$ alalım. Buradan

$$\Phi_0 + U^{-1}(\Phi_1) = \gamma$$

$$|\gamma(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \; |x| \geq 2 \tag{63}$$

dir. $\Phi_0$ ve $\Phi_1$, $B$ de destekli ve $U^{-1}(\Phi_1) = \lambda\Phi_1 + v(\Phi_1)$ olduğundan ve $V$ düzgün homojen Calderon-Zygmund operatörü $B(0,2)$ yuvarında $V(\Phi_1)$ nin davranışını görmemiz için yeterlidir. $L$, $V$ nin çekirdeği olsun. $|X| \geq 2$ sabitlersek

$$\begin{aligned} V(\Phi_1)(x) &= \langle \Phi_1, L(x-y) \rangle \\ &= \langle \Phi_1, L(x-y) - L(x) \rangle \end{aligned} \tag{64}$$

$\Phi_1$ fonksiyonu $\overline{B}$ de destekli dağılımlı fonksiyon olduğundan

$$|\langle \Phi_1, \varphi \rangle| \leq C sup_{|\alpha|\leq\nu} sup_{|y|\leq 3/2} |\delta^\alpha \varphi(y)|, \tag{65}$$

olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de sonsuz mertebeden diferansiyelenebilir her $\varphi$ fonksiyonu için bir pozitif $\nu$ ve bir $C$ sabiti vardır. $L$ çekirdeği

$$|\frac{\delta^\alpha}{\delta y^\alpha}(L(x-y) - L(x))| \leq \frac{C_\alpha}{|x|^{n+1+|\alpha|}}, \quad |y| \leq 3/2,$$

sağlar ve (64) ve (65) ten

$$|V(\Phi_1)(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}, \quad |x| \geq 2,$$

ki buda (63) ün ispatıdır. Genel durumun yeterlilik şartı ispatlanmış olur.

## 5.2 Gereklilik Koşulunun İspatı : Genel Durum

Bu kısımda çekirdeği küre üzerindeki integrali sıfır olmayan homojen ve $C^\infty(S^{n-1})$ sınıfına ait $K(x) = \Omega(x)/|x|^n$ dır. Bu durumda $\Omega(x) = \Sigma_{j\geq 1}^{\infty} P_{2j}(x)/|x|^{2j}$ dir. Burada $P_{2j}$ derecesi $2j$ olan homojen harmonik polinomdur. Polinom durumunu genelleştirirsek yukarıdaki serinin ksımi toplamlar serisine göz atmamız gerekir. $N \geq 1$ için $K_N(x) = \Omega_N(x)/|x|^n$ dir. Burada $\Omega_N(x) = \Sigma_{j=1}^{N} P_{2j}(x)/|x|^{2j}$, ve $T_N$ operatörünün çekirdeği $K_N$ dir.

$$||T_N^* f||_2 \leq C||T_N f||_2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{66}$$

eşitsizliğini elde etmek kolay değildir. Hipotezden, yani

$$||T^* f||_2 \leq C||Tf||_2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

dir. Bunun yerine (66) yı elde etmek için aşağıdaki eşitsizlikteki sağ tarafa eklenen $||T_N f||_2$ ile $||Tf||_2$ yer değiştirilirse $N \to \infty$ a giderken eklenen terim küçülür.

$$\begin{aligned} ||T_N^1 f||_2 &\leq ||T^1 f||_2 + ||T_f^1 - T_N^1 f||_2 \\ &\leq C||Tf||_2 + ||\sum_{j\geq N} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}} * f||_2 \end{aligned}$$

dır. (10) dan

$$\frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}}(x) = P.V \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} * b_j$$

olacak şekilde $B$ de destekli sınırlı bir $b_j$ fonksiyonu vardır. Lemma (5.1.3) (1)den $||\widehat{b_j}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ $j$ıncı dereceden düzgün sınırlı ise bu durumda Plancherel in açıklamasından

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j>N} \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}} * f \right\|_2 &= \left\| \sum_{j>N} P.V. \frac{P_{2j}(x)}{|x|^{2j+n}} * b_j * f \right\|_2 \\ &\leq C \left( \sum_{j>N} ||P_{2j}||_\infty \right) ||f||_2, \end{aligned}$$

Burada küre üzerinde supremum normu alındı. (56) yı $T_N$ e uygularsak

$$T_N^1 f = K_N \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}} * f = K_N * b_N * f + S_N \chi_B * f$$

elde ederiz. Buradan $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}
\|S_N\chi_B * f_2\|_2 &\leq \|T_N^1 f\|_2 + \|K_N * f * b_N\|_2 \\
&\leq C\|Tf\|_2 + C\left(\sum_{j>N} ||P_{2j}||_\infty\right) ||f||_2 + \|K_N * f * b_N\|_2 \\
&\leq C\|Tf\|_2 + \|Tf * b_N\|_2 + C\left(\sum_{j>N} ||P_{2j}||_\infty\right) ||f||_2 \\
&\leq C\|Tf\|_2 + C\left(\sum_{j>N} ||P_{2j}||_\infty\right) ||f||_2
\end{aligned}$$

olur. Burada son eşitsizlikte Lemma (5.1.3) (1) kullanıldı.

$$|\widehat{S_N\chi_B}(\xi)| \leq C|\widehat{P.V.K}(\xi)| + C\left(\sum_{j>N} ||P_{2j}||_\infty\right), \quad \xi \neq 0 \tag{67}$$

a dönüştürür. Şimdi eşitsizlikteki sol tarafın nasıl yakınsak olduğunu gösterelim. $|\xi_0| = 1$ ve $r > 0$ olacak şekilde $\xi = r\xi_0$ alalım. (60) da $S$ ile $S_N$ nin ve $a_{2p}$ ile $a_{2p}^N$ nin yerleri değiştirilirse

$$\widehat{S_N\chi_B}(r\xi_0) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}^N(\xi_0) r^{2p}$$

dir.

**Lemma 5.2.1** $p+1 \leq N$ ise $a_{2p}^N = a_{2p}^{p+1}$ dir.

$p \geq 1$ ve $p+1 \leq N$ ise $a_{2p} = a_{2p}^N$ alalım. $a_{2p}^N$ için bir kestirim kısım 6 da ispatlanacaktır.

**Lemma 5.2.2** $n$ e bağlı bazı $C$ sabitleri için

$$|a_{2p}| \leq \frac{C}{(p-1)!4^p} \sum_{j=1}^{p} \|P_{2j}\|_\infty \quad 1 \leq p \leq N-1, \tag{68}$$

ve

$$|a_{2p}^N| \leq \frac{C}{4^p} \binom{\frac{n}{2} + N - 1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} ||P_{2j}||_\infty \tag{69}$$

ispat edeceğimiz küre üzerindeki $\forall\xi_0$ için $S_N\chi B(r\xi_0)$ nın $0 \leq r \leq 1$ için düzgün yakınsak olduğunu kabul edelim. $1 \leq N \leq M$ için

$$\begin{aligned}\left|\widehat{S_N\chi_B}(r\xi_0) - \widehat{S_M\chi_B}(r\xi_0)\right| &\leq \sum_{p\geq N}|a_{2p}^N|r^{2p} + \sum_{p=N}^{M-1}|a_{2p}^N|r^{2p} + \sum_{p\geq M}|a_{2p}^M|r^{2p} \\ &\leq C\left(\frac{1}{4^N}\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-1} + \sum_{p\geq N}\frac{1}{(p-1)!4^p}\right)\sum_{j=1}^{\infty}||P_{2j}||_\infty\end{aligned}$$

Burada $N \to \infty$ a giderken ifademizde 0 a gider. (67) de $N \to \infty$ a giderken

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}(\xi_0)r^{2p}\right| \leq C|\widehat{P.V.K}(\xi_0)|, \qquad 0 \leq r \leq 1, \quad |\xi_0| = 1 \tag{70}$$

elde ederiz.

# 6 Lemmaların İspatları

Bu kısımda önceki kısımlarda kullanılan Lemma (4.2.2), Lemma (5.2.1) ve Lemma (5.2.2) nin ispatı yapılacaktır. (11) deki $A_l$ katsayıları için yeni bir formül elde ederek başlayalım; çünkü $\mathbb{R}^n$ deki $\triangle^N$ nin $E_N = E_N^n$ temel çözümü için bir ifade elde etmek gerekir. İlk olarak

$$E_N = \frac{1}{|x|^{n-2N}}(\alpha(n,N) + \beta(n,N)log|x|^2),$$

yazarız. Burada $\alpha$ ve $\beta$, $n$ ve $N$ e bağlı sabitlerdir. $\alpha$ ve $\beta$ nın kapalı formlarını yazmak için farklı durumları gözönüne alalım. $\omega_n$, $S^{n-1}$ nin yüzey ölçüsü olsun.

Birinci Durum : $n$ tek olsun. Bu durumda

$$\alpha(n,N) = \frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})}{4^{N-1}(N-1)!\Gamma(N+1-\frac{n}{2})(2-n)\omega_n}$$

ve

$$\beta(n;N) = 0$$

dır.

İkinci Durum: $n$ çift, $n \neq 2$ ve $N \leq \frac{n}{2} - 1$ olsun. Bu durumda

$$\alpha(n,N) = \frac{(-1)^{N-1}(\frac{n}{2}-N-1)!}{4^{N-1}(N-1)!(\frac{n}{2}-2)!(2-n)\omega_n}$$

ve

$$\beta(n;N) = 0$$

dır.

Üçüncü Durum : $n$ çift , $n \neq 2$ ve $N \geq \frac{n}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\beta(n,N) = \frac{1}{(-1)^{\frac{n}{2}+1}(N-\frac{n}{2})!4^{N-1}(N-1)!(\frac{n}{2}-2)!(2-n)\omega_n}$$

ve

$$\alpha(n,N) = 2\beta(n,N)S_{N-\frac{n}{2}}$$

dir. Burada $S_0 = 0$ ve

$$S_L = \sum_{k=1}^{L}\frac{1}{2k} + \sum_{k=\frac{n}{2}}^{L+\frac{n}{2}-1}\frac{1}{2k}, \qquad 1 \leq L.$$

Dördüncü Durum : $n = 2$ olsun

$$\beta(2, N) = \frac{1}{2} \frac{1}{4^{N-1}(N-1)!^2 \omega_2}$$

ve

$$\alpha(2, N) = 2\beta(2, N) S_{N-1}$$

dir.

$A_0, A_1, \ldots, A_{2N-1}$ katsayılarını gözönüne alalım.

$$\varphi(x) = E(x)\chi\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}(x) + (A_0 + A_1|x|^2 + \cdots + A_{2N-1}|x|^{4N-2})\chi B(x) \tag{71}$$

yazarız ve tüm kısmi türevleri $4N - 1$ den büyük olmak üzere $\delta B$ sınır üzerinde sürekli genişletlebilirdir.

**Lemma 6.1** $L = N + 1, \ldots, 2N - 1$ için

$$A_L = \frac{(-1)^{N+L} \binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}}{V_n 4^N (L + \frac{n}{2} - N)(2N - L - 1)! L!}$$

burada $V_n$ birim çemberin hacmidir.

**İspat**

$$E_N^n(x) \equiv E(t) = t^{N-\frac{n}{2}}(\alpha + \beta log(t)) \tag{72}$$

olması için $t = |x|^2$ alalım. $P(t) = \sum_{L=0}^{2N-1} A_L t^L$ olsun. Sonuç (2.1.2) den

$$P^{k)}(1) = E^{k)}(1), \qquad 0 \leq k \leq 2N - 1$$

yazabiliriz. Taylor açılımından $P(t) = \sum_{i=0}^{2N-1} \frac{E^{i)(1)}}{i!}(t-1)^i$ dir. $(t-1)^i$ e binom formülünü uygularsak

$$A_L = \sum_{i=L}^{2N-1} \frac{E^{i)(1)}}{i!}(-1)^{i-L}\binom{i}{L}, \qquad 0 \leq L \leq 2N - 1$$

olur. Şimdi $E^{i)(1)}$ i hesaplamak istiyoruz. Açık olarak

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^i (t^{N-\frac{n}{2}}) = \left(N - \frac{n}{2}\right) \ldots \left(N - \frac{n}{2} - i + 1\right) t^{N-\frac{n}{2}-i}$$

(72) deki logaritmik terime dikkat edilirse $n$ boyutu çift olduğunda görülür. Bu durumda $\forall i \geq N + 1$ için

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^i (t^{N-\frac{n}{2}} logt) = \left(N - \frac{n}{2}\right)!(-1)^{i-N+\frac{n}{2}-1}\left(i - N + \frac{n}{2} - 1\right)! t^{-i+N-\frac{n}{2}}$$

dir. Bu yüzden $\forall i \geq N+1$ için

$$\begin{aligned} E^{i)(1)} &= \alpha(n,N)\left(N-\frac{n}{2}\right)\dots\left(N-\frac{n}{2}-i+1\right) \\ &\quad +\beta(n,N)\left(N-\frac{n}{2}\right)!(-1)^{i-N+\frac{n}{2}-1}\left(i-N+\frac{n}{2}-1\right)! \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} A_L &= (-1)^L\alpha(n,N)\sum_{i=L}^{2N-1}\left(N-\frac{n}{2}\right)\left(N-\frac{n}{2}-i+1\right)\frac{(-1)^i}{i!}\binom{i}{L} \\ &+ (-1)^{L-N+\frac{n}{2}-1}\beta(n,N)\left(N-\frac{n}{2}\right)!\sum_{i=L}^{2N-1}\left(i-N+\frac{n}{2}-1\right)!\frac{\binom{i}{L}}{i!} \end{aligned} \tag{73}$$

$n=2$ ya da $n$ nin tek ve $N \geq \frac{n}{2}$ durumlarını hatırlarsak (73) teki ilk terimin sıfıra eşittir; $n$ nin çift ya da $n$ nin tek ve $N \leq \frac{n}{2}-1$ olduğunda ise ikinci terim sıfıra eşittir; çünkü $\beta(n,N)=0$ dır. Birinci terim için

$$\sum_{i=L}^{2N-1}\left(N-\frac{n}{2}\right)\dots\left(N-\frac{n}{2}-i+1\right)\frac{(-1)^i}{i!}\binom{i}{L} = (-1)^L\binom{n-\frac{n}{2}}{L}\binom{\frac{n}{2}+N-1}{2n-1-L} \tag{74}$$

olduğunu gösterelim. Gerçekten (74) ün sol tarafı, $k=i-L$ için

$$\begin{aligned} &\frac{1}{L!}\sum_{k=0}^{2N-1-L}\left(N-\frac{n}{2}\right)\dots\left(N-\frac{n}{2}-L-k+1\right)\frac{(-1)^{L+k}}{k!} \\ &= (-1)^L\binom{N-\frac{n}{2}}{L}\sum_{k=0}^{2N-1-L}\binom{\frac{n}{2}+L-N+k-1}{k} \\ &= (-1)^L\binom{N-\frac{n}{2}}{L}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{2N-1-L} \end{aligned}$$

olur. Burada son eşitlik [GKP] den geldi.

İkinci terimi hesaplamak için

$$\sum_{i=L}^{2N-1}\left(i-N+\frac{n}{2}-1\right)!\frac{1}{i!}\binom{i}{L} = \frac{(L-N+\frac{n}{2}-1)!}{L!}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{2N-1-L} \tag{75}$$

olduğunu gösterelim. Önceki gibi $k=i-L$ alalım ve [GKP] ye uygulayalım. (75) nin sol tarafı

$$\frac{1}{L!}\sum_{k=0}^{2N-1-L}\left(L+k-N+\frac{n}{2}-1\right)!\frac{1}{k!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(L-N+\frac{n}{2}-1\Big)! \sum_{k=0}^{2N-1-L} \binom{\frac{n}{2}+L-N+k-1}{k} \\
&= \frac{(L-N+\frac{n}{2}-1)!}{L!} \binom{N+\frac{n}{2}-1}{2N-1-L}.
\end{aligned}
$$

Lemmanın ispatını tamamlamak için 4 durumu inceleyelim.

Birinci Durum : $n$ tek olsun.

$\beta(n,N)=0$ olduğundan (73) teki $\alpha(n,N)$ yerdeğiştirilirse ve (74) ü kullanırsak basit aritmetik işlemler ve $nV_n=\omega_n$ eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
A_L &= \frac{(-1)^L\Gamma(2-\frac{n}{2})}{4^{N-1}(N-1)!\Gamma(N+1-\frac{n}{2})(2-n)\omega_n}(-1)^L\binom{N-\frac{n}{2}}{L}\binom{\frac{n}{2}+N-1}{2N-1-L} \\
&= \frac{(-1)^{N+L}(N+\frac{n}{2}-1)\dots(\frac{n}{2}+1)}{4^N V_n L!(2N-1-L)!(L+\frac{n}{2}-N)(N-1)!} \\
&= \frac{(-1)^{N+L}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}}{4^N V_n L!(2N-1-L)!(L+\frac{n}{2}-N)}.
\end{aligned}
$$

İkinci Durum : $n$ çift, $n\neq 2$ ve $N\leq \frac{n}{2}-1$ için birinci durumdaki gibi $\beta(n,N)=0$ ve (74) gösterimindekine benzer olarak

$$
\begin{aligned}
A_l &= \frac{(-1)^L(-1)^{N-1}(\frac{n}{2}-N-1)!}{4^{N-1}(N-1)!(\frac{n}{2}-2)!(2-n)\omega_n}(-1)^L\binom{N-\frac{n}{2}}{L}\binom{\frac{n}{2}+N-1}{2N-1-L} \\
&= \frac{(-1)^{N+L}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}\frac{n}{2}!(\frac{n}{2}-N-1)!\{(N-\frac{n}{2})\dots(N-\frac{n}{2}-L+1)\}}{(2N-1-L)!L!4^{N-1}(2-n)\omega_n(\frac{n}{2}-2)!(\frac{n}{2}-N+L)!} \\
&= \frac{(-1)^N\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}}{4^N V_n L!(2N-1-L)!}\frac{(-1)L(\frac{n}{2}-N+L-1)!}{(\frac{n}{2}-N+L)!} \\
&= \frac{(-1)^{N+L}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}}{4^N V_n L!(2N-1-L)!(L+\frac{n}{2}-N)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Üçüncü Durum : $n$ çift, $n\neq 2$ ve $N\geq \frac{n}{2}$ için (73) deki $\alpha(n,N)$ ve $\beta(n,N)$ yer değiştirilirse ve (75) kullanılarak

$$\begin{aligned} A_L &= \beta(n,N)(N-\frac{n}{2})!(-1)^{N+\frac{n}{2}-1+L}\sum_{i=L}^{2N-1}(i-N+\frac{n}{2}-1)!\frac{1}{i!}\binom{i}{L} \\ &= \frac{(-1)^{N+L}(L-N+\frac{n}{2}-1)!}{L!4^{N-1}(\frac{n}{2}-2)!(N-1)!(2-n)\omega_n}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{2N-1-L} \\ &= \frac{(-1)^{L+N}\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)}{4^{N-1}(2-n)\omega_n L!(2N-1-L)!(\frac{n}{2}-N+L)}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1} \\ &= \frac{(-1)^{N+L}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}}{4^N L! V_n(2N-1-L)!(\frac{n}{2}-N+L)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Dördüncü Durum : $n=2$ için

$$\begin{aligned} A_L &= \beta(n,N)(N-\frac{n}{2})!(-1)^{N+\frac{n}{2}-1+L}\sum_{i=L}^{2N-1}(i-N+\frac{n}{2}-1)!\frac{1}{i!}\binom{i}{L} \\ &= \frac{(-1)^{N+L}N!}{2\omega_2 4^{N-1}L!(N-1)!(2N-1-L)!(L+1-N)} \\ &= \frac{(-1)^{L+N}\binom{N}{N-1}}{V_2 4^N L!(2n-1-L)!(L+1-N)} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Lemma 4.2.2 nin İspatı**

$$C_{2j} = \sum_{l=N+1}^{2N-1} c_{l,j,l-N-j} G_{\frac{n}{2}+l-N+j}(0).$$

$\widehat{S\chi B(\xi)}$ için (59) da verilen ifadedeki $c_{l,j,k}$ sabitlerini hesaplayabiliriz. $S(x)$ için (22) de verilen $c_{l,j}$ sabitlerine ihtiyacımız var. $P_{2j}(\delta)\triangle^{N-j}(|x|^{2l})$ hesaplayarak başlayalım. (20) den ve lemma (4.1.2) den eğer $l-N-j\geq 0$ ise

$$P_{2j}(\delta)\triangle^{N-j}(|x|^{2l}) = \frac{4^N l!(N-j)!}{(l-N-j)!}\binom{l-1+\frac{n}{2}}{N-j}P_{2j}(x)|x|^{2(l-N-j)}$$

$$\begin{aligned} P_{2j}(\delta)\triangle^{l-N-j}G_{\frac{n}{2}}(\xi) &= (-1)^{2(l-N)}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\Delta^k(P_{2j}(x)|x|^{2(l-N-j)})G_{\frac{n}{2}+2(l-N)-k}(\xi) \\ &= \sum_{k=0}^{l-N-j}\frac{(-1)^k}{2^k k!}4^k\frac{(l-N-j)!}{(l-N-j-k)!}k!\binom{\frac{n}{2}+j+l-N-1}{k} \\ &\quad \times P_{2j}(\xi)|\xi|^{2(l-N-j-k)}G_{\frac{n}{2}+2(l-N)-k}(\xi). \end{aligned}$$

$Q(x)$ ve $S(x)$ in tanımlarına göre

$$\begin{aligned} S(x) &= -Q(\delta)\left(\sum_{l=0}^{2N-1} A_l|x|^{2l}\right) = -\sum_{l=0}^{2N-1} A_l \sum_{j=1}^{N} \gamma_{2j} P_{2j}(\delta)\triangle^{N-j}(|x|^{2l}) \\ &= -\sum_{l=N+1}^{2N-1}\sum_{j=1}^{N-j} A_l\gamma_{2j}\frac{4^N l!(N-j)!}{(l-N-j)!}\binom{l-1+\frac{n}{2}}{N-j} P_{2j}(x)|x|^{2(l-N-j)} \\ &= \sum_{l=N+1}^{2N-1}\sum_{j=1}^{N-j} c_{l,j}P_{2j}(x)|x|^{2(l-N-j)} \end{aligned}$$

Burada son eşitlik $c_{l,j}$ nin tanımıdır. (59) da

$$\begin{aligned} \widehat{S\chi B}(\xi) &= S(\iota\delta)\widehat{\chi_B}(\xi) \\ &= \sum_{l=N+1}^{2N-1}\sum_{j=1}^{l-N} c_{lj}(-1)^{l-N}P_{2j}(\delta)\triangle^{l-N-j}G_{\frac{n}{2}}(\xi) \\ &= \sum_{l=N+1}^{2N-1}\sum_{j=1}^{l-N}\sum_{k=0}^{l-N-j} c_{l,j,k}P_{2j}(\xi)|\xi|^{2(l-N-j-k)}G_{\frac{n}{2}+2(l-N)-k}(\xi). \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} c_{l,j,k} &= c_{l,j}(-1)^{l-N}\frac{(-1)^k}{2^k}4^k\frac{(l-N-j)!}{(l-N-j-k)!}\binom{\frac{n}{2}+j+l-N-1}{k} \\ &= -(-1)^{l+N+k}A_l\gamma_{2j}\frac{4^N l!(N-j)!}{(l-N-j)!}\binom{l-1+\frac{n}{2}}{N-j} \\ &\quad \times 2^k\frac{(l-N-j)!}{(l-N-j-k)!}\binom{\frac{n}{2}+j+l-N-1}{k} \end{aligned}$$

$$c_{l,j,k} = -\frac{(-1)^k}{V_n}\frac{\gamma_{2j}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}2^k(N-j)!\binom{l-1+\frac{n}{2}}{N-j}\binom{\frac{n}{2}+j+l-N-1}{k}}{(l+\frac{n}{2}-N)(2N-l-1)!(l-N-j-k)!}. \tag{76}$$

elde edilir. Son olarak $C_{2j}$ yi hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
C_{2j} &= \sum_{l=N+1}^{2N-1} c_{l,j,l-N-j} G_{\frac{n}{2}+l-N+j}(0) \\
&= \sum_{l=N+1}^{2N-1} c_{l,j,l-N-j} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+l-N+j}\Gamma(\frac{n}{2}+l-N+j+1)} \\
&= -\sum_{l=N+1}^{2N-1} \frac{(-1)^{l-N-j}}{V_n} \frac{\gamma_{2j}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1} 2^{l-N-j}(N-j)!\binom{l-1+\frac{n}{2}}{N-j}\binom{\frac{n}{2}+j+l-N-1}{k}}{(l+\frac{n}{2}-N)(2N-l-1)!2^{\frac{n}{2}+l-N+j}\Gamma(\frac{n}{2}+l-N+j+1)} \\
&= -\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(j)\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}(N-j)!}{V_n\Gamma(j+\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}+2j}} \\
&\quad \times \sum_{l=N+1}^{2N-1} \frac{(-1)^{l+N}\binom{l-1+\frac{n}{2}}{N-j}\binom{\frac{n}{2}+j+l-N-1}{l-N-j}}{(l+\frac{n}{2}-N)(2N-l-1)!\Gamma(\frac{n}{2}+l-N+j+1)} \\
&= -\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(j)\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}(N-j)!}{V_n\Gamma(j+\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}+2j}} \\
&\quad \times \sum_{i=0}^{N-1-j} \frac{(-1)^{i+j}\binom{i+N+j-1+\frac{n}{2}}{N-j}\binom{\frac{n}{2}+2j+i-1}{i}}{(i+j+\frac{n}{2})(N-i-j-1)!\Gamma(\frac{n}{2}+i+2j+1)} \\
&= -\frac{(-1)^j\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(j)\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}(N-j)!}{V_n\Gamma(j+\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}+2j}\Gamma(2j+\frac{n}{2})} \\
&\quad \times \sum_{i=0}^{N-1-j} \frac{(-1)^{i}\binom{i+N+j-1+\frac{n}{2}}{N-j}\binom{\frac{n}{2}+2j+i-1}{i}}{(i+j+\frac{n}{2})(N-i-j-1)!\prod_{k=0}^{i}(\frac{n}{2}+2j+i-k)} \\
&= -\frac{(-1)^j\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(j)\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}(N-j)!}{V_n\Gamma(j+\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}+2j}\Gamma(2j+\frac{n}{2})}\binom{N-1}{j-1}\frac{\Gamma(j+\frac{n}{2})}{j\Gamma(N+\frac{n}{2})} \\
&= \frac{-\pi^{\frac{n}{2}}}{V_n 2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{(-1)^j}{j4^j\Gamma(2j+\frac{n}{2})}.
\end{aligned}
$$

**Lemma 6.1.2** $\forall j = 1, \ldots, N-1$ için

$$
\sum_{i=0}^{N-1-j} \frac{(-1)^{i}\binom{i+N+j-1+\frac{n}{2}}{N-j}\binom{\frac{n}{2}+2j+i-1}{i}}{(i+j+\frac{n}{2})(N-i-j-1)!\prod_{k=0}^{i}(\frac{n}{2}+2j+i-k)} = \binom{N-1}{j-1}\frac{\Gamma(j+\frac{n}{2})}{j\Gamma(N+\frac{n}{2})}.
$$

dir.

**İspat**

$$\frac{\binom{i+N+j-1+\frac{n}{2}}{N-j}\binom{\frac{n}{2}+2j+i-1}{i}\Gamma(N+\frac{n}{2})}{(i+j+\frac{n}{2})\prod_{k=0}^{i}(\frac{n}{2}+2j+i-k)\Gamma(j+\frac{n}{2})}$$

$$= \binom{N+i+j+\frac{n}{2}-1}{N-j-1}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-i-j-1}\frac{(N-i-j-1)!}{N-j}\binom{\frac{n}{2}+i+j-1}{i},$$

ve böylece

$$\begin{aligned} A &= \frac{j}{\binom{N-1}{j-1}(N-j)}\sum_{i=0}^{N-1-j}(-1)^i\binom{N+i+j+\frac{n}{2}-1}{N-j-1}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-i-j-1}\binom{\frac{n}{2}+i+j-1}{i} \\ &= \frac{j}{\binom{N-1}{j-1}(N-j)}\sum_{i=0}^{N-1-j}(-1)^i\binom{N+i+j+\frac{n}{2}-1}{N-j-1}\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-i-j-1}\binom{-\frac{n}{2}-j}{i} \\ &= \frac{j}{\binom{N-1}{j-1}(N-j)}\binom{\frac{n}{2}+N+j-1}{0}\binom{N-1}{N-j-1} = 1. \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n} = \binom{r}{m}\binom{s}{n}, \tag{77}$$

dir. Burada $m$ ve $n$ negatif olmayan tamsayılardır.

Yeni görevimiz Lemma (5.2.1) ve Lemma (5.2.2) yi ispatlamaktır. $\xi = r\xi_0$, $|\xi_0| = 1$ alalım. (59) dan

$$\begin{aligned} \widehat{S_N\chi B}(r\xi_0) &= \sum_{l=N+1}^{2n-1}\sum_{j=1}^{l-N}\sum_{k=0}^{l-N-j} c_{l,j,k}P_{2j}(r\xi_0)|r\xi_0|^{2(l-N-j-k)}G_{\frac{n}{2}+2l-2N-k}(r\xi_0) \\ &= \sum_{s=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=0}^{s-j} c_{N+s,j,k}P_{2j}(\xi_0)r^{2(s-k)}G_{\frac{n}{2}+2s-k}(r) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{s=j}^{N-1}\sum_{k=0}^{s-j} c_{N+s,j,k}P_{2j}(\xi_0)r^{2(s-k)}G_{\frac{n}{2}+2s-k}(r) \\ &:= \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}^N(\xi_0)r^{2p}. \end{aligned}$$

$a_{2p}^N$ katsayılarını hesaplamak için $G_q(r)$ nin kuvvet serisinin açılımına uygulayalım. Yani,

$$G_q(r) = \sum_{i=0}^{\infty} = \frac{(-1)^i}{i!\Gamma(q+i+1)} \frac{r^{2i}}{2^{2i+q}} \tag{78}$$

**Lemma 5.2.1 in İspatı**

$$a_{2p}^N = \sum_{j=1}^{p} P_{2j}(\xi_0) \sum_{i=0}^{p-j} \sum_{s=p-i}^{N-1} c_{N+s,j,s-(p-i)} \times G_{\frac{n}{2}+s+p-i}(r) \text{ den } r^{2i} \text{ katsayıları}$$

(78) e göre

$$\begin{aligned}
a_{2p}^N &= \sum_{j=1}^{p} P_{2j}(\xi_0) \sum_{i=0}^{p-j} \sum_{s=p-i}^{N-1} c_{N+s,j,s-(p-i)} \frac{(-1)^i}{i! 2^{i+\frac{n}{2}+s+p} \Gamma(\frac{n}{2}+s+p+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{p} P_{2j}(\xi_0) \sum_{i=0}^{p-j} \sum_{s=p-i}^{N-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i! 2^{i+\frac{n}{2}+s+p} \Gamma(\frac{n}{2}+s+p+1)} \frac{(-1)^{s-(p-i)}}{V_n} \\
&\quad \times \frac{\gamma_{2j} \binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1} 2^{s-(p-i)} (N-j)! \binom{N+s-1+\frac{n}{2}}{N-j} \binom{\frac{n}{2}+j+s-1}{s-(p-i)}}{(s+\frac{n}{2})(N-s-1)!(p-i-j)!} \\
&= (-1)^{p+1} \sum_{j=1}^{p} P_{2j}(\xi_0) \frac{(-1)^j \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(j)(N-j)!}{V_n \Gamma(\frac{n}{2}+j) 2^{\frac{n}{2}+2p}} \sum_{i=0}^{p-j} \frac{\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}}{i!(p-i-j)!} \\
&\quad \times \sum_{s=p-i}^{N-1} \frac{(-1)^s \binom{N+s-1+\frac{n}{2}}{N-j} \binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1} 2^{s-(p-i)}}{(s+\frac{n}{2})(N-s-1)! \Gamma(\frac{n}{2}+s+p+1)}
\end{aligned}$$

dir.

$$a_{2p}^N = (-1)^{p+1} \sum_{j=1}^{p} P_{2j}(\xi_0) \frac{(-1)^j \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(j)(N-j)!}{V_n \Gamma(\frac{n}{2}+j) 2^{\frac{n}{2}}+2p} \sum_{i=0}^{p-j} \frac{\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1}}{i!(p-i-j)!}$$
$$\times \frac{(-1)^{p-i}(N-p-1)! \binom{N-1}{p}}{(N-j)! \Gamma(N+\frac{n}{2}) j! \binom{\frac{n}{2}+p-i+j-1}{j}}$$

elde edilir. Binom katsayılarından

$$\binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1} (N-p-1)! \binom{N-1}{p} \frac{1}{\Gamma(N+\frac{n}{2})} = \frac{1}{p!\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

elde edilir.

$$a_{2p}^N = \frac{-\pi^{\frac{n}{2}}}{V_n 2^{\frac{n}{2}+2p} p! \Gamma(\frac{n}{2}+1)} \sum_{j=1}^{p} \frac{(-1)^j \Gamma(j) P_{2j}(\xi_0)}{\Gamma(\frac{n}{2}+j)} \sum_{i=0}^{p-j} \frac{(-1)^i}{i!(p-i-j)! j! \binom{\frac{n}{2}+p-i+j-1}{j}} \tag{79}$$

elde edilir.

**Lemma 5.2.2 nin ispatı:** $1 \le p \le N-1$ için, (68) eşitsizliğini kanıtlayarak başlayalım. (79) da mutlak değer içindeki toplamda $a_{2p}$ yerine $a_{2p}^N$ yazalım. (79) da gösterilen toplamdaki her bir terimin mutlak değerinin 1 den büyük olmadığı en çok $p$ terimli olduğu açıktır. $P_{2j}(\xi_0)$ ın önündeki çarpanın da mutlak değeri 1 den büyük olmadığı açıktır. Sadece $n$ e bağlı olan $C$ terimleriyle istenilen (68) eşitsizliği elde ederiz. Şimdi (69) eşitsizliğinin ispatına geri dönelim.

$$\widehat{S_N \chi B}(r\xi_0) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}^N(\xi_0) r^{2p} = \sum_{j_1}^{N-1} \sum_{s=j}^{N-1} \sum_{k=0}^{s-j} C_{N+s,j,k} P_{2j}(\xi_0) r^{2(s-k)} G_{\frac{n}{2}} + 2s - k(r)$$

. (78) de verilen ifade ile $G_{\frac{n}{2}} + 2s - k(r)$ yer değiştirirsek dört indeksli bir toplam elde ederiz. Şimdi $s - k + i = p$ kullanalım. Böylece

$$\begin{aligned}
a_{2p}^N &= \sum_{j_1}^{N-1} P_{2j}(\xi_0) \sum_{s=j}^{N-1} \sum_{k=0}^{s-j} c_{N+s,j,k} x G_{\frac{n}{2}} + 2s - k(r) \text{ den } r^{2(p-s+k)} \text{ nin katsayıları} \\
&= \sum_{j_1}^{N-1} P_{2j}(\xi_0) \sum_{s=j}^{N-1} \sum_{k=0}^{s-j} c_{N+s,j,k} \frac{(-1)^{p-s+k}}{(p-s+k)!\Gamma(\frac{n}{2}+p+s-1) 2^{2p+\frac{n}{2}+k}} \\
&= \sum_{j_1}^{N-1} P_{2j}(\xi_0) \sum_{k=0}^{N-1-j} \sum_{s=j+k}^{N-1} c_{N+s,j,k} \frac{(-1)^{p-s+k}}{(p-s+k)!\Gamma(\frac{n}{2}+p+s-1) 2^{2p+\frac{n}{2}+k}} \\
&= \frac{(-1)^p}{V_n 4^p 2^{\frac{n}{2}}} \binom{N+\frac{n}{2}-1}{N-1} \sum_{j_1}^{N-1} P_{2j}(\xi_0) \sum_{k=0}^{N-1-j} \sum_{s=j+k}^{N-1} \\
&\quad \times \frac{(-1)^s (N-j)! \binom{N+s-1+\frac{n}{2}}{N-j} \binom{\frac{n}{2}+j+s-1}{k}}{(p-s+k)!\Gamma(\frac{n}{2}+p+s+1)(s+\frac{n}{2})(N-s-1)!(s-j-k)!}
\end{aligned}$$

basit elemanter işlemlerden

$$(N-j)! \binom{N+s-1+\frac{n}{2}}{N-j} \binom{\frac{n}{2}+j+s-1}{k} = \frac{\Gamma(s+\frac{n}{2}+N)}{k!\Gamma(s+\frac{n}{2}+j-k)}$$

yazarız. Böylece

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1-j} \sum_{s=j+k}^{N-1} \times \frac{(-1)^s (N-j)! \binom{N+s-1+\frac{n}{2}}{N-j} \binom{\frac{n}{2}+j+s-1}{k}}{(p-s+k)!\Gamma(\frac{n}{2}+p+s+1)(s+\frac{n}{2})(N-s-1)!(s-j-k)!} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1-j} \frac{1}{k!}$$

$$\times \sum_{s=j+k}^{N-1} \frac{1}{\Gamma(s+\frac{n}{2}+j-k)(p-s+k)!(\frac{n}{2}+p+s)(s+\frac{n}{2})(N-s-1)!(s-j-k)!}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1-j} \frac{1}{k!} \sum_{s=j+k}^{N-1} \frac{1}{(s-j-k)!} \leq e^2,$$

burada birinci eşitsilkikte $N \leq p$ için,

$$\frac{\Gamma(s+\frac{n}{2}+N)}{\Gamma(\frac{n}{2}+p+s+1)} \leq \frac{1}{\frac{n}{2}+p+s}$$

(69) un ispatı tamamlandı.

**Lemma 6.1.3** $N-1 \geq L \geq j \geq k \geq 0$ tamsayılar olsun. Bu durumda

$$\sum_{s=j}^{N-1} \frac{(-1)^s \binom{\frac{n}{2}+k+s-1}{N-k}\binom{\frac{n}{2}+k+s-1}{s-j}}{(s+\frac{n}{2})(N-s-1)!\Gamma(\frac{n}{2}+s+L+1)}$$
$$= (-1)^j \frac{(N-L-1)!}{(N-k)!}\binom{N-1}{L}\frac{1}{k!\Gamma(\frac{n}{2}+N)\binom{\frac{n}{2}+k+j-1}{k}}$$

**İspat**

$$A = \frac{(-1)^s \binom{\frac{n}{2}+N+s-1}{N-k}\binom{\frac{n}{2}+k+s-1}{s-j}}{(s+\frac{n}{2})(N-s-1)!\Gamma(\frac{n}{2}+s+L+1)}$$

alalım. Toplamın indeksini $i = s-j$ değiştirip ve tekrar $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ eşitliğinde kullanırsak

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-1)^j}{\Gamma(\frac{n}{2}+j+L)} \sum_{i=0}^{N-1-j} \frac{(-1)^i \binom{\frac{n}{2}+N+i+j-1}{N-k}\binom{\frac{n}{2}+k+i+j-1}{i}}{(i+j+\frac{n}{2})(N-i-j-1)!\{\prod_{p=0}^{i}(\frac{n}{2}+i+j+L-p)\}} \\ &= \frac{(-1)^j}{\Gamma(\frac{n}{2}+j+L)} B \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada son eşitlik $B$ nin tanımıdır. $B$ yı daha uygun terimlere göre yeniden yazmamız gerekiyor.

$$\frac{\binom{\frac{n}{2}+N+i+j-1}{N-k}\binom{\frac{n}{2}+k+i+j-1}{i}}{\{\prod_{p=0}^{i}(\frac{n}{2}+i+j+L-p)\}} = \frac{(N-L-1)!(L-k)!}{i!(N-k)!}\binom{\frac{n}{2}+N+i+j-1}{N-L-1}\binom{\frac{n}{2}+j+L-1}{L-k}$$

olduğunu gözönüne alalım. Böylece

$$B=\sum_{i=0}^{N-1-j}\frac{(-1)^i(N-L-1)!(L-k)!}{i!(N-k)!(N-i-j-1)!(i+j+\frac{n}{2})}\binom{\frac{n}{2}+N+i+j-1}{N-L-1}\binom{\frac{n}{2}+j+L-1}{L-k}$$

yazılır. Buradan

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+N)}{\Gamma(\frac{n}{2}+j)}\frac{1}{(i+j+\frac{n}{2})(N-i-j-1)!}=\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-j-i-1}\binom{\frac{n}{2}+j+i-1}{i}i!,$$

olduğundan $B$ şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}B &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+j)(N-L-1)!(L-k)!}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)(N-k)!}\binom{\frac{n}{2}+j+L-1}{L-k}\\ &\quad\times\sum_{i=0}^{N-1-j}(-1)^i\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-j-i-1}\binom{\frac{n}{2}+j+i-1}{i}\binom{\frac{n}{2}+N+i+j-1}{N-L-1}\\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+j)(N-L-1)!(L-k)!}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)(N-k)!}\binom{\frac{n}{2}+j+L-1}{L-k}C\end{aligned}$$

Burada son eşitlik $C$ nin tanımıdır. $L=m+j$ alalım. Burada $0\le m\le L-j$ dir. Elementer eşitliği kullanırsak

$$\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-j-i-1}\binom{\frac{n}{2}+i+j-1}{i}=\frac{(N-j)!}{i!(N-i-j-1)!(\frac{n}{2}+i+j)}\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-j}$$

buradan

$$C=\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-j}(N-j)!\sum_{i=0}^{N-1-j}\frac{(-1)^i\binom{\frac{n}{2}+N+i+j-1}{N-j-m-1}}{i!(N-i-j-1)!(\frac{n}{2}+i+j)}$$

elde edilir. Son işimiz ise

$$D(j,m)=\sum_{i=0}^{N-1-j}\frac{(-1)^i\binom{\frac{n}{2}+N+i+j-1}{N-j-m-1}}{i!(N-i-j-1)!(\frac{n}{2}+i+j)}$$

toplamını hesaplamaktır.

$$\frac{1}{\frac{n}{2}+i+j}=\frac{1}{\frac{n}{2}+j}\left(1-\frac{i}{\frac{n}{2}+i+j}\right)$$

eşitliğinin ifadesinden

$$\begin{aligned}D(j,m) &= \sum_{i=0}^{N-1-j}\frac{(-1)^i}{(\frac{n}{2}+j)i!(N-i-j-1)!}\binom{\frac{n}{2}+i+j+N-1}{N-j-m-1}\\ &\quad-\sum_{i=0}^{N-1-j}\frac{(-1)^i}{(\frac{n}{2}+j)i!(\frac{n}{2}+j+i)(N-i-j-1)!}\binom{\frac{n}{2}+i+j+N-1}{N-j-m-1}\end{aligned}$$

$D(j,m)$ nin yukarıdaki ifadesindeki ilk toplam sıfırdır. Çünkü

$$\sum_{i=0}^{N-1-j} \frac{(-1)^i i}{(\frac{n}{2}+j)i!(N-i-j-1)!}\binom{\frac{n}{2}+i+j+N-1}{N-j-m-1}$$
$$= \frac{1}{(N-j-1)!(\frac{n}{2}+j)} \sum_{i=0}^{N-1-j} (-1)^i \binom{N-j-1}{i}\binom{\frac{n}{2}+i+j+N-1}{N-j-m-1}$$
$$= 0$$

Burada son eşitlik [GKP] de ispatlandı. $s=i-1$ alalım.

$$\begin{aligned} D(j,m) &= -\sum_{i=0}^{N-1-j} \frac{(-1)^i i}{i!(\frac{n}{2}+j+i)(N-i-j-1)!}\binom{\frac{n}{2}+i+j+N-1}{N-j-m-1} \\ &= \frac{1}{\frac{n}{2}+j} \sum_{s=0}^{N-(j+1)-1} \frac{(-1)^s}{s!(\frac{n}{2}+s+(j+1))} \frac{\binom{\frac{n}{2}+(j+1)+N+s-1}{N-(j+1)-(m-1)-1}}{(N-j-m-1)!} \\ &= \frac{1}{(\frac{n}{2}+j)} D(j+1,m-1) \end{aligned}$$

$$D(j,m) = \frac{1}{(\frac{n}{2}+j)(\frac{n}{2}+j+1)\cdots(\frac{n}{2}+j+m-1)} D(L,0)$$

basit elemanter işlemler kullanarak $D(L,0)$ ı hesaplayalım.

$$\frac{1}{(\frac{n}{2}+L+s)} = \frac{s!(N-L-s-1)!\Gamma(\frac{n}{2}+L)}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)}\binom{\frac{n}{2}+L+s-1}{s}\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-L-s-1},$$

buradan

$$\begin{aligned} D(L,0) &= \sum_{s=0}^{N-1-L} (-1)^s \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+L)}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)}\binom{\frac{n}{2}+L+s-1}{s}\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-L-s-1}\binom{\frac{n}{2}+L+N+s-1}{N-L-1} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+L)}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)} \sum_{s=0}^{N-1-L} \binom{-\frac{n}{2}-L}{s}\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-L-s-1}\binom{\frac{n}{2}+L+N+s-1}{N-L-1} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+L)}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)}\binom{N-1}{L} \end{aligned}$$

$n=N-L-1$, $m=0$, $r=\frac{n}{2}+N+l-1$ ve $s=N-1$ için

$$\begin{aligned} D(j,m) &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+L)}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)}\binom{N-1}{L}\frac{1}{(\frac{n}{2}+j)\cdots(\frac{n}{2}+L-1)} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+j)}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)}\binom{N-1}{L}. \end{aligned}$$

Böylece

$$C = \binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-j}(N-j)!\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+j)}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)}\binom{N-1}{L}$$

ve

$$\begin{aligned} B &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+j)}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)}\frac{(N-L-1)!(L-k)!}{(N-k)!}\binom{\frac{n}{2}+j+L-1}{L-k}\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-j} \\ &\quad \times\binom{\frac{n}{2}+N-1}{N-j}(N-j)!\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+L)}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)}\binom{N-1}{L}. \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-1)^j}{\Gamma\Gamma(\frac{n}{2}+j+L)}B \\ &= (-1)^j\frac{(N-L-1)!}{(N-k)!}\frac{\binom{N-1}{L}}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)k!\binom{\frac{n}{2}+j+k-1}{k}} \end{aligned}$$

## 7 Örnekler ve Sorular

**Örnek 1** $\mathbb{R}^2$ de çekirdeği

$$\Omega(x,y)=\frac{xy}{|z|^2}+\lambda\frac{x^3y-xy^3}{|z|^4},$$

$T=T_\lambda$ polinom operatörü düşünelim. Burada $z=x+iy$ dir. $||T_\lambda^* f||_2\leq C||T_\lambda f||_2$, $f\in L^2(\mathbb{R}^2)$ gerek ve yeter koşul $|\lambda|<2$ olmasıdır.

**Örnek 2** $B$, Beurling dönüşümü olsun ve

$$T_\lambda=B-\lambda B^2,\quad \lambda\in C$$

operatörünü düşünelim.

$$\Omega(z)=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\overline{z}^2|z|^2+2\lambda\overline{z}^4}{|z|^4}\right).$$

Böylece çarpanımız

$$\frac{\xi^3\overline{\xi}-\lambda\xi^4}{|\xi|^4}=\frac{\overline{\xi}}{\xi}\left(1-\lambda\frac{\overline{\xi}}{\xi}\right),\quad \xi\in C$$

**Örnek 3** $T=RoU$ biçiminde verilen $T$ polinom operatörünün örneğini verelim. Burada $R$, yüksek mertebeli Riesz dönüşümü ve $U$ terslenebilir; fakat $L^2$ $||T^*f||_2\leq C||TF||_2$, $f\in\mathbb{R}^n$ eşitsizliğini sağlamasın. $T$, 8 inci dereceden homojen polinomların bileşkesi bir operatör olsun.

$$P(x,y)=\frac{1}{\gamma_2}P_2(x,y)(x^2+y^2)^2-\xi\left(\frac{1}{\gamma_4}P_4(x,y)(x^2+y^2)^2-\frac{1}{\gamma_2}P_8(x,y)\right)),$$

burada

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= xy \\ P_4(x,y) &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \\ &\vdots \\ P_8(x,y) &= x^8 + y^8 - 28x^6y^2 - 28x^2y^6 + 70x^4y^4 \end{aligned}$$

yeterince küçük $\epsilon$ için harmonik polinomlardır. Dikkat edilirse $P_2$, ne $P_4$ ü ne de $P_8$ i böler. Diğer taraftan $P_4$ ve $P_8$, $P_4(\xi_1,\xi_2)|\xi|^4 - P_8(\xi_1,\xi_2)$ $P_2$ tarafından bölünecek şekilde seçilmiştir. Böylece $T$ çarpanı

$$\frac{P_2(\xi_1,\xi_2)}{|\xi|^2} + \epsilon\left(\frac{P_4(\xi_1,\xi_2)}{|\xi|^4} - \frac{P_8(\xi_1,\xi_2)}{|\xi|^8}\right) = \frac{P_2(\xi_1,\xi_2)}{|\xi|^2}\left(1 + \epsilon\frac{Q(\xi_1,\xi_2)}{|\xi|^6}\right)$$

burada $Q$, 6 ıncı dereceden homojen polinomdur. $R$, $\frac{P_2(\xi_1,\xi_2)}{|\xi|^2}$ çarpanlı yüksek mertebeli Riesz dönüşümü ve $U$ $1+\epsilon\frac{Q(\xi_1,\xi_2)}{|\xi|^6}$ çarpanlı bir operatördür. Yeterince küçük $\epsilon$ için $U$ terslenebilirdir.

**Örnek 4**

$$\Omega(e^{i\theta}) = \sum_{j\geq 1} a_j \sin(2j\theta)$$

Böylece $P_2j$ harmonik polinomları

$$P_2j(z) = a_j\frac{z^{2j} - \overline{z}^{2j}}{2i}$$

**Örnek 5**

$$\Omega(x,y,z) = xy\sum_{J\geq 0}\epsilon_j Q_{2j}(x,y,z)$$

burada $(\epsilon_j)$ dizisi $C^\infty(S^2)$ den seçildi ve $Q_{2j}$ ise şu şekilde tanımlandı.

$$Q_{2j}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{2j} c_k y^{2k} z^{2j-2k}$$

$$c_k = -c_{k-1}\frac{2k(2k+1)}{(2j-2k+1)(2j-2k+2)}, \qquad 1 \leq k \leq j,$$

**Soru**

$$||T^*f||_{1,\infty} \leq C||Tf||_1$$

ya da $L^p$ eşitsizliği $1 < p < \infty$, $p \neq 2$

$$||T^*f||_p \leq C||Tf||_p, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

buda $L^2$ eşitsizliği

$$||T^*f||_2 \leq C||Tf||_2, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

# KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] N.Aronszajn, T.Creese and L.Lipkin, 1983. Oxford Mathematical Monographs Oxford Unıversity Press,New York.

[2] A.P.Calderon and Zygmund, 1955. On a problem of Mihlin, rans. Amer. Math. Soc.Math. 78, 209-224.

[3] G.David and S.Semmes, 1991. Singular integrals and rectifiable sets in $R^n$ :Audelas des graphes lipschitziens, Asterisque 193, Societe Mathematique de France

[4] L.Grafakos, 2004. Classical and modern Fourier analysis, Pearson, New Jersey.

[5] R.Graham D. Knuth and O.Patashnik, 1994. Concrete mathematics foundation for computer science, Second edition. Addison- Wesley Publishing Company, Reading ,MA.

[6] L.Lorch and P.Szego, 1955. A singular integral whose kernel involves a Bessel function, Duke Math.J.22, 410-418.

[7] G.G.Lorentz, 1986. Apprıximation of functions, Chelsea Publishing Company, New York.

[8] R.Lyons and K.Zumbrun, 1994. Homogeneous partial derivatives of radial functions, Proc. Amer. Math.Soc. 121 (1), 315-316.

[9] E.Kunz, 1985. Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhauser, Basel.

[10] J. Mateu, Y.Netrusov, J.Orobig and J.Verdera, 1996. BMO and Lipschitz approximation by solutions of elliptic equations, Ann.Inst. Fourier (Grenoble) 46 (4) 1057-1081.

[11] J. Mateu and J.Orobig, 1990. Lipschitz approximation by Harmonic functions and some applications to spectral synthesis, Indiana Univ. Math. J.39 (3), 703-736.

[12] J. Mateu, J.Orobig and J.Verdera On some Beltrami coefficients determining bilipschitz quasiconformal mappings, in preparation.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

[13] J. Mateu, J.Orobig, C.Perez and J.Verdera, Estimates for the maximal singular integral in terms of the singular integral: the case of odd kernels, in preparation.

[14] J. Mateu, J.Orobig and J.Verdera Estimates for the maximal singular integral in terms of the singular integral: the case of even kernels, in preparation.

[15] J. Mateu, L.Prat and J.Verdera, 2005. The capacity associated to signed Riesz kernels, and Wolff potentials, J.Reine Angew. Math. 578, 201-223.

[16] J. Mateu and J.Verdera, 1988. BMO harmonic approximation and spectral synthesis for Hardy-Sobolev spaces, Rev. Mat. Iberoamericana 4 (2), 291-318.

[17] J. Mateu and J.Verdera 2006. $L^p$and weak $L^1$ estimates for the maximal Riesz transform and the maximal Beurling transform, Math.Res. Lett. 13 (5-6), 957-966.

[18] P.Mattila and J.Verdera Convergence of singular integrals with general measures, J.Eur.Math.Soc.

[19] F.Ricci and E.M.Stein, 1987 Harmonic analysis on nilpotent groups and singular integrals I: Oscillatory integrals, J.Funct. Anal. 78, 179-194.

[20] E.M.Stein, 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton.

[21] E.M.Stein and G. Weiss, 1971. Introduction to Fourier Analysis on Education Spaces, Princeton University Press, Princeton.

[22] J.Verdera, 1987. $C^m$ approximation by solutions of elliptic equations, and Calderon-Zygmund operators, Duke Math. J. 55 (1), 157-18.

[23] J.Verdera, 2001. $L^2$ boundedness of the Cauchy Integral and Menger curvature, Contemporary Mathematics 277, 139-158.