



T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK VE DE SİTTER UZAYDA ÇOK YÜZLÜLERİN HACMI

NEVİDE İMER

I

Şubat 2010

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK VE DE SİTTER UZAYDA ÇOK YÜZLÜLERİN HACMI

NEVİDE İMER

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

Şubat 2010

ÖZET

HİPERBOLİK VE DE SİTTER UZAYDA ÇOKYÜZLÜLERİN HACMI

İMER, Nevide
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Atakan Tuğkan Yakut

Ocak 2010, 46 sayfa

Bu çalışmada De Sitter yüzeyi üzerinde üçgenler tanımlandı. Minkowski hiper düzlemleri ile De Sitter yüzeyinin arakesitleri alınarak on farklı tip üçgenin varlığı gösterildi. Bu arakesitlerin De Sitter yüzeyinde üç farklı tip jeodezik olduğu ve bunların uzay benzeri, zaman benzeri ve ışık benzeri olduğu verildi.

Anahtar sözcükler: Minkowski uzayı, De Sitter uzayı, Hiperbolik uzay, Çokyüzlü.

SUMMARY

VOLUME OF THE POLYHEDRA IN HYPERBOLIC AND DE SITTER SPACES

IMER, Nevide

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assistant Professor Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

January 2010, 46 pages

In this work, we define triangles on the de Sitter surface. Ten different types of triangles are determined on the de Sitter surface taking the intersections of Minkowski hyperplanes with the de Sitter surface. The intersections give three different types of geodesics on the de Sitter surface. These geodesics could be spacelike, timelike or lightlike.

Keywords: Minkowski space, De Sitter space, Hyperbolic space, Simplex.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT ve Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Öğretim Üyesi Prof.Dr. Baki Karlığa'nın katkılarıyla gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmanın geometri alanında çalışmalar yapanlara ve üniversitede bu konularda yapılan çalışmalara katkıda bulunmasını dilerim.

TEŐEKKÖR

Bu tezin hazırlanmasında baŐta emeği geöen Danışman Hocam Sayın Atakan Tuğkan Yakut'a, Sayın Prof.Dr. Baki Karlığa'ya, bana yol gÖsteren ve çok değerli katkılarında faydalandığım Sayın Prof.Dr. Sadık KELEŐ'e, Ankara Üniversitesi Fen Faköltesi Fizik Bölümü ÖĞretim Üyelerinden Sayın Prof. Dr. Mehmet Birey' e, Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü ÖĞretim Üyelerine, ve öğrenim hayatım boyunca bana ilgi ve desteklerini esirgemeyen çok değerli aileme teŐekkÖr ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
ÖNSÖZ	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
KISALTMA VE SİMGELER	ix
BÖLÜM I. GİRİŞ	1
BÖLÜM II. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Lorentz-Minkowski Uzayı.....	4
2.2. Hiperbolik ve de Sitter Uzay.....	6
BÖLÜM III. DE SİTTER UZAYDA ÇOK YÜZLÜLER	8
3.1. De Sitter Uzayda Düzlemler.....	8
BÖLÜM IV. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	45
KAYNAKLAR.....	46

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	De Sitter uzayda jeodezikler.....	7
Şekil 3.1	Lorentz uzayında üç spacelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları De Sitter üçgen.....	16
Şekil 3.2	Lorentz uzayında üç timelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları De Sitter üçgen.....	20
Şekil 3.3	Lorentz uzayında üç lightlike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları De Sitter üçgen.....	24
Şekil 3.4	Lorentz uzayında iki spacelike bir timelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen.....	28
Şekil 3.5	Lorentz uzayında iki timelike bir spacelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen.....	31
Şekil 3.6	Lorentz uzayında iki lightlike bir spacelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen.....	34
Şekil 3.7	Lorentz uzayında iki lightlike bir timelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen.....	37
Şekil 3.8	Lorentz uzayında iki spacelike bir lightlike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen.....	39
Şekil 3.9	Lorentz uzayında iki timelike bir lightlike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen.....	42
Şekil 3.10	Lorentz uzayında bir timelike, bir lightlike ve bir spacelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen	44

KISALTMA VE SİMGELER

KISALTMA/SİMGE

R^n	n-boyutlu reel uzay
R_1^n	n-boyutlu Lorentz uzayı
C^{n-1}	Işık konisi
S_1^n	n-boyutlu de Sitter uzayı
$d_H(x, y)$	Hiperbolik metrik
N	Düzlem in normalı
$\ \cdot\ $	Lorentz normu
$\langle \cdot, \cdot \rangle_L$	Lorentz iççarpımı
P	Geodeziklerin arakesit noktası

BÖLÜM I

GİRİŞ

Non-Öklidyen Geometriden söz edildiği zaman hemen akla Öklid' in beş temel postüladından beşincisi gelir. Çünkü Öklidyen olmayan Geometrilerin çıkışı bu beş temel postüladan beşincisine dayanmaktadır. Öklid' in beş temel postüladını aşağıdaki şekildedir.

- İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
- Bir doğru sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
- Merkezi ve yarıçapı verilen bir çember çizilebilir.
- Bütün dik açılar eşittir.
- Farklı iki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğru ile aynı tarafta eş açılar oluşturursa iki doğru veya bunların uzantıları birbirini kesmez, veya uzantıları birbirini keserse kestiği tarafta oluşan açılar toplamı 180° den küçüktür.

Beşinci postülada yerine paralellik postüladını (fair play) da kullanılmaktadır.

Paralellik postülatı: Düzlemde bir nokta ve bu noktayı üzerinde bulundurmayan bir doğru verildiği zaman, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel bir tek doğru geçer.

İki bin yıldan beri matematikçiler ilk dört postüladan beşinci postülatı elde etmeye çalışmışlardır. Her bir durum için ilave postülatlar yaparak beşinci postüladını indirgemeye çalışmışlar, neticede ise gerçekte bunların beşinci postüladına denk olduğu sonucuna varmışlardır. Paralellik postülatı ile uğraşan bilim adamlarını şu şekilde sıralayabiliriz: Proclus(400), Nasirüddin Tusi, John Wallis(1616-1703), Girolamo Saccheri(1667-1733), Johann heinrich Lambert (1728-1777), Kastner(1719-1800), Klügel'in(1739-1812) sayılabilir.

19. yüzyılda bu konu üzerine oldukça yoğun çalışmalar yapılmış ve beşinci postülatı değişik bir açıdan incelemeye çalışmışlardır. Bunlar sırasıyla Schweikart(1780-1859), Taurinus'tur(1799-1874), Carl Friedrich Gauss(1777-1855), Lobatscheski(1793-1856), Farkas(Wolfgang)(1775-1856), Janos Bolyai(1802-1860). Lobatshevskii Öklidyen geometrinin Trigonometrik formüllerine dayanarak bir Non-Öklidyen trigonometri geliştirmiştir. Hiperbolik Non-Öklidyen geometrinin analitik çalışmasına esas gereksinim Euler, Gaspard Monge ve Gauss'un eğrisel yüzeyler üzerine yapmış olduğu çalışmalarda ortaya çıkmıştır. 1837' de Lobatshevski, sabit negatif eğrilikli eğrisel yüzeylerin NonÖklidyen Geometride temsil edilebilirliğini önermiştir. İki yıl sonra ise

bu öneri göz ardı edilerek yapılan çalışma aynı dergide yayınlanmış ve bu ise sabit eğrilikli yüzeyler üzerine geniş bir çalışma alanı oluşturmuştur. Bernhard Riemann(1826-1866), bu yüzeylerin oldukça geniş bir genellemesini yapmıştır. Riemann'ın çalışmaları bir sıçrama tahtası olmuştur. Yapılar arasındaki bağıntılar Eugenio Beltrami tarafından 1868' de vurgulanmıştır. Sonuçta aşağıdaki postülat ulaşılmıştır.

Bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan birden çok doğru bulunabilir.

Bundan sonra ;

Sabit eğrilikli üç farklı geometrinin varlığı kabul edilmiştir. Bunların üçü de Öklidin ilk dört postülatın aynen kullanırlar. Bu Öklidyen Olmayan Geometrilere birincisi dördüncü postülatı “**bir doğruya dışındaki bir noktadan hiçbir paralel çizilemez**” şeklinde alan Eliptik geometridir. **Beltrami 1868** de ; bu gün adına Eliptik geometri dediğimiz Küresel Geometrinin Öklid Geometrisi ile uyduğunu göstermiştir İkincisi de “**Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebilir**” şeklindeki paralellik versiyonunu kullanan Hiperbolik geometridir. Hiperbolik geometri de benzer üçgenler kongrüenttir, bir üçgende açılar toplamı 180° değildir gibi.

Diğer taraftan sabit eğrilikli Tam Semi Riemann manifoldlar da çok yüzlülerin hacim hesaplamaları oldukça ilginçtir. Bu doğrultuda bazı çalışmalar J.M. Schlenker tarafından yapılmıştır. J.M. Schlenker sabit eğriliği 1 olan tam Lorentz manifoldu olarak S_1^n de Sitter küresini göz önüne almıştır [1,2]. S_1^n de Sitter küresi ile H^n Hiperbolik uzayı R_1^{n+1} Minkowski uzayının alt manifoldları olarak göz önüne alındığında, bunlar arasında bir dualitenin varlığı söz konusudur. Bu ise S_1^n de Sitter küresindeki her bir v noktası, H^n Hiperbolik uzayının bir hiperdüzleminin birim normalisi olarak düşünülür [3]. Böylece S_1^n de Sitter küresindeki bir çok yüzlünün hacmi için Schlafli formülü, H^n deki hiperdüzlemlerin S_1^n ile arakesitinin oluşturduğu çokyüzlünün hacminin duali olur. $n=3$ için böyle bir formül Santalo tarafından verilmiştir[4]. Böyle bir dualite söz konusu olduğunda S_1^n de çokyüzlülerden bahsedilmektedir. Fakat S_1^n de alınan noktaların bir simplex olup olmadığı konusunda her hangi bir yorum yapılmamaktadır.

Bu çalışmada S_1^2 , de Sitter yüzeyi üzerinde alınan noktalardan geçen jeodeziklerin bir 2-simplex(üçgen) oluşturup oluşturmadığı araştırılmıştır.

Bölüm II de, R_1^{n+1} Lorentz-Minkowski uzayında temel tanımlar, Bölüm III de ise S_1^2 De Sitter uzayında alınan noktaların üçgen oluşturma şartları verilmiştir. Bölüm IV de ise bu çalışmanın neticesinde yapılabilecekler tartışılmıştır.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lorentz-Minkowski Uzayı

$x, y \in R^n$ iki vektör ve $n > 1$ olsun. x ile y nin Lorentzian iç çarpımı;

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n \quad (2.1)$$

ile tanımlanan indefinit bir iç çarpımdır. Bu iç çarpımla birlikte R^n uzayına Lorentz uzayı denir ve R_1^n ile gösterilir[5]. R_1^n uzayında bir x vektörünün Lorentz normu;

$$\|x\| = |\langle x, x \rangle_L|^{1/2}$$

ile, x ve y vektörünün Lorentz uzunluğu;

$$d_L(x, y) = \|x - y\|$$

ile tanımlanır[5].

2.1.1. Tanım : R_1^n Lorentz uzayında, $\|x\| = 0$ olacak şekildeki bütün x lerin kümesine, yani;

$$\{ x \in R_1^n \mid x_n^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \}$$

şeklindeki C^{n-1} kümesine ışık-konisi (light-koni) denir. $\|x\| = 0$ ise x vektörüne ışık benzeri(light-like veya null) vektör denir [5,6].

2.1.2. Tanım : $x \in R_1^n$ için, $\|x\| > 0$ ise x vektörüne uzay benzeri(space-like) vektör denir. C^{n-1} hiperkonisinin dışı; R_1^n nin uzay benzeri vektörlerden oluşan açık alt kümesidir[5-7].

2.1.3. Tanım : $x \in R_1^n$ için, $\|x\| < 0$ oluyorsa x vektörüne (time-like) vektör denir. C^{n-1} hiperkonisinin içi; R_1^n nin zaman benzeri vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir. Eğer, $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$) ise x vektörüne pozitif(negatif) zaman benzeri denir[5-7].

2.1.4. Tanım : $x, y \in R_1^n$ için, $\langle x, y \rangle_L = 0$ oluyorsa x, y vektörlerine Lorentz ortogonal dir denir[5].

2.1.5. Teorem : x, y vektörleri, R_1^n de sıfırdan farklı Lorentz ortogonal iki vektör olsun. Eğer x vektörü zaman benzeri(time-like) ise, y vektörü uzay benzeri(space-like)dir.

İspat: [5] sayfa 60-61 den görülebilir.

2.1.6. Önerme : R_1^n nin bir V alt vektör uzayının;

- 1) Zaman benzeri olması için gerek ve yeter şart V nin en az bir zaman benzeri vektöre sahip olmasıdır,
- 2) Uzay benzeri olması için gerek ve yeter şart V deki sıfırdan farklı her vektörün uzay benzeri olmasıdır,
- 3) Işık benzeri olması için gerek ve yeter şart V deki sıfırdan farklı her vektör için $\|x\| = 0$ olmasıdır[5,6].

İspat: [5] sayfa 61 den görülebilir.

2.1.7. Tanım : x ve y , R_1^n de pozitif(negatif) zaman benzeri iki vektör olsun.

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek $\eta(x, y)$ reel sayısı vardır. x ve y arasındaki Lorentz zaman benzeri (time-like) açısı, $\eta(x, y)$ olarak tanımlanır[5,7].

2.2. Hiperbolik ve de Sitter Uzay

$x, y \in R^{n+1}$ iki vektör ve $n > 1$ olsun. x ile y nin Lorentzian iç çarpımı;

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n + x_{n+1} y_{n+1}$$

olmak üzere; $S_1^n \subset R_1^{n+1}$ ve $S_1^n = \{x \in R_1^{n+1} | \langle x, x \rangle_L = 1\}$ kümesine n -boyutlu birim pseudo-küresel uzay (de Sitter uzayı), $H_0^n = \{x \in R_1^{n+1} | \langle x, x \rangle = -1\}$ kümesine de n -boyutlu birim pseudo-hiperbolik uzay denir. H_0^n uzayının iki bağlantılı bileşeni $H_{0,+}^n$ ve $H_{0,-}^n$ olmak üzere, bu bileşenlerin her biri n -boyutlu hiperbolik uzayın bir modeli olarak alınabilir. $H_+^n = H^n \subset R_1^{n+1}$ olarak alınacaktır.

2.2.1. Tanım : $x, y \in H^n \subset R_1^{n+1}$ ve x ile y arasındaki Lorentzian zaman benzeri açı $\eta(x, y)$ olsun. x ve y arasındaki hiperbolik uzunluk;

$$d_H(x, y) = \eta(x, y)$$

şeklinde tanımlı bir reel sayıdır. $\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$ olduğundan;

$$\cosh d_H(x, y) = -\langle x, y \rangle_L$$

olur[5,6].

2.2.2. Teorem : d_H hiperbolik uzunluk fonksiyonu H^n üzerinde bir metriktir.

İspat: [5] den görülebilir.

2.2.3. Tanım : d_H metriği ile birlikte H^n uzayı hiperbolik n -uzay olarak adlandırılır[5].

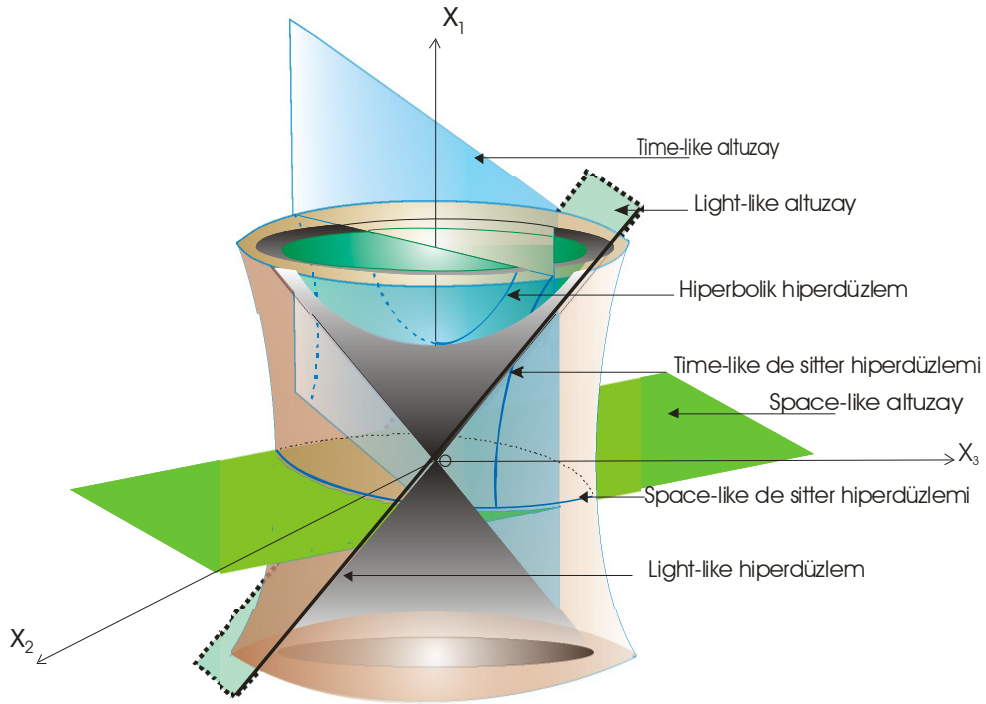
2.2.4. Tanım : H^n nin bir doğrusu R_1^{n+1} in iki boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile H^n nin arakesitidir. $x, y \in H^n$ vektörleri R^{n+1} in $V(x, y)$ ile gösterilen iki boyutlu bir zaman benzeri alt uzayını gererler. Böylece, $L(x, y) = H^n \cap V(x, y)$, x, y den geçen içeren H^n nin bir doğrusudur. Buna göre, H^n nin jeodezikleri onun doğrularıdır[5].

2.2.5. Tanım : S_1^n nin bir doğruları, R_1^{n+1} in sırasıyla iki boyutlu zaman benzeri, uzay benzeri ve ışık benzeri alt vektör uzayı ile S_1^n nin arakesitidir. $x, y \in S_1^n$ vektörleri R^{n+1} in $V(x, y)$ ile gösterilen sırasıyla iki boyutlu zaman benzeri, uzay benzeri ve ışık benzeri alt uzayını gererler. Böylece, $L(x, y) = S_1^n \cap V(x, y)$, x, y den geçen içeren S_1^n nin bir doğrusudur. Buna göre, S_1^n nin jeodezikleri onun doğrularıdır[5].

2.2.6. Tanım : S_1^n nin bir m -düzlemi R_1^{n+1} in $(m+1)$ boyutlu zaman benzeri, uzay benzeri ve ışık benzeri alt vektör uzayları ile S_1^n nin arakesitidir[5].

Bu çalışmada Giriş ve Temel Kavramlar bölümünde [8] numaralı kaynaktan istifade edilmiştir.

S_1^n nin bir 1-düzlemi, onun uzay benzeri, ışık benzeri veya zaman benzeri doğruları, hiperbolik $(n-1)$ -düzlemi onun hiperdüzlemi olarak adlandırılır.



Şekil 2.1. de Sitter uzayda jeodezikler

BÖLÜM III

DE SİTTER UZAYDA ÇOK YÜZLÜLER

3.1. De Sitter uzayda düzlemler

$S_1^2 = \{(x, y, z) \in R_1^3 \mid -x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ kümesine R_1^3 de, de sitter uzayı denir.

Lorentz uzayında orijinden geçen iki düzlem ile bunların S_1^2 ile arakesitlerinin oluşturduğu jeodeziklerin arakesit noktaları aşağıdaki şekilde belirlenir.

Normali $N_1 = (a, b, c)$ olan $H_1 \dots ax + by + cz = 0$

Normali $N_2 = (d, e, f)$ olan $H_2 \dots dx + ey + fz = 0$ düzlemleri alınırsa

$$ax + by = -cz$$

$$dx + ey = -fz$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -cz & b \\ -fz & e \end{vmatrix}}{ae - bd} = \frac{(-ec + bf)z}{ae - bd} \Rightarrow x = \left(\frac{bf - ec}{ae - bd} \right) z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & -cz \\ d & -fz \end{vmatrix}}{ae - bd} = \frac{(-af + dc)z}{ae - bd} \Rightarrow y = \left(\frac{dc - af}{ae - bd} \right) z$$

bulunur. Bulunan bu değerler $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$-\left[\left(\frac{bf - ec}{ae - bd} \right) z \right]^2 + \left[\left(\frac{cd - af}{ae - bd} \right) z \right]^2 + z^2 = 1$$

$$\left(\frac{-(bf - ec)^2 + (cd - af)^2 + (ad - bd)^2}{(ae - bd)^2} \right) z^2 = 1$$

$$z = \mp \frac{|ae - bd|}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2}}$$

olduğundan

$$x = \frac{bf - ec}{ae - bd} \frac{|ae - bd|}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2}}$$

$$y = \frac{cd - af}{ae - bd} \frac{|ae - bd|}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2}}$$

$$z = \mp \frac{|ae - bd|}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2}}$$

$ae - bd > 0$ olduğundan

$$z = \mp \frac{ae - bd}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2}}$$

$$x = \mp \frac{bf - ec}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2}}$$

$$y = \mp \frac{cd - af}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2}}$$

Lorentz uzayında orijinden geçen kesişen iki düzlemin S_1^2 ile arakesitlerinin oluşturduğu geodeziklerin arakesit noktası aşağıdaki gibidir.

$$P = \left(\mp \frac{ae - bd, bf - ec, cd - af}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2}} \right)$$

Bu çalışma da bulunan P noktalarının hepsinin pozitif değeri kullanılmıştır.

3.1.1. Tanım: $N = (a, b, c)$ olmak üzere $ax + by + cz = 0$ düzlemi göz önüne alındığında $\langle N, N \rangle_L < 0$ ise ; $\sqrt{1 + b^2 + c^2} x + by + cz = 0$ düzlemine R_1^3 de spacelike düzlem denir ve H_s şeklinde gösterilir[7].

3.1.2. Tanım: $N = (a, b, c)$ olmak üzere $ax+by+cz=0$ düzlemi göz önüne alındığında $\langle N, N \rangle_L > 0$ ise $\sqrt{b^2 + c^2 - 1}x + by + cz = 0$ düzlemine R_1^3 de timelike düzlem denir ve H_T şeklinde gösterilir[7].

3.1.3. Tanım: $N = (a, b, c)$ olmak üzere $ax+by+cz=0$ düzlemi göz önüne alındığında $\langle N, N \rangle_L = 0$ ise $\sqrt{b^2 + c^2}x + by + cz = 0$ düzlemine R_1^3 de null düzlem denir ve H_n ile gösterilir[7].

3.1.4. Tanım: $H_S \cap S_1^2$ kümesine de Sitter düzleminde spacelike jeodezik, $H_T \cap S_1^2$ kümesine timelike jeodezik ve $H_n \cap S_1^2$ kümesine null jeodezik denir[6,7]

3.1.5. Tanım: H , R_1^3 de bir düzlem ise $H \cap S_1^2$ kümesine de' sitter uzayında bir doğru ve H düzlemine de bu doğrunun taşıyıcısı denir.

3.1.6. Tanım: H_i , R_1^3 de düzlemler ise; $\Delta = H_i \cap S_1^2$ ($1 \leq i \leq 3$) kümesine de sitter uzayında bir çokyüzlü denir[6].

3.1.7. Teorem: $P_1, P_2, P_3 \in S_1^2$ olmak üzere $\langle P_i, N_i \rangle < 0$ ise P_1, P_2, P_3 noktaları S_1^2 de bir üçgenin köşeleridir.

İspat: [3] sayfa 81 den görülebilir.

3.1.8. Teorem: $P_1, P_2, P_3 \in S_1^2$ olmak üzere $\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} < 0$ ise P_1, P_2, P_3 noktaları, S_1^2 de bir

üçgenin köşe noktalarıdır.

İspat: $\vec{N}_1 = P_2 \otimes P_3$, $\vec{N}_2 = P_3 \otimes P_1$, $\vec{N}_3 = P_1 \otimes P_2$ olmak üzere

$$\langle P_1, N_1 \rangle = \langle P_1, P_2 \times P_3 \rangle = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} < 0$$

$$\langle P_2, N_2 \rangle = \langle P_2, P_3 \times P_1 \rangle = \begin{vmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} P_2 \\ P_1 \\ P_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} < 0$$

$$\langle P_3, N_3 \rangle = \langle P_3, P_1 \times P_2 \rangle = \begin{vmatrix} P_3 \\ P_1 \\ P_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} P_1 \\ P_3 \\ P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} < 0$$

olduğundan Teorem 3.1.7 gereğince $\langle P_i, N_i \rangle = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} < 0$ olduğundan P_1, P_2, P_3 bir üçgenin köşeleridir.

Not: $\langle P_1, N_1 \rangle = 0$ olursa P_1 noktası P_2, P_3 doğrusunun üzerindedir.

$$\langle P_1, N_2 \rangle = \langle P_1, P_3 \times P_1 \rangle = 0$$

$$\langle P_1, N_3 \rangle = \langle P_1, P_1 \times P_2 \rangle = 0$$

$$\langle P_2, N_1 \rangle = \langle P_2, P_3 \times P_2 \rangle = 0$$

$$\langle P_2, N_3 \rangle = \langle P_2, P_1 \times P_2 \rangle = 0$$

$$\langle P_3, N_1 \rangle = \langle P_3, P_2 \times P_3 \rangle = 0$$

$$\langle P_3, N_2 \rangle = \langle P_3, P_3 \times P_1 \rangle = 0 \text{ yani}$$

$$\langle P_i, N_j \rangle = 0 \text{ olur.}$$

3.1.9. Özellik : P_i ve P_j noktaları S_1^2 de iki nokta olmak üzere;

(i) $-1 < \langle P_i, P_j \rangle < 1$ ise P_i ile P_j den geçen geodezik parçası spacelike

$i \neq j$ geodeziktir. (Elips parçası)

$i, j = (1, 2, 3)$

([7] Barret O'neil sayfa 149–150 proposition 38)

(ii) $\langle P_i, P_j \rangle > 1$ ise P_i ile P_j den geodezik parçası timelike geodeziktir.

$i \neq j$ (hiperbol parçası)

$$i, j = (1, 2, 3)$$

(iii) $\langle P_i, P_j \rangle = 1$ ise P_i ile P_j den geçen geodezik parçası null dür.

(Öklidyen doğru parçasıdır)

Lorentz uzayında orijinden geçen kesişen üç düzlemin S_1^2 ile arakesitlerinin oluşturduğu geodeziklerin arakesit noktaları de Sitter yüzeyinde on farklı çeşit üçgen meydana getirir.

Lorentz Uzayında üç space-like düzlem ile bu üç düzlemin De Sitter küresi ile arakesiti alındığında üçgen oluşturma şartları verilmiştir.

$$H = a_1x + b_1y + c_1z = 0 \text{ (Lorentz alt uzayı)}$$

$$N = (a_1, b_1, c_1) \text{ (N: normal)}$$

$$\langle N, N \rangle = -a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \text{ olmak üzere}$$

$\langle N, N \rangle < 0$ ise Lorentz uzayda H spacelike düzlemdir.

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}} = 0, \quad a = \frac{a_1}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}}; \quad b = \frac{b_1}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}}; \quad c = \frac{c_1}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}}$$

$$H \dots ax + by + cz = 0; \quad -a^2 + b^2 + c^2 = -1$$

$$\sqrt{1 + \frac{b_1^2 + c_1^2}{-\langle N, N \rangle}} = \sqrt{\frac{-\langle N, N \rangle + b_1^2 + c_1^2}{-\langle N, N \rangle}}$$

$$\sqrt{1 + b^2 + c^2} = \frac{a_1}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}}; \quad a > 0$$

$$a = \sqrt{1 + b^2 + c^2} \text{ ise}$$

$$\sqrt{1 + b^2 + c^2}x + by + cz = 0 \text{ Lorentz uzayında spacelike düzlem}$$

Durum 1:

Lorentz Uzayında İki Spacelike Düzlemin Arakesitlerinin Oluşturduğu Geodeziklerin S_1^2 İle Arakesit Noktası:

$$\begin{aligned} H_1 \dots ax + by + cz = 0 \quad a = \sqrt{1+b^2+c^2} \\ H_2 \dots dx + ey + fz = 0 \quad d = \sqrt{1+e^2+f^2} \end{aligned} \text{ olacağından}$$

$$H_1 \dots \sqrt{1+b^2+c^2}x + by + cz = 0$$

haline dönüşür.

$$H_2 \dots \sqrt{1+e^2+f^2}x + ey + fz = 0$$

$$x = \frac{bf - ec}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (c\sqrt{1+e^2+f^2} - f\sqrt{1+b^2+c^2})^2 + (e\sqrt{1+b^2+c^2} - b\sqrt{1+e^2+f^2})^2}}$$

$$y = \frac{c\sqrt{1+e^2+f^2} - f\sqrt{1+b^2+c^2}}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (c\sqrt{1+e^2+f^2} - f\sqrt{1+b^2+c^2})^2 + (e\sqrt{1+b^2+c^2} - b\sqrt{1+e^2+f^2})^2}}$$

$$z = \frac{e\sqrt{1+b^2+c^2} - b\sqrt{1+e^2+f^2}}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (c\sqrt{1+e^2+f^2} - f\sqrt{1+b^2+c^2})^2 + (e\sqrt{1+b^2+c^2} - b\sqrt{1+e^2+f^2})^2}}$$

olur. Buradan Lorentz uzayında iki spacelike düzlemin arakesitleinin oluşturduğu geodeziklerin S_1^2 ile arakesit noktası aşağıdaki gibidir.

$$A = \sqrt{-(bf - ec)^2 + (c\sqrt{1+e^2+f^2} - f\sqrt{1+b^2+c^2})^2 + (e\sqrt{1+b^2+c^2} - b\sqrt{1+e^2+f^2})^2}$$

olmak üzere

$$P = \pm \frac{1}{A} (bf - ec, c\sqrt{1+e^2+f^2} - f\sqrt{1+b^2+c^2}, e\sqrt{1+b^2+c^2} - b\sqrt{1+e^2+f^2}) \quad (3.1)$$

Örnek 1:

$$H_1 \dots \sqrt{3}x + y + z = 0 \Rightarrow N_1 = (\sqrt{3}, 1, 1); \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L < 0$$

$$H_2 \dots \sqrt{3}x - y - z = 0 \Rightarrow N_2 = (\sqrt{3}, -1, -1); \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L < 0$$

$$H_3 \dots \sqrt{6}x + y + 2z = 0 \Rightarrow N_3 = (\sqrt{6}, 1, 2); \quad \langle N_3, N_3 \rangle_L < 0$$

$$P_1 : H_2 \cap H_3 \Rightarrow b = -1, c = -1, e = 1, f = 2$$

Bu değerler (3.1) ifadesinde yerleştirilirse,

$$A_1 = \sqrt{26 + 6\sqrt{18}}$$

olmak üzere;

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{26 + 6\sqrt{18}}} (-1, -\sqrt{6} - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

olur.

$$P_2 : H_1 \cap H_3 \Rightarrow b = 1, c = 1, e = 1, f = 2$$

Bu değerler (3.1) ifadesinde yerleştirilirse,

$$A_2 = \sqrt{26 - 6\sqrt{18}} \text{ olmak üzere;}$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{26 - 6\sqrt{18}}} (1, \sqrt{6} - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} - \sqrt{6})$$

olur.

$$P_3 : H_1 \cap H_2 \Rightarrow b = 1, c = 1, e = -1, f = -1$$

Bu değerler (3.1) ifadesinde yerleştirilirse,

$$A_3 = \sqrt{2} \text{ olmak üzere;}$$

$$P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -1)$$

elde edilir.

Şimdi bu bulunan noktalara üçgen oluşturma şartı uygulanırsa,

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}} < 0$$

bulunur ki üçgen oluşturma şartı sağlanır.

$$\langle P_1, P_2 \rangle_L = 0.75593$$

$$-1 << \langle P_1, P_2 \rangle_L < 1$$

olur ki P_1 ile P_2 noktalarını birleştiren geodezik parçası spacelike geodezik parçasıdır.

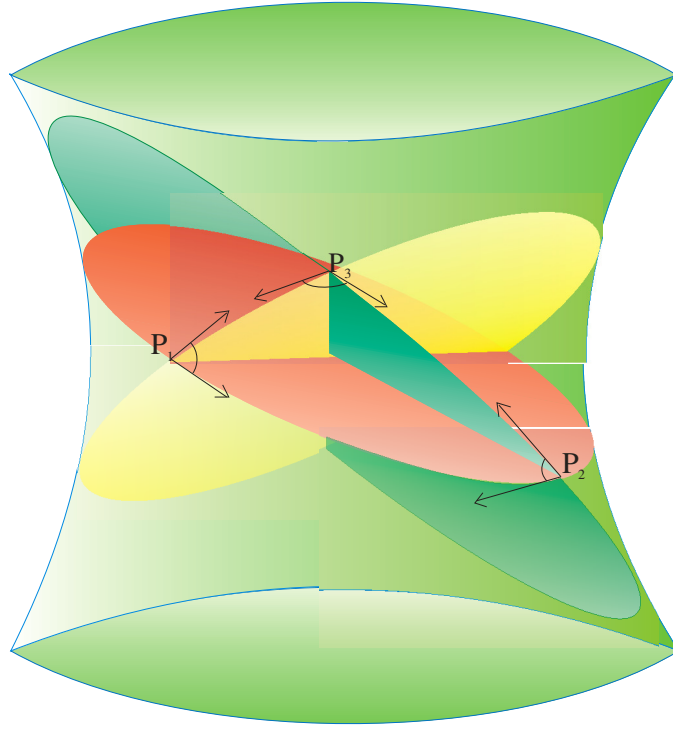
$$\langle P_1, P_3 \rangle_L = -0.23362$$

$-1 << \langle P_1, P_3 \rangle_L < 1$ olur ki buda P_1 ile P_3 noktalarını birleştiren geodezik parçası spacelike geodezik parçasıdır.

$$\langle P_2, P_3 \rangle_L = 0.0103$$

$-1 < \langle P_2, P_3 \rangle_L < 1$ olur ki buda P_2 ile P_3 noktalarını birleştiren geodezik parçasının spacelike geodezik parçası olduğunu gösterir.

Buradan Lorentz uzayında üç spacelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları geodeziklerin S_1^2 ile kesişim noktalarının oluşturduğu üçgen spacelike kenarlara sahip ve aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.1. Lorentz uzayında üç spacelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları De Sitter üçgen

Durum 2:

Lorentz Uzayında İki Timelike Düzlemin Arakesitlerinin Oluşturduğu Geodeziklerin S_1^2 İle Arakesiti;

$$\frac{a_1}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}} x + \frac{b_1}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}} y + \frac{c_1}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}} z = 0$$

$$ax + by + cz = 0 \rightarrow -a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 1} \quad a > 0$$

$$\sqrt{b^2 + c^2 - 1}x + by + cz = 0 \text{ Lorentz uzayında timelike düzlem}$$

$$\left. \begin{array}{l} -x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax + by + cz = 0 \\ -a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\} \text{de' sitter uzayında timelike geodezik}$$

$$\left. \begin{array}{l} -x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \sqrt{b^2 + c^2 - 1}x + by + cz = 0 \end{array} \right\} \text{timelike düzlemine dönüşür.}$$

olur. Lorentz uzayında iki düzlemin arakesitlerinin oluşturduğu geodeziklerin S_1^2 ile kesişim noktasını timelike düzlemlere uygulayarak ve bir örnek vererek incelenebilir.

Lorentz Uzayında üç timelike düzlem ile bu üç düzlemin De Sitter küresi ile arakesiti alındığında üçgen oluşturma şartları verilmiştir.

Lorentz Uzayında İki Timelike Düzlemin Arakesitlerinin Oluşturduğu Geodeziklerin S_1^2 İle Kesişim Noktaları:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 \dots ax + by + cz = 0 \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 1} \\ H_2 \dots dx + ey + fz = 0 \quad d = \sqrt{e^2 + f^2 - 1} \end{array} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd > 0$$

$$x = \mp \frac{bf - ec}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + \left(c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 - 1}\right)^2 + \left(e\sqrt{b^2 + c^2 - 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1}\right)^2}}$$

$$y = \mp \frac{c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 - 1}}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + \left(c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 - 1}\right)^2 + \left(e\sqrt{b^2 + c^2 - 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1}\right)^2}}$$

$$z = \mp \frac{e\sqrt{b^2 + c^2 - 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1}}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + \left(c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 - 1}\right)^2 + \left(e\sqrt{b^2 + c^2 - 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1}\right)^2}}$$

O zaman buradan Lorentz uzayda iki timelike düzlemin arakesitlerinin oluşturduğu geodeziklerin S_1^2 ile arakesit noktası aşağıdaki gibidir.

$$B = \sqrt{-(bf - ec)^2 + \left(c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 - 1}\right)^2 + \left(e\sqrt{b^2 + c^2 - 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1}\right)^2}$$

olmak üzere;

$$P = \pm \frac{1}{B} (bf - ec, c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 - 1}, e\sqrt{b^2 + c^2 - 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1}) \quad (3.2)$$

Üç tane timelike düzlem alınıp bu düzlemlerin oluşturduğu geodeziklerin S_1^2 ile arakesit noktaları aşağıdaki şekilde bulunur.

Örnek 2:

$$H_1 \dots \sqrt{3}x + 2y = 0 \Rightarrow N_1 = (\sqrt{3}, 2, 0); \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L > 0$$

$$H_2 \dots \sqrt{3}x - 2y = 0 \Rightarrow N_2 = (\sqrt{3}, -2, 0); \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L > 0$$

$$H_3 \dots \sqrt{3}x - 2z = 0 \Rightarrow N_3 = (\sqrt{3}, 0, -2); \quad \langle N_3, N_3 \rangle_L > 0$$

Bu üç düzlemin arakesitinin oluşturduğu geodeziklerin S_1^2 ile arakesit noktaları

$$P_1 : H_2 \cap H_3 \Rightarrow b = -2, c = 0, e = 0, f = -2$$

Bu değerler (3.2) ifadesinde yerleştirilirse,

$$B_1 = \sqrt{2} \text{ olmak üzere;}$$

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (2, \sqrt{3}, \sqrt{3})$$

olur.

$$P_2 : H_1 \cap H_3 \Rightarrow b = 2, c = 0, e = 0, f = 2$$

Bu değerler (3.2) ifadesinde yerleştirilirse,

$$B_2 = \sqrt{8} \text{ olmak üzere;}$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} (-4, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) \text{ olur. Bu düzenlenirse;}$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) \text{ elde edilir.}$$

$$P_3 : H_1 \cap H_2 \Rightarrow b = 2, c = 0, e = -2, f = 0$$

Bu değerler (3.2) ifadesinde yerleştirilirse,

$$B_3 = \sqrt{48} \text{ olmak üzere}$$

$$P_3 = (0, 0, -1) \text{ elde edilir.}$$

Bu üç noktaya üçgen oluşturma şartı uygulanırsa.

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = -2\sqrt{3} < 0$$

Bu noktalar üçgen oluşturma şartını sağlar. Bu üçgenin kenarları incelenirse;

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2, \sqrt{3}, \sqrt{3})$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

$$P_3 = (0, 0, -1)$$

$$\langle P_1, P_2 \rangle_L = 2 \text{ olur. Yani}$$

$\langle P_1, P_2 \rangle_L > 1$ olur ki buda P_1 ile P_2 noktaları arasındaki geodezik parçasının timelike geodezik parçası olduğunu gösterir.

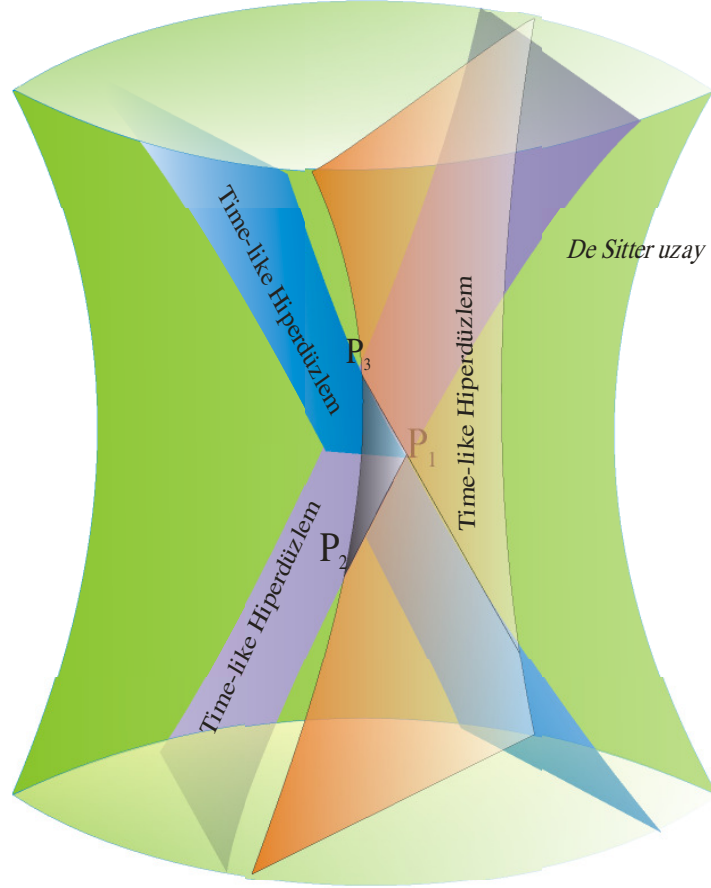
$$\langle P_3, P_1 \rangle_L = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$\langle P_3, P_1 \rangle_L < -1$ olur ki buda P_1 ile P_3 noktaları arasında geodezik parçası yoktur. Veya sonsuzda olduğunu gösterir.

$$\langle P_2, P_3 \rangle_L = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ olur. Yani}$$

$\langle P_2, P_3 \rangle_L > 1$ olur ki buda P_2 ile P_3 noktalar arasındaki geodezik parçası timelike geodezik parçası olduğunu gösterir.

Buradan Lorentz uzayında üç timelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları geodeziklerin S_1^2 ile kesişim noktalarının oluşturduğu üçgenin iki kenarı timelike kenarlara sahip iken diğeri sonsuzda olan veya üç kenarı da timelike olan fakat iki kenarı zıt taraflarda olan üçgenlerdir.



Şekil 3.2. Lorentz uzayında üç timelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları De Sitter üçgen

Durum 3:

Lorentz Uzayında üç null düzlem ile bu üç düzlemin De Sitter küresi ile arakesiti alındığında üçgen oluşturma şartları verilmiştir.

$$H = a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$N = (a_1, b_1, c_1) \quad (N : normal)$$

$\langle N, N \rangle = 0$ ise H düzlemi null düzlemidir.

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}} = 0, \quad a = \frac{a_1}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}}; \quad b = \frac{b_1}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}}; \quad c = \frac{c_1}{\sqrt{-\langle N, N \rangle}}$$

$$H \dots ax + by + cz = 0; \quad -a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}; \quad a > 0$$

$$\sqrt{b^2 + c^2}x + by + cz = 0 \text{ Lorentz uzayında Null düzlem}$$

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax + by + cz = 0 \\ -a^2 + b^2 + c^2 = 0 \end{cases} \text{ de' sitter uzayında Null geodeziği}$$

Bu ifade

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \sqrt{b^2 + c^2}x + by + cz = 0 \end{cases} \text{ Null düzlem ifadesine dönüşür.}$$

Lorentz Uzayında İki Null Düzlemin Arakesitlerinin Oluşturdukları Geodeziklerin

S_1^2 İle Arakesit Noktaları

$$H_1 \dots ax + by + cz = 0 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$H_2 \dots dx + ey + fz = 0 \Rightarrow d = \sqrt{e^2 + f^2}$$

$$H_1 \dots \sqrt{b^2 + c^2}x + by + cz = 0$$

$$H_2 \dots \sqrt{e^2 + f^2}x + ey + fz = 0$$

$$x = \mp \frac{bf - ec}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (c\sqrt{e^2 + f^2} - f\sqrt{b^2 + c^2})^2 + (e\sqrt{b^2 + c^2} - b\sqrt{e^2 + f^2})^2}}$$

$$y = \mp \frac{c\sqrt{e^2 + f^2} - f\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (c\sqrt{e^2 + f^2} - f\sqrt{b^2 + c^2})^2 + (e\sqrt{b^2 + c^2} - b\sqrt{e^2 + f^2})^2}}$$

$$z = \mp \frac{e\sqrt{b^2+c^2} - b\sqrt{e^2+f^2}}{\sqrt{-(bf-ec)^2 + (c\sqrt{e^2+f^2} - f\sqrt{b^2+c^2})^2 + (e\sqrt{b^2+c^2} - b\sqrt{e^2+f^2})^2}}$$

olur. Buradan Lorentz uzaydan iki null düzlemin arakesitlerinin oluşturduğu geodeziklerin S_1^2 ile arakesit noktası aşağıdaki gibidir.

$$C = \sqrt{-(bf-ec)^2 + (c\sqrt{e^2+f^2} - f\sqrt{b^2+c^2})^2 + (e\sqrt{b^2+c^2} - b\sqrt{e^2+f^2})^2}$$

$$P = \pm \frac{1}{C} (bf-ec, c\sqrt{e^2+f^2} - f\sqrt{b^2+c^2}, e\sqrt{b^2+c^2} - b\sqrt{e^2+f^2}) \quad (3.3)$$

Örnek 3:

$$H_1 \dots 5x + 3y + 4z = 0 \Rightarrow N_1 = (5, 3, 4); \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = 0$$

$$H_2 \dots 5x - 3y - 4z = 0 \Rightarrow N_2 = (5, -3, -4); \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L = 0$$

$$H_3 \dots 5x - 3y + 4z = 0 \Rightarrow N_3 = (5, -3, 4); \quad \langle N_3, N_3 \rangle_L = 0$$

$$P_I: H_2 \cap H_3 \Rightarrow b = -3, c = -4, e = -3, f = 4$$

Bu değerler (3.3) formülünde yerine yazılırsa;

$$C_I = 32$$

bulunur.

$$P_I = \frac{1}{32} (-24, -40, 0)$$

olur. Bu ifade düzenlenirse;

$$P_I = \frac{1}{4} (-3, -5, 0)$$

haline dönüşür.

$$P_2: H_1 \cap H_3 \Rightarrow b = 3, c = 4, e = -3, f = 4$$

Bu değerler (3.3) formülünde yerine yazılırsa;

$$C_2 = 18$$

bulunur.

$$P_2 = \frac{1}{18}(24, 0, -30)$$

olur. Bu ifade düzenlenirse;

$$P_2 = \frac{1}{3}(4, 0, -5)$$

haline dönüşür.

$$P_3: H_1 \cap H_2 \Rightarrow b = 3, c = 4, e = -3, f = -4$$

Bu değerler (3.3) formülünde yerine yazılırsa;

$$C_3 = 50$$

bulunur.

$$P_3 = \frac{1}{50}(0, 40, -30)$$

olur. Bu ifade düzenlenirse;

$$P_3 = \frac{1}{5}(0, 4, -3)$$

elde edilir. Bu üç noktaya üçgen oluşturma şartı uygulanırsa,

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = -2 \langle 0$$

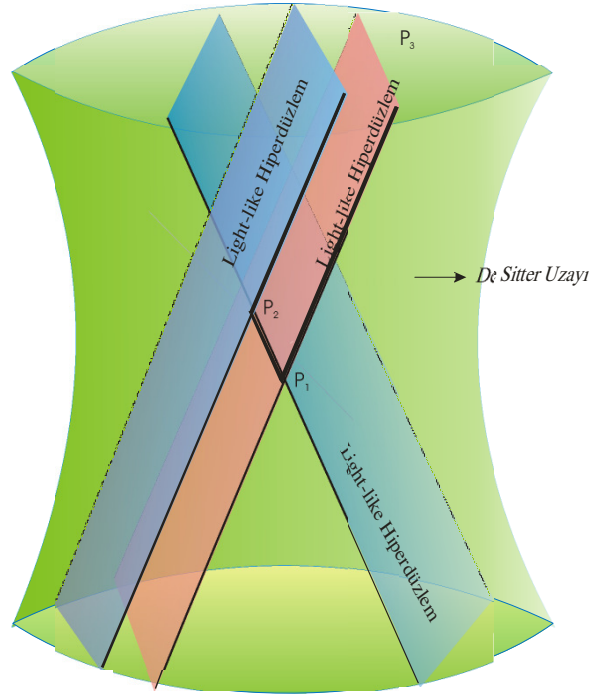
üçgen oluşturur. Bu üçgenin kenarları incelenirse;

$\langle P_1, P_2 \rangle_L = 1$ olduğundan P_1 ile P_2 arasındaki geodezik parçası null (öklidyen doğrudur) doğrusu olduğunu gösterir.

$\langle P_1, P_3 \rangle_L = -1$ olduğundan P_1 ile P_3 arasındaki geodezik parça yok veya sonsuzda olduğunu gösterir.

$\langle P_2, P_3 \rangle_L = 1$ olduğundan P_2 ile P_3 arasındaki geodezik parçası null (öklidyen) doğru olduğunu gösterir.

Buradan Lorentz uzayında üç lightlike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları geodeziklerin S_1^2 ile kesişim noktalarının oluşturduğu üçgenin iki kenarı lightlike, diğeri sonsuzda olan üçgenlerdir.



Şekil 3.3. Lorentz uzayında üç lightlike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları

De Sitter üçgen

Durum 4:

Lorentz Uzayında iki spacelike düzlem ve bir timelike düzlem ile bu üç düzlemin De Sitter küresi ile arakesiti alındığında üçgen oluşturma şartları verilmiştir.

Bir Spacelike Düzlem İle Bir Timelike Düzlemin Arakesitlerinin Oluşturduğu Geodeziklerinin S_1^2 İle Arakesit Noktasını Verelim.

$$H_1 \dots ax + by + cz = 0 \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 + 1}$$

$$H_2 \dots dx + ey + fz = 0 \quad d = \sqrt{e^2 + f^2 - 1}$$

olduğundan

$$H_1 \dots \sqrt{b^2 + c^2 + 1}x + by + cz = 0$$

$$H_2 \dots \sqrt{e^2 + f^2 - 1}x + ey + fz = 0$$

haline dönüşür.

$$x = \mp \frac{bf - ec}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 + 1})^2 + (e\sqrt{b^2 + c^2 + 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1})^2}}$$

$$y = \mp \frac{c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 + 1}}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 + 1})^2 + (e\sqrt{b^2 + c^2 + 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1})^2}}$$

$$z = \mp \frac{e\sqrt{b^2 + c^2 + 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1}}{\sqrt{-(bf - ec)^2 + (c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 + 1})^2 + (e\sqrt{b^2 + c^2 + 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1})^2}}$$

Buradan bir spacelike düzlem ile bir timelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları geodeziklerin S_1^2 ile arakesit noktası aşağıdaki gibidir.

$$D = \sqrt{-(bf - ec)^2 + (c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 + 1})^2 + (e\sqrt{b^2 + c^2 + 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1})^2}$$

$$P = \pm \frac{1}{D} (bf - ec, c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2 + 1}, e\sqrt{b^2 + c^2 + 1} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1}) \quad (3.4)$$

Şimdi de iki spacelike düzlem ile bir timelike düzlem alıp inceleyelim.

Örnek 4:

$$H_1 \dots \sqrt{3}x - y + z = 0 \Rightarrow N_1 = (\sqrt{3}, -1, 1); \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L < 0$$

$$H_2 \dots 3x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow N_2 = (3, 2, 2); \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L < 0$$

$$H_3 \dots x + y + z = 0 \Rightarrow N_3 = (1, 1, 1); \quad \langle N_3, N_3 \rangle_L > 0$$

$$P_1 \rightarrow H_2 \cap H_3 \Rightarrow b = 2, c = 2, e = 1, f = 1$$

Bu değerler (3.4) formülünde yerleştirilirse;

$$D_1 = \sqrt{2}$$

bulunur.

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$$

elde edilir.

$$P_2 \rightarrow H_1 \cap H_3 \Rightarrow b = -1, c = 1, e = 1, f = 1$$

Bu değerler (3.4) formülünde yerleştirilirse;

$$D_2 = 2$$

bulunur.

$$P_2 = \frac{1}{2}(-2, 1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} + 1)$$

elde edilir.

$$P_3 \rightarrow H_1 \cap H_2 \Rightarrow b = -1, c = 1, e = 2, f = 2$$

Bu değerler (3.1) formülünde yerleştirilirse;

$$A_1 = \sqrt{26}$$

bulunur.

$$P_3 = \frac{1}{\sqrt{26}}(-4, 3 - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 3)$$

elde edilir.

Şimdi bu noktalara üçgen oluşturma şartı uygulanırsa;

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = \frac{-2}{\sqrt{52}} \langle 0$$

elde edilir.

Bu noktalar üçgen oluşturur. Şimdi bu üçgenin kenarları incelenirse;

$$\langle P_1, P_2 \rangle_L = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$$

$\langle P_1, P_2 \rangle_L > 1$ olduğundan P_1 ile P_2 arasındaki geodezik parçası timelike geodezik parçası olduğunu gösterir.

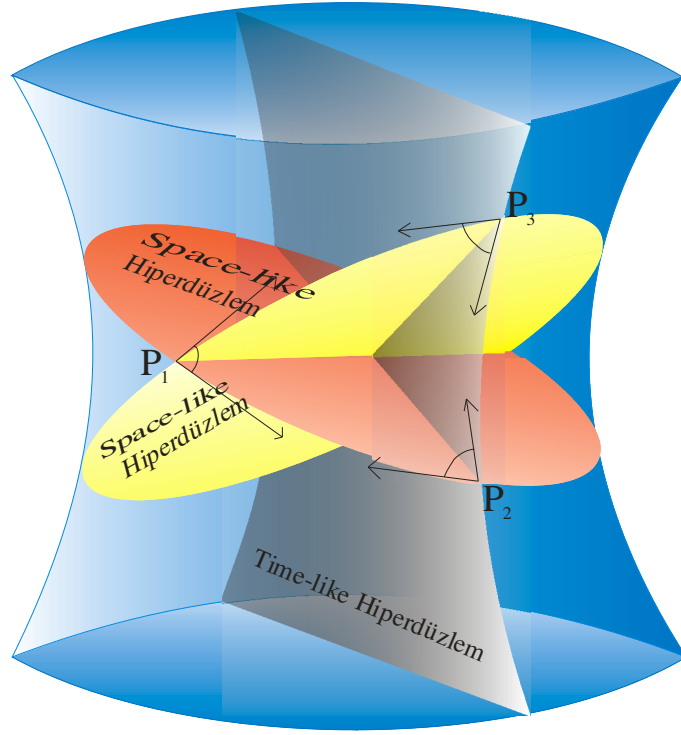
$$\langle P_1, P_3 \rangle_L = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$-1 < \langle P_1, P_3 \rangle_L < 1$ olduğundan P_1 ile P_3 arasındaki geodezik parçası spacelike geodezik parçası olduğunu gösterir.

$$\langle P_2, P_3 \rangle_L = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$-1 < \langle P_2, P_3 \rangle_L < 1$ olduğundan P_2 ile P_3 arasındaki geodezik parçası spacelike geodezik parçası olduğunu gösterir.

İki spacelike ve bir timelike düzlemlerin arakesitlerini oluşturduğu geodeziklerin S_1^2 ile kesişim noktalarının oluşturduğu üçgen iki spacelike ve bir timelike kenarlara sahip üçgendir. Yani



Şekil 3.4. Lorentz uzayında iki spacelike bir timelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen

Durum 5:

Lorentz Uzayında iki timelike düzlem ve bir spacelike düzlem ile bu üç düzlemin

De Sitter küresi ile arakesiti alındığında üçgen oluşturması için (3.2) ve (3.4) ifadeleri kullanılır.

İki timelike düzlem ile bir spacelike düzlem alıp inceleyelim.

Örnek 5:

$$\begin{aligned}
 H_1 \dots \sqrt{5}x + 2y = 0 &\Rightarrow N_1 = (\sqrt{5}, 2, 0); & \langle N_1, N_1 \rangle_L < 0 \\
 H_2 \dots \sqrt{3}x + 2z = 0 &\Rightarrow N_2 = (\sqrt{3}, 0, 2); & \langle N_2, N_2 \rangle_L > 0 \\
 H_3 \dots \sqrt{3}x - 2y = 0 &\Rightarrow N_3 = (\sqrt{3}, +2, 0); & \langle N_3, N_3 \rangle_L > 0
 \end{aligned}$$

$$P_1 \rightarrow H_2 \cap H_3 \Rightarrow b = 0, c = 2, e = -2, f = 0$$

Bu değerler (3.2) ifadesinde yerleştirilirse;

$$B_1 = 2\sqrt{2}$$

bulunur.

$$P_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(+4, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

ifadesi düzenlenirse;

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

elde edilir.

$$P_2 \rightarrow H_1 \cap H_3 \Rightarrow b = 2, c = 0, e = -2, f = 0$$

Bu değerler (3.4) ifadesinde yerleştirilirse;

$$D_1 = \sqrt{32 + 8\sqrt{15}}$$

bulunur.

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{32 + 8\sqrt{15}}}(0, 0, -2\sqrt{5} - 2\sqrt{3})$$

ifadesi düzenlenirse;

$$P_2 = (0, 0, -1)$$

elde edilir.

$$P_3 \rightarrow H_1 \cap H_2 \Rightarrow b = 2, c = 0, e = 0, f = 2$$

Bu değerler (3.4) ifadesinde yerleştirilirse

$$D_2 = 2$$

olur.

$$P_3 = \left(1, \frac{-\sqrt{5}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

elde edilir.

Bu noktalara üçgen oluşturma şartı uygulanırsa;

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \langle 0$$

Üçgen oluşturma şartını sağlar. Bu üçgenin kenarları incelenirse;

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

$$P_2 = (0, 0, -1)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(-2, \sqrt{5}, \sqrt{3})$$

$$\langle P_1, P_2 \rangle_L = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$\langle P_1, P_2 \rangle_L > 1$ olduğundan P_1 ile P_2 arasındaki geodezik parçası timelike geodezik parçası olduğunu gösterir.

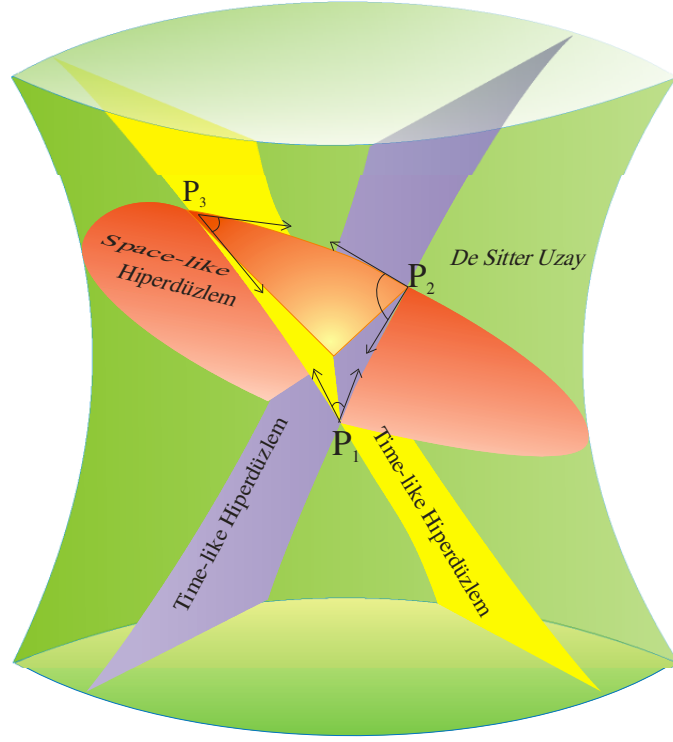
$$\langle P_1, P_3 \rangle_L = \frac{1 + \sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$$

$\langle P_2, P_3 \rangle_L > 1$ olduğundan P_2 ile P_3 arasındaki geodezik parçası timelike geodezik parçası olduğunu gösterir.

$$\langle P_2, P_3 \rangle_L = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$-1 < \langle P_2, P_3 \rangle_L < 1$ olduğundan P_2 ile P_3 arasındaki geodezik parçası spacelike geodezik parçası olduğunu gösterir.

İki timelike ve bir spacelike düzlemlerinin arakesitlerini oluşturduğu geodeziklerin S_1^2 ile kesişim noktalarının oluşturduğu üçgen iki spacelike ve bir timelike kenarlara sahip üçgendir.



Şekil 3.5. Lorentz uzayında iki timelike bir spacelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen

Durum 6:

Lorentz Uzayında iki null düzlem ve bir spacelike düzlem ile bu üç düzlemin De Sitter küresi ile arakesiti alındığında üçgen oluşturma şartları verilmiştir.

Bir Null Düzlem İle Bir Spacelike Düzlemin Arakesitlerinin Oluşturduğu Geodeziklerin S_1^2 İle Arakesit Noktası:

$$H_1 \dots ax + by + cz = 0 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$H_2 \dots dx + ey + fz = 0 \Rightarrow d = \sqrt{e^2 + f^2 + 1} \text{ olacağından}$$

$$H_1 \dots \sqrt{b^2 + c^2} x + by + cz = 0$$

$$H_2 \dots \sqrt{1 + e^2 + f^2} x + ey + fz = 0$$

haline dönüşür. Bu durumda bir spacelike düzlem ile bir null düzlemin de Sitter uzayı ile arakesit noktası;

$$E = \sqrt{-(bf - ec)^2 + \left(c\sqrt{e^2 + f^2 + 1} - f\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 + \left(e\sqrt{b^2 + c^2} - b\sqrt{e^2 + f^2 + 1}\right)^2}$$

$$P = \mp \frac{1}{E} \left(bf - ec, c\sqrt{e^2 + f^2 + 1} - f\sqrt{b^2 + c^2}, e\sqrt{b^2 + c^2} - b\sqrt{e^2 + f^2 + 1} \right) \quad (3.5)$$

şeklindedir.

Bir örnek ile inceleyelim.

Örnek 6:

$$H_1 \dots 5x + 4y + 3z = 0 \Rightarrow N_1 = (5, 4, 3); \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = 0$$

$$H_2 \dots 5x - 4y - 3z = 0 \Rightarrow N_2 = (5, -4, -3); \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L = 0$$

$$H_3 \dots 3x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow N_3 = (3, 2, 2); \quad \langle N_3, N_3 \rangle_L < 0$$

$$P_1: H_2 \cap H_3 \Rightarrow b = -4, c = -3, e = 2, f = 2$$

Bu değerler (3.5) denkleminde yerleştirilirse;

$$E_1 = 29$$

bulunur.

$$P_1 = \frac{1}{29} (-2, -19, 22)$$

elde edilir.

$$P_2: H_1 \cap H_3 \quad b = 4, c = 3, e = 2, f = 2$$

Bu değerler (3.5) denkleminde yerleştirilirse;

$$E_2 = 1$$

bulunur.

$$P_2 = (2, -1, -2)$$

elde edilir.

$$P_3: H_1 \cap H_2 \quad b = 4, c = 3, e = -4, f = -3$$

Bu noktaları (3.3) denkleminde yerleştirelim.

$$C_I=50$$

bulunur.

$$P_3 = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right)$$

elde edilir.

Bu üç noktaya üçgen oluşturma şartını uygulayalım.

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = \frac{-40}{145} < 0$$

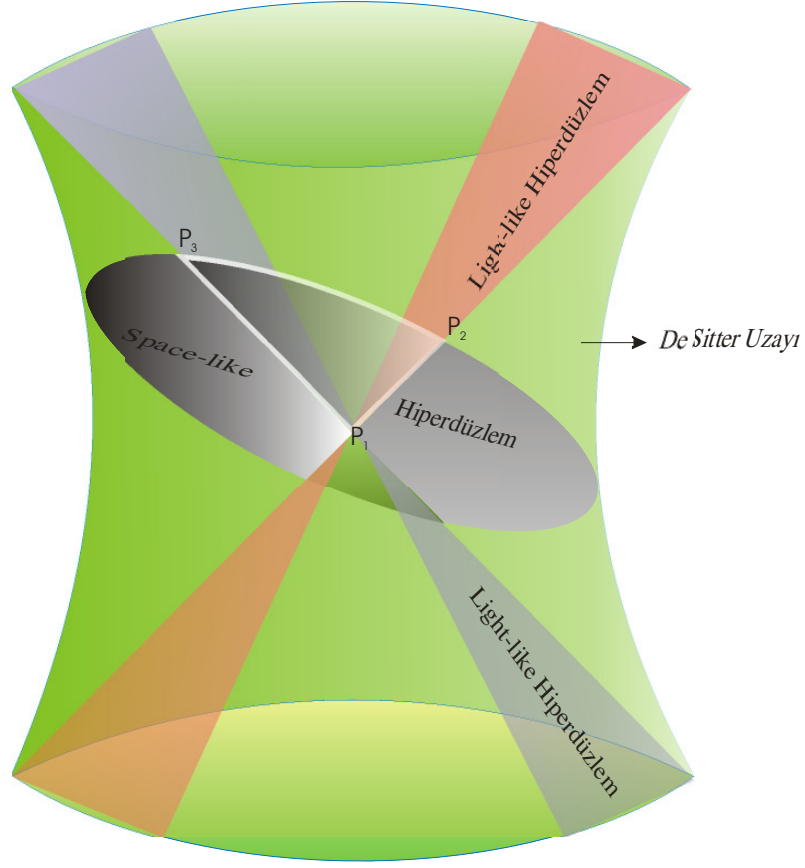
Buradan üçgen oluşturma şartı sağlanır. Şimdi bu üçgenin kenarlarını inceleyelim.

$\langle P_1, P_2 \rangle_L = \frac{-21}{29} \Rightarrow -1 < \langle P_1, P_2 \rangle_L < 1$ olduğundan P_1 ile P_2 arasındaki geodezik parçası spacelike geodezik parçası olduğunu gösterir.

$\langle P_1, P_3 \rangle_L = -1 \Rightarrow \langle P_1, P_3 \rangle_L = -1$ olduğundan P_1 ile P_3 arasındaki geodezik parçası bilinmiyor.

$\langle P_2, P_3 \rangle_L = 1 \Rightarrow \langle P_2, P_3 \rangle_L = 1$ P_2 ile P_3 arasındaki geodezik parçası da null doğrulduğunu gösterir.

Buradan iki null düzlem ile bir spacelike düzlemin arakesit doğrularının de sitter ile kesişimi sonucu bir spacelike geodezik ,bir null doğru ve diğer kenarı bilinmeyen üçgen veya iki kenarı lightlike bir kenarı spacelike üçgen oluşturur.



Şekil 3.6. Lorentz uzayında iki lightlike bir spacelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen

Durum7:

Lorentz Uzayında iki null düzlem ve bir timelike düzlem ile bu üç düzlemin De Sitter küresi ile arakesiti alındığında üçgen oluşturma şartları verilmiştir.

Bir Null Düzlem İle Bir Timelike Düzlemin Arakesitlerinin Oluşturduğu Geodeziklerin S_1^2 İle Arakesit Noktasını Verelim

$$H_1 \dots ax + by + cz = 0 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$H_2 \dots dx + ey + fz = 0 \Rightarrow d = \sqrt{e^2 + f^2 - 1}$$

düzlemleri alınırsa

$$H_1 \dots \sqrt{b^2 + c^2}x + by + cz = 0$$

$$H_2 \dots \sqrt{e^2 + f^2 - 1}x + ey + fz = 0$$

olur. Buradan bir null düzlem ile bir timelike düzlemin arakesit noktası;

$$F = \sqrt{-(bf - ec)^2 + \left(c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 + \left(e\sqrt{b^2 + c^2} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1}\right)^2}$$

$$P = \pm \frac{1}{F} \left(bf - ec, c\sqrt{e^2 + f^2 - 1} - f\sqrt{b^2 + c^2}, e\sqrt{b^2 + c^2} - b\sqrt{e^2 + f^2 - 1} \right) \quad (3.6)$$

şeklindedir.

Bir örnek ile inceleyelim.

Örnek 7:

$$H_1 \dots 5x + 3y + 4z = 0 \Rightarrow N_1 = (5, 3, 4); \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = 0$$

$$H_2 \dots 5x + 4y + 3z = 0 \Rightarrow N_2 = (5, 4, 3); \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L = 0$$

$$H_3 \dots x + y + z = 0 \Rightarrow N_3 = (1, 1, 1); \quad \langle N_3, N_3 \rangle_L > 0$$

$$P_1: H_2 \cap H_3 \Rightarrow b = 4, c = 3, e = 1, f = 1$$

Bu değerler (3.6) denkleminde yerleştirilirse;

$$F_1 = 2$$

bulunur.

$$P_1 = \frac{1}{2}(1, -1, 1)$$

elde edilir.

$$P_2 = H_1 \cap H_3 \Rightarrow b = 3, c = 4, e = 1, f = 1$$

Bu değerler (3.6) denkleminde yerleştirilirse

$$F_2 = 2$$

bulunur.

$$P_2 = \frac{1}{2}(-1, -1, 1)$$

elde edilir.

$$P_3: H_1 \cap H_2 \Rightarrow b = 3, c = 4, e = 4, f = 3$$

Bu değerler (3.3) denkleminde yerleştirilirse;

$$C_I = 1$$

bulunur.

$$P_3 = (-7, 5, 5)$$

elde edilir. Bu üç noktaya üçgen oluşturma şartını uygulayalım.

$$\left| \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \right| = \frac{-9}{4} < 0$$

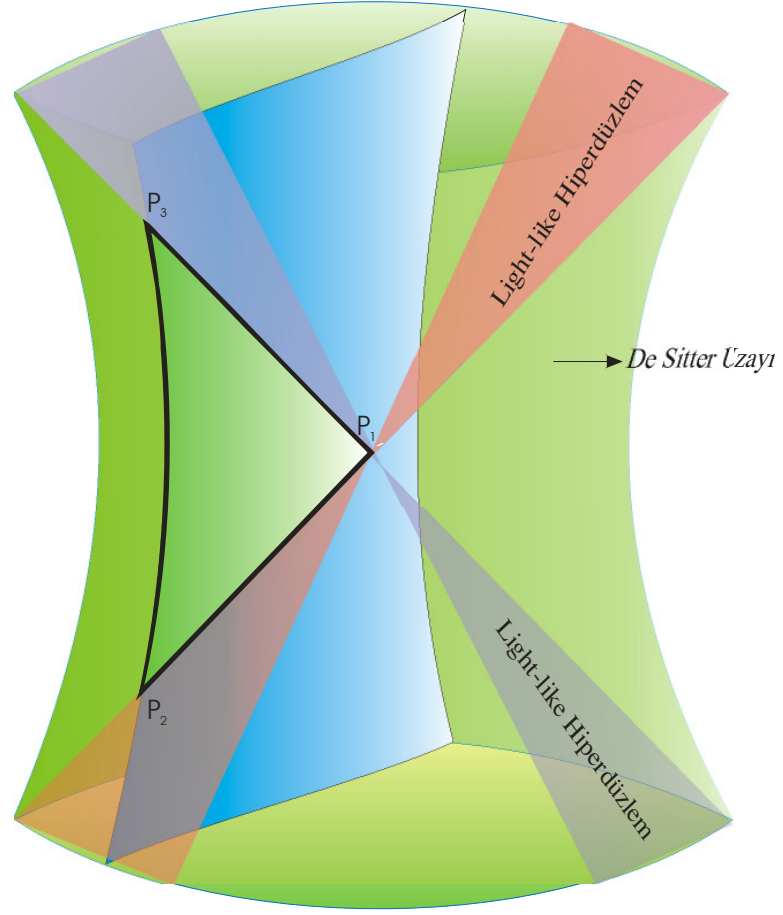
Bu noktalar üçgen şartını sağlar. Şimdi bu üçgenin kenarlarını inceleyelim.

$\langle P_1, P_2 \rangle_L = \frac{5}{4} \Rightarrow \langle P_1, P_2 \rangle_L > 1$ olduğundan P_1 ile P_2 arasındaki geodezik parçası timelike (hiperbol) parçası olduğu görülür.

$\langle P_1, P_3 \rangle_L = 1 \Rightarrow \langle P_1, P_3 \rangle_L = 1$ olduğundan P_1 ve P_3 arasındaki geodezik parçası null doğrusu olduğu görülür.

$\langle P_2, P_3 \rangle_L = -1$ olduğundan P_2 ve P_3 arasındaki geodezik parçası belirsizdir.

Buradan iki null düzlem ile bir timelike düzlemin arakesit doğrularının de sitter ile kesişimi sonucu bir timelike geodezik ,bir null doğru ve diğer kenarı bilinmeyen üçgen veya iki kenarı null(ters taraflarda) bir kenarı timelike olan üçgen oluşturur.



Şekil 3.7. Lorentz uzayında iki lightlike bir timelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen

Durum 8:

Lorentz uzayında iki spacelike ve bir null düzlem aldığımızda bu üç düzlemin durumlarını inceleyelim. Bu durumda (3.1) ve (3.5) ifadelerinden faydalanılır.

Örnek 8 :

$$H_1 \dots 5x + 4y + 3z = 0 \Rightarrow N_1 = (5, 4, 3); \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = 0$$

$$H_2 \dots 3x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow N_2 = (3, 2, 2); \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L < 0$$

$$H_3 \dots 3x + 2y - 2z = 0 \Rightarrow N_3 = (3, +2, -2); \quad \langle N_3, N_3 \rangle_L < 0$$

$$P_1 : H_2 \cap H_3 \Rightarrow b = 2, c = 2, e = 2, f = -2$$

Bu değerler (3.1) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$A_1=4$$

bulunur.

$$P_1 = \frac{1}{4\sqrt{5}}(-8, 12, 0)$$

bu ifade dzenlenirse;

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 3, 0)$$

elde edilir

$$P_2 \dots H_1 \cap H_3 \Rightarrow b = 4, c = 3, e = 2, f = -2$$

Bu değerler (3.5) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$E_1=13$$

bulunur.

$$P_2 = \frac{1}{13}(-14, 19, -2)$$

elde edilir.

$$P_3 : H_1 \cap H_2 \Rightarrow b = 4, c = 3, e = 2, f = 2$$

Bu değerler (3.5) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$E_2=1$$

bulunur.

$$P_3 = (2, -1, -2)$$

elde edilir. Bu üç noktaya üçgen oluşturma şartı uygulanırsa;

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = \frac{-16}{13\sqrt{5}} < 0$$

olur ki, bu üç nokta üçgen şartını sağlar.

$$\langle P_1, P_2 \rangle_L = \frac{29}{13\sqrt{5}} \Rightarrow -1 \langle \langle P_1, P_2 \rangle_L \rangle < 1 \text{ olduğundan } P_1 \text{ ile } P_2 \text{ arasındaki geodezik parçası}$$

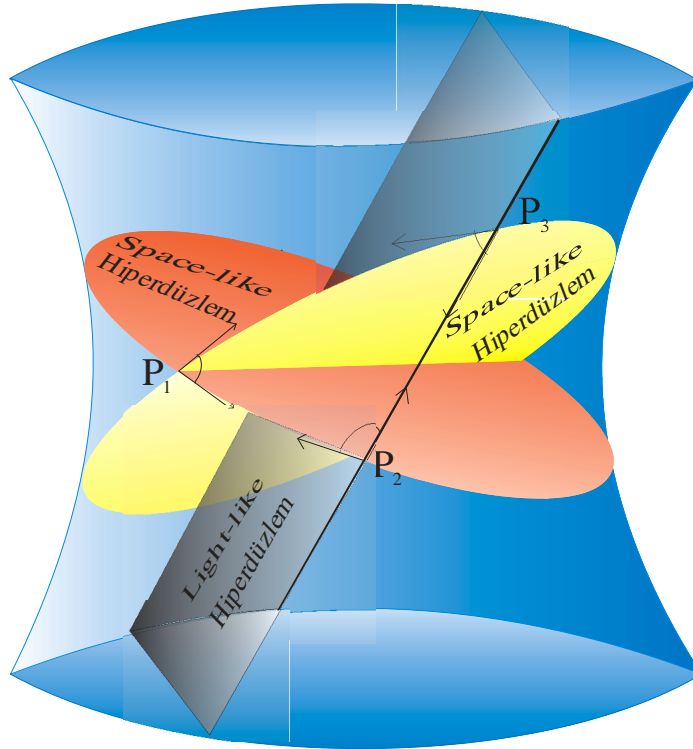
spacelike (elips) geodezik olduğunu gösterir.

$$\langle P_1, P_3 \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow -1 \langle \langle P_1, P_3 \rangle_L \rangle < 1 \text{ olduğundan } P_1 \text{ ile } P_3 \text{ arasındaki geodezik parçası}$$

spacelike (elips) geodezik olduğunu gösterir.

$$\langle P_2, P_3 \rangle_L = 1 \Rightarrow \langle \langle P_2, P_3 \rangle_L \rangle = 1 \text{ olduğundan } P_2 \text{ ile } P_3 \text{ arasındaki geodezik parçası null geodezik olduğunu gösterir.}$$

Buradan Lorentz uzayında iki spacelike düzlem ile bir null düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları geodeziklerin S_1^2 ile kesişim noktalarının oluşturduğu üçgenin iki kenarı timelike kenarlara sahip iken diğeri bir null doğru olan üçgen oluşturur



Şekil 3.8. Lorentz uzayında iki spacelike bir lightlike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen

Durum 9:

Lorentz uzayında iki timelike ve bir null düzlem alındığında (3.3) ve (3.6) ifadelerinden faydalanılır.

Örnek 9:

$$H_1 \dots 5x + 3y + 4z = 0 \Rightarrow N_1 = (5, 3, 4); \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = 0$$

$$H_2 \dots x + y + z = 0 \Rightarrow N_2 = (1, 1, 1); \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L > 0$$

$$H_3 \dots x - y - z = 0 \Rightarrow N_3 = (1, -1, -1); \quad \langle N_3, N_3 \rangle_L > 0$$

$$P_1: H_2 \cap H_3 \Rightarrow b = 1, c = 1, e = -1, f = -1$$

Bu değerler (3.2) ifadesinde yerleştirilirse;

$$B_1 = 2\sqrt{2}$$

bulunur.

$$P_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0, 2, -2)$$

ifadesi düzenlenirse;

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$$

ifadesi elde edilir.

$$P_2: H_1 \cap H_3 \Rightarrow b = 3, c = 4, e = -1, f = -1$$

Bu değerler (3.6) ifadesinde yerleştirilirse;

$$F_1 = 12$$

bulunur.

$$P_2 = \frac{1}{12}(1, 9, -8)$$

elde edilir.

$$P_3 : H_1 \cap H_2 \Rightarrow b = 3, c = 4, e = 1, f = 1$$

Bu değerler (3.6) ifadesinde yerleştirilirse;

$$F_2 = 2$$

bulunur.

$$P_3 = \frac{1}{2}(-1, -1, 1)$$

elde edilir. Bu üç noktaya üçgen oluşturma şartı uygulanırsa,

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = \frac{-1}{6\sqrt{2}} < 0$$

olur. Bu noktalar üçgen oluşturma şartını sağlar. Bu üçgenin Kenarları incelenirse;

$$\langle P_1, P_2 \rangle_L = \frac{17}{12\sqrt{2}} \Rightarrow \langle P_1, P_2 \rangle_L > 1 \text{ olduğundan } P_1 \text{ ile } P_2 \text{ arasındaki geodezik paręası}$$

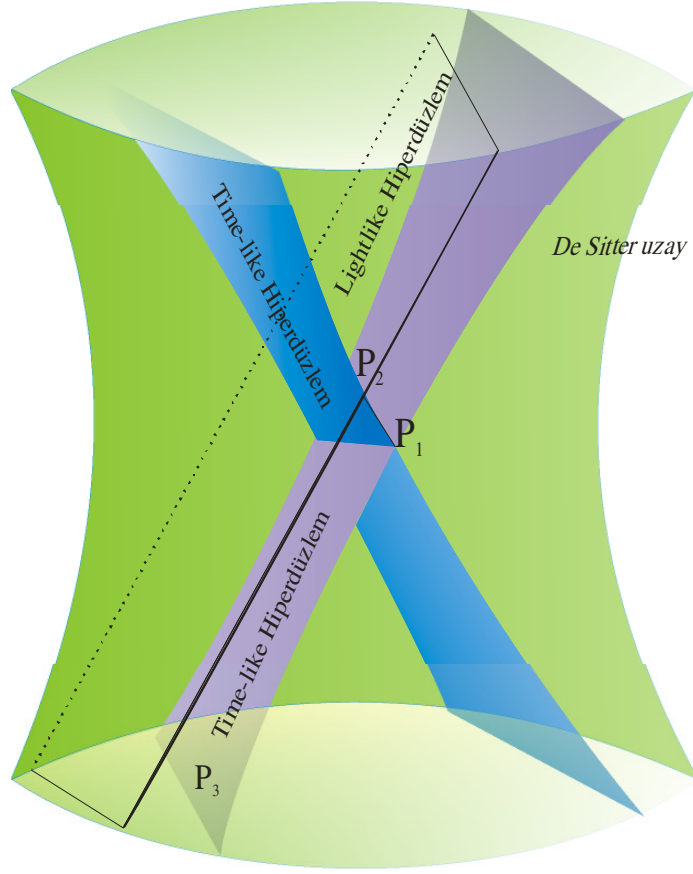
timelike (hiperbol) geodezik paręası olduğu görölür.

$$\langle P_1, P_3 \rangle_L = \frac{-3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \langle P_1, P_3 \rangle_L < -1 \text{ olduğundan } P_1 \text{ ile } P_3 \text{ arasındaki geodezik paręası}$$

sonsuzda olduğu görölür.

$$\langle P_2, P_3 \rangle_L = -1 \text{ olduğundan } P_2 \text{ ile } P_3 \text{ arasındaki geodezik paręası sonsuzda olduğu görölür.}$$

Buradan Lorentz uzayında iki timelike düzlem ile bir null düzlemin arakeşlerinin oluşturdukları geodeziklerin S_1^2 ile keşişim noktalarının oluşturduğu üçgenin iki kenarı sonsuzda iken diğeri timelike kenar olan üçgen oluşturur.



Şekil 3.9. Lorentz uzayında iki timelike bir lightlike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen

Durum 10:

Lorentz uzayında bir spacelike , bir null ve bir timelike düzlem alındığında (3.4), (3.5) ve (3.6) ifadelerinden faydalanılır.

Örnek 10:

$$H_1 \dots 5x + 4y + 3z = 0 \Rightarrow N_1 = (5, 4, 3); \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = 0$$

$$H_2 \dots 3x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow N_2 = (3, 2, 2); \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L < 0$$

$$H_3 \dots x - y - z = 0 \Rightarrow N_3 = (1, -1, -1); \quad \langle N_3, N_3 \rangle_L > 0$$

$$P_1: H_2 \cap H_3 \Rightarrow b = 2, c = 2, e = -1, f = -1$$

Bu değerler (3.4) formülünde yerleştirilirse;

$$D_I=5$$

bulunur.

$$P_I = \frac{1}{5\sqrt{2}}(0, 5, -5)$$

ifadesi düzenlenirse;

$$P_I = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$$

ifadesi elde edilir.

$$P_2: H_1 \cap H_3 \Rightarrow b = 4, c = 3, e = -1, f = -1$$

Bu değerler (3.6) formülünde yerleştirilirse,

$$F_I=12$$

bulunur.

$$P_2 = \frac{1}{12}(-1, 8, -9)$$

elde edilir.

$$P_3: H_1 \cap H_2 \Rightarrow b = 4, c = 3, e = 2, f = 2$$

Bu değerler (3.5) formülünde yerleştirilirse;

$$E_I=1$$

bulunur.

$$P_3 = (2, -1, -2)$$

elde edilir. Bu üç noktaya üçgen oluşturma şartını uygulayalım.

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = -\frac{5\sqrt{2}}{24} < 0$$

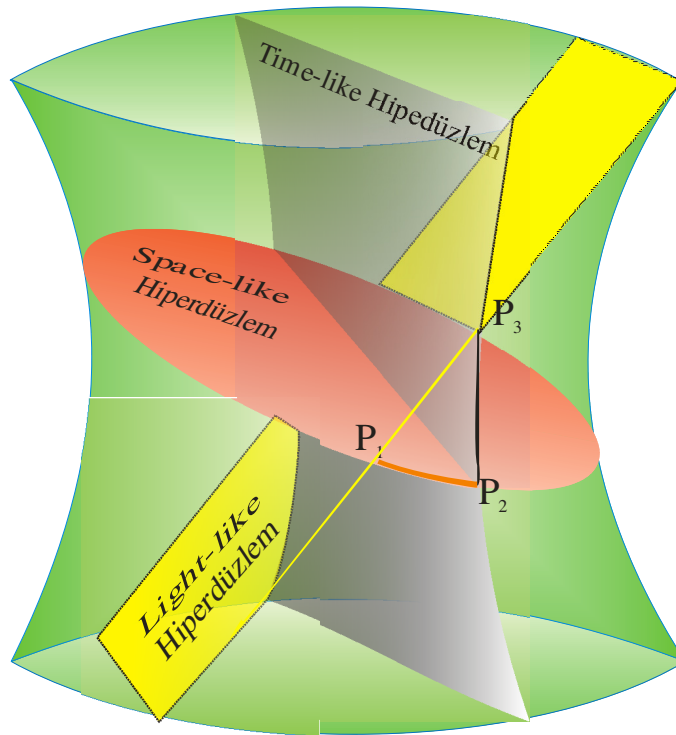
olur. Bu noktalar üçgen oluşturur. Bu üçgenin kenarlarını inceleyelim.

$\langle P_1, P_2 \rangle_L = \frac{17}{12\sqrt{2}}$ ise $\langle P_1, P_2 \rangle_L > 1$ olduğundan P_1 ile P_2 arasındaki geodezik parçası timelike geodezik parçası olduğu görülür.

$\langle P_1, P_3 \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow -1 < \langle P_1, P_2 \rangle_L < 1$ olduğundan P_1 ile P_3 arasındaki geodezik parçası spacelike (elips) parçası olduğu görülür.

$\langle P_2, P_3 \rangle_L = 1 \Rightarrow \langle P_2, P_3 \rangle_L = 1$ olduğundan P_2 ile P_3 arasındaki geodezik parçası null geodezik parçası olduğu görülür.

Buradan Lorentz uzayında bir spacelike düzlem, bir timelike düzlem ve bir null düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları geodeziklerin S_1^2 ile kesişim noktalarının oluşturduğu üçgenin bir kenarı spacelike, bir kenarı timelike kenar ve bir kenarı null geodezik olan üçgen oluşturur.



Şekil 3.10. Lorentz uzayında bir timelike, bir lightlike ve bir spacelike düzlemin arakesitlerinin oluşturdukları de Sitter üçgen

BÖLÜM IV

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada S_1^2 De Sitter küresi üzerinde geodeziklerin üçgen oluşturduğu gösterildi. Bunların bazılarının üçgen eşitsizliğini sağlamadığı ama yinede alınan noktaların bir noktası sonsuzda olan üçgen meydana getirdiği görüldü. Fakat bu üçgenlerin açılarının ve alanlarının ne olduğu araştırılmadı. Daha ileriki aşamalarda bu yapılan çalışmaların yüksek boyutlu uzaylarda simplexlerin nasıl oluştuğu ve bunların tepe açılarının neler olabileceği, hacimlerinin nasıl hesaplanabileceği gibi çalışmalar yapılabilir. Bu konuda çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Schlenker, J.M., Polyedres dans les espaces de Sitter-hyperboliques, preprint,1996.
- [2] Schlenker, J.M., Metriques sur les polyedres hyperboliquesconvexes, Journal of Differential Geometry, 48, 323-405,1998.
- [3] Hodgson, C.D. and Rivin, I. A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space, Invent. Math., 111, 77-111, 1993.
- [4] Santalo, L., Integral Geometry and Geometric Probability, Encyclopedia of Mathematics and its applications,Vol 1, Addison-Wesley, 1976.
- [5] Ratcliffe, J.G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag , Berlin, 1994.
- [6] Vinberg, E.B., Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 29, Springer-Verlag, 4-79, 1993.
- [7] O'neil, B., Semi-Riemannian Geometry , Academic Press. London, 1983.
- [8] Yakut, A.T., Hiperbolik Uzayda Simplexlerin Tepe Açılıarı, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Aralık 2004