

PROFİNİTE DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNE

Fikret CİHAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos - 2011

PROFİNİTE DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNE

Fikret CİHAN

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI

Ağustos – 2011

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fikret CİHAN'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Profinite Değişmeli Cebirler Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

26/08/2011

Üye : Doç. Dr. Erhan ATA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun ... / ... / 2011 gün ve ... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Atalay KÜÇÜKBURSA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

PROFİNİTE DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNE

Fikret CİHAN

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2011

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, profinite cebirler ve profinite cebirler üzerinde tanımlı bazı cebirsel modellere değinilmiştir. İkinci bölümde daha önceden tanımlanmış olan değişmeli cebirler üzerinde 3-çaprazlanmış tipten cebirsel modeller olan 3-çaprazlanmış çaprazlanmış modüller kavramı profinite 3-çaprazlanmış modül kavramına uyarlanmıştır. Üçüncü bölümde de simplisel cebirlerle 3-çaprazlanmış modüller kategorilerinin denkliği profinite cebirlere uyarlanacaktır.

Anahtar Kelimeler: Profinite Cebir, Profinite 3-çaprazlanmış çaprazlanmış Modüller, Profinite 3-küp kategorileri

ON THE PROFINITE COMMUTATIVE ALGEBRAS

Fikret CİHAN

Mathematics, M.S. Thesis, 2011

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Tufan Sait KUZPINARI

SUMMARY

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, profinite algebras and some algebraic models defined on the profinite algebras have been handled. In the second chapter, on the commutative algebras defined beforehand, the concept of 3- crossed crossed modules that are 3- crossed type of algebraic models have been adapted to profinite 3-crossed module concept. In the third chapter, the equation of simplicial algebras with 3-crossed modules categories will be adjusted.

Keywords: Profinite algebra, profinite 3-crossed crossed modules, profinite 3-cube categories.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezimin hazırlanmasında büyük emeği geçen danışman hocam Aksaray Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI'na, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Enver Önder USLU'ya, Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine, yüksek lisans çalışmamızda bizden her türlü desteği esirgemeyen görev yaptığım Kırklareli Üniversitesi Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu Müdürü Yrd. Doç. Dr. Sadık UÇAR'a ve hayatın her aşamasında yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Fikret CİHAN

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
KABUL VE ONAY SAYFASI.....	İİİ
ÖZET	İV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR.....	Vİ
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	Vİİ
GİRİŞ	1
1. PROFİNİTE CEBİRLER VE PROFİNİTE CEBİRLER ÜZERİNDE TANIMLI BAZI CEBİRSEL MODELLER.....	3
1.1. Giriş	3
1.2. Profinite cebirler	3
1.2.1 Ters (inverse) sistem ve ters limit.....	3
1.3. Profinite Simplisel Cebirler	5
1.3.1. Bir profinite cebirinin simplisel çözümü	8
1.3.2. Bir profinite simplisel cebirin moore kompleksi ve homotopi modülü.....	8
1.3.3. Kısıtlanmış profinite simplisel cebirler	9
1.4. Yüksek Mertebeli Çaprazlanmış Kompleks Çiftleri	10
1.5. Profinite Çaprazlanmış Modüller.....	15
1.6. Profinite k-Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller.....	16
1.6.1 Profinite cebirler üzerinde çaprazlanmış modül örnekleri	18
1.6.2 Bazı elementer özellikler.....	24
2. PROFİNİTE 3-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER.....	25
2.1. Giriş	25
2.2. Profinite 3-Çaprazlanmış Modüllerin Elde Edilişi.....	25
2.2.1. Profinite çaprazlanmış n-küpler ve profinite simplisel cebirler	30
3. PROFİNİTE SİMLİSEL CEBİRLER VE PROFİNİTE 3-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER	40
3.1. Giriş	40
3.2. $\mathfrak{Pro} \mathfrak{Simp}$ ve $\mathfrak{Pro} \mathfrak{X}_3 \mathfrak{Mod}$ Kategorilerinin Denklığı.....	40
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	45

GİRİŞ

Bilindiği üzere simplisel cebirler tüm bağlantılı homotopi tipleri için bir modeldir. Boyutu n den büyük olan elemanları birim elemandan oluşan simplisel cebirlerin Moore kompleksi, simplisel cebirlerin n tipleri için ve dolayısıyla uzayların bağlantılı $(n + 1)$ tipleri için cebirsel modeldir. Simplisel gruplar ilk defa André tarafından [1] de çalışılmıştır.

Whitehead [2] de bağlantılı 2— tiplerin bir modeli olan çaprazlanmış modülleri tanımlamış ve bu tanımlama ışığında Conduche [3] de, 2—kısıtlanmış simplisel grubun Moore kompleksinin bazı özelliklerini ve Peiffer özdeşliklerini kullanarak, bağlantılı 3—tiplerin bir modeli olan 2—çaprazlanmış modülleri tanımlamıştır.

Benzer çalışmalara örnek olarak Loday [4] verilebilir. Çaprazlanmış modüllerin Cat^1 — Gruplar için GAP uygulamasını Alp [5] de yapmıştır.

Loday 2—tipler için MacLane ve Whitehead tarafından [6] de verilen yapının bir genellemesi olan cat^n —grupları tanımlamıştır. Cat^n —gruplar [7] de tanımlanan çaprazlanmış n —küpler kategorisine denk bir kategori oluşturur. Porter [8] de simplisel gruplar ve çaprazlanmış n —küplerin (dolayısıyla cat^n — grupların) n — tiplerini incelemiş ve simplisel gruplar kategorisi ile çaprazlanmış n — küpler kategorisinin denkliğini göstermiştir.

Yine benzer çalışmalar doğrultusunda cebir durumu için [9] de 2—çaprazlanmış modüller kategorisi ile simplisel cebirler kategorisi arasındaki denklik gösterilmiştir.

Profinite gruplara Brummer [10], Gildenhuys [11], Wilson [12], Ribes ve Zalesski [13] çalışmıştır. Korkers ve Porter [14] ise profinite cebirlere çalışmışlardır.

Kuzpınarı [15] de bağlantılı 4—tipler için model olan 3—çaprazlanmış modülü ve 3— çaprazlanmış modüller kategorisini tanımlamıştır. Ayrıca Kuzpınarı [15] de $\mathcal{XMod}$ kategorisi ile $\mathcal{SimpCbr}_{\leq 3}$ kategorisinin doğal denkliğini göstermiştir.

Tezin Yapısı

Birinci bölümde profinite cebirler ve profinite cebirler üzerinde tanımlı bazı modeller verilmiştir. Kaynak olarak Wilson [12], Ribes ve Zelesski [13], Porter [16], Carrasco ve Cegarra [17], Carrasco [18], Conduche [3], Akça [19], Korkes ve Porter [14] verilebilir.

İkinci Bölümde ise profinite 3—çaprazlanmış modüllerin elde edilişi, profinite 3—çaprazlanmış modül tanımı profinite cebirlere uyarlanmıştır. Profinite 2—çaprazlanmış, profinite çaprazlanmış 2—küp, profinite çaprazlanmış n —küp, profinite çaprazlanmış n —küpler kategorisi, profinite içme çaprazlanmış n —küp uyarlamaları daha önceden yapılmış. Kaynak olarak Whitead [2], Conduche [3], Carrasco [18], Porter [37], Korkes ve Porter [14], Akça [19], Kuzpınarı [15], Arvasi [28] ve Ellis [29] verilebilir.

Üçüncü bölümde ise $\mathfrak{Pro} \mathfrak{Simp}$ ve $\mathfrak{Pro} \mathfrak{X}_3 \mathfrak{Mod}$ kategorilerinin denkliği Kuzpınarı'nın [15] de göstermiş olduğu denklikten uyarlanmıştır. Kaynak olarak Kuzpınarı [15], Arvasi [20] , Conduche [3] verilebilir.

1. PROFİNİTE CEBİRLER VE PROFİNİTE CEBİRLER ÜZERİNDE TANIMLI BAZI CEBİRSEL MODELLER

1.1. Giriş

Bu bölümde profinite cebirlerin ve grupların tanımını ve temel özelliklerini vererek, profinite simplisel cebirler teorisinin bazı özelliklerini inceledik. İlk kısımda profinite cebirler incelenmiş daha sonraki kısımda ise profinite cebirler üzerinde tanımlanan cebirsel modeller verilmiştir. Özellikle ikinci bölümde ihtiyaç duyacağımız simplisel cebirler ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Bu bölümle ilgili bilgiler genellikle Wilson [12], Ribes ve Zelesski [13], Porter [16], Carrasco ve Cegarra [17], Carrasco [18], Conduche [3], Akça [19], Korkes ve Porter [14] referanslarından alınmıştır.

1.2. Profinite cebirler

1.2.1 Ters (inverse) sistem ve ters limit

Tanım 1.1.1 $(I, \leq)$ yönlendirilmiş kısmi sıralı bir küme olsun, $i \in I$ için X_i topolojik cebirlerinden oluşan $\{X_i : i \in I\}$ ailesi ile $i \leq j$ için $\varphi_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ sürekli homomorfizmler ailesini düşünelim. Eğer $\varphi_{ii} : X_i \rightarrow X_i$ özdeşlik homomorfizmi ve $i \leq j \leq k$ için

$$\begin{array}{ccc} X_k & \xrightarrow{\varphi_{ik}} & X_i \\ & \searrow \varphi_{jk} & \nearrow \varphi_{ij} \\ & X_j & \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise, yani $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \varphi_{jk}$ ise, topolojik cebirler ve sürekli homomorfizmlerden oluşan $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ sistemine I üzerinde, topolojik cebirlerin bir **ters sistemi** denir.

Tanım 1.1.2 Y bir topolojik cebir, $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ topolojik cebirlerin bir ters sistemi ve $i \in I$ için $\psi_i : Y \rightarrow X_i$ dönüşümleri sürekli homomorfizmler olsun. Eğer $i \leq j$ için

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi_i} & X_i \\ & \searrow \psi_j & \nearrow \varphi_{ij} \\ & X_j & \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise, yani $\psi_i = \varphi_{ij} \psi_j$ ise ψ_i dönüşümlerine **uyumludur** denir.

$\{X_i = \varphi_{ij}\}$, topolojik cebirlerin bir ters sistemi, X bir topolojik cebir ve $\varphi_i : X \rightarrow X_i$ uyumlu olan sürekli homomorfizmler olsun. Eğer her Y topolojik cebiri ve $\psi_i : Y \rightarrow X_i$, uyumlu olan sürekli homomorfizmler ailesi için, $i \in I$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & X \\ & \searrow \psi_i & \swarrow \varphi_i \\ & X_i & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde, yani $\varphi_i \psi = \psi_i$ olacak şekilde bir tek $\psi : Y \rightarrow X$ sürekli homomorfizmi varsa, $X = \varprojlim X_i$, uyumlu olan sürekli homomorfizmler ile birlikte $\{X_i = \varphi_{ij}\}$ ters sisteminin bir **ters limiti** denir ve bu

$$X = \varprojlim_{\leftarrow} X_i$$

şeklinde gösterilir.

Önerme 1.1.1 $\{X_i = \varphi_{ij}\}$ topolojik cebirlerin ve sürekli homomorfizmlerin oluşturduğu bir ters sistem olsun.

(i) $\{X^{(1)}, \varphi^{(1)}\}$ ve $\{X^{(2)}, \varphi^{(2)}\}, \{X_i, \varphi_{ij}\}$ ters sisteminin ters limitleri ise, her $i \in I$ için $\varphi_i^{(2)} \overline{\varphi} = \varphi_i^{(1)}$ olacak şekilde bir

$$\overline{\varphi} : X^{(1)} \rightarrow X^{(2)}$$

izomorfizmi mevcuttur.

(ii) $i \in I$ için X_i topolojik cebirlerinin kartezyen çarpımını $C = \prod_{i \in I} X_i$ ile, C den X_i ye izdüşüm morfizmini de π_i ile gösterelim. Her $i \in I$ için

$$X = \{c \in C \mid \varphi_{ij} \pi_j(c) = \pi_i(c), i, j \in I, i \leq j\}$$

ve $\varphi_i = \pi_i|_X$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $\{X, \varphi_i\}, \{X_i, \varphi_{ij}\}$ nin bir ters limitidir.

Tanım 1.1.3 P bir topolojik cebir olsun. Eğer P , sonlu P_i cebirlerinin ters sisteminin bir ters limiti oluyorsa, yani

$$P = \varprojlim_{\leftarrow} P_i$$

ise P ye bir profinite cebir denir.

Teorem 1.1.1 P bir topolojik cebir olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) P bir profinite cebirdir.
- (ii) P , sonlu cebirlerin kartezyen çarpımının kapalı bir idealine izomorftur.
- (iii) P kompakttır ve $\cap \{N \mid N, P \text{ nin açık ideali}\} = 1$ dir.
- (iv) P kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısız bir topolojik cebirdir.

1.3. Profinite Simplisel Cebirler

Bu kısımda profinite simplisel cebirler ve homoloji modülleri ile ilgili bilinen bazı tanımlar ve özellikler yer almaktadır. Bu kısma ilişkin daha fazla detay için Korkes ve Porter [14] nin "*Profinite Algebraic Homotopy*" kitabına başvurulabilir.

k , bir sabit, birimli, değişmeli halka olsun. Burada bütün k -cebirleri değişmeli ve birleşimli olarak kabul edilecek ancak idealler ve modüller cebir olarak düşünülecektir. Bütün k -modüllerinin kategorisi $\mathcal{Mod}$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.1.4 $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ profinite cebirlerin bir ailesi olsun.

$$\begin{aligned} d_i^n : E_n &\rightarrow E_{n-1} & 0 \leq i \leq n \neq 0, \\ s_i^n : E_n &\rightarrow E_{n+1} & 0 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

sürekli k — cebir homomorfizmleri olmak üzere

$$\begin{aligned} 1. \quad d_i^{n-1} d_j^n &= d_{j-1}^{n-1} d_i^n & 0 \leq i < j \leq n \text{ ise} \\ 2. \quad s_i^{n+1} s_j^n &= s_{j+1}^{n+1} s_i^n & 0 \leq i \leq j \leq n \text{ ise} \\ 3. \quad d_i^{n+1} s_j^n &= s_{j-1}^{n-1} d_i^n & 0 \leq i < j \leq n \text{ ise} \\ 4. \quad d_i^{n+1} s_j^n &= id & i = j \text{ ya da } i = j+1 \text{ ise} \\ 5. \quad d_i^{n+1} s_j^n &= s_j^{n-1} d_{i-1}^n & 0 \leq j < i-1 \leq n \text{ ise} \end{aligned}$$

özdeşlikleri sağlanıyorsa $((E_n)_{n \in \mathbb{N}}, d_i, s_i)$ üçlüsüne bir **profinite simplisel cebir** denir ve kısaca E ile gösterilir. d_i, s_i homomorfizmlerine sırasıyla **yüzey** ve **dejenere operatörleri** denir. Uygulamadaki kolaylığı açısından yukarıdaki aksiyonların gerektirdiği aşağıdaki eşitlikler daha sık kullanılır.

1. $d_i d_j = d_j d_{i+1} \quad 0 \leq j \leq i \leq n \text{ ise}$
2. $s_i s_j = s_j s_{i-1} \quad 0 \leq j < i \leq n \text{ ise}$
3. $s_i d_j = d_j s_{i+1} \quad j \leq i \text{ ise}$
4. $s_i d_j = d_{j+1} s_i \quad i > j \text{ ise}$

Bu eşitlikler standarttır ve [21], [22], [23] ve [24] de bulunabilir.

Tanım 1.1.5 $x \in E_n$ elemanlarına n - **boyutlu simpleks** denir. Bazı y ler için $x = s_i(y)$ oluyorsa bu x simpleksine bir **dejenere simpleks** denir.

Tanım 1.1.6 Bütün d_i^n yüzey operatörleri ve bütün s_i^n denejere operatörleri birleşmeli olan yani

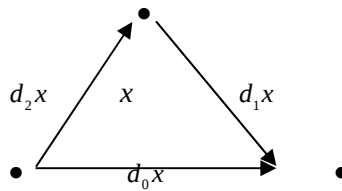
$$d_i f_n = f_{n-1} d_i, \quad f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

şartını sağlayan $f_n : E_n \rightarrow F_n$ sürekli k - cebir homomorfizmlerinin bir f kümesine E ve F profinite simplisel cebirleri arasında bir **homomorfizm** denir ve $E \rightarrow F$ şeklinde gösterilir. Böylece $\mathfrak{Pro} \mathfrak{Simp}$ ile göstereceğimiz profinite simplisel cebirlerin kategorisi tanımlanmış olur. Bu tanımın düşük boyutlar ve sadece değişmeli cebirler için bir geometrik yorumu şu şekilde yapılabilir:

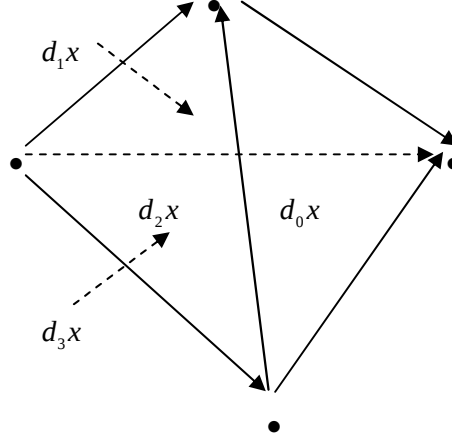
$n=0$ için bir 0 – boyutlu simpleks açık şekilde bir $x \in E_0$ noktasıdır. $x \in E_1$ için 1 - boyutlu simpleks,

$$d_1 x \bullet \xrightarrow{x} \bullet d_0 x$$

$x \in E_2$ için 2 - boyutlu simpleks üçgendir:



ve $x \in E_3$ için 3- boyutlu simpleks bir dörtyüzlüdür:



Tanım 1.1.7 Bir profinite simplisel k - modül, $n \geq 0$, Tanım 1.2.2 de verilen denklemleri sağlayan sürekli k - modül homomorfizmleri ile profinite k - modüllerin bir E_n ailesidir.

Tanım 1.1.8 E herhangi bir simplisel k -modül olsun ve

$$\partial_n : E_n \rightarrow E_{n-1}$$

homomorfizmi

$$\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda profinite k - modüllerinin bir kompleks zinciri vardır. Profinite simplisel cebirlerin tanımında yer alan 1. aksiyom gereği $\partial_{n+1} \partial_n = 0$ dır. Bu böylece E profinite simplisel modülüyle ilişkili bir zincir kompleksi olur. Buradan **n. homoloji modülü** $H_n(E)$

$$H_n(E) = \frac{\text{Çek} \partial_n}{\text{Im} \partial_{n+1}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.9 E bir profinite simplisel k -cebir olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n = E$ ve $d_i = s_j = id$ olmak üzere $((E_n)_{n \in \mathbb{N}}, d_i, s_i)$ üçlüsü bir profinite simplisel cebirdir. Bu simplisel cebire **sabit profinite simplisel cebir** denir ve $K(E, 0)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.10 Bir E profinite simplisel cebir, $K(E, 0)$ sabit profinite simplisel cebir olsun,

$$E \rightarrow K(E, 0)$$

dönüşümüne E profinite simplisel cebirinin artırılmışı denir. Bu artırma

$$fd_0^1 = fd_1^1 : E_1 \rightarrow E$$

örten sürekli k - cebir homomorfizmi yardımıyla olur. Eğer E artırılmış profinite simplisel cebiri devirli ve $n > 0$ için $H_n(E) \cong 0$, $H_0(E) \cong E$ ise bu profinite simplisel cebire **devirli profinite simplisel cebir** denir.

1.3.1. Bir profinite cebirinin simplisel çözümü

Tanım 1.1.11 B bir değişmeli profinite k - cebir olsun. B nin bir serbest simplisel çözümü, (E, f) devirli ve her bir E_n serbest olacak şekilde bir $f : E_0 \rightarrow B$ genişlemesi ile birlikte bir E profinite simplisel cebirinden oluşur.

1.3.2. Bir profinite simplisel cebirin moore kompleksi ve homotopi modülü

Tanım 1.1.12 E bir profinite simplisel cebir olsun.

$$(NE)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \zeta e k d_i^n$$

ve her

$$n \geq 0 \text{ için } \partial_n : NE_n \rightarrow NE_{n-1} \text{ dönüşümü } d_n^n : E_n \rightarrow E_{n-1}$$

dönüşümünün $(NE)_n$ kümesine kısıtlanışı olmak üzere (NE, ∂) zincir kompleksine E profinite simplisel cebirin **Moore kompleksi** denir.

Tanım 1.1.13 E profinite simplisel cebir olsun. E nin Moore kompleksinin n . homolojisine

E nin **n . homotopi modülü** denir ve $\pi_n(E)$ ile gösterilir. Yani

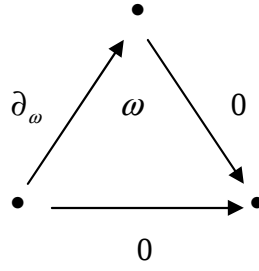
$$\begin{aligned} \pi_n(E) &\cong H_n(NE, \partial) \\ &= \bigcap_{i=1}^n \zeta e k d_i^n / d_{n+1}^{n+1}(\zeta e k d_i^{n+1}) \end{aligned}$$

dir.

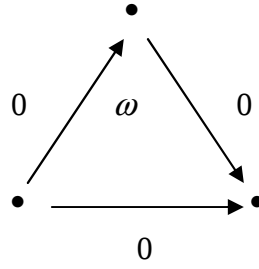
NE ve $\pi_n(E)$ nin değişmeli cebirler için yorumu řu şekilde yapılabilir:
 $n = 1$, $\omega \in NE_1$ için

$$\partial \omega \bullet \xrightarrow{\omega} \bullet 0$$

ve $\omega \in NE_2$



eğer $\omega \in NE_2$



şeklinde ise $\omega, \text{Çek}\partial$ içindedir. Eğer ω onun 3. yüzünde ve diğer bütün yüzleri de sıfır olacak şekilde bir x 3-simpleksi varsa $x, \pi_2(E)$ nin aşıkâr elemanını verir.

1.3.3. Kısıtlanmış profinite simplisel cebirler

NE ve $\pi_n(E)$ nin elemanları için bu basit yorum, ilerde, bazı başka durumlardaki elemanların yorumuna yardımcı olarak faydalı olacaktır.

Tanım 1.1.14 E profinite simplisel cebirinde mertebesinin boyutu $>k$ olan E_n elemanlarını almayarak elde edilen komplekse E profinite simplisel cebirin bir **k -kısıtlanmış** denir ve $\mathbf{tr}_k E$ ile gösterilir. k -kısıtlanmış profinite simplisel cebirlerin kategorisi $\mathfrak{ProTr}_k$ ile gösterilir.

İskelet funktor hakkındaki bazı bilgiler [22] dan hatırlanacaktır. Cebirlerin kategorisi $\mathfrak{Cbr}$ de bir kısıtlama funktoru vardır. Bu funktor k -tersiskelet funktor olarak adlandırılan

$$\text{cos } k_k : \mathfrak{ProTr}_k \text{Simp} \rightarrow \mathfrak{ProSimp}$$

şeklinde sağ ek (adjoint) ve k -iskelet funktor olarak adlandırılan bir

$$sk_k : \mathfrak{ProTr}_k \mathfrak{Simp} \rightarrow \mathfrak{ProSimp}$$

sol ek funktora sahip olan

$$tr_k : \mathfrak{ProSimp} \rightarrow \mathfrak{ProTr}_k \mathfrak{Simp}$$

şeklinde bir kısıtlama fonktoru vardır. İskelet fonktor hakkındaki detaylı bilgi için [22] ve [25] den elde edilebilir.

Aşağıda verilen teorem Conduche [3] tarafından gruplar için yapılmıştır. Değişmeli cebirler için kullanılan [9] de bulunan sonucun pro-C ye uyarlanması Akça [19] tarafından yapılmıştır.

Teorem 1.1.2 E bir profinite simplisel cebir olsun. E nin tersiskeleti $\cos k(tr_k(E))$ nin Moore kompleksi $k + 1$ uzunluğundadır. Yani

$$i > k + 1 \text{ için } N(\cos k_k(tr_k(E)))_i = 0$$

dır ve $k + 1$ den küçük boyutlarda E nin Moore kompleksi ile özdeşdir. Buradan

$$(k+1)N(\cos k_k(tr_k(E)))_{k+1} = \zeta ek(\partial k : NE_k \rightarrow NE_{k-1})$$

ve

$$\partial_{k+1} : N(\cos k_k(tr_k(E)))_{k+1} = N(\cos k_k(tr_k(E)))_k = NE_k$$

morfizmi birebirdir.[19]

1.4. Yüksek Mertebeli Çaprazlanmış Kompleks Çiftleri

İlk olarak Carrasco ve Cegarra [17] de tanımlanan ve Akça [19] tarafından profinite gruplara uyarlanan aşağıdaki terminolojiyi hatırlayalım.

Bir P_n profinite cebirinin N_n kapalı normal idealini inceleyeceğiz. İlk olarak, çiftlerin bir ailesinin inşasını elde etmek için Carrasco [18] daki fikirleri buraya uyarlayacağız, bu kısmın profinite gruplar için uyarlanması Akça [19] bulunabilir. $\alpha \cap \beta = \theta$ ve $\beta < \alpha$ özelliğindeki $S(n)$ in α, β elemanlarının (α, β) ikililerinden oluşan $P(n)$ kümesini tanımlayalım. Burada $\alpha = (i_1, \dots, i_1)$, $\beta = (j_m, \dots, j_1) \in S(n)$ olup $S(n)$, lexicografik sıralamaya göre sıralanmıştır. Özellikle simplisel çözümle nerelerde kullanacağımız

$$F_{\alpha,\beta} : NP_{n-\#\alpha} \times NP_{n-\#\beta} \rightarrow NP_n, \quad (\alpha, \beta) \in P(n), \quad n \geq 0$$

çiftleri,

$$\begin{array}{ccc} NP_{n-\#\alpha} \times NP_{n-\#\beta} & \xrightarrow{F_{\alpha,\beta}} & NP_n \\ S_\alpha \times S_\beta \downarrow & & \uparrow p \\ P_n \times P_n & \xrightarrow{\mu} & P_n \end{array}$$

diyagramından bileşke alınarak elde edilir. Burada, $0 \leq k \leq l$, $b_k - \alpha_k = i_k$ ve $0 \leq t \leq m$, $b_t - \alpha_t = j_t$ için,

$$s_\alpha = s_{i_l} \dots s_{i_1} : NP_{n-\#\alpha} \rightarrow P_n, \quad s_\beta = s_{j_m} \dots s_{j_1} : NP_{n-\#\beta} \rightarrow P_n,$$

ve $j = 0, 1, \dots, n-1$ için $p_j(z) = z s_j d_j(z)^{-1}$ olmak üzere,

$$p : P_n \rightarrow NP_n$$

dönüşümü, $p(x) = p_{n-1} \dots p_0(x)$ bileşke projeksiyonları vasıtasıyla tanımlanır ve

$$\mu : P_n \times P_n \rightarrow P_n$$

dönüşümü de çarpım dönüşümüdür, ayrıca $\#\alpha$, α nın içerdiği eleman sayısı ve $\#\beta$, β nın içerdiği eleman sayısıdır. Böylece, $x_\alpha \in NP_{n-\#\alpha}$ ve $y_\beta \in NP_{n-\#\beta}$

$$\begin{aligned} F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta) &= p\mu(s_\alpha x s_\beta)(x_\alpha, y_\beta) \\ &= p[s_\alpha x_\alpha, s_\beta y_\beta] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.1.3 P profinite simplisel cebir, $n > 1$ ve D_n , P_n in dejenere elemanları tarafından üretilen kapalı ideal olsun. N_n ise, $(\alpha, \beta) \in P(n)$ ve $x_\alpha \in NP_{n-\#\alpha}$, $y_\beta \in NP_{n-\#\beta}$ olmak üzere,

$$F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta)$$

formundaki elemanlar tarafından üretilen P_n in kapalı ideali olsun. Bu durumda,

$$NP_n \cap D_n = N_n$$

Sonuç olarak da N_n in ∂_n altındaki görüntüsünün $NP_n \cap D_n$ in ∂_n altındaki görüntüsüne eşit olduğu, yani

$$\partial_n(N_n) = \partial_n(NP_n \cap D_n)$$

olduğu elde edilir.

Bu kısımda ikinci bölümde gerekli olan $n = 4$ durumu incelenecektir. $n = 2$, $n = 3$ durumları Carrasco [18] (gruplar için) ve Akça [19] (pro-C gruplar için) bulunabilir.

$n = 4$ durumu

Theorem 1.1.4 $I \cup J = [3]$, $I = [3] - \{\alpha\}$, $J = [3] - \{\beta\}$ ve $(\alpha, \beta) \in P(4)$

olmak üzere

$$\partial_4(NE_4) = \sum_{I,J} K_I K_J$$

dir.[9]

İspat: Burada kullanılan aşağıdaki bilgiler 2. ve 3. bölümde sıkça kullanılacaktır.

$$x_1, y_1 \in NE_1, x_2, y_2 \in NE_2 \text{ ve } x_3, y_3 \in NE_3 \text{ için } I_4$$

$$\begin{aligned}
1) \quad C_{(3,2,1)(0)}(x_1 \otimes y_3) &= s_3 s_2 s_1 x_1 (s_0 y_3 - s_1 y_3 + s_2 y_3 - s_3 y_3) \\
2) \quad C_{(3,2,0)(1)}(x_1 \otimes y_3) &= (s_3 s_2 s_0 x_1 - s_1 s_2 s_1 x_1)(s_1 y_3 - s_2 y_3 + s_3 y_3) \\
3) \quad C_{(3,1,0)(2)}(x_1 \otimes y_3) &= (s_3 s_1 s_0 x_1 - s_2 s_2 s_0 x_1)(s_2 y_3 - s_3 y_3) \\
4) \quad C_{(2,1,0)(3)}(x_1 \otimes y_3) &= (s_2 s_1 s_0 x_1 - s_3 s_1 s_0 x_1) s_3 y_3 \\
5) \quad C_{(3,2)(1,0)}(x_2 \otimes y_2) &= (s_1 s_0 x_2 - s_2 s_0 x_2 + s_3 s_0 x_2) s_3 s_2 y_2 \\
6) \quad C_{(3,1)(2,0)}(x_2 \otimes y_3) &= (s_3 s_1 x_2 - s_3 s_0 x_2 + s_2 s_0 x_2 - s_1 s_1 x_2) \\
&\quad (s_3 s_1 y_2 - s_3 s_2 y_2) \\
7) \quad C_{(3,0)(2,1)}(x_2 \otimes y_2) &= (s_2 s_1 x_2 - s_3 s_1 x_2)(s_3 s_0 y_2 - s_1 s_2 y_2 + s_2 s_2 y_2) \\
8) \quad C_{(3,2)(1)}(x_2 \otimes y_3) &= s_3 s_2 x_2 (s_1 y_3 - s_2 y_3 + s_3 y_3) \\
9) \quad C_{(3,2)(0)}(x_2 \otimes y_3) &= s_3 s_2 x_2 s_0 y_3 \\
10) \quad C_{(3,1)(2)}(x_2 \otimes y_3) &= (s_2 y_3 - s_3 y_3)(s_3 s_1 x_2 - s_2 s_2 x_2) \\
11) \quad C_{(3,1)(0)}(x_2 \otimes y_3) &= s_3 s_1 x_2 (s_0 y_3 - s_1 y_3) + s_3 s_2 x_2 (s_2 y_3 - s_3 y_3) \\
12) \quad C_{(3,0)(2)}(x_2 \otimes y_3) &= s_3 s_0 x_2 (s_2 y_3 - s_3 y_3) \\
13) \quad C_{(3,0)(1)}(x_2 \otimes y_3) &= s_1 y_3 (s_3 s_0 x_2 - s_1 s_2 x_2) + s_2 s_2 x_2 (s_2 y_3 - s_3 y_3) \\
14) \quad C_{(2,1)(3)}(x_2 \otimes y_3) &= (s_2 s_1 x_2 - s_3 s_1 x_2) s_3 y_3 \\
15) \quad C_{(2,1)(0)}(x_2 \otimes y_3) &= s_2 s_1 x_2 (s_0 y_3 - s_1 y_3 + s_2 y_3) + s_3 s_1 x_2 s_3 y_3 \\
16) \quad C_{(2,0)(3)}(x_2 \otimes y_3) &= (s_2 s_0 x_2 - s_3 s_0 x_2) s_3 y_3 \\
17) \quad C_{(2,0)(1)}(x_2 \otimes y_3) &= (s_2 s_0 x_2 - s_1 s_1 x_2)(s_1 y_3 - s_2 y_3) + \\
&\quad (s_3 s_1 x_2 - s_3 s_0 x_2) s_3 y_3 \\
18) \quad C_{(1,0)(3)}(x_2 \otimes y_3) &= s_1 s_0 x_2 s_3 y_3 \\
19) \quad C_{(1,0)(2)}(x_2 \otimes y_3) &= (s_1 s_0 x_2 - s_2 s_0 x_2) s_2 y_3 + s_3 s_0 x_2 s_3 y_3 \\
20) \quad C_{(3)(2)}(x_3 \otimes y_3) &= s_3 x_3 (s_2 y_3 - s_3 y_3) \\
21) \quad C_{(3)(1)}(x_3 \otimes y_3) &= s_3 x_3 s_1 y_3 \\
22) \quad C_{(3)(0)}(x_3 \otimes y_3) &= s_3 x_3 s_0 y_3 \\
23) \quad C_{(2)(1)}(x_3 \otimes y_3) &= s_2 x_3 (s_1 y_3 - s_2 y_3) + s_3 (x_3 y_3) \\
24) \quad C_{(2)(0)}(x_3 \otimes y_3) &= s_2 x_3 s_0 y_3 \\
25) \quad C_{(1)(0)}(x_3 \otimes y_3) &= s_1 x_3 (s_0 y_3 - s_1 y_3) + s_2 (x_3 y_3) - s_3 (x_3 y_3)
\end{aligned}$$

dır. Burada $\alpha, \beta \in P(4)$ olmak üzere üreteç elemanlarının tamamının ∂_4 altındaki görüntüsü aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 1. Üreteç elemanlarının tamamının ∂_4 altındaki görüntüsü

1	$\partial_4 [C_{(3,2,1)(0)}(x_1 \otimes y_3)]$	=	$s_2 s_1 x_1 (s_0 d_3 y_3 - s_1 d_3 y_3 + s_2 d_3 y_3 - y_3)$
2	$\partial_4 [C_{(3,2,0,1)(1)}(x_1 \otimes y_3)]$	=	$(s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1)(s_1 d_3 y_3 - s_2 d_3 y_3 + y_3)$
3	$\partial_4 [C_{(3,1,0)(2)}(x_1 \otimes y_3)]$	=	$(s_2 s_0 x_1 - s_2 s_0 x_1)(s_2 d_3 y_3 - y_3)$
4	$\partial_4 [C_{(2,1,0)(3)}(x_1 \otimes y_3)]$	=	$(s_2 s_1 s_0 d_1 x_1 - s_1 s_0 x_1) y_3$
5	$\partial_4 [C_{(3,2)(1,0)}(x_1 \otimes y_2)]$	=	$(s_1 s_0 d_2 x_2 - s_2 s_0 d_2 x_2 - s_0 x_2) s_2 y_2$
6	$\partial_4 [C_{(3,1)(2,0)}(x_2 \otimes y_2)]$	=	$(s_1 x_2 - s_0 x_2 + s_2 s_0 d_2 x_2 - s_2 s_1 d_2 x_2)(s_1 y_2 - s_2 y_2)$
7	$\partial_4 [C_{(3,0)(2,1)}(x_2 \otimes y_2)]$	=	$(s_2 s_1 d_2 x_2 - s_1 x_2)(s_0 y_2 - s_1 y_2 + s_2 y_2)$
8	$\partial_4 [C_{(3,2)(1)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$s_2 x_2 (s_1 d_3 y_3 - s_2 d_3 y_3 + y_3)$
9	$\partial_4 [C_{(3,2)(0)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$s_2 x_2 (s_2 d_3 y_3 - s_1 d_3 y_3 + s_0 d_3 y_3 - y_3)$
10	$\partial_4 [C_{(3,1)(2)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$(s_1 x_2 - s_2 x_2)(s_2 d_3 y_3 - y_3)$
11	$\partial_4 [C_{(3,1)(0)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$(s_1 x_2 - s_2 x_2)(s_2 d_3 y_3 - s_1 d_3 y_3 + s_0 d_3 y_3 - y_3)$
12	$\partial_4 [C_{(3,0)(2)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$(s_0 x_2 - s_1 x_2 + s_2 x_2)(s_2 d_3 y_3 - y_3)$
13	$\partial_4 [C_{(3,0)(1)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$(s_0 x_2 - s_1 x_2 + s_2 x_2)(s_1 d_3 y_3 - s_2 d_3 y_3 + y_3)$
14	$\partial_4 [C_{(2,1)(3)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$(s_2 s_1 d_2 x_2 - s_1 x_2) y_3$
15	$\partial_4 [C_{(2,1)(0)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$(s_2 s_1 d_2 x_2 - s_1 x_2)(s_2 d_3 y_3 - s_1 d_3 y_3 + s_0 d_3 y_3 - y_3)$
16	$\partial_4 [C_{(2,0)(3)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$(s_2 s_0 d_2 x_2 - s_0 x_2 + s_1 x_2 - s_1 s_1 d_2 x_2) y_3$
17	$\partial_4 [C_{(2,0)(1)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$(s_2 s_0 d_2 x_2 - s_0 x_2 + s_1 x_2 - s_2 s_1 d_2 x_2)$
			$(s_1 d_3 y_3 - s_2 d_3 y_3 + y_3)$
18	$\partial_4 [C_{(1,0)(3)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$(s_2 s_0 d_2 x_2 - s_0 x_2 - s_1 s_0 d_0 x_2) y_3$
19	$\partial_4 [C_{(1,0)(2)}(x_2 \otimes y_3)]$	=	$(s_1 s_0 d_2 x_2 - s_2 s_0 d_2 x_2 + s_0 x_2)(s_2 d_3 y_3 - y_3)$
20	$\partial_4 [C_{(3)(2)}(x_3 \otimes y_3)]$	=	$x_3 (s_2 d_3 y_3 - y_3)$
21	$\partial_4 [C_{(3)(1)}(x_3 \otimes y_3)]$	=	$x_3 (s_1 d_3 y_3 - s_2 d_3 y_3 + y_3)$
22	$\partial_4 [C_{(3)(0)}(x_3 \otimes y_3)]$	=	$x_3 (s_2 d_3 y_3 - s_1 d_3 y_3 + s_0 d_3 y_3 - y_3)$
23	$\partial_4 [C_{(2)(1)}(x_3 \otimes y_3)]$	=	$(s_2 d_3 x_3 - x_3)(s_1 d_3 y_3 - s_2 d_3 y_3 + y_3)$
24	$\partial_4 [C_{(2)(0)}(x_3 \otimes y_3)]$	=	$(s_2 d_3 x_3 - x_3)(s_2 d_3 y_3 - s_1 d_3 y_3 + s_0 d_3 y_3 - y_3)$
25	$\partial_4 [C_{(1)(0)}(x_3 \otimes y_3)]$	=	$(s_1 d_3 x_3 - s_2 d_3 x_3 + x_3)(s_2 d_3 y_3 - s_1 d_3 y_3 + s_0 d_3 y_3 - y_3)$

1.5. Profinite Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde profinite çaprazlanmış modül tanımı ve Korkes F. ve Porter T. [14] tarafından verilen profinite çaprazlanmış modüllerinin temel özellikleri tanıtılacaktır.

Tanım 1.1.15 k profinite değişmeli halka ve M ve R profinite değişmeli cebirler olmak üzere

$$\begin{aligned} \therefore R \times M &\rightarrow M \\ (r, m) &\mapsto r \cdot m \end{aligned}$$

fonksiyonu her $k \in k, m, m' \in M, r, r' \in R$ için;

1. $k(r \cdot m) = (kr) \cdot m = r \cdot (km),$
2. $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m',$
3. $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m,$
4. $r \cdot (mm') = (r \cdot m)m' = m(r \cdot m'),$
5. $(rr') \cdot m = r \cdot (r' \cdot m),$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona profinite değişmeli etki denir.

Bu tez boyunca $r \in R$ nin $m \in M$ üzerine etkisi $r \cdot m$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.1.16 R birimli bir profinite k - cebir ve C bir R - cebir olsun her $c \in C, r \in R$ için

$$\partial : C \rightarrow R,$$

R -cebir morfizmi

$$CM1) \partial(r \cdot c) = r\partial c$$

şartını sağlıyorsa (C, R, ∂) üçlüsüne **profinite ön-çaprazlanmış modül** denir.

Buna ek olarak her $c, c' \in C,$

$$CM 2) \partial c \cdot c' = cc'$$

ise (C, R, ∂) üçlüsüne bir **profinite çaprazlanmış R -modül** denir. Son şart **Peiffer özdeşliği** olarak adlandırılır. Bu şekildeki bir profinite çaprazlanmış modülü (C, R, ∂) ile göstereceğiz. Açık olarak, herhangi profinite çaprazlanmış modül bir profinite ön-çaprazlanmış modüldür.

Tanım 1.1.17 (C, R, ∂) den (C', R', ∂') ye profinite çaprazlanmış modüller olsun,

$$\theta : C \rightarrow C', \quad \psi : R \rightarrow R',$$

k -cebiri morfizmlerinin ikilisi

$$\theta(r \cdot c) = \psi(r) \cdot \theta(c) \text{ ve } \partial' \theta(c) = \psi \partial(c)$$

şartlarını sağlıyorsa (θ, ψ) morfizmlerine (C, R, ∂) ve (C', R', ∂') **profinite çaprazlanmış modülleri arasındaki morfizmler** denir. Burada, eğer $R = R'$ ise θ bir profinite çaprazlanmış R -modül morfizmi ve ψ birim morfizm denilecektir. Buradan $\mathcal{ProXMod}$ ile gösterilen profinite çaprazlanmış modüllerin kategorisini tanımlayabiliriz.

Örnek 1.1.1 I bir R , k -cebirinin herhangi bir kapalı ideali olsun. Bir

$$inc. : I \rightarrow R.$$

içine fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda $(I, R, inc.)$ bir profinite çaprazlanmış modüldür. Tersine herhangi bir profinite çaprazlanmış R -modül $\partial : C \rightarrow R$ verilsin.

$\partial C = I$ nın R de bir kapalı ideal olduğu kolayca gösterilebilir.

Aşağıdaki teorem Arvasi [20] te verilmiş daha sonra profinite hale uyarlanmış.

Teorem 1.1.5 E bir profinite simplisel cebir ve I, E nin bir profinite simplisel kapalı ideali olsun.

$$inc : I \rightarrow E$$

içine fonksiyonu yardımıyla

$$\partial : \pi_0(I) \rightarrow \pi_0(E)$$

fonksiyonu elde edilir ve E, I üzerine etkisi yardımıyla, $\pi_0(E)$ nin $\pi_0(I)$ üzerine etkisi elde edilir. Bu tanımlamalarla $(\pi_0(I), \pi_0(E), \partial)$ bir profinite çaprazlanmış modül olur.

1.6. Profinite k -Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Bu bölüm Akça [19] dan alınmıştır. Ayrıntılı bilgi Akça [19] da bulunabilir.

Tanım 1.1.18 k profinite değişmeli halka ve R birimli bir profinite cebir olsun.

$$\partial : C \rightarrow R$$

sürekli profinite cebir homomorfizmi ile

$$R \times C \rightarrow C$$

$$C \times R \rightarrow C$$

ve

$$(r, c) \mapsto r.c$$

$$(c, r) \mapsto c.r$$

R nin C üzerine sürekli etkisi ile birlikte her $c, c' \in C$ ve $r \in R$ için,

FÇM 1)

$$\partial(r.c) = r\partial(c)$$

$$\partial(c.r) = \partial(c)r$$

FÇM 2)

$$\partial c.c' = cc'$$

$$c.\partial c' = cc'$$

şartları sağlanıyor ise, R üzerinde C profinite cebirine bir **çaprazlanmış modül** denir ve (C, R, ∂) ile gösterilir.

(C, R, ∂) ile (C', R', ∂') , profinite cebirler üzerinde iki çaprazlanmış modül olsun. Buna göre,

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\partial} & R \\ \theta \downarrow & & \downarrow \psi \\ C' & \xrightarrow{\partial'} & R' \end{array}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\partial' \theta(c) = \psi \partial(c)$$

ve

$$\theta(r.c) = \psi(r).\theta(c)$$

$$\theta(c.r) = \theta(c).\psi(r)$$

olacak şekilde $\theta : C \rightarrow C', \psi : R \rightarrow R'$ sürekli cebir homomorfizmleri varsa

$$(\theta, \psi) : (C, R, \partial) \rightarrow (C', R', \partial')$$

morfizmine, **profinite cebirler üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm** denir. Profinite cebirler üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüller üe aralarındaki sürekli cebir homomorfizmleri, $ProAlgCMod$ ile göstereceğimiz bir kategori oluşturur.

$R = R'$ ve ψ birim dönüşüm ise, θ sürekli cebir homomorfizmi olduğundan

$$\theta(r.c) = r\theta(c)$$

dir ve

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\theta} & R \\ & \searrow \theta & \nearrow \theta' \\ & C' & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olduğundan, yani

$$\partial' \theta(c) = \partial(c)$$

sağlandığından, θ çaprazlanmış modül morfizmidir. Böylece R seçilmiş bir profinite cebir olmak üzere, $ProAlgCMod$ kategorisinin, $ProAlgCMod/R$ ile göstereceğimiz altkategorisi elde edilir.

1.6.1. Profinite cebirler üzerinde çaprazlanmış modül örnekleri

1. R bir profinite *profinite cebir* ve I , R nin kapalı ideali olsun.

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{C}} : I &\rightarrow R \\ i &\mapsto i \end{aligned}$$

içine (inclusion) dönüşümünü düşünelim. Bu dönüşüm sürekli. R nin I üzerine sürekli etkisi

$$R \times I \rightarrow I \qquad I \times R \rightarrow I$$

ve

$$(r, i) \mapsto r.i = ri \qquad (i, r) \mapsto i.r = ir$$

şeklinde çarpım işlemi ile verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları

ÇM 1)

$$\partial(r.i) = \partial(ri) = ri = r\partial(i)$$

$$\partial(i.r) = \partial(ir) = ir = \partial(i)r$$

ÇM2)

$$\partial i.i' = i.i' = ii'$$

$$i.\partial i' = i.i' = ii'$$

şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla $(I, R, i\zeta)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

2. M , herhangi bir profinite R – bimodül olsun.

$$M \times M \rightarrow M$$

$$(m_1, m_2) \mapsto m_1 m_2 = 0$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir profinite R — cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$0 : M \rightarrow R$$

$$x \mapsto 0(x) = 0$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi sürekli olup bu,

$$R \times M \rightarrow M$$

$$M \times R \rightarrow M$$

ve

$$(r, m) \mapsto r.m = rm$$

$$(m, r) \mapsto m.r = mr$$

sürekli etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü

ÇM 1)

$$0(r.m) = 0(rm) = 0 = r0 = r0(m)$$

$$0(m.r) = 0(mr) = 0 = 0r = 0(m)r$$

ÇM 2)

$$0m.m' = 0.m' = 0m' = 0 = mm'$$

$$m.0m' = m.0 = m0 = 0 = mm'$$

biçiminde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

3. L ve M birer profinite R — modül ve

$$\theta : L \rightarrow M$$

sürekli R — modül homomorfizmi olsun. $R \rtimes M$ yarı direkt çarpımı

$$(r.m)(r', m') = (rr', rm' + r'm)$$

şeklinde bilinen çarpım ile ifade edilir. Bu çarpımın sürekli olduğu açıktır. Bu durumda L , her $l, l' \in L$ için

$$ll' = 0$$

şeklinde sıfır çarpımı ve

$$\begin{aligned} R \rtimes M &\rightarrow R \\ (r, m) &\mapsto r \end{aligned}$$

izdüşüm (projection) yardımıyla bir profinite $R \rtimes M$ —modül yapısı verildiğinde

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} : L &\rightarrow R \rtimes M \\ l &\mapsto (0, \theta(l)) \end{aligned}$$

sürekli homomorfizmi bir çaprazlanmış $R \rtimes M$ —modül yapısı oluşturur. Gerçekten,

$$(R \rtimes M) \rtimes L \rightarrow L \quad L \rtimes (R \rtimes M) \rightarrow L$$

ve

$$\begin{aligned} ((r, m), l) &\mapsto (r, m).l = rl & (l, (r, m), l) &\mapsto l.(r, m).l = rl \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı sürekli etkisi ile birlikte $\tilde{\theta} : L \rightarrow R \rtimes M$ sürekli homomorfizmi

ÇM 1)

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}((r, m), l) &= \tilde{\theta}(rl) & \tilde{\theta}(l, (r, m)) &= \tilde{\theta}(lr) \\ &= (0, \theta(rl)) & &= (0, \theta(lr)) \\ &= (0, r\theta(l)) & &= (0, \theta(l)r) \\ &= (r0, (r\theta(l) + 0m)) & &= (0r, (\theta(l)r + 0m)) \\ &= (r, m)(0, \theta(l)) & &= (0, \theta(l))(r, m) \\ &= (r, m)\tilde{0}, (l) & &= \tilde{0}(l)(r, m) \end{aligned}$$

ÇM 2)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}.l' &= (0, \theta(l)).l' & l.\tilde{\theta}l' &= l.(0\theta(l')) \\
 &= 0l' & &= l0 \\
 &= 0' & &= 0 \\
 &= ll' & &= ll'
 \end{aligned}$$

biçiminde çaprazlanmış modül aksiyomlarını sağlar.

4. A (asosyatif) profinite k -cebiri olsun. A dan A ya sürekli k -lineer dönüşümlerin (γ, δ) ikilisi için,

$$\gamma(\alpha.\alpha') = \gamma(\alpha).\alpha' \quad (1)$$

$$\delta(\alpha.\alpha') = \alpha.\delta(\alpha') \quad (2)$$

$$\alpha.\gamma(\alpha') = \delta(\alpha).\alpha' \quad (3)$$

koşulları sağlanıyorsa, (γ, δ) ya A üzerinde sürekli bileşik çarpım (bimultiplication) denir. [26]. A üzerindeki bütün sürekli bileşik çarpımların kümesini $Bim(A)$ ile göstereceğiz. Yani,

$$Bim(A) = \left\{ (\gamma, \delta) : A \xrightarrow[\delta]{\gamma} A \text{ sürekli } k\text{-lineer dönüşüm} \right\}$$

dir. $Bim(A)$, profinite dir. Ayrıca $Bim(A)$, k -modül yapısına [27] ve

$$(\gamma, \delta).(\gamma', \delta') = (\gamma \circ \gamma', \delta \circ \delta')$$

çarpımına sahiptir. Böylece $Bim(A)$ profinite k -cebiri yapılaşma sahiptir. $Bim(A)$ nın A üzerine sürekli sağ ve sol etkisi

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 : Bim(A) \times A &\rightarrow A \\
 ((\gamma, \delta), \alpha) &\mapsto \gamma(\alpha) \\
 \varepsilon_2 : Bim(A) \times A &\rightarrow A \\
 (\alpha, (\gamma, \delta)) &\mapsto \delta(\alpha)
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa ve A dan $Bim(A)$ ya sürekli cebir homomorfizmi

$$\gamma_\alpha(x) = \alpha x \text{ ve } \delta_\alpha(x) = x\alpha$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 \mu : A &\rightarrow Bim(A) \\
 \alpha &\mapsto \mu(\alpha) = (\gamma_\alpha, \delta_\alpha)
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa $(A, Bim(A), \mu)$ çaprazlanmış modüldür.

ÇM 1) $(\gamma, \delta)_1(\alpha'_2(\gamma'', \delta'')) = ((\gamma, \delta)_1\alpha')_2(\gamma''\delta''')$ eşitliğinin doğru olduğunu göstermeliyiz. Bunun için eşitliğin sol tarafındaki ifadeyi keyfi bir $x \in A$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
 & x.((\gamma, \delta)_1(\alpha'_2(\gamma'', \delta''))) \\
 &= x.(\gamma(\delta''(\alpha')))) \\
 &= \delta(x).\delta''(\alpha') & (3) den, \\
 &= \delta''(\delta(x).\alpha') & (2) den, \\
 &= \delta''(x.\gamma(\alpha')) & (3) den, \\
 &= x.\delta''(\gamma(\alpha')) & (2) den, \\
 &= x.((\gamma, \delta)_1\alpha')_2(\gamma''\delta''').
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu, herhangi bir x için sağlandığından her zaman sağlanır.

ÇM 2) Burada ise $\mu((\gamma, \delta)_1\alpha) = (\gamma, \delta).\mu(\alpha)$ eşitliğinin doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$\mu((\gamma, \delta)_1\alpha) = (\mu(\gamma(\alpha))) = (\gamma_{\gamma(\alpha)}, \delta_{\gamma(\alpha)})$$

ve

$$(\gamma, \delta).\mu(\alpha) = (\gamma \circ \gamma_\alpha, \delta_\alpha \circ \delta)$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\gamma(\alpha)}(x) &= \gamma(a).x \\
 &= \gamma(ax) & (1) den \\
 &= \gamma(\gamma_\alpha(x))
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \delta_{\gamma(\alpha)}(x) &= x.\gamma(a) \\
 &= \delta(x).\alpha & (3) den \\
 &= \delta_\alpha(\delta(x))
 \end{aligned}$$

olup, $\gamma_{\gamma(\alpha)} = \gamma \circ \gamma_\alpha$ ve $\delta_{\gamma(\alpha)} = \delta_\alpha \circ \delta$ elde edilir.

Benzer şekilde $\mu(\alpha_2(\gamma, \delta)) = \mu(\alpha).(\gamma, \delta)$ olduğu da kolayca gösterilebilir.

Buna göre $(A, Bim(A), \mu)$ çaprazlanmış modüldür.

Önerme 1.1.2 C , B ve R profinite k -cebirlere olmak üzere (C, R, ∂) ve (B, R, ∂') iki çaprazlanmış modül ve

$$(\psi, Id) : (C, R, \partial) \rightarrow (B, R, \partial')$$

$ProAlgCMod/R$ kategorisinde bir sürekli homomorfizm olsun. Bu durumda, B , C üzerine ∂' vasıtasıyla sürekli olarak etki etmek üzere, (C, B, ψ) bir çaprazlanmış modüldür.

İspat:

$$(\psi, Id) : (C, R, \partial) \rightarrow (B, R, \partial')$$

çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan

$$\psi : C \rightarrow B$$

$$Id : R \rightarrow R$$

ve

$$c \mapsto \psi(c)$$

$$r \mapsto r$$

sürekli cebir homomorfizmleri için,

$$\psi(r.c) = Id(r).\psi(c) = r.\psi(c)$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca, $c \in C$ ve $b \in B$ için, B nin C üzerine sürekli etkisi

$$B \times C \rightarrow C$$

$$(b, c) \mapsto b.c = \partial'(b).c$$

şeklindedir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \psi(b.c) &= \psi(\partial'(b), c) \\ &= \partial'(b).\psi(c) \\ &= b\psi(c) \end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomlarından ilki sağlanır. Ayrıca,

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\partial} & R \\ \psi \downarrow & & \downarrow Id \\ B & \xrightarrow{\partial'} & R \end{array}$$

değişmeli diyagramı gereği

$$\partial'\psi(c) = Id(\partial(c)) = \partial(c)$$

elde edilir. Bu eşitlikten ve (C, R, ∂) nın çaprazlanmış modül olmasından dolayı,

$$\begin{aligned}\psi c.c' &= \partial'\psi(c).c \\ &= \partial c.c' \\ &= cc'\end{aligned}$$

elde edilir ki bu, çaprazlanmış modül aksiyomlarından ikincisinin sağlandığını gösterir.

1.6.2 Bazı elementer özellikler

C ve R iki profinite *profinite cebir* ve $\partial: C \rightarrow R$ sürekli profinite *profinite cebir* homomorfizmi olmak üzere, (C, R, ∂) profinite çaprazlanmış modülünü ele alalım, ∂ nin çekirdeği ve görüntüsü ile ilgili temel özellikleri inceleyeceğiz. Ayrıca bunlardan yararlanarak, oluşturulan modül yapılarını ve bazı cebirsel sonuçları vereceğiz.

2. PROFİNİTE 3-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

2.1. Giriş

Çaprazlanmış modül kavramı J.H.C.Whitehead (1949) [2] tarafından “*Combinatorial Homotopy Theory*” adlı çalışmasında ve bağlantılı homotopi grupların cebirsel yapılarını inceleyen çalışmasında tanımlanmıştır.

Bugün de çaprazlanmış modüller temel cebirsel yapılardan biri olarak kabul edilmektedir. Whitehead çaprazlanmış modülleri kullanarak 3-tiplerin bir tanımlamasını vermiş ve bu tanımlama homotopi 2-tipler için bir model olmuştur. Homotopi sınıfı 3 olan cebirsel modeller için 3-çaprazlanmış modül kavramı Kuzpınarı [15] de yapılmıştır. Kuzpınarı bu yapıyı oluştururken Conduche’nin [3], 2-çaprazlanmış modülü tanımlarken izlediği yol izlenmiş, Carrasco’nun [18] tanımladığı hiperçaprazlanmış kompleksler baz alınmış ve özellikle Peiffer üreteç elemanları kullanmıştır. Bu bölümle ilgili bilgiler genellikle Whitead [2], Conduche [3], Carrasco [18], Porter [37], Ellis [29], Korkes ve Porter [14], Akça [19], Kuzpınarı [15], Arvasi [28] referanslarından alınmıştır.

Bu bölümde verilen Tanım 2.1.3, Tanım 2.1.4, Önerme 2.1.1, Örnek 2.1.1, Örnek 2.1.2, Örnek 2.1.3, Teorem 2.1.1, Önerme 2.1.2 nin orijinali Arvasi [28] tarafından cebir için tanımlanmış olup profinite cebir haline sonradan dönüştürülmüş. Profinite haline dönüştürülmesiyle ilgili kaynak olarak Korkes and Porter [14] verilebilir. Tanım 2.1.5 in orijinali ise Ellis [29] tarafından gruplar için tanımlanmış daha sonradan profinite cebir dönüştürülmüş. Profinite haline dönüştürülmesiyle ilgili kaynak olarak Korkes and Porter [14] verilebilir.

Biz bu bölümde Kuzpınarı [15] den profinite 3-çaprazlanmış modül kavramını uyarlıyacağız.

2.2. Profinite 3-Çaprazlanmış Modüllerin Elde Edilişi

Kuzpınarı [15] de 3- çaprazlanmış modülleri elde edişini vermiştir. Biz burada profinite cebirlere uyarlanışını vereceğiz.

E bir profinite simplisel cebir ve NE bu cebirin Moore kompleksi olsun. Burada $P(4)$ un elemanlarının tamamının ∂_4 altındaki görüntüsü alınarak elde edilen üreteçler kullanılır ve verilen elemanların her birinin ∂_4 altındaki görüntüsü 0_{E_3} tür. Daha açık bir ifade ile $I \cup J = [3], I = [3] - \{\alpha\}, J = [3] - \{\beta\}$ ve $(\alpha, \beta) \in P(4)$ olmak üzere $\partial_4(C_{\alpha\beta}) = \{0_{E_3}\}$ tür. $NE_0 = C_0, NE_1 = C_1, NE_2 = C_2, NE_3 = C_3$ olsun.

C_0 ın C_1, C_2, C_3 üzerine, C_1 in C_2 ve C_3 üzerine, C_2 nin C_3 üzerine sürekli etkisini aşağıdaki biçimde tanımlayalım $x_0 \in C_0, x_1 \in C_1, y_2, x_2 \in C_2, y_3, x_3 \in C_3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1^0 &= s_0 x_0 x_1 \\ x_2^0 &= s_1 s_0 x_0 x_2 \\ x_3^0 &= s_2 s_1 s_0 x_0 x_3 \\ x_2^1 &= s_1 x_1 x_2 \\ x_3^1 &= s_2 s_1 x_1 x_3 \\ x_3^{x_2} &= s_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

dir. Burada çizelge 1 gereğince

$$(s_2 s_1 s_0 \partial_1 x_1 - s_1 s_0 x_1) y_3 = 0$$

olduğundan

$$\partial_1 x_1 \cdot y_3 = s_1 s_0 x_1 y_3$$

elde edilir.

$$(s_2 s_1 \partial_2 x_2 - s_1 x_2) y_3 = 0$$

olduğundan

$$\partial_2 x_1 \cdot x_3 = s_1 x_2 y_3$$

ve

$$x_3 (s_2 \partial_3 y_3 - y_3) = 0$$

olduğundan ve değişme özelliği kullanılarak

$$\partial_3 x_3 \cdot y_3 = x_3 y_3$$

olur. Profinite simplisel yapının özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \partial_3 (x_2 \cdot x_3) &= \partial_3 (s_2 x_2 x_3) \\ &= \partial_3 (s_2 x_2) \partial_3 (x_3) \\ &= x_2 \partial_3 (x_3) \end{aligned}$$

bulunur.

Not 2.1.1. Burada $\partial_3 (x_2 \cdot x_3) = x_2 \partial_3 x_3$ ve $\partial_3 x_3 \cdot y_3 = x_3 y_3$ olduğundan

$$\partial_3 : C_3 \rightarrow C_2$$

bir profinite çaprazlanmış modüldür. [15] den uyarlanmıştır.

$x_1, y_1 \in C_1, x_2, y_2 \in C_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \{\otimes\}_{(1)(0)}^2 &: C_1 \otimes C_1 \rightarrow C_2 \\ &\{x_1 \otimes y_1\}_{(1)(0)} = s_1 x_1 (s_0 y_1 - s_1 y_1) \\ \{\otimes\}_{(1,0)(2)}^3 &: C_1 \otimes C_2 \rightarrow C_3 \\ &\{x_1 \otimes y_2\}_{(1,0)(2)} = (s_1 s_0 x_1 - s_2 s_0 x_1) s_2 y_2 \\ \{\otimes\}_{(2,0)(1)}^3 &: C_1 \otimes C_2 \rightarrow C_3 \\ &\{x_1 \otimes y_2\}_{(2,0)(1)} = (s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1) (s_1 y_2 - s_2 y_2) \\ \{\otimes\}_{(2,1)(0)}^3 &: C_1 \otimes C_2 \rightarrow C_3 \\ &\{x_1 \otimes y_2\}_{(2,1)(0)} = s_2 s_1 x_1 (s_0 y_2 - s_1 y_2 + s_2 y_2) \\ \{\otimes\}_{(0)(1)}^3 &: C_2 \otimes C_2 \rightarrow C_3 \\ &\{x_2 \otimes y_2\}_{(0)(1)} = (s_0 x_2 - s_1 x_2) s_1 y_2 + s_2 (x_2 y_2) \\ \{\otimes\}_{(2)(0)}^3 &: C_2 \otimes C_2 \rightarrow C_3 \\ &\{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(0)} = s_2 x_2 s_0 y_2 \\ \{\otimes\}_{(2)(1)}^3 &: C_2 \otimes C_2 \rightarrow C_3 \\ &\{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(1)} = s_2 x_2 (s_1 y_2 - s_2 y_2) \end{aligned}$$

Kuzpınarı [15] de yukarıdaki Peiffer dönüşümlerini ele alarak etki tanımları ve Çizelge 1 deki üreteçleri kullanarak bazı sonuçlar elde etmiştir. Kuzpınarı [15] de Conduché'nin izlediği yolu takip ederek 3- çaprazlanmış modülün tanımını yapmıştır. Biz bunu profinite 3- çaprazlanmış modül tanımına uyarlayacağız.

Tanım 2.1.1 $C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$ bir profinite k -cebiri kompleks olsun.

$$\partial_3 : C_3 \rightarrow C_2$$

bir profinite çaprazlanmış modül olmak üzere herbiri C_0 -cebiri ve C_1 -cebiri olan

$$\begin{aligned} \{\otimes\}_{(0)(1),(2)(0),(2)(1)}^3 : C_2 \otimes C_2 &\rightarrow C_3, \{\otimes\}_{(1,0)(2),(2,0)(1),(2,1)(0)}^3 : C_1 \otimes C_2 \rightarrow C_3 \\ \{\otimes\}_{(1)(0)}^2 : C_1 \otimes C_1 &\rightarrow C_2 \end{aligned}$$

dönüşümleri

$$3\text{CM1)} \partial_2 \{x_1 \otimes y_1\}_{(1)(0)}^2 = x_1^{\partial_1 y_1} - x_1 y_1$$

$$3\text{CM2)} \{x_2 \otimes \partial_2 y_2\}_{(0)(2,1)}^3 = \{x_2 \otimes y_2\}_{(0)(1)}^3 + \{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(1)}^3$$

$$3\text{CM3)} \partial_3 \{x_2 \otimes y_2\}_{(1)(0)}^3 = \{\partial_2 x_2 \otimes \partial_2 y_2\}_{(1)(0)}^2 + x_2 y_2$$

$$3\text{CM4)} \{x_1 \otimes \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)}^3 = \{x_1 \otimes \partial_3 y_3\}_{(2,1)(0)}^3 + \{x_1 \otimes \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)}^3 - \partial_1 x_1 y_3$$

$$3\text{CM5)} \{\partial_2 x_2 \otimes y_2\}_{(2,0)(1)}^3 = -\{x_2 \otimes y_2\}_{(0)(2)}^3$$

$$3\text{CM6)} \{\partial_3 x_3 \otimes \partial_3 y_3\}_{(0)(1)}^3 = x_3 y_3$$

$$3\text{CM7)} \{\partial_2 x_2 \otimes \partial_3 y_3\}_{(2,1)(0)}^3 = \partial_2 x_2 \cdot y_3$$

$$3\text{CM8)} \{\partial_2 x_2 \otimes \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)}^3 = -\{x_2 \otimes \partial_3 y_3\}_{(0)(2)}^3$$

$$3\text{CM9)} \{\partial_2 x_2 \otimes \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)}^3 = \partial_2 x_2 y_3 - \{x_2 \otimes \partial_3 y_3\}_{(0)(2)}^3$$

$$3\text{CM10)} \{x_2 \otimes y_2 y_2'\}_{(0)(1)}^3 = \{x_2 \otimes \partial_2 (y_2 y_2')\}_{(0)(2,1)}^3 - \{x_2 \otimes (y_2 y_2')\}_{(2)(1)}^3$$

$$3\text{CM11)} \{x_2 \otimes y_2 y_2'\}_{(2)(1)}^3 = \{x_2 \otimes \partial_2 (y_2 y_2')\}_{(1)(2,0)}^3 + \{x_2 \otimes y_2 y_2'\}_{(2)(0)}^3 - \{x_2 \otimes y_2 y_2'\}_{(1)(0)}^3$$

$$3\text{CM12)} \{x_2 \otimes y_2 y_2'\}_{(2)(0)}^3 = -\{x_2 \otimes \partial_2 (y_2 y_2')\}_{(2,1)(0)}^3$$

$$3\text{CM13)} \{x_2 \otimes \partial_3 y_3\}_{(2)(1)}^3 = x_2 \cdot y_3$$

$$3\text{CM14)} \{\partial_3 x_3 \otimes y_2\}_{(2)(1)}^3 = x_3^{\partial_2 y_2} - x_3 \cdot y_2$$

$$3\text{CM15)} \{\partial_3 x_3 \otimes y_2\}_{(0)(1)}^3 = y_2 \cdot x_3$$

$$3\text{CM16)} \{\partial_3 x_3 \otimes y_2\}_{(2)(0)}^3 = 0$$

$$3\text{CM17)} \partial_3 \{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(0)}^3 = -\partial_3 \{\partial_2 x_2 \otimes y_2\}_{(1,0)(2)}^3$$

$$3\text{CM18)} \partial_3 \{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(1)}^3 = x_2^{\partial_2 y_2} - x_2 y_2$$

$$3CM19) \partial_3 \{x_1 \otimes y_2\}_{(2,0)(1)}^3 = \partial_3 \{x_1 \otimes y_2\}_{(1,0)(2)}^3 + \{x_1 \otimes y_2\}_{(0)(1)}^2 - {}^{\partial_1 x_1} y_2 + {}^{x_1} y_2$$

$$3CM20) \partial_3 \{x_1 \otimes y_2\}_{(2,1)(0)}^3 = \{x_1 \otimes \partial_2 y_2\}_{(1)(0)}^2 + {}^{x_1} y_2$$

şartlarını sağlıyorsa $(C_3, C_2, C_2, \partial_3, \partial_2, \partial_1)$ yapısına bir profinite 3- çaprazlanmış modül denir.

Aşağıdaki tanımın orijinali Kuzpınarı [15] de verilmişti. Biz burada profinite cebirlere uyarlayacağız.

Tanım 2.1.2 $(C_3, C_2, C_2, C_1, C_0, \partial_3, \partial_2, \partial_1)$ ve $(C'_3, C'_2, C'_1, C'_0, \partial'_3, \partial'_2, \partial'_1)$ birer profinite 3- çaprazlanmış modül olmak üzere bu iki yapı arasındaki dönüşüm aşağıdaki biçimde resmedilebilir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \partial_3 & & \partial_2 & & \partial_1 \\
 & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow \\
 C_3 & \xrightarrow{\quad} & C_2 & \xrightarrow{\quad} & C_1 & \xrightarrow{\quad} & C_0 \\
 \downarrow f_3 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\
 C'_3 & \xrightarrow{\quad} & C'_2 & \xrightarrow{\quad} & C'_1 & \xrightarrow{\quad} & C'_0 \\
 & & \partial'_3 & & \partial'_2 & & \partial'_1
 \end{array}$$

ve sürekli cebir homomorfizmleri aşağıdaki şartları sağlamalıdır;

Her $c_3 \in C_3, c_2 \in C_2, c_1 \in C_1, c_0 \in C_0$ için,

$$f_1({}^{co}c_1) = (fo(co)) f_1(c_1), f_2({}^{co}c_2) = (fo(co)) f_2(c_2), f_3({}^{co}c_3) = (fo(co)) f_3(c_3)$$

$$\begin{aligned}
 & \{\otimes\}_{(0)(2)}^3, \{\otimes\}_{(2)(1)}^3, \{\otimes\}_{(1)(0)}^3 \text{ için} \\
 & \{\otimes\} f_2 \otimes f_2 = f_3 \{\otimes\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{\otimes\}_{(1,0)(2)}^3, \{\otimes\}_{(2,0)(1)}^3, \{\otimes\}_{(0)(2,1)}^3 \text{ için} \\
 & \{\otimes\} f_1 \otimes f_2 = f_3 \{\otimes\}
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 & \{\otimes\}_{(1)(2)}^2 \text{ için} \\
 & \{\otimes\} f_1 \otimes f_1 = f_2 \{\otimes\}
 \end{aligned}$$

olur. Böylece profinite 3- çaprazlanmış modüller kategorisini tanımlanmış olur. Bu kategoriyi $\mathfrak{ProXMod}$ ile göstereceğiz.

2.2.1. Profinite çaprazlanmış n -küpler ve profinite simplisel cebirler

Değişmeli cebirler, Jordan Cebirler ve Lie cebirleri gibi cebirsel yapılar üzerinde çaprazlanmış n -küpler, Ellis tarafından [29] de tanımlanmıştır. Ayrıca Ellis [30] da konu ile ilgili referans verilebilir.

Tanım 2.1.3 $A \subseteq \langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$ olmak üzere M_A , profinite değişmeli cebirlerin bir ailesi, $i \in \langle n \rangle$ olmak üzere

$$\mu_i : M_A \rightarrow M_{A-\{i\}}$$

dönüşümleri sürekli cebir homomorfizmleri olsun. $A, B \subseteq \langle n \rangle$ olmak üzere sürekli

$$h : M_A \times M_B \rightarrow M_{A \cup B}$$

dönüşümleri her $k \in \mathbf{k}$, $a, a' \in M_A$, $b, b' \in M_B$, $c \in M_C$, $i, j \in \langle n \rangle$ ve $A \subseteq B$ olmak üzere

- 1) $\mu_i a = a$, $i \notin A$
- 2) $\mu_i \mu_j a = \mu_j \mu_i a$
- 3) $\mu_i h(a, b) = h(\mu_i a, \mu_i b)$
- 4) $h(a, b) = h(\mu_i a, b) = h(a, \mu_i b)$, $i \in A \cap B$
- 5) $h(a, a') = aa'$
- 6) $h(a, b) = h(b, a)$
- 7) $h(a + a', b) = h(a, b) + h(a', b)$
- 8) $h(a, b + b') = h(a, b) + h(a, b')$
- 9) $k.h(a, b) = h(k.a, b) + h(a, k.b)$
- 10) $h(h(a, b), c) = h(a, h(b, c)) = h(b, h(a, c))$

h dönüşümleri ve μ_i sürekli grup homomorfizmleri ile birlikte $\{M_A, h, \mu_i\}$ yapısına bir **profinite çaprazlanmış n -küp** denir.

$A \subseteq \langle n \rangle$ için

$$f_A : M_A \rightarrow M_A'$$

cebir homomorfizmlerinin ailesi μ_i i ve h -dönüşümleri ile birleşmeli ise bu aileye M_A ve M'_A profinite çaprazlanmış n -küpleri arasında bir dönüşüm denir. Böylece $\mathfrak{Cts}^n$ ile göstereceğimiz **profinite çaprazlanmış n -küpler kategorisi** tanımlanmış olur.[14]

Tanım 2.1.4 R bir profinite simplisel cebir ve $I_1, \dots, I_n$, bu cebirin kapalı idealleri olsun.

$A \subseteq \langle n \rangle$ olmak üzere

$$M_A = \bigcap \{I_i : i \in A\} \text{ ve } M_\emptyset = R$$

olsun. Bu durumda $i \in \langle n \rangle$ ise M_A , $M_{A-\{i\}}$ nin kapalı idealidir.

$$\mu_i : M_A \rightarrow M_{A-\{i\}}$$

dönüşümü içine dönüşüm olsun. $A, B \subseteq \langle n \rangle$ ise $a \in M_A$, $b \in M_B$ için $M_A M_B \subseteq M_A \cap M_B$ olacak şekilde fonksiyonu verilsin. h -dönüşümünü

$$\begin{aligned} h : M_A \times M_B &\rightarrow M_{A \cup B} \\ (a, b) &\mapsto a, b \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu tanımlamalar doğrultusunda

$$\{M_A : A \subseteq \langle n \rangle, \mu_i, h\}$$

yapısı bir profinite çaprazlanmış n -küptür. Bu yapı $(R; I_1, \dots, I_n)$ profinite değişmeli cebirlerin $(n+1)$ kapalı idealleri tarafından üretilen **profinite içirme çaprazlanmış n -küp** olarak adlandırılır [14].

Önerme 2.1.1 $(E; I_1, \dots, I_n)$, bir profinite simplisel $(n+1)$ kapalı ideal ve $A \subseteq \langle n \rangle$ için

$$M_A = \pi_0 \left(\bigcap_{i \in A} I_i \right)$$

olsun.

$$\mu_i : M_A \rightarrow M_{A-\{i\}}$$

sürekli homomorfizmleri ve h -dönüşümlerini yukarıda olduğu gibi tanımlayalım. Böylece

$$\{M_A : A \subseteq \langle n \rangle, \mu_i, h\}$$

bir profinite çaprazlanmış n -küptür [14].

Aşağıdaki iki örnek grup durumu için [28] de verilmiştir.

Örnek 2.1.1 $n = 1$ için profinite çaprazlanmış 1-küp aynı zamanda bir profinite çaprazlanmış modüldür [14].

Örnek 2.1.2 $n = 2$ için bir profinite çaprazlanmış kare elde edilir:

$$\begin{array}{ccc} M_{\langle 2 \rangle} & \xrightarrow{\mu_{\{2\}}} & M_{\{1\}} \\ \mu_{\{1\}} \downarrow & & \downarrow \mu_1 \\ M_{\{2\}} & \xrightarrow{\mu_2} & M_\emptyset \end{array}$$

Her i için μ_i bir profinite çaprazlanmış modüldür, dolayısıyla $\mu_1 \mu_2$ profinite çaprazlanmış modüldür.

Tüm etkiler ve

$$h : M_{\{1\}} \times M_{\{2\}} \rightarrow M_{\langle 2 \rangle}$$

fonksiyonu h -dönüşümü yardımıyla elde edilir. μ_2 veya μ_1 dönüşümü bir profinite çaprazlanmış modüldür. Gerçekten bir profinite çaprazlanmış kare, profinite çaprazlanmış modüller kategorisinde bir profinite çaprazlanmış modül olarak düşünülebilir [14].

Aşağıdaki örneğin orijinali Kuzpınarı [15] de verilmişti. Burada profinite cebirlere uyarlanacaktır.

Örnek 2.1.3 E bir profinite simplisel cebir olsun. Aşağıdaki diagram bir profinite çaprazlanmış karedir.

$$\begin{array}{ccc}
NE_2 / \partial NE_3 & \xrightarrow{\delta} & NE_1 \\
\delta' \downarrow & & \downarrow \partial' \\
\overline{NE_1} & \xrightarrow{\partial} & E_1
\end{array}$$

Burada $NE_1 = \text{\textit{Çek}}d_0^1$ ve $\overline{NE_1} = \text{\textit{Çek}}d_1^1$ dir.

E_1 in $NE_2 / \partial_3 NE_3$, $\overline{NE_1}$ ve NE_1 üzerine sürekli etkisi olduğundan $\overline{NE_1}$ nin $NE_2 / \partial_3 NE_3$ ve NE_1 üzerine ∂ yardımıyla, ve NE_1 in $NE_2 / \partial_3 NE_3$ ve $\overline{NE_1}$ üzerine ∂' yardımıyla sürekli etkisi vardır. ∂ ve ∂' içine dönüşümler olduğundan tüm etkiler çarpım şeklinde verilebilir. h -dönüşümü bilineer olan

$$\begin{aligned}
NE_1 \times \overline{NE_1} &\rightarrow NE_2 / \partial_3 NE_3 \\
(x, \bar{y}) &\mapsto h(x, \bar{y}) = s_1 x (s_y - s_0 y) + \partial_3 NE_3
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümdür. Burada $\overline{NE_1}$ ve NE_1 arasında [20] de verilen Önerme 2.3.1 gereğince bire-bir, örten fonksiyon olduğundan $x, y \in NE_1$ dir. $y, \bar{y}$ nin bu fonksiyon altındaki görüntüsünü temsil etmektedir [14].

Teorem 2.1.1 E bir profinite simplisel cebir olsun, profinite çaprazlanmış n -küp $M(E, n)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

(i) $A \subseteq \langle n \rangle$ için

$$M(E, n)_A = \frac{\bigcap_{j \in A} \text{\textit{Çek}}d_{j-1}^n}{d_{n+1}^{n+1} \left(\text{\textit{Çek}}d_0^{n+1} \cap \left\{ \bigcap_{i \in A} \text{\textit{Çek}}d_j^{n+1} \right\} \right)}$$

$$(ii) \bigcap_{j \in A} \text{\textit{Çek}}d_{j-1}^n \rightarrow \bigcap_{j \in A \setminus \{i\}} \text{\textit{Çek}}d_{j-1}^n$$

kapsaması aşağıdaki morfizmi oluşturur

$$\mu_i : M(E, n)_A \rightarrow M(E, n)_{A \setminus \{i\}}$$

$$(iii) \quad A, B \subseteq \langle n \rangle \quad \text{için} \quad x \in \bigcap_{j \in A} \text{\textit{Çek}}d_{j-1}^n \quad \text{ve} \quad M(E, n)_A \quad \text{nın elemanları} \quad \bar{x}$$

üzere

$$h : M(E, n)_A \times M(E, n)_B \rightarrow M(E, n)_{A \cup B}$$

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{xy}$$

şeklinde tanımlı h - dönüşümü vardır [14].

Önerme 2.1.2 E bir profinite simplisel cebir olsun. Bu durumda

(i) $A \subseteq \langle n \rangle$ ve $A \neq \langle n \rangle$ için

$$M(E, n)_A \cong \bigcap_{i \in A} \text{Çek} d_{i-1}^{n-1}$$

özel olarak $M(E, n)_{\emptyset} \neq E_{n-1}$; tüm durumlarda izomorfizm d_n yardımıyla ortaya çıkar.

(ii) $A \neq \langle n \rangle$ ve $i \in \langle n \rangle$ için

$$\mu_i : M(E, n)_A \rightarrow M(E, n)_{A \setminus \{i\}}$$

dönüşümü bir kapalı ideal tarafından kapsanmaktadır,

(iii) $j \in \langle n \rangle$ için

$$\mu_j : M(E, n)_{\langle n \rangle} \rightarrow \bigcap_{i \neq j} \text{Çek} d_i^{n+1}$$

dönüşümü d_n yardımıyla oluşur [14].

Aşağıdaki örneğin orijinali Kuzpınarı [15] de verilmişti. Burada profinite cebirlere uyarlanacaktır.

Örnek 2.1.4 E bir profinite simplisel cebir ve

$$K = M(E, 3)_{\{1,2,3\}} \cong NE_3 / \partial_3 NE_3, \quad P = M(E, 3)_{\{1\}} \cong \text{Çek} d_0^2$$

$$L = M(E, 3)_{\{1,3\}} \cong \text{Çek} d_0^2 \bigcap \text{Çek} d_2^2, \quad Q = M(E, 3)_{\{2\}} \cong \text{Çek} d_1^2$$

$$M = M(E, 3)_{\{2,3\}} \cong \text{Çek} d_1^2 \bigcap \text{Çek} d_2^2, \quad R = M(E, 3)_{\{3\}} \cong \text{Çek} d_2^2$$

$$N = M(E, 3)_{\{1,2\}} \cong \text{Çek} d_0^2 \bigcap \text{Çek} d_1^2, \quad S = M(E, 3)_0 \cong E_2$$

olsun. K dan L ye tanımlı λ_L, λ_N ve λ_M dönüşümleri d_3^3 dönüşümünden elde edilen dönüşüm, $v_P, v_R, v_Q, \delta_1, \delta_2$ ve δ_3 dönüşümleri içine dönüşümler olmak üzere

$$h_1 : Q \times L \rightarrow K$$

$$\{x_2 \otimes y_2\}_1 \rightarrow (s_1 x_2 - s_0 x_2) = (s_1 y_2 - s_2 y_2) \partial_4 (NE_4)$$

$$h_2 : P \times M \rightarrow K$$

$$\{x_2 \otimes y_2\}_2 \rightarrow s_1 x_2 (s_0 y_2 - s_1 y_2 + s_2 y_2) \partial_4 (NE_4)$$

$$h_3 : N \times R \rightarrow K$$

$$\{x_2 \otimes y_2\}_3 \rightarrow s_2 x_2 (s_2 y_2 - s_1 y_2) \partial_4 (NE_4)$$

$$h_4 : P \times R \rightarrow L$$

$$\{x_2 \otimes y_2\}_4 \rightarrow xy$$

$$h_5 : Q \times R \rightarrow M$$

$$\{x_2 \otimes y_2\}_5 \rightarrow xy$$

$$h_6 : P \times Q \rightarrow N$$

$$\{x_2 \otimes y_2\}_6 \rightarrow xy$$

$$h_7 : L \times M \rightarrow K$$

$$\{x_2 \otimes y_2\}_7 \rightarrow h_2(v_P x, y) = h_2(x, y)$$

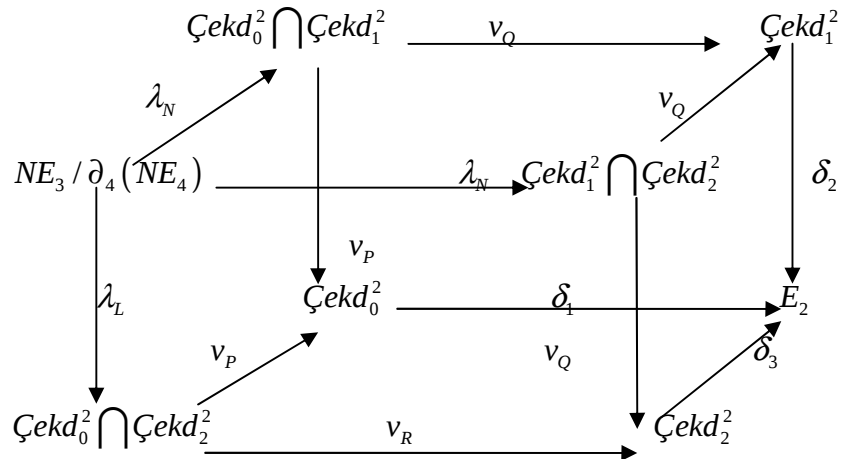
$$h_8 : N \times L \rightarrow K$$

$$\{x_2 \otimes y_2\}_8 \rightarrow h_3(x, v_R y) = h_3(x, y)$$

$$h_9 : N \times M \rightarrow K$$

$$\{x_2 \otimes y_2\}_9 \rightarrow h_3(x, v_r y) = h_3(x, y)$$

şeklinde tanımlı h -dönüşümleri ile birlikte $(\mu_3(E))$ diyagramı bir profinite çaprazlanmış 3-küptür.



h_3 , h - dönüşümü ile birlikte $\mu = \delta_3$, $\mu' = \delta_2 \circ v_Q$, $\partial_3' = \lambda_N$ ve $\partial_3 = v_R \circ \lambda_L$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc}
 NE_3 / \partial_4 (NE_4) & \xrightarrow{\partial_3} & \mathcal{C}ekd_2^2 \\
 \downarrow \partial_3' & & \downarrow \mu \\
 \mathcal{C}ekd_0^2 \cap \mathcal{C}ekd_1^2 & \xrightarrow{\mu'} & E_2
 \end{array}$$

diagramının profinite çaprazlanmış kare olduğunu gösterelim. E_2 nin $NE_3 / \partial_4 (NE_4)$ üzerine etkisi olduğundan R nin N ve K üzerine μ , N nin R ve K üzerine μ' vasıtasıyla sürekli etkisi vardır.

Profinite çaprazlanmış kare şartlarını sağladığı ayrıntılı olarak Kuzpınarı tarafından [15] da değişmeli cebirler için yapılmıştı. Burada profinite cebirlere uyarlıyacağız.

Sırasıyla h_4 , h_5 , h_6 , h_7 , h_8 ve h_9 , h -dönüşümleri ile birlikte

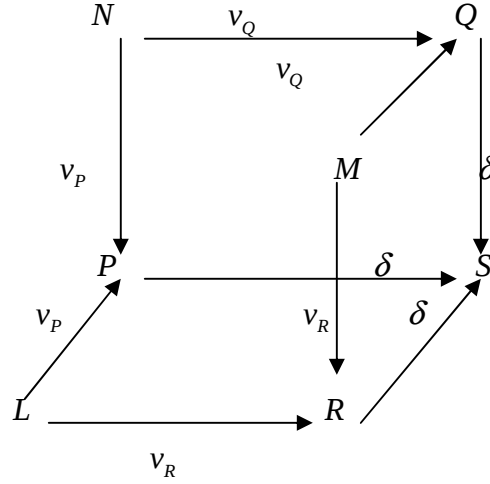
$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}ekd_0^2 \cap \mathcal{C}ekd_2^2 & \longrightarrow & \mathcal{C}ekd_0^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}ekd_2^2 & \longrightarrow & E_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}ekd_1^2 \cap \mathcal{C}ekd_2^2 & \longrightarrow & \mathcal{C}ekd_1^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}ekd_2^2 & \longrightarrow & E_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}ekd_0^2 \cap \mathcal{C}ekd_2^2 & \longrightarrow & \mathcal{C}ekd_0^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}ekd_1^2 & \longrightarrow & E_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 NE_3 / \partial_4 (NE_4) & \longrightarrow & \mathcal{C}ekd_0^2 \cap \mathcal{C}ekd_2^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}ekd_0^2 \cap \mathcal{C}ekd_1^2 & \longrightarrow & \mathcal{C}ekd_2^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 NE_3 / \partial_4 (NE_4) & \longrightarrow & \mathcal{C}ekd_0^2 \cap \mathcal{C}ekd_1^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}ekd_0^2 \cap \mathcal{C}ekd_2^2 & \longrightarrow & \mathcal{C}ekd_0^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 NE_3 / \partial_4 (NE_4) & \longrightarrow & \mathcal{C}ekd_0^2 \cap \mathcal{C}ekd_1^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}ekd_1^2 \cap \mathcal{C}ekd_2^2 & \longrightarrow & \mathcal{C}ekd_1^2
 \end{array}$$

diagramlarının birer profinite çaprazlanmış kare olduğu ve diğer profinite 3- çaprazlanmış küp şartları değişme işleminin özellikleri kullanılarak elde edilir. Tanımlanan h - dönüşümleri ve etkilerle verilen küp diagramı bir profinite 3-çaprazlanmış küptür.

Tanım 2.1.5 L, M, N, Q, P, R ve S birer profinite cebir olmak üzere herbir yüzeyi profinite çaprazlanmış kare (profinite çaprazlanmış 2-küp) olan



diagramı verilsin. Herbir profinite cebirin birbiri üzerine sürekli etkisi S vasıtasıyla olsun.

Şimdi

$$\lambda_L : T \rightarrow L, \lambda_M : T \rightarrow M, \lambda_N : T \rightarrow N$$

dönüşümleri ile birlikte yukarıda verilen diagramı evrensellik özelliğine sahip bir profinite çaprazlanmış 3-küp yapacak şekilde bir T profinite cebiri elde edelim (Yani, verilen diagramı bir profinite çaprazlanmış 3-küp yapacak şekilde bir T' profinite cebirine ve $\lambda_L, \lambda_M, \lambda_N$ sürekli dönüşümlerine karşın bir tek

$$T \rightarrow T'$$

profinite çaprazlanmış 3-küp dönüşümü olacak şekilde bir T bulacağız).

$$(q, l) \in Q \times L, (p, m) \in P \times M, (n, r) \in N \times R \text{ olmak üzere } T_0,$$

$$q \otimes_1 l, q \otimes_2 m, n \otimes_3 r$$

elemanları tarafından üretilen ve aşağıdaki şartları sağlayan bir cebir olsun:

(Aşağıda verilen bağıntılardaki etkilerin hepsinin S vasıtasıyla olduğunu kabul edelim ve $1 \leq i \leq 3$ için $\{ {}^s x \otimes_i {}^s y \}$ yerine $\{ x \otimes_i y \}$ yazalım)

Her $l, l' \in L, m, m' \in M, n, n' \in N, p, p' \in P, q, q' \in Q, r, r' \in R$ için olacak şekilde bir tek dönüşüm vardır. Böylece T ye diagramın kübik tensör çarpımı denir [14].

Aşağıdaki önermeyi Kuzpınarı [15] den profinite cebirlere uyarladık.

Önerme 2.1.3 $C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$ bir profinite 3- çaprazlanmış modül olsun.

$C_1 = \{0\}$ ise

$$\begin{array}{ccc} C_3 & \xrightarrow{\partial_3} & C_2 \\ \partial_3' \downarrow & & \downarrow I_d \\ C_2 & \xrightarrow{I_d} & C_2 \end{array}$$

değişmeli diagramı, C_1 nin C_1 üzerine sürekli etkisi değişmeli çarpımsal sürekli etki olmak üzere

$$\begin{aligned} \{\otimes\}_{(2)(1)}^3 : C_2 \times C_2 &\rightarrow C_3 \\ \{\otimes\}_{(0)(2)}^3 : C_2 \times C_2 &\rightarrow C_3 \\ \{\otimes\}_{(0)(1)}^3 : C_2 \times C_2 &\rightarrow C_3 \end{aligned}$$

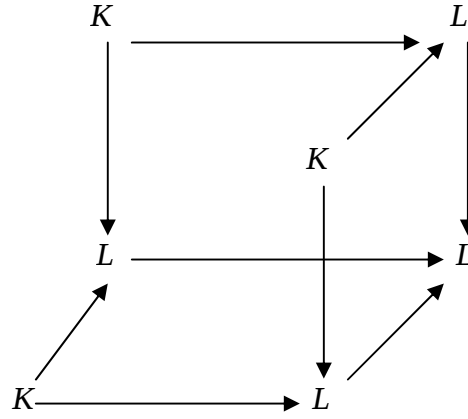
dönüşümlerinin herbiri ile bir profinite çaprazlanmış karedir.

İspat: (i) $\{\otimes\}_{(2)(1)}^3$ dönüşümü ile verilen diagramın bir profinite çaprazlanmış kare, $\{\otimes\}_{(0)(1)}^3$ dönüşümü ile birlikte verilen diagramın bir profinite çaprazlanmış kare olduğu Kuzpınarı [10] dan uyarlanabilir.

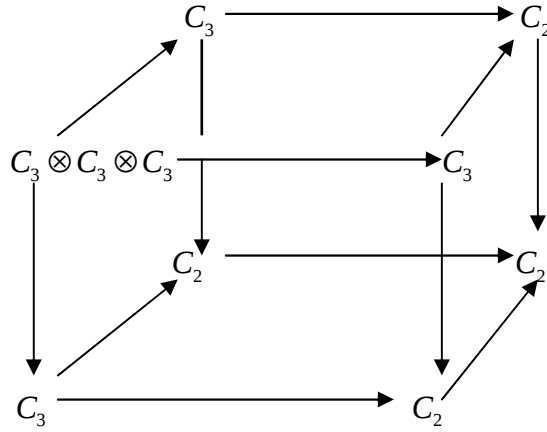
Tanımlanan evrensel profinite çaprazlanmış 3-küp, üçlü tensör çarpım ve profinite değişmeli cebirler üzerinde profinite çaprazlanmış 3-küp tanımları kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Kuzpınarı [15] çaprazlanmış 3-küpü elde etmişti. Biz bunu profinite cebirlere uyarlayacağız.

Sonuç 2.1.1 Yukarıda tanımlanan $\{\otimes\}_{(0)(1)}^3, \{\otimes\}_{(2)(1)}^3, \{\otimes\}_{(0)(2)}^3$ dönüşümleri yardımıyla elde edilen profinite çaprazlanmış kareler kullanılarak



şeklinde bir evrensel profinite çaprazlanmış 3–küp elde edilir. $K \otimes K \otimes K$ üçlü tesör çarpımı yardımıyla da



profinite çaprazlanmış 3–küp elde edilir.

3. PROFİNİTE SİMLİSEL CEBİRLER VE PROFİNİTE 3-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

3.1. Giriş

Moore kompleksinin boyutu 1 olan simplisel cebir ile çaprazlanmış modül kategorisi birbirine denktir. Arvasi [20] de 2- çaprazlanmış modüllerle Moore kompleksinin boyutu 2 olan simplisel cebirler arasındaki kategorisel denkliliği göstermiştir.

Kuzpınarı [15] de ilk olarak Arvasi'nin [20] de kullandığı metot yardımıyla Peiffer üreteçlerini kullanarak Moore kompleksinin boyutu 3 olan simplisel cebirler kategorisinden 3- çaprazlanmış modüller kategorisine bir fonktor tanımlamış. Daha sonra Conduché'nin [3] de kullandığı metot yardımıyla tanımlanan bu fonktorun bir sol ekini tanımlayarak bu iki kategori arasındaki doğal denkliliği göstermiştir.

Biz bu bölümde Kuzpınarı'nın [15] da gösterdiği denkliliği profinite cebirlere uyarlıyacağız.

3.2. $\mathfrak{Pro} \text{SimpCbr}$ ve $\mathfrak{Pro} \mathfrak{X}_3 \mathfrak{Mod}$ Kategorilerinin Denkliliği

Aşağıdaki teoremin ve ispatın orijinali değişmeli cebirler için Kuzpınarı [15] de verilmişti. Biz bunu profinite cebirlere uyarladık.

Teorem 3.1.1 E bir profinite simplisel cebir ve Moore kompleksi NE olsun. Bu durumda

$$NE_3 / \partial_4 (NE_4 \cap D_4) \xrightarrow{\overline{\partial_3}} NE_2 \xrightarrow{\partial_2} NE_1 \xrightarrow{\partial_1} NE_0$$

cebirsal yapısı aşağıdaki biçimde tanımlanan sürekli Peiffer dönüşümleri ile birlikte bir profinite 3-çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

$$\begin{aligned}
\{\otimes\}_{(1,0)(1)}^2 : NE_1 \otimes NE_1 &\rightarrow NE_2 \\
\{x_1 \otimes y_1\}_{(1)(0)} &= \overline{(s_2 s_0 x_1 - s_1 s_0 x_1)(s_1 y_2 - s_2 y_2)} \\
\{\otimes\}_{(1,0)(2)}^3 : NE_1 \otimes NE_2 &\rightarrow NE_3 / \partial_4 (NE_4 \cap D_4) \\
\{x_1 \otimes y_2\}_{(1,0)(2)} &= \overline{(s_2 s_0 x_1 - s_1 s_0 x_1) s_2 y_2} \\
\{\otimes\}_{(2,0)(1)}^3 : NE_1 \otimes NE_2 &\rightarrow NE_3 / \partial_4 (NE_4 \cap D_4) C_3 \\
\{x_1 \otimes y_2\}_{(2,0)(1)} &= \overline{(s_2 s_1 x_1 - s_2 s_0 x_1)(s_1 y_2 - s_2 y_2)} \\
\{\otimes\}_{(2,1)(0)}^3 : NE_1 \otimes NE_2 &\rightarrow C_3 NE_3 / \partial_4 (NE_4 \cap D_4) \\
\{x_1 \otimes y_2\}_{(2,0)(1)} &= \overline{s_2 s_1 x_1 (s_1 y_2 - s_0 y_2 - s_2 y_2)} \\
\{\otimes\}_{(0)(1)}^3 : NE_2 \otimes NE_2 &\rightarrow NE_3 / \partial_4 (NE_4 \cap D_4) \\
\{x_2 \otimes y_2\}_{(0)(1)} &= \overline{(s_1 x_2 - s_2 x_2) s_1 y_2 + s_2 (x_2 y_2)} \\
\{\otimes\}_{(2)(0)}^3 : NE_2 \otimes NE_2 &\rightarrow NE_3 / \partial_4 (NE_4 \cap D_4) \\
\{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(0)} &= \overline{-s_2 x_2 s_0 y_2} \\
\{\otimes\}_{(2)(1)}^3 : NE_2 \otimes NE_2 &\rightarrow NE_3 / \partial_4 (NE_4 \cap D_4) \\
\{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(1)} &= \overline{-s_2 x_2 (s_2 y_2 - s_1 y_2)}
\end{aligned}$$

sağ taraftaki elemanlar NE_3 içerisindeki bir elemanın

$$NE_3 / \partial_4 (NE_4 \cap D_4)$$

içindeki eşkümesini göstermektedir.

İspat: Buradaki

$$\overline{\partial_3} : NE_3 / \partial_4 (NE_4 \cap D_4) \rightarrow NE_2$$

yapısının bir profinite çaprazlanmış modül olduğu 1. bölümdeki tanımlamalar kısmında verilmişti.

Aşağıdaki denklik, teorem ve ispatın orijinali Kuzpınarı [15] de değişmeli cebirler için verilmişti. Biz bunu profinite cebirlere uyarladık.

Teorem 3.1.2 Profinite 3- çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan profinite simplisel cebirler kategorisine doğal denktir.

İspat: E , Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan bir profinite simplisel cebir olsun. Bir önceki önerme gereğince

$$NE_3 \xrightarrow{\partial_3} NE_2 \xrightarrow{\partial_2} NE_1 \xrightarrow{\partial_1} NE_0$$

yapısı bir profinite 3- çaprazlanmış modüldür. (Moore kompleksin boyu 3 olduğu için $NE_4 \cap D_4 = 0$ buradan da $\partial_4(NE_4 \cap D_4) = 0$ olur, $NE_3 / \partial_4(NE_4 \cap D_4)$ yerine NE_3 alınmıştır).
Sonuç olarak

$$\mathfrak{I}_3 : \mathfrak{Pro} \mathfrak{SimpCbr}_{\leq 3} \rightarrow \mathfrak{Pro} \mathfrak{X}_3 \mathfrak{Mod}$$

şeklinde Moore kompleksinin boyu 3 olan profinite simplisel cebirler kategorisinden profinite çaprazlanmış modüller kategorisine bir fonktor elde edilir. Tersine bir

$$K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

profinite 3- çaprazlanmış modülü verilsin. $H_0 = N$ olsun. N nin M üzerine etkisi yardımıyla $H_1 = M \rtimes N$ yarı-direkt çarpımını elde edelim. $m, n \in M \rtimes N$ olmak üzere dejenere ve yüzey operatörlerini

$$\begin{aligned} d_0 : M \rtimes N &\rightarrow N \\ (m, n) &\mapsto n \\ d_1 : M \rtimes N &\rightarrow N \\ (m, n) &\mapsto (\partial_1(m))n \\ s_0 : N &\rightarrow M \rtimes N \\ n &\mapsto (0, n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. M nin ve N nin L üzerine etkilerini kullanarak

$$H_2 = (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N)$$

yarı-direkt çarpımını ele alalım. $l \in L, m, m' \in M, n \in N$ olmak üzere dejenere ve yüzey operatörlerini

$$\begin{aligned}
d_0 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) &\rightarrow (M \rtimes N) \\
(l, m, m', n) &\mapsto (m', n) \\
d_1 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) &\rightarrow (M \rtimes N) \\
(l, m, m', n) &\mapsto (m + m', n) \\
d_2 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) &\rightarrow (M \rtimes N) \\
(l, m, m', n) &\mapsto (\partial_2(l) + m, \partial_1(m') + n) \\
s_0 : (M \rtimes N) &\rightarrow (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
(m', n) &\mapsto (0, m', 0, n)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. $l \in L$ nin $k \in K$ üzerine

$$l.k = \partial_2 l.k - \{\partial_3 k \otimes l\}_{(2)(1)}^3$$

şeklinde tanımlı bir $l.k$ etkisi vardır. Bu etki yardımıyla $K \rtimes L$ yarı-direkt çarpımını elde ederiz. $(l, m) \in L \rtimes M$ nin $(k, l) \in K \rtimes L$ üzerine etkisi

$$\begin{aligned}
{}^{(0,m)}(k, l') &= ({}^m({}^0 k), ({}^0 l')) \\
&= ({}^m(k), {}^m(l'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(l,0)}(k, l') &= ({}^0({}^l k), {}^0({}^l l')) \\
&= ({}^l k, {}^l l') \\
&= (\partial_2^l k + \{l \otimes \partial_3 k\}_{(2)(1)}, l - l')
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ayrı ayrı $(0, m)$ ve $(l, 0)$ elemanlarının etkilerini vermemizdeki sebep

$$\begin{aligned}
(0, m) (l, 0) &= (l + {}^0 0, 0 + m) \\
&= (l, m)
\end{aligned}$$

ve etki tanımından

$${}^{((l,0)(0,m))}(k, l) = {}^{(l,0)}({}^{(0,m)}(k, l))$$

olmasıdır. Böylece tanımlamalar yardımıyla $H_3 = (K \rtimes L)(L \rtimes M)(M \rtimes N)$ yarı-direkt çarpımı tanımlanmış olur. Dejenere ve yüzey operatörlerini

$$\begin{aligned}
d_0 : (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) &\rightarrow (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
(k, l, l', m, m', n) &\mapsto (l, m, m', n) \\
d_1 : (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) &\rightarrow (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
(k, l, l', m, m', n) &\mapsto (l + l', m, m', n) \\
d_2 : (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) &\rightarrow (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
(k, l, l', m, m', n) &\mapsto (\partial_3 k + l, \partial_2 l' + m, m', n) \\
d_3 : (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) &\rightarrow (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
(k, l, l', m, m', n) &\mapsto (l, \partial_2 l' + m, m', n) \\
\\
s_0 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) &\rightarrow (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
(l, m, m', n) &\mapsto (0, 0, l, m, m', n) \\
s_1 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) &\rightarrow (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
(l, m, m', n) &\mapsto (0, l, l, m, m', n) \\
s_2 : (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) &\rightarrow (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
(l, m, m', n) &\mapsto (0, l, l, m, m', n)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Sonuç olarak $H = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ şeklinde bir profinite 3- kısıtlanmış simplisel cebir elde edilir. profinite 3- kısıtlanmış simplisel cebirler kategorisinden profinite simplisel cebirler kategorisine cost_3 3- koiskelet fonktoru ve ayrıca $\mathfrak{ProSimp}_{\leq 3}$ kategorisinden $\mathfrak{Tr}_3\mathfrak{ProSimp}$ kategorisine bir kısıtlama fonktoru vardır. Bu iki fonkturun bileşkesi yardımıyla $\mathfrak{Pro}\mathfrak{XMod}$ kategorisinden $\mathfrak{ProSimp}_{\leq 3}$ kategorisine $\mathfrak{Pro}\mathfrak{Tr}_3$ fonktoru vardır. Buradan aşağıdaki profinite değişmeli diagram elde edilir.

$$\begin{array}{ccc}
& \mathfrak{Tr}_3\mathfrak{ProSimp} & \\
\text{\scriptsize tr}_3 \nearrow & & \nwarrow \\
\mathfrak{ProSimp}_{\leq 3} & \xrightleftharpoons[\mathfrak{I}_3]{\mathfrak{I}_3} & \mathfrak{Tr}_3\mathfrak{ProSimp}
\end{array}$$

Böylece $\mathfrak{Pro}\mathfrak{XMod}$ kategorisi ile $\mathfrak{ProSimp}_{\leq 3}$ kategorisinin doğal denkliği gösterilmiş olur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] André, M., 1970, Homologie des Algèbres Commutatives. *Springer-Verlag* 206.
- [2] Whitehead, J. H. C., 1949, Combinatorial Homotopy. *Bull. Amer. Math. Soc.* 55, 453-496.
- [3] Conduche, D., 1984, Modules Croisés Généralisés de Longueur 2. *J. P. A. A.* 34, 155-178.
- [4] Loday, J. L., 1982, Spaces with Finitely Many Non-trivial Homotopy Groups. *J. P. A. A.* 24, 179-202.
- [5] Alp, M., 1997, Crossed Modules, Cat^1 —Groups .*Ph. D. Thesis*, University of Wales.
- [6] Whitehead, J. H. C., 1950, A Certain Exact Sequence. *Annals. of Math.* 52, 51-110.
- [7] Ellis, G. J. and Steiner, R., 1987, Higher Dimensional Crossed Modules and the Homotopy Groups of $(n+1)$ -ads. *J. P. A. A.* 46, 117-136.
- [8] Porter, T., 1993, n -Types of Simplicial Groups and Crossed n -Cubes. *Topology* 32, 5-24.
- [9] Arvasi Z. and Porter T., 1997, Higher dimensional peiffer elements in simplicial commutative algebras. *Theory and applications of categories.* 3, 1-23.
- [10] Brummer, A., 1996, Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations, *J. Alg.*, 4, 442-470.
- [11] Gildenhuys, D. And Mackay, E., 1974, Triple cohomology and the Galois cohomology of profinite groups, *Comm. In. Alg.* 1(6), 459-473.
- [12] Wilson, S.W., 1988, Profinite groups, Clarendon Press, OXFORD.
- [13] Ribes, L. and Zalesski, P., 2000, Profinite groups, Springer-Verlag, BERLİN.
- [14] Korkes, F., J. And Porter, T., Profinite algebraic hototopy, In preparation.
- [15] Kuzpınarı, T. S., 2005, Değişmeli cebirler için 3-tipten cebirsel modeller, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi.
- [16] Porter, T., 1986, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles. *J. Algebra* 99, 458-465.
- [17] Carrasco, P. and Cegarra, A. M., 1991, Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types. *J. P. A. A.* 75, 195-235.
- [18] Carrasco, P., 1987, Complejos Hiper cruzados, Cohomologia y Extensiones. *Ph. D. Thesis*, Universidad de Granada.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devamı)

- [19] Akça, İ. İ., 2002, Bir pro-C simplisel objenin moore kompleksinin uygulamaları, Doktora tezi, Osmangazi Üniversitesi.
- [20] Arvasi, Z., 1994, Applications in Commutative Algebras of the Moore Complex of a Simplicial Algebra. *Ph. D. Thesis*, University of Wales.
- [21] Curtis, E. B., 1971, Simplicial Homotopy Theory. *Adv. In Math.* 6, 107-209.
- [22] Duskin, J., 1975, Simplicial Methods and the Interpretation of Triple Cohomology. *Memoir A. M. S.* Vol. 3 163.
- [23] May, J. P., 1967, Simplicial Objects in Algebraic Topology. *Van Nostrand, Math. Studies* 11.
- [24] Morgenegg, C., 1979, Sur les Invariants d'un Anneau Local A Corps Résiduel de Caractéristique 2. *Ph.D. Thesis*, Lausanne EPFL.
- [25] Artin, M. and Mazur B., 1968, Etale Homotopy. *Springer Lecture Notes in Math.* 100.
- [26] Mac Lane, S., Bxtensionsand Obstructions for Rings, Iliinois, J. Math. 2, (1958), 316-345.
- [27] Lavendhomme, R. and Lucas, Th., On Modules and Crossed Modules Journal of Algebra, 179, (1996), 936-963.
- [28] Arvasi, Z., 1998, Crossed Squares and 2-Crossed Modules of Commutative Algebras. *Theory and Applications of Categories*, 3, 160-181.
- [29] Ellis, G. J., 1984, Crossed modules and their higler dimensional analogues, Ph. D. Thesis, U.CN.W.
- [30] Ellis, G. J., 1988, Higher Dimensional Crossed Modules of Algebras *J. P. A. A.* 52, 277-282.